Tangente

Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

# La Logique

## Le vrai, le faux et l'incertain

HS n° 15
ISSN 0987-0806
POLE

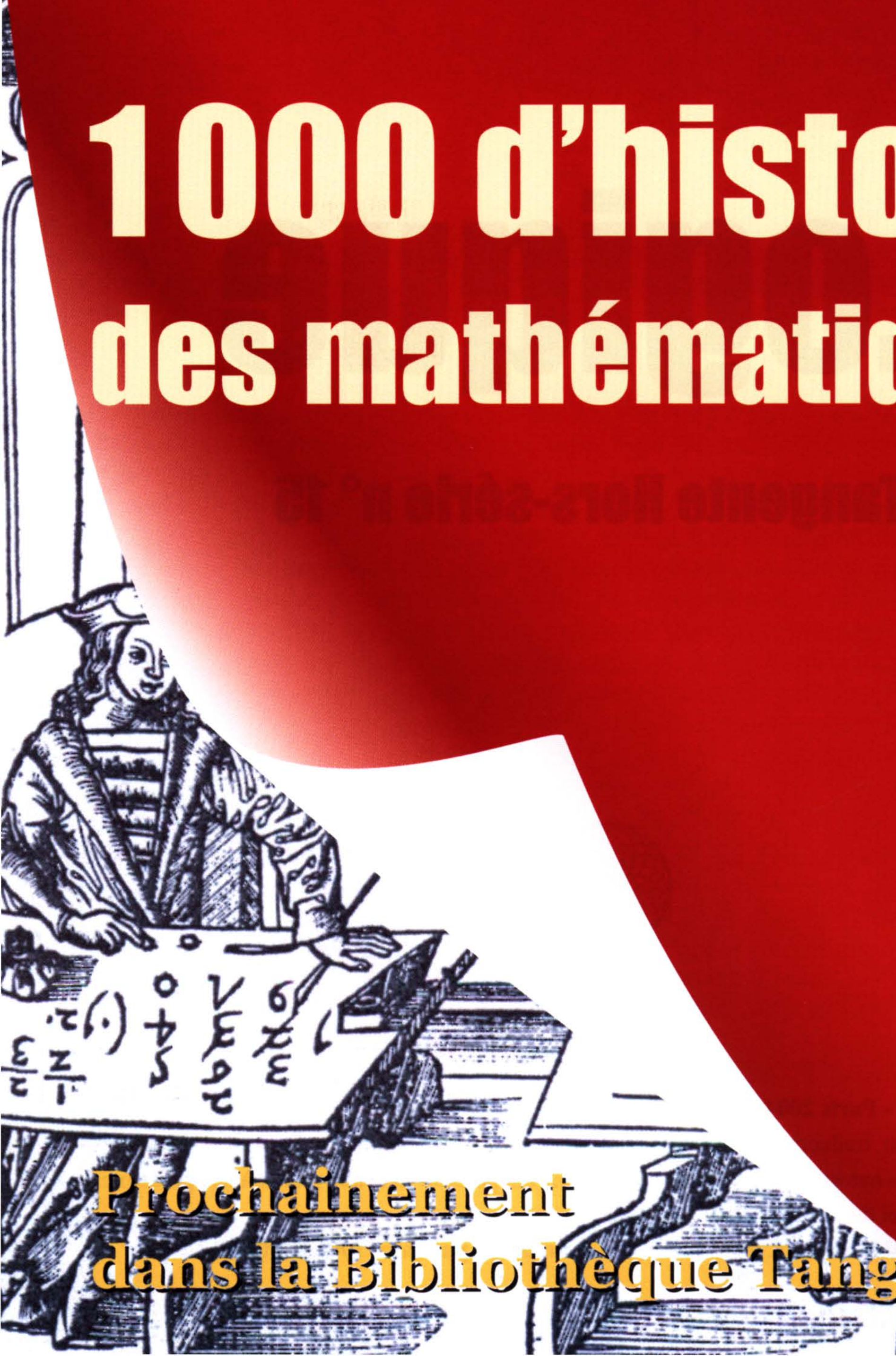
Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

# La Logique

## Tangente Hors-série n° 15

POLE


**I.S.B.N. 2-84884-018 I.S.S.N. 0987-0806 Commission paritaire 1006 K 80883**



La Logique

# Sommaire

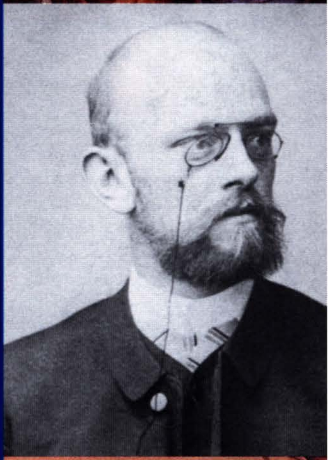


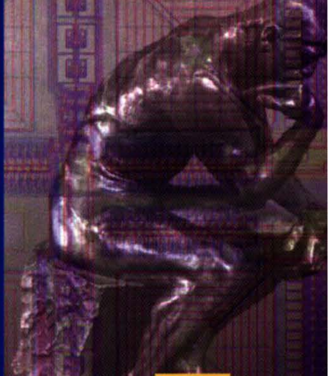
**Comment garantir qu'une argumentation est correcte, qu'aucun cercle vicieux ne s'immisce dans des propos qui se veulent justes ? La logique est née avec Aristote et, à lire ou entendre tous les raisonnements fallacieux présentés avec tout le sérieux du monde par certains, on comprend que la logique, même « élémentaire », est un indispensable bagage pour tous les citoyens.**



**À partir du XIX^e siècle, les mathématiciens se penchent sur les fondements de leur discipline et s'attachent à s'assurer de leur solidité. Au début du XX^e siècle, tout s'écroule. De nouvelles découvertes viennent bouleverser des siècles de certitudes. Deux camps s'opposent alors : les « intuitionnistes » ou « constructivistes », et les « formalistes » dont le chef de file est David Hilbert.**







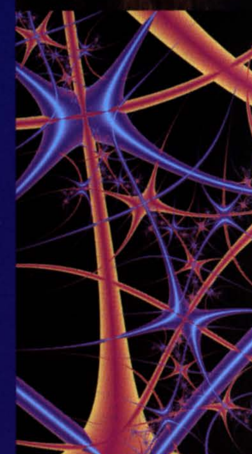
(suite au verso)

## DOSSIER



**Pour accomplir une tâche, une machine ne peut se fonder sur la logique humaine, celle que nous utilisons pour les actions de la vie quotidienne. La logique mathématique est nécessaire, c'est pourquoi l'informatique en est née et a poussé à mieux discerner l'aspect syntaxique traitable par ordinateur et l'aspect sémantique réservé aux seuls êtres humains. Bien entendu, les taches mécanisables sont alors strictement limitées.**
**Mathématiquement, elles correspondent aux fonctions tout à la fois calculables et de complexité « raisonnable ».**





## DOSSIER



**La logique est un immense territoire ludique où les paradoxes titillent le bon sens, où les mots se prennent au jeu, où l'auto-référence nous entraîne dans ses labyrinthes et où Menteurs et Sorcières, Fous et Sages s'affrontent dans des joutes impitoyables.**



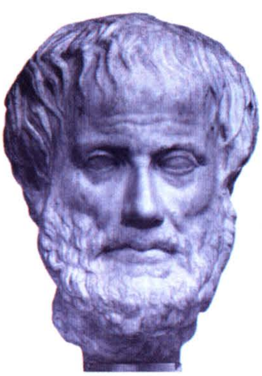
# La logique élémentaire


**« Il n'y a que la vérité qui blesse », dit-on. Bon, mettons alors que je dise que je suis un génie. Ça me blesse ? Non. « Donc, je n'en suis pas un... » La conclusion du raisonnement précédent est probablement correcte, mais il n'empêche : le raisonnement lui-même est faux. On pourrait en fait le reformuler pour lui faire dire que nulle personne au monde ne possède la moindre qualité ! La manière de présenter ce faux raisonnement lui donne pourtant une apparence de vérité, d'où la question qui s'est posée depuis l'émergence de la pensée rationnelle : comment garantir qu'une argumentation est correcte, qu'aucun cercle vicieux ne s'immisce dans des propos qui se veulent justes ? La science de la logique était née et, à lire ou entendre tous les raisonnements fallacieux présentés avec tout le sérieux du monde par certains qui peuvent plus que d'autres se faire entendre, on comprend que la logique, même « élémentaire », est un indispensable bagage pour tous les citoyens.**

par Benoît Rittaud

# La logique d'Aristote

**Fonder un discours assuré passe par un mode de déduction rationnel sans faille. Pour ce faire, il convient d'expliciter les règles de déduction légitimes : le premier à s'attaquer au problème est Aristote, avec ses fameux syllogismes.**



**Aristote**
**© UBG**

Le nom d'Aristote est attaché à de nombreux domaines de la réflexion, qu'il s'agisse de science, de philosophie ou de politique. S'agissant des mathématiques en revanche, on ne connaît aucun théorème qui puisse lui être attribué. Si, sans doute en partie sous l'influence de son maître Platon, les mathématiques constituent certes pour lui une source d'inspiration et de commentaires, il semble ne jamais avoir véritablement cherché à les développer pour elles-mêmes, même si certains passages de sa *Physique* notamment peuvent être lus comme purement mathématiques.

## La logique comme science

La principale contribution aux mathématiques d'Aristote concerne ses travaux sur la logique démonstrative, véritable clé pour accéder à la vérité, c'est-à-dire à des énoncés qui ont, par la force de leur exactitude, un statut de réalité analogue aux objets matériels. C'est notamment à Aristote que l'on doit l'énoncé du principe du tiers exclu (cf. page 16), qui pose qu'un énoncé est nécessairement vrai ou faux. On lui doit aussi d'avoir imaginé la notion de *proposition*, c'est-à-dire d'énoncés abstraits sur lesquels on ne fait aucune hypothèse a priori sur la véracité ou la fausseté. Selon Aristote, une proposition est indépendante du langage utilisé pour la transcrire, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une entité abstraite regroupant toutes les manières qu'il y a de dire ce qu'elle dit. Il s'agit ainsi de la brique fondatrice de la science de la logique, au même titre que le point est l'objet de base de la géométrie ou le nombre celui de l'arithmétique.
Une proposition est donc davantage qu'une simple phrase, mais une phrase n'est pas non plus nécessairement le reflet, fut-il imparfait, d'une proposition. Pour que ce soit le cas, encore faut-il que les mots employés aient un sens clair

Platon et Aristote, détail de l'École d'Athènes de Raphaël (1518) © UBG

*Les propositions sont à la logique ce que le point est à la géométrie, ou le nombre à l'arithmétique.*

et non ambigu, c'est-à-dire qu'ils ne fassent pas référence à des notions elles-même mal définies. Aristote a ainsi, pour la première fois semble-t-il, distingué très clairement entre ce qui est de l'ordre de la définition, du postulat et de la conclusion. Il faut dire que le toilettage des discours de l'époque avait quelque chose de nécessaire : nous sommes au quatrième siècle avant notre ère, à une époque où l'art du discours était certes très développé, mais souvent davantage dans le but d'emporter la conviction des citoyens que dans celui de faire émerger la vérité (c'est le reproche qu'adressait Platon aux sophistes et aux rhéteurs de tous poils de son époque). Pour atteindre la vérité, donc, Aristote se préoccupe des définitions plus que nul autre avant lui, et illustre l'importance de l'idée par un exemple tiré de la géométrie (cf. encadré).

## Par delà le vrai et le faux

Pouvoir s'intéresser à une proposition indépendamment de la question de savoir si ce qu'elle énonce est vrai ou faux est un pas important dans l'émergence de la logique abstraite. Aristote a également établi la distinction entre ce que nous appelons aujourd'hui les propositions universelles et les propositions existentielles. Les premières énoncent un fait général « inconditionnel » et peuvent s'introduire par « Quel que soit » (par exemple, « Quel que soit le triangle, la somme de ses angles mesure 180° »). Les secondes ne font qu'énoncer l'existence d'objets particuliers et peuvent s'introduire par « Il existe » (comme dans « Il existe des nombres irrationnels. »). Au XIXe siècle, Dedekind popularisera l'emploi des *quantificateurs* universel et existentiel, notés $\forall$ (un A renversé, pour *alle* en Allemand) et $\exists$ (un E renversé, pour *exist*).
Une fois reconnu les différents types de propositions, Aristote s'est attelé à la tâche de fonder une sorte d'« arithmétique des propositions », dans laquelle la véracité supposée de deux d'entre elles (les *prémisses*) entraîne celle de la troisième (la *conclusion*) selon des modalités définies par différentes catégories de syllogismes. Aristote définit ainsi cette notion dans les *Premiers Analytiques* : « Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le fait de ces données. » L'exemple le plus couramment donné de syllogisme est le suivant :

**A : Tout homme est mortel.**
**B : Socrate est un homme.**
**C : Socrate est mortel.**

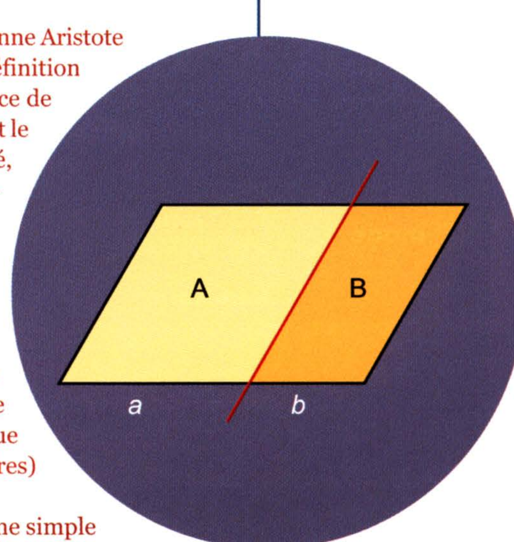
Précisons que cet exemple n'est pas d'Aristote lui-même, lequel considérait qu'il n'existait de science que du général et non du particulier : le syllogisme précédent, bien que correct, aurait donc présenté pour lui le défaut de mettre en jeu un être particulier (« Socrate »), incompatible avec la fonction « générale » du syllogisme. Autrement dit, la proposition B, ne commence ni par « Pour tout », ni par « Il existe », et n'entre donc pas vraiment dans le champ de la logique aristotélicienne.
L'exemple précédent est loin d'être le seul type de raisonnement syllogistique possible. On compte pas moins de 14 types de syllogismes suivant les fonctions qu'occupent, dans la majeure (la première proposition, notée A dans l'exemple ci-dessus), dans la mineure (la seconde, ici notée B) et dans la conclusion (la troisième, notée C), les différents objets considérés.

## Squelettes de syllogismes

Les trois propositions constitutives d'un

## Des définitions pour un théorème

Dans les *Topiques*, c'est un exemple géométrique que donne Aristote pour justifier la nécessité de préciser clairement la définition des mots employés : il explique en effet que, en l'absence de définition claire, il semble difficile de prouver facilement le résultat selon lequel, un parallélogramme étant donné, toute droite parallèle à un côté et traversant le parallélogramme sépare celui-ci en deux dont le rapport des aires est le même que celui des longueurs des segments matérialisés par l'intersection de la droite et de l'un des côtés.
Plus clairement, dans le dessin ci-contre, on a A/B = a/b.
La preuve qu'Aristote a en vue n'est pas ce qui nous concerne ici, mais bien plutôt le fait qu'il remarque que c'est seulement lorsqu'on a convenablement défini ce que l'on entend par rapport de deux segments (ou de deux aires) qu'on peut vraiment s'attaquer au problème.
Cela fait, le théorème géométrique précédent devient une simple application de la définition.




syllogisme rassemblent trois termes : un grand (« mortel »), un moyen (« homme ») et un petit (« Socrate »). Le moyen terme est celui qui définit la figure du syllogisme, parmi les trois possibles. La première figure est celle dans laquelle le moyen terme est sujet dans la majeure et attribut dans la mineure. En notant, selon l'usage, A le grand terme, B le moyen et C le petit, la structure d'un syllogisme de première figure ressemble donc à ceci :

***** B est A
***** C est B
***** C est A

Pour constituer une structure syllogistique complète à partir du squelette précédent, il convient de boucher les trous (matérialisés ici par *****), suivant la nature de chacune des propositions. Une proposition peut être, comme on l'a vu, universelle affirmative (« Tout homme est mortel »), universelle négative (« Aucun homme n'est un dieu »), particulière affirmative (« Il existe un homme savant ») et particulière négative (« Il existe un homme qui n'est pas savant »). En remplaçant chaque ***** du squelette précédent par l'une ou l'autre de ces possibilités (substituant éventuellement « est » par « n'est pas » pour les propositions négatives), on peut obtenir potentiellement 64 syllogismes différents. Toutefois, outre que certains ainsi obtenus sont équivalents les uns aux autres, tous ne sont pas non plus concluants, c'est-à-dire que la conclusion ne découle pas nécessairement de leurs prémisses. Voici un exemple de syllogisme non concluant :

Tout B est A
Quelque C est B
Tout C est A

Il existe quatre syllogismes de première figure, chacun d'eux constituant un *mode*. Les scolastiques, penseurs de

***On chercherait en vain une démonstration consistante utilisant de façon cruciale un syllogisme.***

## Les 14 syllogismes aristotéliciens

| | 1ere figure | 2e figure | 3e figure |
|---|---|---|---|
| **1er mode** | Tout B est A<br>Tout C est B<br>ergo Tout C est A.<br>**Barbara** | Aucun N n'est M<br>Tout X est M<br>ergo Aucun X n'est M.<br>**Cesare** | Tout S est P<br>Tout S est R<br>ergo Quelque R est P.<br>**Darapti** |
| **2e mode** | Aucun B n'est A<br>Tout C est B<br>ergo Aucun C n'est A.<br>**Celarent** | Tout N est M<br>Aucun X n'est M<br>ergo Aucun X n'est N.<br>**Camestres** | Aucun S n'est P<br>Tout S est R<br>ergo Quelque R n'est pas P.<br>**Felapton** |
| **3e mode** | Tout B est A<br>Quelque C est B<br>ergo Quelque C est A.<br>**Darii** | Aucun N n'est M<br>Quelque X est M<br>ergo Quelque X n'est pas N.<br>**Festino** | Quelque S est P<br>Tout S est R<br>ergo Quelque R est P.<br>**Disamis** |
| **4e mode** | Aucun B n'est A<br>Quelque C est B<br>ergo Quelque C n'est pas A.<br>**Ferio** | Tout N est M<br>Quelque X n'est pas M<br>ergo Quelque X n'est pas N.<br>**Baroco** | Tout S est P<br>Quelque S est R<br>ergo Quelque R est P.<br>**Datisi** |
| **5e mode** | | | Quelque S n'est pas P<br>Tout S est R<br>ergo Quelque R n'est pas P.<br>**Bocardo** |
| **6e mode** | | | Aucun S n'est P<br>Quelque S est R<br>ergo Quelque R n'est pas P.<br>**Ferison** |

l'époque médiévale très friands des idées d'Aristote, ont imaginé une notation basé sur les lettres A (universelle affirmative), E (universelle négative), I (particulière affirmative) et O (particulière négative). Les quatre syllogismes de première figure sont AAA, EAE, AII et EIO : un moyen mnémotechnique pour chacun de ces syllogismes pertinents a alors consisté à associer des noms à ces modes, à savoir : Barbara, Celarent, Darii et Ferio (le latin était à l'honneur, en ce temps-là). Par exemple, le Barbara est le syllogisme suivant (voir aussi le tableau regroupant la liste complète des syllogismes possibles) :

**Tout B est A**
**Tout C est B**
***ergo* Tout C est A**

Le mot latin *ergo*, « donc », juste devant la conclusion, est là pour la distinguer des prémisses, mais attention : le fameux *cogito ergo sum* de Descartes n'a rien d'un syllogisme !
Les syllogismes de la première figure sont les plus immédiats, en ce sens que chacun perçoit immédiatement leur exactitude. Ceux de la deuxième figure rassemblent ceux dont le moyen terme est attribut dans les deux prémisses, c'est-à-dire dont le squelette est le suivant :

***** **N est M**
***** **X est M**
***** **X est N**

Pour la deuxième figure, l'usage veut (ou voulait…) que les lettres M, N et X remplacent respectivement A, B et C. Comme la première figure, la deuxième produit quatre syllogismes concluants. La troisième et dernière figure est celle où le moyen terme est sujet dans les deux prémisses, ce qui donne :

***** **S est P**
***** **S est R**
***** **R est P**

Cette fois, on utilise les lettres P, R et S en lieu et place de A, B et C.
La troisième figure donne six modes concluants. Comme ceux de la deuxième figure, ils sont plus subtils que ceux de la deuxième figure.

