DU MÊME AUTEUR

LA PAROLE MALHEUREUSE. *De l'alchimie linguistique à la grammaire philosophique,* 1971.

WITTGENSTEIN : LA RIME ET LA RAISON, *Science, éthique et esthétique,* 1973.

LE MYTHE DE L'INTÉRIORITÉ, *Expérience, signification et langage privé chez Wittgenstein,* 1976/1987.

LE PHILOSOPHE CHEZ LES AUTOPHAGES, 1984.

RATIONALITÉ ET CYNISME, 1984.

LA FORCE DE LA RÈGLE. *Wittgenstein et l'invention de la nécessité,* 1987.

COLLECTION « CRITIQUE »

JACQUES BOUVERESSE

LE PAYS DES POSSIBLES

WITTGENSTEIN, LES MATHÉMATIQUES ET LE MONDE RÉEL

LES ÉDITIONS DE MINUIT

ISBN 2-7073-1181-2

« Pour appeler quelque chose possible, ce m'est assez qu'on en puisse former une notion, quand elle ne serait que dans l'entendement divin, qui est pour ainsi dire le pays des réalités possibles. Ainsi, en parlant des possibles, je me contente qu'on en puisse former des propositions véritables, comme l'on peut juger, par exemple, qu'un carré parfait n'implique point de contradiction, quand même il n'y aurait point de carré parfait au monde. »

G.W. Leibniz, *Lettre à Arnauld* (juin 1686)

« [Les postulats d'Euclide] ne sont à proprement parler rien d'autre que des axiomes qui énoncent qu'il y a des constructions — points, lignes, surfaces — constituées d'une certaine manière. C'est ainsi que la proposition qui demande que l'on trace une ligne droite d'un point quelconque à un autre dit qu'il y a, pour deux points pris de façon quelconque, une ligne droite qui les joint. Lorsque nous traçons une ligne, nous dirigeons notre attention sur elle, qui est à proprement parler déjà là. La possibilité objective de tracer une ligne est à proprement parler la même chose que l'existence objective de cette ligne. »

G. Frege, *Über die Zahlen des Herrn Schubert* (1899)

« Frege, qui était un grand penseur, a dit que, bien qu'il soit dit dans Euclide qu'une ligne droite *peut* être tracée entre deux points quelconques, en fait la ligne existe déjà, même si personne ne l'a tracée. L'idée est qu'il y a un univers de la géométrie dans lequel les entités géométriques existent. Ce que dans le monde ordinaire nous appellerions une possibilité est dans le monde géométrique une réalité. Dans le ciel euclidien, deux points sont déjà reliés l'un à l'autre. C'est une idée très importante : l'idée de la possibilité comme étant une espèce différente de réalité ; et nous pourrions l'appeler une ombre de la réalité. »

« Le professeur Hardy dit : "Le théorème de Goldbach est soit vrai, soit faux." — Nous disons simplement que la route n'a pas été construite jusqu'à présent. Pour le moment vous avez le droit de dire l'une ou l'autre chose ; vous êtes en droit de *postuler* qu'il est vrai ou qu'il est faux. — Si vous regardez la chose de cette façon, toute l'idée des mathématiques comme étant la physique des entités mathématiques s'effondre. Car quelle route vous construisez, cela n'est pas déterminé par la physique des entités mathématiques, mais par des considérations totalement différentes. »

L. Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cambridge (1939)

ABRÉVIATIONS UTILISÉES
POUR LES OUVRAGES DE WITTGENSTEIN

T : *Tractatus Logico-Philosophicus,* German text with a new edition of the translation by D.F. Pears and B.F. McGuinness, Routledge & Kegan Paul, Londres, 1971.
NB : *Notebooks 1914-1916,* B. Blackwell, Oxford, 1961.
WWK : *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis,* Shorthand notes recorded by F. Waismann, edited by B.F. McGuinness, B. Blackwell, Oxford, 1967.
WL 1930-1933 : « Wittgenstein's Lectures in 1930-33 », in G.E. Moore, *Philosophical Papers,* Allen & Unwin, Londres, 1959, p. 252-324.
WLC 1932-1935 : *Wittgenstein's Lectures, Cambridge,* 1932-1935, From the notes of Alice Ambrose and Margaret Macdonald, edited by Alice Ambrose, B. Blackwell, Oxford, 1979.
PB : *Philosophische Bemerkungen,* B. Blackwell, Oxford, 1964.
PG : *Philosophische Grammatik,* B. Blackwell, Oxford, 1969.
BlB et BrB : *The Blue and Brown Books,* B. Blackwell, Oxford, 1958.
BGM : *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik,* revidierte und erweiterte Ausgabe, Suhrkamp Verlag, Francfort, 1974.
Z : *Zettel,* B. Blackwell, Oxford, 1967.
WLFM : *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939,* From the Notes of R.G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies, edited by Cora Diamond, The Harvester Press, Hassocks, Sussex, 1976.
PU : *Philosophische Untersuchungen (Philosophical Investigations),* B. Blackwell, Oxford, 1953.
UG : *Über Gewissheit (On Certainty),* B. Blackwell, Oxford, 1969.
RPPl : *Remarks on the Philosophy of Psychology (Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie),* vol. I, B. Blackwell, Oxford, 1980.

INTRODUCTION

Ce livre est consacré, pour une part importante, à un examen des relations compliquées et conflictuelles que la philosophie des mathématiques de Wittgenstein a entretenues avec l'intuitionnisme. On dit souvent qu'une conférence donnée par Brouwer à Vienne en 1928 a contribué de façon décisive à réveiller l'intérêt de Wittgenstein pour la philosophie et à le persuader qu'il avait à nouveau des choses importantes à dire dans ce domaine. Hacker a émis l'hypothèse que, chez quelqu'un qui, comme Wittgenstein, avait été inspiré et influencé fortement par Schopenhauer, le volontarisme anti-rationaliste et anti-intellectualiste de Brouwer, sa conviction que les mathématiques, la science et le langage doivent être compris avant tout comme des productions et des manifestations du vouloir-vivre, et non de l'intellect humain, ont dû susciter une sympathie et une attirance spontanées : « L'idée fondamentale que ni le langage ni les mathématiques ni la logique ne sont autre chose que de libres créations de la volonté qui impose un ordre à la réalité peut bien être apparue comme une conception profondément libératrice. L'idée que les mathématiques et la logique ne sont pas justifiées par quoi que ce soit, qu'elles ne sont pas des reflets de la structure *a priori* de la réalité, mais plutôt que l'apparence d'une telle structure *a priori* n'est rien d'autre qu'une ombre projetée sur le monde par nos formes de représentation ou nos "réflexions mathématiques" [*mathematische Betrachtungen*] volontairement créées est une conception philosophique grosse de possibilités de développement [1]. »

1. P.M.S. Hacker, *Insight and Illusion,* Wittgenstein on Philosophy and the Metaphysics of Experience, The Clarendon Press, Oxford, 1972, p. 102.

La supposition de Hacker a incontestablement une certaine plausibilité intrinsèque. Le changement décisif qui est intervenu au début des années trente dans les idées de Wittgenstein sur le langage et la philosophie pourrait avoir été déterminé en partie par la conception, diamétralement opposée à celle de la tradition de pensée à laquelle appartient encore le *Tractatus,* que Brouwer développe dans la conférence en question. Mais, paradoxalement, ce qui est le moins clair est probablement la manière dont l'influence de Brouwer sur Wittgenstein a pu s'exercer dans le domaine de la philosophie des mathématiques elle-même. Depuis les travaux de Dummett, il est devenu habituel de considérer que Wittgenstein a abandonné, à l'époque considérée, une conception réaliste de la signfication d'une proposition, construite sur l'idée de conditions de vérité qui sont réalisées ou ne le sont pas d'une façon qui pourrait, dans certains cas, transcender définitivement toute possibilité de vérification ou de réfutation, pour une conception anti-réaliste, dans laquelle la notion de conditions de vérité ainsi comprise est remplacée par celle de conditions d'assertabilité justifiée. Et il est particulièrement tentant de supposer que le passage du réalisme à l'anti-réalisme s'est effectué d'abord à propos de la proposition mathématique elle-même et en grande partie sous l'influence du constructivisme de Brouwer.

Shanker a protesté violemment contre cette interprétation, qu'il considère comme tout à fait absurde : « Le point crucial de l'attaque de Wittgenstein contre l'intuitionnisme a été qu'il permet à des considérations "épistémologiques" bâtardes — qui se manifestent dans des confusions psychologistes — d'intervenir dans son examen de la grammaire logique des propositions mathématiques. L'idée à la mode que la conférence donnée par Brouwer en 1928 pourrait avoir été le catalyseur pour une conversion radicale du réalisme du *Tractatus* à un anti-réalisme d'inspiration intuitionniste est une erreur inspirée par le cadre de référence épistémologique auquel Wittgenstein était en train de lutter pour échapper. Ce qui a intéressé Wittgenstein dans l'intuitionnisme était la lumière nouvelle qui avait été jetée sur la grammaire des propositions mathématiques. Nous ne pouvons, cependant, espérer comprendre la signification complète de ses remarques sur ce sujet avant de les avoir

placées dans leur contexte approprié — non épistémologique et *a fortiori* anti-sceptique[2]. »

Il est tout à fait certain qu'il n'y a jamais eu, pour Wittgenstein, un problème « épistémologique » du fondement des mathématiques. Il ne s'est intéressé en aucune façon au problème des fondements considéré comme un problème d'épistémologie (ou, si l'on préfère, de théorie de la connaissance), et donc pas davantage à l'intuitionnisme, en tant que réponse particulière à ce genre de problème. Les considérations grammaticales sur la nature de la proposition mathématique et sur celle de choses comme la croyance, la connaissance, la certitude et la justification en mathématiques n'ont nullement pour but, chez lui, de répondre à des questions et à des objections de nature épistémologique, mais plutôt de montrer que, sous la forme sous laquelle elles se présentent généralement, ces questions et ces objections reposent sur des incompréhensions grammaticales plus fondamentales, qui font que l'on peut, dans le meilleur des cas, espérer les faire disparaître, mais non, à proprement parler, les résoudre.

La réponse que l'intuitionnisme donne à la question du fondement consiste à faire reposer toutes les mathématiques sur ce que Brouwer appelle « une unique intuition apriorique de base, qui peut être appelée *invariance dans le changement* aussi bien qu'*unité dans la multitude*[3] ». Dire que Wittgenstein n'a eu aucune espèce de sympathie pour l'intuition des intuitionnistes n'a certainement rien d'une exagération. Dans ses *Leçons sur les fondements des mathématiques* de 1939, il s'exprime sur ce point de façon particulièrement radicale et définitive :

> « L'intuitionnisme en arrive à dire que vous pouvez fabriquer une nouvelle règle à chaque point. Il requiert que nous ayons une intuition à chaque étape dans un calcul, à chaque application d'une règle ; car comment pouvons-nous dire de quelle manière une règle qui a été utilisée pour quatorze étapes s'applique à la quinzième ? — Et ils se mettent à dire que la suite des nombres cardinaux est connue de nous par une intuition fondamentale — c'est-à-dire, que nous savons à chaque étape ce

2. S.G. Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics,* Croom Helm, Londres et Sydney, 1987, p. 36.

3. L.E.J. Brouwer, *Collected Works,* edited by A. Heyting, vol. 1, Philosophy and Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975, p. 97.

> que l'opération consistant à ajouter 1 donnera. Nous pourrions aussi bien dire que nous avons besoin, non pas d'une intuition à chaque étape, mais d'une *décision.* — En réalité, il n'y a ni l'une ni l'autre. Vous ne prenez pas une décision : vous faites simplement une certaine chose. Ce qui est en question est une certaine pratique.
>
> L'intuitionnisme, c'est tout de la blague — intégralement. A moins qu'il ne veuille dire une inspiration » (WLFM, p. 237).

Il est significatif que Wittgenstein interprète ici ce qui est supposé être une question ayant trait à l'origine et au fondement de la connaissance mathématique comme une question concernant la manière dont nous pouvons appliquer à un moment donné une règle mathématique et rejette comme complètement illusoire la réponse supposée. S'il existait, à propos de ce qu'on appelle « suivre une règle », un problème sceptique qui exige une réponse, au sens auquel on l'entend habituellement, l'intuition ne constituerait certainement pas la réponse. L'intuition donne l'impression de justifier l'absence totale de doute et d'hésitation avec laquelle j'agis, mais ne fait, en réalité, que donner un nom à cette absence. Ceux qui parlent d'« intuition » sont donc en un certain sens tout près de la réponse, qui est qu'il n'y a pas de réponse à chercher, mais ne la reconnaissent pas comme étant la réponse.

On dit quelquefois que la philosophie des mathématiques du deuxième Wittgenstein est une sorte d'intuitionnisme dépsychologisé ou désubjectivisé. De façon plus générale, l'anti-réalisme est souvent présenté comme une reformulation des principes et des exigences de la conception intuitionniste sur le terrain et dans le vocabulaire de la théorie de la signification. La difficulté, en ce qui concerne Wittgenstein, est que l'intuition est loin d'être la seule chose qu'il rejette dans l'intuitionnisme. Il n'est apparemment pas davantage disposé à accepter les restrictions et les révisions que l'intuitionnisme, dépsychologisé ou non, prétend imposer aux mathématiques. Et il est pour le moins paradoxal de soutenir que Wittgenstein avait, à l'époque du *Tractatus,* une conception réaliste de la proposition mathématique, qui a été remplacée ensuite par une conception constructiviste.

Si l'on entend par conception réaliste de la proposition mathématique l'idée que les propositions mathématiques décrivent des faits qui sont réalisés ou non indépendamment d'elles et de nos activités mathématiques, ce n'est certainement pas le genre de conception que l'on pourrait attribuer au Wittgenstein du *Tractatus,* puisque, pour lui, la proposition mathématique n'exprime pas de pensée et ne décrit aucun fait d'aucune sorte. D'autre part, il ne serait pas difficile de retrouver dans le *Tractatus* lui-même des éléments qui vont tout à fait dans le sens du constructivisme ; et il y aurait de bonnes raisons de considérer que la philosophie des mathématiques que Wittgenstein y expose est, par certains côtés, plus proche de celle de Poincaré que de celle de Frege ou de Russell. Enfin — et ce n'est pas le point le moins important —, le réalisme platonicien et l'anti-réalisme intuitionniste sont entièrement d'accord pour admettre que les propositions mathématiques sont rendues vraies ou fausses par quelque chose qu'elles décrivent. Le désaccord porte essentiellement sur la nature de la réalité à laquelle elles renvoient : pour le premier, elle est constituée d'objets qui préexistent dans un univers mathématique, pour le deuxième, de constructions mentales qui sont notre œuvre. Si l'on accepte le point de vue de Dummett, on dira que ce désaccord n'est, en réalité, que l'expression plus ou moins métaphorique d'une divergence préalable et plus fondamentale sur le genre de signification dont les propositions mathématiques sont supposées être pourvues. Mais le point important est que les propositions mathématiques ont une signification qui est tout à fait comparable à celle des autres propositions déclaratives et sont, comme elles, susceptibles de constituer des vérités, au sens propre du terme. Or Wittgenstein ne considère pas que la vérité nécessaire soit, à proprement parler, une espèce de la vérité tout court ; et il attribue aux propositions mathématiques le statut de règles de grammaire, qui ne sont, en toute rigueur, ni vraies ni fausses et donc pas non plus susceptibles d'être vérifiées ou réfutées, au sens auquel peut l'être une proposition descriptive ordinaire. On ne voit par conséquent pas très bien comment pourrait naître à propos de propositions de ce genre une controverse entre le réalisme et le vérificationnisme, qui porte essentiellement sur la question de savoir si, pour une catégorie donnée de propositions (authentiques), *vrai* implique (ou signifie la même chose que) *vérifiable* (en principe).

Dummett oppose avec raison le point de vue de l'intuitionnisme et du platonisme à une conception holiste, qui refuse de considérer le langage des mathématiques indépendamment du reste du langage et qui tend à se confondre, pour finir, avec le formalisme [4]. Selon cette conception, les propositions mathématiques n'ont pas de vérité à elles, distincte de leur simple dérivabilité à partir de règles acceptées, et en référence à laquelle nous pourrions exiger que les règles de démonstration aient la propriété de conserver la vérité. Elles ne possèdent pas de contenu propositionnel proprement dit et ne peuvent être, en toute rigueur, assertées ou niées ; elles constituent simplement les règles d'un jeu que nous pouvons jouer en principe comme nous le voulons, la seule obligation que nous ayons à respecter étant la consistance. Et, lorsque les règles sont utilisées pour dériver des conséquences à l'intérieur d'une théorie empirique, la théorie se comporte à l'égard de l'expérience comme un tout, sans que la question de la justification de ces dérivations, prises en elles-mêmes, puisse réellement être posée.

Une conception formaliste de cette sorte, qui refuse d'accorder aux formules mathématiques un sens propositionnel authentique, tend également à mettre la pratique mathématique courante à l'abri de toute critique et ne peut manquer d'être rejetée à la fois par les intuitionnistes et les platoniciens, qui considèrent que les mathématiques sont bien ce qu'elles semblent être, à savoir « un secteur de la recherche de la vérité » (*ibid.*, p. 367). Or, si la philosophie des mathématiques de Wittgenstein reconnaît pour sa part aux propositions mathématiques une position tout à fait à part, celle de règles qui ont été exemptées de toute responsabilité devant l'expérience, l'autonomie qu'elle leur attribue n'est précisément pas du tout celle que pourrait revendiquer une classe particulière de propositions vraies par rapport à d'autres propositions vraies. Elle est plutôt du type de celle d'un jeu dont nous choisissons plus ou moins librement les règles (en tenant compte des applications que nous avons en vue). Les propositions mathématiques sont des instruments de langage qui jouissent d'un statut tout à fait particulier ; mais ce ne sont pas des *propositions* d'une espèce particulière. Le propre de la conception anti-holiste du langage, qui est commune au platonisme et à l'intuitionnisme, est d'exiger que les règles d'inférence soient susceptibles d'être

4. Cf. M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, The Clarendon Press, Oxford, 1977, p. 366-370.

discutées et justifiées dans les termes d'une notion sémantique de conséquence logique. Mais une conception comme celle de Wittgenstein ne semble disposer d'aucune notion proprement sémantique de la vérité d'un énoncé mathématique, qui pourrait être distinguée clairement de la simple démontrabilité dans un système. Et la thèse de l'antériorité de la logique par rapport à la vérité empêche apparemment de poser la question de la légitimité des règles de déduction en utilisant une notion de vérité et de préservation de la vérité extérieure au système et indépendante de lui. C'est, du reste, en grande partie l'espèce d'interdit qui pèse, chez Wittgenstein, sur les notions et les considérations métasystématiques de type sémantique qui explique, aux yeux de certains commentateurs, l'embarras et la maladresse, régulièrement soulignés et déplorés (mais rarement analysés de façon sérieuse), de ses remarques sur le théorème de Gödel.

Ce qui est clair, en tout cas, est que, sur ce point, il faut choisir. Tout ce qui chez Wittgenstein va dans le sens d'une conception holiste du genre de celle qui est décrite par Dummett interdit en même temps d'utiliser ses remarques comme un plaidoyer en faveur d'une conception anti-réaliste de la proposition mathématique. Et, inversement, tout ce qui semble plaider en faveur de la conception anti-réaliste risque de se heurter au fait que les propositions mathématiques, telles que les conçoit Wittgenstein, ont une signification et un rôle beaucoup trop différents de ceux des propositions ordinaires pour pouvoir constituer le point de départ et le domaine d'application privilégié d'une confrontation entre une conception réaliste et une conception anti-réaliste de la signification des propositions en général. Si le propre d'une proposition mathématique est, comme le soutient Wittgenstein, d'effectuer une détermination de sens, par opposition à une utilisation de sens, et si reconnaître une proposition mathématique comme vraie consiste, en réalité, à décider d'introduire une nouvelle règle pour l'usage des concepts qui y sont impliqués, il est clair que la question de savoir si la signification que nous avons conférée à nos propositions mathématiques doit être analysée en termes de conditions de vérité platoniciennes ou de conditions de vérifiabilité intuitionnistes repose sur une erreur de catégorie.

Il est vrai que, pour Wittgenstein comme pour les intuitionnistes, comprendre une proposition mathématique veut dire savoir dans quel cas on serait justifié à l'asserter, c'est-à-dire dans quel cas elle serait démontrée. Mais le résultat de la démonstration ne peut être décrit comme ayant consisté dans la reconnaissance d'une vérité nouvelle, que la vérité dont il est question soit ou non considérée comme pouvant éventuellement transcender toute possibilité de reconnaissance. S'il n'y a pas d'*ignorabimus* en mathématiques, ce n'est pas parce que nous pouvons être certains de réussir un jour ou l'autre à démontrer ou à réfuter n'importe quelle proposition mathématique pourvue d'un sens déterminé, mais parce que la validité d'une proposition grammaticale (c'est-à-dire, d'une détermination de concept) n'est pas, comme la vérité d'une proposition proprement dite, le genre de chose qui pourrait excéder ou ne pas excéder nos capacités de connaissance.

Si nous découvrions une démonstration du fait qu'il y a trois 7 consécutifs dans le développement décimal de π ou une démonstration du fait qu'il serait contradictoire que le développement décimal de π contienne une suite de trois 7, nous devrions dire, selon Wittgenstein, que nous avons donné, du même coup, à la fois son sens et sa réponse à la question correspondante : « La question semble à la fois avoir reçu une réponse et avoir un sens. Cette façon de rendre compte des réponses possibles est contraire à ce que nous appelons ordinairement une proposition. Car nous disons qu'une proposition doit avoir un sens avant que nous sachions si elle est vraie, ou fausse » (WLC 1932-1935, p. 195). Lorsqu'une proposition a un sens qui précède indiscutablement la reconnaissance de sa vérité ou de sa fausseté, nous pouvons nous demander si ce sens est ou non tel qu'elle possède déjà, indépendamment des possibilités que nous avons de la reconnaître, une valeur de vérité déterminée. Mais que pourrait signifier exactement cette question dans le cas d'une proposition pour laquelle il est impossible de distinguer de cette façon le sens de la question qu'elle pose et la nature de la réponse, la détermination du sens et celle de la vérité ? L'anti-réalisme, dont on peut, si l'on veut, continuer à parler à propos de la proposition mathématique, n'est donc pas, comme ailleurs, l'opposé du réalisme ; il est plutôt simplement l'expression du fait que les propositions mathématiques ont trait à la détermination de la grammaire, et non à la description d'une réalité quelconque, et que, par définition, la grammaire ne peut pas contenir de déterminations susceptibles

d'aller au-delà de ce que nous sommes en mesure de déterminer nous-mêmes.

Une des raisons pour lesquelles l'intuitionnisme reste, à la différence du logicisme et du formalisme, un courant de pensée particulièrement vivant aujourd'hui est, aux yeux de Dummett, que les questions qu'il pose à propos de la forme que devrait prendre une théorie de la signification pour une catégorie déterminée de propositions (les propositions mathématiques) sont toujours actuelles et dépassent largement le domaine restreint de la philosophie des mathématiques : « ... Il semble hautement probable que les affirmations aussi bien des intuitionnistes que de leurs divers opposants puissent être généralisées de façon à porter sur la forme qu'une théorie de la signification devrait prendre pour une partie quelconque du langage » (*op. cit.*, p. IX). Mais, si la conception wittgensteinienne de la nature de la proposition mathématique a une plausibilité quelconque, il est extrêmement douteux qu'une généralisation de ce genre puisse être espérée. Il est certain que la décision de considérer que les mathématiques opèrent à un niveau antérieur à celui de la recherche de la vérité proprement dite et plus fondamental que lui, à savoir celui de la détermination du sens, entraîne chez Wittgenstein toute une série de conséquences qui peuvent sembler à première vue difficilement acceptables (il en était, du reste, tout à fait conscient). Mais, avant de se demander si elles peuvent ou non être acceptées, il importe de se rendre compte que Wittgenstein ne rejette pas seulement le platonisme, mais également le présupposé fondamental que le platonisme partage avec l'intuitionnisme, à savoir l'idée que les mathématiques cherchent à formuler des assertions vraies à propos d'une réalité d'un certain type.

Le critère de l'adoption d'une attitude anti-réaliste à l'égard d'une catégorie donnée de propositions est, selon Dummett, le rejet du principe de bivalence, ou peut-être plus exactement le refus d'asserter le principe à propos de propositions de cette sorte. Si la position de Wittgenstein avait évolué, au début des années trente, d'une conception réaliste à une conception anti-réaliste de la signification des propositions mathématiques, on serait en droit de s'attendre à ce que son attitude à l'égard de principes comme le principe de bivalence ou le principe du tiers exclu se soit modifiée, en l'occurrence, de façon perceptible. Or il est frappant de constater que Wittgenstein ne manifeste sur ce point aucune tendance à accepter la critique que les intuitionnistes formulent contre la conception classique et que la manière dont il s'exprime, dans les écrits de cette période, à propos des principes en question, ne révèle aucun changement décisif par rapport à ce qui en est dit dans le *Tractatus*. Le principe du tiers exclu (qui, comme c'est souvent le cas, n'est pas distingué clairement du principe de bivalence) continue à être présenté comme un principe constitutif qui détermine, au même titre et de la même manière que le principe de contradiction, la nature de ce que nous appelons « proposition » et que l'on ne pourrait, par conséquent, rejeter tout en conservant par ailleurs la notion usuelle de proposition ou une notion suffisamment proche de celle-là : « Si la loi du tiers exclu n'est pas valable, alors cela signifie uniquement que notre expression ne peut être comparée à une proposition » (PG, p. 400). Sans doute Wittgenstein ne dirait-il plus que des principes logiques comme le principe de contradiction ou le principe du tiers exclu reflètent ou montrent quelque chose à propos de la structure *a priori* de la réalité elle-même. Ce sont simplement des règles, qui, comme toutes les autres, sont arbitraires : « Les lois de la logique, par exemple, le tiers exclu et la contradiction, sont arbitraires. Cette assertion est un peu repoussante, mais elle n'en est pas moins vraie » (WLC 1932-1935, p. 71). Mais le point important est que, même si c'est pour des raisons différentes, les principes logiques ne sont pas plus qu'à l'époque et dans la perspective du *Tractatus* susceptibles d'être justifiés et dans l'attente d'une justification. Puisqu'ils sont arbitraires, la question de savoir s'il pourrait ou non se trouver des propositions (par exemple, des propositions mathématiques) pour lesquelles ils ne sont pas « vrais » n'a aucun sens réel. A la différence des intuitionnistes, Wittgenstein ne semble vouloir faire sur ce point aucune différence entre le principe de contradiction et le principe du tiers exclu.

Lorsque le principe du tiers exclu est interprété comme équivalent au postulat de la résolubilité de tout problème mathématique, il ressemble pourtant fortement à une proposition qui pourrait très bien être fausse et que l'on peut, en tout cas, légitimement refuser d'asserter. Mais Wittgenstein estime qu'en mathématiques le problème déjà doué de son sens ne préexiste pas, comme dans le cas habituel, aux tentatives de résolution et à la découverte de la solution. Ce qui l'amène à

soutenir que c'est seulement dans le langage de la prose non mathématique qu'il y a des problèmes mathématiques qui ne sont pas encore résolus : « ... C'est seulement dans notre langue verbale (qui conduit ici à une erreur de compréhension sur la forme logique) qu'il y a en mathématiques des problèmes "encore irrésolus" et le problème de la "résolubilité de toutes les questions mathématiques" à la fin » (PB, p. 189). Cette affirmation à première vue tout à fait déconcertante est à mettre en rapport avec le fait que « nous ne pouvons pas décrire les mathématiques, mais seulement les pratiquer » (PB, p. 188). Nous ne pouvons pas décrire ce qui a été fait jusqu'ici en mathématiques, en l'opposant à quelque chose qui reste encore à faire et sur quoi nous pouvons seulement spéculer. La conception ensembliste, qui raisonne comme si nous pouvions décrire dès à présent des totalités infinies qui restent encore largement à explorer et auxquelles correspond une multitude de questions encore à décider, commet, aux yeux de Wittgenstein, l'erreur de transformer la *possibilité* que nous cherchons à déterminer en une *réalité* qui est, pour l'instant, largement inconnue.

Non seulement il ne semble pas y avoir eu, dans l'évolution des idées de Wittgenstein sur les mathématiques, de conversion explicite du réalisme à l'anti-réalisme, mais encore il n'est pas du tout certain que la conception véri-conditionnelle et apparemment tout à fait réaliste qu'il développe, dans le *Tractatus*, à propos de la signification des propositions ordinaires puisse être considérée réellement comme une théorie que le lecteur est supposé prendre au sérieux. McGuinness a suggéré que l'idée d'un univers indépendant de « faits » susceptibles de conférer à toutes les propositions du langage une valeur de vérité déterminée faisait elle-même partie du mythe que l'ouvrage expose avec une certaine ironie, dans le but de le faire reconnaître finalement pour ce qu'il est. Le *Tractatus* donne l'impression de construire une théorie de la manière dont des propositions en général peuvent être vraies ou fausses, en s'appuyant sur une ontologie et, plus précisément, sur une ontologie des objets. McGuinness soutient qu'en réalité la conception réaliste des objets ne peut pas être le genre de doctrine que Wittgenstein cherche à défendre : « ... Les objets présupposés, existant éternellement et imposant des limites à ce que nous pouvons dire, se révèlent être en réalité une caractéristique de notre pensée et de notre langage — mais une caractéristique qui échappe à nos pouvoirs d'expression[5]. » La position de Wittgenstein à l'égard des objets, loin d'être le réalisme, serait donc plutôt une forme d'anti-réalisme de type transcendental. Et, en dépit du fait qu'il considère, à l'époque du *Tractatus,* que le sens d'une proposition est donné par ses conditions de vérité et que toute proposition est vraie ou fausse, la même chose est vraie de son attitude à l'égard de l'autre constituant du mythe, à savoir les faits. Les faits qui sont supposés rendre vraies ou fausses les propositions, indépendamment de nos méthodes et de nos possibilités de vérification, ne jouent aucun rôle réel dans l'explication et la position du *Tractatus* est, en réalité, déjà implicitement vérificationniste : « ... Les faits tombent en dehors du compte rendu. Il y a des *procédures de vérification,* qui correspondent à l'analyse d'une proposition donnée en propositions élémentaires, et elles peuvent aboutir à la vérification, à la falsification ou plus fréquemment à la probabilification . Dans bien des cas nous ne saurons pas si une proposition est vraie ou fausse. Le langage est cependant tel que nous parlons *comme si* toute proposition de ce genre *était* soit vraie soit fausse. C'est parce que nous ne pouvons pas exclure de l'usage du langage la situation dans laquelle cette proposition serait vérifiée ou falsifiée de façon concluante. Cela peut arriver ou cela aurait pu arriver. C'est une possibilité contenue dans le langage ou (ce qui est la même chose) dans la pensée. *Le système* l'autorise » (*ibid.*, p. 142-143).

La référence aux faits n'est donc qu'une manière de formuler le principe de bivalence lui-même, et non une tentative de légitimation ontologique du principe : « Les remarques de Wittgenstein sur les faits sont par le fait simplement une façon d'asserter le principe de bivalence, *pour lequel aucune raison ne peut être donnée.* Le mythe ontologique ou réaliste du TLP est apparemment une tentative faite pour donner une raison de ce genre, mais il souffre de la *Selbstaufhebung* — le caractère auto-suppressif — de la totalité du TLP. Nous sommes supposés abandonner un tel discours, d'une façon qui est le résultat du discours lui-même (*ibid.*, p. 143).

McGuinness admet qu'il pourrait être difficile de concilier, de la façon requise par Wittgenstein, le principe de bivalence avec le vérificationnisme implicite du *Tractatus.* Mais si ce qu'il dit est

5. B.F.McGuinness, « Language and Reality in the *Tractatus* », in *Wittgenstein and Contemporary Philosophy,* edited by B.F. McGuinness and A. Gargani, *Teoria,* 5 (1985/2), p. 135.

correct, les choses sont en réalité encore plus compliquées ou peut-être, au contraire, moins compliquées qu'il ne le pense. Car, si le principe de bivalence signifie simplement que l'on ne peut exclure, pour une proposition quelconque, qu'elle soit vraie ou fausse, en ce sens que sa vérification ou sa falsification doivent rester constitutivement possibles, ce qui est affirmé par là n'est pas ce que l'anti-réalisme nie, mais plutôt la double négation de ce qu'il nie (ou, plus exactement, refuse d'asserter). Dans la terminologie que Dummett propose d'adopter pour remédier à la confusion qui règne généralement sur ce point[6], ce que le principe de bivalence affirme, si on le formule comme le fait McGuinness, ne correspond pas réellement au principe de bivalence (« Toute proposition est vraie ou fausse »), mais au *tertium non datur* (« Il n'y a pas de proposition qui ne soit ni vraie ni fausse »). Or ces deux principes ne sont pas équivalents. Il est possible de rejeter le principe de bivalence sans pour autant remettre en question le *tertium non datur*; et c'est, d'une certaine manière, justement ce qu'un anti-réaliste conséquent essaie de faire. On ne peut certainement pas rendre compte de la différence entre le réalisme et l'anti-réalisme en disant que le premier accepte, alors que le deuxième refuse, d'asserter le principe de bivalence dans l'interprétation fictionnaliste suggérée par McGuinness, puisque l'anti-réalisme est obligé, lui aussi, de traiter n'importe quelle proposition douée d'un sens suffisamment précis *comme si* elle était susceptible un jour ou l'autre d'être vérifiée ou falsifiée. Il ne pourrait en effet affirmer comme ayant été vérifié à un moment quelconque qu'il est exclu qu'une proposition déterminée puisse être vraie et également qu'elle puisse être fausse. Un anti-réaliste soutient que nous ne pouvons pas qualifier une proposition de vraie ou de fausse sans que cela implique l'existence de raisons concluantes qui autorisent à l'affirmer ou à la nier. Mais il ne prétend pas qu'il existe des propositions pour lesquelles on peut définitivement exclure l'existence de raisons qui permettraient de décider dans un sens ou dans l'autre. C'est pourquoi il affirme qu'alors qu'il y a des raisons précises d'asserter le *tertium non datur* (au sens de Dummett), aucune raison convaincante n'oblige, quoi qu'en pense le réaliste, à asserter, en outre, le principe de bivalence.

6. Cf. M. Dummett, *Truth and Other Enigmas,* Duckworth, Londres, 1978, p. XIX.

Si le principe de bivalence du *Tractatus* doit être compris comme le propose McGuinness, il ne peut donc être considéré comme étant l'expression du réalisme sémantique. Il pourrait tout aussi bien refléter l'attitude agnostique à l'égard de la vérité du principe, qui est considérée comme caractéristique de l'anti-réalisme et comme potentiellement révisionniste en ce qui concerne les principes de la logique classique, si l'on admet qu'aucune sémantique anti-réaliste acceptable ne permet de les valider pour des énoncés que nous ne sommes pas et ne serons peut-être jamais en mesure de décider. La thèse du réalisme est que nous n'avons pas de garantie que la vérité coïncide dans tous les domaines et dans tous les cas avec la vérité décidable; et l'anti-réalisme objecte que l'extension du prédicat « vrai » ne peut pas excéder celle du prédicat « vrai de façon décidable ». On pourrait être tenté d'interpréter comme une adhésion à une conception anti-réaliste du sens de la proposition une déclaration du genre suivant : « Pour être en mesure de dire que "p" est vrai (ou faux), je dois d'abord avoir déterminé dans quelles circonstances j'appelle une proposition vraie, et par là je détermine le *sens* d'une proposition » (NB, p. 95). Mais le *Tractatus* ne donne certainement pas du tout l'impression de suggérer que le sens de la proposition est déterminé par les circonstances dans lesquelles nous nous considérons comme autorisés à l'appeler vraie (ou fausse), plutôt que par les conditions dans lesquelles elle *est* vraie (ou fausse).

McGuinness ne conteste pas que la position du *Tractatus* soit réaliste, au sens de la conception que Dummett attribue à Frege : « ... Les pensées que nous exprimons sont vraies ou fausses objectivement, en vertu de la manière dont les choses sont dans le monde réel — dans le royaume de la référence — et indépendamment de la question de savoir si nous avons connaissance qu'elles sont vraies ou fausses; de telles pensées auraient été vraies ou fausses même si nous avions été incapables de les exprimer ou de les appréhender, indépendamment, en fait, de notre existence pure et simple dans le monde (sauf, bien entendu, dans la mesure où elles se trouvent être des pensées qui impliquent notre existence)[7]. » Mais ce qui lui semble relever du mythe ou de la rhétorique que le *Tractatus* essaie de déconsidérer est l'expression « le royaume de la référence » et le fait de dire, comme le fait Dummett, que, pour Frege, « nous réussissons à parler des objets réels, dans le monde réel, qui sont les référents des noms que nous utilisons, et non de quelconques substituts intermédiaires pour eux ou représentations d'eux » (*ibid.*, p. 196-197). Cela n'a pas de sens, du point de vue du *Tractatus*, parce que ce que Wittgenstein essaie d'exprimer est un point de vue selon lequel ce sur quoi portent nos propositions « n'est pas *dans* le monde, pas plus qu'il n'est *dans* la pensée ou *dans* le langage[8] ». Les objets sont, en effet, la forme de chacun de ces domaines; et la pensée ou le langage ne les trouvent pas devant eux, au sens auquel le réalisme affirme que les pensées ou les propositions trouvent ce sur quoi elles portent. Considérés comme des doctrines ayant trait à ce que la pensée ou le langage peuvent ou ne peuvent pas rencontrer en dehors d'eux, le réalisme, l'idéalisme et le solipsisme constituent trois versions différentes du même mythe et coïncident finalement l'un avec l'autre (cf. T, 5.64). Mais, dans l'interprétation que Dummett propose de la controverse métaphysique, une doctrine comme l'idéalisme est plutôt la conséquence que la cause de l'adoption d'une conception anti-réaliste de la signification des propositions concernées; et l'on ne voit pas très bien comment l'option réaliste et l'option anti-réaliste pourraient finir, elles aussi, par se révéler indiscernables. C'est précisément pour transformer un désaccord qui lui semble insoluble en une confrontation entre des positions clairement discernables et rationnellement discutables que Dummett suggère de transporter le débat sur le terrain de la théorie de la signification. Il n'y a, par exemple, aucun espoir de réussir à départager directement les partisans du réalisme mathématique, qui soutiennent que nous *découvrons* les objets mathématiques, et les tenants d'une position idéaliste, pour qui ils sont plutôt des *créations* ou des *inventions* de notre esprit : « La procédure appropriée consiste à essayer de réfléchir sur la manière dont nous comprenons les énoncés mathématiques et la manière dont nous en arrivons à former les concepts mathématiques; ensuite, à la lumière de l'explication que vous avez donnée, l'une ou l'autre métaphore semblera plus adéquate. C'est de cette

7. M. Dummett, *Frege : Philosophy of Language*, Duckworth, Londres, 1973, p. 198.

8. B.F. McGuinness, « The So-called Realism of the *Tractatus* », in *Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein*, edited by Irving Block, B. Blackwell, Oxford, 1981, p. 72.

manière que la question métaphysique sera réglée, si elle l'est jamais, parce que nous n'avons pas de prise sur elle si nous prenons les choses en sens inverse. Nous ne savons même pas ce que nous sommes en train d'examiner[9]. » Or, si ce que le *Tractatus* a à dire sur la controverse métaphysique entre le réalisme et l'idéalisme, dans sa formulation traditionnelle, est relativement clair, nous ne savons pas très bien en revanche, même après la mise au point de McGuinness sur cette question, de quel côté on pourrait le situer dans le débat qui oppose le réalisme sémantique à son adversaire anti-réaliste.

Comme je l'ai déjà indiqué, l'anti-réalisme tout à fait déterminé qui semble caractériser la philosophie des mathématiques de Wittgenstein est essentiellement l'expression de ce qu'on pourrait appeler la transparence de la grammaire, par opposition à l'opacité de la réalité. Il ne signifie pas que parler d'une proposition mathématique qui *est* une règle, mais que nous ne réussirons peut-être jamais à reconnaître comme telle, est contestable ou faux, mais que cette idée n'a aucun sens. La raison pour laquelle les mathématiques peuvent donner l'impression de se prêter remarquablement bien à un affrontement entre le réalisme et l'anti-réalisme n'est pas difficile à deviner. Les propositions mathématiques ont à la fois un sens beaucoup plus précis que la plupart des propositions de la langue ordinaire (de sorte que l'indétermination qui pourrait affecter leur valeur de vérité risque beaucoup moins de provenir d'un élément de vague qui pourrait subsister dans leur signification) et des conditions de vérité qui donnent, dans certains cas, l'impression d'aller très au-delà de ce que nous pouvons être certains de parvenir un jour à vérifier ou à réfuter. Nous croyons avoir une idée suffisamment déterminée de ce qui rendrait vraie une proposition mathématique portant sur une collection infinie, en dépit du fait que la démonstration constitue le seul moyen que nous avons de reconnaître qu'elle est vraie, si elle est vraie, et que nous ne sommes pas du tout assurés de disposer jamais d'une démonstration. Wittgenstein n'accepte précisément pas du tout l'idée que la démonstration constitue simplement le moyen que des êtres limités comme nous le sommes se trouvent obligés d'utiliser pour reconnaître que des conditions de vérité qui peuvent être comprises indépendamment d'elle sont réalisées, lorsqu'elles le sont. Les partisans du réalisme mathématique ont parfois tendance à concevoir la démonstration comme un instrument qui supplée, autant que faire se peut, une faculté d'observation qui se révèle insuffisante pour atteindre l'infini et nous en dévoiler les mystères. Wittgenstein a combattu sans relâche l'idée que la différence entre le fini et l'infini en mathématiques est une différence de type quantitatif et l'illusion qui en découle régulièrement, à savoir que la difficulté de décider certaines questions concernant l'infini a quelque chose à voir avec la « faiblesse humaine ». Pour lui, une démonstration concernant l'infini ne porte pas sur une extension infinie et n'est pas un moyen de découvrir ou de reconnaître quelque chose à son sujet, elle a toujours trait à une forme ou à une loi par laquelle l'extension est engendrée. Comme il le dit dans une formule imagée : « Je ne peux démontrer quelque chose qu'à propos de la forme, du modèle, par lequel je conduis le fleuve des nombres » (PG, p. 434). Nous ne pouvons pas dire que nous comprenons la proposition universellement quantifiée « (x)P(x) », formulée à propos de l'ensemble infini des nombres entiers naturels, parce que nous avons, en tout état de cause, une idée de ce qui rendrait vrai le produit logique infini « P1·P2·P3, etc. » ; car la proposition n'est justement pas un produit logique infini et le « etc. » n'est pas un signe d'incomplétude. « Ici, remarque Wittgenstein, on confond ce qu'on appelle "impossibilité logique" avec l'impossibilité physique. Car à l'expression "examiner tous les termes du produit infini pour voir s'ils sont vrais" on croit avoir donné un sens, parce qu'on considère "en nombre infini" comme la désignation d'un nombre immensément grand. Et à propos de l'"impossibilité de tester le nombre infini de propositions", l'image qui se présente à notre esprit est celle de l'impossibilité de tester un très grand nombre de propositions, lorsque par exemple nous n'avons pas le temps nécessaire » (PG, p. 452). Ce dont il faut se souvenir ici est que, au sens auquel il est impossible de tester un nombre infini de propositions, il est également impossible d'essayer de le faire.

Wittgenstein souligne que « la faiblesse humaine n'existe pas, là où la description apparente de l'action "que nous ne pouvons pas exécuter" est dénuée de sens » (PG, p. 461). Pour lui, le problème philosophique de l'infini mathématique n'a

9. « Philosophical Doubts and Religious Certainties », An Interview with Michael Dummett, *Cogito*, 1 (1987), p. 2.

rigoureusement rien à voir avec la question de savoir si le fini peut ou non légitimement prétendre comprendre l'infini, telle qu'on l'interprète généralement, si l'intuition peut ou non nous fournir des vérités évidentes à propos de collections infinies (Poincaré, par exemple, soutient que non), etc., ni, puisqu'aucun calcul n'a besoin d'être justifié et ne peut être justifié par quelque chose dont l'existence peut être constatée dans la réalité, avec la question de savoir si l'infini est ou non exemplifié, sous une forme quelconque, dans la réalité naturelle. En d'autres termes, Wittgenstein ne conteste à aucun moment que Cantor ait réussi à inventer un nouveau calcul et, comme dans tous les cas de ce genre, refuse catégoriquement d'adopter l'attitude réductionniste qui est commune à des théoriciens aussi opposés que Poincaré et Hilbert et qui consiste à exiger que ce qui est dit à propos de l'infini puisse être ramené, d'une manière ou d'une autre, à des considérations portant uniquement sur le fini. Le calcul cantorien est, précisément, un ***nouveau*** calcul, qu'il serait absurde de chercher à justifier en le ramenant à quelque chose de plus élémentaire ou de plus sûr.

S'il y a un problème à propos de la manière dont le fini peut réussir à comprendre l'infini, il concerne uniquement le calcul lui-même et ce qu'il peut ou ne peut pas faire. C'est le calcul, et lui seul, qui doit montrer par la nature de ses règles et par les applications que nous en faisons de quelle manière il peut être question de l'infini dans des activités qui sont par nature finies :

> « Hardy : "Que 'le fini ne peut pas comprendre l'infini', cela devrait sûrement être un cri de guerre théologique, et non pas mathématique [10]." Il est vrai que cette expression est maladroite. Mais ce que les gens veulent dire par là est : "Il faut tout de même que l'on sache comment les choses se passent ici ! D'où vient ce saut du fini à l'infini ?" Et la façon de s'exprimer n'est pas non plus si complètement dénuée de sens – seulement le "fini", qui n'est pas censé pouvoir penser l'"infini" n'est pas "l'homme" ou "notre entendement", mais le calcul. Et *comment* celui-ci pense l'"infini", cela mérite bien une étude. Et celle-ci peut être comparée à l'étude et à la clarification précises de la conduite des affaires d'un entrepreneur par un *chartered accountant*. Le but est une présentation synoptique, comparée, de toutes les applications, illustrations, conceptions du calcul. La vision panoramique complète de tout ce qui peut provoquer un manque de clarté. Et cette vision panoramique doit s'étendre sur un vaste territoire, car les racines de nos idées vont loin. – "Le fini ne peut pas comprendre l'infini", veut dire ici : cela ne peut pas se passer *de la manière* dont vous présentez les choses avec une superficialité caractéristique » (Z, § 273).

10. Cf. G.H. Hardy, « Mathematical Proof », *Mind*, 38 (1929), p. 5.

Wittgenstein n'a apparemment rien d'autre à reprocher à la théorie des ensembles transfinis que la confusion conceptuelle introduite par le fait que des termes anciens sont utilisés avec une signification radicalement nouvelle, qui n'est pas reconnue comme telle : « Ce que, dans le cas d'une classe finie, on appelle "mise en correspondance de tous ses éléments avec d'autres" est quelque chose de tout à fait différent de ce qu'on appelle par exemple une mise en correspondance de tous les nombres cardinaux avec tous les nombres rationnels. Les deux correspondances, ou ce que l'on désigne dans les deux cas par ce mot, appartiennent à des types logiques différents. Et la "classe infinie" n'est pas une classe qui contient plus d'éléments, au sens ordinaire du mot "plus", que la classe finie. Et si l'on dit qu'un nombre infini est plus grand qu'un nombre fini, cela ne rend pas les deux nombres comparables, parce que dans cet énoncé l'expression "plus grand" a ***une autre signification*** que par exemple dans la proposition $5 > 4$! » (PG, p. 464). Wittgenstein suggère que nous pourrions, à la limite, remplacer les termes usuels « plus grand », « plus petit », « + », « – », etc., tels qu'ils sont utilisés dans la théorie des ensembles transfinis, par des expressions qui jusqu'alors n'avaient pas de sens, pour voir ce que le calcul parvient et ne parvient pas à faire avec les signes en question. Et il ajoute : « Si c'était une opinion répandue que le jeu d'échecs nous donne un éclaircissement sur les rois et les tours, alors je proposerais de donner aux pièces de nouvelles formes et de nouveaux noms, pour démontrer que tout ce qui relève du jeu d'échecs doit résider dans les règles » (PG, p. 469). Autrement dit, la différence entre le fini et l'infini est, pour lui, uniquement une différence logique entre deux espèces de calcul, et non une différence ontologique entre deux espèces de réalité ; mais la différence est justement beaucoup plus grande que ne le suggère la description donnée dans le vocabulaire de l'ontologie. Wittgenstein ne considère donc pas que, pour justifier la théorie des ensembles transfinis, on devrait, d'une manière ou d'une autre, établir d'abord la réalité de ce dont elle est supposée parler et la possibilité de le connaître, mais, pour les mêmes raisons, ne croit pas non plus que l'on démontrerait quoi que ce soit contre une théorie de ce genre si l'on réussissait à discréditer son ontologie.

Ces quelques observations n'ont évidemment pas pour ambition de régler l'épineuse question que soulèvent les remarques on ne peut plus critiques de Wittgenstein sur la théorie des ensembles cantorienne. Il est évidemment beaucoup plus facile, de notre point de vue, d'accepter ses objections contre l'intuitionnisme que celles qu'il formule contre la théorie des ensembles ou la théorie des nombres réels classique. De nombreux exégètes ont estimé que les secondes étaient rendues *a priori* nulles et non avenues par les prémisses anti-platoniciennes et apparemment ultra-constructivistes sur lesquelles elles s'appuient. Mais Wittgenstein lui-même n'aurait certainement pas admis que l'on distingue de cette façon les deux aspects de sa critique, qui étaient, pour lui, étroitement solidaires, et pas non plus que le destin de la théorie des ensembles puisse dépendre, comme on le suppose généralement, de la légitimité de certaines assomptions platoniciennes. Tait estime que : « Ses contacts avec les idées ensemblistes semblent avoir été limités aux travaux de Frege et Russell ; et il pensait que le discours sur des ensembles, des fonctions et d'autres choses de ce genre était du langage qui s'est mis en vacances, parce qu'il ne savait pas qu'un tel discours — et, en particulier, les idées impliquées dans l'argument [diagonal] de Cantor — avaient déjà un rôle clair dans la pratique mathématique. La tentative faite pour rendre compte de ses conceptions sur la théorie des ensembles en faisant en même temps la supposition qu'il savait quelque chose sur elle a, à mon avis, conduit à une interprétation plus radicale et moins judicieuse de sa discussion générale du langage qu'elle ne le justifie [11]. » Je ne suis pas du tout persuadé, pour ma part, que Wittgenstein ait été aussi ignorant qu'on l'a dit et répété des mathématiques de son époque, y compris en ce qui concerne la théorie des ensembles des mathématiciens (par opposition à celle des logiciens). Mais il est bien possible qu'il

11. W.W. Tait, « Wittgenstein and the "Skeptical Paradoxes" », *The Journal of Philosophy*, 83 (1986), p. 488.

ait considérablement sous-estimé le degré auquel elle était déjà réellement appliquée en mathématiques (et l'était même par des mathématiciens qui, du point de vue philosophique, étaient aussi éloignés que possible des idées de Cantor). Tait veut-il dire que ses scrupules et ses objections philosophiques auraient immédiatement disparu s'il avait eu connaissance de ce qu'il semble avoir ignoré ? Il y a, me semble-t-il, de bonnes raisons de croire que non, puisque la grammaire des propositions portant sur l'infini aurait certainement continué à poser pour lui le même genre de problème et qu'il considérait que, même dans le cas d'une discipline à première vue aussi peu problématique que l'arithmétique élémentaire, lorsqu'une technique ou un calcul ont fait leurs preuves, des difficultés conceptuelles bien réelles, qui n'ont rien à voir avec la question de leur fondement ou de leur légitimité, peuvent néanmoins subsister et sont plutôt occultées que véritablement exposées et résolues dans l'enseignement et la pratique. Je ne crois pas, en d'autres termes, que les succès remarquables et, pour finir, le triomphe à peu près complet de la théorie des ensembles aient réussi à rendre tout à fait caduque la question de savoir de quelle manière le fini (c'est-à-dire, comme le fait remarquer Wittgenstein, le calcul) parvient à comprendre l'infini.

Je n'ai pas essayé, dans cet ouvrage, de pousser l'examen de la position de Wittgenstein concernant le problème de l'infini au-delà de ce qui est nécessaire pour comprendre la nature des reproches qu'il adresse à Brouwer et les raisons pour lesquelles, partant de prémisses qui ressemblent parfois étrangement aux siennes, il refuse cependant d'adopter les mêmes conclusions. Wittgenstein ne considère pas que l'application du principe du tiers exclu soulève, lorsqu'on passe du fini à l'infini, des problèmes plus dramatiques que celle du principe de contradiction. Et il soupçonne les intuitionnistes eux-mêmes de se méprendre, comme leurs adversaires classiques, sur la distinction entre le fini et l'infini, qui est une distinction conceptuelle, dont on méconnaît complètement la nature lorsqu'on la lie intrinsèquement à la différence entre ce qui est et ce qui n'est pas à la portée de nos capacités de connaissance ou de nos moyens de vérification. La confusion provient du fait qu'une conjonction infinie de propositions portant sur des extensions finies (par exemple, les développements de π jusqu'à la n-ième décimale, pour chaque n) et une proposition portant sur une extension infinie (le développement complet) sont deux choses beaucoup plus hétérogènes qu'on ne le suppose et qui ne sont pas comparables de la manière dont elles sont généralement comparées. Wittgenstein remarque à ce propos :

> « Je peux comprendre une proposition qui a un commencement et une fin. Mais peut-on également comprendre une proposition qui n'a pas de fin ?
>
> Je comprends également que l'on puisse indiquer une règle infinie d'après laquelle peuvent être formées un nombre infini de propositions finies. Mais que signifie une proposition sans fin ?
>
> Si la proposition n'est rendue vraie par aucun produit fini, alors cela signifie : elle n'est rendue vraie par *aucun* produit. Et c'est pourquoi elle n'*est* pas un produit logique » (PB, p. 148-149).

Il est parfaitement vrai que les considérations du mathématicien sont par nature finies : « N'oublions pas : les réflexions des mathématiciens sur l'infini ne sont tout de même rien que des réflexions finies. Par quoi je veux dire uniquement qu'elles ont une fin » (PG, p. 483). Mais cela n'empêche pas qu'elles puissent porter réellement sur l'infini. Et une proposition qui porte sur l'infini n'a rien à voir avec quelque chose comme une abréviation d'une proposition infinie qui, pour sa part, traite directement et dans le détail de ce dont il s'agit. Ce n'est donc pas l'infinité elle-même et le fait que nous ne puissions ni écrire ni tester une somme ou un produit logiques infinis qui constituent un obstacle à la vérification, comme s'il pouvait être question d'appliquer une méthode de vérification qui existe déjà, mais qui a l'inconvénient d'être infinie. Wittgenstein ne nie évidemment pas que l'on puisse vérifier une assertion concernant le développement décimal infini de π (par exemple : « la suite de chiffres "550" n'apparaît, pour aucun nombre n, dans le développement de π poussé jusqu'à la n-ième décimale »). Mais la démonstration qui permettrait éventuellement de le faire ne constitue pas un moyen détourné de vérifier une conjonction infinie de propositions. Et, puisque la différence entre le fini et l'infini est une différence de niveau logique, et non de grandeur, la difficulté que nous pouvons éprouver à vérifier une proposition concernant l'infini n'a pas le caractère

quantitatif que suggère le contraste trompeur entre la vérification d'une somme ou d'un produit logiques finis et celle, qui est supposée être malheureusement beaucoup trop longue pour nous, d'une somme ou d'un produit logiques infinis. C'est cette idée qu'il s'agit essentiellement d'une différence de grandeur dans la dimension des objets considérés et de longueur corrélative dans l'application de la procédure de vérification dont on dispose, qui engendre l'illusion très répandue qu'en utilisant des ordinateurs de plus en plus puissants, capables de manipuler des nombres de plus en plus grands, nous pouvons en quelque sorte nous rapprocher progressivement de la décision d'une question portant sur l'infini. C'est également elle qui est, du point de vue de Wittgenstein, à l'origine de la controverse entre les mathématiciens classiques et leurs adversaires intuitionnistes sur la question de savoir si quelque chose (la validité du tiers exclu) est ou non susceptible, comme l'affirment les seconds, de se perdre, d'une certaine manière, à l'infini ou, au contraire, comme le soutiennent les premiers, doit y être conservé :

> « Procédant à partir de l'analogie entre une extension finie et le développement infini de π, nous sommes tentés de continuer à dire les mêmes choses sur les deux [par exemple] qu'il y a ou n'y a pas trois 7 dans π. C'est le genre de choses que diraient certains logiciens — ou bien ils y sont, ou bien ils n'y sont pas. Mais pourquoi répètent-ils la loi du tiers exclu ? Que dit-elle ? C'est une tautologie. Pourquoi soulignent-ils cela, et non pas, par exemple, la loi de contradiction ? Ils le font pour susciter une image particulière — pour ainsi dire, de quelque chose qui est perdu dans l'infinité. Considérez le fait que, lorsqu'on tient un chien en laisse, plus longue est la laisse, plus il y a de liberté pour le chien. Maintenant, supposez que je dise que la laisse est infiniment longue. Dans ce cas-là, je pourrais aussi bien dire que je ne le tiens pas du tout en laisse. De façon analogue, si je demande "Y a-t-il trois 7 dans cette suite infinie ?", je pourrais aussi bien dire que la question s'élimine elle-même. Sa grammaire est telle que ce n'est pas une question » (WLC 1932-1935, p. 195-196).

Il est incontestable que, lorsqu'on abandonne le terrain du fini pour aborder celui de l'infini, certaines possibilités de vérification se perdent. Mais, lorsqu'on dit que l'infini est « trop grand » pour les moyens dont nous disposons, on oublie facilement que, si une extension infinie peut être dite, en un certain sens, plus grande qu'une extension finie, ce sens n'est pas du tout comparable à celui auquel une extension finie peut être plus grande qu'une autre extension finie. Le point de vue de Wittgenstein est que ce qui peut être perdu dans le passage que l'on est supposé effectuer du fini à l'infini n'est pas tant la réponse, qui donne l'impression de reculer indéfiniment devant nous, un peu comme le fait l'horizon, que le sens de la question, et donc la question elle-même. Et là où il n'y a pas de question qui corresponde à la proposition, il n'y a pas non plus de problème ayant trait à la possibilité d'appliquer le tiers exclu. C'est justement parce que celui-ci devrait rester applicable que ce à quoi nous avons affaire n'est pas réellement une proposition.