## Beau mais inutile

Si la construction d'Aristote présente certes un intérêt réel en ce qu'elle considère comme objet en soi des propositions et qu'elle énonce des résultats de logique pure, il reste que le raisonnement syllogistique n'a pour ainsi dire jamais été employé par les mathématiciens. Euclide, qui rédigea les *Éléments*, compilation de résultats de l'époque concernant surtout la géométrie, ignore superbement les syllogismes, outils malcommodes et à peu près inutiles à la démonstration de théorèmes. On chercherait en vain une démonstration mathématique un tant soi peu consistante pour laquelle un syllogisme se révélerait un outil d'importance. En dehors des scolastiques de l'époque médiévale, dont Thomas d'Aquin est le plus illustre représentant, personne ne s'est donc vraiment attaché à cette classification des raisonnements logiques pour asseoir des démonstrations.

Il reste que, par la rigueur de la construction et l'étude purement abstraite de questions de logique, Aristote doit être considéré comme l'un des premiers logiciens au sens propre, dont les idées ne seront véritablement dépassées que plus de deux millénaires plus tard, au XIX$^e$ siècle.

**B. R.**

**Bibliographie**

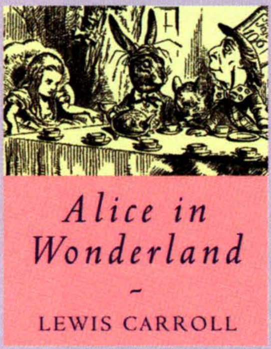
**J. Brun, *Aristote et le Lycée*,**
Presses Universitaires de France, 1961.

**D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*,**
Oxford Science Publications, 1987.

**R. Omnès, *Philosophie de la science contemporaine*,**
Gallimard, 1994.

# Lewis Carroll

**Être un authentique mathématicien doublé d'un écrivain : voilà l'alchimie qui fait de Lewis Carroll un auteur unique, et de ses œuvres des prodiges où se mêlent une implacable logique, un vrai talent littéraire et un immense sens de l'humour.**




C'est chez les adultes que l'œuvre de Lewis Carroll, écrite initialement pour des enfants, connaît à l'heure actuelle le plus grand succès. C'est au milieu du XX^e^ siècle qu'on a pris la mesure de son caractère d'avant-garde dans nombre de domaines des sciences humaines. Bien qu'écrite par un clergyman très respectable, elle contrecarre tout un univers intellectuel, et parfois moral, qui a fait de son auteur un des premiers surréalistes. On peut ne pas apprécier sa valeur littéraire, ou douter de son intérêt éducatif, voire de ses intuitions logiques, il n'en demeure pas moins que sur chacun de ces terrains, les aventures d'*Alice au pays des merveilles* sont riches d'enseignement.

*« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'habitue seulement à elles. » J. von Neumann*

## Un créateur précoce et génial

Lewis Carroll, de son vrai nom Charles Lutwidge Dodgson, est né à Daresbury, près de Manchester. Son père était pasteur, et Charles était le troisième enfant de sa nombreuse famille. La majeure partie de son enfance s'est passée à Daresbury, puis à Croft, dans le Yorkshire, à partir de 1843. Charles aimait inventer des jeux divers, et monter des spectacles de marionnettes pour ses frères et sœurs. À douze ans, on le met en pension à Richmond, puis à treize à la public school de Rugby. Il y fait de bonnes études et, à dix-sept ans, est admis à Oxford (Christ Church College), où il s'installe en janvier 1851 ; il y travaille d'arrache-pied et obtient brillamment son diplôme de mathématiques en décembre 1854. Le collège lui accorde un titre équivalent à celui d'assistant de faculté, en contrepartie d'un engagement à devenir prêtre et à rester célibataire.

C'est à cette époque qu'il commence à écrire des poèmes, mais aussi quelques nouvelles qui paraissent dans *The Train*, dont le directeur choisit, parmi les pseudonymes que Dodgson lui propose, celui de Lewis Carroll (1856). En même

## Quelques groupes de prémisses[1] de sorites[2] proposés par Lewis Carroll et dont il s'agit de trouver la conclusion logique[3].

(A) 1. Tous les canards vivant dans ce village qui sont marqués d'un M appartiennent à Mme Martin.
2. Les canards vivant dans ce village ne portent pas de col en dentelle, à moins qu'ils n'appartiennent à Mme Martin.
3. Mme Martin ne possède aucun canard gris vivant dans ce village.

(B) 1. Tout individu sain d'esprit peut devenir logicien.
2. Aucun malade mental ne peut être juré.
3. Aucun de vos fils ne peut devenir logicien.

(C) 1. Aucun fox-terrier ne se promène parmi les signes du zodiaque.
2. Aucun objet qui ne se promène pas parmi les signes du zodiaque n'est une comète.
3. Seuls les fox-terriers ont la queue bouclée

(D) 1. Aucune des choses rencontrées en mer, et que l'on ne remarque pas, n'est une sirène.
2. Les choses inscrites sur le journal de bord comme ayant été rencontrées en mer sont toujours dignes d'être retenues.
3. Je n'ai jamais rien rencontré au cours d'un voyage en mer qui mérite d'être retenu.
4. Les choses rencontrées en mer et que l'on remarque sont toujours inscrites sur le journal de bord.

(E) 1. Aucun oiseau, en dehors de l'autruche, ne mesure trois mètres de haut.
2. Il n'y a dans cette volière aucun oiseau qui appartienne à un autre que moi.
3. Aucune autruche ne se nourrit de viande hachée.
4. Je ne possède aucun oiseau mesurant trois mètres de haut.

[1] propositions d'un syllogisme

[2] argument composé d'une suite de propositions liées entre elles de manière que l'attribut de chacune d'elles devienne le sujet de la suivante

[3] Lewis Carroll, *Logique sans peine*, Hermann (1966)

**Solutions**

A : aucun canard gris ne porte de col en dentelle. B : Aucun de vos fils est apte à être juré.
C : Aucune comète n'a de queue bouclée. D : Je n'ai jamais rencontré de sirène de mer.
E : Aucun des oiseaux de cette volière ne se nourrit de viande hachée.

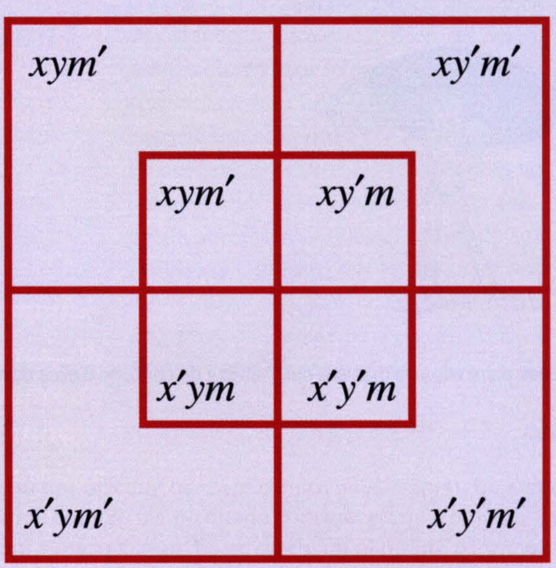
temps, il se passionne pour la photographie, encore à ses débuts. Il effectue de nombreux portraits des enfants du doyen de son collège, dont celui de la petite Alice. En 1862, l'année où Alice eut dix ans, Carroll lui raconte ce qui devait devenir *Alice au pays des merveilles* dont la première édition date de 1865. Le succès est immédiat. Paraissent ensuite *Alice à travers le miroir* en 1872 puis *La Chasse au snark* en 1876, toujours avec le même succès.

## Logicien et écrivain pour la postérité

Parallèlement, Carroll poursuit son travail de professeur et de mathématicien. Son enseignement ne plaît guère, et ses ouvrages mathématiques – mis à part *Euclide et ses rivaux modernes* (1879) réfutation humoristique des géométries non euclidiennes – n'ont pas marqué. Il renonce à devenir prêtre, sous prétexte de timidité. En 1881, il quitte l'enseignement, et, par suite de reproches adressés à son goût pour les photographies de fillettes en déshabillé, abandonne la photographie, art dans lequel il excellait pourtant. La logique devient alors son seul souci.

Il met en forme une analyse rigoureuse permettant d'apporter des conclusions à partir de prémisses complexes et de résoudre sorites et syllogismes numériques, géométriques, ou rhétoriques. Mais son approche mathématique est limitée et calquée sur les théories des ensembles de Boole.

Son diagramme à double carré (voir figure) apporte cependant une dimension complémentaire aux diagrammes d'Euler ou de Venn.

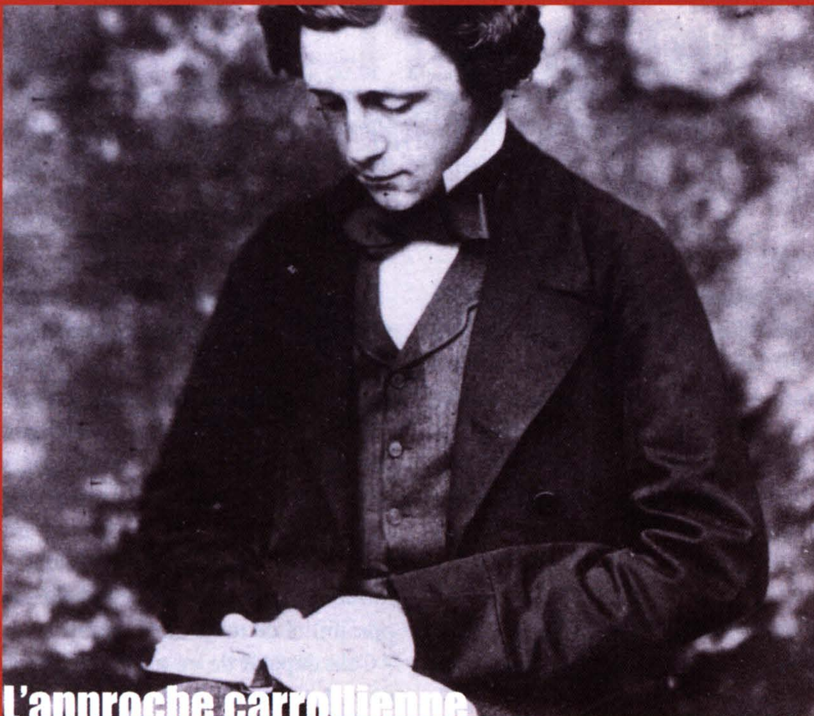



*Le diagramme à double carré*

L'essentiel de sa production allie alors mathématiques, logique et humour : *Une histoire compliquée* (1885), *The Game of Logic* (1887), *Pillow Problems* (1893), *Logique symbolique* (1896) et entre autres un paradoxe qui va devenir célèbre : *Ce que se dirent Achille et la tortue* (1894). Il meurt dans sa famille, le 14 janvier 1898, à l'âge de soixante-six ans, regretté, semble-t-il, par ses seules et très nombreuses petites amies.

Son aura mathématique est sans doute surfaite car son œuvre est essentiellement littéraire et constitue une importante contribution à toutes sortes de remises en cause : le langage qu'il considère faussé par l'absence de règles objectives, le raisonnement, qui permet, s'il est correct, de déceler chez autrui les failles et les sophismes de l'argumentation, la pensée conformiste dont il se joue par bon sens ou grâce au non-sens. Nous le retiendrons donc essentiellement comme poète, pourfendeur de mots et logicien. Sa créativité, la liaison qu'il imagine entre la logique mathématique et les jeux sur les mots, tout en gardant un caractère ludique à sa pédagogie, en font un des précurseurs du mouvement oulipien créé par Queneau en 1960.

**A. Z.**



# L'approche carrollienne

Lewis Carroll avait une manière bien à lui de poser des exercices de mathématiques, comme le montrent ces quelques exemples.

Trouvez des couples de nombres dont la somme des carrés est 2.

Prouvez que le triple de la somme de quatre carrés est toujours une somme de quatre carrés.

Inscrivez dans un cercle le plus grand quadrilatère possible, ayant deux côtés parallèles, l'un étant le double de l'autre.

Si on casse une infinité de baguettes, quelle est la probabilité qu'une au moins d'entre elles soit cassée en son milieu ?

Que peut-on conclure de ces affirmations :

a) 1- tout individu sain d'esprit peut devenir logicien.
2- aucun malade mental ne peut devenir avocat.
3- aucun de vos fils ne peut devenir logicien.

b) 1- aucun enfant de moins de douze ans n'est accepté comme interne dans cette école.
2- tous les enfants studieux ont les cheveux roux.
3- aucun des externes n'apprend le grec.
4- seuls des élèves de moins de douze ans sont paresseux.

# Logique, Sir !

**Passé de l'autre côté du miroir, notre reporter visite l'Oxford du siècle dernier. Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carroll, lui démontre l'impossibilité de toute démonstration. Question de logique !**

Pour ce premier reportage, notre envoyé a préféré ne pas trop s'éloigner de son époque favorite. Nous le suivons donc à Oxford à la fin du XIXe siècle à la rencontre de Charles Lutwidge Dodgson. Sur les indications du portier, il le trouva rapidement derrière son appareil photographique.

- Reverend Dodgson, I presume ?
- Yes, may I help you ?

Les présentations faites, Dodgson accepta l'interview de bonne grâce.

- Alice, dear girl, could leave us. We have to talk.

Alice partie, l'interview commença, nous en proposons une traduction en français moderne pour les lecteurs non accoutumés à l'anglais de la fin du XIXe siècle.

- N'est-elle pas adorable ?
- Depuis quand vous passionnez-vous pour cet art, Monsieur le Révérend ?
- Depuis 1856 environ, j'adore prendre les petites filles pour modèles. Ne sont-elles pas ravissantes ?

- Hum, oui. En effet. Pour les lecteurs de Tangente, pouvez-vous décrire vos travaux mathématiques?
- Je prépare un ouvrage de logique. Je doute que j'en vienne à bout car la tâche est immense. Pour vous donner un exemple, savez-vous ce que se dirent Achille et la tortue ?
- Quand ?
- Quand Achille rattrapa la tortue, voyons !
- Zénon prétendait que c'était impossible... Toutes ces étapes interminables...
- Enfin, lisez votre propre journal, voyons ! Vous savez bien que vous avez réglé tous ces problèmes (cf. *Tangente* hors-série 19) !
- Bien sûr, Monsieur le Révérend. Que se dirent-ils ?
- Ils parlèrent de logique symbolique. La tortue démontra au pauvre Achille l'impossibilité de toute démonstration !
- Cela dépend de ce que vous appelez une démonstration...
- Bien répondu! Vous avez dû lire mes oeuvres !

## La logique de la tortue

- *Symbolic logic*, j'aime bien me documenter avant d'interviewer les gens.
- Il sera traduit en Français sous le nom de *Logique sans peine*, n'oubliez pas de le signaler à vos lecteurs...
- Bien sûr, comment avez-vous réussi à torturer ce pauvre Achille ?
- Bien, la tortue refuse le principe suivant comme faisant partie de la logique :

  si P et Q sont deux assertions, si P implique Q, si P est vraie, alors Q est vraie.

- Ah...
- Russell tombera sur le même problème quand il voudra bâtir ses *Principes de Mathématiques*. Il s'agit de la différence entre « implique » et « donc ».
- Excusez-moi, pouvez-vous préciser votre idée. Je crains que pour la plupart

de nos lecteurs, les deux mots ne soient synonymes.
- Pour achever une démonstra-tion, vous avez besoin d'un principe qui permette d'affirmer la dernière assertion impliquée. La tortue met seulement en évidence l'indépendance de ce principe vis à vis des autres principes de la logique.
- Pouvez-vous donner un exemple ?
- Prenez le cas d'un syllogisme classique :
Tous les chats comprennent le français, or quelques poulets sont des chats. Donc quelques poulets comprennent le français.
- Vos prémisses me semblent étranges...
- Seule la logique m'intéresse ! Ici, nous avons trois assertions :

$A_1$ : « Tous les chats comprennent le français. »
$A_2$ : « Quelques poulets sont des chats. »
$A_3$ : « Quelques poulets comprennent le français. »

La logique classique permet d'affirmer :
($A_1$ et $A_2$) implique $A_3$
en utilisant un certain nombre de règles que connaissent, sans doute, tous vos lecteurs. Pour affirmer $A_3$ indépendamment, on a non seulement besoin de pouvoir affirmer $A_1$ et $A_2$ mais de plus, on a besoin du principe que refuse la tortue !
- Il s'agit donc de son apport essentiel à la logique symbolique ?
- Exactement, et vous pouvez voir que les termes « implique » et « donc » sont de natures très différentes. Pour achever le syllogisme précédent, nous dirons :
« $A_1$ et $A_2$ sont vraies donc $A_3$ est vraie. »
- Il est facile de prouver que $A_1$ est fausse !
- Ah oui ? Bien, j'attends votre démonstration...
L'air gourmand du révérend m'incita à battre en retraite.
- Euh... je ne suis pas ici pour ça, revenons à notre interview.
- Dommage, que voulez-vous savoir encore ?
- Pourquoi avez-vous choisi le pseudonyme de Lewis Carroll ?
- Je ne l'ai pas choisi. Il m'a été attribué en 1856 par Edmund Yates, le directeur du Comic Times à qui je donnais des poèmes et des nouvelles à l'époque.
- Et Alice ?
- Vous l'avez vue !
- Je veux dire *Alice's adventures in wonderland.*
- J'ai toujours aimé raconter des histoires aux petites filles. J'ai commencé oralement, la rédaction est venue ensuite. Vous connaissez l'histoire des trois coiffeurs ?
- Je ne suis pas une petite fille !
- C'est vrai.

**Hervé Lehning**

**Bibliographie**

**L. Carroll, *Complete Works*,** Green, Londres (1939) ; ***The Diaries of Lewis Carroll*,** Green, Londres, **(1953) ; *Symbolic Logic and The Game of Logic*,** Dover (1958) ; ***Pillow Problems and a Tangled Tale*,** Dover (1958) ; ***Diversions and Pastimes*,** Dover (1958) ; ***Logique sans peine*,** Hermann (1966).
**John Fischer, *The Magic of Lewis Carroll*,** Penguin (1973).
**Edward Wakeling, *Rediscovered Lewis Carroll Puzzle*,** Dover (1995).
**Élisabeth Busser, *Énigmes mathématiques de Lewis Carroll*,** Pole (1999). **Ce dernier ouvrage est une traduction adaptée pour lycéens des *Pillows Problems* de Lewis Carroll. Ce dernier prétendait avoir posé et résolu chaque exercice sans papier ni crayon ! Peut-être mais on ne demande pas à tout le monde d'être masochiste !**

par Daniel Temam

# Les règles de la déduction

**Le calcul des propositions constitue la première étape vers la formalisation des démonstrations. Il permet de s'assurer sans risque d'erreur que des déductions complexes sont valides.**

Le calcul des propositions peut être considéré comme un langage, comportant des lettres, des connecteurs pour les relier, et des parenthèses ouvrante et fermante.
Les lettres $p, q, r\ldots$ servent à désigner des propositions, par exemple : « Jean aime les mathématiques » ou « Il fera beau demain ». Une proposition peut être soit vraie, soit fausse : c'est sa valeur de vérité. Dans le calcul des propositions, on ne s'intéresse pas au contenu des propositions, ni aux raisons qui peuvent conduire à les considérer comme vraies ou fausses. On ne s'occupe que des relations existant entre elles.

Les connecteurs permettent de former de nouvelles propositions à partir d'autres propositions.

*Dans le calcul des propositions, on ne s'intéresse ni au contenu des propositions, ni aux raisons qui peuvent conduire à les considérer comme vraies ou fausses, mais aux relations existant entre elles.*

Il existe plusieurs présentations du calcul des propositions, en apparence assez différentes, mais qui sont en fait équivalentes. Nous en avons choisi une.