Bien entendu, la séparation que le réaliste accepte d'établir entre la vérité ou la fausseté objectivement déterminées de la proposition et la possibilité de les reconnaître n'est pas totale. Dans l'exemple considéré, il dira que le sens et la compréhension de la proposition sont garantis par l'existence d'une méthode de vérification, dont il se trouve simplement que des êtres limités comme nous le sommes ne peuvent pas l'appliquer. Son adversaire objecte que la seule méthode de vérification qui puisse donner un sens à la proposition est celle que nous pouvons utiliser et qui, pour nous, conduit à une décision, à savoir la démonstration. Mais en même temps, du point de vue de Wittgenstein, il ne va pas jusqu'au bout de cette idée, puisqu'il considère, probablement parce qu'il raisonne, sur ce point, de la même façon que son adversaire, que nous avons réussi à donner à la proposition un sens déterminé, mais un sens qui, dans la mesure où nous ne sommes pas certains de pouvoir aboutir un jour à une décision la concernant, ne nous autorise pas à affirmer qu'elle est vraie ou fausse. En d'autres termes, au lieu d'affronter ouvertement la difficulté qui résulte de sa position, à savoir que certaines questions doivent apparemment attendre leur réponse pour être des questions, il préfère s'en tenir à l'idée que certaines propositions échappent à la juridiction du principe de bivalence.

Le réalisme et l'anti-réalisme constituent deux façons différentes de rendre compte du fait que nous ne sommes pas omniscients et pas non plus assurés de l'être jamais. Le premier

adopte ce que Prawitz appelle un « principe platonicien de la vérité », que le second propose de remplacer par un « principe non réaliste de la vérité », qui postule que la notion de vérité tire ses caractéristiques fondamentales de sa relation à des conditions d'assertabilité justifiée et doit être expliquée en termes de conditions de ce genre. La situation peut alors être décrite de la façon suivante :

> « ... Selon le principe platonicien, une condition de vérité pour une proposition est réalisée ou n'est pas réalisée indépendamment de nos moyens de reconnaître qu'elle est réalisée ou n'est pas réalisée, et nous sommes, dans ces conditions, forcés d'admettre qu'il peut y avoir des vérités qui sont en principe impossibles à reconnaître (si nous ne voulons pas asserter sans justification que tous les problèmes sont en principe résolubles) ; selon le principe non réaliste (...), une vérité est en principe toujours possible à reconnaître, mais nous devons alors nous abstenir d'asserter qu'une condition de vérité est réalisée ou bien n'est pas réalisée (à nouveau, pour ne pas asserter que tout est résoluble). Les deux principes respectent le fait que nous ne sommes pas omniscients, mais le principe platonicien le fait en introduisant des idées dont le besoin n'est pas facile à apercevoir [12]. »

Lorsque le problème est posé à la manière de Wittgenstein, la question de l'omniscience prend une signification bien différente et qui n'a plus rien à voir avec celle qu'elle a dans le cas d'une science de la nature. Ce qui est décisif n'est pas ce que nous pouvons ou ne pouvons pas espérer savoir, mais ce que le calcul lui-même, si l'on peut dire, sait ou ne sait pas ; et se demander si nous serons un jour capables de décider une question qui est pour le moment indécidable revient à se demander si le calcul qui la décide sera ou non inventé un jour. Or, là où il n'y a pas de place pour des découvertes proprement dites, mais seulement pour des inventions et des décisions, on ne voit pas très bien ce qu'un esprit supérieur pourrait posséder et utiliser en fait d'omniscience : « Il n'y a rien là à savoir pour une intelligence supérieure — si ce n'est ce que feront les générations futures. Nous en savons autant que Dieu en sait en mathématiques » (WLFM, p. 104). Si la tâche du mathématicien

12. D. Prawitz, « Intuitionistic Logic : A Philosophical Challenge », in *Logic and Philosophy*, edited by G.H. von Wright, Martinus Nijhoff, La Haye, 1980, p. 9.

consistait essentiellement à inventer des méthodes indirectes pour explorer des totalités infinies, l'avantage de Dieu, qui est supposé pouvoir le faire directement, serait évident. Mais Wittgenstein estime qu'il est tout à fait trompeur de considérer les méthodes que nous utilisons en mathématiques comme ayant quoi que ce soit d'indirect, en ce sens-là. Ce qui fait la spécificité de la proposition mathématique, par opposition à la proposition ordinaire, est le fait que nous devons, dans tous les cas réellement significatifs, inventer la méthode de décision qui donne un sens, et non pas seulement une réponse à la question posée. Et la référence à l'omniscience supposée d'un sujet mathématique tel que Dieu a essentiellement pour effet de créer ou de renforcer l'illusion que la méthode de vérification existe déjà dans tous les cas, mais n'est pas toujours applicable par nous.

En dépit des difficultés que présente, pour les raisons indiquées plus haut, la détermination de la position exacte du *Tractatus* dans la controverse entre le réalisme et l'anti-réalisme, il n'est guère contestable que l'attitude de Wittgenstein a évolué, sur ce point, de façon extrêmement significative et que ce n'est pas un hasard si les arguments invoqués aujourd'hui à l'appui de la conception anti-réaliste sont tirés, pour l'essentiel, des textes de sa deuxième période. L'anti-réalisme implicite de sa deuxième philosophie est clairement reconnaissable dans des déclarations comme les suivantes :

> « Ce que l'on conçoit comme justification d'une assertion, cela constitue le sens de l'assertion » (PG, p. 81).

> « Les causes qui font que nous croyons une proposition sont à coup sûr dépourvues de pertinence pour la question de savoir ce que peut bien être ce que nous croyons ; mais pas les raisons, qui sont bel et bien apparentées grammaticalement à la proposition et nous disent quelle elle est » (Z, § 437).

Le propre du réalisme est de considérer que la relation entre ce qui rend une proposition vraie (ses conditions de vérité) et ce qui nous amène à la reconnaître comme vraie peut être une relation externe plus ou moins accidentelle. Si l'on fait, au contraire, des raisons qui sont susceptibles de nous amener à reconnaître une proposition comme vraie une partie intégrante de son sens et choisit de les traiter comme constitutives de

l'identité de la proposition elle-même, on a déjà, semble-t-il, franchi l'étape décisive qui conduit à l'anti-réalisme.

La conversion de Wittgenstein à une conception anti-réaliste de la proposition introduit apparemment une modification importante dans les relations qui sont supposées exister entre la question des limites du sens et celle des limites de la connaissance. Dans le *Tractatus,* la question centrale était évidemment celle des limites du sens ; et la théorie de la connaissance, identifiée à la « philosophie de la psychologie » (4.1121), était reléguée tout à fait au second plan. Par la suite, la question « Que pouvons-nous signifier ? » semble au contraire devenir directement dépendante de la question « Que pouvons-nous savoir ? ». Ce que nous pouvons vouloir dire est limité par ce que nous sommes en mesure de connaître et par la manière dont nous le connaissons. Hacker décrit ainsi le changement qui s'opère : « Dans sa deuxième philosophie, Wittgenstein s'occupe toujours d'établir les limites du sens, d'apprendre à la philosophie et à la métaphysique à ne pas vouloir aller plus loin qu'il ne faut dans leur ambition démesurée. Mais à présent la détermination des limites de la connaissance n'est plus un sous-produit accidentel de la recherche. Au contraire, d'après la sémantique critérielle, les limites de la connaissance possible déterminent les limites du sens. Car le sens d'une expression est déterminé par les conditions qui justifient qu'on l'asserte et qui légitiment une prétention cognitive. Un critère, qui détermine la signification, donne un type de réponse à la question. "Comment savez-vous ?". De ce fait, l'épistémologie [13] est ramenée au cœur de la logique philosophique, sans toutefois que des concessions indues quelconques soient faites aux logiciens psychologiques [14]. »

La question n'est pas, bien entendu, celles des possibilités de connaissance, telle qu'on la comprend habituellement, c'est-à-dire celle des limitations imposées *a priori* à nos facultés de connaissance, mais celle des critères qui déterminent la manière ou les différentes manières dont on peut savoir quelque chose et qui autorisent à dire qu'on le sait. Il est donc en réalité assez

13. Au sens anglo-saxon du mot *epistemology,* qui est généralement plus proche de celui de l'expression « théorie de la connaissance » que de ce qu'on appelle en français « épistémologie ».

14. P.M.S. Hacker, *Insight and Illusion,* Wittgenstein on Philosophy and the Metaphysics of Experience, The Clarendon Press, Oxford, 1972, p. 303.

trompeur de parler de quelque chose comme une réintroduction de la théorie de la connaissance au cœur de la théorie de la signification, puisque les questions qui vont se poser sont et restent des questions exclusivement grammaticales. Hacker explique que, « si "*q*" est un critère pour "*p*", alors cela fait partie du sens de "*p*" que "*q*" soit une justification (*evidence for*) *a priori,* non inductive, conventionnellement fixée, de la vérité de "*p*" » (*ibid.,* p. 291). Ainsi, par exemple, « la grammaire des propositions que nous appelons des propositions sur des objets physiques admet des justifications (*evidences*) diverses pour toute proposition de ce genre. Cela caractérise la grammaire de "Mon doigt bouge", etc., que je considère les propositions "Je le vois bouger", "Je le sens bouger", "Il le voit bouger", "Il me dit qu'il bouge", etc., comme justifications pour elle » (BlB, p. 51). Nous avons affaire ici à une série de propositions qui sont considérées comme autorisant l'assertion d'une proposition concernant un objet physique (mon doigt). Et il est important de préciser que, même s'il est vrai que le sens de cette proposition est partiellement déterminé par le fait que la vérité des premières (et d'autres du même genre) constitue une justification non inductive pour son assertion, dire que "*p*" est un critère de "*q*" ne signifie pas que "*p*" a le même sens que "*q*" et pas non plus que "*p*" implique logiquement "*q*". Wittgenstein n'est évidemment pas tenté par le genre de vérificationnisme réductionniste qui consisterait à essayer de ramener la signification de la proposition portant sur un objet physique à celle des propositions plus « élémentaires » que nous pouvons utiliser pour justifier son assertion.

Immédiatement après avoir remarqué que, « lorsqu'on me demande une raison pour la croyance, ce qui est attendu, comme partie de la réponse, est *ce que* je crois » (WLC 1932-1935, p. 28). Wittgenstein prend soin de préciser que les différentes manières de vérifier une proposition contribuent à déterminer la signification de la proposition, mais que la signification n'est pas constituée par elles : « Les différentes façons de vérifier "Il a plu hier" aident à déterminer la signification. Or une distinction devrait être faite entre "être la signification de ..." et "déterminer la signification de...". Que je me souvienne qu'il a plu hier aide à déterminer la signification de "Il a plu hier", mais il n'est pas vrai que "Il a plu hier" *veut dire* "Je me souviens que..." » (*ibid.*). Wittgenstein nie explicitement

que l'énoncé « Cambridge a gagné la course contre Oxford » puisse être considéré comme équivalent à une disjonction du type : « J'ai vu la course ou j'ai lu le résultat ou... ». Il n'en est pas moins vrai que : « Si nous excluions l'un quelconque des moyens de vérifier l'assertion, nous modifierions sa signification. Et si nous éliminions tous les moyens de la vérifier, nous détruirions la signification » (*ibid.,* p. 29).

Même si la question de savoir ce qui donne à la proposition sa signification n'est évidemment pas encore résolue par là, il faut donc, en tout état de cause, faire une différence entre ce qui peut le faire réellement et ce qui, comme la méthode de vérification, peut seulement déterminer la signification en question : « Deux questions ont été soulevées, auxquelles il faut maintenant apporter une réponse. (1) Comment la signification d'une proposition portant sur le passé pourrait-elle être donnée par une proposition portant sur le présent ? (2) La vérification d'une proposition sur le passé est un ensemble de propositions impliquant des temps présents et futurs. Si la vérification donne la signification, une partie de la signification est-elle laissée de côté ? Ma réponse consiste à nier que la vérification *donne* la signification. Elle *détermine* simplement la signification, c'est-à-dire, détermine son usage, ou sa grammaire » (*ibid.,* 28-29).

Wittgenstein peut sembler, il est vrai, se rapprocher sensiblement de l'anti-réalisme déclaré lorsqu'il suggère que la réponse à la question « En quoi consiste la vérification de la proposition ? » peut être comprise comme une réponse à la question « En quoi consiste, pour la proposition, le fait d'être vraie ? » : « La question "Qu'est-ce que sa vérification ?" est une bonne traduction de "Comment peut-on le savoir ?" Il y a des gens qui disent que la question "Comment peut-on savoir ce genre de chose ?" est dépourvue de pertinence pour ce qui est de la question "Qu'est-ce que la signification ?" Mais une réponse donne (*sic*) la signification en montrant la relation de la proposition à d'autres propositions. Autrement dit, elle montre ce dont elle suit et ce qui suit d'elle. Elle donne la grammaire de la proposition, qui est ce que demande la question "A quoi ressemblerait pour elle le fait d'être vraie ?" » (*ibid.,* p. 19-20). Mais si, comme cela semble bien être le cas, ce que Wittgenstein voulait dire est simplement que les critères qui justifient l'assertion d'une proposition ne constituent pas, comme on pourrait être tenté de le croire, un élément extérieur par rapport à la signification de celle-ci, mais au contraire une spécification partielle de cette signification elle-même, ou encore que la question de la vérification, c'est-à-dire la manière de répondre à la question « Comment sait-on ? », n'est pas une question « épistémologique » externe, mais une contribution à la *grammaire* de la proposition (cf. PU, § 353), cela ne suffit certainement pas pour qu'on puisse lui imputer une conception explicitement anti-réaliste du sens de la proposition.

Le propre d'une conception de ce genre est en effet d'identifier purement et simplement le sens de la proposition avec ses conditions d'assertabilité et de soutenir qu'il ne peut contenir aucun élément susceptible d'excéder une fois pour toutes ce qui est compris dans les conditions en question. Et il est pour le moins douteux que Wittgenstein ait été disposé à défendre une position de ce genre. Il y a, en tout cas, toute une catégorie de propositions dont la signification ne peut, selon lui, être identifiée avec leurs conditions d'assertion correcte, simplement parce qu'elles n'ont pas de conditions de ce genre et peuvent être utilisées de façon parfaitement correcte sans avoir à être justifiées de cette façon. C'est le cas, par exemple, de certaines propositions à la première personne comme « J'ai mal aux dents », « J'ai rêvé à telle ou telle personne », « J'ai l'intention de faire telle ou telle chose », etc., mais également de propositions comme « Cette fleur est rouge », « Cette pomme est amère », etc., dont les conditions d'usage correct ne sont pas des conditions de vérification, en ce sens que leur utilisation ne se fonde sur l'application d'aucun critère particulier et n'implique aucune procédure de vérification proprement dite.

Il y a, en fait, de nombreux cas dans lesquels la question « Comment le savez-vous ? » ou « Qu'est-ce qui vous autorise à affirmer cela ? » n'a aucun sens ou ne peut être résolue par l'indication de conditions d'assertabilité déterminées (au sens que l'on donne habituellement à cette expression), qui sont supposées être satisfaites. Déjà pour cette simple raison, il est probablement aussi difficile d'imputer au deuxième Wittgenstein une position clairement anti-réaliste que d'interpréter le *Tractatus* comme un exposé de la conception réaliste, au sens dummettien des deux termes.

Quoi qu'il en soit, il n'est pas difficile de se rendre compte que le cas de la proposition mathématique est (même si l'on peut parler également de la démonstration comme d'un *critère*

qui justifie l'assertion de la proposition mathématique) bien différent de celui qui est évoqué dans le *Cahier bleu*. La démonstration, en effet, ne constitue pas un critère susceptible de justifier une assertion portant sur des objets mathématiques. Elle ne légitime pas réellement une prétention de connaissance, mais introduit une détermination de sens. Elle n'est pas un moyen de vérifier une proposition qui pourrait avoir un sens indépendamment d'elle et le conserver, quel que soit le résultat de la vérification, puisque ce que dit la proposition mathématique se révèle être justement ce que dit la démonstration qui lui donne son sens mathématique. Le changement d'orientation décrit par Hacker ne peut donc, pour des raisons intrinsèques, être appliqué directement aux propositions mathématiques elles-mêmes.

Dans l'exemple considéré par Wittgenstein, les différents critères correspondent à différentes manières de se convaincre de la réalité d'un même fait concernant un objet physique (le doigt). Et c'est une situation qui n'a aucun équivalent dans le cas de la proposition mathématique, puisque « ce qui est le cas », lorsque celle-ci est vraie, est représenté uniquement par la démonstration elle-même, à l'exclusion de toute contribution due à l'intervention d'une réalité extérieure dans laquelle les choses sont ou ne sont pas telles ou telles selon que la proposition est vraie ou fausse. Deux démonstrations différentes de la même proposition ne peuvent être considérées comme deux manières différentes de reconnaître un même fait mathématique indépendant de l'une et de l'autre. Et, puisque la proposition à démontrer n'a pas de conditions de vérité que l'on pourrait distinguer des conditions d'assertion correcte qui seront fournies par sa démonstration et comprendre indépendamment d'elles, la question de l'identité de la proposition non démontrée et de la proposition pourvue de sa démonstration ne peut être résolue de façon positive ou négative : elle n'a tout simplement aucun sens, s'il se trouve que l'identité de la proposition est justement ce que la démonstration permettra de déterminer.

Comme le dit Shanker, « le sens de l'expression verbale *beweissystemlos* ne *change* pas après que la démonstration a été construite : la vérité est plutôt qu'il *émerge* » (*op. cit.*, p. 106). Ce qui donne une apparence de sens mathématique à l'expression verbale de la proposition sans démonstration est, en fait, uniquement l'existence d'une certaine image, par exemple celle d'un développement illimité donné dans sa totalité et dans lequel quelque chose (la possibilité de trouver la réponse) donne l'impression de se perdre à l'infini et de nous obliger à emprunter un raccourci que nous n'avons pas encore trouvé. Mais cette image se révèle, en réalité, dépourvue de toute espèce d'intérêt et d'importance lorsque la démonstration nous montre réellement ce que dit la proposition mathématique. Avant la démonstration, l'image ne nous est d'aucune utilité, parce qu'elle ne nous donne aucune idée de ce que nous devons chercher et de la manière dont nous devons chercher. Et elle peut être oubliée complètement une fois que la démonstration nous a montré ce que nous cherchions réellement.

Si l'on admet que nous pouvons donner un sens à des propositions que nous ne sommes pas certains de pouvoir jamais vérifier ou réfuter, parce que nous pouvons imaginer une extension appropriée de nos facultés de connaissance qui nous rendrait capables de les reconnaître comme vraies ou fausses, ce genre de considération ne peut, du point de vue de Wittgenstein, être appliqué sans précaution aux mathématiques, puisque ce qui nous interdit, par exemple, momentanément de reconnaître comme vraie ou fausse une proposition mathématique portant sur l'infini n'est pas que les facultés de connaissance dont nous sommes pourvus sont trop limitées pour cela. En d'autres termes, si la controverse entre le réalisme et l'anti-réalisme est comprise comme ayant trait à la question de savoir si nous devons ou non accepter l'idéalisation constituée par la représentation d'un sujet mathématique omniscient qui permet de donner un sens à l'idée de conditions de vérité qui transcendent définitivement les limitations imposées à nos possibilités humaines de vérification, la conclusion inévitable est que ce débat est, pour Wittgenstein, sans objet, puisqu'il repose tout entier sur un présupposé qu'il conteste et une confusion qu'il dénonce. Pour avoir un sens, une idéalisation de nos facultés mathématiques est obligée d'utiliser essentiellement des cas dans lesquels la méthode de vérification semble être déjà là, mais ne pourrait être utilisée que par un esprit beaucoup plus puissant ou plus rapide que nous. Le cas de la proposition mathématique se trouve ainsi ramené plus ou moins au cas trivial de la proposition ordinaire déjà pourvue de sa méthode de vérification, qu'il ne reste plus qu'à appliquer, si l'on peut ; et ce qui fait la spécificité radicale d'une indécision et d'une décision

mathématiques proprement dites est complètement perdu de vue.

Un des arguments principaux qui ont été tirés des textes de Wittgenstein pour justifier l'adoption d'une sémantique anti-réaliste est contenu dans le principe selon lequel « la signification ne peut pas transcender l'usage ». Dummett estime que, si le principe selon lequel la signification est l'usage impose des contraintes quelconques à une théorie de la signification, cela ne peut être que de la façon suivante : « ... Si la signification est l'usage, c'est-à-dire si la connaissance en laquelle consiste la compréhension qu'un locuteur a d'une phrase doit être manifestée pleinement par sa pratique linguistique, il apparaît qu'un modèle de la signification en termes d'une connaissance de conditions de vérité est possible uniquement si nous construisons la vérité d'une manière telle que le principe de bivalence n'est pas valide ; et cela veut dire, en fait, une notion de vérité en vertu de laquelle la vérité d'une proposition implique la possibilité de principe, pour *nous,* de reconnaître sa vérité. Il est difficile d'avaler une telle conclusion, parce qu'elle a des répercussions métaphysiques profondes : elle signifie que nous ne pouvons pas opérer, d'une manière générale, avec une image de notre langage qui le représente comme comportant un sens qui nous permet de parler d'une réalité objective déterminée qui rend ce que nous disons vrai ou faux de façon déterminée, indépendamment de la question de savoir si nous avons les moyens de reconnaître sa vérité ou sa fausseté [15]. »

Il est clair que le réquisit de la manifestabilité complète de la signification dans l'usage ne s'applique pas simplement aux propositions déclaratives, mais également à des propositions de forme quelconque, y compris, bien entendu, à celles qui constituent l'expression de règles. Comme le souligne Wittgenstein à propos de la proposition mathématique : « Ce que signifie une proposition géométrique, quel genre d'universalité elle a, cela doit se montrer entièrement, lorsque nous voyons comment elle est appliquée. Car même si quelqu'un pouvait vouloir dire par elle une chose impossible à atteindre, cela ne lui servirait à rien, puisqu'il ne peut tout de même bel et bien l'appliquer que de façon tout à fait ouverte et compréhensible pour tout le

15. M. Dummett, « What does the Appeal to Use Do for the Theory of Meaning ? » in *Meaning and Use,* edited by A. Margalit, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1979, p. 135.

monde » (PG, p. 469). Dans le cas de la règle, l'exigence de manifestabilité signifie que la compréhension de la règle ne peut comporter un élément caché, qui ne serait pas susceptible de se révéler publiquement dans l'application que l'on en fait (et dont on ne comprendrait pas non plus, pour cette raison, comment il a pu être acquis par quelqu'un qui a appris à utiliser la règle). Mais, alors que comprendre une proposition de forme déclarative veut dire, du point de vue anti-réaliste, savoir ce qui justifierait une assertion de la proposition, la compréhension d'une règle ne peut certainement pas être identifiée à une connaissance de ce qui justifierait son adoption. Il importe donc de distinguer aussi clairement que possible deux problèmes bien différents : 1) quelles sont les raisons qui peuvent être invoquées en faveur de la reconnaissance de telle ou telle règle ? 2) de quelle manière et jusqu'à quel point l'application observable peut-elle justifier la conviction que la signification de la règle a été comprise correctement et complètement par l'utilisateur ?

Sur le premier point, la position de Wittgenstein est clairement anti-justificationniste et ne manifeste certainement aucune tendance à contester l'usage de règles qui ont l'inconvénient apparent de ne pouvoir être justifiées que par le recours à une notion de vérité transcendante par rapport à toute possibilité de vérification. Dummett estime que nous devons pouvoir expliquer en quoi consiste le fait d'avoir une notion de vérité qui dépasse nos possibilités de vérification, indépendamment de notre acceptation des règles d'inférence utilisées dans la logique bivalente classique : « La logique classique à deux valeurs dépend, pour sa justification, du fait que nous ayons des notions de vérité et de fausseté qui autorisent la supposition que tout énoncé a, de façon déterminée, exactement une de ces deux valeurs de vérité ; elle ne peut, par elle-même, engendrer ces notions [16]. » Une réponse possible consisterait à dire que ce qu'on entend par le fait d'avoir une notion de vérité de l'espèce considérée n'est précisément rien d'autre que ce qui se manifeste dans l'acceptation et l'utilisation des règles de la logique bivalente classique pour les énoncés concernés. Une notion de ce genre ne peut peut-être pas plus être utilisée pour justifier les règles en question que celles-ci ne la justifient, elle est plutôt

16. M. Dummett, « What Is a Theory of Meaning ? » (II), in *Truth and Meaning, Essays in Semantics*, edited by G. Evans and J. McDowell, The Clarendon Press, Oxford, 1976, p. 102-103.

simplement constituée par elles. Une réponse comme celle-là ne satisferait certainement pas Dummett, qui exige précisément que la possession d'une notion de cette sorte pour une certaine catégorie d'énoncés puisse être attestée indépendamment de notre décision de leur appliquer les formes d'inférence dont la légitimité est en question. Mais c'est, en tout cas, une réponse qui correspond bien davantage à l'attitude réelle de Wittgenstein qu'à ce que suggère la littérature anti-réaliste de type justificationniste et révisionniste qui s'inspire de lui. De façon plus générale, il peut être vrai qu'aucune sémantique formulée en termes de conditions d'assertabilité ne permet de justifier de façon satisfaisante certains principes de la logique classique. Mais cela n'est préoccupant que si l'on considère que la logique classique a besoin d'une justification empruntée à une théorie de la signification appropriée.

Le deuxième problème est celui qui a engendré les considérations « sceptiques » que Crispin Wright, Kripke et beaucoup d'autres ont développées à propos de ce que c'est que suivre une règle. Wright a introduit la notion d'« indépendance par rapport à la recherche » (*investigation-independence*) pour caractériser une conception que Wittgenstein donne l'impression de contester sérieusement, à savoir « l'idée que la signification peut être conférée d'une manière telle au moins à certains énoncés de notre langage que la question de savoir s'ils sont corrects est une chose réglée d'avance et indépendante de tout examen que nous pourrions faire — plus généralement encore, l'idée que la question de savoir quels sont les jugements qui sont corrects dans des circonstances particulières est une chose déterminée de façon tout à fait indépendante de la réaction humaine à ces circonstances [17]. » Si l'on accepte de s'engager sur cette voie, on ne voit pas très bien comment la réponse que Wittgenstein a essayé d'apporter au deuxième problème pourrait ne pas comporter des implications révisionnistes encore plus radicales que celles qui découlent de la position adoptée par les intuitionnistes. Car, avant de se demander ce qui permet de considérer qu'une quantification universelle « (x)P(x) » (avec « P » décidable) portant sur une totalité infinie a d'ores et déjà une valeur de vérité déterminée, on devrait d'abord

17. C. Wright, *Realism, Meaning and Truth*, B. Blackwell, Oxford, 1987, p. 148-149.

envisager la possibilité que la valeur de vérité d'un cas particulier « P(a) », qui n'a pas encore été considéré, ne soit pas déterminée indépendamment de la manière dont nous agirons ou réagirons lorsque la question se posera effectivement à nous.

Je ne crois pas du tout que l'on doive suspecter, de façon générale, la sincérité des déclarations anti-révisionnistes de Wittgenstein. Mais je ne suis pas non plus convaincu que l'on puisse disposer aussi facilement que semblent le croire Baker et Hacker, Shanker et d'autres des considérations wittgensteiniennes qui ont servi de base à l'interprétation sceptique et dont les conséquences possibles restent, en tout état de cause, extrêmement difficiles à évaluer.

Quoi qu'il en soit, il n'entrait pas dans mes intentions de proposer ici une discussion détaillée et approfondie des éléments qui, dans les réflexions de Wittgenstein, peuvent donner à première vue le sentiment qu'il va finalement plus loin dans la critique des mathématiques classiques que l'intuitionnisme lui-même, bien qu'il prétende ne pas aller du tout dans le même sens : la conception qu'il a de la nature de l'infini, les questions posées à propos de ce que c'est que suivre une règle, le rôle crucial attribué à la notion d'*Übersichtlichkeit*, le rejet apparent de l'idée d'*investigation-independence*, etc. Je ne prétends pas non plus, bien entendu, avoir donné de la controverse entre le réalisme et l'anti-réalisme et des raisons pour lesquelles Wittgenstein peut (ou ne peut pas) y être impliqué directement le genre d'exposé qu'exigerait réellement l'état actuel de la discussion. J'espère avoir la possibilité de reprendre toutes ces questions dans un prochain ouvrage, qui constituera le troisième et dernier volume de la série inaugurée avec *La force de la règle*.

Depuis les premières publications de Dummett sur cette question, la situation s'est évidemment compliquée dans des proportions considérables et, en fait, presque démesurées par rapport aux résultats concrets que l'on peut encore espérer obtenir. Dummett lui-même a eu l'occasion de préciser, de nuancer et de modifier sur des points importants ses positions initiales [18]. Une question qui reste vigoureusement débattue aujourd'hui est celle de savoir si la formulation de la question dans les termes qu'il a proposés nous fournit réellement une

18. Cf. par exemple M. Dummett, *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Duckworth, Londres, 1981, chap. 20.

prise sur le problème ontologique du réalisme, tel qu'il est habituellement compris. Certains estiment qu'une adhésion non restreinte au principe de bivalence pour une catégorie déterminée d'énoncés est une condition nécessaire et suffisante de l'adoption d'une position réaliste (au sens usuel du terme), d'autres qu'elle est une condition simplement nécessaire, mais non suffisante, d'autres enfin qu'elle n'est en réalité ni une condition nécessaire ni une condition suffisante. Si le critère du réalisme est le maintien du principe de bivalence en présence d'énoncés pour lesquels nous ne disposons pas d'une méthode de décision, le réalisme et l'anti-réalisme tendent à devenir des positions indiscernables — ou, en tout cas, leur désaccord tend à perdre toute signification et toute importance réelles — pour des énoncés qui sont effectivement décidables. Le réalisme est sans danger dans des cas de ce genre ; ou, plus exactement, il serait sans danger s'il n'impliquait véritablement rien de plus que l'acceptation du principe de bivalence, auquel l'anti-réaliste lui-même ne peut rien trouver à redire en l'occurrence. Or le désaccord qui existe, par exemple, entre le réalisme et l'intuitionnisme à propos de ce sur quoi porte et de ce que dit un énoncé mathématique n'est en un certain sens pas moins spectaculaire et total dans le cas de « 2 + 2 = 4 » que dans le cas d'énoncés comme la conjecture de Goldbach ou le théorème de Fermat, que nous sommes pour l'instant incapables de décider. Dummett semble avoir espéré (au début tout au moins) que l'on pourrait aboutir à la solution d'un problème métaphysique de type traditionnel par le biais de considérations un peu plus « scientifiques » que d'ordinaire, qui relèvent de la logique (au sens large). Il est clair que Wittgenstein n'a jamais envisagé ni de près ni de loin quoi que ce soit qui ressemble à cela. Son objectif n'était pas de trancher une controverse métaphysique au profit de l'une ou l'autre des doctrines en présence, mais bien d'éliminer la métaphysique, d'une façon qui, si elle est différente et beaucoup plus subtile, n'est certainement pas moins radicale, pour ce qui est de l'effet espéré, que celle des membres du Cercle de Vienne [19].

19. Le fait que Wittgenstein ait refusé d'échanger la métaphysique des philosophes contre une « métaphysique de physiciens » (celle du Cercle de Vienne) ne signifie pas qu'il ait été prêt à toutes les faiblesses envers la première. Contrairement à une idée à la fois simpliste et rassurante, récuser Carnap ne voulait pas nécessairement dire accepter Heidegger.

Je me rends compte que j'ai probablement, dans cette introduction et peut-être également dans la suite du livre, accumulé beaucoup plus de difficultés que je n'ai été en mesure d'en résoudre. La seule excuse que je pourrais invoquer pour cela, en dehors de mes insuffisances personnelles, est le fait que, pour Wittgenstein, le résultat que l'on peut attendre de la recherche philosophique ne passe pas par une diminution, mais au contraire par une prolifération calculée des problèmes :

> « La philosophie ne résout un problème dans bien des cas qu'en disant : *ici* il y a aussi peu de difficulté que *là*.
> Seulement, par conséquent, en faisant surgir un problème là où il n'y en avait pas auparavant.
> Elle dit : "N'est-il pas tout aussi remarquable que..." et s'en tient là » (RPPI, p. 174).

1. PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES : L'ANTI-RÉVISIONNISME DE WITTGENSTEIN

La raison pour laquelle l'intuitionnisme n'a pas réussi, de façon générale, à ébranler et *a fortiori* à modifier les convictions de la plupart des mathématiciens professionnels est sans doute que, comme le remarque Dummett, « les mathématiques intuitionnistes n'ont pas d'intérêt sans la motivation philosophique qui leur est sous-jacente [1] ». L'intuitionnisme constitue précisément l'exemple le plus typique d'une position ouvertement révisionniste motivée essentiellement par des considérations philosophiques. C'est pourquoi, remarque Dummet, « il est un scandale pour ceux qui estiment que la philosophie n'a pas d'importance, ou qu'elle ne peut affecter quoi que ce soit en dehors d'elle-même, ou tout au moins qu'il y a des choses qui sont sacro-saintes et au-delà de ce dont la philosophie peut se mêler, au nombre desquelles figurent les pratiques acceptées des mathématiciens » (*ibid.*).

Puisque la conception wittgensteinienne des mathématiques manifeste à la fois des sympathies pour l'intuitionnisme (ou, en tout cas, pour une approche de type résolument « constructiviste ») et une volonté constamment réaffirmée de ne pas intervenir dans les affaires des mathématiciens, il n'est pas facile de comprendre comment elle réussit à neutraliser les implications révisionnistes, à première vue inévitables, des présupposés philosophiques sur lesquelles elle s'appuie. Comment ce genre de philosophie peut-il prétendre concilier le conventionalisme radical, qui signifie que toute nécessité procède de la décision d'adopter certaines règles et qu'il n'y a rien derrière les règles,

1. M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, p. VIII.

à quoi l'on puisse se référer pour les justifier ou les contester, avec le constructivisme, qui s'oppose à l'admission de règles ou de procédures d'un certain type essentiellement parce qu'elles ne peuvent être justifiées autrement que par le recours à une notion de vérité qui transcende toute possibilité de vérification corrélative ?

En fait, comme le remarque Crispin Wright, il n'est même pas certain que le conventionalisme de Wittgenstein lui laisse une possibilité quelconque de critiquer, sinon la pratique elle-même, du moins la motivation qu'il y a derrière la pratique du mathématicien classique : « Pour un conventionaliste, cela ne peut être une *erreur* d'accepter les mathématiques classiques ; dans ce cas, que peut-on trouver d'*autre* qui n'aille pas dans les explications, aussi fantaisistes qu'elles puissent être, dont on se sert pour communiquer cette pratique ? Comment peut-il y avoir, comme le supposent les intuitionnistes, une *illusion* de la compréhension là où il y a une pratique sur laquelle on est d'accord[2] ? » Mais, dans ces conditions, comment peut-on éviter les conséquences au moins potentiellement révisionnistes qui résultent, chez Wittgenstein, de l'idée que le sens d'un énoncé mathématique doit être expliqué à partir des notions de démonstration et de réfutation, et non de vérité et de fausseté, des considérations sur le caractère vague et incompris de propositions mathématiques pour lesquelles nous n'avons actuellement aucune idée d'une méthode de décision possible, des remarques critiques sur l'utilisation du tiers exclu et de la réduction à l'absurde dans les démonstrations classiques, etc. ?

Wittgenstein tente de justifier sa position en précisant qu'il n'entend pas critiquer ce que les mathématiciens peuvent avoir envie de faire, mais uniquement les choses philosophiquement dépourvues de sens qu'ils ont tendance à dire sur ce qu'ils font. Comme l'écrit Crispin Wright : « Wittgenstein ne veut pas admettre que la philosophie puisse découvrir que les mathématiciens se trompent dans leur façon de conduire leurs affaires ; ce qu'elle peut découvrir est uniquement qu'ils tiennent un discours dénué de sens *sur* elles » (*ibid.*, p. 252). C'est effectivement ainsi que Wittgenstein lui-même présente les choses : « C'est seulement du verbiage que l'on doit se garder en

2. C. Wright, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Duckworth, Londres, 1980, p. 239.

philosophie. Mais une règle qui est applicable en pratique est toujours en ordre » (PG, p. 282).

Il est vrai que certaines parties ou certains aspects des mathématiques peuvent reposer sur une motivation dont la philosophie est en mesure de révéler la pauvreté ou l'inanité et que l'on peut s'attendre, dans des cas de ce genre, à ce qu'ils perdent une bonne partie de leur intérêt pour ceux dont l'adhésion était déterminée essentiellement par ce genre de motivation. Lorsque, comme c'est le cas dans la théorie des ensembles transfinis, l'attrait du sujet dépend pour une part importante du genre de théorie ou de mythologie philosophiques qui accompagnent généralement la pratique mathématique, il est possible — et Wittgenstein lui-même non seulement l'envisage, mais également, bien qu'il s'en défende parfois, l'espère — que des remarques comme les siennes entraînent indirectement des conséquences révisionnistes. Mais il est clair qu'à ses yeux des considérations philosophiques du genre de celles qu'il développe ne peuvent constituer en aucun cas des raisons suffisantes et contraignantes de renoncer à des méthodes ou à des habitudes mathématiques consacrées. A la différence de la philosophie des mathématiques de l'intuitionnisme, qui est directement révisionniste, celle de Wittgenstein ne peut l'être, dans l'hypothèse la plus favorable, que de façon détournée.

Il est possible que, dans certains cas, le mathématicien se méprenne totalement sur le sens réel de ce qu'il fait : « Quelqu'un procède à une extension des mathématiques, donne de nouvelles définitions et trouve de nouveaux théorèmes — et à un *certain* point de vue on peut dire qu'il ne sait pas ce qu'il fait. — Il a une vague idée d'avoir *découvert* quelque chose comme un espace (et il pense ici à une chambre), d'avoir ouvert les portes d'un royaume, et il proférerait, si on l'interrogeait là-dessus, une bonne quantité de non-sens » (BGM, p. 262). On peut songer ici à ce que Wittgenstein dit à propos de Freud, qu'il soupçonne également d'avoir des idées tout à fait fausses à propos d'un univers inconnu qu'il aurait « découvert », alors qu'il a en réalité procédé simplement à une extension ou à une nouvelle détermination de concept : « Extension d'un concept dans une *théorie* (par exemple, le rêve comme réalisation d'un désir) » (Z, § 449).

Mais le fait que le mathématicien ne sache peut-être pas très bien ce qu'il fait ne peut constituer à lui seul un argument décisif contre ce qu'il fait. Même dans le cas de la théorie des ensembles, qu'il classe dans « les parties des mathématiques dont l'application — ou, du moins, *ce* que les mathématiciens considèrent comme l'application — est totalement fantastique » (BGM, p. 260), Wittgenstein se refuse à tirer la conclusion à laquelle on s'attendrait. On est tenté de dire, même dans un cas de ce genre, que « dans toutes ces formations de concept brillantes il y a pour ainsi dire un noyau solide » et que « c'est lui qui en fait des produits mathématiques » (BGM, p. 275). Il se peut que le mathématicien ait cru un jour découvrir avec $\sqrt{-1}$ une entité étrange qui, élevée au carré, donne -1. Mais cela n'enlève manifestement rien à la sûreté des calculs effectués avec les nombres complexes et des applications que l'on en fait en physique : « Il y a *un* point de vue auquel sa compréhension repose assurément sur une base faible ; mais il effectuera ses inférences en toute sûreté, et son calcul reposera sur une base *ferme* » (BGM, p. 261).

La même chose est vraie de la théorie des ensembles transfinis, dont l'ontologie sous-jacente constitue un exemple grandiose de ce que Wittgenstein appelle l'« alchimie mathématique » : « Imaginez-vous que la théorie des ensembles ait été inventée comme une sorte de parodie des mathématiques par un satiriste. — Par la suite on y aurait vu un sens raisonnable et on l'aurait incluse dans les mathématiques. (Car si l'un peut la considérer comme le paradis des mathématiciens, pourquoi un autre ne la considérerait-il pas comme une bonne plaisanterie ?) » (BGM, p. 264). Wittgenstein considère qu'il ne lui appartient pas en tant que philosophe de juger le calcul, mais seulement la doctrine ou, plus exactement, « ce qui se veut *doctrine* (et ne peut naturellement pas l'être) » (PG, p. 468). Une fois le calcul séparé de la construction philosophique qui l'interprète et croit le justifier, il reste exactement ce qu'il était, même s'il est vrai qu'il ne peut plus désormais se recommander que de lui-même : « La théorie des ensembles, lorsqu'elle invoque l'impossibilité humaine d'un symbolisme direct de l'infini, introduit par là la mésinterprétation la plus grossière que l'on puisse imaginer de son propre calcul. C'est, il est vrai, précisément cette mésinterprétation qui est responsable de l'invention de ce calcul. Mais on ne prouve naturellement pas par là que le calcul en soi soit une chose fausse (tout au plus qu'il est une chose inintéressante), et il est étrange de croire que cette partie des mathématiques est mise en danger par des recherches philosophiques (ou mathématiques) d'une espèce quelconque » (PG, p. 469-470).

Le fait que Wittgenstein et les intuitionnistes aient des conceptions à peu près diamétralement opposées sur les relations de la philosophie et des mathématiques n'exclut évidemment pas *a priori* que le premier ait pu trouver un intérêt et même une raison d'être aux modifications et aux restrictions que les seconds proposent d'introduire dans les mathématiques. Ce qui est vrai est simplement que le mathématicien intuitionniste est, sur ce point, dans la même position que son adversaire classique. Le genre de théorie philosophique qu'il invoque pour exiger certaines révisions ne mérite pas forcément d'être pris plus au sérieux que les arguments utilisés par le mathématicien classique pour défendre les méthodes et les procédures contestées. Il peut y avoir des raisons diverses de changer les règles du jeu, comme le voudraient les intuitionnistes ; mais ce ne sont pas forcément les raisons philosophiques qu'ils invoquent. Tout comme le mathématicien orthodoxe, le mathématicien révisionniste est susceptible de proférer une bonne quantité de non-sens à propos de ce qu'il fait ou voudrait qu'on fasse.

2. VÉRITÉ ET DÉMONTRABILITÉ EN MATHÉMATIQUES

Les intuitionnistes soutiennent (et Wittgenstein est d'accord avec eux sur ce point) qu'il y a en mathématiques une connexion essentielle entre la vérité et la vérification (en l'occurrence, la démonstration). Cela n'a pas de sens de parler d'un énoncé qui transcenderait définitivement toute possibilité de démonstration ou de réfutation comme étant néanmoins vrai ou faux. Les difficultés commencent lorsqu'on se demande ce qu'il faut entendre ici exactement par « vérification ». Une version particulièrement restrictive de la thèse vérificationniste consiste à soutenir qu'un énoncé mathématique vrai est un énoncé actuellement vérifié (pour lequel nous possédons en ce moment une démonstration). Les versions plus raisonnables identifient la vérité avec une notion de vérifiabilité comprise de façon plus ou moins libérale et, en fait, rarement définie de façon précise [3].

La tendance à identifier « vrai » avec « ce qui est connu actuellement comme vrai » se manifeste à différents endroits dans les textes de Brouwer et Heyting. Le deuxième écrit, par exemple : « Une assertion mathématique affirme le fait qu'une certaine construction mathématique a été effectuée [4]. » Et, de façon encore plus explicite : « Un théorème mathématique exprime un fait purement empirique, à savoir le succès d'une certaine construction. "2 + 2 = 3 + 1" doit être compris comme une abréviation pour l'énoncé : "J'ai effectué les constructions mentales indiquées par "2 + 2" et "3 + 1" et j'ai trouvé qu'elles

3. Sur ce point, cf. W. Rabinowicz, « Intuitionistic Truth », *Journal of Philosophical Logic,* 14 (1985), p. 191-228.

4. A. Heyting, *Intuitionism,* An Introduction, 2nd revised edition, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966, p. 3.

conduisaient au même résultat" » (*ibid.,* p. 8). Il arrive à Brouwer de caractériser la position du mathématicien classique comme consistant, entre autres choses, à soutenir qu'il existe des « vérités inconnues », alors que l'intuitionnisme ne reconnaît pas l'existence d'autres vérités que celles qui sont expérimentées comme telles. Pour le mathématicien intuitionniste, « il n'y a pas de vérités non expérimentées et (...) la logique n'est pas un instrument absolument sûr pour découvrir des vérités », la déduction des théorèmes doit être effectuée « exclusivement à l'aide d'une construction introspective [5] ». Les mathématiques classiques, au contraire, « utilisent la logique pour engendrer des théorèmes, croient à l'existence de vérités inconnues et, en particulier, appliquent le *principe du tiers exclu,* qui exprime que toute assertion mathématique (c'est-à-dire, toute attribution d'une propriété mathématique à une entité mathématique) est une vérité ou bien ne peut pas être une vérité » (*ibid.*).

Dans la mesure où Brouwer considère que la vérité réside uniquement « dans les expériences présentes et passées de la conscience » (*ibid.*), les expériences attendues et les expériences attribuées à d'autres ne devant être considérées que comme des anticipations et des hypothèses dans lesquelles il n'y a pas de vérité proprement dite, il lui est évidemment difficile de donner un sens acceptable à l'idée de vérités mathématiques attendant d'être reconnues. Mais, bien qu'il s'exprime par moments comme si un mathématicien intuitionniste ne pouvait, en toute rigueur, parler de vérités mathématiques autres que celles qui sont (ou ont été) expérimentées comme telles, ce qu'il veut dire, en réalité, est essentiellement qu'une vérité mathématique quelconque doit résulter d'une expérience mathématique spécifique, et non pas, par exemple, simplement d'une déduction logique, dont le résultat pourrait ne pas être garanti par une expérience corrélative de ce genre. Contrairement à l'idée que s'en fait le mathématicien classique, la logique n'est pas un instrument qui permet d'anticiper des vérités mathématiques non encore reconnues :

> « C'est seulement après que l'intuitionnisme a reconnu les mathématiques comme une activité mentale autonome de construction qui a lieu intérieurement et qui, bien qu'elle ait

5. L.E.J. Brouwer,, « Consciousness, Philosophy and Mathematics » (1948), in *Collected Works,* vol. 1, p. 488.

> trouvé une expression linguistique extrêmement utile et puisse être appliquée à un monde extérieur, n'a cependant rien à voir ni dans son origine ni dans l'essence de sa méthode avec le langage ou un monde extérieur, que, d'une part, les axiomes sont devenus illusoires et, d'autre part, le critère de vérité ou de fausseté d'une assertion mathématique a été limité à l'activité mathématique elle-même, sans recours à la logique ou à un être omniscient hypothétique. Une conséquence immédiate a été qu'en mathématiques on ne pouvait reconnaître aucune vérité qui n'ait pas fait l'objet d'une expérience et que, pour une assertion mathématique α, les deux cas qui étaient auparavant admis exclusivement ont été remplacés par les quatre suivants : 1. il a été *démontré* que α *est vrai*; 2. il a été *démontré* que α *est faux,* c'est-à-dire absurde; 3. il n'a été démontré ni que α est vrai ni que α est absurde, mais on connaît un algorithme qui mène à une décision quant à la question de savoir si α est vrai ou α est absurde; 4. il n'a été démontré ni que α est vrai ni que α est absurde, et *nous ne connaissons pas non plus d'algorithme qui conduise à l'affirmation que* α *est vrai ou que* α *est absurde*[6]. »

Dans les deux premiers cas, l'énoncé est dit être *jugé* ; dans les trois premiers, il est dit être *jugeable.* Un exemple du quatrième cas est constitué par la proposition de Fermat selon laquelle « Trois nombres naturels a, b, c, ne peuvent satisfaire l'égalité $a^n + b^n = c^n$, pour $n > 2$ » ; et Brouwer considère que toute assertion mathématique qui est dans le quatrième cas constitue une réfutation du principe du tiers exclu.

Selon lui, le principe du tiers exclu doit être compris comme un principe de « jugeabilité » énonçant que toute assertion mathématique peut être jugée, c'est-à-dire soit démontrée, soit réduite à l'absurde. Si « jugeable » signifie, comme c'est le cas, « jugé effectivement ou susceptible de l'être au terme d'une procédure de décision algorithmique connue », la proposition de Fermat constitue effectivement un contre-exemple au principe selon lequel toute assertion mathématique est jugeable, c'est-à-dire, pour Brouwer, au principe du tiers exclu. Mais, d'un autre côté, il est tout à fait possible qu'une proposition de ce genre devienne un jour jugeable et finisse par être jugée effectivement. Une des thèses fondamentales de l'intuition-

6. « The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic » (1955), in *op. cit.*, p. 552.

nisme est qu'il est impossible non seulement d'anticiper les expériences futures du mathématicien concernant la vérité ou la fausseté des assertions mathématiques en général, mais également de codifier dans des règles formelles l'ensemble des procédures mathématiques susceptibles de conduire à ce genre d'expériences, et donc à ce que Brouwer appelle le « sentiment de vérité mathématique », qu'il considère, pour sa part, comme « le seul critère de la vraie mathématique[7] ». En outre, pour un intuitionniste, les résultats de l'activité mathématique n'ont pas d'existence indépendante de cette activité elle-même, de sorte que la raison pour laquelle une assertion mathématique n'est pas décidable actuellement peut très bien être que les entités mathématiques concernées ne possèdent pas *encore* les caractéristiques qui permettraient de leur attribuer ou de leur refuser certaines propriétés. Comme l'écrit Brouwer : « Une assertion qui est dans le quatrième cas peut passer à un certain moment dans l'un des autres cas, non seulement parce qu'un effort de pensée supplémentaire peut engendrer une construction qui effectue ce passage, mais également parce que, dans les mathématiques intuitionnistes, une entité mathématique n'est pas nécessairement prédéterminée et peut, dans son état de libre développement, acquérir à un certain moment une propriété qu'elle ne possédait pas auparavant » (*The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic,* p. 552).

Il serait particulièrement déraisonnable dans ces conditions, pour un mathématicien intuitionniste, d'affirmer qu'il est d'ores et déjà en mesure de produire des contre-exemples déterminés au principe du tiers exclu. La proposition de Fermat ne peut être interprétée comme une réfutation du principe selon lequel toute assertion mathématique est jugeable que si celui-ci est compris comme signifiant que toute assertion mathématique est jugeable *dans l'état présent de la connaissance mathématique.* Brouwer formule de façon beaucoup plus satisfaisante le problème de la validité universelle du tiers exclu lorsqu'il le présente comme équivalant simplement à la question de savoir s'il existe ou non des problèmes mathématiques irrésolubles (cf. *The Unreliability of the Logical Principles* (1908), *op. cit.,* p. 109). « L'intuitionniste, écrit-il, ne peut *a priori* rejeter la possibilité de l'irrésolubilité pour un problème mathématique »

7. « Discussion on the Formalistic Method in Significs », in *op. cit.*, p. 452.

(*op. cit.*, p. 141). En d'autres termes, en plus de l'incertitude dans laquelle nous sommes à propos de tel ou tel cas particulier, « l'incertitude demeure également quant à la question de savoir si le problème mathématique plus général : *Le principium tertii exclusi est-il valable sans exception en mathématiques ?* est résoluble » (*The Unreliability of the Logical Principles*, p. 110). De façon plus générale encore : « En mathématiques il n'y a pas de certitude quant à la question de savoir si la totalité de la logique est admissible et il n'y en a pas quant à la question de savoir si le problème de son admissibilité est décidable » (*ibid.*, p. 111).

La croyance à l'applicabilité universelle du tiers exclu en mathématiques et le postulat de la non-existence de problèmes mathématiques insolubles constituent donc deux expressions différentes de la même conviction *a priori* et, selon Brouwer, dénuée de fondement. En toute rigueur, cependant, Hilbert, auquel Brouwer reproche d'avoir formulé dogmatiquement ce genre de conviction, ne voulait pas dire exactement que tout problème mathématique doit pouvoir être résolu, mais plutôt que tout problème mathématique doit pouvoir être réglé (*erledigt*) complètement, en ce sens que l'on doit pouvoir aboutir, en ce qui le concerne, à une réponse positive, à une réponse négative ou à une démonstration de l'impossibilité d'obtenir une réponse. Dans *Mathematische Probleme* (1900), ce qui est suggéré est que « n'importe quel problème mathématique déterminé doit être tel que l'on peut en venir complètement à bout, soit que l'on réussisse à donner la réponse à la question posée, soit que l'impossibilité de la solution et du même coup la nécessité de l'échec de toutes les tentatives puissent être prouvées[8] ». Même formulé sous cette forme, le principe est évidemment inacceptable pour Brouwer, qui considère que, jusqu'à preuve du contraire, il pourrait parfaitement exister des problèmes mathématiques que nous ne pouvons pas décider dans un sens ou dans l'autre et dont nous ne pouvons pas non plus établir qu'ils sont indécidables.

L'identification de « vrai » à « vérifié actuellement » aurait manifestement des conséquences difficilement acceptables. D'une part, la propriété de vérité, comprise de cette façon,

8. D. Hilbert, « Mathematische Probleme », in *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2e édition, 1970, vol. III, p. 297.

cesserait d'être fermée par rapport à la relation de conséquence logique, puisqu'elle ne se transmettrait qu'à celles des conséquences logiques qui ont été tirées explicitement. D'autre part, il deviendrait tout simplement impossible de parler de vérités mathématiques qui ne sont pas encore connues aujourd'hui, mais pourraient l'être un jour. Comme l'écrit Prawitz :

> « Les philosophes intuitionnistes utilisent quelquefois vrai comme synonyme de la vérité en tant que connue, mais il s'agit manifestement d'un usage étrange et malencontreux. Nous avons besoin d'une notion de vérité telle que, sans tomber dans des absurdités, nous puissions dire, par exemple, qu'il y a de nombreuses vérités qui ne sont pas connues aujourd'hui. Mais avons-nous besoin d'une notion de vérité qui autorise des vérités qu'il n'est pas possible, même en principe, de connaître[9] ? »

Ce dont l'intuitionnisme a besoin est donc une notion de vérifiabilité intermédiaire entre la vérification déjà effectuée et la vérité objective considérée comme une propriété susceptible d'appartenir à un énoncé mathématique indépendamment de toute possibilité de vérification (par nous). Ce qu'il conteste est simplement que nous puissions donner un sens à une notion de vérité qui tolérerait l'existence de vérités que nous ne serions pas capables, même en théorie, de reconnaître.

« L'intuitionniste, constate Brouwer, divise les théorèmes mathématiques démontrés à l'aide de la logique classique, en théorèmes *corrects* (*richtige*) et théorèmes *non contradictoires* (*nichtkontradiktorische*). Seule la première catégorie a pour lui une importance mathématique, la seconde a une importance exclusivement scolastique » (*op. cit.*, p. 142, note 1). Aussi bien du point de vue intuitionniste que du point de vue classique, aucune contradiction ne peut résulter d'une application de la loi du tiers exclu à une assertion qui attribue une propriété à un objet mathématique (c'est-à-dire de la supposition qu'une telle assertion peut être *jugée*) ni de son application simultanée à un nombre fini d'assertions de ce genre. Seule l'application simultanée du principe de jugeabilité à tous les éléments d'une classe

9. D. Prawitz, « Intuitionistic Logic : a Philosophical Challenge », in *Logic and Philosophy*, edited by G.H. von Wright, Martinus Nijhoff Publishers, La Haye, 1980, p. 8.

infinie d'assertions pourrait éventuellement engendrer une contradiction (sur ce point, cf. *Consciousness, Philosophy and Mathematics,* p. 489-490). Mais, du point de vue intuitionniste, une démonstration du caractère non contradictoire de la supposition que tout problème mathématique peut être résolu ne suffit évidemment pas à la rendre vraie ou même simplement acceptable ; et la certitude que les théorèmes dont la démonstration classique s'appuie sur la loi du tiers exclu sont, en tout état de cause, non contradictoires n'autorise nullement à les considérer comme étant, en outre, vrais. Les théorèmes vrais (et les vrais théorèmes) sont uniquement ceux pour lesquels il existe une démonstration acceptable d'un point de vue intuitionniste.

Dire, comme le fait Brouwer, que les mathématiques classiques comportent des théorèmes dont l'intérêt est exclusivement scolastique ne signifie naturellement pas forcément que les problèmes mathématiques correspondants sont eux-mêmes purement scolastiques, mais simplement que, contrairement à ce que croit le mathématicien classique, ils n'ont pas encore été résolus. Cependant, si, comme le fait Wittgenstein, on considère que le sens même de la proposition mathématique est déterminé par sa démonstration et sa compréhension par celle de la démonstration, le risque est que l'on ne puisse attribuer un sens et une importance autres que « scolastiques » à une proposition mathématique qui n'est pas décidée et pour laquelle nous n'avons, en outre, aucune idée d'une méthode susceptible de nous conduire à une décision.

Wittgenstein souligne régulièrement que « l'on peut construire de façon grammaticalement correcte une proposition mathématique sans comprendre son sens » (BGM, p. 283). Cependant, n'attribuer de sens *mathématique* qu'à une proposition que nous avons déjà décidée, ou pour laquelle nous disposons d'une méthode qui nous permet en principe d'aboutir à une décision, serait manifestement abusif. La tendance de Wittgenstein est de dire que nous devons être en possession de la démonstration pour avoir une compréhension mathématique de la proposition mathématique. Mais, d'un autre côté, la recherche d'une méthode de décision semble bel et bien présupposer une compréhension de la proposition qui pourrait difficilement se réduire à la simple compréhension verbale.