## Non, et, ou, implique

Le connecteur $\neg$ est le signe de la *négation*. Il se place devant une proposition $p$ pour former une nouvelle proposition $\neg p$, qui est vraie si $p$ est fausse, et fausse si $p$ est vraie. Les autres connecteurs relient des propositions entre elles.

La proposition $(p \wedge q)$ est vraie si $p$ et $q$ sont vraies ; sinon elle est fausse. On peut rapprocher le connecteur $\wedge$ du « et » du langage courant. Toutefois, le « et » du langage courant véhicule souvent des significations supplémentaires, comme celle de l'antériorité. Selon un exemple bien connu « Il se sentit triste et il but beaucoup » n'a pas le même sens que « Il but beaucoup et il se sentit triste ». Le connecteur logique, quant à lui, ne fait pas de différence entre ces deux dernières propositions.

# Tables de vérité des principaux connecteurs

## Négation

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ |

## Ou

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

## Et

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

## Implication

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

## Équivalence

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

## Barre de Sheffer

| $p$ | $q$ | $p \mid q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

## Flèche de Peirce

| $p$ | $q$ | $p \downarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

La proposition $(p \vee q)$ est fausse si $p$ et $q$ sont toutes deux fausses, et vraie dans les autres cas. Autrement dit, pour qu'elle soit vraie, il suffit que $p$ ou $q$ soit vraie, le « ou » n'étant pas exclusif.

La proposition $(p \Rightarrow q)$ est fausse quand $p$ est vraie et $q$ fausse, et vraie dans les autres cas. On peut la rapprocher de l'implication du langage courant : « si $p$, alors $q$ ». En effet si $(p \Rightarrow q)$ est vraie, et $p$ vraie, alors $q$ est vraie.

La proposition $(p \Leftrightarrow q)$ est vraie quand $p$ et $q$ sont toutes deux vraies, ou toutes deux fausses. On peut la rapprocher de l'équivalence du langage courant.

Il est facile de voir qu'il n'est pas nécessaire d'introduire tous les connecteurs. Par exemple $(p \Rightarrow q)$ peut aussi s'écrire $(\neg\, p \vee q)$. Mais les formules seraient alors beaucoup plus compliquées, et leur rapport avec le langage courant beaucoup plus difficile à percevoir.

Les propriétés des connecteurs peuvent être aussi transcrites à travers des tables de vérité, qui donnent la valeur de vérité de la proposition résultante à partir de celles des propositions élémentaires. (Voir l'encadré « Tables de vérité des principaux connecteurs ».)

## Des expressions bien formées

Les éléments ainsi répertoriés permettent de former des expressions. On ne s'intéresse qu'aux expressions dites bien formées, c'est-à-dire celles qui sont susceptibles d'être interprétées.
Elles sont définies à partir de quatre règles, au demeurant tout à fait conformes à l'intuition :

**Premièrement, une lettre prise isolément est une expression bien formée.**

**Deuxièmement, si A est une expression bien formée, ¬A est une expression bien formée.**

**Troisièmement, si A et B sont des expressions bien formées, et * un connecteur binaire, (A * B) est une expression bien formée.**

**Quatrièmement, seules les expressions formées à partir des trois règles précédentes sont bien formées.**

Étant donnée une expression, il est possible de décider en un nombre fini d'étapes si elle est ou non bien formée. Cette propriété mérite d'être soulignée : il existe des ensembles dénombrables d'expressions construites à partir de règles récurrentes et pour lesquels elle n'est pas vérifiée.

Par ailleurs, étant données les valeurs de vérité des propositions contenues dans une expression bien formée, il est possible de calculer la valeur de vérité de cette expression.
On peut utiliser pour cela des tables de vérité, analogues à celle présentée un peu plus haut, mais évidemment un peu plus complexes.

## Toujours vrai

Certaines expressions bien formées ont la particularité d'être vraies quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qu'elles contiennent : ce sont les *tautologies*.

Certaines sont évidentes, par exemple $(p \vee (\neg\, p))$ : soit une proposition est vraie, soit sa négation est vraie. Il serait fâcheux que ce ne soit pas une tautologie, mais il est facile de vérifier que c'en est une, grâce à une table de vérité très simple :

### Le principe du tiers exclu

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee (\neg p)$ |
|---|---|---|
| *V* | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *V* |

Cette tautologie n'est pas très intéressante. Il en est qui le sont davantage :

$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Les deux premières expriment la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$, et de $\vee$ par rapport à $\wedge$. Les deux suivantes sont appelées lois de Morgan. Leur interprétation en langage courant est aisée.
Certaines concernent l'implication, et peuvent sembler paradoxales :

$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
$(\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q))$
$((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p))$
$((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r))$

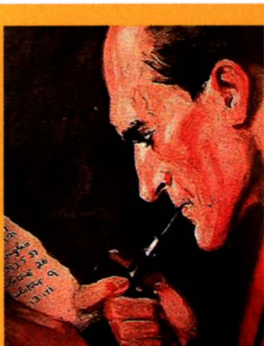
Le nombre des tautologies n'est pas limité. En effet, à partir d'une tautologie, on en obtient une nouvelle en remplaçant toutes les occurrences d'une lettre de proposition par une expression bien formée. On obtient aussi une nouvelle tautologie en remplaçant une expression bien formée par une expression qui lui est équivalente.

*À partir d'une tautologie, on en obtient une nouvelle en remplaçant toutes les occurrences d'une lettre de proposition par une expression bien formée.*

### Une théorie de la déduction

Le calcul des propositions est aussi, et principalement, une *théorie de la déduction*. On dit qu'une expression bien formée B est une conséquence logique des expressions bien formées $A_1, \ldots, A_n$ si B est vraie quand les $A_i$ sont vérifiées. Ou, pour dire les choses de manière plus rigoureuse, si toute distribution de vérité qui vérifie les $A_i$ vérifie aussi B.

Il existe un lien direct entre les tautologies et les déductions. Si B est une conséquence logique de A, alors $(A \Rightarrow B)$ est une tautologie.
Réciproquement, si une tautologie peut se mettre sous la forme $(A \Rightarrow B)$, alors B est une conséquence logique de A.
Les propriétés de la déduction sont nombreuses. La plus notable est le théorème de la déduction : si l'on prend un sous-ensemble $A_1, \ldots, A_m$ des $A_i$, alors $((A_{m+1} \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B)$ est une conséquence logique des $A_1, \ldots, A_m$.
Les mathématiciens l'utilisent constamment de manière implicite. Soit par exemple la propriété : « Tout entier divisible par 2 qui est un carré parfait est



**Sherlock Holmes, archétype du détective, est célèbre pour ses déductions. Ses armes sont l'induction, le raisonnement probabiliste, la chimie appliquée, l'organisation rationnelle d'archives criminelles, mais jamais la logique classique.
Il est le premier personnage de fiction à avoir reçu, en octobre 2002, le titre de « Honorary Fellowship » de la Société Royale de Chimie.**

# La barre de Sheffer et la flèche de Peirce

La **barre de Sheffer** (d'après le logicien H. M. Sheffer) est un connecteur remarquable. Noté « | », il peut être défini par $(A \mid B) \Leftrightarrow (\neg (A \wedge B))$ (c'est le NAND des informaticiens). (Voir sa table de vérité à la page précédente.)

Il est remarquable car universel : tous les connecteurs peuvent s'exprimer à l'aide de la seule barre de Sheffer.

Ainsi : $\neg p \Leftrightarrow (p \mid p)$ ;

$(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \mid q) \mid (p \mid q))$ ;

$(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \mid p) \mid (q \mid q))$ ;

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (((p \mid p) \mid (p \mid p)) \mid p)) \mid (p \mid q))$.

Un autre connecteur est universel ; c'est la **flèche de Peirce**, définie par : $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$ (c'est le NOR des informaticiens).

Lorsque les logiciens, dans les années 1930, cherchèrent un symbole pour exprimer le connecteur découvert par Charles Sanders Peirce (1839-1914), ils ne purent résister à faire un jeu de mots. Pierce Arrow était, à cette époque, le nom d'une célèbre marque américaine de voitures de luxe Peirce et Pierce ayant la même prononciation, « Arrow »signifiant « flèche » en anglais, la flèche de Peirce était née.

On peut écrire :

$(p \mid q) \Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)))$ et

$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (((p \mid p) \mid (q \mid q)) \mid ((p \mid p) \mid (q \mid q)))$, ce qui explique pourquoi la barre de Sheffer et la flèche de Peirce ne sont pas utilisées en logique : par manque de concision et absence totale de lisibilité.

un multiple de 4 ». En fait, ce que l'on démontre c'est que « Des axiomes de l'arithmétique, des propositions "$x$ est pair" et "$x$ est carré parfait" on peut déduire "$x$ est divisible par 4" ». Ce qui donne, en appliquant le théorème de la déduction : « Des axiomes de l'arithmétique, on peut déduire que si $x$ est pair et $x$ est carré parfait, $x$ est divisible par 4 ». Les mathématiciens s'abstiennent de répéter chaque fois le début de la phrase : « Des axiomes de l'arithmétique, on peut déduire que ». Il est facile de comprendre pourquoi.

Il existe une méthode qui permet de savoir si une déduction est légitime. Cette méthode s'appuie sur l'élaboration d'un arbre où interviennent les expressions bien formées incluses dans les $A_i$ et dans B, et est pour cela appelée méthode des arbres. Dans le cas d'une déduction complexe, elle permet de s'assurer de sa légitimité avec un risque d'erreur très limité ; la vérification est beaucoup plus difficile quand la même déduction est écrite sous forme littéraire.

**D. T.**

# La contraposition

La contraposée de la proposition «$p \Rightarrow q$» est la proposition «non $q \Rightarrow$ non $p$». Une proposition est toujours équivalente à sa contraposée. Si l'une est vraie, il en de même de l'autre. Si on se restreint à l'univers des oiseaux, la contraposée de l'affirmation «Tous les corbeaux sont noirs» (si un oiseau est un corbeau alors il est noir) s'écrit: «Tout oiseau non noir n'est pas un corbeau».

Confondre la «contraposition» et la «négation» d'une implication semble caractériser notre «logique interne». Faites l'expérience: demandez à votre entourage de formuler la négation de: «S'il pleut alors mon jardin est mouillé.» Plus de 99 fois sur cent, on vous répondra: «Mon jardin n'est pas mouillé, donc il ne pleut pas.» Débusquer la négation: «Il pleut et mon jardin n'est pas mouillé» ne nous est pas naturel. (Pour se «convaincre» qu'il s'agit de la bonne réponse, partons de la définition de l'implication:
[non ($p \Rightarrow q$)]; [non((non $p$) ou $q$)];
[non(non $p$) et (non $q$)]; [$p$ et (non $q$)], avec $p$=«il pleut» et $q$=«mon jardin est mouillé».)

Cette apparente infirmité de notre esprit se manifeste à nouveau dans l'expression, par exemple, de la négation de «Toutes les Anglaises sont rousses». Entre les deux énoncés «Aucune Anglaise n'est rousse» et «Il existe au moins une Anglaise non rousse», l'intuition nous invite à choisir le premier alors que le second fournit logiquement la bonne réponse. «Un chat, s'étant assis une fois sur une plaque brûlante, évitera de s'asseoir à nouveau sur une plaque brûlante. Il se gardera aussi des plaques froides, d'ailleurs.» Mark Twain. Cette logique du «chat échaudé qui craint l'eau froide» nous est précieuse. Elle nous commande, pour notre survie, de nier «Tous les serpents sont inoffensifs» par «Aucun serpent n'est inoffensif». Faux, mais efficace.

***Golconde* de René Magritte (1953). Il pleut et mon jardin n'est pas mouillé.**

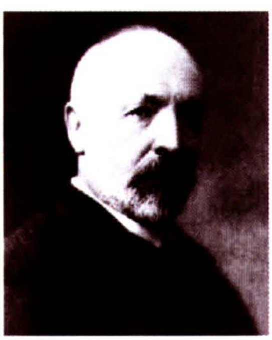
La logique «appliquée» peut aussi être amusante. La contraposée de «Si tu as soif, alors il y a de la bière au frais», n'est-elle pas «S'il n'y a pas de bière au frais, alors tu n'as pas soif»? À la question «Est-ce une fille ou un garçon?», la réponse de la logicienne qui vient d'accoucher ne doit-elle pas être «Oui»?

Trop stricte, simplificatrice ou inadaptée, la logique «classique» est donc un outil médiocre lorsqu'il s'agit d'affronter la complexité de la «vie quotidienne». Son champ d'application naturel se limite à l'informatique et aux mathématiques où elle continue à poser de redoutables énigmes.

**D. B.**

# Logique et théorie des ensembles

**Née d'une lente élaboration dans l'esprit des plus éminents mathématiciens, une idée étonnante a germé puis s'est cristallisée et développée depuis la fin du XIXe siècle sous le nom de Théorie des ensembles. Des liens étroits vont vite se tisser entre cette théorie et la logique.**



**Georg Cantor**

*L'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes est paradoxal.*

L'idée étonnante, formalisée par Georg Cantor ? Ce qui compte en mathématiques, c'est moins la nature des objets étudiés (points, droites, nombres, suites, fonctions, vecteurs, matrices, etc.) que les relations qui existent entre ces objets et les propriétés qu'ils vérifient.
Ainsi, dans une boutade restée célèbre, David Hilbert affirmait qu'en géométrie, « au lieu des mots *point*, *droite* et *plan* on pouvait aussi bien dire *chaise*, *table* ou *verre de bière* ». Dès lors, l'attitude qui fut adoptée consista à étudier des structures et des relations sur des ensembles d'objets, sans se préoccuper de la nature de ces objets, lesquels furent baptisés éléments de l'ensemble qu'ils forment.

Ces *mathématiques abstraites*, d'abord qualifiées de *modernes*, sont certainement appelées à durer longtemps…

## Définition naïve des ensembles

Un *ensemble* est constitué d'une *collection* d'objets (au sens du mot collecter : *rassembler*). En pratique, on peut le définir en *extension*, ce qui consiste à énumérer entre deux accolades la liste de ses éléments, ou en *compréhension*.
Dans ce deuxième cas on se donne une propriété (dite caractéristique) que peut, ou non, satisfaire un *objet* $x$ .
$x$ sera élément de l'ensemble E (ou non) suivant qu'il vérifie (ou non) la propriété.
On parle d'*appartenance* :
$x \in E$ ($x \notin E$).
Quelques ensembles couramment utilisés en mathématiques :
$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ des nombres fractionnaires (ou rationnels), $\mathbb{R}$ des nombres réels, $\mathbb{C}$ des nombres complexes, **P** des points du plan… sans ou-

E. Zermelo et son chien, ensemble.

blier l'ensemble n'ayant aucun élément appelé ensemble vide et noté ∅.

## Le paradoxe de Russell

D'emblée, des questions simples mais cruciales viennent à l'esprit. *Un ensemble peut-il être élément de lui-même ? Peut-on envisager un ensemble* U *dont les éléments seraient tous les ensembles ?*

Dans l'euphorie des débuts d'une théorie naissante, les mathématiciens et logiciens n'y ont pas vu d'objection.

Leur enthousiasme fut vite stoppé lorsque Bertrand Russell leur opposa le paradoxe suivant :

Considérons *l'ensemble* E *constitué par tout les ensembles qui ne sont pas élément d'eux-mêmes*.

Question : E est-il élément de E ? La réponse est troublante !

Si $E \in E$ alors il vérifie la propriété qui caractérise les éléments de E, c'est-à-dire $E \notin E$

Si $E \notin E$ , E n'est pas élément de lui-même et on peut affirmer $E \in E$. On n'en sort pas !

## Axiomatisation

Une conséquence notable de ce paradoxe est l'émergence de la logique des propositions. Une affirmation faisant intervenir une lettre ($x$ ou autre), qu'on désigne par le mot argument est encore appelée relation (ou forme propositionnelle) à un argument. Elle devient une assertion quand $x$ est un type d'objet mathématique déterminé. Par exemple « T est isocèle » devient une assertion si T est un triangle ; assertion qui peut être alors vraie ou fausse.

Si $R(x)$ désigne une relation à un argument, à la question : existe-t-il un ensemble E dont les éléments seraient tous

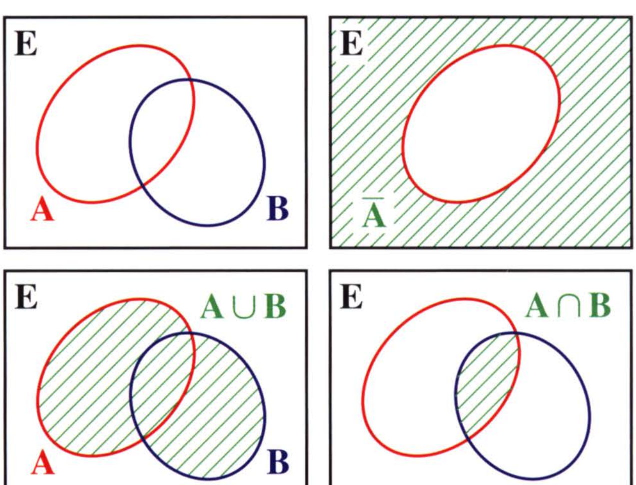
## Exemples d'ensembles définis en extension

E = {2 , z , +}
F = {– 5, 148, E , $t$, $u$, $a$}
G = {$a$, 5, G}.
On remarque que l'ensemble E est élément de F ... et l'ensemble G est élément de lui-même !

## Exemple d'ensemble défini en compréhension

L'ensemble K des carrés d'entiers naturels.
25 ∈ K tandis que 44 ∉ K. La propriété qui doit être vérifiée par les objets $x$ de K s'énonce : P($x$) = « il existe un entier naturel dont $x$ est le carré. » Les éléments de K sont les $x$ qui vérifient P($x$).
Cela s'écrit : K = {$x$ ∈ N / P(x)}.

les objets $x$ vérifiant R($x$), la réponse n'est donc pas forcément OUI ! Elle est non pour R($x$) = « $x$ est un ensemble », OUI si R($x$) s'énonce « $x$ est un entier qui est le cube d'un entier ».
On appelle relation collectivisante une relation R($x$) pour laquelle la réponse est OUI. Ainsi la relation « $x$ est un ensemble » n'est pas collectivisante.
La théorie des ensembles va s'affiner en s'appuyant sur des axiomes qui ne conduisent pas à une contradiction. Ainsi, un ensemble E étant fixé, elle admet que la relation « $x$ est une partie de E » est collectivisante.
On note $\mathcal{P}$(E) l'ensemble qu'elle définit, ensemble des parties de E. Une partie (ou sous-ensemble) A de E est un ensemble A tel que tout élément de A est élément de E. Évidemment l'ensemble vide est une partie de tout ensemble E. Dans cet ensemble $\mathcal{P}$(E), des opérations très simples « surgissent spontanément ». Ainsi associe-t-on à deux parties A et B de E leur intersection A ∩ B et leur réunion A ∪ B. Ce sont encore des parties de E , la première est constituée des éléments communs à A et B tandis que la seconde s'obtient en collectant tous les éléments de A et de B.
De plus, on admet (c'est le *schéma de compréhension*) : si E est un ensemble et R($x$) une relation quelconque, que la nouvelle relation à un argument « $x$ ∈ E et R($x$) » est collectivisante et définit donc une partie A de E, notée {$x$ ∈ E ; R($x$)}. Cet axiome permet de définir le complémentaire, $\overline{A}$, de A dans E par $\overline{A}$ = {$x$ ∈ E ; $x$ ∉ A}.
C'est aussi lui qui justifie que les cubes d'entiers forment un ensemble (voir plus haut).
Il existe différentes axiomatisations de la théorie des ensembles.
La plus communément utilisée est celle de Zermelo-Frænkel qui comprend neuf axiomes. (Voir l'encadré « Les axiomes de la théorie ZFC ».)



## Propositions logiques et ensembles

La logique mathématique met en jeu, on l'a vu, des phrases dites *assertions* (ou *propositions*). Chaque assertion P possède sa *négation* notée *non* P, une et une seule de ces assertions étant vraie (voir l'article sur le tiers exclu).

On utilise les connecteurs logiques « et » et « ou » pour fabriquer à partir de deux assertions, notées l'une P l'autre Q, de nouvelles assertions (voir les articles intitulés « Les règles de déduction » et « L'implication ») :

« P et Q » est vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies simultanément, et n'est vraie que dans ce cas.