La conception réaliste, qui considère que la signification d'une proposition mathématique doit être expliquée en termes

de conditions de vérité qui pourraient être réalisées sans que nous soyons en mesure de reconnaître qu'elles le sont a l'avantage de ménager un espace, apparemment indispensable à la recherche, entre la compréhension de la proposition mathématique et sa vérification éventuelle. En revanche, si une proposition mathématique n'est réellement comprise que lorsqu'elle est démontrée, comment peut-on simplement *chercher* à démontrer une proposition mathématique ? Wittgenstein se rend parfaitement compte qu'il y a là un problème majeur pour une conception comme la sienne :

> « On pourrait également demander : comment se déroule donc le processus dont nous parlons, lorsque nous n'avons pas encore la moindre idée de la manière dont une certaine proposition doit être démontrée et demandons à présent néanmoins : "Peut-elle être démontrée ou non ?", et cherchons des yeux la démonstration qui lui convient ? Lorsque nous "essayons de la démontrer", que faisons-nous là ? Est-ce essentiellement une recherche sans aucun système interne, donc quelque chose qui, à proprement parler, n'est *pas une recherche,* ou bien un plan quelconque peut-il être à notre disposition ? La réponse à cette question donne une indication quant au problème de savoir si la proposition non encore démontrée — ou non encore démontrable — est dépourvue de sens ou non. Car dans un sens très significatif toute proposition douée de sens doit nous indiquer par son sens comment nous pouvons nous convaincre de sa vérité ou de sa fausseté. "Toute proposition dit ce qui est le cas, lorsqu'elle est vraie." Et ce "ce qui est le cas" doit, pour la proposition mathématique, avoir trait à son mode de démonstration. En revanche, effectivement, on ne peut chercher de façon logiquement planifiée, le *sens* que l'on ne connaît pas. Le sens devrait, pour ainsi dire, vous être révélé, et cela de l'extérieur — puisqu'on ne peut le tirer du seul signe propositionnel —, par opposition à la vérité, que la proposition elle-même nous enseigne à chercher et à comparer avec elle » (PB, p. 170).

Une proposition douée de sens doit nous donner une indication sur ses conditions de vérité. Et une proposition mathématique devrait, dans ce cas, nous donner une indication sur ce qui constituerait une démonstration pour elle, ce que, justement, une proposition mathématique que nous cherchons à démontrer ne fait généralement pas par elle-même. Ce qui est le cas, lorsqu'une proposition mathématique est vraie n'est pas constitué par un état de choses mathématique que la proposition représente, mais en quelque sorte par la démonstration elle-même. Et si comprendre une proposition veut dire, pour une proposition mathématique comme pour une proposition ordinaire, savoir ce qui est le cas, lorsqu'elle est vraie, ne risque-t-on pas de voir disparaître purement et simplement la notion de *problème* mathématique à résoudre ? « Mon explication, précise Wittgenstein, ne doit pas éliminer le problème mathématique. Autrement dit, les choses ne sont pas telles qu'une proposition mathématique n'a à coup sûr un sens que lorsqu'elle (ou son contraire) a été démontré. (Dans ce cas-là, son contraire n'aurait, en effet, jamais de sens (Weyl).) D'un autre côté, il se pourrait que certains problèmes apparents perdent le caractère du problème — de la question appelant une réponse par oui ou non » (*ibid.*). Il est donc possible que certains problèmes, bien qu'ils soient formulés dans le langage des mathématiques, aient un caractère purement scolastique. Mais, d'un autre côté, on ne peut certainement pas dire que la question n'acquiert le caractère de problème authentiquement mathématique que lorsque la solution a été trouvée. Ce qui fait de la recherche de la solution une recherche proprement mathématique est qu'elle n'est pas un simple tâtonnement au hasard, qu'elle a toujours un aspect plus ou moins systématique, bien que, comme le remarque Wittgenstein, elle puisse être très différente de la recherche *dans* un système, puisque, dans les cas les plus caractéristiques, le système qui rendrait possible la solution est encore à inventer.

La démonstration se distingue radicalement de la vérification d'une proposition ordinaire déjà comprise, en ce sens que « la démonstration fait partie de la grammaire de la proposition » (PG, p. 370) ; de sorte que « la proposition avec sa démonstration appartient à une autre catégorie que la proposition sans la démonstration » (PG, p. 371). La proposition non démontrée ne représente pas un fait mathématique dont nous ne savons pas encore et dont nous cherchons à savoir s'il est réalisé ou non. Son sens est uniquement celui d'une incitation à la recherche mathématique et d'une directive ou d'une suggestion pour la recherche. Mais, alors qu'une hypothèse empirique (par exemple, une hypothèse médicale) conserve le même sens, lorsqu'elle est vérifiée, la démonstration mathématique modifie la position de la proposition dans le langage lui-même, et donc son sens.

Car ce à quoi la recherche que la proposition non démontrée nous incite à entreprendre est supposée devoir aboutir est justement une détermination de sens.

A la différence de ce qui se passe dans les sciences expérimentales, une description suffisamment précise d'une méthode de vérification est *déjà*, en mathématiques, une vérification :

> « Nous disons par exemple "Cet homme est mort il y a deux heures", et si l'on nous demande "comment cela peut être constaté", alors nous pouvons donner une série d'indications (symptômes) pour cela. Mais nous laissons également ouverte la possibilité que la médecine découvre des méthodes jusqu'à présent inconnues pour constater le moment de la mort et cela veut dire : nous pouvons déjà décrire même maintenant de telles méthodes possibles, car ce n'est pas leur description qui est découverte, on ne fait que déterminer expérimentalement si la description correspond aux faits. Ainsi, par exemple, je peux dire : une méthode consiste à trouver la quantité d'hémoglobine dans le sang, car celle-ci décroît avec le temps après la mort, selon telle ou telle loi. Cela n'est naturellement pas exact, mais, si c'était exact, rien ne serait changé par là à la description que j'ai inventée. Si l'on appelle alors la découverte médicale "la découverte d'une démonstration du fait que l'homme est mort il y a deux heures", alors on doit dire que cette découverte ne change rien à la grammaire de la proposition "L'homme est mort il y a deux heures". La découverte est la découverte du fait qu'une hypothèse déterminée est vraie (ou : concorde avec les faits). Or nous sommes tellement habitués à ce mode de pensée que nous prenons sans nous en rendre compte le cas de la découverte d'une démonstration en mathématiques pour un cas identique ou analogue. A tort : car, pour dire les choses brièvement, on ne pouvait pas décrire la démonstration mathématique avant qu'elle soit trouvée » (PG, p. 370-371).

La compréhension qu'un mathématicien a d'une proposition mathématique qu'il cherche à démontrer est donc tout à fait différente de celle que l'on peut avoir d'une proposition empirique avant d'avoir établi sa vérité ou sa fausseté. La « démonstration » d'un fait comme celui dont il vient d'être question a besoin de raisons qui viennent de l'extérieur, alors qu'« une démonstration mathématique est l'analyse de la proposition mathématique » (PB, p. 179). La nature de la solution peut, bien entendu, être déterminée par des considérations extra-mathématiques. Par exemple, si le problème est celui de la construction d'un pentagone régulier avec la règle et le compas, la construction est caractérisée, du point de vue physique, par le fait qu'elle doit fournir effectivement un pentagone régulier défini en termes de mesures effectuées. Mais « le concept de la *quintisection constructive* (ou du *pentagone constructif*), nous ne l'obtenons bel et bien que par la construction » (PG, p. 362). Nous avons naturellement déjà un certain concept de ce qu'est un pentagone régulier, mais nous n'avons pas encore celui que la construction nous fournit. Nous donnons régulièrement le nom d'*hypothèses* ou de *conjectures* mathématiques à des propositions qui peuvent effectivement avoir été suggérées par une induction de l'espèce ordinaire. Mais, comme le souligne Wittgenstein, « en mathématiques, il n'y a pas de symptômes, il ne peut y en avoir qu'au sens psychologique pour le mathématicien » (PG, p. 384). Une connexion conceptuelle est instaurée ou elle ne l'est pas ; mais elle ne peut être réellement pressentie ou anticipée. Lorsqu'un mathématicien écrit, comme le fait Hadamard, que « la rigueur n'a jamais eu pour objet que de sanctionner et de légitimer les conquêtes de l'intuition [10] », il veut dire que les méthodes contraignantes que le mathématicien se considère comme tenu d'utiliser n'ont pour but que de lui permettre de contrôler et de confirmer des choses qu'au fond il savait déjà d'une autre manière. C'est, du point de vue, de Wittgenstein, un fait significatif et intéressant de la psychologie du mathématicien qu'il soit généralement enclin à voir et à dire les choses de cette façon. Mais il n'en reste pas moins que, lorsque nous essayons, par exemple, de démontrer une conjecture mathématique, nous ne cherchons pas à confirmer des symptômes de nature diverse, mais à découvrir un nouveau critère, que nous ne pouvions pas imaginer avant de l'avoir effectivement découvert. Chercher une loi de distribution des nombres premiers, c'est chercher à remplacer le critère négatif du nombre premier par un critère positif ou, comme Wittgenstein préfère dire, « le critère indéterminé par un critère déterminé » (PB, p. 248) ; et le critère n'est pas de la nature d'un fait dont nous aurions pu éventuellement deviner ou pressentir l'existence.

10. J. Hadamard, « Lettre à E. Borel », in E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 175.

3. LA DÉMONSTRATION PEUT-ELLE MODIFIER LE SENS DE LA PROPOSITION À DEMONTRER ?

Wittgenstein décrit le mathématicien comme inventant sans arrêt de nouvelles formes de représentation, « les unes sous l'incitation de besoins pratiques, les autres pour répondre à des besoins esthétiques — et à toutes sortes d'autres encore » (BGM, p. 99). Son idée est que nous devons concevoir la démonstration essentiellement en termes de modification ou d'innovation conceptuelles, et non d'exploration de contenus conceptuels dont les caractéristiques préexisteraient à la démonstration. Il semble qu'effectivement la démonstration ne puisse être considérée autrement, à partir du moment où l'on admet que, dans le cas de la proposition mathématique, la détermination du sens et celle de la vérité, la fixation de la grammaire et la vérification, ne peuvent être, comme c'est le cas pour une proposition empirique, deux opérations distinctes. L'idée que l'acceptation de la démonstration modifie les concepts impliqués dans la proposition soulève, cependant, de redoutables problèmes, qui ont été exposés et discutés de façon particulièrement détaillée et approfondie par Crispin Wright.

L'un d'entre eux est que la théorie wittgensteinienne semble incapable d'expliquer ce que la conception usuelle de la démonstration explique, pour sa part, de façon très plausible, à savoir le fait que la démonstration ne me laisse normalement aucun choix. Si l'on admet que le sens de la conclusion est modifié par la démonstration, qu'est-ce qui, dans la manière dont nous la comprenions avant la démonstration, peut bien nous contraindre à accepter celle-ci ? Wittgenstein parle de l'adoption de nouveaux critères, de nouvelles règles ou de nouveaux paradigmes comme motivée précisément par la démonstration. Mais ce qui résulte de l'idée que le sens de la proposition doit être déterminé par la démonstration semble être plutôt une conception décisionniste radicale qui ne permet apparemment plus de distinguer clairement entre l'adoption directe d'une convention supplémentaire et la résolution, consécutive à une démonstration, d'appliquer désormais d'une manière nouvelle les concepts impliqués dans la proposition.

Une autre difficulté a trait à la question de savoir *ce que* la démonstration pourrait modifier exactement. Si la compréhension que nous avons de la proposition antérieurement à la démonstration n'a pas un caractère déterminé, on ne voit pas très bien en quel sens la démonstration pourrait la modifier ; et si elle a, au contraire, un caractère suffisamment déterminé, comment peut-on soutenir que l'usage nouveau introduit par la démonstration n'est pas susceptible d'être en accord ou en conflit avec cette compréhension préalable ? La conception ordinaire de la démonstration la présente comme développant simplement le contenu des concepts ou la signification des termes concernés. Wittgenstein considère comme mythique cette idée de contenu conceptuel ou de signification déterminés indépendamment de la démonstration. Dans ces conditions, comment peut-il soutenir que la démonstration modifie cela même dont la conception rivale affirme qu'elle ne fait que l'expliciter ?

Nous avons déjà rencontré dans *La force de la règle,* la difficulté qui a trait à la question de savoir ce que l'on peut vouloir dire au juste lorsqu'on dit que l'introduction d'une nouvelle règle grammaticale équivaut à la décision d'accepter un usage nouveau des concepts concernés. Pour être réelle, la nouveauté devrait, semble-t-il, consister dans le fait que l'on acceptera (*resp.* refusera) désormais d'appliquer le concept à des cas auxquels on aurait auparavant refusé (*resp.* accepté) de l'appliquer. Mais il est difficile de dire quoi que ce soit sur les cas en question, pour la raison que, si la règle exclut, par exemple, certaines possibilités, elles ne peuvent justement plus apparaître comme des possibilités qui se trouvent avoir été simplement exclues par la décision d'adopter la règle. Si une démonstration nous persuade d'accepter comme règle la proposition *p,* l'état de choses représenté par – p ne peut précisément plus être considéré et décrit comme une possibilité. Il n'est donc pas surprenant que, une fois que nous

avons introduit une détermination conceptuelle nouvelle, nous nous trouvions dans l'incapacité d'indiquer exactement en quoi et dans quelle mesure elle a modifié l'usage que nous aurions pu faire des concepts en cause, si la modification en question n'avait pas été introduite. Si l'acceptation de la proposition « 7 + 5 = 12 » comme proposition grammaticale correspond à l'introduction d'une règle de description, il est somme toute normal que nous éprouvions des difficultés particulières à imaginer et à décrire ce que l'adoption de la règle nous interdit précisément de chercher dorénavant à imaginer et à décrire.

Il est vrai que, comme le constate Wittgenstein : « Bien des démonstrations mathématiques nous amènent justement à dire que nous ne pouvons *pas* imaginer ce que nous croyions pouvoir imaginer. (Par exemple, la construction de l'heptagone.) Elles nous amènent à réviser ce que nous considérions comme le domaine de l'imaginable » (PU, § 517). Mais le résultat de la démonstration d'impossibilité n'est-il pas justement que ce que je *croyais* pouvoir me représenter apparaît désormais comme quelque chose que je ne pouvais pas réellement me représenter ? De sorte que le fait de disposer de la démonstration entraîne également comme conséquence l'impossibilité de caractériser celle-ci comme ayant consisté à exclure une possibilité qui existait encore avant elle. La possibilité en question n'était justement rien de plus que l'apparence ou l'illusion d'une possibilité.

Hacking, qui, comme beaucoup d'interprètes de Wittgenstein (y compris le présent auteur), partage son inclination à dire que la démonstration modifie la grammaire de nos concepts, tout en se demandant comment elle devrait être exprimée pour être tout à fait compréhensible et défendable, a tenté de clarifier ce qu'elle implique en rattachant ce que Wittgenstein dit sur ce point aux considérations « sceptiques » qu'il développe à propos de ce que c'est que suivre une règle. « C'est, remarque-t-il, une caractéristique essentielle des arguments sceptiques que l'on ne puisse jamais donner d'exemples réels. Si vous énoncez une règle dont il s'avère qu'elle est indéterminée, alors la règle est défectueuse. Nous pouvons avoir cru autrefois qu'elle était adéquate, mais le fait même que nous l'ayons par la suite trouvée ambiguë montre que nous avions tort. C'est une tautologie, c'est-à-dire que cela fait partie de ce que nous entendons par une règle adéquate[11]. » De façon tout à fait générale, « le doute réel n'est jamais une raison du scepticisme philosophique » (*ibid.*). De toute évidence, les interprètes qui considèrent comme impossible de qualifier de « sceptique », en quelque sens que ce soit, la position de Wittgenstein réagissent de cette façon parce qu'ils soupçonnent ceux qui le font de croire et de suggérer que l'argumentation qu'il développe à propos de ce qu'on appelle « suivre une règle » s'appuie sur des doutes réels ou, en tout cas, cherche à en susciter. Or Wittgenstein ne veut certainement pas dire que nous avons ou que nous devrions avoir le moindre doute sur ce que la règle a prévu pour les cas auxquels elle n'a pas encore été appliquée, mais simplement que l'absence de doute ne repose apparemment sur aucun fait du genre de ceux que nous pourrions songer à invoquer pour la justifier. Comme dit Hacking, « nous n'avons aucune difficulté à utiliser des quantités de règles, mais ce ne sont pas les règles "en elles-mêmes" qui déterminent ce que nous faisons » (*ibid.*, p. 113).

Il y a naturellement des règles qui, comme c'est le cas, par exemple, des règles juridiques, soulèvent régulièrement des problèmes d'interprétation ou d'application. L'interprète a à décider de quelle manière la règle générale doit être « comprise » dans le cas concerné et ce qui doit être fait pour que l'on puisse considérer qu'elle a été appliquée. Mais les règles mathématiques ne soulèvent apparemment aucun problème « herméneutique » de ce genre. La compréhension de la règle semble avoir réglé à l'avance et une fois pour toutes le sort de tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. S'il s'avère que ce n'était pas le cas, nous considérons que la règle était insuffisante ou inadéquate et nous la reformulons en conséquence. En d'autres termes, si une divergence se manifeste à un moment donné, entre des utilisateurs compétents, dans la façon d'appliquer la règle, nous en concluons que sa signification comportait une indétermination ou une ambiguïté objectives, qu'elle autorisait réellement plusieurs interprétations différentes, ce qui, pour une règle mathématique, constitue un défaut tout à fait inacceptable, mais parfaitement corrigible. La seule chose qui semble pouvoir justifier une bifurcation dans la suite

11. I. Hacking, « Rules, Scepticism, Proof, Wittgenstein », in I. Hacking (*ed.*), *Exercices in Analysis*, Essays by students of Casimir Lewy, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, p. 114.

des applications est justement une défectuosité de la règle elle-même. Un désaccord irréductible ne peut se manifester de façon compréhensible au niveau de l'application que dans la mesure où il apparaît que, contrairement à ce que l'on avait cru jusqu'ici, la règle ne réglait pas vraiment ce qu'elle semblait régler.

Aucun exemple de bifurcation réelle ne peut donc être invoqué à l'appui de la thèse sceptique, qui soutient que, à n'importe quel stade de l'application de n'importe quelle règle, une situation sans précédent et susceptible de donner lieu à une bifurcation pourrait logiquement se présenter. Le paradoxe sceptique suggère que tout se passe comme si, en fin de compte, la règle n'avait rien dit pour aucun cas. Mais, lorsqu'un cas critique et sans exemple se présente effectivement, nous considérons que c'est justement parce que la règle n'a pas dit quelque chose qu'elle aurait dû dire. Tout ce que l'on peut espérer tirer de l'observation de la pratique mathématique a donc tendance à confirmer l'existence d'une distinction entre des règles univoques et des règles ambiguës et ne peut suggérer en aucune façon la conclusion adoptée apparemment par le sceptique, qui est que *toute* règle est, d'une certaine façon, irrémédiablement ambiguë.

De quelle manière ces considérations peuvent-elles être rattachées à l'idée que la démonstration introduit un nouveau concept ou un nouveau paradigme dans le langage ? La réponse de Hacking est que, là où différentes interprétations de la règle étaient théoriquement possibles, l'acceptation d'une démonstration peut exclure implicitement l'une ou l'autre de ces interprétations et déterminer ainsi une nouvelle formation de concept. Mais cela n'implique pas que nous devions avoir été conscients de l'existence d'une pluralité d'interprétations, et pas non plus que l'interprétation qui est désormais exclue par la démonstration soit une interprétation que nous aurions pu être réellement tentés d'adopter, s'il n'y avait pas eu la démonstration.

Les règles du jeu d'échecs sont codifiées de façon explicite et apparemment aussi parfaitement comprises que peut l'être une règle quelconque. Littlewood signale, cependant, que la difficulté suivante s'est présentée au cours d'une partie jouée en 1924. Une règle dit qu'un joueur a la possibilité de demander la nullité si la même position des pièces réapparaît pour la troisième fois sur l'échiquier. Mais la règle ne dit pas si les pièces doivent ou non avoir conservé leur identité. Que se passe-t-il si la même configuration apparaît pour la troisième fois, mais d'une manière telle que les tours noires ont échangé leurs positions respectives ?

Ce dont on s'est aperçu en 1924 est que la règle était, en fait, ambiguë. Mais, comme le fait remarquer Hacking, les choses auraient pu en théorie se passer tout autrement, c'est-à-dire d'une manière telle qu'aucune ambiguïté ne soit perçue et aucune décision exigée par la situation. L'argumentation de Wittgenstein semble essentiellement destinée à établir que des règles qui ont un sens apparemment tout à fait déterminé pourraient néanmoins se révéler à chaque instant ambiguës dans l'application. Mais il est clair que la solution qu'il propose consiste, pour une part importante, à reconnaître que toutes sortes de règles dont nous serions tentés, au contraire, de dire à la réflexion qu'elles comportent une ambiguïté intrinsèque sont appliquées d'une manière telle qu'aucune indétermination ne se manifeste et aucune possibilité de choisir entre des interprétations divergentes n'apparaît à un moment quelconque.

En présence du problème qui s'est posé en 1924, la communauté des joueurs d'échecs aurait pu adopter spontanément et unanimement l'une ou l'autre des deux attitudes suivantes : (1) tout le monde considère que la partie ne peut être annulée, parce que deux positions ne peuvent être identiques que si des pièces numériquement identiques se retrouvent au même endroit (interprétation numérique) ; (2) tout le monde considère que la partie peut être annulée, parce que ce qui compte n'est pas l'identité numérique des pièces et l'histoire de la partie, mais uniquement la structure (interprétation structurale). Le point important est que, dans aucun des deux cas, la situation n'a été perçue comme une situation sans précédent et aucune décision n'a été prise concernant la façon correcte d'appliquer la règle à un cas de ce genre. On peut imaginer également la possibilité suivante : (3) la communauté des joueurs d'échecs est divisée en deux sous-communautés qui, pour des raisons politiques, n'ont pas la possibilité de communiquer entre elles ; dans l'une (A), les choses se passent, en 1924, de la façon décrite en (2), dans l'autre (Z), de la façon décrite en (1) ; c'est seulement bien des années plus tard, lorsque la détente s'instaure et que les joueurs des deux camps peuvent à nouveau être

opposés les uns aux autres, que l'on découvre tout à coup, au cours d'une partie, que la règle n'est pas comprise et appliquée de la même façon des deux côtés.

Cette troisième possibilité est, à bien des égards, celle qui se rapproche le plus du genre de situations sur lequel Wittgenstein voudrait nous amener à réfléchir. Les joueurs de chacun des deux camps accuseront sans doute ceux de l'autre d'avoir « décidé » d'appliquer la règle d'une façon qui n'est pas correcte, en ce sens qu'elle ne correspond pas à ce que la règle dit ou, en tout cas, veut dire. Mais la réponse sera probablement, de part et d'autre, que rien de tel n'a été décidé et que les joueurs n'ont fait qu'appliquer la règle conformément à la manière dont ils l'avaient comprise (et dont elle devait être comprise) depuis le début ; et cela, en dépit du fait que, avant que la situation qui s'est présentée en 1924 n'introduise une bifurcation, il aurait été bien difficile de dire qu'ils la comprenaient de cette façon plutôt que de l'autre, puisque leur façon de comprendre la règle pour ce cas précis ne s'était encore manifestée en aucune manière dans l'application qu'ils en faisaient. Le joueur qui dit qu'il avait toujours compris la règle comme ceci plutôt que comme cela veut dire que, si la question s'était posée antérieurement à un moment quelconque, il aurait donné cette réponse-ci plutôt que celle-là. Et il peut être exactement aussi sûr de cela qu'il l'est de la réponse qu'il a donnée effectivement en 1924. Mais, justement, la question ne s'était pas posée avant 1924 ; et il est incontestable que rien dans la manière dont les joueurs des deux camps appliquaient respectivement la règle avant cette date ne permettait de faire une différence de ce point de vue et donc de supposer qu'ils interprétaient différemment l'expression « la même position ».

Il est vrai que la règle se trouve précisément, de notre point de vue, être ambiguë : nous savons depuis 1924 qu'il y avait « réellement » deux possibilités. Mais, d'un autre côté, il est clair qu'il n'y a pas de point de vue complètement extérieur à la pratique des utilisateurs qui permette de décider si une règle est ou non ambiguë « en soi » et d'affirmer, par exemple, qu'ils rencontreront un problème et auront à prendre une décision délicate (ou que, en tout cas, ils *devraient* rencontrer un problème et prendre une décision) à tel ou tel endroit. Des interprétations qui sont théoriquement possibles, en ce sens qu'elles sont conformes à la lettre des règles, peuvent, par exemple, être écartées ou ignorées spontanément comme non conformes à ce que les praticiens appellent l'« esprit du jeu ». S'il est vrai que, comme le suggère l'interprétation sceptique, un problème pourrait théoriquement se poser à n'importe quel endroit, il n'en résulte pas qu'un problème doive nécessairement se poser à un endroit quelconque. Par conséquent, si l'acceptation d'une démonstration impose une certaine interprétation de la règle, elle résout à l'avance (ou, plus exactement, supprime) un problème d'interprétation qui aurait pu éventuellement se poser, mais dont rien ne permet de dire qu'il se serait nécessairement posé.

La théorie du jeu d'échecs peut donner lieu à la formulation de problèmes, de conjectures et de théorèmes qui ressemblent tout à fait à ceux que l'on rencontre dans les mathématiques. Hacking nous invite à considérer la situation suivante. Soit une conjecture telle que : « Sauf dans les circonstances C (décrites de façon appropriée), il n'existe pas de partie dans laquelle les blancs ont l'avantage (une définition précise de ce qu'il faut entendre par "avoir l'avantage" est supposée donnée) et dans laquelle les noirs peuvent arracher la nullité en produisant trois fois la même configuration. » Supposons qu'en 1920 un mathématicien de Z ait fourni une démonstration de la conjecture et, qui plus est, une démonstration constructive (qui met à la disposition des joueurs un algorithme permettant d'éviter, dans tous les cas, d'avoir à concéder la nullité), mais que les gens de A n'aient jamais réussi à la démontrer. Il y aura, dans cette hypothèse, de bonnes raisons de dire qu'à partir de ce moment-là la proposition « Un joueur peut exiger la nullité si la même position apparaît pour la troisième fois sur l'échiquier » n'exprime pas la même règle pour les gens de A et pour les gens de Z. Le théorème est vrai pour la règle que la proposition exprime dans Z, mais non pour celle qu'elle exprime dans A, comme le montre la stratégie utilisée par le joueur qui a réussi à obtenir la nullité au cours du match de 1924, en produisant trois fois la même position (mais avec une permutation des deux tours noires). La démonstration obtenue dans Z a effectué une certaine fixation de concept et imposé une certaine façon d'appliquer la règle.

Ce que la démonstration exclut est que les gens de Z, qui l'acceptent et l'utilisent, puissent se comporter comme l'ont fait les gens de A dans le cas problématique (qui, dans les faits, n'a

posé aucun problème à aucune des deux communautés). Le cas qui aurait pu être critique (bien qu'il ne l'ait pas été dans la réalité) ne pouvait plus l'être après la démonstration. Si les gens de Z avaient été enclins à considérer comme acceptable une stratégie comme celle du joueur de A, il leur aurait fallu, du même coup, admettre que leur démonstration n'en était pas réellement une. (Bien que la démonstration ait en principe pour effet d'exclure la possibilité d'un contre-exemple, il arrive cependant bel et bien que quelque chose soit finalement accepté comme un contre-exemple et la démonstration remaniée ou abandonnée pour cette raison.)

La morale que Hacking tire de cette fiction est la suivante. Dummett s'est demandé si la conception de Wittgenstein ne devrait pas, pour avoir un sens non trivial, être comprise comme impliquant, par exemple, que la démonstration du fait que, si l'on coupe un cylindre par un plan, la courbe d'intersection est une ellipse nous oblige à reconnaître comme étant des ellipses des figures planes qui n'auraient pas été reconnues comme telles avant la démonstration [12]. L'exemple choisi n'est pas de Wittgenstein, mais, comme il prend soin de le préciser, de Hacking lui-même. Et, contrairement à Dummett, Hacking soutient qu'aucune conséquence paradoxale de l'espèce indiquée ne résulte de l'idée wittgensteinienne que la démonstration modifie notre concept de ce qui peut être considéré comme une ellipse : « La doctrine de Wittgenstein n'a *pas* pour conséquence qu'en un sens pratique quelconque "il y a [comme le dit Dummett] ou il peut y avoir des figures planes formées par l'intersection d'un cylindre avec un plan qui n'auraient pas pu être reconnues comme des ellipses avant que la démonstration ne soit donnée". Ce qui est affirmé est uniquement que le théorème exclut certaines applications de nos concepts autres que celles que nous faisons, mais qui sont consistantes avec toutes les définitions de nos concepts qui existent jusqu'à maintenant. "Exclut" est cependant trop fort, parce que nous pouvons toujours retirer une démonstration lorsque nous croyons avoir trouvé un contre-exemple. Le mieux serait de dire qu'une démonstration, acceptée et utilisée comme une démonstration, exclut à première vue des options différentes qui, selon la doctrine scepti-

12. Cf. M. Dummett, « The Justification of Deduction », in *Truth and Other Enigmas*, p. 121.

que, sont toujours logiquement possibles. Selon cette doctrine, la personne qui détermine expérimentalement que la forme [d'une tache lumineuse produite par le soleil à travers une fenêtre circulaire] sur le plancher est une ellipse est semblable aux joueurs d'échecs en (2) ou (1). Cet exemple précis pourrait avoir été sans précédent et discriminant. Cependant, si le théorème est démontré et utilisé comme un théorème, alors cette possiblité est à première vue exclue » (*op. cit.*, p. 123).

Une difficulté qui aurait pu en principe se présenter à propos de la question de savoir si la forme de la tache doit ou non être décrite comme étant elliptique a été réglée à l'avance par la démonstration. Mais il n'y a aucune raison de s'attendre à ce qu'une difficulté de ce genre se présente effectivement : il est probable que quelqu'un qui n'a aucune idée de la démonstration pourrait tout à fait conjecturer que la forme de la tache est une ellipse et, en procédant par essais et erreurs, déterminer avec une précision suffisante pour la pratique les foyers de celle-ci, autrement dit, aboutir à un verdict qui concorde parfaitement avec celui que la démonstration impose. Ce qui est problématique dans la conception que Wittgenstein a de la démonstration mathématique pourrait donc être résumé ainsi : pour pouvoir donner un sens à l'idée que quelqu'un qui démontre un théorème introduit une nouvelle fixation de concept, il faudrait, semble-t-il, pouvoir envisager une possibilité pratique de désaccord entre l'usage nouveau du concept et l'usage qui pouvait en être fait avant la démonstration ou qui aurait pu en être fait s'il n'y avait pas la démonstration. Mais, d'une part, la possibilité en question n'est pas comprise par Wittgenstein et n'a pas à être comprise comme une possibilité pratique ; d'autre part, le fait que la proposition démontrée soit désormais acceptée et utilisée comme une règle signifie précisément que la possibilité d'un désaccord réel (et non pas simplement apparent) de ce genre est éliminée jusqu'à nouvel ordre : nous ne pouvons donner aucun sens pratique à l'idée d'une figure dont nous devrions admettre à la fois qu'elle a été engendrée par l'intersection d'un cylindre et d'un plan et que, cependant, elle n'est pas le genre de chose que nous avions toujours appelé une ellipse.

Une ellipse est définie généralement comme une courbe plane fermée, qui est telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points intérieurs appelés « foyers » est

constante. Il est, à première vue, tout à fait déconcertant de soutenir que la démonstration du fait que la courbe d'intersection d'un cylindre et d'un plan est une ellipse a pour effet de prévenir certains usages déviants du concept d'ellipse qui, bien que nous n'ayons à peu près aucune chance de les rencontrer en pratique ou même simplement d'être tentés par eux, sont cependant compatibles avec la définition. Car la réaction normale sera probablement de dire qu'ils ne sont justement pas compatibles avec la définition et que c'est pour cette raison que nous ne sommes pas tentés de les adopter. La réponse de Hacking est que la question n'a de sens que si l'on accepte la doctrine sceptique que Wittgenstein développe à propos de ce que c'est que suivre une règle et que c'est seulement du point de vue de cette doctrine que « les *Remarques* de Wittgenstein peuvent être appliquées en toute généralité » (*ibid.*, p. 120). Mais qualifier la doctrine de « sceptique » ne signifie évidemment pas du tout que l'usage que nous faisions du concept avant la démonstration était, du point de vue pratique, fâcheusement indéterminé ou sous-déterminé et que la démonstration a introduit quelque chose comme un élément de résistance supplémentaire à une anarchie constamment menaçante.

Si l'obtention de la démonstration supprime une possibilité de bifurcation qui, dans la plupart des cas, était purement théorique, il vaudrait probablement mieux dire que les conditions d'application du concept sont, de façon générale, surdéterminées, plutôt que réellement modifiées, par la démonstration : dans l'exemple discuté par Hacking, la démonstration nous fournit simplement une raison nouvelle, et qui a l'avantage d'être absolument décisive, de considérer que la figure obtenue est une ellipse. Crispin Wright a suggéré que Wittgenstein, au lieu de dire, comme il le fait régulièrement, que la démonstration instaure des connexions qui n'existaient pas avant elle, modifie les concepts impliqués, introduit des critères et des modes d'utilisation nouveaux pour les expressions concernées, etc., aurait dû se contenter de dire simplement qu'« il n'y a pas de sens objectif auquel le fait d'accepter une démonstration particulière quelconque laisse tous les concepts impliqués exactement comme ils étaient » (*Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, p. 443). Si pour Wittgenstein, comme le pense Crispin Wright, « on ne peut donner de contenu objectif à l'idée de continuer à utiliser la même expression de la même manière » (*ibid.*, p. 85), on ne peut évidemment pas non plus en donner un à l'idée d'une modification introduite par la démonstration, qui aurait pour conséquence que l'expression sera désormais utilisée d'une manière différente de celle dont elle l'aurait été auparavant.

Le seul sens positif que l'on puisse donner à la nouveauté qui est introduite par la démonstration est celui qui correspond au rejet de la conception recognitionnelle de la nécessité : la démonstration nous persuade d'accepter une connexion conceptuelle nouvelle et cette acceptation n'est pas contrainte au sens où pourrait l'être la reconnaissance d'un fait qui s'impose à nous, elle implique un élément de décision essentiel. La supposition que l'on ne peut, selon Wittgenstein, donner un contenu ou un sens objectifs à l'idée de continuer à utiliser une expression de la même manière qu'auparavant pourrait évidemment être contestée, parce qu'elle correspond probablement bien davantage à l'énoncé du paradoxe apparent qu'il cherche à résoudre qu'à la solution qu'il propose. Ce que Wittgenstein rejette n'est pas notre conviction ordinaire qu'il y a quelque chose d'objectif dans notre idée de continuer à faire la même chose, mais une conception philosophique erronée de la manière dont cette objectivité devrait être assurée pour pouvoir exister réellement, qui nous expose à la tentation de conclure finalement qu'il n'y a *rien* d'objectif dans ce que nous appelons « continuer à utiliser une expression de la même manière ». Il est néanmoins incontestable que la nouveauté dont parle Wittgenstein ne peut, si elle est réelle, se situer qu'à l'endroit où Crispin Wright la place.

Wittgenstein lui-même a éprouvé manifestement des difficultés sérieuses à expliquer clairement ce que l'on peut vouloir dire lorsqu'on dit que la démonstration crée un nouveau concept ou un nouveau paradigme. Les différentes façons, plus ou moins approximatives, d'exprimer la chose qu'il a proposées dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques* ne le satisfaisaient, de toute évidence, pas complètement. On le voit même reconnaître à un moment donné : « La démonstration est notre nouveau modèle (*Vorbild*) de ce à quoi ressemblent les choses lorsque rien n'est enlevé et rien n'est ajouté. Mais ces mots montrent que je ne sais pas très bien de quoi la démonstration est un modèle » (BGM, p. 170). On pourrait dire que ce qui est commun à toutes les démonstrations est que « par la construction d'un signe je force la reconnaissance d'un signe » (BGM, p. 164). Et la reconnaissance que j'obtiens est quelque chose comme une conversion à une manière déterminée d'utiliser le signe (la proposition démontrée). Mais ce qui complique les choses est que l'acceptation de la démonstration peut, semble-t-il, correspondre également à l'adoption d'un nouveau paradigme démonstratif : « Le concept que crée la démonstration peut être par exemple un nouveau concept d'inférence, un nouveau concept de l'inférence correcte. Mais quant à savoir *pourquoi* je reconnais cela comme une façon correcte d'inférer, c'est une chose qui a ses raisons en dehors de la démonstration » (BGM, p. 172). Wittgenstein dit encore que : « La démonstration crée un nouveau concept — dans la mesure où elle crée ou est un nouveau signe. Ou — dans la mesure où elle donne une place nouvelle à la proposition qui est son résultat. (Car la démonstration n'est pas un mouvement, mais un chemin.) » (BGM, p. 173.) Mais quelle est exactement la relation qui existe entre le fait de créer un nouveau chemin dont la proposition se trouve être le point d'aboutissement (ce qui lui confère effectivement une place qu'elle n'avait pas auparavant) et le fait de nous convaincre d'adopter un usage nouveau de la proposition ?

Wittgenstein se demande si le point commun minimal entre toutes les démonstrations n'est pas qu'elles montrent que et comment l'on peut construire telle ou telle configuration de signes à partir de telles ou telles autres en procédant selon telles ou telles règles. Ce qui est démontré à proprement parler serait alors, un peu comme dans le cas d'une construction euclidienne, « une proposition géométrique — une proposition concernant la géométrie des transformations de signes » (BGM, p. 169). En d'autres termes :

> « ... Si l'on dépouille les mathématiques de tout contenu, il resterait que certains signes peuvent être construits à partir d'autres selon certaines règles.
>
> Le minimum que nous devons reconnaître serait que ce signe, etc., — et cette reconnaissance serait au fondement de n'importe quelle autre. — » (*Ibid.*)

Cette suggestion se heurte, cependant, à la difficulté suivante : « ... La suite de signes de la démonstration n'entraîne pas nécessairement une reconnaissance quelconque après elle. Mais, une fois que nous nous mettons à la reconnaissance, il n'est pas nécessaire que ce soit la reconnaissance "géométrique" » (*ibid.*). Réduite à une simple procédure de construction d'un signe à partir d'autres signes, la démonstration ne se fait pas nécessairement reconnaître comme telle; et, lorsqu'elle se fait reconnaître comme telle, ce n'est pas nécessairement ce genre de reconnaissance qu'elle obtient. Ce qui donne son sens et son importance à une démonstration est évidemment le fait que les signes ont déjà par ailleurs un sens et une utilisation en dehors de la démonstration elle-même (cf. BGM, p. 167). Et il n'est pas du tout prouvé que ce que nous reconnaissons lorsque nous reconnaissons une démonstration soit plus facilement ou plus sûrement reconnaissable lorsque nous oublions complètement ce que nous savons sur les signes, notamment leur interprétation usuelle, pour ne nous intéresser qu'à leurs possibilités de transformation purement formelles, autrement dit, à l'aspect que Wittgenstein qualifie de « géométrique ». Wittgenstein n'est apparemment même pas certain que ce soit bien cela que nous reconnaissons, que toute démonstration soit au minimum une démonstration de constructibilité en ce sens-là. Il n'est pas vrai que la formalisation complète de la démonstration, c'est-à-dire sa réduction à une suite d'opérations effectuées sur les signes, réussisse dans tous les cas à isoler et à préserver l'élément spécifique qui, dans la démonstration originale, faisait l'objet de la reconnaissance et distinguait la démonstration d'une simple expérience.

Crispin Wright voit dans le « rejet de l'objectivité de l'identité conceptuelle diachronique » la thèse cardinale de la philosophie des mathématiques du deuxième Wittgenstein (*op. cit.*, p. 205). Ce rejet ne peut évidemment pas vouloir dire que la permanence et la stabilité des concepts à travers les applications successives que nous en faisons constituent une illusion complète. Car il serait tout simplement impossible, dans ce cas-là, de parler d'applications successives d'un *même* concept et, pour finir, de continuer à admettre que nous avons bel et bien des *concepts,* que nous appliquons régulièrement à des cas nouveaux, avec la conviction de « faire la même chose » qu'auparavant. Ce qu'il faut comprendre est, comme on l'a vu, qu'il n'y a pas de fait de signification objectif dont les jugements que nous formulons à propos de la conservation ou de la modification du sens initial présumé d'une expression à travers ses utilisations subséquentes constitueraient la simple reconnaissance obligée.

Nous pouvons donc continuer à dire, comme nous le faisons habituellement, que l'usage nouveau introduit par la démonstration était, en fait, déterminé et imposé par la signification ancienne. Mais il n'y a pas de fait objectif de nature conceptuelle auquel nous pourrions nous référer pour justifier notre utilisation du vocabulaire de la détermination et de l'accord dans des cas de ce genre. Il se trouve simplement que la démonstration nous amène à accepter un usage nouveau, que nous sommes d'accord pour caractériser comme conforme à l'usage ancien ou impliqué par lui. Puisque nous jugeons de l'identité et de la concordance d'après les résultats de la démonstration, nous ne pouvons espérer expliquer la démonstration en termes d'identité ou de concordance de la signification nouvelle avec l'ancienne.

Dans la mesure où Wittgenstein ne manifeste normalement aucune tendance révisionniste à l'égard de nos façons de parler usuelles, il pourrait difficilement soutenir que nous avons tort de considérer la démonstration comme nous la considérons effectivement, c'est-à-dire comme le prototype de la procédure conservative, qui est contraignante, justement, parce qu'elle n'implique aucune innovation facultative et aucune décision plus ou moins optionnelle concernant la signification des termes qui y figurent. Une démonstration correcte est une démonstration dont personne ne pourrait contester le résultat sans être soupçonné d'en avoir mal compris les termes ou d'avoir décidé arbitrairement de ne tenir aucun compte de ce qu'il avait déjà accordé implicitement. Ce que Wittgenstein conteste est uniquement que notre conviction de n'avoir fait que développer ou expliciter quelque chose qui était déjà là nous oblige à accepter le genre de représentation dont nous nous servons pour la justifier et qui nous semble seul susceptible de la justifier.

Notre concept de ce qui constitue une démonstration correcte ne semble évidemment pas plus susceptible qu'aucun autre de nous obliger par lui-même à reconnaître quelque chose comme constituant un exemple supplémentaire de démonstration correcte, sous peine de devoir admettre que nous n'utilisons plus de la même façon qu'auparavant l'expression « démonstration correcte ». Et il ne semble pas non plus y avoir de sens objectif auquel on pourrait dire que l'adhésion donnée à une démonstration nouvelle laisse intact notre concept antérieur de ce qui constitue une démonstration en général. Il n'y a pas de concept platonicien de l'inférence ou de la démonstration, transcendant par rapport à toute espèce de jugement de reconnaissance et d'acceptation, qui puisse justifier à l'avance et une fois pour toutes le genre d'adhésion inconditionnelle que nous sommes susceptibles d'accorder spontanément, lorsque nous les rencontrons, à des applications nouvelles de notre concept ancien de la démonstration ou de l'inférence.

Si, comme il est logique, la thèse de la non-objectivité de l'identité conceptuelle diachronique s'applique également au concept de démonstration lui-même, qu'en résulte-t-il exactement ? Le genre d'objectivité que nous attribuons à la démonstration est supposé consister dans le fait qu'indépendamment du contexte de l'invention et de la ratification, elle comporte quelque chose qui, en tous lieux et en tous temps, la rend intrinsèquement reconnaissable comme telle. Or Wittgenstein semble précisément nier l'existence de tout contraste intéressant et éclairant entre le fait qu'une démonstration en soit « objectivement » une et le fait qu'elle soit reconnue unanimement comme telle, au moment où la question se pose. Il serait cependant erroné d'en conclure que le concept de ce qui constitue une démonstration correcte peut être identifié purement et simplement avec celui de ce qui est accepté comme tel. Il peut arriver et il arrive effectivement qu'une démonstration universellement acceptée par la communauté des « experts » soit rejetée par la suite comme fausse ou incorrecte. Et, si le mathématicien renonce à une démonstration qu'il croyait posséder, à cause d'un contre-exemple auquel il n'avait pas songé, il dira naturellement que le contre-exemple a été découvert, et non pas inventé, qu'il était là depuis toujours et n'avait simplement pas été remarqué. Mais dire que le contre-exemple existait objectivement ne consiste pas nécessairement à invoquer un fait qui, indépendamment de notre capacité de le reconnaître et de l'utiliser comme tel, rendait la démonstration erronée et inacceptable en soi, c'est-à-dire d'une façon qui n'a rien à voir avec le fait que nous soyons d'accord, en pareil cas, pour la rejeter. Le contre-exemple nous fournit une raison objective de rejeter la démonstration. Mais le terme « objectif » pourrait signifier simplement que la situation n'est pas de celles qui laissent une

place quelconque à des désirs, des préférences et des décisions de l'espèce que nous qualifions, par contraste, de « subjective ».

Ce qui semble correct à un moment donné est quelque chose qu'il peut sembler correct, à un autre moment, de réviser ou de rejeter. Mais à quel moment et de quelle manière ce qui semble correct est-il comparé avec ce qui *est* correct, indépendamment du fait qu'il nous apparaît comme tel ? Il y a évidemment une grande différence entre ce qui est correct et ce qui semble simplement correct. Mais la distinction n'existe, justement, que pour autant que *nous* la faisons, comme c'est le cas, par exemple, lorsque nous caractérisons comme une erreur objective le fait d'avoir accepté temporairement une démonstration pour laquelle nous avons découvert par la suite un contre-exemple. Même la communauté dans son ensemble peut commettre ce qui sera reconnu par la suite comme une erreur. Mais il n'est pas certain que notre concept de vérité ou de correction objectives implique quelque chose de plus substantiel que ce simple fait. Dire que nous pouvons accepter momentanément une démonstration qui n'en est pas une et donc faire une application erronée du concept de démonstration n'oblige pas à caractériser l'erreur en général en termes de déviation par rapport à une réalité qui se situerait définitivement au-delà de ce que nous sommes d'accord, dans une situation de ce genre, pour décrire en termes d'incompréhension, d'ignorance ou d'inconséquence « objectives » (plutôt que, par exemple, en termes d'adhésion ou de refus comportant un élément d'appréciation subjective).

Il semble donc que, même si les remarques de Wittgenstein ne nous contraignent pas à changer quoi que ce soit à ce que nous avons l'habitude de dire sur ce genre de choses, elles ont au moins pour effet de dépouiller de toute respectabilité l'image qui sert apparemment de fondement à notre conception usuelle de l'objectivité de la démonstration. C'est un fait que la démonstration ne nous laisse aucun choix réel et que nous ne choisissons pas ; mais il n'y a pas de différence philosophiquement exploitable entre le fait que nous devions accepter le résultat obtenu, si nous voulons respecter la signification des termes impliqués dans la démonstration, et le fait que nous considérions comme impossible de le rejeter sans nous rendre coupables d'un oubli ou d'une infidélité à l'égard de la signification que nous avons donnée aux termes en question.

4. LE CONCEPT DE DÉMONSTRATION PEUT-IL ÊTRE UN CONCEPT VAGUE ?

Dans ses leçons sur les fondements des mathématiques de 1939, Wittgenstein s'efforce à un moment donné de persuader ses auditeurs (en particulier Turing) qu'il y a une différence essentielle entre

1) Chercher une licorne d'après une image de licorne, et

2) Chercher la construction de l'heptacaïdécagone régulier avec la règle et le compas d'après celle du pentagone.

Dans les deux cas on est à la recherche de quelque chose qui est lié par une certaine analogie à quelque chose que l'on a déjà. Mais Wittgenstein soutient que le mot « analogue » n'est pas utilisé de la même façon dans les deux cas. « Que serait, se demande-t-il, la découverte de la construction de l'heptacaïdécagone au sens auquel je découvre la licorne ? Elle consisterait à découvrir un morceau de papier qui a été perdu et sur lequel elle a été écrite » (WLFM, p. 66). Celui qui demande à quelqu'un d'effectuer la construction de l'heptacaïdécagone d'après le modèle de la construction du pentagone lui demande de trouver quelque chose qui soit susceptible d'être reconnu comme constituant, pour l'heptacaïdécagone, l'analogue de ce qui a été fait pour le pentagone. Mais il ne peut évidemment pas lui indiquer de façon plus précise le genre de projection qu'il cherche, puisque cela reviendrait pour finir à lui fournir tout simplement la réponse, à savoir la construction demandée.

Le lecteur normal réagira probablement comme le fait Turing, en disant qu'aussi vague que puisse être, de façon générale, le terme « analogue », sa signification est néanmoins fixée de façon suffisamment précise dans le cas mathématique pour qu'il reste simplement à déterminer s'il existe quelque

chose (comme c'est effectivement le cas pour l'heptacaïdécagone) ou s'il n'existe rien (comme c'est le cas pour l'heptagone) qui soit analogue à ce qui a été effectué pour le pentagone. Mais Wittgenstein soutient que le mathématicien (Gauss) qui a trouvé la construction de l'heptacaïdécagone a non seulement « *inventé* un nouveau mode de projection, qu'il y a des raisons d'appeler tel ou tel » (*ibid.*), mais également « changé la signification des mots "construction" et "analogue" » (WFM, p. 76). De la même façon, quelqu'un qui cherche à démontrer, par exemple, la conjecture de Goldbach, cherche à faire pour la proposition qui l'exprime quelque chose d'analogue à ce qui a été fait pour tel ou tel théorème de la théorie des nombres. Mais il faut, d'une certaine manière, attendre d'avoir la démonstration pour savoir ce que signifie, en l'occurrence, « analogue ».

Wittgenstein estime que la personne qui a effectué la construction de l'heptacaïdécagone d'après celle du pentagone « aurait pu faire bien des choses, aurait pu produire bien des espèces différentes d'analogie – ou même démontrer que c'était impossible » (WLFM, p. 85). C'est cette idée que Turing trouve inacceptable, et il est difficile de ne pas lui donner raison. Pour Wittgenstein, la conviction mathématique pourrait être exprimée sous la forme « Je reconnais ceci comme analogue à cela ». Par exemple, je reconnais cette suite de transformations comme analogue à ce que montrent la règle ou le paradigme. Mais « reconnaître » est utilisé ici non pas comme dans « Je le reconnais comme Lewy », mais comme dans « Je le reconnais comme supérieur à moi », et indique l'acceptation d'une convention (WLFM, p. 63). C'est une suggestion assez étrange, parce que, s'il est vrai que « Je le reconnais comme étant mon supérieur » indique bien quelque chose comme l'acceptation d'une convention, « Je le reconnais comme supérieur à moi » ressemble à première vue bien davantage à la reconnaissance d'un fait (réel ou imaginaire).

Il est difficile de croire que quelqu'un qui procède à une extension analogique de l'usage du terme « construction » modifie en même temps l'usage du terme et celui de l'expression « analogue ». Car il semble qu'aussi bien l'application du concept de construction que celle du concept d'analogie au cas de l'heptacaïdécagone devaient précisément avoir été rendues possibles par la signification ancienne, même si elles étaient effectivement impossibles à anticiper. Dans le cas contraire, il faudrait admettre une chose que Wittgenstein n'est certainement pas disposé à soutenir de façon générale, à savoir que la signification est pour ainsi dire le produit final d'une sorte de création qui se poursuit indéfiniment à travers la succession des différents usages, ce qui est de toute façon incompatible avec l'idée que l'usage nouveau modifie la signification antérieure, puisqu'il n'y a dans ce cas-là rien à modifier. Wittgenstein estime que : « Le pentagone est analogue à d'autres figures régulières ; mais dire à une personne de trouver une construction analogue aux constructions qui lui ont été données n'est pas lui donner une idée quelconque de la construction. Avant la construction réelle, il n'a pas l'idée de la construction » (WLC 1932-1935, p. 8). Pourtant, demander à quelqu'un de faire pour un polygone régulier quelque chose d'analogue à ce qui a été fait pour d'autres revient bien, semble-t-il, à lui donner une certaine idée de la construction, sans lui donner la construction elle-même. Lorsque je reconnais la construction ou l'impossibilité de l'effectuer, je reconnais que « c'est la chose la plus naturelle à dire » (WLFM, p. 63). Mais d'où provient l'impression que j'ai de reconnaître quelque chose de bien différent et qui était déjà là depuis toujours ? Est-ce simplement du fait que, pour obtenir la reconnaissance, il n'est pas nécessaire de réexpliquer le sens des mots « construction » et « analogue » ?

Ce qui est clair, en tout cas, est que, pour Wittgenstein, les applications extrêmement diversifiées que nous faisons de termes comme « construction » ou « démonstration » ne sont unifiées en dernier ressort par rien d'autre qu'un réseau extrêmement complexe d'analogies reconnues, mais qui pourraient également, en principe, ne pas l'être. Comme il l'écrit :

> « Il n'y a pas de "démonstration générale". Le mot "démonstration" change sa signification, tout comme le mot "échecs" change sa signification. Par le mot "échecs" on peut entendre le jeu qui est défini par les règles actuelles du jeu d'échecs ou le jeu tel qu'il a été joué pendant des siècles dans le passé avec des règles changeantes.
>
> *Nous* déterminons s'il doit n'y avoir qu'une seule démonstration d'une proposition, ou deux démonstrations ou un grand nombre de démonstrations. Car tout dépend de ce que nous appelons une démonstration » (WLFM, p. 39).

Il peut, naturellement, être utile d'indiquer à l'avance des formes, des modèles ou des schémas généraux de raisonnement. Mais Wittgenstein objecte que, comme la forme sujet-prédicat de la logique aristotélicienne, ils ne déterminent justement rien de plus qu'une forme qui est « ouverte et dans l'attente des applications nouvelles les plus diverses » (BGM, p. 295). Et il radicalise par moments cette idée jusqu'au point de suggérer que, « si l'on donne à quelqu'un une idée de démonstration en lui donnant une série de démonstrations, alors, si on lui demande une nouvelle démonstration, on lui demande une nouvelle idée de démonstration » (WLC 1932-1935, p. 9).

Tout comme celui des intuitionnistes, le concept de démonstration qui intervient dans les considérations de Wittgenstein sur ce qui donne à la proposition mathématique son sens et son importance *mathématiques* n'est donc pas le concept exact du logicien, mais un concept beaucoup plus proche de la pratique réelle du mathématicien et affecté du même genre d'indétermination relative : « Le mot "démonstration" (...), nous voulons l'utiliser d'une manière telle qu'il n'est pas défini simplement par une disjonction de démonstrations qui, en ce moment précis, sont en usage, nous voulons l'utiliser dans des cas dont, à l'heure actuelle, "nous ne pouvons encore nous faire aucune idée" » (PG, p. 300). Comme la plupart des concepts de ce genre, le concept de la démonstration n'est appréhendé qu'à travers des exemples particuliers ou des suites d'exemples particuliers de démonstration, assortis d'un « etc. ». Et, comme le rappelle constamment Wittgenstein, la compréhension acquise sur la base d'une simple liste d'exemples n'a rien d'un pis-aller et peut être aussi précise et aussi complète que la compréhension d'un mot ou d'une expression en général est susceptible de l'être. Il n'y a pas de différence fondamentale, de ce point de vue, entre le concept de *démonstration* et un concept comme celui de *jeu* : « Mon savoir, mon concept du jeu ne sont-ils pas exprimés entièrement dans les explications que je pourrais donner ? A savoir dans le fait que je décris des exemples de jeu de différentes sortes ; montre comment, par analogie avec ceux-ci, on peut construire de toutes les façons possibles d'autres jeux ; dis que je consentirais sans doute difficilement à appeler encore telle ou telle chose un jeu, et dans d'autres choses du même genre » (PU, § 75). La référence à ce que Spengler a montré à propos de l'usage de termes comme « peuple », « roi », « religion », etc. (PG, p. 299), dans le contexte d'une discussion sur les significations multiples et plus ou moins apparentées dans lesquelles est utilisé le mot « démonstration », suggère indiscutablement une certaine sympathie pour une conception relativiste (et historiciste) du concept de démonstration mathématique lui-même.

Il est vrai que, lorsque nous nous demandons, par exemple, à quoi pourrait ressembler la démonstration d'une proposition arithmétique pour l'instant non démontrée, sans avoir aucune idée précise de la manière dont elle pourrait l'être un jour, nous croyons pouvoir affirmer au moins que la démonstration, une fois découverte, pourra être représentée dans un système formel qu'il est d'ores et déjà possible d'indiquer. Cette certitude ne nous donne bien entendu aucune idée du genre d'innovation conceptuelle et théorique qui peut être nécessaire pour aboutir effectivement à une démonstration. Mais, si elle est justifiée, il semble que ce soit précisément cette possibilité (au moins théorique) de transformer après coup la démonstration en une procédure rigoureusement formelle, obéissant à des règles codifiées de façon explicite, qui confère à notre concept de démonstration mathématique son caractère déterminé et objectif. Nous devons sans doute inventer la démonstration elle-même, mais certainement pas en même temps ce qui fait d'elle une démonstration.

Cette objection n'est cependant pas convaincante, d'un point de vue wittgensteinien, pour plusieurs raisons. Pour commencer, le concept formel de démontrabilité est, comme celui de définissabilité, un concept pour lequel nous ne disposons pas d'une définition absolue, mais seulement d'une définition relative au choix d'un certain formalisme. Et le théorème de Gödel établit précisément que la démontrabilité dans un système formel déterminé quelconque ne peut être substituée entièrement à la notion de vérité arithmétique intuitive. Il n'existe donc pas de formalisme susceptible de délimiter une fois pour toutes l'ensemble des procédures qui pourraient nous amener à reconnaître comme vraie une proposition arithmétique. De toute façon, notre adoption d'un concept formel déterminé de la démonstration ne peut être justifiée qu'en référence à une notion intuitive préalable de la démonstration et doit être jugée, pour une part essentielle, en fonction de l'aptitude du concept

à représenter correctement les démarches qui ont été reconnues et acceptées, indépendamment de lui, comme ayant le caractère et la force de ce que nous appelons, de façon générale, une « démonstration ». On ne peut donc dire, en toute rigueur, ni que le concept formel remplace le concept intuitif ni que la formalisation complète d'une démonstration est en mesure de lui conférer en quelque sorte unilatéralement le statut de démonstration authentique, comme si celui-ci avait été auparavant nécessairement douteux ou en suspens.