« P ou Q » est vraie lorsque l'une des deux assertions P et Q est vraie (à plus forte raison si les deux sont vraies : le « ou » n'est pas exclusif).

On peut aussi résumer la situation en disant que « P ou Q » n'est fausse que si les deux sont fausses.

On instaure ainsi une sorte de calcul sur les assertions (ou propositions) : le *calcul propositionnel*.

On peut établir un lien étroit entre le calcul propositionnel et les opérations sur les parties d'un ensemble. Il suffit pour cela d'imaginer un ensemble E non vide dont on désignera un élément par $z$.

À chaque partie F de E, on associe l'assertion « $z \in$ F ». L'assertion associée au complémentaire $\overline{\text{F}}$ de F dans E est donc « $z \notin$ F » négation de la précédente.

Si A et B sont deux parties de E auxquelles on associe les propositions

## Les axiomes de la théorie ZFC

**1• Axiome d'extensionnalité**

Si les ensembles X et Y ont les mêmes éléments alors X = Y.

**2• Axiome de la paire**

Étant donnés deux ensembles X et Y, il existe un ensemble, noté {X, Y}, qui a X et Y comme éléments et eux seulement.

**3• Axiome de la somme**

Pour tout ensemble X, il existe un ensemble Y = $\cup$X dont les éléments sont les éléments des éléments de X.

**4• Axiome de l'ensemble des parties**

Pour tout ensemble X, il existe un ensemble $\mathcal{P}$(X) dont les éléments sont toutes les parties de X.

**5• Schéma d'axiomes de séparation**

Si P est une propriété de paramètre $p$ alors pour tout X et tout $p$ il existe un ensemble Y = {$u \in$ X : P($u$, $p$) qui contient tous les $u \in$ X ayant la propriété P.

**6• Schéma d'axiomes de remplacement**

Si une classe F est une fonction, alors pour tout X il existe un ensemble Y = F(X) avec F(X) = {F($x$) : $x \in$ X}.

**7• Axiome de régularité**

Cet axiome technique interdit, par exemple, l'existence d'ensembles X vérifiant X $\in$ X.

**8• Axiome de l'infini**

Il existe un ensemble infini.

**9• Axiome du choix**

Pour tout ensemble X, il existe une application $f$ (*fonction de choix*) de l'ensemble des parties non vides de X dans X, telle que, pour toute partie $x$ non vide de X, $f(x) \in x$.

## Assertions indémontrables

On suppose d'une part qu'on a numéroté de 1 à l'infini toutes les assertions $A_1$, $A_2$, ... que d'autre part on a numéroté de 1 à l'infini certaines partie distinctes de $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ privé de 0) $P_1$, $P_2$, ... On les appelle les parties répertoriées. Un entier $n$ est dit remarquable quand $n \in P_n$.
Si $A_m$ est l'assertion : « $n$ est remarquable » $m$ est dit le conjugué de $n$. Tout ceci de façon que :
(i) Les numéros des assertions démontrables forment une partie répertoriée.
(ii) Les numéros des assertions réfutables forment une partie répertoriée.
(iii) Le complémentaire dans $\mathbb{N}^*$ d'une partie répertoriée, est une partie répertoriée.
(iv) Pour toute partie répertoriée X il existe une partie répertoriée Y telle que tout $n$ dans Y a son conjugué dans X et tout entier $n$ hors de Y a son conjugué hors de X.

Considérons alors la partie répertoriée P des assertions démontrables et X son complémentaire (un entier k est dans X quand $A_k$ n'est pas prouvable).
Soit Y associée à X (qui est une partie répertoriée d'après (iii)) par (iv) : soit $n$ le numéro de Y, et désignons par $m$ le conjugué de $n$.
Si $n$ est hors de Y alors $n$ n'est pas remarquable, $m$ est hors de X donc dans P et $A_m$ = « $n$ est remarquable » est donc prouvable alors qu'elle est fausse !!! Cela ne se peut pas.
Par conséquent, $n$ est dans Y. Alors $n$ est remarquable, $m$ est dans X et $A_m$ = « $n$ est remarquable » n'est donc pas prouvable et cependant elle est vraie.

P = « $z \in A$ » et Q = « $z \in B$ », on se convainc facilement qu'à $A \cap B$ correspond l'assertion « P et Q », alors qu'à $A \cup B$ correspond « P ou Q ».
La proposition « $P \Rightarrow Q$ » sera, quant à elle, vraie quand $A \subset B$.
Un célèbre écrivain, Lewis Carroll, fit merveille dans la résolution de problèmes de logique exploitant cette relation entre théorie des ensembles et calcul propositionnel.
Sauriez-vous, en vous appuyant sur cette correspondance, démontrer l'assertion surprenante suivante : « Si R($x$) est une relation à un argument sur un ensemble E, il existe $z$ dans E tel que : R($z$) implique (pour tout $x$, R($x$)) » ?
Conséquence inattendue : si vous entrez dans n'importe quel bar de la planète, il s'y trouvera un individu, appelons le Zozo, tel que si Zozo est en train de boire, tout le monde dans le bar est en train de boire (voir encadré « À votre santé ! »).

## À votre santé !

• Si « pour tout $x$, R($x$) » est vraie, toute assertion l'implique, en particulier « il existe $z$ dans E tel que : R($z$) ».
• Sinon, c'est qu'il existe $z$ tel que R($z$) soit faux. Alors R($z$) vraie implique n'importe quoi !

### Le vrai, le faux, l'indécidable et l'indémontrable

D'autres horizons nouveaux s'ouvrent avec la théorie des ensembles, dont certains bouleverseront les fondements des mathématiques en introduisant des notions révolutionnaires : les nombres transfinis (voir *Tangente* hors-série 13, *L'infini*), l'axiomatique et la décidabilité d'une proposition, la démontrabilité.
Ces deux dernières sont évidemment des composantes incontournables de la logique.

Quand il élabore sa théorie, le mathématicien admet l'existence de certains objets (les mots qui les désignent sont dits termes primitifs) qui permettent de définir des termes dérivés. Parmi les différentes assertions qu'il peut énoncer alors, certaines sont décrétées comme vraies (ce sont les axiomes de la théorie : ils doivent être non contradictoires et indépendants). Par des procédés de démonstration mêlant la logique et des techniques purement mathématiques (comme, par exemple, le raisonnement par récurrence), il peut démontrer d'autres assertions.

## L'hypothèse du continu

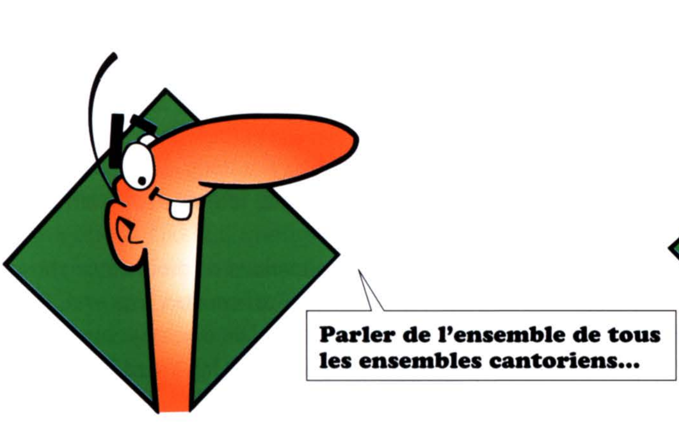
Depuis Cantor, on sait que le cardinal de l'ensembles des entiers naturels $\mathbb{N}$ est strictement inférieur à celui de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (il existe un application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, mais pas l'inverse). Autrement dit, bien que les deux ensembles soient infinis, on ne pourra jamais « numéroter » les nombres réels. On dit que ces derniers ne sont pas dénombrables.
**Mais existe-t-il des ensembles dont le cardinal est strictement compris entre les deux ?**
On sait depuis Paul Cohen que supposer cette existence, ou supposer le contraire (*l'hypothèse du continu*), reste non contradictoire.

Deux questions se posent alors :
– toute assertion est-elle soit vraie soit fausse ?
– toute assertion vraie peut-elle être ainsi démontrée ?
De manière étonnante, la réponse aux deux questions s'avère négative !

En 1931 le logicien Kurt Gödel fit une découverte étonnante (voir l'article « La chute de la maison Hilbert ») : « Il existe une assertion vraie indémontrable » ! Mais quel est donc ce distinguo subtil entre assertion vraie et assertion indémontrable ? Et comment peut-on dire qu'une assertion est vraie alors qu'elle est indémontrable ? L'encadré ci-contre vous donne un aperçu d'une démonstration de ce fameux théorème d'incomplétude de Gödel. Une autre approche vous est présentée en page 50.

En 1964, un mathématicien et logicien américain, Paul Cohen, a démontré que certaines propositions étaient indécidables, on ne peut ni les démontrer ni les réfuter. Elles ou leur négation sont donc des assertions vraies indémontrables. Les admettre définit un nouvel axiome des mathématiques. Admettre leur négation, c'est construire une autre mathématique, tout aussi cohérente que la précédente (voir encadré « L'hypothèse du continu »).

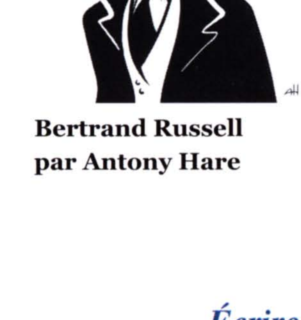
**G. C.-Z.**




par Gérard Cohen-Zardi

# Le moteur logique : l'implication

**Le moteur de toute démonstration, c'est ce qui permet d'affirmer que, quelque chose étant vrai, autre chose en découle nécessairement. Cette idée se formalise avec la notion d'implication, dont certains aspects contre-intuitifs ne doivent pas être négligés.**



**Bertrand Russell par Antony Hare**

Un boxeur dit à son manager : « Je voudrais concourir dans la catégorie des poids légers aux prochains Jeux olympiques. – Cela implique que tu perdes 2 kg d'ici-là », lui répond celui-ci. Cette situation du langage quotidien fait apparaître la notion logique d'implication, qui recèle plus de subtilités qu'il n'y paraît.

Le cadre général de l'implication semble assez simple : à chaque fois qu'une affirmation est vérifiée, une autre affirmation (phrase, assertion, proposition) l'est nécessairement aussi.

On dit que la première *implique* la seconde.

*Écrire « H implique C » n'affirme pas automatiquement que H est vraie.*

Si l'on désigne la première par H (pour *hypothèse*) et la seconde par C (pour *conclusion*), on dit que « H implique C », ou bien que « si H alors C », ou encore que C est une condition nécessaire à H, ou enfin que H est une condition suffisante de C.

On la représente sous forme symbolique de la façon suivante :

$$H \Rightarrow C.$$

Ainsi pour un entier, la propriété C : « être multiple de 3 » est une condition nécessaire à la propriété H : « être multiple de 12 ». En revanche, elle n'est pas suffisante, puisqu'il existe des entiers multiples de 3 mais pas de 12 (comme 15 en est un exemple).

De même, le simple fait pour notre boxeur de perdre 2 kg est certes nécessaire à ses projets, mais ce seul régime ne lui garantit pas qu'il sera sélectionné pour participer aux Jeux…

## Nécessaire, pas toujours suffisant

En général, quand on dit quelque chose, c'est qu'on l'affirme comme vrai. Bien sûr, il arrive qu'on dise des choses dont on est incertain de la véracité, ou même que l'on sait être fausses. Cela se produit également en mathématiques : dans ce cas, on fait immédiatement précéder (ou suivre) l'énoncé concerné d'un commentaire comme « examinons si ceci est vrai » ou « l'énoncé suivant est faux ... » Le logicien, en revanche, ne s'intéresse pas à la véracité des hypothèses : pour lui, écrire « H implique C » n'affirme pas automatiquement que H est vraie, mais seulement que si H est vraie, alors C aussi. « H implique C » est l'affirmation logique que l'un des deux cas suivants (ou les deux) se produit :

1) C est vraie, 2) H est fausse.

Ce second cas est le plus étrange : comment une hypothèse fausse peut-elle impliquer quoi que ce soit ? C'est le logicien et philosophe anglais Bertrand Russel (1872-1970) qui, le premier, au cours d'une conférence de presse, a expliqué pourquoi. Il donna comme exemple : « Si 2 et 2 font 5, alors je suis le pape ». On raconte qu'il aurait alors été pris à parti par un journaliste qui lui aurait demandé de le démontrer. Bertrand Russel aurait répondu : « Si 2 et 2 font 5 alors, comme 2 + 2 font aussi 4, on a 5 = 4 et donc 2 = 1. Le pape et moi-même sont deux, si 2 = 1 le pape et moi sommes un. Donc je suis le pape. »
En conséquence, si H est fausse alors « H implique C » est vrai quel que soit le contenu de C. Attention, cela ne signifie pas que C est vraie à tous les coups : Bertrand Russel n'a jamais prétendu être le pape, mais seulement que « 2 et 2 font 5 implique que je suis le pape ». On peut se convaincre du bien fondé de ce choix en cherchant dans quels cas l'énoncé logique « H implique C » doit être faux, c'est-à-dire quand H n'implique pas C. Il est raisonnable de considérer que c'est le cas lorsque H est vraie et C est fausse. Il faut bien alors considérer que dans tous les autres cas (y compris quand H est fausse) « H implique C » est vraie.

## Si vous êtes le prince de Galles alors je suis le pape

Une anecdote historique confirme le bon sens populaire sur ce délicat sujet de l'implication. On raconte qu'avant la guerre, le prince de Galles aimait beaucoup à fréquenter, dit-on, certains lieux malfamés de Paris. Embarqué dans un commissariat au beau milieu de la nuit lors d'une descente de police, il aurait affirmé être le prince de Galles, ce à quoi le commissaire lui aurait répliqué : « Si vous êtes le prince de Galles alors je suis Napoléon. » Une fois de plus, la phrase n'affirme pas la validité de la conclusion (« Je suis Napoléon »), mais est destinée à souligner la fausseté de l'hypothèse, du moins selon ce qu'en pensait, à tort, le policier.
Pour prouver que « H implique C » est vrai, la première idée est de partir de H et, par une suite de déductions qui dépendent du contexte mathématique dans lequel on se trouve, on établit C. Toutefois, il arrive qu'on utilise un autre type de démonstration, en exploitant le fait qu'à toute affirmation du type « H implique C » est associée sa contraposée : « Si C est faux, alors H est faux », qui est un énoncé équivalent au précédent. Cela fournit, à l'occasion, une méthode de démonstration : plutôt que de prouver que, sous l'hypothèse H, on a toujours C qui est vérifiée, on montre que, si C est fausse, alors H aussi. La reformulation sous forme de contraposée rend parfois bien des services au mathématicien qui sèche sur un problème.

**G. C.-Z.**

### Travaux pratiques

Parmi les énoncés ci-dessous, distinguer ceux qui sont vrais de ceux qui sont faux.
1) Si 5 est diviseur d'un entier donné *n*, alors 10 est aussi diviseur de *n*.
2) Si un triangle est équilatéral, alors deux de ses angles sont égaux.
3) Si un entier est divisible par 5 et par 11, alors il est divisible par leur produit (55).
4) Si un entier est divisible par 12 et par 15 alors il est divisible par leur produit (180).
5) Si 2 et 2 font 5 alors la lune est habitée.

**Réponses :** 1) F, 2) V, 3) V, 4) F, 5) V.

par Benoît Rittaud

# Le tiers exclu

**Pour s'assurer de quelque chose, un moyen consiste à prouver que le contraire n'a pas lieu. Cette technique de démonstration, dont la mise en pratique peut parfois dérouter, est extrêmement utile.**

Au moins en mathématiques, on ne peut pas être une chose et son contraire. Ainsi, lorsqu'on veut montrer que quelque chose est vrai, une première étape peut consister à montrer que son contraire est faux. « Première étape ? s'étonnera-t-on. En existe-t-il une seconde ? » Non, à condition d'admettre le *principe du tiers exclu* qui, comme son nom l'indique, pose qu'entre un énoncé et son contraire, il n'y a pas de troisième possibilité. Soit A, soit non-A, un point c'est tout.

## Si ce n'est toi...

*Le principe du tiers exclu pose qu'entre un énoncé et son contraire, il n'y a pas de troisième possibilité.*

Le raisonnement par l'absurde est un exemple d'application du principe du tiers exclu : il consiste à supposer vraie une hypothèse dont on veut en fait démontrer la fausseté, pour ensuite, par le biais d'un raisonnement logique, conduire à une incohérence prouvant que l'hypothèse de départ était fausse et, donc, que son contraire est vrai (par le principe du tiers exclu, donc). Mais il existe d'autres types d'applications de ce principe, dont un exemple tout à fait saisissant est la démonstration du fait suivant :

THÉORÈME – **Il existe deux nombres irrationnels, $a$ et $b$, tels que $a^b$ est un nombre rationnel.**

Rappelons qu'un nombre est dit *irrationnel* lorsqu'il n'est pas possible de l'écrire comme le résultat de la division de deux nombres entiers (c'est ainsi que $\pi$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels). La plupart du temps, le seul moyen de démontrer ce type de théorème qui pose l'existence d'un objet donné est de construire effectivement un exemple d'un tel objet. La construction effective d'un nombre rationnel de la forme $a^b$ ($a$ et $b$ devant eux-mêmes être irrationnels) est une question extrêmement difficile, qui a mobilisé les efforts de grands mathématiciens du XXe siècle comme Gel'fond et qui ont culminé avec les résultats d'Alan Baker sur les « formes

## Trois principes

Le principe de *non-contradiction* est souvent confondu avec le principe du tiers exclu. Étant donné une proposition P et sa négation non P, le premier affirme qu'au plus une des propositions est vraie, le deuxième qu'au moins l'une est vraie. La conjonction des deux principes est distincte de chacun d'entre eux ; elle avance qu'une et une seule des propositions P et non P est vraie.
En d'autres mots :

PNC : non(P et non P) ;
PTE : P ou (non P) ;
PNC et PTE : (non(P et non P) et (P ou (non P)), soit P $\overline{\text{ou}}$ (non P) avec $\overline{\text{ou}}$ : ou exclusif.

En logique classique (bivalente), ces trois principes distincts sont équivalents puisque chacun d'entre eux est une tautologie.
En revanche, pour d'autres types de logique (trivalente, etc.), les principes de non-contradiction et du tiers exclu ne sont plus nécessairement équivalents.

linéaires en logarithmes ». Or le présent théorème n'en demande pas tant : tout ce qu'on veut, c'est prouver qu'un rationnel de la forme $a^b$ existe.
Une façon de faire pourrait consister à « peser » l'ensemble des nombres de la forme $a^b$ pour montrer qu'il est « plus lourd » que celui des nombres irrationnels, ce qui impliquerait que, dans le tas, s'en trouverait au moins un rationnel. Cette technique s'apparente un peu à celle qu'on peut utiliser pour vérifier que la boîte de biscuits n'est pas vide : on la soulève et, si elle est pesante, c'est qu'il y a des biscuits dedans, même si on ne sait pas forcément si ce sont des biscuits au chocolat ou à la vanille puisqu'on s'assure de la présence de biscuits sans en sortir un seul de la boîte. Malheureusement, cette idée est inopérante ici, car il n'y a pas de « différence de poids » qui fasse pencher la balance en faveur des rationnels.
Heureusement, il existe un moyen, d'ailleurs beaucoup plus simple, de trancher la question. Considérons les nombres $x=\sqrt{2}$ et $y=x^x$. Comme nous l'avons rappelé plus haut, le nombre $x$ est irrationnel (la démonstration de ce fait est un grand classique des démonstrations par l'absurde). Le nombre $y$ est donc construit comme le $a^b$ convoité du théorème. Mais $y$ est-il rationnel ?
La réponse est non, mais la preuve de ce fait est extrêmement compliquée, elle provient des travaux de Gel'fond mentionnés plus haut.
Considérons donc qu'on ne sait pas si $y$ est ou non rationnel, et intéressons-nous à un troisième nombre, le nombre $z=y^x$, véritable « botte secrète » de la démonstration.

Ce nombre s'écrit $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ et, d'après les règles habituelles de composition des exposants, on a donc :

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \\ &= (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ &= (\sqrt{2})^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

En particulier, le nombre $z$ est rationnel (on peut l'écrire $z=2/1$, si l'on veut à tout prix une fraction).
Le nombre $z$ est de la forme $y^x$ avec $x$ irrationnel : ainsi, si $y$ est lui aussi irra-

tionnel, le théorème est démontré ($z$ fournissant un nombre de la bonne forme). Justement, objectera-t-on, le fait que $y$ soit rationnel est supposé inconnu. C'est précisément là que les Athéniens s'atteignirent : le nombre $z$ fournit l'exemple dans le cas où $y$ est irrationnel mais, si tel n'est pas le cas, alors c'est $y$ lui-même qui fournit l'exemple.

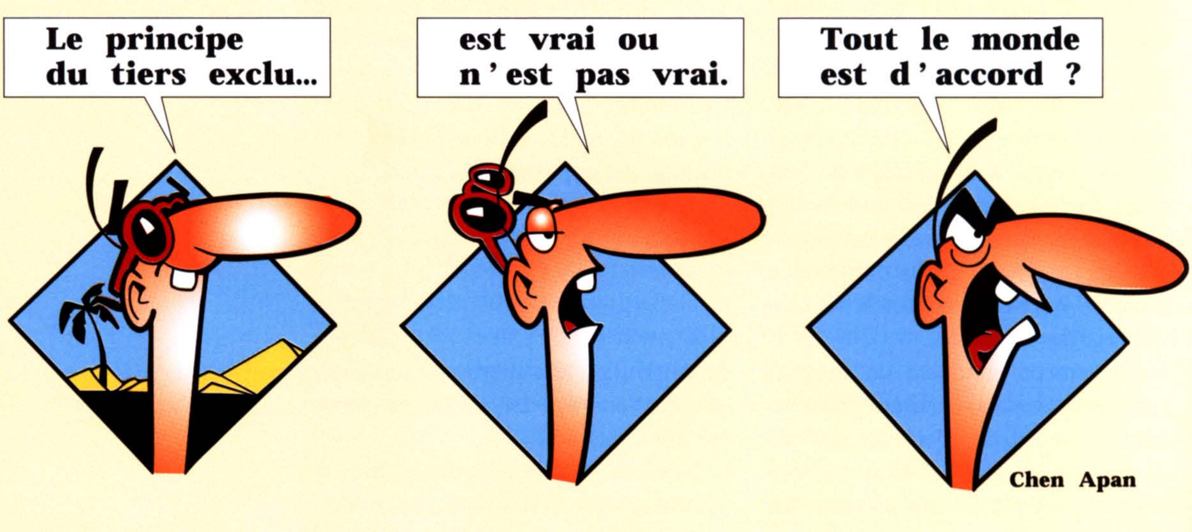
Nous avons donc montré que l'un des deux nombres $y$ et $z$ (et un seul des deux) démontre le théorème, sans donner la moindre piste pour savoir lequel des deux est le bon ! Dans cette preuve, le tiers exclu a été employé pour pouvoir disposer de l'alternative : $y$ est rationnel ou irrationnel. L'emploi du tiers exclu a ainsi conduit à une preuve non constructive. Le théorème que nous avons démontré est donc plutôt le suivant : « il n'est pas vrai qu'il n'existe pas de nombres irrationnels $a$ et $b$ tels que $a^b$ soit rationnel. » En d'autres termes, on n'a pas vraiment su poser un exemple sur la table pour confirmer le théorème, mais gare aux ennuis si vous niez la possibilité qu'un tel exemple existe.

## ... c'est donc ton frère

Certains logiciens ont été gênés par le principe du tiers exclu, notamment ceux pour qui seule une construction effective d'un objet mathématique autorise à le considérer comme véritablement existant. Pour eux, d'une certaine manière, la négation d'une non-existence est une preuve « par défaut » n'assurant pas le même statut à l'objet considéré qu'une vraie construction. En clair, ces logiciens n'acceptent de parler de quelque chose que lorsqu'ils l'ont devant eux, sous les yeux.

Il a été imaginé des types de logiques dans lesquelles non-non-A n'est pas la même chose que A, ce qui interdit du même coup l'emploi du principe du tiers exclu. Si ce genre de construction abstraite présente un intérêt théorique et intellectuel certain, cela n'empêche pas de devoir considérer le principe du tiers exclu comme un outil puissant dont les mathématiciens n'ont pas fini de se servir.

**B. R.**



# Le projet de Hilbert




## Grandeur et misère du projet de Hilbert

**À partir du XIX[e] siècle, les mathématiciens se penchent sur les fondements de leur discipline et s'attachent à s'assurer de leur solidité. Au début du XX[e] siècle, tout s'écroule. De nouvelles découvertes viennent bouleverser des siècles de certitudes. Deux camps s'opposent alors : les « intuitionnistes » ou « constructivistes », et les « formalistes » dont le chef de file est David Hilbert. En pleine ère industrielle, Hilbert rêve d'une mécanisation des mathématiques. Les axiomes en seraient la matière première, la logique la machine et les théorèmes les produits finis. Son programme suppose une démonstration absolue de la non-contradiction des mathématiques. Gödel sonnera le glas de ce projet en prouvant qu'un système formel ne peut se démontrer lui-même. Turing, en mettant en évidence l'incalculabilité de certains programmes, confirmera les limites du rêve de Hilbert.**

# Le projet de Hilbert

**Le début du XXe siècle est marqué par la crise des fondements. Depuis les découvertes de Cantor, les mathématiques – la science autrefois la plus sûre – semblent bâties sur du sable. Pour les fonder de façon solide, Hilbert propose de généraliser et d'améliorer la méthode axiomatique d'Euclide.**

En 1899, David Hilbert publie *Grundlagen der Geometrie* (*les Fondements de la géométrie*) où il propose une axiomatique de la géométrie indépendante de l'expérience sensible. Pour illustrer cette idée, il aimait dire que l'on pourrait y remplacer le mot « point » par « bock de bière » et le mot « droite » par « tabouret » sans rien changer à sa théorie. Ainsi, par deux bocks de bières, il passe un et un seul tabouret ,ce qui nous ramène d'ailleurs au monde sensible soit dit en passant. Serait-il bien raisonnable de boire deux bocks de bière sans tabouret pour s'asseoir ensuite ? Pour Hilbert, toutes les vérités de la géométrie pouvaient se déduire de ses axiomes au moyen d'un raisonnement logique et tous les domaines des mathématiques pouvaient être traités de la même façon, autrement dit :

mathématiques = axiomatique + logique.

Cette idée que les vérités mathématiques découlent toutes d'un nombre fini d'axiomes et de règles de déduction logique correspond bien à son époque, l'ère industrielle – celle qui croyait aux lendemains qui chantent et aux solutions finales. L'idéal de Hilbert était de produire les théorèmes de mathématiques comme on fabrique les biens industriels, mécaniquement.

Pour le grand public, le nom de David Hilbert n'est pas resté attaché à ces questions de géométrie mais plutôt aux

***Pour Hilbert, toutes les vérités de la géométrie pouvaient se déduire de ses axiomes au moyen d'un raisonnement logique, et tous les domaines des mathématiques pouvaient être traités de la même façon.***

**Le club mathématique de Göttingen, en 1902. Au centre de la table se trouve Felix Klein ; David Hilbert est à sa gauche.**

vingt- trois problèmes pour le XX^e siècle qu'il a proposé lors du congrès des mathématiciens de 1900. Ils ont fait date car ils étaient particulièrement bien choisis. En particulier, pour conforter son idée axiomatique, il proposa de démontrer la consistance de l'arithmétique, c'est-à-dire qu'à partir des axiomes de l'arithmétique et des règles de déduction formelles, on ne peut avoir à la fois une assertion et son contraire.

Il s'agit de bon sens direz-vous, « 2 + 2 = 5 » ou non ? Pourtant personne ne l'avait démontré avant que Hilbert pose ce problème… et Gödel démontrera trente ans plus tard que c'est faux ! En fait, il démontra bien plus : dans tout système axiomatique, il existe des assertions vraies mais improuvables.

## Improuvable mais vrai

En tenant compte du temps et de l'énergie qui nous sont comptés, il est facile de démontrer qu'il existe des assertions vraies mais humainement improuvables. On dit que de telles assertions improuvables (vraies ou fausses) sont indécidables. Pour cela, il suffit de considérer la notion de longueur d'une preuve. Comme il existe une infinité d'assertions prouvables (par exemple les assertions du type « le nombre *n* est premier ») et que leurs preuves sont distinctes, il en existe d'aussi longues que l'on veut. On peut considérer qu'au-delà d'une certaine longueur ($10^{100}$ par exemple, ce qui fait plus que le nombre d'électrons dans l'univers), une preuve est humainement inaccessible même avec l'aide d'un ordinateur.

**Giuseppe Peano**

*Tous les résultats vrais d'une théorie ne sont pas prouvables à partir des seuls axiomes de cette théorie et du raisonnement logique.*

Cela n'est que bon sens mais Gödel affirme bien plus que cela. L'arithmétique de Peano («Les axiomes de Peano») contient des assertions vraies et improuvables. Pour démontrer ce résultat, on pourrait dénombrer les assertions prouvables et les autres. Plus précisément, on peut imaginer de numéroter les assertions prouvables en tenant compte de leur longueur par exemple. Ainsi, on obtient une assertion numéro 1, une assertion numéro 2, etc. Autrement dit, l'ensemble des assertions prouvables est dénombrable comme l'ensemble des nombres entiers. En revanche, il est relativement facile d'imaginer que l'ensemble des assertions vraies n'est pas dénombrable. Ainsi, l'ensemble des assertions vraies ne peut se réduire à l'ensemble des assertions prouvables.

Gödel ne procède pas ainsi. Il est plus explicite. De façon plus constructive, on peut effectivement exhiber des assertions vraies improuvables !

L'exemple donné en encadré peut faire penser que le problème tient à ce que l'on a «oublié» un axiome (ici celui du choix) dans l'arithmétique de Peano. Vous pouvez l'ajouter, il existera d'autres assertions improuvables dans ce nouveau système et ainsi de suite. L'ajout de nouveaux axiomes ne peut permettre de contourner le résultat de Gödel.

## Gödel et les menteurs

Le problème fondamental derrière le théorème de Gödel est celui de l'autoréférence : un système formel ne peut se démontrer lui-même. La démonstration par Gödel de son théorème est d'ailleurs une amélioration du raisonnement fallacieux suivant dû à un logicien français du nom de Richard. Les assertions sur les entiers peuvent être ordonnées suivant l'ordre lexicographique.

Imaginons donc que nous les écrivions toutes dans cet ordre. Soit $A_n$ l'assertion portant le numéro $n$. Appelons richardiens les nombres $n$ ne vérifiant pas $A_n$. Cela a un sens puisque $A_n$ est une assertion qu'un entier peut vérifier ou non (et pourquoi pas $n$ ?). Etre richardien est elle-même une assertion. Elle porte donc un numéro, soit $n$. Ce nombre est-il richardien ?

Si n est richardien alors, par définition, il ne vérifie pas $A_n$ et donc il n'est pas richardien. Si $n$ n'est pas richardien alors il vérifie $A_n$ donc il est richardien. Nous retrouvons le paradoxe du menteur affirmant «je mens». S'il dit la vérité, il ment et s'il ment il dit la vérité. La vérité si je mens, autrement dit.

Le côté fallacieux du raisonnement de Richard tient à l'auto-référence. Plus précisément, être richardien n'est pas une assertion de la liste de propriétés envisagées puisque sa définition suppose la construction préalable de cette liste. L'idée de Gödel est la même mais il réussit à écrire effectivement un énoncé arithmétique signifiant «cet énoncé est indémontrable» (voir *Le théorème de Gödel*, Ernest Nagel, Seuil).

Le rêve de Hilbert s'écroule : tous les résultats vrais d'une théorie ne sont pas prouvables à partir des seuls axiomes de cette théorie et du raisonnement logique.

## Turing et la ruine de la maison Hilbert

Dans le projet mécaniste de Hilbert, il reste l'espoir qu'une machine – un ordinateur en l'occurrence – puisse démontrer toutes les assertions prouvables d'une théorie. Certes, on connaît des démonstrateurs automatiques semblant capables de couvrir des domaines particuliers comme la géométrie élémentaire en dimension deux mais il est impossible d'en créer qui soit universel. En effet,

## Les axiomes de Peano

Peano ne définit pas l'ensemble des entiers naturels mais le décrit de la façon axiomatique suivante : $\mathbb{N}$ est un ensemble contenant au moins un élément (noté 0) dans lequel existe une application (notée *succ* pour successeur) vérifiant :

1) *succ* est injective, c'est-à-dire que, si $a \neq b$ alors $succ(a) \neq succ(b)$,

2) pour tout $a$, $succ(a) \neq 0$,

3) si E est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in E$ et $succ(E) \subset E$, alors $E = \mathbb{N}$.

L'addition de deux entiers se définit alors par itération de l'application *succ* :
$n + 0 = n$ et
$n + succ(m) = succ(n + m)$.

Cette définition est légitimée par l'axiome de récurrence (3).

De même, on définit la multiplication en itérant l'addition : $n \times 0 = 0$ et
$n \times succ(m) = n \times m + n$.

On peut alors démontrer toutes les propriétés élémentaires de ces deux opérations à partir des trois axiomes ci-dessus. On peut faire de même pour la notion de division euclidienne puis celle de nombre premier, etc.

imaginons un logiciel qui, à partir d'un système d'axiomes et de règles de déduction, produirait toutes les assertions prouvables les unes après les autres. On pourrait alors facilement le modifier pour qu'il s'arrête quand une assertion A est obtenue. Ainsi, s'il s'arrête, A est prouvable. S'il ne s'arrête pas, A est improuvable. Nous sommes donc amenés à nous poser le problème de l'arrêt des logiciels informatiques. Plus précisément, nous considérons ici des logiciels demandant l'entrée d'un texte au clavier et s'arrêtant après un certain temps en écrivant un texte à l'écran ou bouclant indéfiniment. Il s'agit d'un modèle simplifié mais très général. Qu'est-ce qu'un logiciel ? En fait, il s'agit d'un texte écrit dans un certain langage de programmation. Dans le jargon de l'informatique, on parle de son « code ». La nature de celui-ci et le langage dans lequel il est écrit importe peu pour l'argument qui suit. Dans ce même jargon, le texte entré au clavier est appelé l'argument du logiciel. Ceci précisé, nous pouvons-nous poser la question suivante :
Existe-t-il un logiciel L qui, prenant en entrée un logiciel X c'est-à-dire son « code » et un argument $x$, dirait si X s'arrête ou non pour l'entrée de l'argument $x$ ?
Sans le temps qui passe et nous dépasse, la question serait simple : il suffirait de rester planter devant son ordinateur et d'attendre ! Le problème est que l'on risque d'attendre longtemps. Et si le logiciel s'arrêtait demain ? La difficulté tient donc au temps. Ce que l'on désire, c'est un logiciel qui réponde dans un temps fini et raisonnable. Supposons donc qu'un tel logiciel L existe. Il retourne « oui » si un logiciel X s'arrête pour l'argument $x$ et « non » s'il boucle

***Dans le projet mécaniste de Hilbert, il reste l'espoir qu'une machine puisse démontrer toutes les assertions prouvables d'une théorie.***

## Une assertion vraie improuvable

Pour donner un exemple un peu naturel d'une assertion vraie mais improuvable avec les seuls axiomes de Peano, nous avons besoin de quelques définitions. Soit $k$ un entier et E une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant plus de $k$ éléments, nous considérons $E_k$ l'ensemble des parties à $k$ éléments de E. Soit $r$ un entier, nous nous intéressons aux coloriages à $r$ couleurs de $E_k$, c'est-à-dire aux applications $f$ de $E_k$ dans l'ensemble des couleurs (ou plutôt de leurs numéros) $\{1, 2, ..., r\}$. Si P est une partie à $k$ éléments de E, $f(P)$ est appelée sa couleur. Enfin, une sous-partie F de E est dite monochrome (pour un coloriage $f$) si toutes les parties à $k$ éléments de F ont même couleur. Ces définitions faites, nous pouvons formuler l'assertion en question : Pour tout couple $(k, r)$ d'entiers, il existe un entier $n$ tel que : pour tout coloriage à $r$ couleurs de l'ensemble des parties à $k$ éléments de $\{k+1, ..., n\}$, il existe une partie monochrome de $\{k+1, ..., n\}$ dont le plus petit élément est strictement inférieur au nombre d'éléments. Cette assertion peut être prouvée en utilisant l'axiome du choix, elle ne peut l'être avec les seuls axiomes de Peano. L'axiome du choix étant communément admis en mathématiques, cette assertion est considérée comme vraie mais improuvable dans l'arithmétique de Peano.

indéfiniment.

Plus précisément :

$L(X, x) \rightarrow$ « oui » si $X(x)$ s'arrête

$L(X, x) \rightarrow$ « non » si $X(x)$ boucle.

Construisons alors un autre logiciel P en utilisant L de la façon suivante. On donne comme informations à P le texte d'un logiciel X et une donnée $x$, P s'arrête si X ne s'arrête pas pour cette donnée $x$, P ne s'arrête pas si X s'arrête pour cette donnée $x$. Autrement dit, $P(X, x)$ consiste en :

1) exécuter $L(X, x)$
2) si $L(X, x)$ renvoie « non » alors arrêter
3) si $L(X, x)$ renvoie « oui » alors boucler indéfiniment.

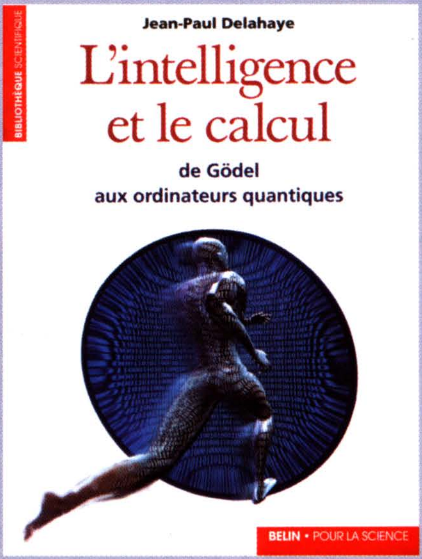
Que se passe-t-il si on applique P à lui-même ?

S'il s'arrête, il boucle et s'il boucle, il s'arrête !

Nous retrouvons le paradoxe du menteur. Un tel logiciel ne peut donc exister, ce qui ruine définitivement le projet d'Hilbert de mécanisation de la preuve. Tant mieux, sinon quel serait l'intérêt des mathématiques ?

**H. L.**

# L'intelligence et le calcul




**L'intelligence et le calcul.**
Jean-Paul Delahaye
Belin • Pour la science, 2002.
192 pages.

Voici un livre tout à fait épatant! Un livre sur l'intelligence dans ses relations avec la physique, les mathématiques, la logique et l'informatique qui nous rend plus intelligent (ou du moins qui nous en donne l'impression). Jean-Paul Delahaye était un remarquable vulgarisateur. Il sait, à merveille, susciter et maintenir l'intérêt sur des sujets souvent difficiles en mêlant érudition, humour, savoir-faire, imagination et connaissance approfondie des résultats les plus pointus de la recherche actuelle.

Cet ouvrage reprend 23 articles parus dans la revue *Pour la Science* et regroupés en 5 chapitres: « La complexité et le calcul »; « L'ordinateur du futur sera-t-il quantique? »; « L'ordinateur intelligent? »; « Raisonnements mathématiques »; « Indécidabilité et contradictions ». Tous ces thèmes fascinants sont abordés de manière magistrale et roborative.

Un exemple entre cent: « L'intelligence peut-elle être mécanisée? » Dans le chapitre intitulé « Les ordinateurs mathématiciens », J.-P. Delahaye introduit cette question en évoquant la conjecture de Robbins. Il s'agit d'un résultat technique lié à la structure des algèbres de Boole. De grands mathématiciens dont le logicien Alfred Tarski se sont cassés les dents sur ce problème difficile. Pendant plus de soixante ans, les progrès ont été très lents. En 1996, la conjecture est tombée. Sa preuve a été donnée par un programme mis au point par W. McCune. Cette démonstration automatique est un pur calcul qui comporte plus de 17000 étapes. Cette découverte, ainsi que plusieurs autres dans le domaine des « démonstrateurs de théorèmes », apporte plusieurs constats. Il est inimaginable qu'un esprit humain puisse concevoir une telle démonstration (si toute pensée est un calcul, alors l'homme est un nain de la pensée); « aucune compréhension nouvelle sur le sujet ne semble se déduire de cette démonstration », autrement dit, au-delà d'un certain seuil de complexité, on ne sait pas remplacer les calculs par des idées; ce type de situation est irréductible: on peut établir que « le rapport entre la longueur de la plus courte preuve d'un théorème et celle de son énoncé n'est pas limité en taille ». Faut-il être pessimiste sur l'avenir de l'intelligence humaine? Le livre de Delahaye propose des pistes inédites et excitantes à cette question et sur bien d'autres sujets. Un feu d'artifice sur l'« intelligence artificielle ».