Les intuitionnistes regardent la démonstration comme étant essentiellement une construction mentale et seulement de façon secondaire un processus susceptible d'être représenté dans un symbolisme quelconque. Brouwer considère comme possible l'existence d'une démonstration mathématique qui ne pourrait être transcrite adéquatement dans aucun langage. Wittgenstein n'a bien entendu aucune espèce de sympathie pour ce genre d'idée; et le théorème de Gödel ne constitue certainement pas un argument que l'on pourrait invoquer en sa faveur. Ce qu'il démontre est simplement, comme le dit Dummett, que, déjà dans le cas d'une théorie mathématique bien circonscrite comme la théorie des nombres, « la classe des démonstrations intuitivement acceptables est une classe indéfiniment extensible » (« The Philosophical Significance of Gödel's Theorem », in *Truth and Other Enigmas,* p. 200). L'extensibilité indéfinie est, pour un concept, une variété particulière de ce que Dummett appelle « *inherent vagueness* ». Elle consiste dans le fait que, pour toute caractérisation explicite déterminée du concept, il existe une extension naturelle qui fournit un concept plus large et qui est obtenue conformément à une loi de production d'extensions de ce genre, d'une manière telle que la caractérisation élargie est formulée dans des termes qui font référence à la caractérisation précédente qu'elle englobe. C'est ce qui se passe lorsqu'on essaie de donner une caractérisation purement formelle de la notion de démonstration arithmétique intuitivement acceptable; et, comme le note Dummett, le théorème de Gödel apporte de l'eau au moulin intuitionniste au moins sur le point suivant : « Il est clair que les intuitionnistes ont raison d'affirmer que, si le sens des énoncés mathématiques doit être donné dans les termes de la notion d'une démonstration mathématique, cela devrait être dans les termes de la notion intrinsèquement vague d'une démonstration intuitivement acceptable, et non dans les termes d'une démonstration à l'intérieur d'un système formel quelconque » (*ibid.*, p. 201).

Dans une remarque de 1938, Wittgenstein observe que : « Gödel nous montre une obscurité dans le concept de "mathématiques", qui s'est exprimée dans le fait que l'on a considéré les mathématiques comme un *système*[13]. » Et dans une autre, de 1941, il constate : « *Ce qu'*il démontre ne nous concerne en rien, mais nous devons nous expliquer avec ce *mode de démonstration* mathématique » (*ibid.*). Bien qu'il soit de tradition chez les commentateurs des *Remarques sur les fondements des mathématiques* de déplorer la pauvreté et la maladresse des considérations qui portent sur le théorème de Gödel, Kreisel crédite cependant Wittgenstein d'une idée intéressante et éclairante sur ce que Gödel a réellement fait :

> « *Une anecdote* datant des années quarante (...) :
> Quelques jours après plusieurs commentaires succincts, raisonnables, des démonstrations d'incomplétude gödéliennes, Wittgenstein se dit, enthousiasmé, que Gödel devait tout de même être un mathématicien extraordinairement original, puisqu'il déduisait des propositions arithmétiques de propriétés aussi banales — sous-entendu : métamathématiques — que la WF [*Widerspruchsfreiheit* (consistance)]. Gödel avait découvert une méthode de démonstration toute neuve !
> *Remarque incidente.* De toute évidence, cette gouttelette de bon sens remplace — avec profit ! — tout un nuage de dialectique débridée dans les *Bemerkungen* de Wittgenstein.
> Ce qui était visé (dans l'anecdote mentionnée ci-dessus) est l'interprétation métamathématique (donc, après l'arithmétisation de concepts métamathématiques), grâce à laquelle les propositions arithmétiques concernées sont devenues immédiatement évidentes ; comparer avec l'interprétation géométrique de formules algébriques, par exemple de la forme $ax^2 + bx + ay^2 + cy + d = 0$, à partir de laquelle il devient évident que deux formules de ce genre n'ont pas plus de deux solutions communes (x, y), puisque deux cercles se rencontrent en deux points au plus. Il faut remarquer ici que, considérée du point de vue logique, la démonstration de WF $\rightarrow$ G, G étant la formule gödelienne formellement indécidée, n'a aucunement besoin de moyens logiques nouveaux. (Pour les connaisseurs : l'implication peut être démontrée de façon récursive primitive.) La nouveauté se situe *à l'intérieur* de l'arithmétique élémentaire. Que G exprime sa propre indérivabilité formelle, si le système est consistant, on le lit, en fait, tout simplement sur la formule G[14]. »

Comme le note Kreisel, pour un philosophe qui, comme c'est le cas de Wittgenstein, s'intéresse essentiellement à la démonstration et, plus précisément, à certaines propriétés structurales des démonstrations comme l'*Überschaubarkeit* et l'*Einprägsamkeit*, les démonstrations de complétude et d'incomplétude perdent fatalement leur signification centrale, puisqu'elles ont trait uniquement à la démontrabilité et ne disent à peu près rien sur la démonstration elle-même. Même là où nous disposons d'une théorie formelle complète, nous utilisons fréquemment, pour la résolution de certains problèmes, des concepts qui ne sont pas formalisables et des méthodes pour lesquelles il n'existe pas de règles formelles complètes, ce qui, pour parler comme Wittgenstein, enlève à l'incomplétude une bonne partie de son « piquant philosophique ». Néanmoins, Wittgenstein a fini, semble-t-il, dans les années quarante par trouver à la démonstration d'incomplétude de Gödel un sens positif et philosophiquement stimulant qui le satisfaisait entièrement. Ce que Gödel avait démontré (le résultat de la démonstration, en tant que résultat mathématique) ne pouvait à ses yeux intéresser directement le philosophe, mais seulement le mathématicien. Ce qui, en revanche, devait nécessairement l'intéresser était le fait que Gödel ait inventé une méthode de démonstration tout à fait inédite en mathématiques et nous ait ainsi incités à « modifier la perspective à partir de laquelle nous voyons les mathématiques » (*Ludwig Wittgenstein,* Sein Leben in Bildern und Texten, p. 261).

Si nous réussissons à oublier momentanément la difficulté représentée par le résultat de Gödel, nous pouvons imaginer (en évitant, bien entendu, de songer à tel ou tel système formel particulier) une théorie mathématique (par exemple, l'arithmétique) formalisée d'une manière telle que n'importe quel énoncé

13. Cf. *Ludwig Wittgenstein,* Sein Leben in Bildern und Texten, herausgegeben von M. Nedo und M. Ranchetti, Suhrkamp-Verlag, Francfort, 1983, p. 261.

14. G. Kreisel, « Einige Erläuterungen zu Wittgensteins Kummer mit Hilbert und Gödel », in *Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie,* Akten des 7. internationalen Wittgensteins Symposiums (Kirchberg a. W., 1982), Hölder-Pichler-Tempsky, Vienne, 1983, p. 300-301.

exprimable dans le formalisme de la théorie y soit en même temps démontrable ou réfutable. Il serait en pareil cas assez naturel de se représenter tout énoncé de la théorie comme possédant déjà une démonstration ou une réfutation écrites quelque part à notre insu et susceptibles d'être reconnues immédiatement comme telles, si elles devaient un jour nous tomber sous les yeux. Wittgenstein objecterait néanmoins, comme le remarque Dummett (*Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, p. 172-173), que cela ne signifierait pas encore qu'il existe d'ores et déjà une démonstration ou une réfutation de la proposition et que celle-ci est, par conséquent, nécessairement vraie ou fausse, puisque au moment où nous découvririons la démonstration de la proposition (ou de sa négation), nous devrions encore décider si nous voulons ou non l'accepter comme une démonstration. A cela s'ajoute le fait que nous serions vraisemblablement, dans la plupart des cas, bien incapables de prendre une quelconque décision de ce genre. Comme le fait remarquer Wittgenstein, une démonstration purement formelle de l'égalité arithmétique « 1 000 + 1 000 = 2 000 » dans le symbolisme des *Principia Mathematica* serait sans signification et sans force pour quelqu'un qui n'a pas déjà été convaincu par les moyens arithmétiques ordinaires de ce que doit être le résultat du calcul.

Il est clair que la démonstration complètement formalisée du moindre théorème de la théorie des nombres, si nous décidions de l'écrire entièrement, cesserait d'être *übersichtlich*, et donc de constituer une démonstration, de sorte que nous devrions utiliser la démonstration informelle ordinaire comme critère pour juger de son résultat et décider éventuellement de l'accepter comme une démonstration. Ce qui se passe ici est, en fait, à peu près l'inverse de ce qu'on est tenté de croire à première vue : au lieu que la formalisation complète rapproche la démonstration abrégée et simplifiée de l'idéal de la démonstration en général, c'est au contraire, dirait Wittgenstein, uniquement par analogie ou par extension à partir de l'usage ordinaire du terme « démonstration » que nous décidons d'appliquer également ce terme à ce qui remplacerait, dans le formalisme choisi, nos démonstrations usuelles, si elles y étaient transcrites intégralement.

C'est probablement ce que cherche à suggérer le passage suivant des *Remarques sur les fondements des mathématiques* :

« Nous ne disons pas de deux hommes dans un tableau *avant tout* que le premier paraît plus petit que l'autre et *ensuite seulement* qu'il paraît être loin derrière. Il est, peut-on dire, bien possible que la dimension plus réduite ne nous saute pas du tout aux yeux, mais *uniquement* la position plus reculée. (Cela me semble avoir un lien avec la conception "géométrique" de la démonstration.) » (BGM, p. 171). Ce qui nous convainc dans la démonstration est quelque chose que nous lisons directement sur l'image elle-même, et non pas quelque chose que nous inférons inconsciemment d'une autre chose que nous avons dû voir ou entrevoir d'abord, comme si nous apercevions en quelque sorte pour commencer la démonstration réelle complètement développée derrière la démonstration ordinaire, et ensuite seulement la forme condensée et structurée qui fait l'objet de la reconnaissance.

Comme l'observe Kreisel (*ibid.*, p. 299), l'utilisation de règles formelles est un présupposé pour un traitement sûr des données, lorsque, comme dans le cas d'une calculatrice digitale, celles-ci sont elles-mêmes des objets formels. Mais la formalisation complète de la démonstration, qui rend le processus mécaniquement reproductible et, de ce point de vue, parfaitement sûr n'a aucun rapport direct avec la recherche des propriétés « géométriques » qui permettent, en fait, à la démonstration de se faire reconnaître comme telle. Les « bonnes » propriétés géométriques, celles qui entraînent la conviction, ne sont pas nécessairement celles que la formalisation fait apparaître. Alors qu'elle vise en principe à expliciter complètement la géométrie de la démonstration mathématique, elle peut très bien avoir pour effet, en pratique, de la détruire complètement dans la plupart des cas.

Kreisel note que, comme beaucoup d'autres autour de 1930, Wittgenstein a été très enthousiasmé par les aspects fondamentaux du programme hilbertien de formalisation. (Il était, cependant, nettement plus réservé en ce qui concerne les considérations philosophiques qui accompagnent, chez Hilbert, l'exposé du programme, comme en témoigne notamment la remarque citée par Kreisel, « *Heiliger Frege !* », qu'il a écrite en marge d'un exemplaire de *Über das Unendliche* (1925). Il semble en tout cas avoir été convaincu à cette époque que tout ce qu'il y a à dire d'essentiel sur le raisonnement mathématique peut être formulé en référence à ce que Kreisel appelle les caractéristiques

« formelles-calculatoires » (*formal-rechnerische*) du processus. Mais les textes de cette période manifestent également des réticences fondamentales, qui portent sur trois point principaux. 1) A la différence de ce que Hilbert a cherché à faire pour des disciplines diverses comme la logique, l'arithmétique, la géométrie, etc., Wittgenstein ne s'est pas intéressé à la formulation de règles formelles spécifiques. A la place de l'analyse des démonstrations dans le style de la logique mathématique usuelle, qui se concentre sur le problème de la validité logique des principes et des règles, ce qu'il préconisait est une analyse qui se contente d'atteindre le but cherché sans formuler d'énoncés généraux sur sa méthode — une tendance qui, aux yeux de Kreisel, a été illustrée de façon typique par l'« analyse axiomatique plus subtile de la démonstration » (*ibid.*, p. 295) en termes de structures fondamentales, telle qu'on la trouve chez Bourbaki, qui renonce à la pureté méthodologique caractéristique de la démarche de Hilbert au profit de la recherche de simples « généralisations utiles ». 2) La démonstration formelle, sans prise en considération de certaines propriétés géométriques cruciales des dérivations formelles, lui semblait être une mauvaise idéalisation; il ne pouvait donc pas considérer la formalisation de toutes les démarches impliquées dans le processus du calcul ou de la démonstration comme un objectif qui mérite réellement d'être poursuivi. 3) Il n'était pas du tout convaincu de l'importance — effectivement exagérée — que Hilbert attribue aux démonstrations de non-contradiction et n'a apparemment pas soupçonné qu'elles pourraient néanmoins avoir un sens et un intérêt réels, différents de ceux que Hilbert leur attribuait. Comme le remarque Kreisel, sa réaction sur ce point est, en fait, aussi excessive que l'étaient les prétentions de Hilbert.

Le problème essentiel, aux yeux de Hilbert, était évidemment celui de la sûreté ou de la fiabilité des mathématiques dans leur ensemble; et il était persuadé qu'une solution inattaquable, définitive et uniforme allait pouvoir lui être apportée : « ... Selon moi, toutes les recherches qui ont été effectuées jusqu'ici sur les fondements des mathématiques ne montrent pas encore de chemin qui permette de formuler toute question concernant les fondements d'une manière telle qu'une réponse univoque à cette question doit nécessairement pouvoir être obtenue. Mais c'est ce que j'exige : il ne doit en principe pas pouvoir y avoir

de doute dans les affaires mathématiques, pas de demi-vérités et pas non plus de vérités appartenant à des espèces principiellement différentes. Ainsi, il doit être possible — pour prendre immédiatement un point éloigné, difficile du programme — de formuler le postulat du choix de Zermelo d'une manière telle qu'il soit valide dans le même sens et de façon tout aussi sûre que l'assertion arithmétique 2 + 2 = 4[15]. » Wittgenstein ne considérait évidemment pas pour sa part que la fiabilité des mathématiques soit le moins du monde douteuse ou compromise et que la réussite d'une entreprise fondationnelle comme celle de Hilbert aurait pour effet de la restaurer ou de l'augmenter réellement. A ses yeux, il pouvait y avoir, comme dans le cas de n'importe quelle autre science, un problème local concernant la certitude de telle ou telle proposition mathématique, mais certainement pas un problème global concernant la certitude ou la fiabilité des mathématiques en général.

En dépit des objections de principe que Wittgenstein a formulées contre la problématique des fondements traditionnelle, Kreisel le soupçonne d'être resté finalement encore beaucoup trop tolérant à l'égard de cette problématique, en particulier beaucoup trop indulgent envers la *formalisation*, comme condition nécessaire supposée de la rigueur mathématique : « C'est ainsi que, dans un échange avec Turing sur la question de savoir comment on peut rendre "plus" formelles les démonstrations ordinaires, W ne remet pas en question cet objectif, mais tient simplement pour acquis (WLFM, p. 127) que cela serait "facile" à faire, soit dit en passant, contrairement à une opinion presque universelle[16]. » Kreisel souligne à juste titre que ce genre de chose (le passage d'une démonstration donnée, par exemple, dans un texte mathématique, à une formalisation) n'a habituellement rien de facile, surtout si l'on tient compte de la distinction entre l'effort (absolu) et le rapport : effort consenti/rémunération obtenue. Mais l'erreur d'évaluation que commet ici Wittgenstein n'est probablement que la conséquence du peu d'intérêt qu'il accorde, de façon générale, à ce type d'entreprise. Il ne considère certainement

15. D. Hilbert, « Neubegründung der Mathematik » (1922), in *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, p. 157.

16. G. Kreisel, « Compte rendu de *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939* », *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84 (1978), p. 83.

pas, en tout cas, que les démonstrations mathématiques ordinaires doivent, dans tous les cas, être rendues plus formelles pour devenir mathématiquement plus rigoureuses. Les exemples tout à fait familiers de processus qui sont (ou pourraient être) acceptés comme une démonstration de leur résultat, qu'il propose et discute dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques,* pourraient, au contraire, inciter un adepte de la rigueur formelle à le soupçonner d'être excessivement tolérant envers le genre de « démonstrations » intuitives que les élèves débutants proposent spontanément et dont les professeurs de mathématiques ont quelquefois bien du mal à les persuader qu'elles ne démontrent rien.

Wittgenstein était certainement tout à fait opposé à l'idée qu'il pourrait exister en quelque sorte deux espèces de démonstration, qui n'ont pas le même degré de fiabilité : « Si vous dites : il y a une démonstration qui convainc seulement les gens de la vérité, et, d'un autre côté, il y a une démonstration qui rend véritablement la chose indubitable — il y a quelque chose qui n'est pas correct » (WLFM, p. 237). On pourrait croire, en particulier, que la démonstration complètement formalisée constitue le seul exemple de démonstration réelle et sûre. Mais Wittgenstein rejette explicitement toute conception dualiste de cette sorte :

> « L'idée qu'il y a deux espèces de démonstration : "la démonstration *réelle*" — la démonstration qui donne une base ferme à la proposition, de sorte qu'elle est inébranlable et ne risque pas de s'effondrer — et la démonstration qui a pour objet de vous convaincre. Elle ne rend pas la proposition inébranlable — elle vous fait seulement croire qu'elle est inébranlable.
>
> Cette idée provient d'une conception fausse de ce qu'une démonstration fait réellement — et d'une idée fausse du rôle que jouent les propositions mathématiques et logiques » (*ibid.*, p. 238-239).

Il est effectivement facile (en un certain sens du mot « facile ») de transformer la démonstration d'une égalité arithmétique ordinaire en une démonstration logique dans le symbolisme et dans le style des *Principia Mathematica.* Mais, d'une part, s'il est possible, par exemple, d'arriver au même résultat par la

technique de la multiplication et par une suite de transformations russelliennes, cela ne signifie nullement que la procédure russellienne soit la démonstration réelle, alors que la technique de la multiplication suffit simplement pour entraîner la conviction (cf. WLFM, p. 132-133). D'autre part, l'effort exigé risque d'être tout simplement démesuré par rapport au bénéfice obtenu, si, comme le dit Wittgenstein, « la certitude logique des démonstrations (...) ne va pas au-delà de leur certitude géométrique » (BGM, p. 175). L'intérêt essentiel de la nouvelle (technique de) démonstration réside dans le fait qu'une connexion importante a été instaurée entre deux calculs, et non dans le fait que le résultat est devenu plus assuré. Car, pour ce qui est de la certitude du résultat, c'est généralement plutôt le contraire qui est vrai. La certitude géométrique est en effet une chose qui peut disparaître complètement lorsqu'on passe de la forme abrégée à la forme complètement développée de la démonstration : « La démonstration logique, par exemple de l'espèce russellienne, n'a de force démonstrative qu'aussi longtemps qu'elle possède également la force de conviction géométrique. Et une abréviation d'une telle démonstration logique peut avoir cette force de conviction et être, grâce à elle, une démonstration, alors que la construction complètement exécutée à la manière russellienne n'en est pas une » (BGM, p. 174). Une fois la démonstration logique intégralement formalisée, la correction de l'application des règles de transformation à n'importe quelle étape du processus peut être mécaniquement testée et vérifiée ; mais le processus d'ensemble peut cesser tout simplement d'apparaître comme une démonstration. En d'autres termes, nous demandons à la démonstration mathématique à la fois quelque chose de plus et quelque chose de moins que ce genre d'assurance purement mécanique. Le bénéfice principal de la formalisation ne doit pas être cherché, de façon générale, dans un accroissement de l'intelligibilité (dont dépend naturellement, pour une part importante, la fiabilité) des démonstrations.

5. LE PRINCIPE DU TIERS EXCLU ET LES AUTRES PRINCIPES LOGIQUES

Brouwer présente généralement comme le « premier acte de l'intuitionnisme » la séparation complète des mathématiques d'avec le langage mathématique, en particulier des aspects de l'utilisation du langage qui sont décrits par la logique théorique. L'exactitude et la rigueur mathématiques se situent, pour lui, dans l'esprit, et non, comme c'est le cas pour le formaliste, sur le papier. Si l'on admet ce point, le thème intuitionniste classique de la « non-fiabilité » des lois logiques en découle de façon immédiate. Lorsqu'on décide d'ignorer ce que Brouwer appelle le « caractère introspectif » d'une construction mathématique pour ne s'intéresser qu'à sa description linguistique, il n'y a aucune garantie *a priori* que des transformations linguistiques appliquées à l'expression de la construction, conformément à tel ou tel principe de la logique classique, conduiront à un résultat qui possède encore un sens et une réalité mathématiques. Les lois logiques ne sont donc pas valides *a priori* et la question de savoir si elles peuvent être appliquées légitimement à des constructions et à des transformations purement mathématiques, dont on décide d'oublier momentanément le caractère proprement mathématique, doit être posée à chaque fois. La réponse est positive pour des principes comme le principe de contradiction et le principe du syllogisme ; elle est négative pour le principe du tiers exclu.

L'opinion de Brouwer est que « la logique théorique tout comme la logistique sont des *sciences empiriques* et qu'elles *appliquent* les mathématiques ; par conséquent, elles ne peuvent fournir aucune information de quelque nature que ce soit sur l'organisation de l'intellect humain ; il y aurait de meilleures

raisons de les classer sous la rubrique de l'*ethnographie* que sous celle de la *psychologie* » (« On the Foundations of Mathematics » (1907), in *Collected Works,* I, p. 74). C'est, du reste, comme n'étant au fond rien de plus qu'un fait remarquable de l'ethnographie qu'il a tendance à considérer la croyance, acceptée en toute quiétude jusqu'à une date récente, à la validité universelle du tiers exclu :

> « La longue croyance à la validité universelle du principe du tiers exclu en mathématiques est considérée par l'intuitionnisme comme un phénomène de l'histoire de la civilisation, qui est de la même espèce que la croyance des temps anciens à la rationalité de π ou à la rotation du firmament autour d'un axe qui passe à travers la terre. Et l'intuitionnisme essaie d'expliquer la longue persistance de ce dogme par deux faits : en premier lieu, le caractère manifestement non contradictoire du principe pour une assertion singulière arbitraire ; en second lieu, la validité pratique de la totalité de la logique classique pour un groupe étendu de *phénomènes familiers simples.* Le deuxième fait a apparemment fait une impression si forte que le jeu de pensée qu'était originairement la logique classique est devenu une habitude de pensée profondément enracinée qui a été considérée non pas seulement comme utile, mais même comme apriorique » (*Consciousness, Philosophy and Mathematics,* p. 492).

Le fait que des applications indues du principe du tiers exclu à des propriétés de systèmes mathématiques bien construits ne risquent pas d'aboutir à une contradiction complique singulièrement la tâche du mathématicien intuitionniste en le privant d'un argument qui serait certainement décisif. Mais Brouwer soutient qu'« une théorie incorrecte que l'on ne peut entraver par aucune contradiction qui la réfute n'en est pas pour autant moins incorrecte, de même qu'une politique criminelle que l'on ne peut entraver par aucune justice répressive n'en est pas pour autant moins criminelle » (« Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie » (1923), in *op. cit.,* p. 270). Selon lui, la croyance à la validité universelle du tiers exclu a eu également des conséquences fâcheuses dans le domaine des sciences empiriques, puisque le principe ne devrait être appliqué en toute rigueur qu'à « des parties des sciences de la nature sur lesquelles peut être projeté un système mathématique fini déterminé » (« Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe » (1923), in *op. cit.*, p. 275). Son applicabilité non restreinte au domaine des lois naturelles implique, par conséquent, « la croyance au caractère fini et à la structure atomiste du monde » (*ibid.*, p. 275-276). Brouwer critique également les applications douteuses du principe en épistémologie (sous la forme de l'argument consistant à invoquer en faveur d'une explication non pas seulement l'absurdité de toute autre explication, mais même simplement l'impossibilité pratique d'en trouver une autre) et dans des questions pratiques comme, par exemple, l'administration de la justice pénale (cf. « Mathematik, Wissenschaft und Sprache » (1929), in *op. cit.*, p. 423). Et il déplore qu'à chaque fois que l'application inconsidérée du principe a conduit à des conséquences inacceptables on se soit contenté de reconsidérer les faits ou les lois naturelles concernés, au lieu de remettre en question la confiance traditionnellement accordée aux principes logiques (*ibid.*).

Selon lui, la fiabilité pratique des principes logiques repose sur le fait qu'« une bonne partie du monde de l'intuition (*Anschauungswelt*) manifeste, relativement à son organisation finie, beaucoup plus de fidélité et de contentement que l'humanité elle-même » (*ibid.*). En d'autres termes, Brouwer considère que le principe du tiers exclu a fait ses preuves dans des domaines où les conditions empiriques dont dépend son applicabilité se trouvent être réalisées et a été ensuite étendu abusivement à des domaines où elles ne le sont pas ou pas forcément. Dans le cas des mathématiques, son application à des systèmes finis ne soulève aucun problème, parce qu'il fournit simplement le moyen d'aboutir plus rapidement à un résultat qui pourrait toujours en principe être obtenu directement : « Pour des propriétés déduites à l'intérieur d'un système principal (*Hauptsystem*) fini déterminé à l'aide du principe du tiers exclu, il existe toujours la certitude que, à la condition de disposer d'un laps de temps suffisant, on peut parvenir à leur confirmation empirique » (*Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten*, p. 269). Cette certitude *a priori* ne change évidemment rien au fait que même la mathématique des systèmes finis constitue « un acte de pensée complètement premier et autonome » (*ibid.*), qui n'a besoin d'aucune justification extrinsèque et peut, en particulier, se passer entièrement de celle des lois logiques. Si celles-ci en

sont venues à être considérées comme *a priori*, c'est essentiellement parce que leur application s'est révélée, pour des raisons indépendantes, justifiée dans les situations les plus courantes de la vie ordinaire et de la science; et on les a alors étendues sans précaution à la mathématique des systèmes infinis, en oubliant que « les résultats obtenus sur cette voie ne sont d'une manière générale ni en pratique ni en théorie accessibles à une confirmation empirique » (*ibid.*).

Dans sa thèse de 1907, Brouwer ne considérait les applications du tiers exclu en mathématiques que comme de simples tautologies qui ne nous procurent aucune information. Alors que le syllogisme peut encore être compris comme un exemple tout à fait élémentaire de raisonnement *mathématique*, cet élément proprement mathématique disparaît complètement dans le cas d'une proposition comme « Une fonction est ou bien différentiable ou bien non différentiable », qui ne dit rien de plus que : « Si une fonction n'est pas différentiable, alors elle n'est pas différentiable », et se réduit, par le fait, à une simple trivialité purement verbale (cf. *On the Foundations of Mathematics*, p. 75). Autrement dit, si la logique dépend, de façon générale, des mathématiques et constitue, en réalité, des mathématiques appliquées, le principe du tiers exclu n'a même pas ce genre de contenu et n'a, en fait, aucun contenu. Cette idée n'a pas tardé à être reconnue par Brouwer comme une erreur : les applications du tiers exclu ne sont, dans un bon nombre de cas, que des pétitions de principe injustifiées (cf. « Addenda and Corrigenda to "On the Foundations of Mathematics" », in *op. cit.*, p. 147). Ce qu'elles disent n'est pas *a priori* et encore moins trivial : cela peut très bien, le cas échéant, se révéler faux.

Comme l'a fait remarquer Geach : « Pour une raison ou pour une autre, la loi du tiers exclu a l'apparence d'être une assertion plus substantielle que d'autres lois logiques. Dans le débat, les gens ont une façon curieuse d'asserter avec une grande insistance, comme prémisse de l'argument, un cas particulier de la loi : "*Ou bien* telle ou telle chose *ou bien* non telle ou telle chose. Si telle ou telle chose, alors..., et si non telle ou telle chose, alors..." Or, de toute évidence, cette prémisse énoncée avec insistance ne peut en aucune manière faire avancer l'argument; tout ce qui suit de "Ou *p* ou non *p*" et "Si *p*, alors *q*" et "Si non *p*, alors *r*" suivrait des deux dernières prémisses à elles seules[17]. » Dans le calcul propositionnel bivalent classique, le principe du tiers exclu est une tautologie, au même titre que le principe d'identité ou le principe de contradiction. Toutes les tautologies sont équivalentes, chacune d'entre elles ne dit rien de plus et rien de moins que n'importe quelle autre et aucune d'entre elles n'ajoute quoi que ce soit à une déduction dans laquelle elle est introduite comme prémisse. Aux yeux de Geach, le caractère apparemment substantiel de la loi du tiers exclu résulte d'une conception erronée de la négation. On a l'impression que « Ferdinand est un prince ou il n'est *pas* un prince » est une assertion douée d'un contenu substantiel, parce qu'on a tendance à l'interpréter sur le modèle de « Ferdinand est un prince ou il est *le fils* d'un prince ». Dans la deuxième assertion, le sens du prédicat est composé de celui de « fils » et de celui de « prince » et de la même façon, dans la première, la prédication négative combine le sens de « non » et le sens de « prince ». Or, cette analogie est trompeuse, parce qu'en réalité le sens de « non-P » n'est pas plus complexe que celui de « P » ; ils ne peuvent être compris séparément l'un de l'autre et aucun des deux ne peut être plus strictement défini que l'autre.

Ce qui rend ambiguë la critique que les intuitionnistes traditionnels ont formulée contre le principe du tiers exclu est que, dans une proposition comme « (Ex)Px v - (Ex)Px », appliquée à un ensemble infini de nombres, ils interprètent les deux termes de la disjonction d'une manière telle que le deuxième ne peut plus être considéré comme étant simplement la négation du premier, de sorte que la disjonction devient incomplète. Et, en même temps, ils ont tendance à présenter ce qui, en réalité, n'est plus un cas particulier de la loi du tiers exclu comme une exception susceptible de « réfuter » en quelque sorte la loi. De façon générale, pour un intuitionniste, affirmer que l'on a une démonstration de « A v - A » revient à affirmer que l'on a une démonstration de A ou une démonstration de - A. Mais « avoir une démonstration de - A » n'est évidemment pas la négation de « avoir une démonstration de A ». C'est uniquement l'abandon de la notion de vérité mathématique, considérée comme indépendante de notre capacité de

17. P. Geach, « The Law of Excluded Middle », in *Logic Matters*, B. Blackwell, Oxford, 1972, p. 78.

fournir une démonstration, qui impose l'interprétation intuitionniste de la disjonction et oblige à contester la validité universelle de « A v - A » (interprété de façon intuitionniste). Il y a justement une troisième possibilité, qui est que nous ne puissions fournir ni une démonstration de A ni une démonstration de - A (c'est-à-dire, une construction qui mène d'une démonstration supposée de A à une contradiction).

Weyl remarquait déjà, à propos des « exceptions » invoquées par Brouwer, qu'il vaudrait mieux dire que les deux énoncés en question ne peuvent plus être considérés comme étant réellement la négation l'un de l'autre[18]. Considérons, par exemple, une propriété décidable E de nombres naturels, telle que « $2^{2^{n+4}}$ + 1 est un nombre premier ». Soit la question de savoir s'il existe ou non un nombre ayant la propriété E. « Seule, écrit Weyl, la découverte *effectuée* d'un nombre ayant la propriété E peut fournir une raison autorisant à répondre par oui, et — étant donné que je ne peux pas passer en revue tous les nombres — seule la connaissance du fait qu'il appartient à l'*essence* du nombre d'avoir la propriété - E une raison autorisant à répondre par non ; même Dieu n'a à sa disposition aucune autre raison qui décide. *Mais ces deux possibilités ne se répondent plus comme l'affirmation et la négation ;* ni la négation de l'une ni la négation de l'autre n'ont un sens compréhensible en soi » (*ibid.*, p. 16). La négation de la première est en effet quelque chose comme : « En parcourant dans sa totalité la suite infinie des entiers naturels, on n'a pas découvert de nombre possédant la propriété E » (ce qui, pour Weyl comme pour Brouwer, n'a aucun sens). Et celle de la deuxième est : « Il n'appartient pas à l'essence du nombre d'avoir la propriété - E » (ce qui n'a pas de sens clair, dans la mesure où cela suggère que les nombres naturels pourraient posséder cette propriété, mais de façon simplement accidentelle). Weyl hésite à parler d'une violation du tiers exclu, parce qu'il reste apparemment vrai, constate-t-il, que, si je commence à passer en revue la suite des entiers naturels, ou bien le processus s'interrompt à un moment donné avec la découverte d'un nombre ayant la propriété cherchée, ou bien cette interruption ne se produit pas. Il résout finalement le problème en remarquant

18. H. Weyl, *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (1921), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1965, p. 14.

que ni les jugements existentiels comme « Il y a un nombre qui a la propriété P » ni les jugements universels comme « Aucun nombre n'a la propriété P » ne constituent des jugements proprement dits, qui décrivent des états de choses, réalisés ou non. Il faut les concevoir plutôt comme des « abstraits de jugement » (*Urteilsabstrakte*) qui n'acquièrent de *sens* véritable qu'avec la démonstration qui garantit leur vérité (la construction d'un nombre *n* tel que P(*n*) dans le premier cas, la découverte d'une méthode générale qui permet de démontrer – P(*n*) pour n'importe quel *n* dans le deuxième). Weyl choisit de considérer l'universel et l'existentiel en mathématiques comme une simple « monnaie de papier », dont la valeur réelle n'est constituée que par une certaine encaisse correspondante en propositions singulières, par sa relation à la seule chose qui possède une valeur intrinsèque, à savoir « l'immédiat, l'absolument singulier » (*ibid.*, p. 17). Il résulte notamment de cette conception qu'« il est totalement dépourvu de sens de nier des propositions de cette sorte ; ce qui supprime tout bonnement la possibilité de formuler à leur sujet un "axiome du tiers exclu" » (*ibid.*, p. 18). C'est probablement aux conséquences fâcheuses qui risquent de découler de ce genre de théorie que Wittgenstein fait allusion lorsqu'il remarque que la relation entre le sens de la proposition mathématique et l'existence de la démonstration ne doit pas être telle que le contraire de la proposition démontrée ne puisse *jamais* avoir de sens.

Dans le *Tractatus,* Wittgenstein avait soutenu que « les théories qui font apparaître une proposition de logique comme douée de contenu (*gehaltvoll*) sont toujours fausses » (6.111). L'exemple discuté était justement celui de l'assertion selon laquelle « Toute proposition est vraie ou fausse », qui est souvent présentée comme une formulation du tiers exclu, mais qu'il serait probablement plus correct de considérer comme une énonciation du principe de bivalence : « On pourrait, par exemple, croire que les mots "vrai" et "faux" désignent deux propriétés parmi d'autres, et il apparaîtra alors comme un fait remarquable que toute proposition possède une de ces propriétés. C'est une chose qui à présent semble ne pas du tout aller de soi, aussi peu que, par exemple, la proposition "Toutes les roses sont jaunes ou rouges" donnerait l'impression d'aller de soi, même si elle était vraie. En vérité, la proposition qui est en question acquiert maintenant complètement le caractère d'une

proposition des sciences de la nature et c'est un indice certain du fait que l'on s'en est fait une conception incorrecte » (*ibid.*).

Un principe logique ne peut, selon le *Tractatus, dire* que toute proposition possède de façon plus ou moins contingente l'une ou l'autre de deux propriétés, il peut seulement *montrer* quelque chose qui résulte de façon essentielle de la nature de la proposition en général. Mais la situation se modifie évidemment dans des proportions considérables, lorsque le sens de la proposition n'est plus interprété en termes de conditions de vérité qui, de toute façon, sont réalisées ou ne le sont pas, mais en termes de conditions d'assertabilité qui peuvent être satisfaites ou ne pas l'être. Que toute proposition soit vraie ou fausse ne peut être, si c'est vrai, un fait contingent. Mais, s'il était vrai, par exemple, que toute proposition mathématique est vraie ou fausse, en ce sens que nous pouvons, dans tous les cas, en donner une démonstration ou une réfutation, il serait certainement difficile de considérer cela comme une vérité *a priori*. Lorsque la notion de conditions de vérité est remplacée par celle de conditions d'assertabilité, le principe du tiers exclu donne l'impression de se transformer en une vérité qui ne pourrait être, dans le meilleur des cas, que contingente et que rien n'oblige à accepter *a priori*.

Si ce principe donne l'impression de constituer une proposition à la fois plus riche de contenu et plus contestable que les autres lois logiques, c'est sans doute parce qu'il ressemble extérieurement plus que les autres à une proposition empirique. On est tenté de le considérer comme une proposition qui exclut une « troisième » possibilité, qui pourrait éventuellement exister, mais qui, dans les faits, n'existe pas. C'est contre ce genre d'idée que Wittgenstein s'insurge lorsqu'il constate :

> « Il y a (...) quelque chose qui s'oppose à l'application du principe du tiers exclu en mathématiques.
>
> (Il est vrai que le nom de ce principe est déjà trompeur. Car il donne toujours l'impression qu'il est question dans ce qu'il dit d'un cas analogue à celui-ci : une grenouille est brune ou verte, il n'y a pas de troisième chose.) » (PB, p. 248).

Wittgenstein estime que, contrairement à ce que suggèrent les intuitionnistes, si l'utilisation du principe du tiers exclu peut être contestée en mathématiques, ce n'est pas parce que la troisième possibilité qu'il semble exclure existe bel et bien dans certains cas, mais parce qu'en réalité, pour des raisons qui tiennent à la nature même des propositions mathématiques, il ne s'y applique réellement en aucun cas. Le point crucial n'est pas la distinction entre le fini et l'infini, mais le fait que « la négation en arithmétique est tout à fait différente de la négation de propositions proprement dites » (PB, p. 249). Dans le cas d'une égalité arithmétique, « la négation de l'égalité ressemble autant à la négation d'une proposition et en diffère autant que l'affirmation de l'égalité par rapport à l'affirmation d'une proposition » (*ibid.*). On se rend compte immédiatement que la négation signifie autre chose en arithmétique que dans le reste du langage lorsqu'on observe que, si je dis que $2 \times 2 \neq 5$ ou que 7 n'est pas divisible par 3, je devrais pouvoir me faire une idée de ce que seraient les choses si 2×2 était égal à 5 ou si 7 était divisible par 3 ; et pourtant je ne le peux pas (cf. *ibid.*, p. 247, 250). Cette situation résulte du fait que ni les égalités ni les inégalités mathématiques ne sont assimilables à des propositions proprement dites. Les unes et les autres sont ou bien des stipulations (*Festsetzungen*) concernant les signes; ou bien des calculs effectués à partir de certaines stipulations de ce genre. Je ne me représente pas comment les choses seraient si 2×2 était différent de 4 (par exemple, égal à 5) et, contrairement aux apparences, pas davantage comment elles *sont*, dans les faits, étant donné que $2 \times 2 = 4$. Dans le cas d'une proposition ordinaire, on a à la fois une représentation de ce que seraient les choses si elle était vraie et de ce qu'elles seraient si elle était fausse. Dans le cas d'une proposition mathématique, je n'ai rien de tel, mais simplement deux règles antagonistes, qui sont telles que le fait d'exclure l'une ne peut constituer à lui seul une raison d'affirmer l'autre, à moins que, précisément, l'exclusion de l'une ne soit équivalente, dans le système considéré, à l'affirmation de l'autre. Il est donc tout à fait trompeur de se représenter la situation comme si, en excluant une chose, on arrivait, par l'application d'un principe particulier, à une autre : il doit s'agir en réalité de la même chose sous deux formes différentes.

On pourrait dire, dans le langage du *Tractatus*, qu'il n'y a pas d'« espace logique » qui serait rempli complètement par la proposition mathématique et sa négation, et pas de « réalité » qui devrait, par le fait, nécessairement vérifier l'une ou l'autre. D'une certaine manière, la proposition mathématique vraie

occupe à elle seule la totalité de l'espace logique, puisqu'il s'agit d'une proposition sans antithèse, dont la négation exprime une possibilité qui a été précisément exclue comme possibilité.

Brouwer a donc raison jusqu'à un certain point de protester contre l'usage du tiers exclu en mathématiques :

> « Lorsque Brouwer combat l'application du principe du tiers exclu en mathématiques, il a raison, dans la mesure où il vise une façon de procéder qui est analogue à la démonstration de propositions empiriques. On ne peut jamais en mathématiques démontrer quelque chose de *cette* façon : j'ai vu deux pommes sur la table ; il n'y en a à présent qu'*une* ; donc A a mangé une pomme. — On ne peut, en effet, par l'exclusion de certaines possibilités, en démontrer une nouvelle qui ne réside pas déjà, par l'intermédiaire des règles données par nous, dans cette exclusion. Dans cette mesure, il n'y a pas en mathématiques d'alternatives authentiques. Si les mathématiques étaient l'étude d'agrégats donnés empiriquement, alors on pourrait décrire le non-exclu par l'exclusion d'une partie, et ici la partie non exclue ne serait pas équivalente à l'exclusion de l'autre » (PG, p. 458).

Mais Brouwer raisonne par ailleurs comme si, en mathématiques comme dans n'importe quelle science empirique, on ne devait conclure à la vérité d'une hypothèse sur la base de l'exclusion d'une autre qu'à la condition de s'être assuré qu'il n'y a pas de troisième possibilité que l'on pourrait avoir oubliée. Il n'y en a pas dans le cas du fini, en ce sens que, si « P » est un prédicat décidable, il n'y a pas d'asymétrie entre les conditions de vérification de la proposition « (Ex)Px » et celles de sa négation, toutes les deux pouvant être expliquées en référence à un processus qui consisterait à passer successivement en revue tous les nombres concernés et qui ne peut aboutir qu'à deux résultats, dont l'un vérifie la proposition positive et l'autre sa négation. En revanche, dans le cas de l'infini, la situation devient très différente, puisque le fait de savoir comment démontrer « (Ex)Px », en produisant un exemple ou en donnant une méthode qui permettrait d'en construire un, ne nous donne pas forcément une idée quelconque de la manière dont on pourrait démontrer sa négation. Il n'y a apparemment plus entre les conditions d'assertabilité de la proposition et celles de sa négation le genre de connexion intrinsèque qui permettrait de considérer la réfutation de l'une quelconque des deux comme équivalant nécessairement à une démonstration de l'autre. Dans la mesure où Brouwer s'attaque à une procédure qui, selon Wittgenstein, n'a d'usage nulle part en mathématiques, parce que, dans ce domaine, on ne choisit jamais par élimination entre les deux branches d'une alternative réelle, il y a évidemment quelque chose d'étrange dans le fait de supposer qu'un principe comme celui du tiers exclu pourrait être valide pour certaines parties des mathématiques et pas pour d'autres :

> « La manière de considérer les choses selon laquelle une loi logique, parce qu'elle est valable pour un domaine des mathématiques, ne doit pas nécessairement être également valable pour un autre, n'est absolument pas à sa place dans les mathématiques, elle est tout à fait contraire à leur essence. En dépit du fait que bien des auteurs considèrent cela comme particulièrement subtil, et à l'opposé des préjugés » (*ibid.*).

L'illusion de la possibilité qu'il y ait, dans le cas de l'infini, une troisième éventualité à prendre en considération provient, selon Wittgenstein, d'une confusion du genre suivant :

> « Le contraire de "Il est nécessaire que p soit vrai pour tous les nombres" est assurément "Il n'est pas nécessaire que ...", et non pas "Il est nécessaire que non...". Mais alors on se dit : s'il n'est pas *nécessaire* que cela soit vrai pour tous les nombres, c'est cependant possible. Mais c'est là que réside la faute, car on ne voit pas qu'on est tombé dans la conception extensive : la proposition "Il est possible — bien que non nécessaire — que p soit vrai pour tous les nombres" est dénuée de sens. Car "*nécessairement*" et "*tous*" vont l'un avec l'autre en mathématiques. (Aussi longtemps que l'on ne remplace pas purement et simplement ce mode d'expression par un autre moins trompeur.) » (PB, p. 182).

Dans le *Tractatus,* Wittgenstein avait déjà fait remarquer que « la théorie des classes est tout à fait superflue en mathématiques », en donnant comme raison le fait que « l'universalité dont nous avons besoin en mathématiques n'est pas l'universalité *accidentelle* » (6.031). La seule universalité dont il puisse être question en mathématiques est celle qui correspond à une détermination de *concept* ou à l'instauration d'une connexion

interne entre deux *concepts* et dont aucune procédure de vérification susceptible en théorie ou en pratique d'être appliquée successivement à tous les éléments de l'ensemble considéré ne peut fournir l'équivalent ou la justification. Le fait qu'une procédure de ce genre puisse toujours être appliquée en principe dans le cas d'un ensemble fini, mais non dans celui des ensembles infinis, n'a donc pas du tout la signification que les intuitionnistes lui attribuent.

6. LA CRITIQUE WITTGENSTEINIENNE DE LA CONCEPTION EXTENSIONNELLE DES MATHÉMATIQUES.

Le tort de Brouwer est donc d'être resté, lui aussi, tributaire de la conception que Wittgenstein appelle « extensive », au sens suivant :

> « Lorsqu'on dit (comme Brouwer) que dans le cas de $(x)\cdot\varphi x = \psi x$, en dehors du oui et du non, il y a encore le cas de l'indécidabilité, cela veut dire que "(x)..." est compris de façon extensive et que l'on peut parler du cas dans lequel tous les x possèdent accidentellement une propriété. Mais, en vérité, on ne peut tout simplement pas parler de ce cas et le "(x)..." en arithmétique ne peut être conçu extensivement » (PB, p. 212).

Lorsque Brouwer fait remarquer que l'utilisation du tiers exclu dans le cas de collections finies peut toujours en principe être validée *a posteriori* alors que cette possibilité est exclue dans le cas de collection infinies, il fait lui-même une concession tout à fait fâcheuse à l'idée que les mathématiques s'occupent de collections qui peuvent être données indépendamment d'elles et qui sont parfois beaucoup trop grandes pour que l'on ait une connaissance complète de leurs éléments et la certitude de pouvoir décider n'importe quelle question les concernant. C'est parce qu'il adopte subrepticement, sur ce point, la conception extensive, que par ailleurs il refuse, que Brouwer est amené à envisager non pas deux, mais trois possibilités pour une proposition mathématique p : p est démontrable, p est réfutable, p est indécidable : « Il est vrai que, si les mathématiques étaient la science empirique des extensions infinies, que l'on ne peut jamais connaître entièrement, alors on pourrait très

bien concevoir une question principiellement indécidable » (PB, p. 213).

Dans le cas de l'égalité considérée, l'hypothèse de l'indécidabilité signifie qu'il pourrait exister entre les deux termes de l'égalité une sorte de « liaison souterraine » qui ne peut être rendue apparente, une liaison entre des symboles qui ne peut être représentée par des transitions symboliques, ou encore une sorte de corrélation constante qu'il est impossible de faire apparaître comme une connexion interne. Cette idée équivaut, pour Wittgenstein, à celle d'« une pensée qui ne peut pas être pensée » (PB, p. 212). Il n'y a pas de corrélations accidentelles en mathématiques ; et il n'y a pas de connexions internes autres que celles que nous sommes en mesure de reconnaître ou, plus exactement, d'instaurer par la démonstration. C'est la démonstration qui détermine la signification de « tous » dans une proposition comme « Tous les nombres ont la propriété P » ; et nous ne pouvons pas lui donner un sens extensif, déterminé indépendamment de la proposition, qui permettrait d'envisager que les nombres naturels aient effectivement tous cette propriété (comme le constaterait quelqu'un qui aurait les moyens de les examiner l'un après l'autre, sans en oublier aucun), mais d'une façon qui est inaccessible à la démonstration.

Lorsque Wittgenstein reproche à Brouwer de n'avoir pas rompu complètement avec la conception extensive, il veut dire que l'intuitionnisme ne s'est pas débarrassé entièrement de l'idée que, si nous avions une connaissance complète de l'extension du concept de nombre naturel, nous saurions si la relation interne au sujet de laquelle nous nous interrogeons (par exemple, l'inégalité de $x^n + y^n$ et de z^n pour tout $n > 2$) existe ou non. Il se trouve que nous n'avons pas ce genre de connaissance et c'est ce qui, pour les intuitionnistes, rend problématique et suspecte l'application du tiers exclu à des cas de cette sorte. C'est parce que l'utilisation du tiers exclu ne peut plus être conçue simplement comme un processus abréviateur par rapport à la vérification directe qui consisterait à inspecter successivement tous les nombres qu'elle doit être considérée comme sujette à caution. A cela Wittgenstein objecte que « l'expression "parcourir complètement la suite des nombres" est un non-sens ; à moins qu'on ne lui *donne* un sens, qui cependant supprime l'analogie supposée avec le fait de "parcourir les nombres de 1 à 100" » (PG, p. 458). Brouwer continue à supposer, comme ses adversaires classiques, que, si l'expression « parcourir intégralement la suite des entiers naturels » a une signification, celle-ci ne peut être obtenue que par analogie ou par extension à partir de celle de l'expression « parcourir un segment initial fini de la suite ». Et il ne se rend pas compte que, lorsque cette expression a reçu la seule espèce de signification qu'elle peut avoir (par exemple, par l'intermédiaire d'une démonstration par induction), cela entraîne à la fois la disparition de l'analogie entre le cas de la suite entière et celui d'un segment initial fini et celle de la différence correspondante, sur laquelle il s'appuie pour contester que l'application du principe du tiers exclu puisse être légitimement étendue du fini à l'infini.

En d'autres termes, Brouwer dénonce à juste titre une assimilation trompeuse, mais donne lui-même une image inappropriée de la distinction lorsqu'il suggère en quelque sorte que l'utilisation du tiers exclu dans le cas de l'infini *serait* légitime si et seulement si l'on pouvait (au moins en principe) appliquer également dans ce cas-là la procédure de vérification directe. Du point de vue de Wittgenstein, on ne peut pas donner de *sens* à l'idée que tous les nombres naturels pourraient posséder une certaine propriété P sans que nous soyons jamais en mesure de savoir si c'est ou non le cas, parce que le seul moyen de lui donner un sens serait de l'interpréter comme signifiant que nous ne sommes pas certains de découvrir une procédure qui nous permettrait de décider quelque chose qui *est* déjà décidé par la méthode qui consisterait à passer successivement en revue tous les nombres, dont il se trouve simplement qu'elle est inapplicable pour nous. C'est, en fait, uniquement cette idée de vérification directe qui donne une apparence de signification à la supposition que tous les nombres pourraient posséder accidentellement une certaine propriété (en un sens analogue à celui auquel je peux dire, par exemple, que tous les nombres que j'ai lus aujourd'hui sur les autobus se trouvaient par hasard être des nombres premiers). Il semble que l'on pourrait découvrir en quelque sorte expérimentalement, en les inspectant l'un après l'autre sans en omettre aucun, que les nombres naturels ont tous une certaine propriété, sans pouvoir donner une raison de ce fait et sans être capable de le rattacher à l'essence du nombre naturel.

Nous avons tendance à supposer que la position de tous les nombres premiers dans la suite des entiers naturels est déjà

déterminée, bien que nous ne puissions les calculer que successivement, et que Dieu les connaît en quelque sorte tous. Wittgenstein considère comme étrange que nous puissions parler de quelque chose qui serait déterminé sans que *nous* l'ayons déterminé. Ici encore, c'est l'idée d'une extension infinie, conçue sur le modèle des extensions finies que nous pouvons connaître sans avoir aucune idée du processus d'engendrement dont elles résultent, qui nous joue des tours. En réalité, la seule chose que nous devrions considérer ici est le *concept* de nombre premier et la manière dont nous le déterminons : « Que savons-nous donc des nombres premiers ? Comment ce concept nous est-il donc donné, en fait ? Ne prenons-nous pas nous-mêmes les dispositions le concernant ? Et comme il est étrange que nous supposions alors qu'ont dû être prises à son sujet des dispositions que nous n'avons pas prises » (PG, p. 481).

Les objections de Wittgenstein contre toutes les conceptions qui restent explicitement ou implicitement dépendantes du mode de pensée extensif sont condensées dans une formule qui avait déjà été utilisée dans le *Tractatus* et qui réapparaît régulièrement comme un *leitmotiv* : en mathématiques, « le processus et le résultat sont équivalents ». C'est une chose qui, pour Wittgenstein, est déjà vraie dans le cas de la « totalité » ou de l'« ensemble » des entiers naturels, que l'on a tort de considérer comme une extension qui peut être distinguée du processus qui l'engendre : « L'universel est la répétition d'une opération. Chacun des stades de cette répétition a son individualité. Or ce qui est vrai n'est pas en quelque sorte que, par l'opération, je progresse d'une individualité à une autre. De sorte que l'opération serait le moyen de passer de l'une à l'autre. Pour ainsi dire, le véhicule qui s'arrête à chaque nombre, que l'on peut alors considérer. En réalité, l'opération trois fois itérée + 1 engendre et *est* le nombre trois » (PG, p. 457 ; cf. T, 6.021).

C'est la tendance à concevoir la suite des entiers naturels comme une totalité donnée en extension qui engendre le problème du fondement ou de la justification du principe d'induction. Puisque nous ne pouvons évidemment pas inspecter successivement tous les nombres individuels, nous devons disposer d'une procédure qui nous permette de faire en quelque sorte la même chose sous une autre forme et dont il y a lieu de se demander si elle fait réellement ce qu'elle est supposée faire.

Poincaré observe que « le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une forme unique, une infinité de syllogismes [19] » et le considère comme « un instrument qui permet de passer du fini à l'infini » (*ibid.,* p. 22). Grâce à lui, une « suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve (...) réduite à une phrase de quelques lignes » (*ibid.,* p. 20). L'idée d'une sorte de « passage » effectué du fini à l'infini est une des expressions les plus typiques de la difficulté que l'on éprouve à se libérer de ce que Wittgenstein appelle la conception extensive. Poincaré conclut finalement que la règle du raisonnement par récurrence, qui rend possible ce passage, n'a pas besoin du genre de justification que les logicistes cherchent à lui donner, qu'elle est « le véritable type du jugement synthétique *a priori* », dont l'évidence irrésistible repose sur le fait qu'il n'est que « l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*ibid.,* p. 23, 24) et que par conséquent, à la différence des axiomes de la géométrie, qui ne sont que des « définitions déguisées », il n'a rigoureusement rien à voir avec une convention. Hilbert (*Neubegründung der Mathematik,* p. 161) interprète cela comme signifiant, dans le langage de Kronecker, que le principe a été créé par le bon Dieu. Le point de vue de Wittgenstein est qu'il a été, comme tous les autres, créé par nous et ne peut avoir, justement, que le statut d'une convention qui donne son sens à une expression qui n'en avait pas auparavant, à savoir l'expression « être vrai pour tous les nombres naturels » :

> « Nous ne disons pas que la proposition f(x), lorsque f(l) est vrai et que de f(c) suit f(c + 1), est *pour cette raison* vraie de tous les nombres naturels ; mais : "la proposition f(x) vaut pour tous les nombres naturels" veut dire "elle vaut pour x = 1 et f(c + 1) suit de f(c)".
>
> Et ici la connexion avec l'universalité dans le domaine fini est en vérité tout à fait claire, car précisément cela serait, dans un domaine fini, la preuve que f(x) est vrai pour toutes les valeurs de x et c'est *précisément cela* la raison pour laquelle nous disons également dans le cas arithmétique que f(x) est vrai pour tous les nombres » (PG, p. 406).

19. H. Poincaré, *La science et l'hypothèse,* Flammarion, Paris, 1909, p. 20.

Dans le cas d'un segment initial fini de la suite des nombres, nous avons deux moyens d'établir l'universalité : la procédure consistant à inspecter successivement tous les éléments concernés et le raisonnement par induction. Dans le cas de la suite complète, nous n'avons, par définition, que le deuxième, et toute idée de comparer le résultat obtenu avec celui qui pourrait « en principe » être obtenu par une autre méthode, beaucoup plus longue et fastidieuse, est un non-sens pur et simple. C'est précisément cela, et rien d'autre, que nous appelons (avec, comme le remarque Wittgenstein, de bonnes raisons) « être vrai pour tous les nombres naturels ». Le fait que, comme dit Poincaré, l'esprit se reconnaisse immédiatement capable d'itérer indéfiniment la même opération n'est évidemment pas le point crucial, puisque toute la question est en réalité de savoir comment il pourrait être certain d'avoir fait effectivement ce genre de chose à travers un raisonnement comme celui dont il est question. Ou bien la validité du raisonnement repose sur une chose dont l'esprit sait qu'il *pourrait* en principe la faire et que le raisonnement le dispense de faire réellement. Ou bien le raisonnement lui-même, sous une forme mystérieuse qui est justement la marque de la puissance de l'esprit, réussit à le faire en « une phrase de quelques lignes ». Aucune de ces deux suppositions n'a de sens clair. Une possibilité de continuer indéfiniment reste, à n'importe quelle étape de l'effectuation du processus, exactement ce qu'elle était au départ et n'est pas plus près d'être réalisée. Et si un processus que l'on peut se représenter comme effectué complètement peut effectivement être comprimé en une forme abrégée, on ne voit pas très bien comment une *possibilité* illimitée pourrait être condensée de cette façon.

Il peut évidemment sembler tout à fait étrange de voir Wittgenstein affirmer qu'il n'y a pas d'alternatives véritables en mathématiques. Son idée est sans doute plus précisément que, puisque les propositions mathématiques ont le statut de règles, qui est totalement distinct de celui des propositions authentiques, à savoir les propositions empiriques, il n'y a pas d'alternatives *propositionnelles.* La seule espèce d'alternative qui puisse se présenter en mathématiques est entre avoir déterminé un concept de façon telle que « p » est une règle, l'avoir déterminé de façon telle que « ~p » est une règle et ne rien avoir déterminé sur ce point. De toute évidence, il ne s'agit pas d'un cas dans lequel le principe du tiers exclu pourrait être pris en défaut, mais d'un cas dans lequel il ne s'applique pas. Et, lorsque les intuitionnistes incitent à la méfiance à l'égard du tiers exclu en faisant remarquer qu'il est concevable que je ne *puisse* jamais déterminer les choses dans un sens ou dans l'autre, cela n'aurait de sens tout à fait clair que si cela voulait dire que je ne pourrai peut-être jamais savoir si elles *sont* déterminées dans ce sens-là plutôt que dans l'autre. Ce qui est vrai est, en fait, simplement que je n'ai rien déterminé pour l'instant et ne déterminerai peut-être jamais rien. D'un point de vue rigoureusement conceptualiste et conventionaliste comme celui de Wittgenstein, il est difficile de comprendre pourquoi je ne le pourrais pas, si je le voulais à tout prix. Si l'on continue à concevoir les mathématiques dans la perspective réaliste et sur le modèle d'une science naturelle, il est tout à fait normal de supposer qu'il pourrait y avoir une connexion interne positive (comme dans le cas de : « Tout nombre pair plus grand que 2 est égal à la somme de deux nombres premiers ») ou négative (comme dans le cas de : « $x^n + y^n \neq z^n$, pour tout $n > 2$ ») dont nous ne serons jamais capables de déterminer si elle existe ou non. Il est en revanche difficile de donner un sens à l'idée d'une connexion interne que nous pourrions être définitivement incapables de créer ou d'instituer.

Un des contre-exemples, invoqués par Brouwer à l'appui de sa contestation de la validité universelle du tiers exclu est celui du nombre pendulaire (*Pendelzahl*), dont le cas est discuté notamment dans la conférence de 1928 à laquelle assistait Wittgenstein et dont on dit qu'elle a contribué pour une part importante à le ramener à la philosophie (cf. *Mathematik, Wissenschaft und Sprache,* p. 425-426). Brouwer appelle « propriété fuyante » (*fliehende Eigenschaft*) une propriété dont l'existence ou l'absurdité (le caractère contradictoire) peut être démontrée pour n'importe quel nombre naturel déterminé, sans que l'on puisse cependant démontrer l'existence d'un nombre naturel qui possède la propriété ni déduire une contradiction de la supposition qu'elle appartient à au moins un nombre naturel. Le nombre critique ou nombre résolvant (*Lösungszahl*) k_f d'une propriété fuyante f est le plus petit nombre naturel (hypothétique) qui possède la propriété; et l'on appellera nombre supérieur (*Oberzahl*) (*resp.* nombre inférieur, *Unterzahl*) de la

propriété f un nombre naturel qui n'est pas plus petit (*resp.* qui est plus petit) que le nombre critique. On voit immédiatement que la propriété f perd son caractère de propriété fuyante dès que l'on a découvert un nombre supérieur pour elle. La propriété fuyante f sera dite sans parité (*paritätsfrei*) si l'on ne peut démontrer son absurdité ni pour les nombres naturels pairs ni pour les nombres naturels impairs. Le nombre réel p_f, déterminé comme étant la limite de la suite convergente $a_1, a_2, \ldots$, dans laquelle a_n est, pour un nombre inférieur quelconque n de f, égal à $(-1/2)^n$ et pour un nombre supérieur quelconque n de f égal à $(-1/2)^{k_f}$, est appelé le nombre binaire pendulaire (*duale Pendelzahl*) appartenant à la propriété fuyante sans parité f.

Le nombre ainsi défini n'est ni égal à zéro ni différent de zéro. Si l'on entend par nombre réel non positif un nombre réel dont il est impossible qu'il soit positif, le nombre pendulaire n'est ni positif ni non positif. Si nous appelons les nombres positifs et les nombres négatifs comparables avec zéro et les nombres réels dont il est impossible qu'ils soient comparables avec zéro incomparables avec zéro, le nombre pendulaire n'est ni comparable avec zéro ni incomparable avec zéro. Enfin, si nous appelons un nombre réel g rationnel, lorsqu'il est ou bien égal à zéro ou bien tel que l'on peut déterminer deux nombres entiers positifs ou négatifs p et q pour lesquels $g = p/q$, et irrationnel, lorsque la supposition de la rationalité de g peut être réduite à l'absurde, le nombre pendulaire n'est ni rationnel ni irrationnel. Ces quatre assertions constituent aux yeux de Brouwer des exceptions caractérisées qui démontrent indiscutablement que le principe du tiers exclu ne peut être accepté comme universellement valide. Bien entendu, la validité du tiers exclu peut être restaurée si la propriété f perd son caractère de propriété fuyante, c'est-à-dire si l'on réussit à lui découvrir un nombre supérieur (plus grand ou égal à son nombre critique). Mais on peut, à partir de n'importe quelle propriété f qui possède réellement ce caractère, définir un nombre réel r tel que, pour certaines propriétés P, ni « Pr » ni « – Pr » ne peuvent être considérés comme vrais.

Un exemple de propriété fuyante (définie uniquement sur l'ensemble des entiers positifs) est la propriété P suivante : P appartient à un nombre n si et seulement si la n-ième décimale de π est le dernier élément d'une suite de dix 7 consécutifs qui apparaît dans le développement décimal. Soit la suite de nombres rationnels r_1, r_2, r_3, ..., telle que : $r_j = (-1/2)^j$ si aucune suite de dix 7 consécutifs n'apparaît dans le développement décimal de π poussé jusqu'à la j-ième place, $= (-1/2)^n$ si la n-ième place décimale de π est le dernier élément de la première suite de dix 7 consécutifs qui apparaît dans le développement décimal de π poussé jusqu'à la j-ième place ($n \leqslant j$).

Soit r le nombre réel défini par cette suite (sa limite). Il n'y a aucun moyen de décider si $r = 0$ ou $r \neq 0$, puisque $r = 0$ si et seulement si, pour aucun n, la n-ième décimale de π n'est le dernier 7 d'une suite de dix, et $r \neq 0$ si et seulement si il existe un n tel que la n-ième décimale de π est le dernier 7 d'une suite de dix. On ne peut donc, du point de vue de Brouwer, asserter que $r = 0 \vee r \neq 0$. Pour l'instant, en tout cas, comme le suggère Troelstra, un nombre réel de ce genre pourrait être appelé « un nombre qui flotte par rapport à zéro[20] ».

Dans les conversations avec le Cercle de Vienne, Wittgenstein discute le cas d'une fraction décimale illimitée définie de la façon suivante : on écrit à la n-ième place 0 si, en essayant avec les 100 premiers nombres pour x, y, z, on n'a pas trouvé pour n de valeur telle que l'équation de Fermat « $x^n + y^n = z^n$ » est satisfaite, et 1 si l'on en a trouvé une. La fraction décimale commence de la façon suivante : 0,110000... Est-elle comparable avec le nombre 0,11 ? C'est-à-dire, en l'occurrence, est-elle plus grande que lui ou égale à lui ? La réponse de Wittgenstein est que : « La fraction décimale qui vient d'être construite n'est justement pas un nombre réel, et cela pour la raison qu'elle n'est pas comparable avec les nombres rationnels. L'élément décisif dans la construction des nombres réels consiste en vérité justement dans leur comparabilité. C'est seulement par ce moyen que les nombres réels peuvent être interprétés comme des points sur une droite » (WWK, p. 73).

Il n'est donc pas possible, pour Wittgenstein, de dire que le nombre considéré occupe bel et bien une position déterminée sur la droite des nombres : « S'il y a maintenant des constructions qui ne peuvent plus être comparées avec les nombres rationnels, alors nous n'avons aucun droit de les intégrer aux nombres rationnels[21]. Ils ne sont, dans ce cas, justement pas du tout sur la droite des nombres. (Chez Brouwer, on a l'impression que ce sont bien des nombres réels, dont il se trouve simplement que nous ne *savons* pas s'ils sont plus grands, plus petits ou égaux à un autre nombre rationnel) » (*ibid.*). Un nombre défini de la manière dont Brouwer a défini son nombre pendulaire n'est donc pas pour Wittgenstein un nombre réel, et la question de savoir quelle position exacte il occupe sur la droite des réels n'est pas simplement irrésolue et peut-être insoluble, mais dépourvue de sens. Borel appelle ce genre de définitions « énigmatiques », en ce sens qu'elles « supposent résolue une énigme dont nous n'avons pas la clef[22] ». L'énigme est, en l'occurrence, un problème qui a une apparence mathématique. Mais il s'agit en réalité, pour Wittgenstein, d'un problème scolastique (cf. PR, p. 149), qui a servi à introduire une construction qui n'est pas moins scolastique.

Wittgenstein n'est donc pas du tout convaincu qu'avec son nombre pendulaire Brouwer ait véritablement réussi à donner un exemple de proposition mathématique douée de sens qui contredit le principe du tiers exclu :

> « Brouwer a raison lorsqu'il dit que les propriétés de son nombre pendulaire ne sont pas compatibles avec le principe du tiers exclu. Seulement, aucune particularité des propositions qui traitent des agrégats infinis ne se trouve être dévoilée par là. Cela repose bien plutôt sur le fait que la logique a pour présupposé qu'il ne doit pas être *a priori* — donc logiquement — impossible de savoir si une proposition est vraie ou fausse. Car si la question de la vérité ou de la fausseté d'une proposition est *a priori* indécidable, alors la proposition perd du même coup son sens et précisément pour cette raison les propositions de la logique perdent leur validité pour elle » (PB, p. 210).

Il est évidemment tout à fait concevable qu'il existe des propositions mathématiques que nous ne réussirons jamais à décider. Mais ce qui, aux yeux de Wittgenstein, ne peut exister est une proposition mathématique dont le caractère indécidable résulterait directement de la manière dont nous avons déterminé sa signification. Car cela signifierait que nous ne lui avons

20. A.S. Troelstra, *Principles of Intuitionism,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, p. 23.

21. Je suppose qu'il faudrait lire plutôt « réels ».

22. E. Borel, « La définition en mathématiques », in *Les grands courants de la pensée mathématique,* présentés par F. Le Lionnais, nouvelle édition augmentée, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1962, p. 33.

pas réellement donné une signification. Comme il le dit dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques,* « la question change de statut lorsqu'elle devient décidable » (p. 266-267). Et une question dont le statut présent exclurait cette possibilité, c'est-à-dire impliquerait qu'elle ne peut devenir décidable, ne serait pas une question mathématique. Un énoncé mathématique ne peut pas avoir un sens déterminé et une valeur de vérité impossible à décider.

Wittgenstein considère donc que la raison pour laquelle le principe du tiers exclu ne s'applique pas aux propositions formulées par Brouwer à propos du nombre pendulaire est en réalité exactement la même que celle pour laquelle aucune autre loi logique ne s'y applique : « J'ai à peine besoin de dire que, là où le principe du tiers exclu n'est pas valide, aucune autre loi logique n'est valide non plus, parce que nous n'avons pas affaire là à des propositions de mathématiques. (A l'opposé, Weyl et Brouwer) » (PB, p. 176). La manière dont Brouwer traite le cas du nombre pendulaire pourrait donner l'impression qu'il propose de remplacer la dichotomie classique vrai/faux par la trichotomie démontrable/réfutable/indécidable. C'est cependant, comme le remarque Dummett (*Elements of Intuitionism,* p. 17) une impression tout à fait trompeuse, puisqu'en réalité, du point de vue intuitionniste, disposer d'une démonstration du fait qu'une proposition A ne sera jamais démontrée reviendrait à disposer d'une démonstration de – A. Une démonstration de la non-démontrabilité de A constituerait donc, en fait, une décision concernant A. Si par « proposition principiellement indécidable » on entend une proposition dont on peut démontrer (et non pas simplement envisager comme une possibilité ou constater *a posteriori*) l'indécidabilité, il est clair que ce que dit Brouwer ne prouve en aucune façon et n'a, du reste, pas non plus pour but de prouver qu'il existe réellement des propositions mathématiques de ce genre. Tout ce que l'on peut dire est que nous n'avons à l'heure actuelle aucun moyen de décider et aucune idée d'une méthode qui permettrait de décider les propositions qu'il formule à propos du nombre pendulaire. Wittgenstein considère, pour sa part, que toute raison de s'interroger sur la possibilité (de principe) d'attribuer à une proposition mathématique une valeur de vérité déterminée constitue également une raison de s'interroger sur son sens. Et il reproche à Brouwer de ne pas s'être interrogé suffisamment sur la *signification* que peuvent avoir des propositions mathématiques qui ont été construites explicitement dans le but de démontrer que le principe du tiers exclu pourrait être faux.

Comme le remarque Troelstra, « il semble exister un malentendu assez répandu qui veut que les contre-exemples "intuitionnistes" constituent une partie essentielle des mathématiques intuitionnistes, et également que les intuitionnistes aiment à donner ces exemples pour le plaisir de démontrer que d'autres gens ont tort » (*op. cit.,* p. 23). Même s'il est vrai que ce malentendu a pu être encouragé de bien des façons par Brouwer lui-même, il n'en reste pas moins un malentendu complet. En réalité, les « contre-exemples » que l'on rencontre le plus fréquemment dans la littérature intuitionniste consistent simplement à définir un nombre d'une manière telle que, pour décider s'il possède ou non une certaine propriété, nous devrions d'abord avoir résolu un problème mathématique que nous n'avons aucune certitude *a priori* de pouvoir résoudre. Comme dit Troelstra, « ces contre-exemples ne fournissent pas de réfutations mathématiques; ils réduisent un problème à des problèmes non résolus d'un certain type, pour lesquels il est peu probable que nous trouvions jamais une solution constructive » (*ibid.,* p. 24).

Contrairement à ce que l'on croit souvent, la controverse entre la logique classique et la logique intuitionniste n'a pas trait à la question de savoir s'il existe ou non des propositions A pour lesquelles l'assertion « A ou non-A » se trouve être fausse. S'il existait une proposition A de ce type, non-A et non-non-A seraient tous les deux vrais, ce qui constituerait une violation évidente du principe de contradiction. L'intuitionnisme refuse d'asserter « A ou non-A », mais n'est pas pour autant disposé à asserter « non(A ou non-A) » pour une proposition quelconque. « Non-non(A ou non-A) » est en fait valide, du point de vue intuitionniste, pour n'importe quelle proposition A, bien que « A ou non-A » ne le soit pas. Il y a donc incontestablement une certaine pertinence dans la remarque de Wittgenstein selon laquelle une proposition qui violerait explicitement la loi du tiers exclu violerait également n'importe quelle autre loi logique (à commencer par le principe de contradiction). Il est vrai que ses réticences ne s'appuient pas directement sur des considérations logiques de ce genre, mais plutôt sur le fait qu'une proposition mathématique n'a à aucun moment le genre de sens qui permettrait de se demander si nous ne risquons pas d'être définitivement incapables de déterminer sa valeur de vérité (auquel cas on pourrait effectivement s'interroger sur ce qui nous autorise à affirmer qu'elle possède néanmoins une valeur de vérité déterminée). Avant la décision, la proposition est en effet encore à la recherche de son sens ; et, après que la décision a été obtenue, la question de la valeur de vérité ne se pose évidemment plus. Si le sens d'une proposition mathématique est constitué littéralement par sa méthode de vérification, il peut être difficile d'attribuer un sens à une proposition dont nous ne savons pas du tout pour l'instant comment elle pourrait être démontrée ou réfutée ; mais il est en tout état de cause impossible d'en donner un à une proposition dont il est *a priori* exclu que nous puissions la démontrer ou la réfuter. Brouwer n'hésite pas à affirmer que l'application non restreinte du principe du tiers exclu à des assertions purement mathématiques « produirait des complexes de mots dépourvus de sens mathématique et donc de quelque sens que ce soit » (*Collected Works,* I, p. 443). Mais il n'a aucun scrupule à formuler des assertions dont le sens mathématique et, par conséquent, le sens tout court sont, aux yeux de Wittgenstein, éminemment problématiques. Puisque toute proposition doit, selon Wittgenstein, nous indiquer par son sens comment nous pouvons nous convaincre de sa vérité ou de sa fausseté, il serait plus exact de dire que nous devons attendre d'avoir résolu un problème d'un certain type pour pouvoir donner un sens réel aux propositions concernées. Et, lorsque nous l'aurons fait, elles cesseront, de toute évidence, de constituer des exceptions apparentes à la loi du tiers exclu.

La position de Wittgenstein pourrait donc, semble-t-il, être résumée ainsi : en raison du caractère tout à fait particulier de la proposition et de la négation mathématiques, il pourrait y avoir des raisons de dire que le principe du tiers exclu ne s'applique nulle part en mathématiques ; ou bien alors il s'applique nécessairement à toutes les mathématiques sans restriction. Il n'y a pas — c'est le cas de le dire — de troisième possibilité.

7. LE MATHÉMATICIEN CLASSIQUE A-T-IL TORT DE CROIRE À LA VALIDITÉ UNIVERSELLE DU TIERS EXCLU ?

Dans la mesure où Wittgenstein considère que les mathématiques sont bel et bien de la logique, non pas, bien entendu, au sens du logicisme, mais au moins en ce sens qu'« elles se meuvent dans les règles de notre langage » (BGM, p. 99), ce qui leur confère la position séparée et préservée qu'elles occupent, il ne peut évidemment accepter la prétendue autonomie des mathématiques par rapport au langage, sur laquelle Brouwer se fonde pour exiger que les lois logiques fassent la preuve de leur fiabilité universelle en mathématiques, comme une raison sérieuse de suspecter certaines d'entre elles. Dire que les règles ne doivent pas se contredire mutuellement revient simplement, selon Wittgenstein, à enregistrer une caractéristique de la grammaire du mot « règle » : « Cela fait partie, en effet, de la grammaire du mot "règle" que "p & — p" ne soit pas une règle (si "p" est une règle) » (PG, p. 304). Et cela signifie simplement que, si nous découvrons une contradiction entre les règles, nous cessons d'appeler certaines d'entre elles des règles (cf. WLC 1932-1935, p. 4). Comme tous les faits de nature grammaticale, celui-là peut être constaté, mais ne peut être fondé logiquement (cf. PG, p. 304-305). Pourrait-on considérer, de la même façon, comme faisant partie de la grammaire du mot « règle » que « p » est une règle ou « non-p » est une règle, de sorte que, si « p » ne peut pas être une règle, « non-p » doit en être une, et inversement ? De toute évidence, non. « "p" est une règle » et « "non-p" est une règle » ne sont pas des propositions contradictoires, mais simplement des contraires ; et l'on ne voit pas pourquoi la fausseté de l'une devrait nécessairement impliquer la vérité de l'autre. S'il y a, par exemple, des raisons excellentes de ne pas adopter « p » comme une règle, elles ne nous obligent pas forcément à adopter comme règle « non-p ». Cependant, d'un point de vue comme celui de Wittgenstein, il ne serait certainement pas « faux » ou « incorrect » d'introduire en mathématique une métarègle stipulant que, quel que soit « p », « p » est une règle ou « non-p » est une règle. L'introduction d'une convention de ce genre pourrait évidemment présenter des inconvénients de nature diverse ou entraîner des conséquences indésirables ; mais elle ne pourrait certainement pas être jugée et condamnée d'un point de vue strictement philosophique.

C'est précisément une règle de ce genre que le mathématicien classique décide d'adopter. Mais ce n'est pas du tout de cette manière qu'il conçoit et présente ce qu'il fait. Ce qui est contestable est une fois de plus l'image trompeuse qu'il utilise pour décrire et justifier sa façon de procéder. Ayant décidé d'adopter une règle aux termes de laquelle, pour toute proposition mathématique « p », c'est une règle que p ou c'est une règle que non-p, il met entre parenthèses le caractère de règles que possèdent les propositions mathématiques, les assimile à des propositions descriptives portant sur des objets d'une espèce tout à fait spéciale et ramène ainsi la disjonction incomplète « C'est une règle que p ou c'est une règle que non-p » à un simple cas particulier du schéma « A ou non-A ». C'est ce que Wittgenstein veut dire, lorsqu'il remarque : « Le contraire de "Il y a une loi qui veut que p" n'est pas "Il y a une loi qui veut que – p". Mais si l'on exprime la première chose par "P", la deuxième par "– P", alors on tombera dans des difficultés » (BGM, p. 272).

D'un autre côté, il est clair que l'on ne peut pas envisager une situation dans laquelle on devrait admettre que, pour une certaine proposition mathématique « p », « p » n'est pas une règle et « – p » ne l'est pas davantage, puisque cela signifierait que « p » ne peut être vraie ou fausse que de façon contingente et, par conséquent, n'est pas une proposition mathématique. Il y a donc quelque chose qui parle en faveur de l'acceptation implicite d'un axiome de réduction tel que « "p" est une règle ↔ p » ou « "p" est nécessaire ↔ p », qui permet de transformer effectivement la disjonction problématique en une simple application de la loi du tiers exclu. Mais le résultat est que la différence de catégorie qui existe entre les propositions mathé-

matiques et les propositions empiriques se réduit à une simple différence entre deux espèces de réalité sur lesquelles elles portent et qu'une représentation inadéquate de ce qui se passe lorsqu'on utilise des procédures comme la réduction à l'absurde et la démonstration indirecte est inévitablement introduite par là [23].

On peut, en utilisant le principe du tiers exclu, déduire du fait que « "p" est une règle » implique contradiction que « p » n'est pas une règle, et également du fait que « "p" n'est pas une règle » implique contradiction que « p » est une règle. Mais « "p" n'est pas une règle », qui intervient comme conclusion dans le premier cas et comme prémisse dans le deuxième, n'est pas une proposition mathématique. Pour lui donner la forme qui convient, il faut accepter l'implication « "p" n'est pas une règle → "– p" est une règle » (l'implication réciproque s'impose pour d'autres raisons), ce qui implique une décision qui est escamotée dans la présentation que le mathématicien classique donne habituellement de ce qu'il fait.

La procédure elle-même n'est pas nécessairement condamnable. Ce que Wittgenstein lui reproche est surtout que sa véritable nature ne soit pas complètement explicitée : « Qu'est-ce que la démonstration indirecte ? Une action avec des signes. Mais ce n'est pas encore tout. Il s'ajoute à présent encore une règle supplémentaire, qui me dit ce que j'ai à faire lorsqu'une démonstration indirecte est effectuée. (La règle peut s'énoncer par exemple : si une démonstration indirecte est effectuée, alors les hypothèses dont part la démonstration doivent être rayées.) *Ici, il n'y a rien* qui aille de soi. Tout doit être dit expressément » (WWK, p. 180). Que me montre, en fait, la démonstration indirecte ? Uniquement ceci, selon Wittgenstein : « La démonstration indirecte dit : "Si vous voulez que les choses soient *ainsi,* vous ne pouvez pas assumer *cela* : car avec *cela* serait compatible uniquement le contraire de ce dont vous ne voulez pas vous écarter" » (BGM, p. 285). Si, en conséquence du fait que l'introduction de « p » comme règle rendrait le système inconsistant, je décide d'adopter comme règle « – p », il faut que cela soit dit explicitement. On reconnaîtra alors à quel point la démonstration qui procède de cette façon introduit

23. Sur ce point, cf. R. Fogelin, « Wittgenstein and Intuitionism », *American Philosophical Quarterly,* vol. 5 (1968), p. 267-274.

un élément inédit par rapport à la méthode directe : « L'essence de la méthode de démonstration indirecte est d'être une règle pour stipuler de nouvelles règles sous des contraintes spéciales. Avec un tel modèle de démonstration, le sentier conceptuel est interrompu de façon abrupte par cette stipulation et, de ce fait, nous ne sommes pas édifiés par le fait de voir quelque chose de nouveau se déployer à partir de l'ancien » (Fogelin, *op. cit.*, p. 270).

Le diagnostic suggéré dans les *Philosophische Bemerkungen* était que c'est la persistance de la conception extensive qui entraîne la confusion de la négation externe et de la négation interne et l'idée qu'il pourrait y avoir non pas deux, mais trois possibilités : il est nécessaire que p, il est possible que p (et également que non-p), il est nécessaire que non-p. Dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques,* Wittgenstein constate que, puisque « C'est une règle que p ou c'est une règle que non-p » n'est manifestement pas une proposition que l'on pourrait justifier en invoquant simplement le principe du tiers exclu, cela ne peut être qu'une règle supplémentaire que l'on accepte ou refuse d'instaurer. Supposons que la question posée soit de savoir si une configuration particulière φ (par exemple, « 777 ») apparaît ou non dans le développement décimal de π, c'est-à-dire si, en suivant la règle du développement décimal, on *doit* ou non rencontrer à un moment donné cette configuration. Wittgenstein pose le problème de la façon suivante :

> « Mais que dit celui qui dit qu'une chose au moins est claire : on arrivera ou on n'arrivera pas à φ dans le développement illimité ?
>
> Il me semble que celui qui dit cela énonce déjà lui-même une règle ou un postulat » (BGM, p. 266 ; cf. p. 276).

La raison pour laquelle il est en train de formuler lui-même une règle est qu'il est tout à fait possible, selon Wittgenstein, de considérer que la règle du développement ne prescrit pas et n'interdit pas non plus pour l'instant l'occurrence de cette configuration, qu'elle ne répond pas pour l'instant à la question posée :

> « Que se passerait-il si l'on répondait à une question : "A cette question il n'y a encore jusqu'ici aucune réponse" ?

> C'est ainsi que pourrait par exemple répondre le poète à qui l'on demande si le héros de son histoire a une sœur ou n'en a pas — au moment où, en effet, il n'a pas encore pris de décision là-dessus » (*ibid.*).

Celui qui demande si la configuration φ apparaît ou n'apparaît pas dans le développement décimal veut savoir s'il existe ou non une règle concernant l'occurrence de φ. « Et, remarque Wittgenstein, l'alternative de l'existence ou de la non-existence d'une telle règle n'est en tout cas pas une alternative mathématique » (BGM, p. 279). En d'autres termes, « Il y a une règle qui prescrit l'occurrence de φ » et sa négation interne « Il y a une règle qui prescrit la non-occurrence de φ » sont des propositions mathématiques ; mais la négation externe « Il n'y a pas de règle qui prescrive l'occurrence de φ » n'en est pas une.

Le rapprochement entre ce genre de situation et celle d'un auteur de fiction qui n'a pas encore décidé telle ou telle chose concernant l'un de ses héros semble, cependant, difficilement acceptable. Car il tend à suggérer que l'on peut, d'une certaine manière, décider arbitrairement ce que l'on veut. On pourrait effectivement décider purement et simplement que la configuration φ doit apparaître à un endroit quelconque dans le développement décimal de π ou, au contraire, qu'elle ne doit pas apparaître du tout. Cela reviendrait à adopter une règle, qui est évidemment susceptible d'entrer en conflit avec d'autres règles lorsque nous serons en mesure d'aboutir à une décision réellement motivée. Mais aucune des deux options ne serait incompatible avec ce que nous savons (ou avec les autres dispositions que nous avons prises) pour l'instant. Ce qui est vrai est qu'il nous manque pour le moment la raison qui permettrait de décider dans un sens plutôt que dans l'autre, et donc également, d'une certaine façon, la raison de prendre une décision quelconque sur ce point, tout comme à un certain stade de la construction de son roman l'auteur pourrait répondre à quelqu'un qui lui pose la question qu'il n'a pas encore pris de décision et qu'il ne dispose pas pour l'instant d'éléments qui requièrent une décision concernant la question de savoir si son personnage a ou non une sœur. Le point commun entre les deux cas est qu'il n'y a pas de réalité qui décide indépendamment de nous ; c'est *nous* qui devons décider, que ce soit sans raison particulière ou en fonction de ce que nous reconnaissons comme une bonne raison.

Un partisan de la conception réaliste répondra naturellement que la question doit déjà être tranchée pour la totalité du développement, comme elle l'est pour n'importe quel développement partiel fini :

> « "Mais tous les termes de la suite, du premier jusqu'au 1 000-ième, jusqu'au 10^{10}-ième, et ainsi de suite, sont tout de même bien déterminés ; par conséquent, *tous* les termes sont bel et bien déterminés." C'est exact, si cela est censé vouloir dire qu'il n'est pas vrai que, par exemple, le tant ou tant-ième ne soit *pas* déterminé. Mais vous voyez bien que cela ne vous donne aucun éclaircissement sur la question de savoir si une configuration apparaîtra dans le développement (si elle n'est pas apparue jusqu'à présent). *Nous voyons donc* que nous utilisons une *image* qui nous induit en erreur » (BGM, p. 269).

Il est vrai que, pour tout nombre *n*, la règle détermine ce que doit être la *n*-ième décimale de π. Mais cela ne suffit pas pour qu'elle détermine si la configuration « 777 » doit ou non apparaître, sans autre précision, dans le développement décimal. L'image qui nous induit en erreur est celle de ce qui se passe dans le cas d'un segment initial fini de la suite. Il suffit de le produire pour voir si la configuration y apparaît ou non. Si elle apparaît, son occurrence est naturellement prescrite par la règle ; et si elle n'apparaît pas, c'est que son occurrence est au contraire prohibée par la règle. Dans le cas d'un développement fini, il ne semble pas y avoir de différence entre « φ apparaît » et « φ doit apparaître », ni entre « φ n'apparaît pas » et « φ ne doit pas apparaître » : « Le contraire de "φ ne doit pas apparaître" s'énonce "φ peut apparaître". Mais, pour un segment fini de la suite, il semble que le contraire de "φ ne doit pas y apparaître" soit "φ *doit* y apparaître" » (BGM, p. 278). En revanche, lorsque la question est posée à propos du développement complet, « φ apparaît » *resp.* « φ n'apparaît pas » ne peuvent avoir que le sens d'une règle ou d'un impératif prescrivant *resp.* prohibant l'occurrence de φ. Et il s'agit d'une règle qui n'est pas donnée implicitement avec la règle du développement décimal elle-même, mais que nous devons d'abord inventer. Seule une analogie trompeuse avec le cas des suites finies

nous incite à croire que la règle du développement décimal « décide implicitement *toutes* les questions concernant la structure de la suite » (BGM, p. 269).

Dans le cas d'un développement fini, le point de vue extensif s'impose de façon presque irrésistible, parce qu'il semble que nous n'ayons qu'à construire le développement pour constater alors que la configuration concernée y apparaît ou n'y apparaît pas. Et la tentation que Wittgenstein cherche à combattre est celle qui nous incite à croire qu'une chose du même genre est concevable pour un développement infini, même si elle n'est pas possible pour nous. Aussi longtemps que l'on considère le développement comme donné dans sa totalité sous la forme d'une extension infinie, il est naturel de se dire que la question de savoir si une configuration déterminée apparaît ou non dans le développement est décidée par la règle qui a engendré cette extension. Mais, si l'on abandonne complètement le point de vue extensif, il n'est plus possible de raisonner comme si les considérations qui nous permettent de trancher la question constituaient simplement une façon de reconnaître une chose qui était déjà décidée autrement et qu'un sujet connaissant hypothétique doué de capacités que nous n'avons pas pourrait reconnaître directement. C'est, en fait, uniquement la conception extensionnelle que nous avons de l'infini qui nous permet d'opposer, sur ce point, nos possibilités de connaissance limitées à d'autres qui ne le sont pas.

Ce qui complique les choses est évidemment que, si j'ai rencontré la configuration φ à un certain stade du développement, j'ai une démonstration et, qui plus est, une démonstration constructive du fait qu'elle apparaît dans le développement, alors que, si je ne l'ai pas rencontrée jusque-là, je n'ai pas de démonstration et aucune idée de ce que serait une démonstration du fait qu'elle n'apparaît à aucun endroit dans le développement. Des considérations d'un tout ordre sont nécessaires pour justifier une assertion de la proposition négative. Dire que φ apparaît dans le développement décimal de π revient à dire qu'il existe un nombre *n* tel que φ apparaît dans les *n* premières décimales de π. Et la même représentation qui est associée à l'usage de la phrase « φ apparaît dans les *n* premières décimales de π » peut être associée également à l'usage de sa négation « φ n'apparaît pas dans les *n* premières décimales de π ». Elle peut, semble-t-il, encore être associée à l'usage de la phrase positive « φ apparaît (sans autre précision) dans le développement », mais non à celui de la phrase négative « φ n'apparaît nulle part dans le développement ». La difficulté est ici que « nous cherchons une représentation pour chacune des deux choses en particulier et que, contrairement à ce qui se passe ailleurs, *une seule* ne suffit pas pour le cas négatif et pour le cas positif » (BGM, p. 278). Dans le cas considéré, nous pouvons, semble-t-il, éventuellement réussir à décider l'assertion existentielle « (Ex)Px » en poussant plus loin le développement ; mais nous ne pouvons espérer décider de la même façon sa négation « (x)— Px ». Autrement dit, on peut apparemment décider la proposition positive sans avoir à faire rien de plus que d'appliquer la règle du développement décimal, alors qu'une décision concernant la proposition négative doit faire intervenir des considérations d'un type tout à fait différent.

Wittgenstein semble estimer, cependant, que « (Ex)Px », appliqué au développement complet est tout autant que « (x)— Px » l'expression d'une loi ou d'une règle et contester que les exemples utilisés pour faire comprendre à quelqu'un ce que signifie la phrase « La configuration... apparaît dans le développement » soient en mesure de lui montrer réellement ce qu'il en est lorsque cette configuration apparaît effectivement dans le développement. Et la raison qu'il donne est que, « si j'avais réellement le droit de dire que ces exemples m'apprennent comment les choses sont, lorsque la configuration apparaît dans le développement, alors ils devraient me montrer également ce que signifie le contraire de la phrase » (BGM, p. 271). Si quelqu'un est capable d'appliquer correctement la règle du développement décimal de π et a appris à l'aide d'exemples divers de développement décimaux finis ce que signifient la proposition « La configuration... apparaît dans les *n* premières décimales » et sa négation, il semble qu'il n'ait besoin d'aucune instruction supplémentaire pour pouvoir donner un sens à la proposition « La configuration... apparaît à un endroit quelconque dans le développement décimal de π », même s'il est vrai qu'il n'en va pas du tout de même pour sa négation, dont Wittgenstein dit qu'elle « n'a de sens que dans des conditions tout à fait spéciales » (BGM, p. 268-269), un sens que l'on pourrait exprimer à peu près ainsi : « Cela fait partie de la *loi* de cette suite qu'elle ne contienne pas la configuration... » « En

poussant plus loin le calcul du développement, remarque-t-il, je déduis de nouvelles lois auxquelles obéit la suite » (*ibid.*). Si, par exemple, je suis arrivé à un moment donné, par le calcul, à la configuration φ, je peux, semble-t-il, formuler comme une (nouvelle) loi que cette configuration doit apparaître dans le développement décimal de π ; mais je ne pourrai jamais déduire de la même façon une loi qui exclut l'occurrence de cette configuration.

Wittgenstein donne pourtant l'impression de considérer que la différence entre le fini et l'infini est tout aussi sensible dans le cas de la proposition positive que dans celui de la proposition négative. La compréhension de la proposition « La configuration... apparaît dans tel ou tel segment initial fini du développement » ne garantit pas à elle seule celle de la proposition « La configuration... apparaît dans le développement ». Il est vrai que, si quelqu'un a rencontré à un certain stade du développement la configuration en question, il utilisera probablement pour décrire ce cas la proposition « La configuration... apparaît dans le développement ». Mais Wittgenstein objecte, de façon passablement obscure, que ce que me montre ce cas « peut illustrer *différents* faits. On ne peut par conséquent pas dire que je sais ce que signifie la proposition, parce que je sais qu'il l'appliquera certainement dans ce cas-là » (BGM, p. 271). Le sens de la proposition peut sans doute être illustré par des exemples d'utilisation de ce genre, mais cela ne signifie pas qu'il soit réellement déterminé par eux.

On peut accorder à Wittgenstein que la découverte de la configuration φ à un endroit donné ne détermine pas ce que pourrait être le sens de la proposition « La configuration φ apparaît dans le développement », lorsque celui-ci est considéré comme résultant de la production d'une démonstration d'existence non constructive. La démonstration nous fournit, pour l'utilisation de la proposition, un nouveau critère, indépendant des exemples qui ont été utilisés auparavant pour illustrer son sens. Mais Wittgenstein semble vouloir dire, en outre, que les illustrations utilisées pour donner un sens à la quantification existentielle restreinte « $(Ex < n)Fx$ » (par exemple : « Il existe $x < n$, tel que la x-ième décimale de π est le dernier élément d'une suite de trois 7 consécutifs ») ne donnent même pas *un* sens déterminé à la proposition, lorsque la variable « x » parcourt la suite infinie des nombres positifs.

Ce qui justifie cette position, à première vue tout à fait déconcertante, est le fait qu'un énoncé sur l'infini ne se situe pas du tout au même niveau qu'un énoncé sur le fini et ne peut réellement en être déduit. Dans ses leçons des années 1930-1933, Wittgenstein soutient que la proposition « Il y a trois 7 consécutifs dans le développement décimal de π » est un non-sens. Cependant, si quelqu'un avait poursuivi pendant dix ans le calcul des décimales de π et fini par trouver trois 7 consécutifs, cela prouverait au moins qu'il y a trois 7 consécutifs dans « *un développement de dix ans* » (WL 1930-1933, p. 302). Mais Wittgenstein ne semble pas disposé à admettre que cela puisse prouver autre chose que cela. Il soutient que, bien que (1) « Il y a cinq 7 consécutifs dans les mille premiers chiffres de π » ait un sens, néanmoins (2) « Il y a cinq 7 consécutifs *quelque part* dans le développement » n'en a pas, et que « nous ne pouvons pas dire que (2) a un sens parce que (2) suit de (1) » (*ibid.*, p. 302). Il concède, toutefois, qu'une proposition comme (2) pourrait, comme n'importe quelle autre, avoir un sens, à savoir « celui, quel qu'il puisse être, que sa grammaire autorise », mais souligne qu'elle a une grammaire « très curieuse », puisqu'« elle est compatible avec le fait qu'il n'y ait cinq 7 consécutifs dans aucun développement que nous pouvons donner » (*ibid.*, p. 303). La difficulté provient du fait que la grammaire de (1) et celle de (2) semblent à première vue comparables et pourtant ne le sont pas, puisque comparer un développement partiel fini de π avec le développement complet ne consiste pas à comparer deux extensions, mais plutôt à comparer une extension et une loi. L'expression « apparaître dans le développement » peut naturellement avoir un sens dans le cas de l'infini ; mais, contrairement aux apparences, celui-ci ne peut être obtenu par projection à partir de celui qu'elle a pour le fini. Il dépend en effet de l'invention préalable d'une méthode générale, qui devrait nous permettre de décider non pas seulement si la configuration particulière « 777 » apparaît ou non dans le développement infini, mais également toute une série d'autres questions du même genre. Dans le cas d'un nombre rationnel, on peut, par exemple, utiliser la périodicité comme critère pour dire qu'un chiffre apparaît ou n'apparaît pas dans le développement infini : « Le mot "infini" a ses usages. Par exemple, dire qu'il n'y a pas de 6 dans le développement infini de 1 : 7 signifie qu'il n'est pas dans la période, et c'est tout. Cela n'a de sens que dans ce calcul » (WLC 1932-1935, p. 190). Nous ne disposons évidemment, dans le cas de π, d'aucun calcul susceptible de remplir une fonction analogue et de donner un sens à des questions du même genre. Mais, même dans le cas où nous avons adopté une convention qui fixe le sens spécifique de l'expression « apparaître dans le développement infini », Wittgenstein conteste que nous puissions légitimement dire, par exemple, qu'un chiffre déterminé apparaît dans la période du développement et *donc* dans le développement infini, comme si la deuxième expression avait par elle-même un sens quelconque : « Supposons que vous calculiez sur des périodes et définissiez "Il y a un 7 dans le développement infini" comme "Il y a un 7 dans la période". Cela serait utile. Mais si vous dites qu'il y a un 7 dans la période et par conséquent dans le développement infini, vous concluez d'une expression utile à une expression verbale sans signification » (*ibid.*, p. 191). Comme dans le cas du raisonnement par récurrence, c'est une erreur de croire que la conclusion avait déjà un sens et que sa vérité a été reconnue par une déduction effectuée à partir de quelque chose d'autre.

Les considérations qui ont été développées jusqu'ici ne pourraient dissuader un platonicien convaincu de continuer à défendre, contre ses adversaires intuitionnistes, sa croyance à la validité universelle du tiers exclu. Elles le contraignent tout au plus à reformuler sa position dans le cadre de la conception régulative ou impérative de la proposition mathématique, qui est suggérée par Wittgenstein. Au lieu de dire que « p ou non-p » est vrai pour n'importe quelle proposition mathématique « p », il devra exprimer son choix comme consistant à accepter, dans le cas considéré, une règle du genre suivant : « Si la *n*-ième décimale de π est déterminée, pour n'importe quel *n*, par la règle du développement décimal, alors c'est une règle que l'occurrence de la configuration φ dans le développement est ou bien prescrite ou bien prohibée par là ». Pour justifier l'introduction d'une règle de ce genre, il invoquera naturellement le fait que la règle du développement décimal a déja déterminé implicitement l'existence d'une règle prescrivant ou d'une règle prohibant l'occurrence de φ dans le développement, bien que nous ne sachions pas pour l'instant laquelle des deux est en vigueur. Wittgenstein objecte, pour sa part, que rien de tel n'a été déterminé par la règle du développement décimal et qu'il n'existe pas de règles cachées attendant d'être découvertes et reconnues par nous. Il n'est pas vrai qu'une règle ou un impératif puissent être la conséquence irrécusable d'autres règles ou d'autres impératifs que nous avons formulés explicitement, indépendamment de notre décision de les accepter comme en résultant nécessairement. En ce sens-là, l'existence d'une règle prescrivant ou proscrivant l'occurrence de la configuration φ n'est en aucune façon prédéterminée par la règle du développement décimal de π, qui ne peut rien décider sur ce point sans que nous l'ayons décidé expressément.

Le mathématicien platonisant se trouve donc privé par là de la seule raison déterminante qu'il pourrait invoquer en faveur de sa règle. Mais cela ne peut avoir le genre de conséquences révisionnistes que les intuitionnistes s'empressent d'en tirer, si l'on considère, comme le fait Wittgenstein, que les règles en général n'ont nullement besoin de ce type de raison. L'intuitionnisme montre simplement que les règles acceptées par le mathématicien classique n'ont pas le genre de justification qu'il leur attribue. Mais cela ne constitue pas à soi seul une raison d'accepter d'autres règles, sauf si l'intuitionnisme adopte justement, sur le problème de la légitimité des règles, le même point de vue que son adversaire classique et considère que la validité d'une règle comme le tiers exclu dépend entièrement de la plausibilité d'une conception philosophique comme celle que son adversaire a de la vérité d'une proposition mathématique en général. En plus de cela, il faut tenir compte du fait que l'intuitionnisme se méprend lui-même sérieusement, du point de vue de Wittgenstein, sur la manière dont la suite des décimales de π est déterminée par la règle du développement. Pour un segment initial fini quelconque du développement, l'intuitionnisme est en effet d'accord avec le réalisme mathématique pour considérer que la suite des décimales de π est déjà déterminée objectivement, d'une manière telle que n'importe quelle autre méthode permettant de décider une question concernant la structure du développement est justifiée par la coïncidence de ses résultats avec ceux que l'on pourrait en principe obtenir par la procédure consistant à effectuer le calcul des décimales successives. Les remarques de Wittgenstein sur ce que c'est que suivre une règle obligent à reconsidérer sérieusement cette idée : la valeur de la n-ième décimale n'est pas déterminée à l'avance, pour n'importe quel n, indépendamment

de notre capacité de la reconnaître comme étant la valeur que l'on *doit* effectivement obtenir, si l'on applique correctement la règle jusqu'à n ; et il est tout à fait concevable que, même pour un segment initial fini du développement, nous soyons amenés à introduire une règle autonome, c'est-à-dire affranchie de toute responsabilité directe envers la méthode du calcul des décimales successives, qui décide par elle-même certaines questions que l'on peut se poser à propos du développement et nous serve de critère pour juger de l'acceptabilité des résultats que l'on obtiendrait par le calcul. En d'autres termes, même pour un développement décimal fini, la question de savoir si la configuration φ apparaît ou non dans le développement pourrait dépendre non pas de la seule règle du calcul des décimales, mais de l'adoption d'une règle supplémentaire qui, de sa propre autorité et sous sa seule responsabilité, prescrit ou interdit l'occurrence de φ. Sur ce point, il est clair que les considérations sur ce que c'est que suivre une règle, la critique des résidus de la conception extensive qui subsistent chez les intuitionnistes et les suggestions qui vont dans le sens de ce qu'on appelle le « finitisme strict » constituent, chez Wittgenstein, trois aspects étroitement solidaires de la même tendance philosophique.

Wittgenstein est naturellement conscient du fait que Brouwer voulait précisément remplacer la compréhension extensionnelle d'une question comme celle qui a trait à l'occurrence ou la non-occurrence d'une suite déterminée de chiffres dans le développement décimal de π par une interprétation intensionnelle : « La conception intensionnelle (...) est que ou bien on a une démonstration qu'il existe trois 7 dans π, ou bien on a une démonstration qu'il ne peut y avoir trois 7 dans π. Il semble y avoir encore une troisième possibilité, à savoir qu'on n'ait pas de démonstration ni dans un sens ni dans l'autre. Lorsque Brouwer dit que la loi du tiers exclu n'est pas toujours valide, il adopte le point de vue intensionnel » (WLC 1932-1935, p. 196). Mais la conception intensionnelle, si on la suit jusqu'au bout, entraîne une conséquence paradoxale, qui est qu'« il semble y avoir des propositions qui n'ont pas de sens avant que nous sachions si elles sont vraies ou fausses » (*ibid.*, p. 197). Et une proposition qui n'acquiert un sens qu'en devenant vraie ou fausse ne peut évidemment pas constituer une exception à la loi du tiers exclu. Ce que Wittgenstein veut dire est que, si nous en sommes réduits pour l'instant à calculer de proche en proche la suite des décimales de π, d'une manière telle qu'aucune propriété caractéristique ne nous permet de formuler une quelconque généralité à propos du développement et d'effectuer une quelconque prédiction concernant le genre de chose que l'on obtiendrait (ou, plus exactement, que l'on *devrait* obtenir) en continuant indéfiniment, la question de savoir si telle ou telle configuration apparaît ou non à un moment donné dans le développement n'est pas réellement une question mathématique, et donc pas non plus un exemple de question mathématique qui pourrait être insoluble.

Bien qu'il soit conscient des difficultés considérables qu'elle entraîne, Wittgenstein semble disposer à accepter la situation paradoxale qui résulte de l'adoption de la conception intensionnelle et la considère même comme constituant justement la caractéristique distinctive des propositions mathématiques, par opposition aux propositions ordinaires : « Les cas dans lesquels une question mathématique est semblable à une question ordinaire sont ceux dans lesquels nous avons une méthode générale pour y répondre » (*ibid.*, p. 199), avec cette différence, cependant, que nous ne pouvons pas imaginer à quoi ressembleraient les choses si la bonne réponse était, en fait, mauvaise et la mauvaise bonne. La question mathématique ressemble à la question ordinaire, lorsque nous disposons d'une méthode de vérification qu'il s'agit simplement d'appliquer à un cas particulier, par exemple d'un algorithme qui fournit la réponse à tous les problèmes d'une certaine catégorie. Elle s'en distingue en revanche complètement lorsque nous sommes à la recherche d'une méthode de décision, qui ne déterminera pas seulement, lorsque nous l'aurons trouvée, la réponse désirée, mais également le sens réel de la question elle-même. Cela amène Wittgenstein à risquer la suggestion suivante : « On pourrait dire que les expressions verbales, dans les mathématiques, que nous utilisons pour décrire les résultats de démonstrations sont utilisées de façon hautement métaphorique » (*ibid.*, p. 198). C'est la démonstration et elle seule qui donne à la proposition son sens strict ou littéral.

Ce que l'on peut dire de plus précis sur ce point, si l'on ne veut pas évacuer complètement l'idée même de question mathématique non résolue, est probablement ce qui est suggéré dans les *Fiches* :

> « La question mathématique est un défi. Et l'on pourrait dire : elle a un sens si elle nous incite à une activité mathématique.
>
> On pourrait, dans ces conditions, dire également qu'une question mathématique a un sens si elle excite l'imagination mathématique » (Z, §§ 696-697).

Si l'on veut savoir quel genre de problème *mathématique* est représenté par la question de savoir si la configuration « 777 » apparaît ou non dans le développement décimal de π, il faut se demander quel genre de défi elle propose à l'imagination mathématique (et non pas seulement à l'endurance du calculateur) et à quel genre d'activité mathématique elle est susceptible de nous inciter. Dire que nous ne comprenons pas du tout la question serait certainement abusif. Mais Wittgenstein n'est manifestement pas convaincu qu'elle puisse susciter pour le moment autre chose qu'une bonne quantité de spéculation (et de confusion) philosophiques.

Le logicien qui éprouve le besoin d'asserter avec une insistance particulière le principe du tiers exclu (« Dans le développement infini de π, le groupe "777" apparaît ou n'apparaît pas, il n'y a pas de troisième chose »), alors qu'il n'est pas tenté de faire de même avec les autres lois logiques, ne formule, selon Wittgenstein, aucune vérité substantielle, mais propose simplement une image extrêmement tentante dont nous éprouvons les plus grandes difficultés à nous défaire, celle d'une suite visible, étalée en quelque sorte devant nous et que quelqu'un (Dieu) peut voir dans sa totalité, alors que nous ne le pouvons pas : « Et cette image *semble* à présent déterminer ce que nous devons faire, comment nous devons chercher et ce que nous devons chercher — mais ne le fait pas, parce que nous ne savons justement pas comment elle doit être appliquée. Lorsque nous disons "Il n'y a pas de troisième chose" ou "Il est bien vrai qu'il n'y a pas de troisième chose !" — ce que cela exprime est que nous ne pouvons pas détourner le regard de cette image, — qui donne l'impression que le problème et sa solution doivent déjà résider en elle, alors que nous *sentons* que ce n'est pas le cas » (PU, § 352). C'est essentiellement cette image obsédante d'une suite dans laquelle, indépendamment de tout ce que nous pouvons entreprendre, sont déjà données à la fois les questions et les réponses, que défend le mathématicien classique lorsqu'il invoque le principe du tiers exclu ; et c'est elle que l'intuitionnisme attaque en croyant contester par là le principe lui-même. Mais il ne rejette pas complètement l'image en question, selon Wittgenstein, puisqu'il continue à raisonner, lui aussi, en fonction d'une suite qui contient les questions et les réponses, mais d'une manière telle que les questions ne seront pas nécessairement posées et les réponses pas nécessairement trouvées. Le réalisme insiste sur le fait que la suite pourrait en principe être connue entièrement d'un sujet connaissant doué de capacités supérieures aux nôtres ; l'intuitionnisme objecte que nous ne pouvons justement pas la connaître intégralement et que ce qui compte est uniquement ce que *nous* pouvons connaître. Wittgenstein soutient, pour sa part, qu'il n'y a rien à connaître, au sens suggéré par l'image qui nous séduit, et, par conséquent, rien non plus que nous soyons dans l'impossibilité de connaître.

8. LOIS ET EXTENSIONS : LE PROBLÈME DU NOMBRE RÉEL

Les remarques de Wittgenstein sur le tiers exclu ne peuvent évidemment être comprises que comme l'expression directe de sa volonté d'éliminer toutes les conceptions « mixtes » au profit d'une interprétation rigoureusement intensionnelle. Son idée est que nous ne devrions jamais considérer l'extension comme décrite — en quelque sorte, faute de mieux — intensionnellement et comme contenant implicitement la réponse à toutes les questions que l'intension ne décide pas et ne décidera peut-être jamais. C'est, en réalité, l'intension qui est décrite ou illustrée par des extensions qui en résultent ici ou là (cf. BGM, p. 292-293). Les mathématiques traitent en premier lieu de concepts, de règles, de lois et de processus, et non d'extensions qui leur correspondent et qui sont décrites imparfaitement ou caractérisées incomplètement par eux. Wittgenstein estime que « la faute dans la façon de considérer les choses qui caractérise la théorie des ensembles réside toujours à nouveau dans le fait de considérer lois et énumérations (listes) comme étant essentiellement une seule chose et de les aligner l'une à côté de l'autre ; là où une des deux choses ne suffit pas, l'autre prend sa place » (PG, p. 461). La loi peut faire des choses que l'énumération ne fait pas (par exemple, nous donner une extension infinie) ; mais l'énumération peut nous apprendre des choses que la loi ne nous dit pas. C'est un peu comme si l'une des deux pouvait en quelque sorte combler les vides laissés par l'autre. Cette idée d'une intersubstituabilité de l'intension et de l'extension est, aux yeux de Wittgenstein, l'illusion par excellence.

Dans le cas de l'analyse, la confusion est encouragée par l'existence de représentations géométriques, qui créent l'impression que l'extension est déjà donnée indépendamment de la description qui la représente et susceptible, le cas échéant, de la compléter en ajoutant elle-même les éléments que la description pourrait laisser échapper. Wittgenstein note que « les explications extensionnelles des fonctions, des nombres réels, etc., sautent tout ce qui est intensionnel — bien qu'elles le présupposent — et se réfèrent à la forme extérieure qui revient sans cesse » (BGM, p. 290). Les extensions ne jouent, en fait, dans l'analyse qu'un rôle d'illustrations, qui constituent naturellement aussi des applications importantes, mais qui, à un moment donné, cessent d'être des applications possibles et engendrent alors la confusion (cf. BGM, p. 285-286). Wittgenstein voit dans l'idée de la « coupure » dedekindienne une illustration dangereuse de ce genre : « La coupure est une *représentation* extensive » (BGM, p. 288). La démonstration du théorème de Dedekind donne l'impression de pouvoir être justifiée par une image, alors que, comme dans tous les cas de ce genre, l'image ne peut être justifiée, au contraire, que par la démonstration. Il n'est donc pas surprenant que Wittgenstein formule à nouveau le même diagnostic : « Il en va de la proposition de Dedekind comme du principe du tiers exclu : elle semble exclure un tiers, alors qu'il n'y est pas question d'un tiers » (BGM, p. 287).

Le tort de Dedekind est, selon Wittgenstein, de raisonner comme si, en coupant de toutes les façons possibles la droite réelle, on devait tomber tantôt sur des points rationnels, tantôt sur des points irrationnels, qui sont déjà là indépendamment des méthodes de calcul que nous utilisons par ailleurs à propos des nombres rationnels *resp.* des nombres irrationnels et de la manière dont nous avons déterminé leurs applications : « Ce qui est trompeur dans la conception extensionnelle de Dedekind est l'idée que les nombres réels sont là étalés sur la droite des nombres. On peut les connaître ou non ; cela ne fait rien. Et par le fait on n'a qu'à couper, ou diviser en classes, et on leur a assigné à tous leur place » (BGM, p. 290). C'est une erreur de croire que le fait que tout nombre réel puisse servir à effectuer une coupure nous donne le concept de nombre réel, comme si celui-ci pouvait être obtenu à partir d'une représentation extensionnelle comme celle d'« une droite à laquelle il manque un point ». Cette critique pourrait sembler injuste, dans la mesure

où Dedekind, tout en reconnaissant que l'intuition géométrique constitue un outil pédagogique indispensable dans les premiers stades de l'enseignement du calcul différentiel, la considère comme tout à fait incapable d'apporter une réponse scientifique à la question des fondements du calcul et déclare avoir pris, pour cette raison, la résolution « de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé une justification purement arithmétique et tout à fait rigoureuse des principes de l'analyse infinitésimale[24] ». Mais la représentation extensionnelle que Wittgenstein conteste est bien celle que Dedekind a en tête lorsqu'il écrit des choses comme celles-ci : « Il faut (...) accorder la plus grande importance au fait qu'il y a sur la droite L un nombre infini de points qui ne correspondent à aucun nombre rationnel. (...) Si l'on veut maintenant suivre également du point de vue arithmétique tous les phénomènes sur la droite, alors les nombres rationnels ne suffisent pas pour cela, et il devient par conséquent absolument nécessaire d'affiner de façon essentielle l'instrument R qui a été construit par la création des nombres rationnels en créant de nouveaux nombres d'une espèce telle que le domaine des nombres obtienne la même complétude ou, comme nous allons dire dans un instant, la même *continuité* que la ligne droite » (*ibid.*, p. 8-9). Ce que Wittgenstein trouve contestable est justement l'idée que des phénomènes qui étaient déjà déterminés sur la droite géométrique, indépendamment des applications géométriques que nous faisons du calcul des nombres réels, ont exigé, pour être représentés correctement, la mise au point d'un instrument plus raffiné que le système, encore trop grossier, des nombres rationnels.

Dedekind se montre, en fait, particulièrement soucieux de bien distinguer les considérations heuristiques (géométriques) des principes constitutifs (arithmétiques). Si des représentations non arithmétiques ont pu servir de point de départ et de motivation pour une extension de la notion de nombre, « il est tout à fait certain que cela ne constitue pas une raison d'admettre ces considérations étrangères elles-mêmes dans l'arithmétique, dans la science des nombres » (*op. cit.*, p. 10). Mais Wittgenstein estime que la confusion est déjà inscrite dans l'idée que la droite géométrique est constituée de points et que

24. R. Dedekind, « Stetigkeit und Irrationale Zahlen » (1872), in *Was sind und was sollen die Zahlen ? — Stetigkeit und Irrationale Zahlen,* Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1965, p. 4.

la répartition de ceux-ci en deux classes satisfaisant des conditions d'un certain type a pour effet de déterminer un point parmi tous les autres. « La droite, écrit-il, est une loi et n'est constituée de rien du tout » (PB, p. 211). Il n'est donc pas possible de donner immédiatement un sens à la proposition qui, pour Dedekind, exprime l'essence de la continuité de la droite et dont il considère que chacun lui concédera aussitôt la vérité : « Si tous les points de la droite se répartissent en deux classes telles que tout point de la première classe est à gauche de tout point de la deuxième classe, alors il existe un et un seul point qui produit cette partition de tous les points en deux classes, cette coupure de la droite en deux morceaux » (*op. cit.*, p. 10). Dedekind constate que de nombreux lecteurs seront sans doute déçus de voir le « mystère de la continuité » se réduire finalement à cette « trivialité ». Or Wittgenstein estime, pour sa part, que l'évidence ne résulte en l'occurrence que de la banalisation d'une représentation intrinsèquement pernicieuse. Cantor, Dedekind et beaucoup d'autres considèrent que le continu peut en quelque sorte être décrit extensionnellement avant que nous disposions du système de nombres et des méthodes de calcul appropriés pour le représenter. Or « une forme ne peut pas être décrite, mais seulement représentée » (PB, p. 208). Des notions comme celle de « point le plus élevé d'une courbe » ou de « maximum d'une fonction » ne renvoient pas à une réalité que l'on pourrait envisager de décrire et dans laquelle tous les points ou toutes les valeurs sont disposés d'une certaine façon par rapport à l'un d'entre eux ou l'une d'entre elles, mais uniquement à une possibilité :

> « "Le point le plus élevé d'une courbe" ne signifie pas "le point le plus élevé parmi tous les points de la courbe" — eux, assurément, nous ne les voyons pas —, c'est un point déterminé que la courbe engendre. De la même façon, le maximum d'une fonction n'est pas la plus grande valeur parmi toutes les valeurs (cela n'a pas de sens, sauf dans le cas de points en nombre fini, discrets), mais un point engendré par une loi et une condition ; un point qui, à coup sûr, est plus élevé que tout autre point pris arbitrairement sur la courbe (*possibilité,* et non réalité). De même, le point d'intersection de deux lignes n'est pas l'élément commun de deux classes de points, mais l'intersection de deux lois » (PB, p. 208).