F. C.

# Les machines de Turing

**Comment définir de façon rigoureuse ce qui est calculable et ce qui ne l'est pas ? Turing a répondu à la question en créant les machines qui portent son nom. N'en cherchez pas dans le commerce, il ne s'agit pas d'une machine au sens industriel mais d'un outil théorique.**

**Alan Turing (1912-1954).**

*L'idée de machine universelle est à la base de l'avènement des ordinateurs.*

Dans les années trente, Alan Turing désirait préciser ce qui peut être calculé de manière algorithmique par l'homme aussi bien que par une machine. Pour cela, il a conçu un modèle de calculatrice tellement primaire que l'on a du mal à imaginer qu'elle suffise pour effectuer tous les calculs imaginables. En effet, elle consiste simplement en une machine à écrire modifiée qui, au lieu de travailler sur une feuille de papier, travaille sur un ruban illimité dans les deux sens au moyen d'une tête de lecture/écriture. De ce point de vue, on pourrait également la comparer à un magnétophone.
La bande est constituée de cases, chaque case contenant un symbole. Ce symbole peut être un blanc, on dit alors qu'elle est vierge. La tête de lecture/écriture est capable de trois actions (voir figure ci-contre). Tout ceci en fonction de l'état où elle se trouve au moment de la lecture.
Vous pouvez vous demander comment une telle machine peut calculer quoi que ce soit.
Pour répondre à cette question, un exemple est sans doute plus clair.

## Un exemple très simple

Voyons comment on peut fabriquer une machine de Turing additionnant deux nombres écrit en base 1 c'est-à-dire avec des bâtons.
Ainsi, trois s'écrit 111 et deux 11.
Pour additionner ces deux nombres, on les écrit à la suite mais séparés par un 0 sur le ruban et on positionne la tête de lecture sur le premier 1 à gauche (ce que l'on note en le soulignant) :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\underline{1}$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | | | | | |

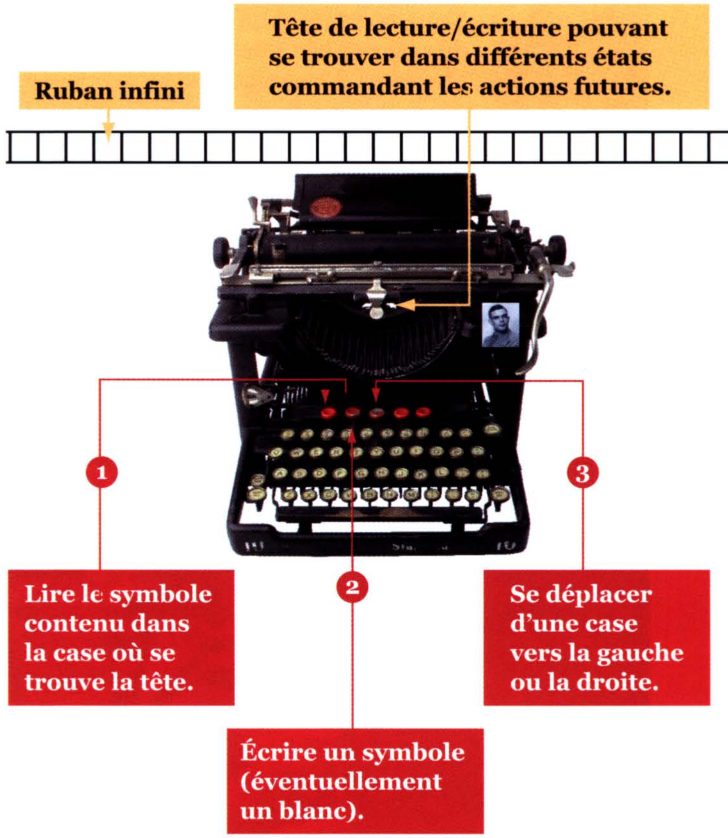
L'état est noté « ordinaire ». Voici alors les règles :

Si dans cet état « ordinaire », la tête lit un 1, elle se déplace vers la droite et reste à l'état « ordinaire », si elle lit un 0, elle se déplace également vers la droite en restant à l'état « ordinaire » mais change la valeur en 0. Si elle lit un blanc, elle se déplace vers la gauche et passe à l'état « final ».
Dans cet état « final », si elle lit un 1, elle l'efface, se déplace vers la gauche et passe en état « terminal », si elle lit un 0 ou un blanc, elle s'arrête.
Dans l'état « terminal », elle s'arrête quoi qu'elle lise.
Dans notre exemple, l'application des règles ci-dessus donne la suite d'états suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\underline{1}$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | ordinaire |
| | 1 | $\underline{1}$ | 1 | 0 | 1 | 1 | | ordinaire |
| | 1 | 1 | $\underline{1}$ | 0 | 1 | 1 | | ordinaire |
| | 1 | 1 | 1 | $\underline{0}$ | 1 | 1 | | ordinaire |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\underline{1}$ | 1 | | ordinaire |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\underline{1}$ | | ordinaire |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\underline{\ }$ | ordinaire |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\underline{1}$ | | final |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | $\underline{1}$ | | | terminal |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | arrêt |

À ce stade, le ruban contient le résultat. Il est facile de multiplier les exemples simples de ce type. Turing a montré que tout calcul automatisable peut être effectué avec sa machine. Bien entendu, elle est loin d'être la plus performante pour cela. Son intérêt est uniquement théorique.

## Machine de Turing

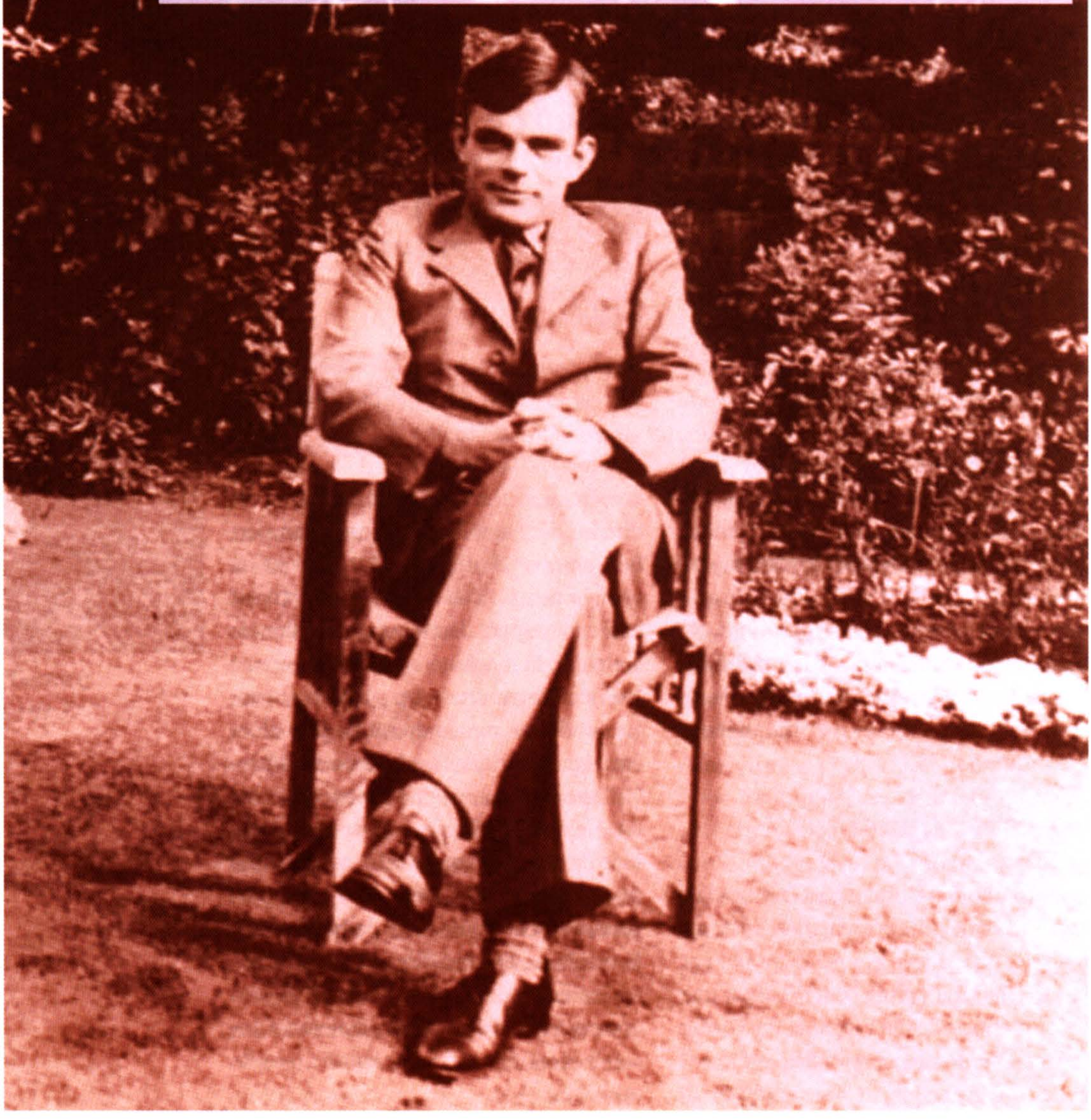



### La machine universelle

Avant d'aborder l'usage que Turing a fait de ses machines, il convient d'abord de remarquer que tout ce qui peut être fait par une machine de Turing peut l'être par une seule d'entre elle : la machine de Turing universelle. Pour comprendre comment celle-ci est conçue, il faut analyser la construction d'une machine de Turing ordinaire. Il s'agit tout d'abord d'un certain nombre de règles d'écritures et de changements d'états. Ces règles peuvent être entièrement décrites sur un ruban de sorte que la machine les effectue lors de leur lecture sur une autre partie du ruban. La condition initiale du ruban peut alors être reproduite dans cette partie du ruban. On voit ainsi comment on peut concevoir une machine de Turing universelle. Cette idée de machine universelle est à la base de l'avènement des ordinateurs : les programmes sont des données particulières de la machine. Ils se différencient ainsi des anciennes tabulatrices que l'on devait programmer en changeant physiquement des connections électriques à chaque nouvelle utilisation.

**Le comportement d'un calculateur humain est à tout moment déterminé par les symboles qu'il observe et par son *état d'esprit* au même instant. Nous pouvons supposer qu'il y a une limite L au nombre de symboles ou de cases que le calculateur peut observer à un moment donné. S'il veut en observer davantage, il doit procéder par observations successives. Nous supposerons aussi que le nombre d'états d'esprit pouvant être pris en compte est également limité, et cela pour des raisons du même ordre que celles réduisant le nombre de symboles. En effet, si nous admettons un nombre infini d'états d'esprit, nous nous retrouverons avec des états d'esprit « arbitrairement proches », ce qui embrouillerait tout. Une fois encore, cette restriction n'est pas d'ordre à affecter sérieusement le calcul puisqu'on peut éviter l'utilisation d'états d'esprit plus compliqués en inscrivant davantage de symboles sur le ruban.**

**Alan Turing**



### Les problèmes calculables et les autres

Turing appelle calculable tout nombre calculable par sa machine universelle ce qui revient finalement à faire l'hypothèse implicite que tout ce que peut calculer l'homme peut l'être par une machine de Turing. Comme il est difficile d'imaginer une façon de calculer qui ne serait pas de ce type, cette thèse n'a jamais été contestée depuis Turing même si elle peut paraître choquante d'un point de vue philosophique. L'homme pourrait-il être égalé par sa créature ? Nous reviendrons sur ce point, notons simplement dès à présent que l'homme reste le maître puisqu'il conçoit les programmes de la machine, celle-ci n'invente rien. Notez d'autre part que le mot calculable doit être pris dans un sens très large. Par exemple, un problème d'échecs du type « les blancs jouent et font mat en deux coups » est calculable. Il est en principe possible de rentrer les règles et la position sur l'échiquier dans une machine de Turing et lui faire produire toutes les possibilités sur deux coups. Si une voie conduit au gain dans tous les cas, nous avons la réponse au problème. Ainsi, on peut parler de problèmes calculables : ceux qui sont résolus par machine de Turing et donc plus généralement par ordinateur.

La machine de Turing a ainsi permis de classifier les problèmes : les calculables et les non calculables. Il en existe du deuxième type, par exemple, le problème de l'arrêt d'une machine de Turing (voir l'article sur le projet de Hilbert). Parmi les problèmes calculables, certains le sont de façon purement théoriques : le temps de calcul est trop long pour qu'on puisse l'effectuer. On convient d'accepter que seuls les problèmes dont le temps de calcul est une fonction polynomiale de la taille des données le sont : on parle de problèmes de complexité P (P pour polynôme). Il reste beaucoup à faire dans ce domaine pour accélérer les résolutions des problèmes classiques comme le tri (indispensable à la gestion des bases de données) ou celui du voyageur de commerce. Malgré leurs difficultés, ces questions restent techniques. Une question plus essentielle est de nature philosophique.

*Les problèmes calculables sont ceux qui sont résolus par machine de Turing et donc plus généralement par ordinateur.*

### L'esprit de l'homme est-il une machine de Turing ?

Sommes-nous des machines de Turing ? Si l'esprit de l'homme était une machine de Turing alors on pourrait amener des machines à penser. Certains l'espèrent, d'autres en doutent. Peut-on penser sans éprouver d'émotion ? Peut-on s'engager dans une démarche de soi-même sans ce moteur ? Turing s'est déjà posé cette question. C'est pourquoi il a imaginé un test permettant de décider si une machine pense. Le voici : on met un testeur d'un côté, et une machine et un humain de l'autre. Ils ne peuvent bien sûr communiquer que par écrit. Si le testeur ne fait pas faire la différence entre l'humain et la machine, alors la machine pense. Bon, il faut avouer que ça dépend du testeur. Certains clubs de rencontre sur Internet utilisent bien quelques robots pour animer leurs sites. Les clients font-ils toujours la différence ? Pas tous, paraît-il !

**H. L.**

Nous n'avons pas besoin de disposer d'une infinité de machines différentes pour accomplir différentes tâches. Une seule suffira. Le problème de construction posé par la production de machines variées, spécialisées chacune dans une tâche, est remplacé par un travail de bureau, c'est-à-dire la « programmation » de la machine universelle pour la tâche voulue.

Alan Turing, 1948.

**Bibliographie**

**Andrew Hodges, *Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence.*** Éditions Payot, 1988.

par Christophe Tollu

# La chute de la maison Hilbert

**À la fin du XIXe et au début du XXe siècle, un débat houleux opposa mathématiciens formalistes et intuitionnistes. David Hilbert était des premiers. Son ambitieux programme fut balayé par les théorèmes d'incomplétude de Gödel.**

En 1931, une revue scientifique allemande publia un article dans lequel Kurt Gödel, alors un jeune mathématicien à l'université de Vienne, démontrait que dans toute théorie axiomatique non-contradictoire et suffisamment riche pour contenir l'arithmétique des entiers naturels, il est impossible de démontrer la non-contradiction de cette théorie. Ce résultat aux conséquences philosophiques importantes, et qui valut à Gödel une aura quasi mythique (John von Neumann le tenait pour le « plus grand logicien depuis Aristote »), est sans aucun doute le théorème mathématique du XXe siècle le plus largement discuté en dehors de la communauté des mathématiciens et logiciens.

*Hilbert tenta de sauver l'approche formaliste en tranchant le débat philosophique avec les intuitionnistes à l'aide des outils mathématiques eux-mêmes.*

## La querelle des fondements

Au cours du XIXe siècle, les progrès spectaculaires de l'analyse provoquèrent l'apparition de « monstres » qui contredisaient l'intuition naïve, comme les fonctions continues mais nulle part dérivables. Cette tératologie naissante horrifia certains mathématiciens, et déclencha une vague d'interrogations sur le statut de ces objets. On rechercha aussi un surcroît de rigueur, qui permettrait par exemple d'établir sur des bases « saines » l'existence des constituants de base de l'analyse : les nombres réels. C'est ce que fit Dedekind dès 1872 en ramenant la définition des réels à celle d'ensembles (infinis) de nombres rationnels, et, partant de là, à des ensembles de nombres entiers. C'est dans ce contexte, où l'analyse est en grande partie « arithmétisée », que l'on peut distinguer l'œuvre de deux savants, Georg Cantor et Gottlob Frege.
Le premier dégagea à partir des années

David Hilbert

1870-1880 les propriétés topologiques partagées par les ensembles de points. Il en vint à axiomatiser la notion abstraite d'ensemble, laquelle avait pour ambition l'unification des mathématiques, par réduction de celles-ci à des constructions purement ensemblistes.

Le second, refusant les certitudes de ses contemporains sur la solidité de l'édifice de l'arithmétique, n'eut de cesse de proposer des axiomes formalisant sans ambiguïté ni contradiction la notion d'entier naturel : sa problématique était bien celle des fondements et sa visée l'absorption de l'arithmétique par la logique. Dans la théorie cantorienne des ensembles, les collections d'entiers naturels occupaient par la force des choses une position de premier plan. Sans que Cantor s'en rendît lui-même compte, sa définition des nombres ordinaux était, au langage près, équivalente au concept frégéen de nombre. Il n'est donc guère étonnant que les « paradoxes » (ou incohérences) relevées au tournant du XX$^{e}$ siècle, notamment par Bertrand Russell, aient affecté également l'un et l'autre systèmes.

Ce n'est qu'au prix d'un nouvel effort d'axiomatisation et de formalisation, s'appuyant sur les travaux de Cantor, de Frege mais aussi de G. Peano, que Russell et A. Whitehead d'une part, E. Zermelo, A. Fraenkel et T. Skolem d'autre part, purent proposer des systèmes formels apparemment libres des incohérences qui minaient les tentatives de leur prédécesseurs. Toutefois, les paradoxes avaient semé le doute dans les esprits, et les mathématiciens intuitionnistes, dont L. Brouwer, commencèrent à rejeter les objets et méthodes infinis (ou infinitaires) qui étaient la source de nombreuses difficultés. Le débat philosophique entre formalistes et intuitionnistes prit alors un tour très animé, sous l'œil vraisemblablement amusé des pragmatistes, pour qui une seule chose comptait : que les mathématiques continuent d'avancer !

## Le programme de Hilbert

Devant la contestation du « paradis » cantorien, David Hilbert réagit en dessinant les grandes lignes de ce qu'on appellerait plus tard le « programme de Hilbert », et qu'il considérait comme un moyen de sauver l'approche formaliste en tranchant le débat philosophique avec les intuitionnistes à l'aide des outils mathématiques eux-mêmes. Hilbert avait toutes les raisons de prendre la tête du parti formaliste : c'était un maître

Le mathématicien allemand Hasse exprima un jour à Mme Hilbert son désir d'avoir un entretien en tête à tête avec son mari David Hilbert.
Mme Hilbert invita Hasse à venir prendre le thé et le laissa avec le grand homme dans le jardin.
Hasse se lança bientôt dans une discussion sur les corps de classes, une théorie qui avait été créee par Hilbert et qui à ce moment-là était le centre d'intérêt principal de Hasse. Hasse venait d'apporter plusieurs contributions importantes à cette théorie, travaux qui prolongeaient les premières avancées de Hilbert.
Curieusement, Hilbert interrompit à plusieurs reprises les envolées de Hasse, insistant pour que Hasse éclaircisse les concepts de base de la théorie des corps de classes. Hasse, de bonne grâce, se fit un devoir de ne laisser aucun point obscur. Hilbert exprima alors un enthousiasme grandissant au fur et à mesure des explications pour finir par s'exclamer : « Tout cela est d'une très grande beauté. Qui donc a créé cela ? »
(H. Eves, *Mathematical Circles Adieu*, Prindle, Weber et Schmidt, 1977, p. 53)

reconnu de la méthode axiomatique depuis la parution des *Grundlagen der Geometrie* en 1899. Il s'était illustré dans l'utilisation brillante des techniques « infinitaires » et son optimisme scientiste lui interdisait de penser qu'une question de mathématiques pût rester sans réponse.