Ce qui manque dans tous les cas à la conception extensionnelle d'un processus ou d'une technique sans fin comme, par exemple, un développement décimal illimité est la reconnaissance du fait que, là où il semble y avoir deux méthodes différentes qui permettent d'aboutir au même résultat, l'une abrégée et l'autre développée, le fait qu'elles *doivent* aboutir au même résultat ne peut pas être un fait d'expérience, mais seulement une règle : « Cela ressemble à faire la même chose d'une façon rapide et d'une façon qui prend du temps. Cela donne l'impression qu'il est dans la *nature* des processus de conduire au même résultat. Mais les processus eux-mêmes ne montrent rien sur un *doit* » (WLC 1932-1935, p. 185). Ainsi, par exemple, celui qui a découvert la périodicité dans 1 : 7 a découvert une nouvelle méthode permettant de savoir s'il y a ou non un 6 dans les 1 000 premières décimales et modifié, du même coup, la nature du problème initial : « Si son problème avait été de trouver s'*il* écrirait un 6 dans les 1 000 premières places, il pourrait le résoudre uniquement en voyant ce qu'il découvrirait en fait en calculant. La deuxième méthode, impliquant la découverte de la périodicité, ne l'aiderait pas à résoudre ce problème. Mais elle déterminerait ce qu'il était *correct* pour lui de découvrir » (*ibid.*, p. 187).

La périodicité d'une fraction, par exemple 1/3, est généralement conçue comme une propriété d'une extension infinie ou, si l'on préfère, d'une suite infinie d'extensions, dont l'identité du reste de la division et du dividende constitue simplement l'*indice*. Wittgenstein soutient que l'apparition d'un premier reste égal au dividende n'est pas l'indice de l'existence d'une régularité qui était déjà là et qui révèle ainsi sa présence, mais est elle-même comprise comme l'expression d'une règle qui détermine à l'infini la suite du développement. La proposition selon laquelle la division, à partir de la première place, produira le même chiffre à l'infini *veut dire* que le premier reste est égal au dividende, tout comme la proposition « Cette règle a un rayon de courbure infini » veut dire qu'elle est droite. Dans « 0,3, 0,33, 0,333, etc. » le « etc. » ne sert pas à abréger une énumération et « 0,3, 0,33, 0,333, etc. » n'est pas le substitut d'une extension :

> « C'est une *règle* et le "etc." se rapporte à la régularité, et la

> règle pourrait également s'écrire "| 0,3, 0,ξ, 0,ξ3 |". Mais ce qui est démontré par la division
>
> $$\begin{array}{l} \underline{1}\ \ : 3 = 0{,}3 \\ \ \underline{1} \end{array}$$
>
> est *cette* régularité par opposition à une autre, non la régularité par opposition à l'irrégularité. La division périodique, donc $\begin{array}{l} \underline{1}\ \ : 3 = 0{,}3 \\ \ \underline{1} \end{array}$ (par opposition à $\begin{array}{l} 1\ \ : 3 = 0{,}3 \\ \ 1 \end{array}$) démontre *une* périodicité du quotient, autrement dit, elle *détermine* la règle (la période), la fixe, mais elle n'est pas un indice du fait qu'une régularité est "présente". *Où* est-elle donc présente ? Peut-être dans les développements que j'ai construits sur le papier. Mais ce ne sont tout de même pas "les développements". (Ici nous sommes induits en erreur par l'idée des extensions idéales, non écrites, qui sont une chimère analogue aux droites géométriques idéales, non tracées, que nous ne faisons pour ainsi dire que retracer, lorsque nous les dessinons.) Lorsque j'ai dit "Le 'etc.' se rapporte à la régularité", je l'ai distingué du "etc." dans "Il a lu toutes les lettres : a, b, c, etc." Si je dis : "Les extensions 1 : 3 sont 0,3, 0,33, 0,333, etc.", alors je donne *trois* extensions et — une règle. Il n'y a d'infini que celle-ci, et cela d'une façon qui n'est en rien différente de celle de la division $\begin{array}{l} \underline{1}\ \ : 3 = 0{,}3 \\ \ \underline{1} \end{array}$ » (PG, p. 427-428).

A quoi pourrait ressembler, dans le cas d'un nombre irrationnel, l'équivalent d'une méthode permettant de répondre, comme le fait la périodicité pour un nombre rationnel, à des questions concernant l'occurrence de tel ou tel chiffre dans le développement décimal ? Wittgenstein souligne que l'on n'a pas indiqué une méthode dont on pourrait se servir pour décider si une suite de trois 7 consécutifs apparaît ou non dans le développement décimal de π en disant qu'il suffit simplement de calculer l'une après l'autre les décimales et de voir ce que l'on obtient, mais sans préciser d'une manière quelconque jusqu'où l'on doit aller : « Peut-il y avoir un 4 dans le développement de 1 : 3 ? La manière de trouver ce qu'il en est serait de diviser. Mais combien de temps doit-on continuer ? Si vous ne savez pas cela, aucune question ne vous a été posée. Cela étant, c'est comme si, en découvrant la formule et en voyant qu'il ne pourrait y avoir un 4, on avait découvert un raccourci pour l'infini. Ce qui se passe est que l'on accepte la formule comme une interprétation de la question et de la réponse » (WLC 1932-1935, p. 187). Le point important est que « "trouver" (...) devrait signifier trouver par un calcul correct ». Et, « d'une personne qui a trouvé un objet dans un labyrinthe en montant sur un arbre et en regardant le labyrinthe de ce point de vue panoramique, on dirait qu'elle ne joue pas le jeu, que trouver la chose veut dire entrer dans le labyrinthe et la chercher » (*ibid.*, p. 183). Quelqu'un qui découvrirait une méthode permettant de déterminer si une suite de trois 7 apparaît ou non dans le développement décimal infini de π est quelqu'un qui, en inventant un autre jeu, aurait trouvé le moyen de ne pas jouer le jeu du calcul des décimales successives ou, pour reprendre la métaphore de Wittgenstein, de ne pas entrer dans le labyrinthe. On pourrait dire de lui qu'il a découvert en quelque sorte le moyen de regarder le développement décimal d'un point de vue que, pour l'instant, nous n'avons pas, à condition de ne pas oublier cependant que l'idée de contempler un développement décimal infini étalé sous nos yeux dans sa totalité constitue, aux yeux de Wittgenstein, un non-sens pur et simple. Ce qu'il faut entendre par l'acquisition d'une perspective nouvelle sur le développement ne peut être constitué, en l'occurrence, que par l'invention d'un nouveau calcul ou d'un nouveau jeu.

Les choses déconcertantes et, par moments, presque incompréhensibles que Wittgenstein affirme à propos de cette question sont finalement toutes destinées à illustrer le même point essentiel : l'inventeur d'une méthode de ce genre ne découvrirait pas une chose que nous pourrions en principe découvrir autrement (en continuant à jouer, aussi longtemps qu'il faudra, le jeu ancien), mais serait en mesure de formuler une norme concernant ce que nous *devrions* découvrir. En ce sens-là, il n'est certainement pas vrai de dire, comme nous pourrions le faire dans le cas expérimental, qu'il a simplement trouvé un autre moyen de découvrir la même chose. On pourrait encore exprimer les choses ainsi : nous pouvons ignorer à quoi *conduirait* le développement décimal de π si nous le poussions suffisamment loin ; mais l'inventeur de la nouvelle méthode pourrait savoir à quoi *conduit* le développement, que nous l'entreprenions ou non.

La critique de la conception extensionnelle est, chez Wittgenstein, si radicale qu'elle l'amène à contester que l'on puisse parler de quelque chose comme *le* développement décimal de π : « Il est facile de succomber à la vieille absurdité simple selon laquelle il y a un développement qui est *le* développement infini d'un nombre et notre problème est de trouver une méthode indirecte pour connaître quelque chose que l'Etre infini ou Dieu connaît déjà dans son intégralité. (Cf. l'affirmation trompeuse de Russell selon laquelle nous n'avons pas de connaissance directe d'une suite infinie, mais en avons une connaissance par description.) » (*Ibid.*, p. 193.) Wittgenstein estime pour sa part qu'« il n'y a pas la dualité : loi et suite infinie qui lui obéit ; c'est-à-dire, il n'y a pas en logique quelque chose comme description et réalité » (PB, p. 22). S'il pouvait y avoir « une théorie amorphe des agrégats infinis », elle devrait décrire et représenter en eux uniquement ce qui est amorphe et concevoir la loi comme un simple mode de présentation accessoire, pour ne montrer que l'essentiel. L'essentiel, c'est-à-dire exactement quoi ? (Cf. *ibid.*) Wittgenstein refuse de considérer un nombre réel comme une extension infinie dont on pourrait alors se demander si elle est complètement amorphe ou si, au contraire, elle présente des régularités caractéristiques, si elle obéit ou non à une loi, etc. :

> « ... Le nombre irrationnel n'est pas l'extension d'une fraction décimale illimitée, mais une loi » (PB, p. 223).
>
> « Un nombre réel *produit* des extensions, il n'est pas une extension.
> Le nombre réel est : une loi arithmétique, qui produit sans fin les places d'une fraction décimale » (PB, p. 228).
>
> « S'il n'y a de prime abord que les lois qui aillent à l'infini, alors la question de savoir si la totalité des lois épuise la totalité des fractions décimales illimitées ne pourrait avoir absolument aucun sens » (PB, p. 224).

Weyl reconnaît à Brouwer le mérite d'avoir montré que la suite de nombres dont le devenir est déterminé par une infinité de choix libres successifs « est un objet possible de conceptualisation mathématique ». Et il considère que, « si la *loi* φ, qui détermine une suite à l'infini, représente le *nombre réel* pris isolément, alors la suite de choix qui n'est limitée par aucune loi dans la liberté de son développement représente le *continu* » (*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik,* p. 12). Wittgenstein conteste explicitement le point de vue de Weyl,

c'est-à-dire l'idée que, parce que l'on peut opérer mathématiquement sur des suites de choix libres, « la suite de choix est un concept mathématique autorisé » (WWK, p. 83). En réalité, « une suite de choix en libre devenir est d'abord quelque chose d'empirique. Ce sont simplement les nombres que j'écris sur le papier » (*ibid.*). Or « le nombre, en tant que résultat d'une expérience arithmétique, donc l'expérience en tant que la *description* d'un nombre, est une absurdité. L'expérience serait la description, non la *représentation* d'un nombre » (PB, p. 240). Et « si la question de la comparaison de F avec un nombre rationnel n'a pas de sens, parce que, quel que soit le développement considéré, il ne nous a pas encore donné la réponse, alors cette question n'a pas non plus de sens, avant que l'on ait essayé au hasard de décider la question par l'extension » (PB, p. 242). Wittgenstein veut dire que la production de l'extension n'est pas une méthode de comparaison, dans la mesure où l'on ne peut jamais savoir si et quand elle conduira à une décision : « Ce n'est pas une méthode que de développer dans le vague, même si ce développement conduit à un résultat de la comparaison » (PB, p. 241-242). Pour que le développement détermine un nombre, il faut justement qu'il détermine de façon *visible* une méthode de comparaison : « Le développement véritable est précisément la méthode de comparaison avec les nombres rationnels » (PB, p. 236). Et il doit, par conséquent, faire en sorte que « la comparaison avec un nombre rationnel donné contraigne la loi à s'exprimer dans la comparaison avec ce nombre » (PB, p. 237). C'est évidemment ce que ne pourrait faire en aucun cas un développement engendré par une suite infinie de choix au hasard ou de décisions arbitraires. La comparaison pourrait, bien entendu, être effectuée à chaque étape de la production de l'extension et conduire à chaque fois à un résultat de la comparaison ; mais cette suite de résultats ne constituerait en aucun cas l'équivalent d'une *méthode* de comparaison. Comme dit Wittgenstein, « on peut comparer une loi avec une loi, mais non une loi avec *aucune* loi » (PB, p. 224). On ne peut pas non plus espérer déduire un jour ou l'autre de la considération d'une extension au devenir complètement incertain une loi qui n'est pas encore apparue et n'apparaîtra peut-être jamais, car une extension ne pourrait nous fournir une loi que dans la mesure où elle constitue déjà la *manifestation* de la loi, et non pas simplement un moyen par lequel nous cherchons à la déterminer. Puisque la relation qui existe entre la loi et l'extension est une relation *interne,* la loi ne peut rien avoir de commun avec une hypothèse que l'on aurait réussi à vérifier à propos de l'extension.

Pour qu'une suite infinie d'approximations effectuées à l'aide de nombres rationnels détermine un nombre réel, il faut que la suite elle-même constitue l'expression lisible et clairement reconnaissable d'une loi : « Je dois pouvoir écrire un fragment de la suite d'une manière telle que l'on *reconnaît* la loi. (...) Les valeurs d'approximation doivent constituer elles-mêmes une suite *manifeste.* C'est-à-dire, les valeurs d'approximation elles-mêmes doivent se mouvoir selon une loi » (PB, p. 234). Le fragment de la suite, assorti d'un « etc. », doit donc déjà être lui-même l'expression d'une loi, et non la simple suggestion d'une loi possible. En d'autres termes : « ... Pour un nombre réel une construction et non pas simplement une approximation doit être concevable. — La construction correspond à l'unité de la loi » (PB, p. 230). La suite 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ..., dont nous pouvons nous servir pour approcher indéfiniment $\sqrt{2}$ constitue bien une construction en ce sens-là, même si la loi est, en l'occurrence, uniquement celle du calcul des chiffres décimaux successifs, car elle nous fournit, justement, la méthode de comparaison avec les nombres rationnels qui est nécessaire pour que nous puissions parler légitimement d'un nombre réel : « L'idée de $\sqrt{2}$ est celle-ci : nous cherchons un nombre rationnel qui, multiplié par lui-même, donne 2. Il n'y en a pas. Mais il y en a qui se rapprochent de 2 de cette manière et il y en a toujours qui se rapprochent davantage de 2. Il y a un processus qui me permet d'approcher 2 sans aucune limite. Ce processus est également quelque chose. Et je l'appelle un nombre réel » (PB, p. 227). La méthode de comparaison d'un nombre rationnel a avec $\sqrt{2}$ est tout simplement la méthode de comparaison de a^2 avec 2. Et c'est l'existence d'une méthode de ce genre qui, initialement, constitue la raison que nous avons d'appeler quelque chose un nombre réel.

La distinction, apparemment fondamentale pour Wittgenstein, entre les nombres réels qui sont déterminés par une suite convergente de nombres rationnels engendrée par une loi et ceux qui sont déterminés par une suite de ce genre qui n'obéit à aucune loi que l'on puisse indiquer n'est, en fait, cruciale ni pour la conception classique (platonicienne) ni pour la concep-

tion intuitionniste. Elle n'a qu'une importance secondaire pour la première, qui accepte de considérer les suites infinies comme des objets donnés en extension et qui peuvent être envisagés indépendamment du processus par lequel ils ont pu ou auraient pu être engendrés. Elle n'est pas non plus essentielle pour l'intuitionnisme, parce qu'il considère qu'il est justement de la nature du continu de comporter un élément d'inachèvement et de libre création qui est mieux représenté par l'idée de suite de choix que par celle de suite déterminée par une loi. Comme l'écrit Heyting : « Un générateur de nombre réel n'est jamais une chose que nous avons entièrement sous la main ; nous ne possédons jamais plus qu'une partie finie de sa suite définissante. Cela nous amène à concevoir un nombre réel comme étant en constant état de développement. La notion d'une loi de progression n'est essentielle ici que dans la mesure où elle garantit la possibilité d'une continuation illimitée de la suite, par conséquent nous pouvons l'éliminer en postulant directement cette possibilité (...). De ce fait, par une *suite procédant à l'infini* (...) nous voulons dire exactement ce que les mots expriment, à savoir une suite qui peut être continuée *ad infinitum.* La question de savoir comment les composants de la suite sont déterminés successivement, si c'est par une loi, par des choix libres, en lançant un dé ou par d'autres moyens, est entièrement dépourvue de pertinence » (*Intuitionism,* p. 32). Il se trouve que, en fait, « une suite de Cauchy libre de nombres rationnels représente le continu des générateurs de nombre réel beaucoup mieux qu'une suite déterminée par une loi non spécifiée ; elle correspond au concept intuitif du continu comme possibilité d'une détermination graduelle de points » (*ibid.,* p. 34).

Il ne pouvait évidemment être question d'entreprendre dans les limites de ce travail un examen détaillé et approfondi de la conception wittgensteinienne du nombre réel et de ce qui la rapproche et la distingue de celle des intuitionnistes. L'aspect déterminant du problème, dont tout le reste découle directement ou indirectement, est la critique de la conception (ou de l'imagerie) extensionnelle, à laquelle Wittgenstein reproche de suggérer que, si nous n'avions pas introduit les nombres irrationnels en plus des nombres rationnels ou si nous décidions de n'admettre, par exemple, que les nombres réels récursifs, notre système de nombres laisserait échapper quelque chose d'essentiel qui doit y être représenté et que nous pouvons identifier clairement. C'est une illusion que Wittgenstein considère manifestement comme commune à la conception classique (platonicienne) et à la conception intuitionniste (en principe plus résolument intensionnelle) du continu. La question de savoir si un système de lois (les lois arithmétiques qui correspondent à des nombres réels) doit ou non être complété par des éléments qui ne sont pas des lois (en l'occurrence, des extensions qui n'obéissent à aucune loi) n'a pour Wittgenstein aucun sens : « On ne peut (...) pas dire que les fractions décimales illimitées qui progressent selon une loi ont encore besoin d'être complétées par un ensemble infini de fractions décimales illimitées sans ordre, qui "passeraient à l'as" si nous nous *limitions à celles qui sont produites selon une loi.* Où se trouve une telle fraction illimitée produite sans aucune loi ? Et comment pouvons-nous constater son absence ? Où est la lacune qu'elle devrait combler ? » (PB, p. 224). C'est une erreur de croire que la représentation de la droite géométrique nous donne une idée claire de ce que pourrait être le vide qui est supposé devoir être rempli. Car il n'y a justement pas plus de vide à l'endroit auquel nous songeons qu'à n'importe quel autre : « Puis-je (...) avoir des doutes sur la question de savoir si tous les points d'une droite peuvent réellement être représentés par des prescriptions arithmétiques ? Puis-je alors trouver jamais un point pour lequel je peux montrer que ce n'est pas le cas ? S'il est donné par une construction, alors je peux traduire celle-ci en une prescription arithmétique, et, s'il est donné par le hasard, alors il y a, aussi loin que je continue l'approximation, toujours une fraction décimale arithmétiquement déterminée qui l'accompagne. Il est clair qu'un point correspond à une prescription » (PB, p. 232).

L'idée d'une droite à laquelle il manquerait un seul point est une image qui ne nous est d'aucun secours et qui ne peut être utilisée pour justifier notre impression qu'un nombre réel déterminé pourrait manquer à notre système :

> « Supposons que nous ayons la collection complète de tous les nombres irrationnels à l'exception d'un seul. Comment celui-ci nous ferait-il défaut ? Et comment comblerait-il à présent — s'il arrivait en plus — la lacune ? — Supposons que ce soit π. Si le nombre irrationnel est donné par la totalité de ses valeurs d'approximation, alors il y aurait jusqu'à *n'importe quel* point arbitraire une suite qui coïncide avec celle de π. Assurément, un point de séparation se présente pour toute suite de ce genre. Mais ce point peut être situé arbitrairement loin "à l'extérieur". De sorte que, pour toute suite qui accompagne π, je peux en trouver une qui l'accompagne plus loin. Si donc j'ai la collection complète de tous les nombres irrationnels en dehors de π, et y insère maintenant π, je ne peux indiquer aucun point auquel π devient à présent réellement nécessaire, il a à *chaque* point un accompagnateur, qui l'accompagne depuis le début » (PB, p. 223).

Lorsque nous disons que π manquerait à notre système de nombres irrationnels, nous voulons dire qu'il nous manquerait une loi dont on dit qu'elle permet d'approcher indéfiniment un certain point (le point de *cette* loi). Ce qui nous manquerait est une possibilité infinie dans un système de possibilités de ce genre, et non une réalité, car les résultats du processus d'approximation peuvent seulement me rapprocher indéfiniment du but, mais non me permettre de l'atteindre à un moment quelconque. Le but n'est, d'une certaine façon, rien d'autre que cette possibilité illimitée elle-même. Or une extension illimitée qui progresse sans aucune loi ne représente pas une possibilité infinie et ne pourrait manquer, en ce sens-là, à notre système. Si je tente de déterminer un nombre réel par une fraction binaire illimitée $0\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{0\,0\,0\,0\,0}{1\,1\,1\,1\,1}\ldots$ *ad inf.* dans laquelle le choix de 0 ou de 1 est décidé à chaque fois en tirant à pile ou face, la seule chose qui peut être considérée comme arithmétique dans ce processus est justement l'« indécision infinie » (PB, p. 220) entre les deux possibilités : « Si j'indique une loi ainsi "0·001001001... *ad inf.*", alors la suite finie en tant que spécimen du fragment d'une suite infinie n'est pas ce que je veux montrer, ce que je veux montrer est le type de régularité (*Gesetzmässigkeit*) que l'on peut tirer de lui. Mais de $0\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{0\,0\,0\,0\,0}{1\,1\,1\,1\,1}\ldots$ je ne tire *aucune* loi, mais précisément l'absence d'une loi. A moins que peut-être ce ne soit la loi selon laquelle seuls "0" et "1", à l'exclusion de tout autre signe, représentent les résultats des lois spéciales [que chacun des tirages au sort successifs fait apparaître tour à tour] » (*ibid.*). « $0\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{0\,0\,0\,0\,0}{1\,1\,1\,1\,1}\ldots$ *ad inf.* » ne représente pas un nombre réel sous la forme d'une possibilité infinie, mais décrit une réalité qui est supposée résulter de quelque chose comme une expérience infinie. Il n'y a, en fait, qu'une loi qui puisse réellement aller à l'infini et représenter une possibilité infinie. Dire que la suite des décimales de π est déterminée à l'infini, c'est dire simplement que la règle du développement décimal me permet de calculer la n-ième décimale pour n'importe quel n, que je le fasse ou non et que cela soit jamais fait ou non. Dans l'exemple considéré, il est vrai que je peux également (en principe) déterminer, en effectuant, le moment venu, le tirage au sort exigé, la n-ième décimale du nombre réel pour n'importe quel n. Mais l'identité du nombre réel concerné n'a rien à voir avec l'identité d'une loi et ne peut être considérée comme déterminée qu'en référence à un processus infini effectué dans sa totalité, ce qui signifie qu'elle n'est pas déterminée du tout.

Les intuitionnistes ne voient aucun inconvénient à admettre des suites infinies dont les termes sont engendrés par un processus qui comporte une part plus ou moins importante de libre choix. Cet élément de liberté n'entrerait en contradiction avec l'attitude constructiviste qu'ils adoptent que si une suite infinie était comprise, à la manière classique, comme un objet donné dans son intégralité. Mais il n'y a, de ce point de vue, aucune différence significative entre les suites infinies qui sont déterminées à l'avance par une loi et celles qui ne le sont pas du tout ou pas complètement : les unes et les autres ne peuvent être conçues, dans la perspective intuitionniste, que comme des processus en cours d'effectuation et jamais achevés. On a affaire dans l'un et l'autre cas à des êtres qui sont par essence « en devenir ». Il n'est pas difficile de comprendre ce que Wittgenstein trouve insatisfaisant dans cette façon de voir. C'est seulement à la condition d'adopter implicitement le point de vue extensionnel que l'on récuse en principe, que l'on peut parler ici de quelque chose qui est inachevé ou en devenir. Pour Wittgenstein, un nombre réel *est* une loi ; et il n'y a rien qui puisse être considéré comme inachevé ou en devenir dans une loi ou dans une possibilité infinie. Une extension peut, bien entendu, être incomplète, mais seulement en tant que réalisation partielle d'une possibilité préexistante. Et, comme on vient de le voir, une possibilité infinie ne peut être déterminée, en toute rigueur, que par une loi.

L'infinité, pour Wittgenstein, ne peut être une propriété d'extensions complètement amorphes et dont on essaie de déterminer expérimentalement la configuration exacte. Elle est toujours liée à une forme, à des opérations et à des lois. Il est absurde de considérer, comme le fait la théorie des ensembles, qu'une droite ou un espace sont constitués de points et que ceux-ci sont en nombre infini : « Comment se manifeste le fait que l'espace n'est pas une collection de points, mais la réalisation d'une loi ? » (PB, p. 216). Ni l'espace ni le temps ne sont des extensions dont nous pouvons reconnaître le caractère infini. L'infini n'est jamais une propriété externe d'une totalité (*Gesamtheit*), il est toujours une propriété interne d'un système (*System*). (Sur la différence entre les deux notions, cf. WWK, p. 213-217.) Contrairement à ce que suggère la conception ensembliste, l'infinité, la continuité, etc., ne sont pas des propriétés d'une réalité quelconque, elles sont des possibilités de description inscrites dans un système qui les contient *a priori* :

> « Le mot “infini” caractérise une possibilité et non une réalité.
> La divisibilité infinie d'un segment de droite est quelque chose de purement logique. Il est en vérité également clair que *cette* possibilité ne peut résulter de l'expérience.
> Divisibilité infinie, continuité de l'espace et du temps — rien de tout cela n'est une hypothèse. Ce sont des vues (*Einsichten*) sur une forme de description possible » (WWK, p. 229).

> « On ne peut pas demander : la nature est-elle continue ou discontinue ? Cette question n'a aucun sens. On peut concevoir n'importe quelle discontinuité comme une apparence, mais également n'importe quelle continuité. Cela montre qu'il ne s'agit pas ici de faits, mais de stipulations concernant la représentation des faits » (WWK, p. 230).

La théorie des ensembles raisonne comme s'il pouvait y avoir en quelque sorte des hypothèses logiques (notamment à propos de totalités infinies). Et Wittgenstein soutient, de façon tout à fait générale, qu'« il n'y a pas d'hypothèses logiques » (PB, p. 211). Quant à l'usage que l'on peut faire du mot « infini » dans ce qui ressemble à première vue à une hypothèse empirique comme, par exemple, « Il y a une infinité d'étoiles fixes », il est lui-même encore lié à la présence d'une loi et à l'existence d'un système de descriptions qui lui correspond : « "Des étoiles fixes en nombre infini" n'ont de sens qu'en liaison avec une loi d'après laquelle nous représentons l'expérience (loi de la gravitation). Mais dans ce cas-là elles font partie du mode de représentation de cette loi. Cela veut dire : nous pouvons former une suite de descriptions dans lesquelles 1, 2, 3, 4... étoiles fixes apparaissent et constater que ces descriptions se rapprochent d'autant plus de l'expérience réelle que nous admettons davantage d'étoiles fixes. (...) La supposition de l'existence d'un nombre infini d'étoiles fixes doit (...) avoir un tout autre sens que celle de l'existence de 100 étoiles fixes, elle ne peut absolument pas être un énoncé autonome, elle est une partie d'un *système de représentation* à l'aide duquel nous décrivons la réalité » (WWK, p. 230-231). Elle n'est donc pas une proposition descriptive, mais une convention concernant le choix d'un mode de description déterminé.

Weyl et les intuitionnistes considèrent comme fondamentalement erronée la conception « atomiste » selon laquelle le continu est composé de points. Le continu n'est pas l'ensemble de ses points ou des nombres réels qui leur correspondent, déjà pour la simple raison que « dans le "continu" des nombres réels (...) les éléments pris individuellement sont *exactement* aussi isolés les uns par rapport aux autres que par exemple les nombres entiers[25] ». L'erreur de l'analyse traditionnelle est d'oublier la relation essentielle, celle du tout et de la partie, au profit de celle de l'ensemble et de l'élément. Le continu a des parties, qui sont divisibles à l'infini, mais il n'a pas d'éléments : « ... Le concept de point doit être considéré comme idée limite, "point" est la représentation de la limite d'une division continuée à l'infini » (*Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik,* p. 39). Les éléments dont on doit partir pour construire le continu ne sont pas des *points,* mais des *intervalles* qui peuvent être divisés à l'infini. Le concept de nombre réel peut être obtenu de la façon suivante : « Si un nombre réel α est connu jusqu'à la *h*-ième décimale avec une erreur plus petite que ± 1 de la *h*-ième décimale, alors est indiqué du même coup un intervalle contenant à l'intérieur le nombre α, qui va d'un nombre $(m - 1)/10^h$ au nombre $(m + 1)/10^h$; *m* est ici un nombre entier déterminé. Si, pour des raisons de simplicité mathématique, nous remplaçons les fractions décimales par des fractions binaires, alors nous mettrons en conséquence au fondement de la définition des nombres réels les "intervalles binaires" de la forme $((m - 1)/2^h, (m + 1)/2^h)$, où *m* et *h* sont des entiers arbitraires. L'intervalle représenté ici est, en particulier, un intervalle "du *h*-ième degré" » (*ibid.,* p. 11). Un nombre réel peut alors être conçu comme une suite infinie d'intervalles binaires i, i', i"... de cette forme (caractérisés par un couple d'entiers arbitraires), tels que chacun des intervalles de la suite contient entièrement celui qui le suit immédiatement. De ce fait, « le "nombre réel arbitraire", la "variable réelle", est représenté par une suite en devenir (*eine werdende Folge*) d'intervalles binaires, dans laquelle les intervalles sont choisis successivement de façon libre avec comme seule restriction qu'à chaque étape suivante on doit choisir un intervalle à l'intérieur de celui qui a été choisi en dernier » (*ibid.,* p. 34). Il appartient à l'essence du nombre réel de ne pouvoir être déterminé, dans tous les cas, que de façon *approchante* (c'est-à-dire, par un processus d'approximation indéfinie, qui, par définition, n'arrive jamais à son terme). Mais dans certains cas la suite infinie d'intervalles emboîtés les uns dans les autres, qui définit le nombre réel, est déterminée par une loi, alors que dans d'autres elle peut progresser de façon tout à fait libre, c'est-à-dire sans aucune autre obligation que celle de se soumettre à la restriction indiquée.

Il semble donc y avoir en quelque sorte deux espèces fondamentalement différentes de nombres réels : ceux qui sont individualisés réellement par des lois qui les produisent et, à l'opposé, ceux dont l'individualité conserve jusqu'au bout un caractère relativement indécis, qui, pour Weyl, exprime sous une forme encore plus pure l'essence même du continu. Conformément à ce que suggère déjà la notion intuitive du continu, celui-ci doit être considéré, en effet, comme un être de nature essentiellement potentielle, qui se développe librement de l'intérieur par la procédure consistant à emboîter les uns dans les autres à l'infini des intervalles de plus en plus petits (ce que Weyl appelle « *ein nach innen ins Unendliche werdendes* », par opposition à « *ein Fertig-Seiendes* » (*ibid.,* p. 35)), un être qui n'est jamais donné tout entier dans le présent et dont les virtualités se déploient indéfiniment dans le futur. Si le nombre

25. H. Weyl, « Das Kontinuum » (1917), in H. Weyl, E. Landau, B. Riemann, *Das Kontinuum und andere Monographien,* Chelsea Publishing Company, New York, 1960, p. 69, note 2.

réel est par définition un être inachevé et en cours de développement, l'inachèvement peut donc signifier deux choses très différentes : dans le cas d'un nombre réel déterminé par une loi, il signifie simplement que l'extension infinie, bien que déjà déterminée dans sa totalité, ne sera jamais donnée dans sa totalité, alors qu'une extension infinie qui progresse sans aucune loi est inachevée en un sens beaucoup plus radical, puisqu'elle n'est pas déterminée avant d'avoir été effectivement produite et ne serait complètement déterminée qu'à la condition d'avoir été entièrement produite. Ce serait, il est vrai, une erreur de croire que la notion de « choix » introduit en mathématiques un élément temporel et subjectif qui n'a manifestement rien à y faire, car les théorèmes démontrés à propos des nombres réels dépendent uniquement de la possibilité de continuer indéfiniment les suites concernées, sans avoir à supposer que leur continuation est gouvernée par une loi. Comme l'indique Heyting, « le mot "choix" est utilisé ici comme une expression abrégée pour la génération d'un composant de la suite » (*op. cit.*, p. 33). Aussi est-il important de préciser que ce qui est problématique, aux yeux de Wittgenstein, dans l'idée de suite de choix libre n'est pas que la production de l'extension soit (apparemment) supposée dépendre de choix volontaires qui devraient être réellement effectués, mais plutôt que ce que l'on peut dire *a priori* sur des extensions qui progressent à l'infini sans être soumises à une loi n'a pas de sens clair, parce qu'il est de la nature de l'infini de ne pouvoir appartenir qu'à une règle ou une loi.

Comme le souligne Brouwer, pour obtenir, dans la théorie intuitionniste, le « continu plein » des nombres réels compris entre 0 et 1, il est nécessaire d'introduire, à côté des « éléments achevés » ou « tout faits » (*fertige Elemente*), des éléments qui ne le sont pas (*unfertige Elemente*), c'est-à-dire d'ajouter aux suites fondamentales convergentes de nombres rationnels non négatifs et pas plus grand que 1 (celles qui sont prédéterminées par une loi) des suites convergentes de nombres rationnels de cette sorte qui sont obtenues par une succession de choix libres (cf. « Die Struktur des Kontinuums » (1928), in *op. cit.*, p. 433). Nous savons déjà ce que Wittgenstein pense de l'idée que, si nous « oublions » certains points irrationnels (et *a fortiori* si nous supprimons tous les points irrationnels), nous risquons de transformer le continu plein en un continu lacunaire

et la droite continue des nombres réels en une sorte de ligne pointillée :

> « On s'étonne du fait qu'"entre les points rationnels disposés de façon partout dense" les points irrationnels aient encore de la place. (Quel abêtissement !) Que montre une construction comme celle du point $\sqrt{2}$? Montre-t-elle ce point, de quelle manière il a bien encore une place entre les points rationnels ? Elle montre que le point *engendré* par la construction, à savoir en tant que point de *cette* construction, n'est pas rationnel. — Et qu'est-ce qui correspond à cette construction dans l'arithmétique ? Serait-ce par hasard un nombre qui s'insère *tout de même* encore de force entre les nombres rationnels ? Une loi, qui n'est pas de la nature du nombre rationnel » (PG, p. 460).

En dépit de la surenchère constructiviste que comportent apparemment certaines de ses remarques, il est clair que ce qui gêne Wittgenstein n'est pas le genre de chose que les intuitionnistes trouvent inacceptable dans la conception classique, mais quelque chose de beaucoup plus fondamental, à savoir, d'une part, l'idée qu'un nouveau système de nombres devait être introduit pour « compléter » un système ancien et, d'autre part, l'impression qu'un *système* des nombres réels pourrait (et devrait, sous peine d'être incomplet) être constitué d'éléments aussi disparates que les entités de nature extrêmement différente que les mathématiciens se sentent obligés de regrouper sous la dénomination de « nombres réels ». Pour ce qui est de leurs extensions, toutes ces constructions semblent également justifiées; mais le point de vue de l'extension a justement l'inconvénient de supprimer toutes les différences importantes. Wittgenstein indique à différentes reprises que son problème est au fond de savoir si l'on peut réellement parler d'une espèce des nombres irrationnels, au sens auquel on parle d'une espèce des nombres rationnels : « Pour ce qui concerne les nombres irrationnels, ma recherche dit uniquement qu'il est faux (ou trompeur) de parler de nombres irrationnels, en les opposant, en tant qu'espèce de nombres, aux nombres cardinaux et aux nombres rationnels, parce qu'on appelle, dans les faits, "nombres irrationnels" des espèces différentes de nombres — aussi différentes les unes des autres que les nombres rationnels le sont de chacune de ces espèces » (PG, p. 479).

Ce qui a motivé, à l'origine, l'introduction du nombre irrationnel est l'existence de quelque chose qui, tout en n'étant pas un nombre rationnel, est néanmoins comparable d'une façon déterminée avec les nombres rationnels. Et si c'est cela la raison essentielle qui nous amène à parler, en pareil cas, d'un *nombre,* comment peut-on parler de nombres qui nous manquent encore, là où cette raison a disparu ?

> « Cela semble être une bonne règle, que j'appelle un nombre ce qui est comparable avec tout nombre rationnel arbitraire. C'est-à-dire ce pour quoi on peut établir s'il est plus grand, plus petit ou égal à un nombre rationnel.
>
> En d'autres termes, cela a un sens d'appeler nombre par analogie une construction qui a avec les nombres rationnels des relations qui sont analogues à celles de plus grand, plus petit et égal (de la même multiplicité qu'elles).
>
> Est nombre réel ce qui est comparable avec les nombres rationnels.
>
> Lorsque je dis que j'appelle nombres irrationnels uniquement les choses qui sont comparables avec les nombres rationnels, je ne veux pas surestimer par là la fixation d'une simple dénomination. Je veux dire que c'est précisément cela que l'on a compris ou cherché sous le nom de “nombre irrationnel” » (PB, p. 236).

Wittgenstein observe, de la même façon, que l'on peut, si on le juge utile, décider d'appeler « point » un intervalle qui, en se rétrécissant de plus en plus, donne l'impression de ressembler de plus en plus à un point. Mais cela ne fait évidemment pas disparaître la différence : « Je peux bien appeler également un intervalle un point ; qui plus est, il peut être pratique à un certain moment de faire cela ; mais devient-il à présent plus semblable à un point si j'oublie que j'ai utilisé ici le mot “point” dans une double signification ? » (PG, p. 476.) Wittgenstein reproche, dans le même ordre d'idées, à la théorie des ensembles de continuer pour ainsi dire à appeler « couteau » une chose à laquelle il manque la lame et le manche (PG, p. 461). Si nous tenons, malgré tout, à octroyer au nombre F (cf. *supra,* p. 55-56 ; PG, p. 475 sq.) ou au nombre pendulaire, sur la base d'une analogie tout à fait superficielle, le statut de nombres réels, nous ne devons pas oublier qu'ils n'ont pas été réellement intégrés au système de nombres dont ils sont supposés faire

partie et qu'« il n'y a pas de nombre en dehors d'un système » (PB, p. 231). Dans tous ces exemples, ce qui scandalise Wittgenstein est, comme toujours, l'oubli des différences grammaticales essentielles, que le mathématicien a tendance à négliger et qu'il peut avoir des raisons de négliger, mais qui sont essentielles pour le philosophe (et également pour le pédagogue, dont il doit, selon Wittgenstein, refaire ou compléter en un certain sens le travail). Le grief principal que Wittgenstein formule contre les mathématiques contemporaines est qu'elles cherchent « à niveler toutes les différences et à rendre tout égal » (WWK, p. 188). Dans un genre apparemment très différent, les intuitionnistes, qui suggèrent qu'un système de nombres pourrait être constitué de choses aussi hétérogènes et aussi peu comparables que des lois de production pour des extensions et des extensions qui progressent sans loi, n'échappent pas non plus à la règle.

9. DANS LA GRAMMAIRE, IL N'Y A PAS DE « PETITES » DIFFÉRENCES : LES NOMBRES RÉELS CONSTITUENT-ILS UNE ESPÈCE DE NOMBRES ?

Wittgenstein n'a évidemment pas plus de sympathie que Brouwer ou Weyl pour l'idée que la droite est constituée ou composée de points. La conception ensembliste repose, à ses yeux, tout entière sur une image trompeuse, qui nous incite à supposer que, du moment que nous avons la droite, nous avons déjà tous ses points, même si nous ne les connaissons pas encore. C'est un peu comme si l'on disait que, puisque nous avons la caisse pleine, nous avons déjà également tout ce qu'elle contient, même si nous ne savons pas encore ce que c'est : « La théorie des ensembles cherche à concevoir l'infini d'une façon plus générale que l'examen des nombres réels. Elle dit que l'infini actuel ne peut pas du tout être appréhendé par le symbolisme mathématique, et qu'il ne peut par conséquent être que décrit et non représenté. La description le saisirait à peu près comme on porte emballée dans une caisse une multitude de choses que l'on ne peut pas toutes avoir dans la main. Elles sont dans ce cas-là invisibles, et pourtant nous savons que nous les portons (pour ainsi dire indirectement). On pourrait dire de cette théorie qu'elle achète chat en poche. L'infini n'a qu'à s'arranger comme il veut dans sa caisse » (PG, p. 467-468). (Il est intéressant de constater que, d'après F. Bernstein, les termes contestés par Wittgenstein sont presque littéralement ceux que Dedekind a utilisés pour décrire la manière dont il voyait les ensembles : « Dedekind déclara, à propos du concept d'ensemble, qu'il se représentait un ensemble comme un sac fermé, qui contient des choses tout à fait déterminées, mais qu'on ne voit pas et dont on ne sait rien, en dehors du fait qu'elles sont là et sont déterminées. »)

Wittgenstein critique, comme nous l'avons vu, l'idée que l'intersection d'une droite et d'une courbe sélectionne en quelque sorte un point de la courbe parmi tous les autres : « La courbe est là indépendamment de tels ou tels de ses points pris individuellement. Cela s'exprime également par le fait que je peux *construire* le point le plus élevé. C'est-à-dire, l'obtiens à partir d'une loi, et non par l'examen de points pris individuellement. Cela ne veut pas dire que "parmi *tous* les points il n'y en a qu'un où elle coupe la droite", il n'est question, au contraire, que d'*un* point. Pour ainsi dire d'un point qui se déplace le long de la droite, mais non d'un point parmi tous les points de la droite. La droite n'est pas *constituée* de points » (PB, p. 209).

Ce qui rend particulièrement difficile à comprendre et probablement encore plus difficile à accepter la critique que Wittgenstein formule contre des conceptions comme celles de Brouwer et de Weyl est évidemment le fait que, contrairement à ses intentions anti-révisionnistes maintes fois déclarées, elle semble ne pouvoir aboutir à rien d'autre qu'une radicalisation du point de vue intuitionniste, qui pourrait consister, par exemple, à n'admettre finalement que les nombres réels pour lesquels il existe une méthode de calcul effective (ce qu'on appelle le « continu constructif »). « Seul, écrit Wittgenstein, ce qui peut être prévu dans la suite de chiffres est essentiel pour le nombre réel » (PB, p. 227). Ou encore :

> « "Le processus déterminerait un nombre seulement lorsqu'il est arrivé à son terme, mais comme il se poursuit à l'infini et n'est jamais achevé, il ne détermine *aucun* nombre."
>
> Le processus doit prévoir à l'infini, sans cela il ne détermine pas de nombre. Il ne doit pas y avoir de "je ne sais pas encore", car il n'y a pas d'*encore* dans l'infini » (PB, p. 236).

Seul ce qui peut être prévu, par opposition à ce qui peut être découvert de façon empirique ou quasi empirique, est essentiel dans une extension infinie, parce qu'il n'y a que la prévision elle-même qui aille à l'infini et qu'elle ne peut être le fait que d'une règle ou d'une norme. Si nous décidions de n'accepter, comme certains proposent de le faire, que les nombres réels calculables, nous pourrions obtenir, en plus des nombres rationnels, tous les nombres réels algébriques et également des nombres transcendants comme π, *e*, etc. Mais, puisque l'ensemble des nombres réels calculables a une puissance tout au plus dénombrable et qu'il y a une infinité non dénombrable de nombres réels, nous risquerions, semble-t-il, de nous retrouver avec un continu singulièrement incomplet. Or nous avons vu le peu de cas que Wittgenstein fait de cette idée, à laquelle la démonstration diagonale de Cantor ne confère, selon lui, qu'une respectabilité tout à fait illusoire. En mathématiques, il ne peut y avoir rien d'autre dans la caisse que ce qu'on a pris la peine d'y mettre. Et parler de nombres réels que nous n'aurions pas *encore* ne veut par conséquent rien dire, si cela signifie qu'ils sont dans la caisse, mais que nous ne les en avons pas encore sortis.

Wittgenstein constate que : « L'embrouillamini dans la conception de l'"infini réel" provient du concept obscur de nombre irrationnel. C'est-à-dire du fait que les constructions les plus différentes du point de vue logique, sans délimitation claire du concept, sont appelées "nombre irrationnel". L'illusion d'avoir un concept bien établi provient du fait que l'on croit avoir dans des signes de l'espèce "0, abcd... *ad inf.*" une image à laquelle ils (les nombres irrationnels) doivent en tout état de cause correspondre » (PG, p. 471 ; cf. p. 479). Le développement de π, par exemple, est « en même temps une expression de l'essence de π et de l'essence du système décimal » (PB, p. 231). Mais nous ne considérons comme important dans la présentation décimale que ce qui est essentiel pour π, et nous ne nous soucions pas du reste : « C'est un serviteur que nous ne considérons que comme instrument et non comme être autorisé par lui-même. Mais, si nous le considérons à présent comme partie de la société, alors la société s'est du même coup modifiée » (*ibid.*). Le sentiment de Wittgenstein est que, dans la société étrangement mêlée des nombres irrationnels, bien des éléments sont plus révélateurs de la nature du système décimal (ou du système binaire) que de la nature d'une espèce particulière de nombres. L'illusion que nous disposons d'un concept déterminé du nombre réel est peut-être due simplement à l'uniformité trompeuse de la notation, au fait que nous disposons d'un système de notation unique pour toutes les constructions que nous croyons devoir appeler des nombres réels : « Par la conception fausse du mot "infini" et le rôle du "développement infini" dans l'arithmétique des nombres réels on est induit

à adopter l'idée qu'il y a une notation unitaire des nombres irrationnels (à savoir précisément celle de l'extension infinie, par exemple des fractions décimales infinies) » (PG, p. 474). Dans la théorie intuitionniste, l'existence d'un développement décimal n'est pas garantie pour n'importe quel nombre réel. Mais Wittgenstein semble considérer, pour sa part, que le fait d'avoir affaire à un développement décimal illimité ne constitue pas forcément une raison suffisante pour que l'on puisse parler également, dans tous les cas, d'un nombre réel.

La situation, dans le cas d'un développement décimal pris extensivement et dont nous ne connaissons pas (encore) la loi, est la même que dans le cas de la distribution des nombres premiers. Si celle-ci obéit à une loi, la loi ne peut réellement être anticipée par des expériences arithmétiques consistant à calculer les nombres premiers successifs pour découvrir quelles positions (*a priori* imprévisibles) ils occupent dans la suite des nombres naturels. La loi ne systématise pas simplement quelque chose que l'expérimentation sur l'extension avait suggéré. Elle nous fournit un *autre* concept de la suite des nombres premiers et elle donne à la fois son sens et la réponse à la question de savoir si les nombres premiers se répartissent ou non de façon régulière sur un « fond » de nombres entiers quelconques :

> « Je peux me convaincre que 31 est un nombre premier, mais je ne vois pas la connexion entre lui (sa position dans la suite des nombres cardinaux) et la condition à laquelle il répond. — Mais cette perplexité n'est que la conséquence d'une expression fausse. La connexion que je crois ne pas voir n'existe pas du tout. Une apparition — pour ainsi dire irrégulière — de 7 dans le développement de π est une chose qu'il n'y a pas du tout, car il n'y a en vérité aucune suite qui s'appellerait "*le* développement de π". Il y a des développements de π, à savoir ceux que l'on a développés (peut-être 1 000) et dans ceux-ci 7 n'apparaît pas "sans règle" (*regellos*), car son apparition dans eux peut être décrite. — (La même chose pour la distribution des nombres premiers. Celui qui nous donne une loi de cette distribution nous donne une *nouvelle* suite de nombres, de *nouveaux* nombres.) (Une loi de calcul que je ne connais pas n'est pas une loi.) (Seul ce que je *vois* est une loi ; non ce que je *décris*. C'est uniquement cela qui m'empêche d'exprimer plus dans mes signes que je ne peux comprendre.) » (PG, p. 480).

On ne peut donc pas dire, en toute rigueur, que nous ne savons pas encore si la suite des nombres premiers, tels que nous pouvons les obtenir par le calcul, obéit ou non à une loi. Car, si nous découvrons un jour une loi à laquelle elle obéit, nous aurons affaire, en réalité, à une autre suite. Wittgenstein traite de la même façon le cas de nombres réels comme F, dont nous sommes tentés de dire que nous ne savons pas pour l'instant s'il est rationnel ou non (parce que la réponse impliquerait que nous ayons réussi à décider la proposition « – (Ex, y, z $\leqslant$ 100) (En $>$ 2) $x^n + y^n = z^n$) », ou π', dont le développement décimal est supposé être le même que celui de π, sauf si un groupe 777 apparaît à un moment donné dans le deuxième, auquel cas il doit être remplacé par 000 : « ... Si notre calcul contient une méthode pour calculer une loi des positions de 777 dans le développement de π, alors il est maintenant question dans la loi de π de 777, et la loi peut être modifiée par la substitution de 000 à 777. Mais dans ce cas π' est autre chose que ce que j'ai défini plus haut ; il a une autre grammaire que celle qui a été admise par moi. Dans notre calcul il n'y a pas de question de savoir si $\pi \gtreqless \pi'$ ou non et aucune égalité ou inégalité de ce genre. π' est incomparable avec π. Et l'on ne peut certes pas dire à présent "*encore* incomparable", car, si je devais un jour construire quelque chose de semblable à π' qui est comparable avec π, alors justement pour cette raison cela ne sera plus π'. Car π' comme π sont en vérité des désignations pour un jeu, et je ne peux pas dire que le jeu de dames est *encore* joué avec moins de pièces que le jeu d'échecs, étant donné qu'il pourrait bien évoluer un jour jusqu'à devenir un jeu de 16 pièces. Dans ce cas-là cela ne sera plus ce que nous appelons "jeu de dames". (A moins que par cette expression je ne désigne pas du tout un jeu, mais quelque chose comme une caractéristique de plusieurs jeux ; et cette précision supplémentaire peut également être appliquée à π' et π.) » (PG, p. 475-476). Des jeux très différents peuvent évidemment avoir toutes sortes de propriétés communes ; mais cela ne rend pas plus ressemblantes les règles qui les définissent. Wittgenstein note que la confusion, dans ce chapitre de la philosophie des mathématiques, est toujours celle des propriétés internes d'une forme et de ce qu'on appelle dans la vie courante une « propriété » : « On pourrait dire également : les contradictions et les obscurités sont suscitées par le fait que les hommes

entendent à certains moments par un mot, par exemple "nombre", une liste de règles déterminée, à d'autres une liste de règles variable ; comme si j'appelais à un moment donné "échecs" le jeu déterminé, tel que nous le jouons aujourd'hui, à un autre moment le substrat d'une évolution historique déterminée » (PG, p. 477).

Dans les *Philosophische Bemerkungen*, Wittgenstein discute longuement le cas de nombres comme $\overset{7\to5}{\pi}$ (désigné également par π') et $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$, que l'on obtiendrait respectivement à partir de π et de $\sqrt{2}$ en remplaçant dans leurs développements décimaux le chiffre 7 par 5 à tous les endroits auxquels il figure. Si on considère les choses uniquement du point de vue de l'extension, il pourrait très bien sembler que la différence entre π et π' ou entre $\sqrt{2}$ et $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$ est relativement minime. Wittgenstein fait remarquer qu'elle est, au contraire, considérable : « La modification de la loi est d'une espèce beaucoup plus fondamentale qu'il ne pourrait sembler au départ. Il est vrai que, si nous avons devant nous l'image fausse de l'extension infinie, alors il peut sembler assurément que par l'adjonction de la règle de substitution $7 \to 5$ à $\sqrt{2}$ j'ai modifié celui-ci beaucoup moins que par exemple par le changement de $\sqrt{2}$ en $\sqrt{2{,}1}$, car les développements de $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$ ont une allure tout à fait semblable à celle des développements de $\sqrt{2}$, alors que le développement de $\sqrt{2{,}1}$ dévie déjà complètement après la première place de celui de $\sqrt{2}$ » (PG, p. 479). On se rend compte à quel point la différence est importante, si l'on se pose simplement la question : jusqu'où dois-je développer π ou $\sqrt{2}$ pour les connaître ? Wittgenstein note que la question est dépourvue de pertinence, car je les connais déjà d'une certaine manière parfaitement sans les développer. Le fait que la question puisse et doive, en revanche, être posée, lorsqu'on se demande ce que nous savons exactement de nombres comme π' ou $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$, signifie précisément que nous ne les connaissons pas ou qu'ils ne veulent rien dire (cf. PB, p. 226). On pourrait suggérer que π' contient implicitement la description d'une loi, la loi d'après laquelle 7 apparaît dans le développement décimal de π, et que connaître le sens de π', ce serait connaître la loi :

> « Mais qu'en est-il donc à présent de la résolubilité du problème consistant à trouver cette loi ? N'est-ce donc pas un problème uniquement dans la mesure où la méthode de sa résolution est connue ?
>
> Et si elle est connue, alors π' reçoit précisément *par là* son sens, et, si elle est inconnue, alors nous ne pouvons pas parler de la loi que nous ne connaissons pas encore, et π' perd tout sens. Car, s'il n'y a pas de loi, alors le π' devient analogue à la prescription de jouer les choses aux dés » (PB, p. 227-228).

Pour nous rapprocher de la nature exacte de π' et de $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$ nous n'avons à notre disposition que les résultats successifs du développement décimal de π et de $\sqrt{2}$. Ce qui, pour Wittgenstein, signifie que nous n'avons aucun moyen de nous en rapprocher : « Seul un chemin se rapproche d'un but, et non des localités. Et seule une loi se rapproche d'une valeur » (PB, p. 228).

Dans le cas de nombres comme $\overset{7\to5}{\pi}$ ou $\overset{7\to5}{\sqrt{2}}$, tout se passe comme si, au lieu d'une loi de production pour des extensions, nous avions affaire à une extension infinie, dont nous essayons de déduire une loi, ce qui, pour Wittgenstein, est toujours une façon de prendre les choses à l'envers. Il semble que, si l'on connaissait dans sa totalité le développement de π, on connaîtrait du même coup la loi de π' ou la nature exacte de la modification qui a été imposée à la loi de π pour obtenir une nouvelle loi (un nouveau nombre). C'est pourquoi Wittgenstein dit également que la transformation n'affecte, en réalité, qu'en apparence la loi dans laquelle « vit » le nombre réel. Elle ne modifie que l'extérieur et ne va pas vraiment jusqu'à la loi : « Ce qu'on influence de cette façon n'est pas du tout la loi, mais son expression contingente. L'influence ainsi exercée ne pénètre en fait nullement jusqu'à la loi. Elle est en vérité de l'autre côté, séparée d'elle. C'est comme si l'on voulait influencer un être vivant en agissant sur la sécrétion qui l'a déjà quitté » (PB, p. 232).

La littérature intuitionniste abonde en exemples de nombres réels supposés, qui sont constitués par des développements affectés d'une indétermination plus ou moins fondamentale que nous ne pourrions lever qu'à la condition d'avoir résolu des

problèmes mathématiques pour lesquels nous ne disposons pour le moment d'aucune méthode de décision. Comme on l'a déjà fait remarquer antérieurement, il serait certainement abusif d'accorder une grande importance intrinsèque à des entités numériques douées de propriétés qui peuvent sembler, dans certains cas, un peu « pathologiques ». Heyting précise lui-même que : « Nous sommes forcés de construire de tels exemples pour convaincre d'autres gens de la nécessité d'une démonstration pour certaines propositions. Mais ce serait une erreur de les considérer comme une partie essentielle des mathématiques intuitionnistes, tout comme ce serait une erreur de soutenir que la fonction continue non-différentiable de Weierstrass est une partie essentielle du calcul différentiel classique » (*op. cit.*, p. 19). Un exemple typique de ce genre est celui du générateur de nombre réel construit pour établir que la proposition « Si ab = 0, alors a = 0 ou b = 0 » aurait besoin d'être démontrée et ne peut pas l'être[26], dont Heyting conclut que « la proposition "Si ab = 0, alors a = 0 ou b = 0" ne peut être démontrée tant qu'il existe des problèmes mathématiques de l'espèce que nous avons utilisée dans l'exemple » (*ibid.*, p. 24).

Ce qui est significatif dans la position de Wittgenstein sur cette question est qu'il ne semble pas disposé à faire une différence réelle entre une extension infinie qui n'est déterminée que conditionnellement, d'une façon qui dépend de la réponse que nous pouvons réussir à apporter un jour à un problème mathématique « encore » irrésolu, et une extension qui n'est pas déterminée du tout ou dont les termes pourraient aussi bien être choisis au hasard. L'idée d'une désignation de nombre réel, dont nous ne savons pas encore, mais dont nous pouvons espérer savoir « avec le temps » (c'est-à-dire, avec les progrès de la connaissance mathématique) ce qu'elle désigne au juste ne lui est visiblement pas plus sympathique que celle d'une description qui fait explicitement référence à une expérience

26. Les deux générateurs de nombre réel a et b sont définis de la façon suivante : si, dans les n premières décimales de π, aucune suite 0123456789 n'apparaît, $a_n = b_n = 2^{-n}$; si une suite de ce genre apparaît dans les n premières décimales, supposons que le 9 de la première suite soit le k-ième chiffre décimal ; dans ce cas, si k est impair, $a_n = 2^{-k}$, $b_n = 2^{-n}$, mais, si k est pair, $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 2^{-k}$. Nous ne pouvons décider ni si a = 0 ni si b = 0. Mais ab = 0.

comme celle qui consisterait, par exemple, à tirer au sort les décimales successives.

On peut, bien entendu, imposer aux choix qui devraient être faits des restrictions telles qu'il y aura de bonnes raisons de dire que, s'ils étaient effectués, la suite des résultats obtenus constituerait un nombre réel. Dans la théorie intuitionniste, un générateur de nombre réel est une espèce particulière de suite procédant à l'infini. C'est une suite de ce genre constituée de nombres rationnels, qui satisfait le critère de Cauchy. Comme le remarque Heyting : « Si les nombres de la suite sont choisis librement, comment pouvons-nous savoir à l'avance que la suite sera une suite de Cauchy ? Evidemment, la seule façon est de restreindre la liberté de choix par des règles qui garantissent la propriété de Cauchy *avant que les choix soient faits,* par exemple, par la condition que $|a_n - a_{n+p}| < 1/n$ pour tout n et p" (*ibid.*, p. 33). Wittgenstein estime cependant, comme on l'a vu, que la différence entre des objets de ce genre, dont le libre devenir a été simplement réglé jusqu'à un certain point, et les nombres réels proprement dits, qui *sont* des règles, est infiniment plus grande qu'on ne l'imagine lorsqu'on adopte le point de vue trompeur de l'extension.

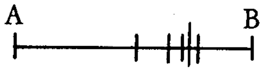
S'il ne s'agissait réellement que de reconnaître cette différence, sa position pourrait aisément se comprendre. Mais il soutient également que des expressions comme « fraction décimale irrégulière infinie » (et également « loi infiniment compliquée » ou « construction infiniment compliquée ») n'ont probablement pas d'autre sens que purement verbal. Nous sommes supposés les comprendre, parce qu'elles ont été correctement constituées à partir de mots que nous comprenons. Mais « en réalité celui qui assemble ces mots et demande "ce que signifie cela" fait quelque chose de semblable à ce que font les petits enfants qui couvrent un papier de griffonnages constitués de traits irréguliers, le montrent à l'adulte et demandent "qu'est-ce que c'est ?" » (PG, p. 483). Il va sans dire que ce n'est pas parce qu'une suite a été engendrée selon une loi qu'une régularité quelconque se manifeste directement dans les résultats obtenus. Comme c'est le cas pour la suite des nombres premiers, ils ne constituent pas nécessairement eux-mêmes l'expression reconnaissable d'une loi : « Je les cherche, mais je ne les engendre pas. Je vois bien une loi dans la prescription qui m'apprend à trouver les nombres premiers, mais non dans les

nombres que j'obtiens en le faisant. Ce n'est par conséquent pas comme dans + 1/1 !, – 1/3 !, + 1/5 !, etc., où je vois une loi *dans les nombres* » (PB, p. 235). Il serait évidemment tout à fait absurde d'exiger d'une suite infinie quelconque qu'elle puisse être comprise immédiatement comme un mode d'expression (et non pas simplement comme l'extension) d'une loi. Mais ce que l'on peut trouver problématique est l'idée d'une extension infinie (par exemple, une fraction décimale illimitée) qui n'*obéit* à aucune loi, en dehors de celle qui est imposée par le système de notation (en l'occurrence, le système décimal) dans lequel elle est représentée.

Wittgenstein évoque et critique à différents endroits dans les *Remarques philosophiques* (p. 218 sq.) et la *Grammaire philosophique* (p. 472, 484-485) la procédure consistant à déterminer un point comme étant *le* point commun à tous les éléments d'une suite infinie de segments emboîtés les uns dans les autres, qui est engendrée par itération indéfinie d'une opération de bisection dont on décide à chaque étape par tirage au sort si elle doit être appliquée à la moitié droite ou à la moitié gauche du segment qui vient d'être divisé. L'opération, constate Wittgenstein, n'est pas une opération arithmétique et « le point en question, qui me sert comme moyen de ma construction sans fin, je ne peux pas du tout le donner arithmétiquement » (PB, p. 219). Mais « ici bien des gens diraient à présent : que la méthode ait été une méthode géométrique, cela ne fait rien, ce n'est précisément que l'*extension* résultante qui est notre but. Mais ai-je donc celle-ci ? » (PB, p. 219-220). Une procédure de ce genre ne peut me donner une extension infinie, au sens auquel on pourrait dire qu'une loi le fait ; et elle ne peut pas non plus déterminer un point, sauf si l'on décide d'appeler « point » un intervalle qui se rétrécit de plus en plus :

> « Pour exprimer les choses de façon géométrique : il ne suffit pas que — soi-disant — on détermine de plus en plus le point par rétrécissement du lieu où il se trouve, on doit pouvoir *le* construire.
>
> La continuation du tirage au sort restreint assurément de façon illimitée le lieu où peut se trouver le point, mais elle ne détermine pas un point.
>
> Le point est après *chaque* tirage encore infiniment indéterminé » (PB, p. 229).

Ce qui manque à cette procédure de bisection infinie pour pouvoir être considérée réellement comme une construction du point dont elle nous rapproche indéfiniment est justement ce que Wittgenstein appelle l'« unité d'une loi ». En d'autres termes, elle constitue, si l'on veut, un parcours que l'on peut entreprendre, mais non un chemin qui mène à un endroit déterminé. Le passage dans lequel les réticences et les objections de Wittgenstein sont exprimées de la façon la plus claire est sans doute celui qui termine la *Grammaire philosophique* :

> « Supposons que nous tirions à "pile ou face" avec une pièce de monnaie et divisions à présent un segment de droite AB selon la règle suivante : "Pile" dit : prenez la moitié gauche et divisez-la comme le prescrit
>
> 
>
>
> le tirage suivant. "Face" dit : prenez la moitié droite, etc. En poursuivant le tirage au sort, je produis alors des points de coupure qui se meuvent dans un intervalle de plus en plus réduit. Est-ce que cela détermine maintenant la situation d'un point, si je dis que cela doit être celui dont les coupures s'approchent à l'infini lorsqu'on continue le tirage au sort ? Ici l'on croit peut-être avoir déterminé un point qui correspond à un nombre décimal infini sans règle. Mais la description ne détermine pourtant *explicitement aucun* point ; à moins que l'on ne dise que les mots "point sur ce segment", eux aussi, "déterminent un point". Nous confondons ici la prescription du tirage au sort avec la prescription mathématique, celle, par exemple, de produire les places décimales de $\sqrt{2}$. Ces prescriptions mathématiques *sont* les points. C'est-à-dire, on peut trouver entre ces prescriptions des relations qui dans leur grammaire sont analogues aux relations "plus grand" et "plus petit" entre deux segments de droite et sont pour cette raison désignées par ces mots. La prescription de calculer des places de $\sqrt{2}$ est le signe numérique du nombre irrationnel lui-même ; et je parle ici d'un "nombre", parce que je peux avec ce signe (certaines prescriptions pour la construction de nombres rationnels) calculer de façon analogue à ce que je fais avec les nombres rationnels eux-mêmes. Si donc je veux dire de façon comparable que la prescription de la bisection sans fin à pile ou face détermine un point, un nombre, alors cela devrait vouloir dire que cette prescription peut être utilisée comme signe numérique, c'est-

> à-dire de façon analogue à d'autres signes numériques. Mais ce n'est naturellement pas le cas. Si cette prescription devait correspondre à un signe numérique, alors ce serait tout au plus (de façon très lointaine) au terme numérique indéterminé "certains", car elle ne fait rien d'autre que de laisser ouvert un nombre. En un mot, il ne lui correspond rien d'autre que l'intervalle originaire AB » (PG, p. 484-485).

Ce qui est important dans le cas de π ou de $\sqrt{2}$ est que la prescription de calculer les décimales nous permet de nous rapprocher indéfiniment d'un point ou d'un nombre déterminé. Puisque le point ou le nombre est constitué par la prescription mathématique elle-même, le fait que l'on ne puisse jamais l'atteindre effectivement, comme on le pourrait, par exemple, en construisant géométriquement le point, ne signifie pas qu'il a quoi que ce soit d'approximatif, ou d'indéterminé : « Peut-on donc dire que, si je ne connaissais pas la représentation géométrique de π et $\sqrt{2}$, ces nombres ne me seraient connus que de façon approchée ? Certainement pas » (PB, p. 235).

Wittgenstein note que l'analogue arithmétique du processus géométrique de la bisection infinie devrait être le processus inverse, celui qui consiste à déterminer un point par une loi (au lieu de déterminer la loi par un point). (Cf. PB, p. 220.) Mais il s'agirait plutôt, en l'occurrence, de chercher à déterminer un point par une absence de loi, par exemple par la donnée d'une fraction binaire infinie $0\cdot\begin{smallmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{smallmatrix}\ldots$ *ad inf.*, dans laquelle le choix de 0 ou 1 est effectué à chaque fois au hasard. Or, ce qui est essentiel, du point de vue de Wittgenstein, dans le nombre réel, est l'induction, « le *ainsi* dont on peut dire "et ainsi de suite" » (PB, p. 234). Et la seule chose qui puisse être regardée comme inductive (au sens proprement mathématique du terme) dans la fraction $0\cdot\begin{smallmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{smallmatrix}\ldots$ *ad inf.* est l'indétermination qui réapparaît sous la même forme à chaque étape, la récurrence indéfinie de la même indécision.

A la procédure géométrique elle-même Wittgenstein reproche de jouer sur deux sens très différents de l'expression « se rapprocher d'un point » :

« Je crois qu'ici nous sommes induits en erreur par la grandeur *absolue* des objets dans notre espace visuel ; et, d'autre part, par l'ambiguïté de l'expression "se rapprocher d'un point". D'un segment dans le champ visuel on peut dire qu'il se rapproche toujours plus par rétrécissement d'un point ; c'est-à-dire qu'il devient toujours plus semblable à un point. En revanche, le segment euclidien ne devient *pas* plus semblable à un point lorsqu'on le rétrécit, il reste bien plutôt *également* différent du point, parce que le point n'a, pour ainsi dire, rien à faire avec sa longueur » (PG, p. 477-478).

Lorsqu'on dit, par conséquent, qu'un intervalle euclidien se rapproche indéfiniment d'un point, cela doit vouloir dire qu'il y a un point, déterminé par ailleurs, dont l'intervalle se rapproche indéfiniment, et non que le rétrécissement indéfini de l'intervalle engendre un point déterminé :

« Si l'on dit du segment euclidien qu'il se rapproche par rétrécissement d'un point, alors cela n'a de sens que pour autant qu'est désigné un point dont ses extrémités se rapprochent, et ne peut pas vouloir dire qu'il *engendre* par rétrécissement un point. Se rapprocher d'un point a justement deux significations : cela veut dire à certains moments devenir plus proche de lui spatialement, dans ce cas-là il doit être déjà là, car je ne peux pas me rapprocher en ce sens-là d'un homme qui n'est pas là. D'un autre côté, cela veut dire "devenir plus semblable à un point", comme on dit par exemple que les singes se sont rapprochés dans leur évolution du stade de l'homme, que l'évolution a engendré l'homme » (PG, p. 478).

Wittgenstein estime que nous ne pouvons pas classer dans la même catégorie une règle pour effectuer des choix, qui est un nombre réel au sens initial authentique, et une simple classe de choix successifs : « Nous devrions faire une distinction entre une classe de tirages à pile ou face, ou de simples choix, et une façon de procéder, ou une règle, pour effectuer des choix. La deuxième chose définit un nombre irrationnel. Un nombre irrationnel est un processus, non un résultat. Nous avons tendance à croire qu'il y a un seul et unique résultat produit par $\sqrt{2}$, à savoir une fraction décimale. $\sqrt{2}$ produit une suite de résultats, mais non un résultat unique. $\sqrt{2}$ est une *règle* pour

produire une fraction, non une extension » (WLC 1932-1935, p. 221.

L'impression que l'on retire de la manière dont les choses sont faites habituellement est que le concept général et unitaire de nombre réel est obtenu à bien peu de frais : « Je suis sidéré par la facilité avec laquelle la continuité est étudiée. Pratiquement sans raisonnement ni exemples nous arrivons au continu » (*ibid.*, p. 219). Lorsque Hardy introduit les nombres réels par le procédé de la coupure, Wittgenstein objecte que l'idée générale de la division des nombres rationnels en deux classes telles que ... n'a pas reçu de sens en dehors des quelques exemples qui ont été donnés à titre pédagogique, c'est-à-dire en dehors de ce qui est dit pour certaines puissances spécifiques et certains nombres spécifiques : « Lorsque Hardy parle de trois possibilités mutuellement exclusives, une possibilité étant qu'aucune des deux classes résultant de la division n'ait un plus petit ou plus grand élément, cela laisse l'impression qu'une définition de "nombre réel" pourrait être donnée par des considérations générales, avec des exemples destinés uniquement aux débutants. Mais, si nous n'avions pas l'exemple $\sqrt{2}$ pour expliquer le fait qu'une classe n'ait pas de plus grand élément et l'autre pas de plus petit, nous ne pourrions pas définir "nombre réel" » (*ibid.*, p. 216).

Il peut sembler évidemment gênant de devoir admettre qu'il y a, en fin de compte, plusieurs espèces, considérablement différentes, de nombres réels. Le besoin de généralité, d'unité et d'uniformité qui caractérise les mathématiques et qui semble plus légitime et plus essentiel encore que dans n'importe quelle autre science se trouverait sérieusement frustré si l'on devait se résigner à des choses de ce genre. Mais Wittgenstein ne voit là rien de surprenant ou de fâcheux et trouve déjà des raisons de dire que, en fait, « le concept de nombre premier est un concept de nombre en un sens différent de celui du concept de nombre cardinal » (PG, p. 481). De façon générale, il considère comme une illusion complète l'idée que l'on devrait pouvoir « arrondir » les mathématiques : « La question est : peut-on dire que les mathématiques sont aujourd'hui pour ainsi dire dentelées — ou effrangées — et que l'on pourra de ce fait les arrondir. Je crois qu'on ne peut pas dire la première chose, tout aussi peu que l'on peut dire que la réalité est ébouriffée, sous prétexte qu'il y a quatre couleurs primaires, sept tons dans une octave, trois dimensions dans l'espace visuel, etc. » (PG, p. 364). Il se trouve que, justement, la grammaire n'est pas une chose dont on peut rêver d'éliminer les protubérances, les irrégularités et les asymétries. On ne peut pas vouloir la rendre plus unie et plus lisse, comme on peut essayer de le faire pour la description d'une réalité : « On peut aussi peu "arrondir" les mathématiques que l'on peut dire "Arrondissons les quatre couleurs primaires à cinq ou dix", ou "Arrondissons les huit tons d'une octave à dix" » (*ibid.*).

On pourrait croire qu'une bonne partie de l'activité des mathématiciens consiste précisément à « arrondir » d'une certaine façon les mathématiques, c'est-à-dire à compléter, élaguer, uniformiser, égaliser, etc. Mais Wittgenstein trouve cette idée tout à fait suspecte, parce qu'il s'agit d'un domaine dans lequel nous ne pouvons pas décrire à l'avance ce qui est en trop ou ce qui manque, c'est-à-dire dans lequel, en un certain sens, rien n'est en trop et rien ne manque à aucun moment. A la base de la conception classique comme de la conception intuitionniste du continu, on trouve, comme nous l'avons vu, le même genre de représentation extensionnelle qui suggère de façon trompeuse que les nombres irrationnels remplissent un vide qui subsiste en quelque sorte entre les nombres rationnels. Or « les nombres irrationnels ne remplissent pas une lacune que les nombres rationnels laissent ouverte » (PG, p. 460). Les choses ne se passent pas du tout comme si les points irrationnels étaient déjà en place sur la droite des réels entre les points rationnels et que nous ayons simplement à trouver les lois qui les déterminent, avec le risque que cela soit impossible pour un bon nombre (en fait, le plus grand nombre) d'entre eux. Wittgenstein observe que, « si les gens avaient toujours peint les figures géométriques avec un pinceau, de telle sorte que la ligne de séparation entre des couleurs soit une ligne et une intersection un point, ils ne seraient jamais arrivés à la notion d'une classe de points » (WLC 1932-1935, p. 230).

Les nombres réels ne sont pas plus contenus virtuellement dans le système des nombres rationnels (ou exigé par lui) que le jeu d'échecs ne l'est dans sa relation au jeu de dames. Et on ne peut pas plus dire d'eux qu'ils étaient déjà là avant que le calcul correspondant ne soit inventé qu'on ne le dirait du jeu d'échecs : « Imaginons que quelqu'un dise : le jeu d'échecs devait seulement être *découvert,* il avait toujours été là ! Ou le

jeu d'échecs *pur* avait toujours été là, c'est seulement le jeu d'échecs matériel, sali par la matière, que nous avons fait » (PG, p. 374). C'est seulement après que les nombres réels ont été introduits que nous pouvons avoir le sentiment qu'une sorte de lacune demandait à être comblée. En fait, même la connexion qui existe entre l'ancienne et la nouvelle structure et qui consiste dans le fait que les nombres rationnels ont leurs représentants dans le nouveau système n'est pas découverte, elle doit être créée, elle aussi, par nous. L'unité des mathématiques ne contredit donc pas l'autonomie des différents calculs les uns par rapports aux autres. Ce que Wittgenstein rejette est simplement l'idée qu'elle est le résultat d'une exploration plus poussée de quelque chose qui était déjà là : « On pourrait exprimer ce que je veux dire également dans les termes suivants : on ne peut pas découvrir une liaison de parties des mathématiques ou de la logique qui était déjà là sans qu'on le sache » (PG, p. 481).

De façon tout à fait générale, Wittgenstein nie qu'il y ait des lacunes quelconques à combler dans les mathématiques :

> « La connexion de deux systèmes n'était pas dans un espace avec les deux systèmes en question ; et, si elle avait été dans le même espace, cela n'aurait pas été une découverte (mais la solution d'un problème scolaire).
>
> Là où est connue à présent une connexion, il n'y avait pas antérieurement une place ouverte, une incomplétude, qui est maintenant remplie ! — (On ne pouvait pas dire à ce moment-là "Je connais la chose jusque-là, à partir de là je ne la connais plus"). » (PB, p. 187).

10. NON IGNORAMUS NEC IGNORABIMUS

> « La vraie raison pour laquelle Comte n'a pas réussi à trouver un problème insoluble consiste à mon avis dans le fait qu'un problème insoluble est une chose qui n'existe tout simplement pas. Au lieu du sot *ignorabimus,* que notre devise soit au contraire :
>
> Nous ne pouvons pas ne pas savoir,
> Nous saurons. »
>
> D. Hilbert

Wittgenstein répète, avec le sentiment d'aller contre la conception usuelle, qu'il n'y a pas en mathématiques de « pas encore » et de « jusqu'à plus ample informé » (cf. *ibid.* et PG, p. 481). Il ne peut y en avoir que dans le sens trivial auquel on peut dire que l'on n'a pas encore appliqué une procédure de calcul existante à tels ou tels nombres. Or la référence au « pas encore » et au « jusqu'à plus ample informé » joue un rôle fondamental dans la critique que les intuitionnistes formulent contre la conception classique. Brouwer soutient que le continu intuitionniste ne peut être ordonné et que le contenu classique ne le peut pas non plus, parce que, pour ordonner le premier, il faudrait disposer d'« une méthode de résolution de tous les problèmes mathématiques » et, pour ordonner le second, d'une méthode de résolution pour tous les problèmes d'une certaine catégorie très générale (« Die Struktur des Kontinuums », *op. cit.,* p. 436). C'est évidemment en liaison avec ce type de difficulté que la question de la résolubilité de tous les problèmes

mathématiques devient cruciale et exige apparemment une réponse. Hilbert pose et pense pouvoir résoudre le problème de la façon suivante : « Au lieu de l'ensemble des nombres réels, considérons — ce qui est ici manifestement la même chose — l'ensemble des fonctions de la théorie des nombres, c'est-à-dire des fonctions d'un argument entier dont les valeurs sont pareillement toujours des nombres entiers. Si nous voulons ordonner l'ensemble de ces fonctions au sens du problème du continu, alors il est nécessaire pour cela de prendre en considération la manière dont la fonction, prise individuellement, a été engendrée. Or une fonction d'un argument peut être définie d'une manière telle que, ce faisant, les valeurs de la fonction pour certains ou même pour tous les arguments sont rendues dépendantes de la solution de n'importe quels problèmes mathématiques bien déterminés, par exemple de la résolution de certains problèmes diophantiens ou de l'existence de nombres premiers pourvus de certaines propriétés ou de la question de savoir si un nombre donné comme par exemple $2^{\sqrt{2}}$ est irrationnel. Pour éviter la difficulté que comporte cette situation, nous nous servons justement de l'assertion, mentionnée auparavant, de la résolubilité de tout problème mathématique bien déterminé. Cette assertion est un lemme général qui appartient à la *métamathématique,* selon le nom que j'aimerais donner à la théorie non formelle (*inhaltlich*) des démonstrations formalisées [27] ».

La question ne peut être posée dans ces termes que si l'on est disposé à accorder aux problèmes mathématiques une existence et une signification qui ne dépendent que de la manière dont ils sont formulés (qui doit garantir qu'ils sont, comme dit Hilbert, « bien déterminés ») et sont en principe complètement indépendantes de la possibilité de leur trouver une solution et plus encore de la solution elle-même. C'est précisément cette idée que Wittgenstein n'accepte pas. « Là où il n'y pas de méthode pour chercher, écrit-il, la question ne peut pas non plus avoir un sens. — C'est seulement là où il y a une méthode de résolution qu'il y a une question (cela ne signifie naturellement pas : "C'est seulement là où la solution est trouvée qu'il y a une question"). — C'est-à-dire : là où la

27. « Über das Unendliche », in *Hilbertiana,* Fünf Aufsätze von David Hilbert, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1964, p. 99.

solution du problème ne peut être attendue que d'une sorte de révélation, il n'y a pas non plus de question. A une révélation ne correspond aucune question. — » (PG, p. 377). En d'autres termes, là où la solution du problème ne peut être obtenue par des moyens mathématiques et ne pourrait l'être que d'une façon qui n'a rien à voir avec ce dont il est question dans les mathématiques, il ne peut être question d'une solution et pas non plus d'un problème. C'est seulement dans les sciences de la nature, où la grammaire de l'hypothèse n'est pas affectée par la vérification et où l'on peut décrire complètement ce que l'on cherche, indépendamment de la possibilité de le trouver, que l'on peut donner un sens à l'idée de questions dont la solution pourrait rester définitivement cachée. Il n'y a rien de caché, en ce sens-là, dans les mathématiques, parce que la chose dont nous aimerions dire qu'elle sera un jour découverte ou, au contraire, qu'elle ne le sera jamais est une chose que nous ne pouvons pas réellement décrire.

« Une démonstration, remarque Wittgenstein, est une démonstration d'une proposition déterminée, si elle l'est d'après une règle selon laquelle cette proposition est coordonnée à cette démonstration. Autrement dit, la proposition doit appartenir à un système de propositions et la démonstration à un système de démonstrations. Et toute proposition de mathématiques doit appartenir à un calcul des mathématiques. (Et elle ne peut pas trôner dans la solitude et pour ainsi dire ne pas se mélanger à d'autres propositions.) » (PG, p. 376). Une proposition indécidable serait justement une proposition qui trône dans une solitude non mathématique, qui, bien qu'elle soit en principe mathématique, refuse de s'intégrer à un calcul mathématique et ne consent pas à se mêler à d'autres propositions. Elle serait supposée, comme n'importe quelle autre proposition mathématique, appartenir à un système et y occuper une certaine position. Mais cette appartenance et cette position seraient condamnées à rester invisibles et impossibles à exprimer dans le symbolisme mathématique. C'est à peu près comme si l'on disait qu'une proposition que nous comprenons et pour laquelle nous avons un usage peut avoir en même temps une grammaire que nous ne connaissons pas et que nous ne connaîtrons peut-être jamais.

Il y a donc quelque chose de vrai dans la manière dont Hilbert s'exprime sur cette question : « Cela constitue précisément un des charmes principaux qu'il y a à s'occuper d'un problème mathématique, que nous entendions en nous l'appel incessant : voilà le problème, cherche la solution ; tu peux la trouver par la pensée pure ; car en mathématiques il n'y a pas d'*ignorabimus* » (*op. cit.*, p. 98). Si, comme il est dit, le problème est réellement là, nous devons effectivement pouvoir chercher ; et si nous pouvons réellement chercher, nous devons pouvoir également en principe trouver. Mais c'est une caractéristique qui résulte directement de la logique de la proposition mathématique, dans ce qui la distingue radicalement de celle de la proposition ordinaire, et qui n'a rien à voir avec le fait épistémologique que la réalité mathématique (s'il y en a une) est, à la différence de la réalité physique, entièrement maîtrisable par la pensée pure et que, par conséquent, il s'agit d'un domaine du savoir dans lequel il serait difficilement compréhensible que l'esprit humain puisse poser des questions qu'il est intrinsèquement incapable de résoudre. La position de Wittgenstein sur ce problème n'a donc rien de commun avec l'« optimisme rationaliste » (l'expression est de Hao Wang) qui inspire celle de Hilbert, approuvé, sur ce point, par Gödel. Selon Gödel, Hilbert a eu raison de rejeter l'idée qu'il pourrait exister des questions de la théorie des nombres qui sont indécidables pour l'esprit humain : « Si c'était vrai, cela voudrait dire que la raison humaine est complètement irrationnelle en ce qu'elle pose des questions auxquelles elle ne peut pas répondre, tout en affirmant avec la plus grande énergie que seule la raison peut y répondre. La raison humaine serait dans ce cas très imparfaite, en contradiction éclatante avec le fait que les parties des mathématiques qui ont été développées systématiquement et complètement (comme, par exemple, la théorie des équations diophantiennes du premier et du deuxième degré, les secondes avec deux inconnues) révèlent un degré étonnant de beauté et de perfection[28]. » En disant qu'il n'y a pas de « pas encore » ou de « jusqu'à nouvel ordre » en mathématiques, Wittgenstein veut dire, entre autres choses, qu'il n'y a pas de place pour un pronostic (optimiste ou réservé) formulé, à partir des succès remarquables qu'elles ont déjà remportés, à propos de ceux

28. Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, Londres, 1974, p. 324-325.

qu'elles peuvent ou ne peuvent pas espérer encore obtenir dans le futur.

Il y a, cependant, une difficulté évidente, qui est que, si l'on dit, comme le fait Wittgenstein, que, là où il y a une question, il y a également un chemin qui mène à la réponse, on risque, semble-t-il, de réduire les mathématiques à ce qui en elles est justement le plus facile et le moins intéressant : « Ne résulterait-il donc pas de tout cela le paradoxe suivant : en mathématiques il n'y a pas de problèmes difficiles ; parce que ce qui est difficile n'est pas un problème ? Ce qui en résulte est que le "problème mathématique difficile", c'est-à-dire le problème de la recherche mathématique, n'a pas avec le problème "25 × 25 = ?" le même rapport que par exemple un tour de force acrobatique avec une simple culbute (donc simplement le rapport : très facile à très difficile), mais que ce sont des "problèmes" dans des significations différentes du mot » (PG, p. 380).

Attirer, comme le fait Wittgenstein, l'attention sur le fait qu'une question pour laquelle nous ne connaissons encore aucun chemin susceptible de conduire à la solution est une question dans un autre sens que celui avec lequel le mot « question » est utilisé à propos d'un problème « facile », qu'il ne s'agit pas simplement de deux *espèces* différentes de question (cf. *ibid.*), peut ressembler à première vue à un tour de passe-passe purement verbal et, qui plus est, à un tour de passe-passe que les recherches « grammaticales » de Wittgenstein pratiquent de façon un peu trop systématique. Mais il se trouve que c'est justement sur la méconnaissance de ce qu'il considère comme une différence grammaticale importante que reposent, pour l'essentiel, les considérations que les intuitionnistes opposent à l'adoption d'un postulat comme celui de la résolubilité de tous les problèmes mathématiques. Les exemples choisis sont très révélateurs à cet égard. Dans la mesure où il existe un algorithme pour le calcul des décimales de π, nous pouvons considérer comme une question de l'espèce facile (en dépit de la longueur des calculs qu'il faudrait effectuer pour la décider) la question de savoir si une suite de trois 7 apparaît ou non dans les 100 premières décimales de π. Wittgenstein soutient que la question de savoir si une suite de ce genre apparaît ou non dans le développement décimal complet ne pourrait être une question que dans un sens bien différent du

mot. Ce n'est pas simplement une question beaucoup plus difficile, tellement difficile que l'on doit envisager la possibilité que nous ne parvenions jamais à la résoudre avec les moyens limités dont nous disposons. Encore une fois, ce qui est important n'est pas ce que nous pouvons ou pouvons espérer pouvoir, mais ce que peut le calcul. La différence entre les questions faciles et les autres est de nature logique ou grammaticale, elle n'est évidemment pas psychologique et n'a rien à voir avec l'impression particulière que nous fait la question ou l'estimation que nous pouvons faire de nos propres forces ou de celles de l'esprit humain en général ; car, comme le dit Wittgenstein, « il ne s'agit pas de savoir si l'élève peut résoudre le problème, mais si le calcul peut le résoudre, ou quel calcul peut le résoudre » (PG, p. 379). Se demander si la question de l'occurrence ou de la non-occurrence d'une suite de trois 7 dans le développement décimal de π est décidable revient à se demander s'il existe ou non un calcul capable de la décider. Et cette question n'a pas beaucoup plus de sens, aux yeux de Wittgenstein, que celle de savoir si l'on pouvait s'interroger sur l'existence du jeu d'échecs avant qu'il soit inventé.

Si l'on voulait comparer les deux sortes de questions en termes de difficulté, il faudrait plutôt songer à la différence qui existe entre la difficulté d'un problème du type : comment gagner avec les blancs aux échecs dans des conditions données ? et la difficulté d'inventer un nouveau jeu qui doit satisfaire des conditions déterminées. (Il y a, bien entendu, déjà une différence importante entre la simple application d'un algorithme de calcul à la résolution d'un problème particulier et la solution du problème d'échecs qui vient d'être évoqué. Mais Wittgenstein veut dire qu'il y a encore une différence d'un tout autre ordre entre la difficulté du deuxième problème et celle d'un problème dont la solution requiert l'invention d'un jeu partiellement ou totalement nouveau. La distinction essentielle est celle qui doit être faite entre les cas dans lesquels ce que l'on pourrait appeler l'« espace » de la solution, si celle-ci existe, est déjà déterminé et ceux dans lesquels il constitue justement ce que l'on cherche à déterminer.) Dans la *Grammaire philosophique*, Wittgenstein nous invite à considérer le problème posé par l'invention d'un jeu stratégique qui ressemble sur certains points au jeu d'échecs, mais dont les règles doivent remplir un certain nombre de conditions qui ont pour but de conférer au jeu une certaine analogie avec les guerres puniques. Et il constate : « C'est à coup sûr un problème, et un problème d'une tout autre nature que celui qui consiste à trouver comment les blancs aux échecs peuvent gagner dans certaines conditions. — Mais imaginons-nous à présent le problème : "Comment les blancs, dans le jeu de la guerre dont nous ne connaissons pas encore exactement les règles, peuvent-ils gagner en 20 coups ?" — Ce problème serait tout à fait analogue aux problèmes de mathématiques (mais non à leurs problèmes de calcul) » (PG, p. 363). Dans le cas des problèmes typiquement mathématiques (par opposition aux simples exercices de calcul), la tâche consiste également à chercher comment on peut atteindre une position gagnante dans un jeu dont les règles ne sont pas encore complètement déterminées, mais doivent satisfaire certaines conditions imposées de l'extérieur et, en ce sens-là, ne peuvent être choisies de façon (complètement) arbitraires. Le paradoxe qui résulte de cette situation est que la question, qui traite la proposition non décidée comme une hypothèse, et non comme le terme d'une construction, et ne peut décrire l'objet cherché qu'en termes de conditions externes, non mathématiques, demande en un certain sens autre chose que ce que donnera la solution. Supposons qu'un prix soit proposé, par exemple, pour la résolution du problème de Fermat. Wittgenstein soutient que : « Le prix est à proprement parler mis sur la solution d'un problème relevant des sciences de la nature ; sur l'*extérieur* de la solution (c'est pourquoi on parle par exemple également d'une *hypothèse* de Riemann). Les conditions du problème sont des conditions externes ; et si le problème est résolu, alors ce qui s'est passé correspond à la position du problème comme la solution d'un problème physique à ce problème » (PG, p. 362). La question ne peut porter réellement sur l'aspect proprement mathématique de la question, parce que ce qui est mathématique dans la solution est que l'objet dont on peut constater qu'il satisfait effectivement les conditions indiquées soit caractérisé par la propriété *interne* d'être l'aboutissement d'une certaine construction, dont la question ne pouvait précisément rien dire.

Le problème de l'*ignorabimus* a un sens dans le cas des sciences de la nature, parce qu'il est possible logiquement de décrire à l'avance ce qui est cherché et d'affirmer (avec de bonnes ou de mauvaises raisons) qu'il ne sera pas trouvé. « Ce qui est caché, remarque Wittgenstion, doit également pouvoir

être décrit avant d'avoir été trouvé, comme s'il était trouvé » (PG, p. 363). C'est justement ce qui n'est pas possible dans la recherche mathématique ; et c'est la raison pour laquelle les mathématiques ne peuvent rien comporter dont on puisse dire qu'il est tellement caché que nous ne pouvons espérer le trouver. Si je cherche un objet ordinaire, je peux, avant de l'avoir trouvé (ou d'avoir trouvé qu'il n'est pas là), en donner une description logiquement irréprochable. « Alors que, remarque Wittgenstein, dans le cas de la "recherche" (*Suchen*) en mathématiques, où elle n'a pas lieu *dans* un système, je ne peux pas décrire ce que je cherche, ou ne peux le faire qu'en apparence ; car, si je pouvais le décrire dans toutes ses particularités, alors je l'*aurais* justement déjà, et avant que je l'aie *complètement* décrit, je ne peux pas être certain que *ce* que je cherche est logiquement irréprochable, donc peut simplement être décrit ; c'est-à-dire que cette description incomplète laisse justement de côté ce qui serait nécessaire pour que quelque chose puisse être cherché. Elle n'est par conséquent qu'une pseudo-description de ce qui est "cherché" » (PG, p. 363-364). Il arrive certes fréquemment que je cherche un objet ordinaire d'après une description incomplète, ce qui pourrait donner l'impression que l'attente et la recherche ne portent pas non plus sur l'objet lui-même, que je ne connaîtrai réellement que lorsque je l'aurai trouvé. Mais, remarque Wittgenstein, ce que je connaîtrai alors directement (au sens de ce que Russell appelle « *knowledge by acquaintance* ») — pour autant qu'il est une confirmation de mon attente — pouvait logiquement être décrit et décrit complètement. La description que la question mathématique donne de ce que l'on doit chercher n'est pas une description incomplète au sens auquel peut l'être la description d'une maison que je cherche. Pour la raison qu'indique Wittgenstein, elle n'est pas réellement une description de ce qui est cherché.

Il ne peut donc être question, d'un point de vue wittgensteinien, de prendre parti sur le problème de la résolubilité finale de tous les problèmes mathématiques, qui repose justement sur l'idée que la question mathématique non décidée et dont on se demande si elle ne pourrait pas être indécidable nous fournit au moins une description incomplète et indirecte de ce qui est cherché et sur l'illusion que la découverte nous procure simplement une connaissance plus complète et plus directe d'une chose dont la nature interne n'est pas réellement affectée par ce changement, alors que, pour Wittgenstein, c'est elle qui était au contraire la chose inconnue et problématique. Seule la construction mathématique peut nous montrer qu'une chose pouvait être trouvée et la démonstration d'impossibilité qu'elle ne le pouvait pas. On ne peut pas dire de façon douée de sens, en mathématiques, qu'une chose sera trouvée ou qu'elle ne le sera pas. L'impression que l'on peut le faire résulte, pour l'essentiel, d'une confusion que Wittgenstein exprime de la façon suivante : « Pourrait-on dire que les problèmes arithmétiques ou géométriques donnent l'impression de se rapporter, ou peuvent toujours être conçus de façon erronée comme s'ils se rapportaient à des objets dans l'espace, alors qu'ils se rapportent à l'espace lui-même ? » (PG, p. 365). C'est ce qui rend tout à fait problématique la comparaison, à première vue douée de sens et très utile, entre une expédition géographique et une expédition mathématique, puisque l'espace, dont Wittgenstein dit qu'il est « ce dont on peut être *sûr* lors de la recherche » (*ibid.*), est justement, dans le deuxième cas, la chose qui ne peut être présupposée et reste, au contraire, à déterminer, de sorte que l'on ne peut être certain au départ qu'il existe un but et un chemin pour l'atteindre.

Le platonisme mathématique, qui a tendance à concevoir le mathématicien sur le modèle de l'explorateur ou du géographe, donne donc, aux yeux de Wittgenstein, une image tout à fait erronée de la recherche mathématique, qu'il considère comme portant sur des objets situés dans un espace déjà structuré, qui n'est pas lui-même en question. Mais Wittgenstein soupçonne même les gens qui, comme Brouwer, rejettent explicitement la conception réaliste de se faire, eux aussi, une idée tout à fait confuse de ce que signifient réellement, en mathématiques, des choses comme « chercher », « trouver », « ne pas réussir à trouver », « savoir », « ignorer », etc. Lorsque Brouwer parle, par exemple, du « contenu microscopique » du continu (*op. cit.*, p. 429), comme s'il s'agissait d'une chose qui est déjà là, mais qui est encore mal connue, et que nous devons explorer à l'aide d'instruments appropriés (qui ne sont pas ceux des mathématiques classiques), il montre clairement que sa conception reste implicitement marquée par l'imagerie réaliste et dominée par une conception de la recherche et de la découverte qui s'inspire directement du modèle des sciences de la nature.

Il serait naturellement absurde de suggérer que le principe de la résolubilité de tous les problèmes mathématiques est lié directement à l'adoption d'une position réaliste et que Brouwer le conteste parce qu'il rejette (ou, en tout cas, croit rejeter) le réalisme. C'est, de toute évidence, plutôt l'inverse qui est vrai. Car s'il y a une réalité mathématique qui est, par rapport au sujet connaissant, dans une position comparable à celle de la réalité physique, il n'y a aucune raison de s'attendre à ce que nous soyons en mesure d'en construire une théorie complète et décidable. Le propre du réalisme est justement de considérer que la réalité que nous cherchons à connaître peut contenir beaucoup plus de choses que nous ne réussirons jamais à en connaître. Ce qui incite à adopter un principe comme celui de la résolubilité de tous les problèmes mathématiques est uniquement le caractère très particulier de la réalité concernée, le fait que, bien qu'elle soit aussi indépendante que la réalité physique de la connaissance qu'on en a, elle est supposée en même temps ne pas être extérieure et étrangère dans le même sens, mais, au contraire, en quelque sorte consubstantielle à la raison humaine et, pour cette raison, entièrement pénétrable par elle.

Il est néanmoins beaucoup plus facile de donner un sens au problème de l'*ignorabimus,* si l'on accepte, comme le fait le réaliste, l'analogie entre la réalité dont les propositions mathématiques donnent l'impression de traiter et la réalité ordinaire, à propos de laquelle on peut parler de façon douée de sens de choses que nous ne savons pas encore et ne saurons peut-être jamais. Si l'on renonce complètement à l'analogie en question, on doit, semble-t-il, renoncer également à donner au problème de l'*ignorabimus* le sens analogique qu'elle permettait de lui procurer. Car qu'est-ce qui pourrait bien être là, en un sens quelconque, que nous essayons de connaître et que nous risquons d'être condamnés à ignorer ? On n'est, bien entendu, pas plus autorisé qu'auparavant à affirmer que toutes les questions mathématiques sont décidables et seront un jour décidées. Mais un anti-réaliste ne peut pas caractériser l'ignorance dont on parle comme consistant dans l'impossibilité de savoir si telle ou telle proposition mathématique est vraie ou fausse, puisqu'il refuse précisément de donner un sens à l'idée qu'une proposition indécidable possède néanmoins une valeur de vérité déterminée (qui serait, en l'occurrence, la chose que nous ignorons).

Le tort du réalisme et de l'anti-réalisme est, selon Wittgenstein, de présupposer l'un et l'autre qu'une proposition mathématique indécidable est cependant bel et bien une proposition, au sens usuel du terme. (Ce dont on dit que nous ne réussirons peut-être jamais à le décider doit, de toute évidence, avoir déjà le statut d'une proposition, parce que sans cela on ne saurait pas de quoi l'on est en train de dire qu'il ne sera peut-être jamais décidé.) Or Wittgenstein estime que, justement, on ne le sait pas, parce qu'on a affaire à quelque chose qui n'est pas encore réellement une proposition. L'objection, qui peut être dirigée aussi bien contre l'anti-réalisme que contre le réalisme, consiste à faire remarquer que ce sur quoi il faut s'interroger n'est pas la possibilité qu'il existe des propositions mathématiques indécidables, mais, antérieurement à toute question de ce genre, le sens et l'intelligibilité mêmes d'une notion comme celle de proposition mathématique indécidable. Puisqu'un anti-réaliste refuse d'inclure dans sa notion de vérité un élément qui permettrait de distinguer entre « vrai » et « vrai de façon décidable », il dira que c'est justement parce que nous ne sommes pas certains de pouvoir décider toutes les propositions mathématiques que nous devons nous abstenir de dire de n'importe quelle proposition mathématique pourvue d'un sens déterminé qu'elle est vraie ou fausse. La position de Wittgenstein est aussi différente qu'il est possible de celle-là, puisque ce qu'il affirme est plutôt que, à la différence d'une proposition ordinaire, une proposition mathématique n'acquiert un sens déterminé qu'en devenant vraie ou fausse.

Il n'y a donc, à proprement parler, rien dans les mathématiques dont nous puissions dire que nous ne le savons pas encore et que nous cherchons à le savoir, parce qu'il n'y a rien qui soit là, attendant d'être découvert. Avant la découverte du pôle Nord, il y a la terre avec le pôle Nord, que nous cherchons à découvrir. Mais les choses ne se passent pas du tout de la même façon dans le cas d'une découverte grammaticale (qui n'est justement pas une découverte). Avant que nous découvrions une loi de distribution des nombres premiers, il n'y a pas ces mêmes nombres premiers, distribués d'une façon que nous ignorons encore : « Nous n'avons pas, après la découverte du pôle Nord, deux terres : une avec, et une sans le pôle Nord. Mais, après la découverte de la loi de distribution des nombres premiers, nous avons deux espèces de nombres premiers » (PG, p. 375). Lorsque Sheffer a découvert la possibilité d'exprimer tous les connecteurs propositionnels à l'aide d'un seul d'entre eux (l'incompatibilité), il n'a pas découvert quelque chose que nous ne « savions » pas encore : « Qu'était-ce que nous ne savions pas avant la découverte ? (Ce n'était rien que nous ne sachions pas (*was wir nicht wussten*), mais quelque chose que nous ne connaissions pas (*was wir nicht kannten*).) » (PG, p. 361). Wittgenstein veut dire que, si nous ignorions quelque chose, c'était uniquement au sens auquel on peut ignorer une règle, un calcul, une technique, un jeu, etc., que l'on n'a pas appris ou avec lesquels on n'est pas suffisamment familiarisé. Il ne s'agit pas d'une ignorance propositionnelle (que l'on pourrait décrire en termes de « ne pas savoir *que* quelque chose »), mais de ce qui peut manquer à quelqu'un qui ignore un langage ou ne maîtrise pas un symbolisme particulier. Et il n'est pas possible de chercher, au sens usuel du terme, ce dont on ne dispose pas encore, en l'occurrence :

> « Est-ce une recherche (*ein Suchen*), si je ne connais pas le système de Sheffer et dis que j'aimerais construire un système avec seulement *une* constante logique ? Non !
>
> Les systèmes ne sont certes pas dans *un* espace, de sorte que je pourrais dire : il y a des systèmes avec 3 et 2 constantes logiques et maintenant je cherche à diminuer *de la même façon* le nombre des constantes. Il n'y a pas ici de *même façon* » (*ibid.*).

Il n'y a pas de réalité qui serve de support à une possibilité que l'on ne connaît pas encore et dans laquelle on puisse se proposer de la chercher. L'image des mathématiques qui émerge des considérations de Wittgenstein est celle d'une création qui se poursuit indéfiniment, sans que les extensions effectuées puissent être considérées comme ayant été conquises sur un territoire encore inconnu qui préexistait et pouvait déjà être décrit d'une façon quelconque. En d'autres termes, les mathématiques (et, plus généralement, la grammaire) n'ont pas d'extérieur auquel on pourrait se référer pour parler de ce qui n'a « pas encore » été déterminé ou décidé. Puisque les mathématiques opèrent elles-mêmes au niveau de la détermination du sens, on ne peut pas construire de théorie à propos du sens des propositions mathématiques et pas non plus, bien entendu, à propos de ce dont elles parlent, puisqu'elles ne parlent de rien. On ne peut pas décrire les mathématiques en décrivant ce dont elles traitent ; et c'est pourquoi il n'y a pas de métamathématique : « Du fait que les mathématiques sont un calcul et par conséquent ne traitent par essence de rien, il n'y a pas de métamathématique » (PG, p. 290). On peut inventer un nouveau calcul ou un nouveau jeu (c'est ce que fait, en dépit des apparences, le métamathématicien lui-même), on ne peut pas tenir de l'extérieur un discours doué de sens sur *le* calcul ou *le* jeu.

Il va sans dire que les remarques de Wittgentein sur le problème de la recherche et de la décision en mathématiques n'ont rien à voir avec les discussions traditionnelles sur les limitations des systèmes formels et la nécessité de recourir à une intuition qui transcende les possibilités du symbolisme. On peut accorder sans difficulté à Weyl que : « Les mathématiques ne consistent pas à développer dans tous les sens, à partir de présuppositions données au départ, les conséquences logiques qui en résultent ; mais l'intuition, la vie de l'esprit scientifique, pose les problèmes, et ceux-ci ne peuvent être résolus comme des problèmes de calcul en appliquant un modèle établi une fois pour toutes. Le chemin déductif qui conduit à leur solution n'est pas tracé d'avance, il doit être découvert ; l'intuition qui appréhende d'un seul coup d'œil des connexions multiples, l'analogie et l'expérience doivent, en l'occurrence, venir à notre aide[29]. » Il n'en reste pas moins que, pour Wittgenstein, les règles d'usage de la proposition mathématique ne peuvent laisser subsister aucun résidu occulte. La démonstration doit assigner à la proposition une place déterminée au sein d'un système. Et les relations qu'une proposition mathématique entretient avec d'autres et qui sont constitutives de son sens doivent pouvoir être explicitées entièrement en termes de connexions exprimables et de transitions effectuables dans le symbolisme.

En dépit des analogies évidentes qui existent entre les considérations de Wittgenstein et celles de Lakatos sur l'heuristique des mathématiques[30], ce serait commettre une erreur

29. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1928), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1966, p. 41.
30. Cf. I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, The Logic of Mathematical Discovery, edited by J. Worrall and E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

sérieuse que d'imputer à Wittgenstein la même volonté de contester radicalement la pertinence du modèle axiomatique-déductiviste. La vérité est, comme le remarque Shanker, bien différente : « ... Bien loin que cela soit le cas, ce que Wittgenstein était réellement en train de renverser était l'idée — commune aux formalistes et aux logicistes tout pareillement — que les mathématiques sont constituées d'un calcul global. Le point décisif de sa nouvelle position en 1930 était que les mathématiques sont faites d'un réseau compliqué de calculs : une suggestion dont on rappellera qu'elle a amené Russell à remarquer dans sa lettre à Moore que "Les théories de Wittgenstein sont certainement importantes et certainement très originales. Quant à savoir si elles sont vraies, je ne peux me prononcer ; j'espère sincèrement qu'elles ne le sont pas, dans la mesure où elles rendent les mathématiques et la logique presque incroyablement difficiles[31]" » (*op. cit.*, p. 305-306).

La critique de Wittgenstein ne porte manifestement pas sur la pertinence et la fécondité de la méthode axiomatique *dans* les mathématiques, mais uniquement sur l'idée que le problème des fondements peut et doit être résolu par quelque chose comme une application de la méthode aux mathématiques prises comme un tout, par la construction d'un système capable de fournir une présentation axiomatique-déductive non pas de telle ou telle branche des mathématiques ou de tel ou tel calcul particulier, mais des mathématiques dans leur ensemble ou de tous les calculs dont elles sont faites. Comme on l'a remarqué plus haut, une des idées centrales qui ont inspiré le programme de Hilbert a été la conviction qu'il n'y a pas dans les mathématiques des espèces fondamentalement différentes de vérités. Kreisel souligne avec raison qu'une conviction de ce genre est indispensable pour qu'il puisse être question d'un problème comme celui des fondements et d'une solution finale à lui apporter[32]. Car, s'il y avait une pluralité de vérités mathématiques essentiellement différentes et dont on ne peut même pas être certain d'avoir énuméré toutes les espèces possibles, on ne voit pas très bien ce qui autoriserait à parler d'un seul et unique

31. Cf. *The Autobiography of Bertrand Russell,* Unwin Books, Londres, 1975, p. 427.
32. Cf. G. Kreisel, « Hilbert's Programme », in Benacerraf and Putnam (*eds.*), *Philosophy of Mathematics,* p. 158-159.

problème des fondements exigeant une solution à la fois unitaire et définitive.

Le point de vue de Wittgenstein (ou, en tout cas, la tendance générale de sa philosophie des mathématiques) sont, sur ce point, à peu près à l'opposé de la conception hilbertienne. Pour lui, les mathématiques ne peuvent être mises sous la forme d'un système qui permettrait de réduire toutes les espèces de vérités mathématiques à une seule ; et il ne se pose à leur sujet aucun problème de fondements. Il ne faudrait cependant pas conclure de son idée que les mathématiques constituent avant tout un « mélange bariolé » de techniques de calcul et de démonstration que des termes comme « fondement » et « fondamental » n'ont pas de sens en mathématiques. Ils ont, bien entendu, un sens et un usage intra-mathématiques parfaitement légitimes et compréhensibles. Et ce n'est pas ceux-là que Wittgenstein conteste : « Lorsqu'on parle des fondements des mathématiques, il y a deux choses différentes que l'on peut vouloir dire. On peut vouloir dire le genre de chose que l'on veut dire en disant que l'algèbre est le fondement du calcul. Pour apprendre le calcul on apprend l'algèbre. Les mathématiques en ce sens sont comme un édifice, et en ce sens un calcul comme les *Principia Mathematica* est un morceau de mathématiques. La couche du bas est celle par laquelle vous commencez. On pourrait également entendre par fondements un moyen d'étayer quelque chose qui est problématique. S'il y avait quelque chose de problématique à propos des mathématiques en tant que telles, alors aucun fondement n'est moins problématique, et en donner un n'est d'aucun secours » (WLC 1932-1935, p. 121 ; cf. p. 205). La notion de fondement ne suggère aucune relation de dépendance ou de postériorité intrinsèques qui existait déjà en soi et qu'il s'agissait simplement de faire apparaître, elle n'a de sens que mathématique et éventuellement didactique ou pédagogique (en tant que réponse à la question « Par quoi commencer ? ») et elle doit être complètement dissociée de l'idée de faire reposer une construction dont la fiabilité n'est pas tout à fait garantie sur une autre qui est, au contraire, parfaitement sûre.

Wittgenstein estime que l'on ne peut pas réduire les mathématiques, mais seulement les développer (y compris, bien entendu, les développer « par le bas », ce qui est bien différent de les réduire). Son refus de la métamathématique pourrait être

exprimé, dans les termes de l'analogie avec le cas du jeu, en disant que l'on peut, en mathématiques, inventer sans cesse de nouveaux jeux, mais non se proposer de décrire et encore moins de justifier *le* jeu. Au moment où l'on croit être en train de produire un discours (méta)théorique de type descriptif et prédictif *sur* les mathématiques, on ne fait en réalité qu'introduire de nouvelles règles, qui ne nous font pas sortir de l'univers des jeux et du processus de libre création par lequel il se développe de façon imprévisible. Il n'y a pas de théorie des mathématiques, parce qu'on ne peut formuler aucune théorie (au sens propre du terme) à propos des propositions qui déterminent ce qui peut et ce qui ne peut pas se dire de façon douée de sens (c'est-à-dire de la grammaire en général). On peut étendre la grammaire en adoptant de nouvelles déterminations de sens ; on ne peut pas construire de théorie à propos des possibilités d'extension qu'elle recèle. On retrouve là un thème (l'impossibilité de tenir un discours théorique sur ce qui permet à des expressions en général d'avoir un sens ou leur interdit d'en avoir un) dont on peut dire sans exagération qu'il a dominé d'un bout à l'autre la réflexion philosophique de Wittgenstein.

La comparaison des mathématiques avec le jeu a généralement mauvaise presse, parce qu'elle ressemble à première vue à une concession désastreuse au formalisme, auquel Frege a reproché de confondre l'essentiel, la chose qui compte réellement (la signification), avec l'accidentel et l'accessoire (le signe). Lorsque Wittgenstein utilise cette comparaison, c'est, en fait, essentiellement pour montrer qu'il n'y a pas à choisir entre l'idée (absurde) que les mathématiques traitent de signes et l'idée (trompeuse) qu'elles traitent non pas de signes, mais d'objets frégéens que les signes représentent (cf. WWK, p. 103-104, BlB, p. 4). Les mathématiques ne traitent justement pas plus des signes qu'elles manipulent que le jeu d'échecs ne traite des pièces que l'on déplace : « Les mathématiques traitent-elles de signes écrits ? Tout aussi peu que le jeu d'échecs traite de pièces de bois » (*ibid.*). Quant à la chose importante qui doit être cherchée en dehors du signe, elle n'est pas constituée par quelque chose qui correspond au signe, mais, comme dans n'importe quel autre cas, par l'usage ou l'application. La comparaison entre propositions mathématiques et règles de jeu fonctionne, du reste, dans les deux sens, puisqu'un problème d'échecs est un problème de calcul (*ibid.*) et que le jeu d'échecs pourrait même, dans certaines conditions, être utilisé pour effectuer des prédictions (WWK, p. 104).

La raison pour laquelle les propositions mathématiques peuvent être comparées à des règles de jeu est qu'elles sont des règles de syntaxe et que n'importe quelle règle de syntaxe peut être conçue de cette manière, ce qui constitue une façon de dire qu'elle est arbitraire :

> « Quelque chose dans le formalisme est correct et quelque chose est faux.
>
> La vérité dans le formalisme est que toute syntaxe peut être conçue comme un système de règles de jeu. J'ai réfléchi à ce que Weyl peut bien vouloir dire lorsqu'il dit que le formalisme conçoit les axiomes des mathématiques comme les règles du jeu d'échecs. J'aimerais dire : non seulement les axiomes des mathématiques sont arbitraires, mais toute syntaxe l'est » (WWK, p. 103).

Comparer les mathématiques à un jeu n'est pas pour Wittgenstein une manière d'approuver la réponse que les formalistes donnent ou suggèrent à la question de savoir de quoi parlent exactement les propositions mathématiques, mais plutôt un moyen de rendre justice à ce que l'on peut appeler l'autonomie des mathématiques, qui est un aspect de l'autonomie de la grammaire en général, au fait que les mathématiques se développent, comme le font les jeux, sans avoir de comptes à rendre à une signification ou à une réalité qui les précèdent — ce qui est effectivement anti-frégéen, mais n'implique pas pour autant que les mathématiques se réduisent à un pur jeu de symboles sans signification.

Sur ce point, ce n'est pas Wittgenstein qui se méprend sur la nature de la proposition mathématique, laquelle, à la différence d'une simple position dans un jeu, a un sens et peut être vraie ou fausse, mais ses critiques superficiels qui se méprennent sur la nature et la fonction d'une analogie. Wittgenstein considère que les mathématiques peuvent être comparées utilement à un jeu, notamment pour distinguer la fonction des propositions mathématiques de celle de propositions d'un autre type comme, par exemple, les hypothèses (cf. PG, p. 289). Il est parfaitement conscient du fait que les différences sont au moins

aussi évidentes et importantes que les ressemblances ; et il ne dit à aucun moment que les mathématiques *sont* un jeu :

> « Appeler l'arithmétique un jeu est tout aussi faux que d'appeler un jeu le fait de pousser des pièces d'échecs (conformément aux règles du jeu d'échecs) ; car cela peut aussi être un calcul. »
>
> « L'arithmétique n'*est* pas un jeu, il ne serait venu à l'esprit de personne de mentionner l'arithmétique au nombre des jeux des hommes » (PG, p. 292, 293).

L'idée la plus originale (et en même temps la plus discutable) de la philosophie des mathématiques de Wittgenstein est probablement celle qui est contenue dans des déclarations comme : la démonstration construit de nouveaux concepts, la démonstration (et elle seule) donne son sens à la proposition démontrée, etc. Il y a un aspect de cette conception qui est (ou devrait être) relativement familier et qui n'est pas difficile à accepter, parce que l'histoire des mathématiques abonde en exemples de démonstrations dont on peut dire qu'elles nous amènent à reconsidérer le sens même de la proposition concernée (ce qu'elle *dit* réellement et même, en un certain sens, notre idée de ce dont elle parle, du genre de chose dont elle traite). Comme l'écrit Kreisel, tout en faisant remarquer que l'idée ne peut pas être prise trop à la lettre, parce que, s'il était littéralement vrai que la proposition démontrée tire sa signification de la démonstration et d'elle seule, on n'aurait pas du tout besoin de séparer la proposition de la démonstration : « ... *Après* la démonstration, on est souvent en position de formuler une proposition qui révèle plus de choses (*aufschlussreicher*) — dans la langue usuelle : qui a plus de sens » (*Einige Erläuterungen zu Wittgensteins Kummer mit Hilbert und Gödel*, p. 297).