La vision formaliste de Hilbert peut être présentée, en forçant un peu le trait, de la façon suivante :

Tout d'abord, le raisonnement mathématique est entièrement formalisable, voire mécanisable. Une fois posés les axiomes et les règles d'inférences, les théorèmes découlent des premiers par application mécanique des secondes. En outre, les axiomes définissent explicitement, dans un langage formel, les relations entre les objets abstraits désignant les entités qui figurent au point de départ de la théorie (par exemple les points, les droites, les plans pour la géométrie). Ces relations sont ainsi vidées de leur contenu intuitif pour être abstraites sous forme de chaînes de symboles, manipulables selon des critères exclusivement morpho-syntaxiques.

Ainsi le formalisme devient-il lui-même un objet mathématique, offerts aux investigations de la métamathématique (Gödel saura faire son miel de cette remarque).

Ensuite, à l'opposé de Frege, pour qui la vérité des axiomes dépend des objets auxquels ils réfèrent, Hilbert adopte un point de vue quasi conventionnaliste sur la vérité, qu'il tend à identifier à la non-contradiction. C'est pourquoi le principal but mis en avant par Hilbert dans son programme exposé en 1904 est une démonstration de la cohérence (c'est-à-dire la non-contradiction) de l'arithmétique, puis de l'analyse et des mathématiques dans leur ensemble. Il vaut la peine de souligner que les démonstrations de non-contradiction réclamées par Hilbert sont « absolues » : il ne s'agit pas de prouver la non-contradiction d'un système d'axiomes relativement à un autre.

Enfin, les énoncés abstraits et les méthodes infinitaires (également appelées non élémentaires), rejetés par Brouwer, apportent un surcroît d'élégance, mais peuvent toujours en principe être traduits en énoncés et en démonstrations élémentaires. En particulier, les démonstrations de cohérence doivent être menées dans le cadre des mathématiques élémentaires. Ce point est le plus flou du programme de Hilbert, qui n'a jamais défini précisément ce qu'il entendait par élémentaire. On peut toutefois raisonnablement penser qu'il admettait comme tels les énoncés directement vérifiables par un calcul fini et ceux qu'on peut infirmer par la production d'un simple objet. Dans le cas de l'arithmétique de Peano, sur laquelle on reviendra dans le paragraphe suivant, ces énoncés constituent les formules universelles, qui peuvent s'écrire sous la forme $\forall x\, \varphi(x)$ où toutes les quantifications de $\varphi(x)$ sont bornées.

## Les théorèmes d'incomplétude de Gödel

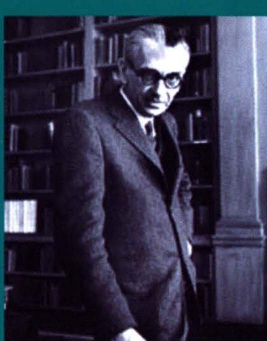
Bien que les systèmes que Gödel passe au crible de son analyse dans son article de 1931 soient la théorie des types de Russell-Whitehead et la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, le noyau des mathématiques auquel ses résultats s'appliquent est bien l'arithmétique, socle apparemment intouchable des mathématiques de la fin du XIX^e^ et du début du XX^e^ siècle. C'est pourquoi il est

***Les théorèmes de Gödel infirment à la fois le rêve de démonstration « absolue » de non-contradiction des mathématiques, et l'identification de la vérité avec la non-contradiction.***

d'usage aujourd'hui de présenter les théorèmes d'incomplétude en prenant comme théorie de référence l'axiomatisation de l'arithmétique appelée système de Peano, qui date des environs de 1900 et que nous noterons **P**.
Le premier théorème d'incomplétude de Gödel (voir encadré) énonce qu'il existe une proposition de **P** qui est vraie mais non prouvable. Pour obtenir le deuxième théorème d'incomplétude, celui avec lequel nous avons ouvert cet article, Gödel a remarqué qu'on pouvait prendre comme formule vraie mais non prouvable la formule qui exprime la cohérence de **P**.
Les théorèmes de Gödel apportent donc une double infirmation au programme de Hilbert : d'une part, tous les rêves de démonstration « absolue » de non-contradiction des mathématiques sont brisés, d'autre part, il n'y pas de moyen de réduire la notion de vérité ou de « réalité » en mathématiques à un critère de non-contradiction, puisque, dans toute théorie non triviale, des énoncés vrais élémentaires (il est facile de se convaincre que la formule exprimant la cohérence est universelle) doivent rester indémontrables.
Par exemple, parmi les énoncés indémontrables de l'arithmétique de Peano, on en connaît un qui a une signification concrète pour les mathématiciens : en 1977, J. Paris (en collaboration avec L. Kirby et L. Harrington) a montré qu'une variante apparemment anodine du célèbre théorème combinatoire de Ramsey et vérifiée par les entiers naturels, n'est pas démontrable dans **P**.

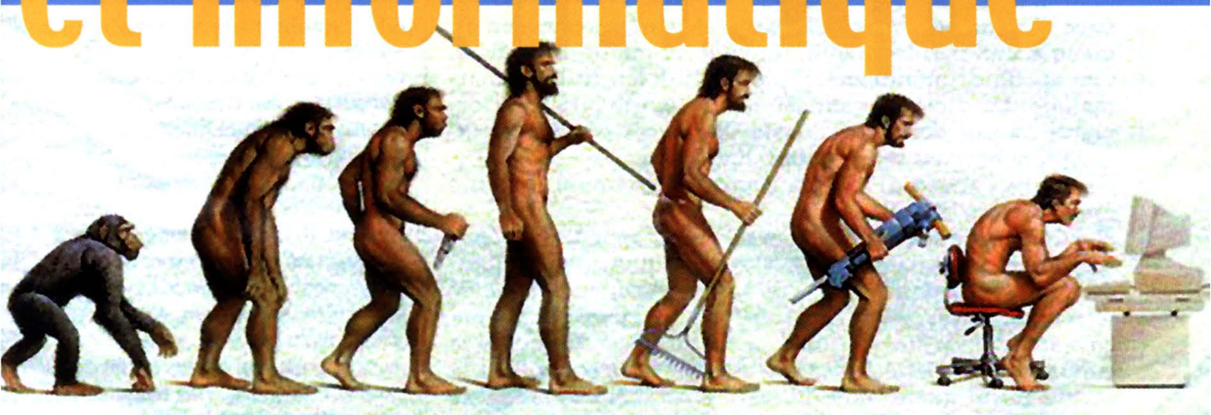
**C. T.**

# Une esquisse de la preuve de Gödel



Dans **P**, on définit successivement, en suivant des règles précises, les *termes*, qui dénotent les objets, puis les *propositions* (ou formules), qui correspondent aux propriétés des objets, enfin les *preuves formelles*. On distingue certaines formules, les *axiomes logiques*, qui expriment des tautologies, et les *axiomes propres*, qui définissent les relations entre les opérations désignées par les symboles du langage.
Les règles d'inférence sont réduites au strict minimum : le *modus ponens* (on dérive G dès qu'on a F et $F \Rightarrow G$), et la règle de récurrence (on dérive $\forall x\, F(x)$ dès qu'on a $F(0)$ et $\forall x\, (F(x) \Rightarrow F(Sx))$, le symbole S désignant l'opérateur successeur, qui ajoute 1 à son argument).
D'aucuns se sont interrogés sur le caractère élémentaire de cette dernière règle, mais sans elle, il est difficile de démontrer le moindre énoncé non trivial.
Gödel énumère les termes, les propositions puis les démonstrations en leur associant, à l'aide d'un codage astucieux, un « nombre de Gödel ».
Grâce à ce premier codage, il peut traduire chaque énoncé métamathématique sur **P** par une proposition de **P** : par exemple, il existe une proposition de **P**, notée $\mathrm{Dem}(\pi, [F])$, où $[F]$ désigne le nombre de Gödel de F, qui traduit « $\pi$ est le nombre de Gödel d'une démonstration de F dans **P** », et ainsi $\neg \exists \pi\, \mathrm{Dem}(\pi, [0 = S0])$, où le symbole $\neg$ désigne la négation, traduit l'énoncé « **P** est cohérente » (il faut souligner que des formules comme $\mathrm{Dem}(\pi, [F])$ n'ont pas d'interprétation arithmétique immédiate).
En utilisant un argument diagonal « à la Cantor », Gödel finit par produire une formule F qui traduit l'énoncé $\neg \exists \pi\, \mathrm{Dem}(\pi, [F])$, autrement dit F exprime littéralement sa non-prouvabilité.
L'alternative est alors la suivante : ou bien F est fausse et prouvable dans **P**, ou bien F est vraie mais non prouvable. On en conclut que si P est cohérente (ne permet donc pas de prouver des énoncés faux), alors il existe une proposition de **P** qui est vraie mais n'est pas prouvable : cette formulation est celle du premier théorème d'incomplétude.

# Logique et informatique



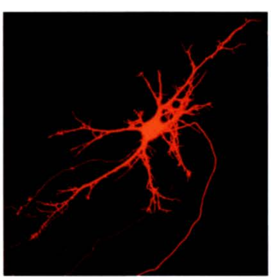
## De la logique humaine à l'intelligence artificielle

**Pour accomplir une tâche, une machine ne peut se fonder sur la logique humaine, celle que nous utilisons pour les actions de la vie quotidienne. La logique mathématique est nécessaire, c'est pourquoi l'informatique en est née et a poussé à mieux discerner l'aspect syntaxique traitable par ordinateur et l'aspect sémantique réservé aux seuls êtres humains. Bien entendu, les tâches mécanisables sont alors strictement limitées.**
**Mathématiquement, elles correspondent aux fonctions tout à la fois calculables et de complexité « raisonnable ».**
**Pour contourner ces limitations – et pouvoir en particulier traiter des problèmes d'intelligence artificielle – on a essayé de créer des logiques plus proches de notre façon de raisonner. Ces idées ont débouché sur les réseaux de neurones et la logique floue.**
**Ces apports de la logique à l'informatique l'ont fécondée en retour et ont permis en particulier de préciser la notion de preuve avec la correspondance de Curry-Howard.**

par Nicolas Delerue

# L'intelligence artificielle

**Le champion du monde d'échecs, Gary Kasparov, mis en difficulté par un ordinateur ? Un robot qui effectue la récolte des pommes ? Et si on parvenait à rendre les robots aussi intelligents que les humains ?**



**Un neurone**

Mémoire et raisonnement logique sont souvent vus comme les deux clefs de l'intelligence (surtout par certains systèmes éducatifs). Les ordinateurs actuels possèdent ces deux qualités, et pourtant il y a encore des domaines où ils peinent à concurrencer l'intelligence humaine. Le web nous permet d'accéder à de nombreuses pages en langues étrangères et certains sites nous proposent de les traduire en français, mais la qualité de la traduction est souvent très loin de ce que ferait n'importe quel traducteur humain. Les moteurs de recherche sont capables de nous trouver une grande quantité de réponses correspondant à un mot clef, mais ils laissent souvent passer des réponses fort éloignées du sujet de la recherche, et qu'un humain éliminerait au premier coup d'œil. Ces imperfections ne proviennent pas de fautes de logique puisqu'il existe des langages de programmation permettant de coder très précisément des séquences logiques (voir l'article sur le Prolog page 66).

## La logique prise en défaut

C'est justement parce qu'ils raisonnent trop logiquement que les ordinateurs échouent dans des tâches où les humains réussissent sans difficulté. Expliquons à un ordinateur qu'un chien est composé de quatre pattes, d'un corps et d'une tête. L'ordinateur va faire le lien entre « chien » et ces différents éléments. Montrez lui ensuite une chaise : quatre pattes (les pieds de la chaise), un corps et une tête (le dossier). L'ordinateur va logiquement en déduire qu'il est face à un chien !

Un autre exemple est le cas de la mesure d'une température. En logique classique soit il fait chaud soit il fait froid, alors que pour les humains c'est beaucoup plus subtil que cela. Ce genre de problème peut être traité par la *logique floue* (voir l'article page 72), qui permet aux ordinateurs d'avoir des réponses plus souples qu'en logique classique. Mais nous sommes encore loin de la subtilité humaine !

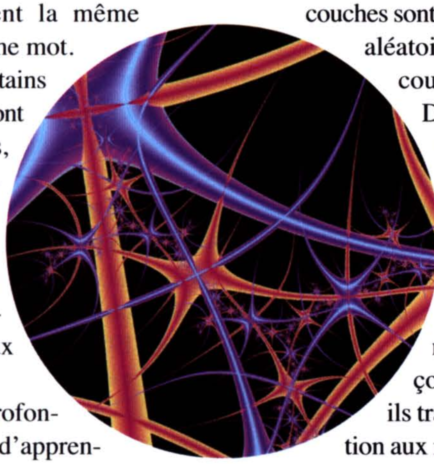
Les chercheurs en intelligence artificielle se sont donc demandés comment nous, humains, étions capable de faire la différence entre un chien et une chaise. Ce n'est pas inné, un bébé qui apprend à parler n'emploie pas toujours le bon mot au bon moment. Et ce n'est que par l'apprentissage qu'il est capable de comprendre exactement la portée d'un mot. Cet apprentissage dépend du milieu où évolue l'enfant et chacun ne va pas associer exactement la même définition à un même mot.

Ainsi au Japon, certains feux de circulation sont bleus car, en japonais, « bleu » et « vert » sont désignés par le même nom et les Japonais ne font donc pas la différence entre ces deux couleurs !

Une étude plus approfondie du phénomène d'apprentissage montre qu'il est constitué d'une série de succès et d'échecs : le bébé voit un objet et dit le nom qu'il y associe. Selon la réaction de ses parents, il sait s'il a fait une bonne ou une mauvaise association et au fur et à mesure de ses rencontres avec des variantes du même objet, il a une idée de plus en plus précise de ce qu'il peut associer à ce nom.

## Imiter le cerveau

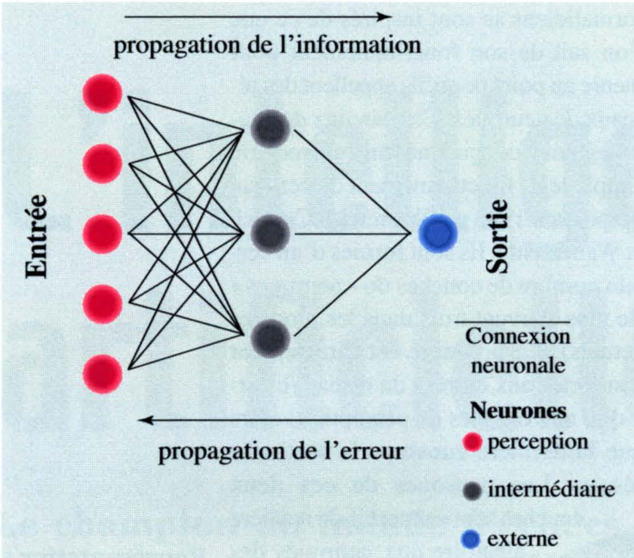
L'apprentissage se fait au cœur du cerveau par la stimulation de neurones. Ces neurones vont à leur tour stimuler d'autres neurones en recombinant l'information. Le cœur du cerveau reste encore très mystérieux. Cependant, les informaticiens se sont inspirés de ce que l'on sait de son fonctionnement pour mettre au point ce qu'ils appellent des réseaux de neurones. Ces *réseaux de neurones* sont conçus suivant un modèle simpliste de fonctionnement du cerveau proposé en 1943 par Warren McCulloch et Walter Pitts. Ils sont formés d'un certain nombre de couches de « neurones » (le plus souvent trois dans les modèles actuels). La première est directement connectée aux entrées du réseau (c'est-à-dire aux organes de perception) alors que la dernière constitue la sortie du réseau. Les neurones de ces deux couches sont connectés de manière aléatoire aux neurones des couches intermédiaires. De plus ces connexions ne sont pas fixes, elles vont évoluer suivant les réussites et les échecs du réseau.



**Représentation artistique (et fractale) d'un réseau de neurones.**

Chaque fois que les neurones d'entrée perçoivent quelque chose ils transmettent l'information aux neurones de la couche suivante. Chaque élément d'information est caractérisée par les neurones qu'il stimule (dans le cas de la vision, par exemple, un neurone va être spécialisé pour chaque couleur, un autre pour certaines formes, et ainsi de suite...), les neurones de la seconde couche vont alors faire une somme (éventuellement pondérée) des signaux qu'ils reçoivent de la première couche et en fonction du résultat de cette somme décider s'ils doivent s'activer ou pas. Ceux qui s'activent transmettent alors un signal aux neurones de la couche suivante où le même processus de décision a lieu. Le nombre de neurones actifs sur la dernière couche permet d'évaluer si la réponse est positive ou négative...

*C'est parce qu'ils raisonnent trop logiquement que les ordinateurs échouent dans des tâches où les humains réussissent sans difficulté.*




## Éduquer un réseau de neurones

Il est fort probable que lors des premières utilisations du réseau les réponses soient complètement arbitraires. Il va donc falloir éduquer le réseau et lui permettre de recombiner ses connections selon ses réussites et ses échecs. Pour cela, il faut lui montrer (c'est-à-dire mettre à portée de ses neurones de perception, la méthode exacte dépendant des « organes » auxquels est relié le réseau) deux catégories d'objets : les bons et les mauvais. Le but étant que lorsqu'un « bon » objet est montré au réseau, ses neurones de sorties soient actifs alors qu'au contraire ils soient inactifs lorsqu'il voit un « mauvais » objet. Si un neurone se trompe, c'est que ses connections ne sont pas adaptées à la réponse voulue. Il doit donc changer la manière dont il combine les signaux en provenance des autres neurones. À force de voir des bons et des mauvais objets, les neurones du réseau vont finalement trouver les combinaisons leur permettant de discriminer les mauvais objets tout en conservant les bons.

*Les informaticiens se sont inspirés de ce que l'on sait du fonctionnement du cœur du cerveau pour mettre au point ce qu'ils appellent des réseaux de neurones.*

Une fois ce stade atteint, il faut arrêter l'apprentissage car sinon le réseau va apprendre les particularités des exemples et ne sera plus capable de généraliser ! Une fois la phase d'apprentissage terminée, le réseau peut donc être vu comme un système calculant des combinaisons d'informations transmises en entrée. De ce point de vue, il n'est pas très différent de ce que pourrait faire un programmeur malin. La différence, et ce qui fait toute la force du réseau de neurones, est qu'il a des milliers ou même des dizaines de milliers de connexions qui vont lui permettre de tester en parallèle de nombreuses combinaisons jusqu'à trouver les meilleures. C'est cet aspect intensément parallèle qui confère aux réseaux de neurones (qu'ils soient informatiques ou biologiques) leur puissance d'apprentissage et de discrimination.

## Un avenir prometteur après des débuts catastrophiques

Les débuts du réseau de neurones, dans les années 1950, furent catastrophiques et déçurent nombre de ses promoteurs. Il faut dire que l'électronique en était à ses balbutiements et le nombre de neurones de ces réseaux archaïques était très limité. Il fallut attendre la disponibilité des puces électroniques, permettant de produire à moindre coût des réseaux de neurones beaucoup plus vastes, pour assister à leurs premiers succès. Et ce n'est que très récemment que les ordinateurs ont atteint des puissances de calcul suffisantes pour permettre l'utilisation de vastes réseaux de neurones pour des applications simples. Leur principal point fort est la reconnaissance de motifs. Il s'agit d'un domaine très vaste, incluant l'accomplissement de tâches pour lesquelles la logique classique est inefficace. Ainsi un réseau de neurones bien éduqué pourrait être capable de faire le tri dans vos photos (numériques) de vacances entre celles contenant des paysages et celles contenant des personnages. Dans le futur on envisagera même de demander aux réseaux de neurones d'identifier les personnes ou les monuments se trouvant sur les photos. La ville de Londres, par exemple, s'appuie sur des caméras reliées à un réseau de neurones pour lire les plaques d'immatriculation des véhicules entrant dans son centre-ville.