Mais le problème que nous avons rencontré et discuté, directement ou indirectement, tout au long de ce travail est que Wittgenstein a manifestement pris cette idée beaucoup plus à la lettre que ne seraient vraisemblablement disposés à le faire les mathématiciens et les historiens des mathématiques. Pour lui, en effet, la démonstration ne constitue pas simplement une spécification supplémentaire ou un enrichissement du sens de la proposition mathématique, mais bel et bien ce qui lui donne son sens. Comme le dit Hacker, « une "conjecture mathématique" n'est pas une proposition mathématique à la recherche d'une valeur de vérité, mais un signe à la recherche d'un usage[33] ». Dummett dirait que c'est essentiellement parce que nous considérons la proposition mathématique comme pourvue d'un sens qui autorise à supposer qu'elle possède déjà l'une ou l'autre des deux valeurs de vérité que nous acceptons de lui reconnaître le statut de proposition décrivant une réalité objective déterminée. L'anti-réalisme conteste justement que nous soyons autorisés à lui attribuer ce genre de sens et semble, du même coup, remettre en question notre idée ordinaire de la vérité et de l'objectivité de la proposition mathématique. On peut se demander finalement si, chez Wittgenstein, la direction suivie, dans le cas de la proposition mathématique, n'est pas non seulement bien différente de celle du réalisme et de l'anti-réalisme, tels que les présente Dummett, mais également tout à fait opposée. Pour lui, ce n'est pas à partir d'une certaine idée du sens de la proposition mathématique que nous arrivons à une position déterminée sur le genre de réalité que les mathématiques pourraient décrire. C'est plutôt l'image d'une certaine réalité que la proposition décrit, c'est-à-dire la tendance à l'assimiler à une proposition de l'espèce ordinaire, qui confère à la proposition mathématique une apparence de sens indépendante de la possibilité de la démontrer, autrement dit, pour Wittgenstein, de lui donner un sens réel. Si, comme je crois avoir fourni de sérieuses raisons de le penser, c'est bien ainsi que les choses se passent chez Wittgenstein, cela confirme, s'il en était besoin, que la controverse sur la nature de la réalité mathématique doit, selon lui, être traitée, comme n'importe quel autre désaccord philosophique, sous la forme relativement naïve sous laquelle elle se présente spontanément, et non comme étant la conséquence d'options divergentes adoptées à un niveau antérieur, qui se prête à une discussion et éventuellement à une décision d'un type plus rationnel, plus méthodique et plus assuré.

33. P.M.S. Hacker, *Insight and Illusion,* Themes in the Philosophy of Wittgenstein, revised edition, The Clarendon Press, Oxford, 1986, p. 331.

CONCLUSION

J'ai suggéré tout au début que Wittgenstein aurait vraisemblablement reproché à la controverse entre la conception réaliste et la conception anti-réaliste du sens de la proposition mathématique de reposer elle-même sur une tendance aussi naturelle que regrettable à assimiler le cas de l'énoncé mathématique à celui de l'énoncé ordinaire et les mathématiques à une science de la nature. Nous avons affaire ici une fois de plus à ce qu'il considère comme la confusion par excellence, celle d'où découlent directement ou indirectement toutes les pseudo-questions et les pseudo-solutions que l'on voit surgir en philosophie des mathématiques. Inversement, toutes les singularités et les difficultés réelles ou apparentes de sa propre conception s'expliquent finalement par son refus d'exploiter une analogie qu'il considère comme superficielle et trompeuse et sa volonté de préserver une distinction essentielle qui est constamment menacée, sans reculer devant aucune des implications à première vue tout à fait paradoxales que cela peut entraîner dans certains cas. Considérée de ce point de vue, sa philosophie des mathématiques devient, sinon immédiatement acceptable, du moins beaucoup plus cohérente et systématique qu'elle ne pourrait sembler à première vue.

La proposition mathématique se distingue de la proposition proprement dite en ceci qu'il n'est pas possible de lui attribuer une signification qui soit, comme dans le cas normal, indifférente à la vérité et à la fausseté et stable par rapport à elles. Wittgenstein observe que : « La proposition mathématique démontrée a dans sa grammaire un excédent de poids dans le sens de la vérité. Je peux, pour comprendre le sens de

25 × 25 = 625, demander : comment cette proposition est-elle démontrée ? Mais je ne peux pas demander : comment son contraire est-il — ou serait-il — démontré ? Car cela n'a pas de sens de parler de la démonstration du contraire de 25 × 25 = 625 »(PG, p. 366). Il n'en est pas moins vrai que, de façon tout à fait générale : « ... Il appartient à l'essence de ce *que nous désignons comme proposition* de pouvoir être nié. Et même la négation de la proposition démontrée doit avoir un lien avec la démonstration ; à savoir un lien tel que l'on puisse montrer dans quelles autres conditions, opposées, elle aurait été obtenue comme résultat » (PG, p. 376). Même pour comprendre ce que signifie — ou pourrait signifier — le contraire de la proposition, il faut encore regarder la démonstration elle-même : « Qu'est-ce que le contraire du démontré ? — Pour cela il faut regarder la démonstration. On peut dire : le contraire de la proposition démontrée est ce qui, au lieu d'elle, aurait été démontré par une faute de calcul déterminée dans la démonstration » (PG, p. 372).

Il existe cependant bel et bien un type de question qui correspond, dans le cas de la proposition mathématique, à une question que l'on peut poser, comme on le fait pour la proposition ordinaire, à propos du sens lui-même, sans avoir à préjuger ou à décider *ipso facto* de la vérité. C'est la question qui a trait à ce que Wittgenstein appelle le « contrôle de la vérité » de la proposition, qui renvoie à l'existence d'une méthode de décision qui s'applique à toutes les propositions d'une certaine forme : « Si je veux (...) poser une question qui est indépendante de la vérité de la proposition, alors je dois parler du *contrôle* de sa vérité, et non de sa démonstration, ou réfutation. La méthode de contrôle correspond à ce qu'on peut appeler le sens de la proposition mathématique. La description de cette méthode est générale et se rapporte à un système de propositions, par exemple les propositions de la forme a × b = c » (PG, p. 366). C'est sur l'existence de la méthode de contrôle de la vérité que repose entièrement l'analogie entre la proposition mathématique et ce que nous appelons habituellement proposition. S'il ne peut être question d'un contrôle de ce genre, l'analogie devient inutilisable (cf. *ibid.*). Seule la méthode de contrôle peut, en effet, nous donner une idée (générale) de ce que c'est pour la proposition concernée que d'être vraie et de ce que c'est pour elle que d'être fausse. La démonstration (ou

la réfutation) a pour effet de vider de son sens l'une de ces deux possibilités.

Il y a donc des propositions mathématiques qui sont comparables aux propositions ordinaires en ce que l'on peut, avant qu'elles aient été vérifiées ou réfutées, leur assigner un sens déterminé par leur appartenance à un système de propositions pour lequel il existe une méthode de décision générale. Et Wittgenstein voudrait qu'elles soient distinguées beaucoup plus rigoureusement qu'on ne le fait d'habitude des propositions mathématiques qui sont, au contraire, isolées et dont le sens lui-même dépend directement d'une démonstration à venir, que nous ne pouvons pas non plus, pour l'instant, rattacher à un système de démonstrations : « Par exemple, la proposition 26 × 13 = 419 est essentiellement une proposition qui fait partie d'un système de propositions (le système donné dans la formule $a \times b = c$), et la question correspondante une question qui fait partie d'un système de questions. La question de savoir si 26 × 13 égalent 419 est liée à une *méthode générale* particulière à l'aide de laquelle on y répond. Comparons la proposition qui constitue sa réponse avec une proposition qui est totalement différente, la loi fondamentale de l'algèbre, à savoir la proposition selon laquelle toute équation a une solution. Cela a la forme d'une proposition et est écrit comme une phrase française ordinaire. Mais cela se trouve dans une position totalement différente de celle de la proposition concernant la multiplication. Cela semble être une proposition isolée, à la différence de la seconde. En outre, elle semble tenir son sens de la démonstration, alors que les propositions énonçant ce qu'est le produit dans une multiplication ne le font pas. Quelle que soit la réponse à la question "Toute équation a-t-elle une solution ?", rien de plus ne serait dit par elle que ce que donne la démonstration » (WLC 1932-1935, p. 197). L'inconvénient de l'expression verbale en prose d'un résultat mathématique est justement d'oblitérer, dans un bon nombre de cas, cette distinction essentielle : « Le danger principal n'est-il pas que l'expression en prose du résultat d'une opération mathématique nous donne l'illusion d'un calcul qui n'est pas du tout là ? Dans la mesure où elle semble, d'après sa forme externe, appartenir à un système qu'il n'y a pas du tout ici » (PG, p. 375-376). C'est essentiellement la formulation de la langue verbale qui crée, pour la proposition isolée, l'illusion d'un environnement mathématique qui, en réalité, n'existe pas encore et qui pourrait seul lui donner un sens mathématique.

C'est, bien entendu, également la méthode de contrôle de la vérité des cas particuliers qui donne son sens initial à une proposition universelle que nous cherchons à démontrer, sans disposer pour le moment du système qui nous permettrait de le faire. Ou, plus exactement, c'est elle qui donne au sens de la proposition son assise (provisoire et incertaine) dans le langage de la prose ordinaire. Ce qui n'est pas concevable, aux yeux de Wittgenstein, est que l'universalité qui nous est fournie par la démonstration, lorsque nous avons réussi effectivement à démontrer la proposition, puisse être celle-là même que des expériences répétées, effectuées avec la méthode de contrôle, nous avaient permis de supputer : « Où est censée ressortir de la démonstration la même universalité que les essais antérieurs rendaient probable ? » (PG, p. 361.) Je peux assurément formuler l'hypothèse douée de sens que, si je teste l'un après l'autre, les nombres pairs pour voir s'ils satisfont ou non la proposition de Goldbach, je ne rencontrerai aucun contre-exemple de mon vivant. Mais comment une démonstration de la proposition, dans laquelle il n'est question ni de moi ni de qui que ce soit, ni de ce que je ferai ou ne ferai pas, pourrait-elle démontrer cette supposition ? Wittgenstein soutient qu'il existe un gouffre conceptuel infranchissable entre la conjecture, qui anticipe les résultats d'une série d'expériences de calcul hypothétiques, et la démonstration, qui prescrit, de façon complètement impersonnelle et intemporelle, quelque chose à propos des résultats en question. La première, pour autant qu'elle ressemble à ce qu'on appelle ordinairement une conjecture, dit simplement qu'aucun contre-exemple ne se présentera, la seconde exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple. Et cette impossibilité d'un contre-exemple est une chose qui ne peut être anticipée, parce que seule la démonstration pourrait nous indiquer ce que l'on peut vouloir dire en disant qu'aucun contre-exemple ne peut se présenter et ce que nous croyons au juste, si nous croyons ce genre de chose : la démonstration « n'est pas quelque chose qui a pour effet que nous croyons une proposition déterminée, mais quelque chose qui nous montre *ce que* nous croyons, — s'il peut être question ici de croire » (PG, p. 375).

C'est l'analogie avec ce qui se passe dans les sciences de la nature qui nous incite à supposer que la conjecture formulée à

partir d'un certain nombre d'essais concluants et la démonstration ont pour objet le même « fait » mathématique et visent de deux manières différentes la même universalité. « J'ai dit, remarque Wittgenstein, que "de la même source ne coule qu'une seule chose" et l'on pourrait dire qu'il serait tout de même singulier que de sources *aussi* différentes doive couler la même chose. L'idée que de sources différentes peut couler la même chose nous a été rendue si familière par la physique, c'est-à-dire par les hypothèses. Là nous inférons toujours de symptômes aux maladies et nous savons que les symptômes les plus divers peuvent être des symptômes de la même chose » (PG, p. 360). Cette idée n'est pas transposable aux mathématiques. La tentation à laquelle il faut résister, en l'occurrence, est celle qui consiste à considérer une série d'expériences de mesure susceptibles de conduire à l'idée du théorème de Pythagore et la démonstration du théorème comme deux symptômes différents du même état de chose, le deuxième ayant simplement sur le premier l'avantage d'être beaucoup plus sûr et, pour tout dire, infaillible. Wittgenstein réagit à ce genre de suggestion en remarquant que « rien n'est plus funeste pour la compréhension philosophique que la conception de la démonstration et de l'expérience comme étant deux méthodes de vérification différentes, donc tout de même comparables » (PG, p. 361).

Cette idée qu'il existe une différence de nature, et non pas simplement de degré, entre la démonstration et l'expérience, qui fait que la démonstration ne peut pas démontrer exactement ce qui a été conjecturé, est liée au fait que, dans la proposition mathématique, l'expression « nécessairement tous » constitue pour ainsi dire un mot unique (cf. PG, p. 429) et que l'on ne peut en détacher le « tous » pour le comparer à celui de l'expérience. Supposer que tous les nombres naturels ont une certaine propriété veut dire supposer que, si on les passait tous en revue successivement, on constaterait que chacun d'entre eux a cette propriété. Mais que peut vouloir dire supposer que tous les nombres naturels ont *nécessairement* une certaine propriété, si ce n'est précisément supposer l'existence d'une démonstration de la proposition universelle ? Et que veut dire supposer cela ? La proposition mathématique non démontrée ne contient pas une anticipation d'un fait qui a pu être suggéré par des expériences et dont la démonstration se chargera d'établir l'existence. Wittgenstein dit d'elle qu'elle est « un poteau indicateur pour la recherche mathématique, une incitation à des constructions mathématiques » (PG, p. 371). Ce qui lui donne pour l'instant un sens mathématique est essentiellement le complexe de résonances, d'associations, d'analogies, etc., qu'elle suscite dans le système des mathématiques et qui fournit à la fois un stimulant et une direction à la recherche.

La barrière conceptuelle que Wittgenstein a cru devoir placer entre la démonstration et l'expérience n'a pas été jugée difficilement acceptable uniquement à cause des paradoxes qu'elle semble entraîner. L'usage de plus en plus répandu des ordinateurs pour l'effectuation de calculs et de démonstrations dont la longueur et la complexité dépassent les capacités du mathématicien humain à amené plusieurs auteurs à soutenir dernièrement que, contrairement à ce qui constitue peut-être l'obsession principale de Wittgenstein, le calcul et la démonstration mathématiques pourraient bien comporter eux-mêmes un élément empirique (ou quasi empirique), inductif et probabiliste qui interdit de les distinguer rigoureusement d'une procédure expérimentale. S'il est vrai que la longueur et la complexité des démonstrations accroissent dans des proportions considérables la probabilité de l'erreur, on peut raisonnablement soutenir que cette probabilité existe déjà à un moindre degré dans les démonstrations de l'espèce la plus simple et ne devient jamais tout à fait nulle. La morale de l'histoire est supposée être qu'il faut renoncer à opposer à la démarche expérimentale, qui est dite essentiellement faillible, la démonstration mathématique, qui est considérée généralement (et, diraient les historiens des mathématiques, qui savent ou croient savoir mieux ce qu'il en est, naïvement) comme le paradigme de la procédure capable de garantir l'infaillibilité de son résultat.

Kripke a utilisé l'exemple d'une machine à calculer chargée de répondre à la question de savoir si tel ou tel nombre (que l'on peut supposer, pour rendre la chose plus parlante, très grand) est premier, pour contester l'idée que, si une vérité appartient au domaine de ce qui peut être connu *a priori,* elle ne peut pas être connue empiriquement [1]. Son idée est qu'une proposition mathématique, qui, si elle est vraie, est nécessairement vraie, pourrait cependant très bien, le cas échéant, être

1. Cf. S. Kripke, *Naming and Necessity,* B. Blackwell, Oxford, 1980, p. 35 (trad. française par P. Jacob et F. Recanati, *La logique des noms propres,* coll. « Propositions », Ed. de Minuit, 1980).

connue *a posteriori.* « Nécessaire » implique peut-être, dans le cas des mathématiques, « pouvant être connu *a priori* » ; mais il n'y a pas de raison de croire que « pouvant être connu *a priori* » implique « devant être connu *a priori.* » Si nous croyons que le nombre testé est premier, nous le croyons sur la base de notre connaissance des lois de la physique, de la construction de la machine et de bien d'autres éléments d'information *a posteriori* du même genre. Tymoczko a soutenu que la démonstration qui a été donnée par Appel et Haken du théorème des quatre couleurs à l'aide d'un programme d'ordinateur « fait du T4C la première proposition mathématique à être connue *a posteriori* et soulève à nouveau pour la philosophie le problème consistant à distinguer les mathématiques d'avec les sciences de la nature [2] ». Selon lui, le T4C fournit un exemple tout à fait convaincant de proposition nécessaire *a posteriori* (dont on ne voit pas, en outre, comme elle pourrait, même en principe, être connue *a priori*). La démonstration d'Appel-Haken, qui est obligée de se servir d'un ordinateur suffisamment puissant pour passer en revue dans un laps de temps raisonnable un nombre de permutations positivement énorme, nous fournit une raison mathématique suffisante d'accepter le théorème. Mais l'intervention (impossible à éliminer) de l'ordinateur dans la justification du lemme combinatoire crucial introduit dans le processus de la démonstration un certain nombre de facteurs empiriques et un élément d'incertitude qui ne sont pas présents dans la démonstration mathématique de type traditionnel. Les démonstrations effectuées par ordinateur ou avec l'assistance de l'ordinateur constituent, aux yeux d'un certain nombre de philosophes des mathématiques, une raison qui devrait inciter les mathématiciens à réviser leur conception de ce qui peut être accepté comme une justification suffisamment forte pour la vérité d'une assertion mathématique. Et cela peut vouloir dire soit qu'ils devraient modifier leur concept de ce qui constitue une démonstration mathématique, soit qu'ils devraient prendre l'habitude de se contenter de quelque chose de moins que ce qu'on appelait jusqu'ici une démonstration (il n'est pas toujours facile de savoir exactement si c'est la première ou la deuxième chose que l'on propose).

2. T. Tymoczko, « The Four-Colour Problem and its Philosophical Significance », *The Journal of Philosophy,* 76 (1979), p. 58.

Il serait d'autant plus déraisonnable de s'engager ici dans la discussion approfondie d'un problème de philosophie des mathématiques aussi ardu que celui qui est posé par la démonstration du théorème des quatre couleurs, que cela aurait évidemment exigé au préalable un examen sérieux de la notion wittgensteinienne d'*Übersichtlichkeit,* qui joue un rôle central dans le débat, et de ses implications révisionnistes éventuelles[3]. La démonstration a l'inconvénient de n'être pas reproductible et contrôlable par un exécutant humain ; et Tymoczko n'a pas hésité à comparer la situation à celle d'une communauté de mathématiciens hypothétique dans laquelle un mathématicien exceptionnellement doué et réputé prendrait l'habitude d'omettre, dans les démonstrations qu'il propose, des parties de plus en plus importantes, sous prétexte qu'il serait beaucoup trop long et fastidieux de les exposer, et réussirait néanmoins à faire accepter ses démonstrations, sur la base de sa simple autorité, par des gens qui s'avouent incapables de les reconstruire. La comparaison est certainement très discutable, parce que, même si nous ne pouvons évidemment pas refaire ce que fait l'ordinateur, nous disposons néanmoins de moyens appréciables pour contrôler la correction du programme et de l'exécution ; et nous n'en sommes certainement pas réduits à traiter la machine comme une autorité impénétrable dont les conclusions doivent être acceptées sans discussion possible. On ne peut pas nier, cependant, que l'image du mathématicien autocrate, qui aurait réussi à se soustraire au moins partiellement au jugement de ses pairs, donne une image assez exacte de la réaction que l'on éprouve spontanément en présence d'un résultat mathématique obtenu par des méthodes du genre de celles que l'on a été contraint d'utiliser dans le cas du théorème des quatre couleurs. On peut, du reste, considérer que le résultat obtenu n'est pas simplement un résultat, mais aussi et peut-être même d'abord un formidable défi à l'imagination mathématique. Qui pourrait croire un instant que les mathématiciens vont en rester là ? Il n'est pas nécessaire, en tout cas, d'être particulièrement wittgensteinien (ou exagérément traditionaliste) pour avoir le sentiment qu'un résultat de ce genre, même si les mathématiciens

3. On pourra se reporter sur ce point à Shanker, *op. cit.*, chap. 4, où la question de l'*Übersichtlichkeit* (*surveyability*) est traitée de façon systématique, en liaison étroite avec ce qu'on a appelé le « nouveau problème des quatre couleurs » (la question de savoir si le théorème est réellement un théorème).

n'éprouvent, dans les faits, aucune répugnance à l'accepter comme une démonstration, suscite bel et bien une insatisfaction théorique qui n'est pas sans fondement et soulève un problème philosophique délicat.

La démonstration doit, selon Wittgenstein, nous montrer non seulement qu'en partant de *ceci* et en procédant de *cette* façon, on aboutit inévitablement ou infailliblement (au sens de « mécaniquement ») à *cela,* elle doit également rendre inintelligible la possibilité d'aboutir à autre chose. Et si le *comment* du processus nous échappe plus ou moins, en ce sens qu'il n'est pas suffisamment apparent, il est impossible de faire du résultat un critère de l'identité du processus. De toute évidence, la possibilité d'obtenir un résultat différent ne doit pas simplement être une chose que des tests répétés sont en mesure de rendre de plus en plus improbable, le réquisit de l'*Übersichtlichkeit* signifie que l'impossibilité d'obtenir autre chose doit, d'un certaine manière, se « voir »; qu'elle doit ressortir directement de l'effectuation du processus lui-même. Il est incontestable qu'en pratique la mécanisation complète d'une procédure de calcul ou de démonstration particulièrement longue et complexe est ressentie comme étant de nature à en augmenter considérablement la fiabilité : nous faisons davantage confiance au résultat obtenu par la machine et nous nous en servons bel et bien pour contrôler celui que nous pourrions éventuellement obtenir par nos propres moyens. La mécanisation supprime justement certaines possibilités d'erreur « humaines ». Et ce qui peut créer un problème est généralement bien moins l'existence de raisons précises et positives de soupçonner une erreur dans le fonctionnement de la machine que la perte subie du point de vue de la transparence et de l'intelligibilité de la démarche, qui entraîne une perte de fiabilité dans un autre sens, plus qualitatif et finalement plus important, celui dont dépend pour une part essentielle la possibilité pour la procédure démonstrative de fonctionner comme une structure normative, de nous montrer réellement ce qui *doit* apparaître (indépendamment de toutes les circonstances particulières de l'effectuation), si l'on procède de telle ou telle façon. Comme le remarque Wittgenstein, nous avons effectivement appris par l'expérience (en tout cas, certainement par une forme d'expérience) que ceci était provenu cette fois-ci de cela ou qu'il en provenait habituellement. Mais la proposition mathématique ne *dit* pas que ceci, lorsqu'on le traite de cette façon, donne habituellement ou invariablement cela (cf. BGM, p. 98-99).

S'il n'est pas question d'entrer ici dans les détails, il est indispensable de rappeler, au moins en passant, que certaines des objections les plus caractéristiques qui ont été formulées contre la conception wittgensteinienne de la proposition et de la démonstration mathématiques à partir de l'exemple de la démonstration du théorème des quatre couleurs manquent en réalité complètement leur cible. Pour commencer, comme le remarque Shanker, il faut évidemment distinguer, si l'on ne veut pas tomber immédiatement dans la confusion la plus complète, deux problèmes bien différents. 1) La « démonstration » fournie par Appel et Haken peut-elle légitimement être acceptée comme une démonstration mathématique et, comme dirait Wittgenstein, déposée, en tant que telle, dans nos archives ? 2) A partir du moment où la démonstration est acceptée et la proposition considérée comme un théorème, est-il possible de dire qu'en raison de la nature particulière de la procédure qui a été utilisée pour l'établir, nous avons affaire à une vérité mathématique qui, contrairement à ce que l'on suppose d'ordinaire, n'est pas *a priori,* a un contenu empirique, repose sur une base expérimentale et possède un degré de certitude qui n'est pas nécessairement supérieur à celui des vérités auxquelles on parvient dans les sciences de la nature ? En d'autres termes, est-il concevable qu'une construction soit reconnue comme une démonstration et en même temps considérée comme ne conférant au résultat qu'elle établit rien de plus qu'une probabilité particulièrement élevée ?

La réponse que l'on peut tirer de Wittgenstein sur ces deux points est, me semble-t-il, aussi claire qu'il est possible). 1) Ce n'est pas au philosophe mais aux mathématiciens qu'il appartient de décider si ce qui a été fait par Appel et Haken équivaut réellement à la démonstration d'un théorème. Aucun scrupule de type proprement philosophique ne pourrait leur être opposé, s'ils sont réellement déterminés à l'accepter comme tel. De façon générale, le philosophe n'a pas à se demander pourquoi nous reconnaissons à certaines démarches le statut de démonstrations ni dans quelle mesure nous sommes fondés à le faire, mais à comprendre ce que signifie le fait que nous le fassions et ce qui en résulte pour la proposition concernée. 2) Si la démonstration est acceptée comme telle, le résultat est nécessairement que la dernière proposition se voit conférer le statut et la dignité d'une règle, c'est-à-dire, en termes traditionnels, de proposition *a priori.* Il n'est pas concevable que la proposition soit considérée comme démontrée et en même temps conserve plus ou moins le statut d'une hypothèse (aussi fortement confirmée que l'on voudra). La certitude démonstrative n'est pas la limite supérieure d'une probabilité inductive quelconque.

La confusion qui s'est introduite dans la discussion provient du fait que l'on a largement perdu de vue au moins trois choses essentielles.

1. La conception traditionnelle, critiquée par Kripke et, selon Tymoczko, réfutée concrètement par l'exemple de la démonstration du théorème des quatre couleurs, repose sur l'idée qu'il existe deux espèces de connaissance, la connaissance *a priori* et la connaissance *a posteriori,* et deux domaines de connaissance, celui du connaissable *a priori* et celui du connaissable *a posteriori.* Une théorie non cognitiviste de l'*a priori,* comme l'est celle de Wittgenstein, ne peut donner aucun sens à cette idée. Une proposition *a priori* n'exprime pas, pour elle, un contenu de connaissance dont on pourrait se demander s'il est accessible uniquement *a priori* (c'est-à-dire « indépendamment de l'expérience ») ou si, au contraire, il peut également (et peut-être, en outre, doit) dans certains cas être connu *a posteriori.* Il n'est donc même pas nécessaire de remarquer à quel point des expressions comme « *a priori* », « *a posteriori* », « expérience », « indépendant de l'expérience », etc., sont utilisées de façon confuse et vague dans le débat. A strictement parler, d'un point de vue wittgensteinien, il n'y a rien qui soit à « connaître », au sens usuel, dans le domaine de l'*a priori* : il y a simplement, pourrait-on dire, des choses à décider, à déterminer ou à instituer (des règles à adopter et des conventions à établir). On peut, bien entendu, trouver inacceptable une conception de ce genre. Mais on ne peut pas vouloir en même temps l'impliquer dans une problématique à laquelle elle a au moins l'avantage d'échapper complètement.

2. La distinction *a priori* (grammatical)/*a posteriori* (empirique) n'est pas chez Wittgenstein une distinction épistémologique et ne renvoie pas à deux modes de connaissance distincts, dont l'un serait approprié à la reconnaissance de vérités comme celles des mathématiques et l'autre à celle des vérités empiriques. Elle distingue deux *usages* conceptuellement différents

qui peuvent être faits de la proposition. Et rien dans la caractérisation que Wittgenstein donne de la nature des propositions *a priori* ne dépend de la question de savoir si elles doivent ou non également être connues *a priori* (au sens où on l'entend habituellement). Quelle que soit la nature des raisons qui nous ont amenés à reconnaître une proposition comme une règle, il n'en restera pas moins vrai qu'à partir du moment où nous l'avons adoptée comme règle, nous lui avons accordé un statut catégoriellement différent de celui d'une proposition empirique ; et le fait que nous puissions être conduits à changer d'avis sur ce point ne change évidemment rien à la question. Il va de soi que l'acceptation d'une règle mathématique fait intervenir des éléments de type cognitif (en particulier, des faits empiriques de l'espèce la plus diverse) et que sa reconnaissance est conditionnée par toutes sortes de choses qui sont effectivement connues *a posteriori* ; mais la proposition mathématique ne dit rien sur ces choses et elles n'autorisent pas à la considérer elle-même comme une vérité reconnue seulement *a posteriori*. (Les faits concernant l'ordinateur n'ont pas, à cet égard, un statut différent de celui des faits qui sont connus ou présupposés à propos du calculateur humain.)

3. Wittgenstein conteste explicitement que l'on puisse opposer la certitude des propositions mathématiques à l'incertitude relative des propositions empiriques (cf. UG, § 151). Il est donc lui même opposé à l'idée que les propositions mathématiques ont un degré de certitude intrinsèquement supérieur à celui des propositions des sciences de la nature. Mais ce n'est pas parce qu'il croit que les premières, pour la raison qu'une procédure démonstrative est exposée à des erreurs du même genre qu'une procédure simplement expérimentale, partagent en fin de compte l'incertitude relative des secondes. Les adeptes de la conception traditionnelle considèrent que la certitude mathématique représente une limite dont les propositions empiriques peuvent se rapprocher plus ou moins, mais qu'elles ne peuvent, en tout état de cause, jamais atteindre. Leurs critiques contemporains soutiennent que même les propositions mathématiques n'atteignent pas forcément cette limite idéale, qu'elles partagent peut-être tout simplement le sort des propositions empiriques en général, même si leur position est effectivement beaucoup plus avantageuse que celle de la plupart d'entre elles. Le point de vue de Wittgenstein est que les deux espèces de certitude

sont bien différentes, mais d'une différence beaucoup plus importante qu'une différence quantitative : une différence de type, qui fait qu'elles ne sont pas comparables de la façon dont on croit pouvoir les comparer. Il n'y a aucune continuité ni comparabilité entre les cas dans lesquels le doute est simplement absent et ceux dans lesquels il a été logiquement exclu. La précarité ou la fragilité des raisons qui peuvent amener à soustraire une proposition au doute ne changent rien à cette différence de nature et ne peuvent constituer un argument en faveur d'une atténuation probabiliste de la certitude mathématique présumée. Une proposition peut être acceptée à tort comme une règle sur la base d'une démonstration erronée ; mais c'est bel et bien comme une règle, et non pas comme une hypothèse, que la proposition est acceptée et utilisée.

Il est, somme toute, assez naturel de supposer que, puisque la probabilité de l'erreur, et donc l'incertitude, augmentent avec la longueur et la complexité de la procédure utilisée pour démontrer une proposition, certaines propositions mathématiques démontrées ne peuvent pas être considérées comme aussi certaines que d'autres. Wittgenstein soulève, dans la *Grammaire philosophique,* le problème suivant :

> « Imaginons le cas où quelqu'un nous donnerait un problème de calcul dans la notation des bâtons, par exemple : ||||||||| + |||||||||| et, pendant que nous calculons, s'amuserait à effacer et à rajouter des bâtons, sans que nous le remarquions. Il nous dirait dans ce cas toujours « "Mais non, le calcul n'est pas correct" et nous le réeffectuerions sans cesse, en nous faisant toujours prendre pour un idiot. — A vrai dire, en toute rigueur, sans le concept d'un critère de la correction du calcul.
>
> Ici on pourrait à présent soulever des questions comme celle-ci : est-il maintenant seulement *très probable* que 464 + 272 = 736 ? Et 2 + 3 = 5 n'est-il pas par conséquent, lui aussi, seulement très probable ? Et où est donc la vérité objective dont cette probabilité se rapproche ? C'est-à-dire, comment obtenons-nous donc un concept du fait que 2 + 3 *est* réellement un certain nombre, indépendamment de ce qu'il nous *semble* être ? — » (PG, p. 330-331).

Wittgenstein ne cherche évidemment pas ici à développer un argument sceptique appuyé sur les incertitudes que comporte la reconnaissance et la discrimination de nombres représentés dans la notation des bâtons. Dans une situation comme celle qu'il décrit, on est tenté de raisonner en termes de probabilité élevée, plutôt que de certitude ; et, si on le fait pour 464 + 272 = 736, il n'y a pas de raison de ne pas le faire également pour 2 + 3 = 5. Mais la question essentielle est justement celle-ci : que peut bien signifier une probabilité élevée que le résultat soit correct, là où il n'y a pas de critère de la correction du calcul et où l'on ne peut, par conséquent, donner aucun sens à l'idée d'une correction objective du calcul ? Si nous pouvons être certains, au sens de la certitude mathématique, que |||||||||| + ||||||||||| = |||||||||||||||||||||, c'est parce que nous pouvons compter les bâtons et appliquer la règle arithmétique 10 + 11 = 21. Et il est clair que, dans l'hypothèse envisagée, nous ne disposerions même pas d'un critère pour dire que nous avons compté correctement les bâtons, pas plus dans le cas de très petits nombres que dans celui de nombres beaucoup plus grands. Dans la réalité, en tant que proposition arithmétique, l'égalité écrite dans le système des bâtons est l'application d'une règle et possède, au même titre que || + ||| = |||||, une certitude qui n'a rien à voir avec une probabilité particulièrement élevée.

L'idée que Wittgenstein cherche à réduire à l'absurde est celle qui consiste à supposer que, lorsque nous abordons le domaine des très grands nombres, nous entrons dans un univers d'incertitude relative qui fait que nous devons en quelque sorte abandonner la certitude des règles pour la probabilité des hypothèses. Comme si, par exemple, 17 463 + 15 207 = 32 670 ne ressemblait déjà plus autant à une règle arithmétique que 2 + 3 = 5. Il n'est évidemment pas question de nier que des considérations de type probabiliste puissent avoir leur place et jouer un rôle en arithmétique. Il existe, par exemple, des techniques heuristiques qui permettent de déterminer, avec une probabilité élevée, si un nombre donné est ou non premier. Mais une probabilité élevée pour que x soit premier renvoie évidemment à la possibilité d'établir, par une démonstration en bonne et due forme, que x *est* effectivement premier. Sans cela, que pourrions-nous vouloir dire en disant qu'il y a de très grandes chances que x soit (réellement) premier ? Loin d'encourager l'idée sceptique que la démonstration elle-même pourrait inclure un élément de simple probabilité, l'usage de méthodes probabilistes confirme au contraire directement l'existence

d'une différence de nature entre la démonstration, au sens strict, et les procédures moins rigoureuses que certains voudraient voir classer également dans la catégorie des démonstrations. Accepter ce genre de libéralisation reviendrait, en fait, à abandonner purement et simplement le concept de démonstration lui-même.

Lorsqu'on dit que la démonstration doit nous permettre en quelque sorte de voir le résultat comme constitutif de l'identité du processus, le mot « voir » ne doit évidemment pas être compris d'une manière telle que la reconnaissance d'une règle mathématique pourrait résulter simplement de quelque chose que nous voyons. Même dans le cas de || + ||| = |||||, il est absurde de dire que la validité de la règle arithmétique repose sur le fait que nous voyons immédiatement que les deux termes de l'égalité sont identiques. Comme l'écrit Wittgenstein : « Nous pouvons imaginer un langage qui n'utiliserait jamais "4", mais uniquement "2 + 2". Tant que nous considérons |||| de "la façon 2 et 2", notre image consiste en une division en 2 et 2. La division visuelle réelle est un processus temporel, et la figure sera constituée d'une division en deux parties aussi longtemps que dure le phénomène de la division. Mais l'égalité 2 + 2 = 4 est intemporelle. Que 4 consiste en 2 et 2 au sens de "2 + 2 = 4" ne peut être *vu*. Il n'y a pas de phénomène consistant à voir qu'une proposition de grammaire est vraie » (WLC 1932-1935, p. 181). Admettre qu'il y a un phénomène de ce genre obligerait à revenir à une conception que Wittgenstein cherche précisément à écarter : « La division visuelle est un phénomène comme n'importe quel autre. Si on ne reconnaît pas cela, on a le sentiment qu'en saisissant un nouvel aspect on pénètre dans l'essence de la chose. Lorsqu'on a l'attention attirée sur le fait qu'un pentagramme consiste en un pentagone et cinq triangles, on semble voir quelque chose qui est là, que l'on ait ou non l'attention attirée sur lui. Pourtant, que le pentagramme soit constitué de ces parties dure aussi longtemps que nous le voyons sous cet aspect. En revanche, si nous adoptons l'expression géométrique "pentagramme = pentagone plus cinq triangles", ce à quoi elle fait référence ne peut pas être vu. Elle énonce une règle. Et, bien entendu, la règle peut avoir été suggérée par le fait de voir la chose de cette façon. Cela montre le rôle que peut jouer dans une démonstration le fait de porter attention à un aspect » (*ibid.*). Il ne faut donc pas se méprendre sur la fonction que l'on peut attribuer à ce qu'on appelle voir un aspect particulier (d'une figure ou d'une formule) dans une démonstration. Voir un aspect ne signifie pas voir une règle ou une vérité grammaticale, mais peut *suggérer* une règle : « Un certain symbolisme s'adapte aisément à un certain aspect qui nous frappe lorsque nous regardons une chose » (*ibid.*, p. 180). Et voir un symbolisme sous un autre aspect, comme cela a été le cas, par exemple, avec la découverte de Sheffer concernant le symbolisme des *Principia Mathematica*, revient à changer le symbolisme, et non à découvrir quelque chose concernant son essence ou sa nature interne (*ibid.*, p. 181). Les considérations qui relèvent, chez Wittgenstein, de la psychologie, de la phénoménologie ou de l'épistémologie de la démonstration n'ont probablement pas une importance aussi négligeable que le suggère, par exemple, Shanker. Mais ce serait certainement commettre une erreur complète que de s'imaginer qu'elles constituent une tentative de réponse à la question de savoir pourquoi nous reconnaissons telle ou telle chose comme une démonstration. Nous n'acceptons pas tel ou tel processus comme une démonstration *parce que* nous le voyons sous un certain aspect. Dire que nous l'acceptons comme une démonstration de son résultat, c'est dire précisément que nous le voyons d'une certaine façon et sous un certain aspect (inaltérables et intemporels). Et il n'y a pas de faculté de vision ni de justification pour cela.

Une dernière question qui doit être évoquée, de nouveau en liaison avec le problème de la différence de nature qui existe entre la vérification d'une proposition mathématique et celle d'une proposition d'expérience, est celle de la position, à première vue inattendue, que Wittgenstein adopte à propos du problème des démonstrations d'existence non constructives. Contrairement à ce que pourraient laisser supposer certaines choses qu'il affirme par ailleurs, il ne manifeste aucune tendance à accepter les préférences et les restrictions que cherchent à imposer des mathématiciens comme Brouwer et Weyl :

> « Je n'ai pas besoin d'*affirmer* que l'on doit pouvoir construire les n racines de l'équation du n-ième degré, je dis simplement que la proposition "Cette équation a n racines" veut dire *autre chose*, lorsque je l'ai démontrée par énumération des racines construites, et lorsque je l'ai démontrée d'une autre manière. Mais si je trouve une formule pour les racines d'une équation, alors j'ai construit un nouveau calcul et non comblé une lacune d'un ancien.
>
> C'est par conséquent un non-sens de dire que la proposition est démontrée uniquement lorsqu'on exhibe une telle construction. Car alors nous avons justement construit quelque chose de nouveau, et ce que nous entendons à présent par le théorème principal de l'algèbre est précisément ce que la "démonstration" actuelle nous montre » (PG, p. 373-374).

Si l'on admet que c'est la démonstration qui détermine le sens de ce qui a été démontré, il devient tout simplement impossible de dire qu'une proposition d'existence, par exemple, ne peut être démontrée que de telle ou telle façon :

> « "Toute démonstration d'existence doit contenir une construction de ce dont elle démontre l'existence." On peut seulement dire "J'appelle 'démonstration d'existence' uniquement une démonstration qui contient une telle construction". La faute réside dans le fait que l'on prétend posséder un concept *clair* de l'existence.
>
> On croit pouvoir démontrer un quelque chose, l'existence, d'une manière telle que l'on est à présent convaincu de cette chose *indépendamment de la démonstration*. (L'idée des démonstrations indépendantes l'une de l'autre — et par conséquent sans doute également du démontré !) En réalité, l'existence est ce que l'on démontre avec *ce* qu'on appelle "démonstration d'existence". Lorsque les intuitionnistes et d'autres s'expriment là-dessus, ils disent : "Cet état de choses, l'existence, on ne peut le démontrer que cette façon-ci, et non de celle-là." Et ils ne voient pas qu'ils ont par là défini simplement ce qu'*ils* appellent existence. Car les choses ne se passent précisément pas comme lorsqu'on dit : "Qu'un homme est dans la pièce, on ne peut le démontrer qu'en regardant à l'intérieur, mais non en écoutant à la porte." » (PG, p. 374.)

Nous avons ici un exemple tout à fait typique de la difficulté générale qui a été évoquée au début. Une conception comme celle de Wittgenstein semble ne pouvoir aboutir à rien d'autre qu'une sorte de neutralisation conventionaliste des controverses apparemment les plus substantielles de la philosophie des mathématiques. Ce qu'un mathématicien considère comme une démonstration d'existence détermine ce qu'il appelle « existence » ; et, puisque « nous n'avons pas de concept d'existence indépendant de notre concept de la démonstration d'existence » (*ibid.*), il s'agit d'une simple décision, qu'il ne peut essayer de justifier en montrant que son concept est le bon ou le seul possible. Il est essentiel de remarquer, cependant, que l'attitude de Wittgenstein sur cette question est déterminée à nouveau par sa conviction que l'on ne peut appliquer à l'univers mathématique l'idée, empruntée au cas du monde physique, que de deux sources très différentes peut couler la même chose (en l'occurrence, l'existence). Nous avons un concept de l'existence d'un objet physique qui est indépendant des différentes méthodes de vérification que nous pouvons utiliser pour constater cette existence et stable par rapport à elles. Nous n'avons rien de tel dans le cas d'un objet mathématique, puisque la proposition d'existence n'est pas plus qu'une autre séparable du corps de démonstration qu'il y a derrière elle : « Si la démonstration devait être dans la même relation à la conclusion que les vérifications le sont à l'énoncé selon lequel Smith est dans cette pièce, alors nous pourrions appeler la démonstration une sorte de symptôme de la conclusion. Mais en mathématiques la démonstration n'est pas un symptôme, car la proposition démontrée fait partie de la démonstration. La phrase en prose qui conclut peut servir à cataloguer la démonstration en étant une partie d'un système de langage. Si vous voulez connaître la fonction de ce qui est appelé le résultat de la démonstration, regardez dans quelle mesure il catalogue la démonstration, ou s'il est uniquement un nom » (WLC 1932-1935, p. 223).

Wittgenstein soutient qu'en mathématiques c'est réellement la manière dont nous cherchons qui détermine ce que nous cherchons et la manière dont nous avons trouvé qui détermine ce que nous avons trouvé. Cela ressemble évidemment à un paradoxe. Mais ce paradoxe apparent est pour lui constitutif de l'essence des mathématiques ; et il n'est ressenti comme un paradoxe que parce que nous voudrions voir les mathématiques ressembler bien davantage à ce à quoi les sciences de la nature nous ont habitués.

Le contraste que Wittgenstein cherche à établir entre le cas des sciences ordinaires, où le même fait peut être signalé par une pluralité de symptômes divers, et celui des mathématiques où, comme il le dit, de deux sources complètement différentes

ne peut couler une chose unique, semble entraîner la conséquence éminemment paradoxale qu'il ne peut, en toute rigueur, y avoir deux démonstrations réellement différentes de la même proposition mathématique. Wittgenstein n'a pas ignoré cette difficulté et s'est demandé à certains moments si l'on peut réellement dire que le contenu de la proposition mathématique est déterminé uniquement par la démonstration qui nous convainc d'accepter la proposition comme une règle : « Est-il exact de dire que toute démonstration nous convainc de quelque chose dont elle seule peut nous convaincre ? La proposition démontrée ne serait-elle pas dans ce cas — en quelque sorte — superflue, et la démonstration elle-même également le démontré ? » (BGM, p. 190.)

Il se trouve que nous disons bel et bien, dans de nombreux cas, de deux démonstrations différentes qu'elles démontrent la même proposition ; et il serait évidemment absurde de contester que nous ayons le droit de le faire :

> « Ce serait naturellement un non-sens de dire qu'*une* proposition ne peut pas avoir plusieurs démonstrations — car nous disons précisément ce genre de chose. Mais ne peut-on pas dire : *cette* démonstration-ci montre que l'on obtient..., lorsqu'on fait *cela* ; l'autre démonstration montre que cette expression est obtenue lorsqu'on fait autre chose ?
>
> Le fait mathématique, par exemple, que 129 est divisible par 3 est-il donc indépendant du fait que *ce* résultat est obtenu par *ce* calcul ? Je veux dire : le fait de cette divisibilité existe-t-il indépendamment du calcul dans lequel il s'obtient ; ou est-il un fait de ce calcul ? » (BGM, p. 189.)

Le fait que deux procédures démonstratives différentes se rencontrent dans le même signe propositionnel ne constitue pas une condition suffisante pour dire qu'elles constituent deux démonstrations différentes de la même proposition (BGM, p. 191-192). Mais, dans ce cas-là, quelle est la condition suffisante ? Etant entendu que ce n'est certainement pas l'introspection qui permet de déterminer si deux démonstrations nous ont ou non convaincus de la même chose (BGM, p. 189), quels critères utilisons-nous pour décider si c'est ou non le cas ? Wittgenstein remarque que « l'on peut m'amener par des chemins différents à accepter cette règle » (BGM, p. 190). Mais dire cela ne revient-il pas justement à concéder que la règle a une identité et un contenu indépendants des différents chemins qui sont susceptibles de conduire à son adoption ?

Wittgenstein se demande ce que peut signifier au juste l'affirmation : « Une démonstration est un être mathématique qui ne peut être remplacé par aucun autre. » Et il propose la réponse suivante : « Cela veut dire (...) que chaque démonstration particulière a une utilité qu'aucune autre n'a. On pourrait dire : "— que toute démonstration, même d'une proposition déjà démontrée, est une contribution aux mathématiques." Mais pourquoi est-elle une contribution, si ce qui importait était uniquement de démontrer la proposition ? Eh bien, on peut dire : "la nouvelle démonstration montre (ou *fabrique*) une nouvelle connexion". (Mais n'y a-t-il pas alors une proposition mathématique qui dit que cette connexion existe ?) » (BGM, p. 191.) La nouvelle démonstration nous révèle l'existence d'une nouvelle connexion, qui semble constituer une sorte de fait mathématique supplémentaire. Et comment celui-ci est-il exprimé ? « Qu'*apprenons*-nous, se demande Wittgenstein, lorsque nous voyons la nouvelle démonstration, — en dehors de la proposition que sans cela nous connaissons déjà ? Apprenons-nous quelque chose qui ne peut pas être exprimé dans une proposition mathématique ? » (*ibid.*).

Il reste enfin la difficile question — que Wittgenstein évoque, mais qu'il ne parvient manifestement pas à résoudre complètement — de savoir dans quelle mesure l'application de la proposition mathématique peut dépendre de ce que nous sommes disposés à reconnaître comme une démonstration de cette même proposition : « Jusqu'à quel point l'application d'une proposition mathématique dépend-elle de ce à quoi on donne et de ce à quoi on refuse le statut d'une démonstration pour elle ? » (*ibid.*). Wittgenstein estime qu'en mathématiques le chemin importe finalement plus que la destination ou, plus exactement, que le chemin *est* d'une certaine façon la destination elle-même. Mais qu'est-ce qui peut bien subsister de cela au niveau de l'application, où la proposition que nous avons acceptée comme une règle reconquiert apparemment son autonomie et semble à nouveau complètement détachée du (ou des) processus qui ont pu nous convaincre d'ajouter la nouvelle règle à celles que nous avions déjà ?

BIBLIOGRAPHIE

APPEL, K. and HAKEN, W., « The Solution of the Four Color Map Problem », *Scientific American*, CXXXVII, 8 (octobre 1977).

— « The Four Color Problem », in Steen, L.A. (*ed.*), *Mathematics Today : Twelve Informal Essays*, Springer-Verlag, New York, 1978.

APPEL, K., HAKEN, W. and KOCH, J., « Every Planar Map Is Four Colorable », *Illinois Journal of Mathematics*, XXI, 84 (septembre 1977).

BAKER, G.P. and HACKER, P.M.S., *Wittgenstein : Understanding and Meaning*, Vol. 1 of An Analytical Commentary on the *Philosophical Investigations*, B. Blackwell, Oxford, 1980.

— *Wittgenstein : Rules, Grammar and Necessity*, Vol. 2 of An Analytical Commentary on the *Philosophical Investigations*, B. Blackwell, Oxford, 1985.

BECKER, O., *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, 2e édition revue et complétée, Karl Alber Verlag, Francfort-Munich, 1964, Suhrkamp Verlag, Francfort, 1975.

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (*eds.*), *Philosophy of Mathematics*, Selected Readings, B. Blackwell, Oxford, 1964 ; 2e édition remaniée, 1983.

BOREL, E., *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

BOUVERESSE, J., « Le paradis de Cantor et le purgatoire de Wittgenstein », *Critique*, n° 359 (avril 1977).

BROUWER, L.E.J., « Intuitionism and Formalism » (1912), in *Collected Works*, edited by A. Heyting, Vol. 1, Philosophy and Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975 ; également reproduit dans Benacerraf and Putnam (*eds.*), *Philosophy of Mathematics*.

— « Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie » (1923), in *Collected Works*, 1.

— « Mathematik, Wissenschaft und Sprache » (1929), in *Collected Works,* 1.
— « Die Struktur des Kontinuums » (1930), in *Collected Works,* 1.
— Consciousness, Philosophy and Mathematics » (1948), in *Collected Works,* 1 et Benacerraf and Putnam (*eds.*), *Philosophy of Mathematics.*
— « The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic » (1955), in *Collected Works,* 1.

CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* herausgegeben von Ernst Zermelo (1932), Georg Olms, Hildesheim, 1966.

DAUBEN, J. W., *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1979.

DEDEKIND, R., « Stetigkeit und Irrationale Zahlen » (1872).
— « Was sind und was sollen die Zahlen ? » (1887). Les deux textes ont été reproduits en un volume, *Was sind und was sollen die Zahlen ? — Stetigkeit und Irrationale Zahlen,* Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1965.

DUMMETT., M., *Elements of Intuitionism,* The Clarendon Press, Oxford, 1978.
— « Reckonings : Wittgenstein on Mathematics », *Encounter,* 50 (1978).
— *Truth and other Enigmas,* Duckworth, Londres, 1978.
— *Frege : Philosophy of Language,* Duckworth, Londres, 1973 ; 2ᵉ édition, 1981.
— *The Interpretation of Frege's Philosophy,* Duckworth, Londres, 1981.

FOGELIN, R., « Wittgenstein and Intuitionism », *American Philosophical Quarterly,* 5 (1968).
— *Wittgenstein,* Routledge & Kegan Paul, Londres, 1976.

FREGE, G., *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1961 ; traduction française par C. Imbert, Edition du Seuil, Paris, 1969.
— *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903), Georg Olms, Hildesheim, 1966.

FRIXIONE, M., « Computers ed esperimenti, Alcune osservazioni sul "nuovo problema dei quatro colori" », *Epistemologia,* 9 (1986).

GÖDEL, K., « Russell's Mathematical Logic » (1944), in Benacerraf and Putnam (*eds.*), *Philosophy of Mathematics.*
— « What Is Cantor's Continuum Problem ? » (1947), *ibid.*

HACKER, P.M.S., *Insight and Illusion,* Wittgenstein on Philosophy and the Metaphysics of Experience, The Clarendon Press, Oxford, 1972.
— *Insight and Illusion,* Themes in the Philosophy of Wittgenstein, The Clarendon Press, Oxford, 1986, édition remaniée du précédent.

HACKING, I., « Rules, Scepticism, Proof, Wittgenstein », in I. Hacking (*ed.*), *Exercises in Analysis,* Essays by Students of Casimir Lewy, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

HARDY, G., « Mathematical Proof », *Mind,* 38 (1929).
— *A Mathematician's Apology,* Cambridge University Press, Cambridge, 1940 ; réédité avec une préface de C.P. Snow, 1967.

HEYTING, A., « The Intuitionist Foundations of Mathematics » (1931), in Benacerraf and Putnam (*eds.*), *Philosophy of Mathematics.*
— *Intuitionism,* An Introduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956, 2ᵉ édition revue, 1966.

HILBERT, D., « Mathematische Probleme » (1900), in *Gesammelte Abhandlungen,* Springer-Verlag, New York, 1935, 2ᵉ édition, 1970, vol. III.
— « Axiomatisches Denken » (1918), in *Gesammelte Abhandlungen,* III.
— « Neubegründung der Mathematik » (1922), in *Gesammelte Abhandlungen,* III.
— « Die logischen Grundlagen der Mathematik » (1923), *Gesammelte Abhandlungen,* III.
— « Über das Unendliche » (1925), in *Hilbertiana,* Fünf Aufsätze von David Hilbert, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1964 ; traduction anglaise dans J. van Heijenoort (*ed.*), *From Frege to Gödel,* A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967 ; traduction française dans J. Largeault, *Logique mathématique,* Textes, Armand Colin, Paris, 1972.
— « Die Grundlagen der Mathematik », *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität,* 6 (1928) ; traduction anglaise dans J. van Heijenoort (*ed.*), *From Frege to Gödel.*

KREISEL, G., « Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics », *Bulletin of the American Mathematical Society,* 84 (1978).
— « "Der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik" », in *Essays on Wittgenstein in Honour of G.H. von Wright,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.
— « Zu Wittgensteins Gesprächen und Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik », in *Wittgenstein und sein Einfluss auf die gegenwärtige Philosophie,* Akten des 2. internationalen Wittgenstein Symposiums, Kirchberg a. W., 1977, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienne, 1978.

— « Einige Erläuterungen zu Wittgensteins Kummer mit Hilbert und Gödel », in *Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie,* Akten des 7. internationalen Wittgensteins Symposiums, Kirchberg a. W., 1982, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienne, 1983.

KRIPKE, S., *Naming and Necessity,* B. Blackwell, Oxford, 1980 ; traduction française par P. Jacob, *La logique des noms propres,* Ed. de Minuit, Paris, 1982.

LAKATOS, I., *Proofs and Refutations : The Logic of Mathematical Discovery,* edited by J. Worrall and E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

PENCO, C., « Intuition in Mathematics ? Wittgenstein's Remarks », *Epistemologia,* 4 (1981).

POINCARE, H., *La science et l'hypothèse,* Flammarion, Paris, 1902 ; réédité avec une préface de J. Vuillemin, Flammarion, collection « Champ Scientifique », 1968.

PRAWITZ D., « Intuitionistic Logic : A Philosophical Challenge », in *Logic and Philosophy,* edited by G.H. von Wright, M. Nijhoff, La Haye-Boston-Londres, 1980.

PUTNAM, H., *Mathematics, Matter and Method,* Philosophical Papers, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, 2ᵉ édition, 1979.

RABINOWICZ W., « Intuitionistic Truth », *Journal of Philosophical Logic,* 14 (1985).

RHEES, R., « On Continuity : Wittgenstein's Ideas, 1938 », in *Discussions of Wittgenstein,* Routledge & Kegan Paul, Londres, 1970.

RICHARDSON, J.T.E., *The Grammar of Justification,* An Interpretation of Wittgenstein's Philosophy of Language, Sussex University Press, 1976.

RUSSELL, B., *Essays in Analysis,* edited by Douglas Lackey, George Braziller, New York, 1973.

— *Introduction to Mathematical Philosophy,* Allen & Unwin, Londres, 1919.

— « The Limits of Empiricism », Proceedings of the Aristotelian Society, vol. XXXVI (1935-1936).

SHANKER, S.G., *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics,* Croom Helm, Londres et Sydney, 1987.

STEINER, M., *Mathematical Knowledge,* Cornell University Press, Ithaca et Londres, 1975.

TAYLOR, B. (*ed.*), *Michael Dummett,* Contributions to Philosophy, M. Nijhoff, Dordrecht, 1987.

TROELSTRA, A.S., *Principles of Intuitionism,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

TYMOCZKO, T., « The Four-Colour Problem and its Philosophical Significance », *The Journal of Philosophy,* 76 (1979).

WAISMANN, F., *Einführung in das mathematische Denken,* Die Begriffsbildung der modernen Mathematik, Gerold & Co., Vienne, 1936, Deutscher Taschenbuch Verlag, Munich, 1970.

— *Logik, Sprache, Philosophie,* Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1976.

WANG, H., *From Mathematics to Philosophy,* Routledge & Kegan Paul, Londres, 1974.

— *Beyond Analytic Philosophy,* Doing Justice to What We Know, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1986.

WEYL, H., « Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis » (1917), in *Das Kontinuum und andere Monographien,* Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

— *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (1921), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1965.

— *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1928), 3ᵉ édition augmentée, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1966, d'après la version américaine de l'ouvrage, *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton University Press, 1949.

WRIGHT, C., *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics,* Duckworth, Londres, 1980.

— *Frege's Conception of Numbers as Objects,* Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983.

— *Realism, Meaning and Truth,* B. Blackwell, Oxford, 1987.

— « Inventing Logical Necessity », in J. Butterfield (*ed.*), *Language, Mind and Logic,* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

INDEX

Table des matières

CET OUVRAGE A ÉTÉ ACHEVÉ D'IMPRIMER LE VINGT-SIX SEPTEMBRE MIL NEUF CENT QUATRE-VINGT-HUIT DANS LES ATELIERS DE NORMANDIE IMPRESSION S.A. À ALENÇON (ORNE) ET INSCRIT DANS LES REGISTRES DE L'ÉDITEUR SOUS LE N° 2321

Dépôt légal : septembre 1988

JACQUES BOUVERESSE

Wittgenstein appartient incontestablement à la catégorie des philosophes pour lesquels la tâche de la philosophie est plutôt de comprendre le monde que de le transformer. Comme il le dit et le répète, la philosophie laisse en principe toutes choses (en particulier, nos pratiques établies) dans l'état où elle les trouve. Il n'y a probablement pas de domaine où cette théorie semble plus directement contredite par sa pratique que la philosophie des mathématiques. Comment peut-il critiquer aussi radicalement le platonisme mathématique et en même temps refuser d'accepter les restrictions que le constructivisme tente d'introduire dans les mathématiques, se rapprocher sur certains points autant de l'intuitionnisme et récuser néanmoins explicitement le programme réformiste que Brouwer voudrait imposer ? L'explication est probablement à chercher dans l'idée de l'autonomie de la grammaire et de la souveraineté de la pratique, dont les règles n'ont pas besoin du genre de justification que les partisans de l'orthodoxie croient détenir et dont les révisionnistes invoquent l'absence pour exiger des changements plus ou moins radicaux. C'est avant tout l'antijustificationnisme conséquent de Wittgenstein qui lui interdit d'envisager un changement de logique ou un bouleversement de nos pratiques mathématiques motivés par des considérations (principalement) philosophiques.

9 782707 311818

ISBN 2-7073-1181-2