Les logiciels de reconnaissance d'écriture s'appuient eux aussi sur de tels réseaux ainsi que ceux (encore en phase de mise au point) de reconnaissance vocale.

Dans des jeux de stratégie tels que les échecs, il n'est pas possible de calculer tous les coups d'avance. Un bon programme d'échec doit être capable, tout comme un bon joueur, de reconnaître des motifs « gagnants » et des motifs « perdants » pour faire le bon choix.

Mais il existe d'autres applications moins évidentes de la reconnaissance de motifs. C'est le cas de la traduction d'un texte qui nécessite la compréhension du contexte, c'est-à-dire la reconnaissance du motif dans lequel s'inscrit le mot à traduire. Et à plus long terme, un ordinateur capable de reconnaître des motifs pourrait être capable de reconnaître des « bons » textes de « mauvais » textes et d'avoir sa propre production littéraire (ou vocale)...

Depuis quelques mois déjà le site du moteur de recherche *Google* propose à l'adresse

**http://news.google.com**

une page d'actualité (en anglais) composée entièrement par un ordinateur sans l'intervention d'une équipe de rédaction. Aujourd'hui de nombreux chercheurs travaillent sur les moyens d'améliorer les réseaux de neurones actuels et sur de nouvelles applications de l'intelligence artificielle. À quand le premier livre entièrement écrit par un ordinateur ?

**N. D.**

## Fonctionnement d'un réseau de neurones

**Apprentissage :**

1• Un objet est montré au réseau.

2• Chaque neurone de la couche d'entrée (neurones de perception) analyse un élément de l'objet (forme, couleur, texture ...) et choisi de s'activer si l'objet correspond à des critères prédéfinis.

3• Les neurones de la seconde couche combinent, chacun à leur manière, les informations en provenance de la première couche et choisissent à leur tour de s'activer ou non en fonction d'un seuil prédéfini.

4• Après avoir traversé la ou les couches internes du réseau l'information est combinée par la couche de neurones externes qui, à leur tour, décident individuellement de s'activer ou non.

5• La réponse de chaque neurone est comparée à la vraie réponse associée à l'objet. Tous les neurones s'étant trompés (neurones inactifs si l'objet était bon ou neurones actifs si l'objet était faux) doivent alors changer la manière dont ils pondèrent leurs connexions.

Le processus d'apprentissage est répété de nombreuses fois avec des objets (bon et mauvais) différents jusqu'à ce que le réseau ne se trompe plus sur les échantillons d'apprentissage.

**Utilisation du réseau :**

1• Un objet est montré au réseau.

2• Compter le nombre de cellules actives sur la dernière couche du réseau.

3• S'il est important de ne conserver que les objets justes, alors il faut considérer que le réseau répond positivement quand presque toutes ses cellules sont actives (les réseau est alors presque sûr d'avoir reconnu un bon objet) mais il y a des risques de rejeter un objet juste mais un peu déformé. Si au contraire le but est de conserver tous les objets justes, l'activation d'un nombre moins important de cellules peut aussi être considéré comme une réponse positive mais certains objets faux ressemblant à des objets justes risquent alors d'être conservés...

par Hervé Lehning

# Les circuits logiques

**Comment calculent les ordinateurs ? À partir de circuits logiques. De nos jours, ils sont réalisés avec du matériel électronique mais on pourrait les concevoir autrement. Alors, pourquoi pas un ordinateur à eau ? L'essentiel est dans les fonctions logiques.**

Avant de nous lancer dans la conception d'un ordinateur, il faut dénombrer les ingrédients nécessaires pour sa construction. À la base, il faut pouvoir véhiculer deux informations : « faux » et « vrai », « 0 » ou « 1 ». L'électricité nous fournit une solution pour cela : un courant passe ou ne passe pas dans un fil. En pratique, on utilise un courant de 0 ou 5 volts pour représenter le « 0 » et le « 1 » logique. Notez que l'on pourrait faire l'inverse sans modification fondamentale.

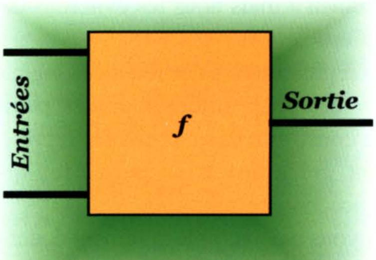
On pourrait également imaginer un autre modèle utilisant, par exemple, un tuyau où de l'eau passerait ou ne passerait pas. Ceci dit, pour réaliser notre ordinateur, nous devons pouvoir réaliser à partir d'un petit nombre de « briques » élémentaires toutes les fonctions logiques imaginables. Pourquoi ? Tout simplement parce que grâce à elles, nous pouvons calculer en base deux ce qui est non seulement nécessaire mais aussi presque suffisant pour construire un processeur d'ordinateur. Il suffit en plus de savoir recopier des cases mémoire.

*Toute fonction logique peut être représentée grâce aux trois connecteurs logiques « non », « ou » et « et ».*

## Les fonctions logiques

Qu'appelons-nous fonction logique ? Les fonctions logiques à une seule variable sont les fonctions prenant en entrée une information logique (« vrai » ou « faux », le courant passe ou non, 1 ou 0) et donnant en sortie une autre information logique. Une fonction logique à deux variables prendra de même deux informations logiques en entrée et en donnera une seule en sortie, etc.

De façon pratique, on note une telle fonction logique $f$ de la façon suivante :




Fonction logique à 2 variables

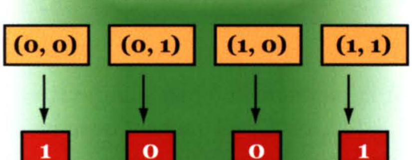
Pour montrer sur un exemple l'intérêt de considérer des fonctions logiques, supposons que nous voulions additionner deux nombres à 16 chiffres binaires (on dit à 16 bits en informatique), il suffit pour cela de considérer les fonctions logiques à 32 variables (les bits des deux nombres) donnant chacune un des chiffres du résultat.

Il s'agit bien d'une fonction logique puisqu'à 32 entrées de valeurs valant 0 ou 1, elle fait correspondre une valeur du même type.

Le problème est exactement le même pour la multiplication ou toute autre opération.

En théorie, nous pouvons donc fabriquer un calculateur binaire si nous pouvons réaliser toutes les fonctions logiques. Leur intérêt réside dans cette propriété.

Considérons, par exemple, la fonction logique de deux variables $f$ représentée par :




ce qui signifie qu'à (0,0), $f$ associe 1 et ainsi de suite. En l'interprétant avec


« vrai » pour 1 et « faux » pour 0 et en le présentant sous forme de tableau, on obtient :

| Second argument \ Premier argument | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| Vrai | Vrai | Faux |
| Faux | Faux | Vrai |

On remarque qu'il s'agit de la table de vérité de la proposition logique :

**($p$ et $q$) ou (((non $p$) et (non $q$)).**

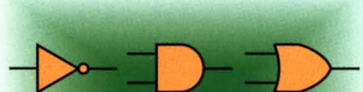
Ce résultat est vrai pour toute fonction logique qui peut ainsi être représentée grâce aux trois connecteurs logiques « non », « ou » et « et ».
Pour créer un ordinateur, il suffit donc de produire ces trois connecteurs. On pourrait même se contenter de deux connecteurs (« et » et « non » par exemple) puisque :

**($p$ ou $q$) équivaut à (non ((non $p$) et (non $q$))).**

L'inconvénient serait de multiplier les connecteurs « non », ce qui a des inconvénients pratiques, l'usage est donc d'utiliser trois connecteurs et même quelques-uns de plus.
On peut donner une démonstration générale et simple de ce résultat sur les fonctions logiques (voir l'encadré « Fonctions et propositions logiques »).

## Portes et circuits logiques

Les réalisations électroniques des connecteurs logiques sont appelées « portes logiques ». Nous ne rentrerons pas ici dans le détail de leur fabrication. Nous en donnons seulement les symboles utilisés aux États-Unis, les symboles européens n'étant pratiquement plus utilisés même en France.



**Symboles des portes logiques "non", "et" et "ou"**

On utilise aussi couramment les portes logiques « non et », « non ou » et « ou exclusif » mais nous les éviterons dans cet article.
La représentation des fonctions logiques par des propositions logiques permet de construire des circuits les représentant grâce aux trois portes logiques précédentes.
Voyons par exemple comment coder un chiffre décimal en binaire (ce qui est nécessaire car les calculs sur ordinateur se font plus naturellement en binaire qu'en décimal). Le circuit que nous nous proposons de définir comporte donc dix variables d'entrée : $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$, E6, E7, E8, et E9 et quatre variables de sortie : A, B, C et D. Un chiffre $i$ est représenté en mettant l'entrée $E_i$ à 1 et les autres à 0. La sortie correspond à l'écriture binaire de ce chiffre.
Le tableau suivant donne les quatre fonctions logiques demandées :

| Entrée | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $E_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $E_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $E_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $E_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $E_4$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $E_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $E_6$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $E_7$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $E_8$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E_9$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

où la première colonne signifie $E_0 = 1$, $E_1 = 1$,... ou $E_9 = 1$ sachant que, quand l'un de ces signaux vaut 1, tous les autres valent 0.

Nous pouvons donc fabriquer quatre circuits logiques A, B, C et D réalisant ces

# Fonctions et propositions logiques

Toute fonction logique peut être représentée par une proposition logique. Pour préciser ce que cela signifie, considérons une fonction logique d'une variable $f$.
À une valeur de {0, 1}, elle en associe une autre (qui peut être bien sûr la même). La fonction logique $f$ peut donc être représentée par un tableau. En fait, il en existe en tout et pour tout quatre possibles. Les voici :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Quatre provient du nombre de possibilités de disposer 0 et 1 en troisième ligne, ce qui donne $2^2 = 4$ possibilités. Si on interprète 0 et 1 comme « faux » et « vrai », ces quatre tableaux ressemblent à des tables de vérité :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

La première et la dernière table retournent des constantes, la seconde est l'identité (les valeurs « vrai » et « faux » sont inchangées) et la troisième est le « non » logique (les valeurs « vrai » et « faux » sont inversées). On peut éliminer les constantes si on le désire en utilisant les deux identités suivantes :

$$p \text{ et } (\text{non } p) = \text{Faux et } p \text{ ou } (\text{non } p) = \text{Vrai}$$

valables pour toute variable logique $p$. En utilisant les symboles $\vee$ pour « ou », $\wedge$ pour « et » et $\neg$ pour « non », nous obtenons :

$$p \wedge (\neg\, p) = \text{Faux et } p \vee (\neg\, p) = \text{Vrai}$$

Ainsi, toute fonction logique à une variable $f$ peut être représentée par une proposition logique P portant sur une variable $p$. Plus précisément, les quatre fonctions ci-dessus sont représentées par les quatre propositions :

$$p \wedge (\neg\, p) \qquad p \qquad \neg\, p \qquad p \vee (\neg\, p)$$

ce qui signifie que le tableau de $f$ coïncide avec la table de vérité de P. Plus précisément, si $p$ a la valeur de vérité « vrai », P($p$) vaut $f$ (« vrai ») et si $p$ a la valeur de vérité « faux », P($p$) vaut $f$ (« faux »).

Examinons maintenant le cas des fonctions logiques à deux variables. Nous pourrions également les représenter sous forme de tableaux (il y en a seize) et comme précédemment, nous pourrions les passer tous en revue pour montrer que chacune est associée à une proposition logique portant sur deux variables $p$ et $q$. Il est plus simple de raisonner autrement.
Soit $f$ une fonction logique à deux variables. Nous associons à ces deux variables deux variables propositionnelles $p$ et $q$ et fixons la seconde (qui correspond à $q$) à « vrai ». Il nous reste une fonction logique à une seule variable. D'après ce qui précède, elle peut être représentée par une proposition logique de la variable $p$, soit P. Nous pouvons reprendre le raisonnement en fixant $q$ à « faux ». Nous obtenons à nouveau une proposition logique de la variable $p$, soit Q. La fonction logique $f$ est alors représentée par la proposition logique des deux variables $p$ et $q$ :

$$(\mathrm{P} \wedge q) \vee (\mathrm{Q} \vee (\neg\, q))$$

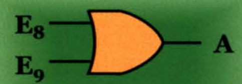
puisque si $q$ a la valeur de vérité « vrai », $f$ a les mêmes valeurs que P (suivant les valeurs de vérité de $p$) et donc que $\mathrm{P} \wedge q$ et, de même, si $q$ a la valeur de vérité « faux », $f$ a les mêmes valeurs que Q et donc que $\mathrm{Q} \wedge (\neg\, q)$. Dans tous les cas, $f$ a les mêmes valeurs de vérité que la proposition $(\mathrm{P} \wedge q) \vee (\mathrm{Q} \wedge (\neg\, q))$.

Le raisonnement que nous venons de faire s'itère et donc le résultat est vrai quel que soit le nombre de variables.

quatre fonctions.

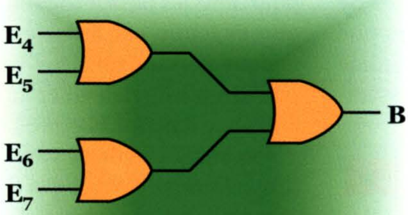
Pour le premier, A = 1 si et seulement si $E_8 = 1$ ou $E_9 = 1$.

Il suffit donc d'utiliser une porte logique « ou » :




Circuit logique représentant A

Le second fait intervenir $E_4$, $E_5$, $E_6$ et $E_7$ de la même façon d'où :




Circuit logique représentant B

On obtient de même les deux autres. On remarque que $E_0$ n'intervient pas, ce qui est assez logique puisqu'il s'agit d'une information redondante servant à un autre niveau. En réunissant les quatre circuits trouvés, on obtient un circuit logique permettant le codage en binaire.

## Circuits arithmétiques

De même, nous pouvons construire des circuits permettant d'additionner et de multiplier des nombres écrits en binaire. Le plus simple à réaliser est l'additionneur à un bit. Notre circuit doit ainsi comporter deux entrées, les bits à additionner $a$ et $b$ et deux sorties, le résultat $s$, et une retenue $r$.

Les deux fonctions à écrire sont données par le tableau :

| $a$ | $b$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

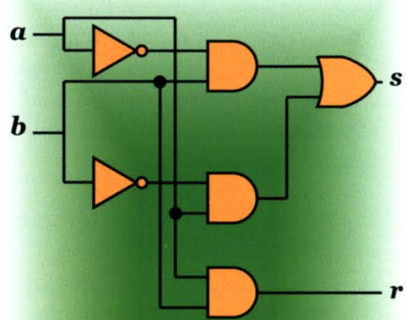
La retenue correspond donc à un « et » logique :

**$a$ et $b$,**

alors que la somme elle-même est un peu plus compliquée, il s'agit en fait d'un «ou» exclusif qui peut s'écrire :

**((non $a$) et $b$) ou ($a$ et (non $b$))**

Vous pouvez vérifier cette égalité en dressant la table de vérité de cette proposition et en la comparant avec la table ci-dessus. On en déduit le circuit :

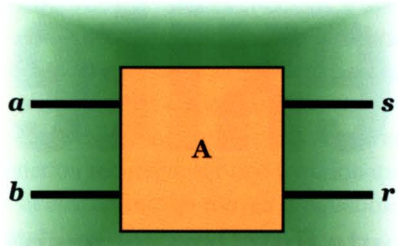



Additionneur un bit (avec retenue)

Les croisements entre les fils correspondants à des connexions sont marqués d'un point.

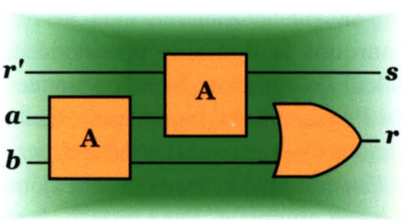
*L'essentiel étant dans la logique et non dans l'électronique, on pourrait fabriquer un ordinateur à eau.*

À partir de cet additionneur un bit, on peut construire un additionneur $n$ bits. Il faut cependant tenir compte de la retenue. L'additionneur un bit élémentaire à utiliser a donc une entrée supplémentaire. Il est possible de le fabriquer à partir de ce premier que nous notons d'un carré :

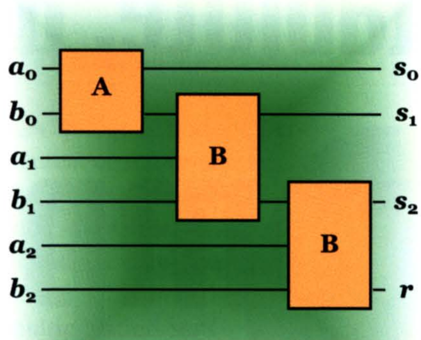



**Symbole de l'additionneur un bit (avec retenue)**

À partir de celui-ci, nous pouvons construire un additionneur admettant une retenue $r'$ en entrée :




Vous pouvez vérifier le fonctionnement de ce circuit en en dressant la table de vérité.
Nous pouvons alors facilement construire un additionneur $n$ bits. Il suffit pour cela de composer $n$ additionneurs de ce type que nous notons B :




**Additionneur à 3 bits,**
**il est facile de le généraliser à $n$ bits**

De la même façon, nous pouvons créer un circuit multiplicateur et ainsi un processeur d'ordinateur. Nous voyons que l'essentiel est dans la logique et non dans l'électronique. On pourrait très bien imaginer des portes logiques fondées sur un autre phénomène. Même l'eau est utilisable, il suffit de fabriquer les trois portes logiques « non », « et » et « ou ». Alors, pourquoi pas un ordinateur à eau ? La raison, c'est le temps. Un tel ordinateur serait très lent et peu efficace mais si le projet vous tente, la rédaction de *Tangente* est preneuse du premier ordinateur à eau du monde.

**H. L.**

par Christophe Tollu

# Calculabilité, décidabilité et complexité

**Qu'est-ce qu'une fonction récursive ? Toute fonction récursive est-elle calculable ? Et inversement ? Aborder la notion de calculabilité et découvrir son lien étroit avec la notion de preuve mathématique, c'est toucher aux fondements de la logique des langages de programmation informatique.**

*L'identité entre calculabilité et prouvabilité fonde l'approche logique « moderne » des langages de programmation.*

La fiction hilbertienne d'une mécanisation totale des mathématiques est partie en fumée (toxique pendant de nombreuses années) en 1931, quand Gödel démontra ses fameux théorèmes d'incomplétude (voir les articles du dossier « Le projet de Hilbert »). Voyons comment dans le même mouvement, Gödel a posé les prodromes d'une théorie des fonctions calculables. Cette théorie s'est développée dans une «atmosphère d'incomplétude» jusque dans les années 1960, date à laquelle l'essor de l'informatique a convaincu les chercheurs de se tourner vers l'étude de la complexité algorithmique des problèmes.

## Équations et fonctions récursives

Modulo des codages, les éléments de tout domaine discret peuvent être représentés par des entiers naturels. C'est pourquoi le domaine privilégié du calcul (jusqu'à ces dernières années) fut l'ensemble $\mathbb{N}$, lequel, pour les logiciens classiques, est engendré par 0 et l'opération successeur S, qui ajoute 1 à son argument. Par exemple, 5 est représenté par SSSSS0. Les fonctions calculables qu'on va caractériser prendront leurs arguments et leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

Une fonction se calcule typiquement au moyen d'équations, qui la définissent en des termes qu'on sait déjà calculer. Par exemple, voici deux équations qui permettent de calculer la somme de deux entiers naturels :

$$x+0=x$$
$$x+(\mathrm{S}y)=\mathrm{S}(x+y).$$

Calculons 2 + 3.

$$\begin{aligned}2+3 &= \mathrm{SS0}+\mathrm{SSS0}=\mathrm{S}(\mathrm{SS0}+\mathrm{SS0})\\ &=\mathrm{SS}(\mathrm{SS0}+\mathrm{S0})=\mathrm{SSS}(\mathrm{SS0}+0)\\ &=\mathrm{SSSSS0}=5.\end{aligned}$$

(On a appliqué trois fois la seconde

équation, puis une fois la première).
Maintenant qu'on sait calculer des sommes, on peut passer au calcul des produits en utilisant les deux équations suivantes :

$x \times 0 = 0$

$x \times \mathrm{S}y = (x \times y) + x$

Dans les deux systèmes ci-dessus, l'opération à définir (l'addition ou la multiplication) apparaît à la fois à gauche et à droite du signe =. Cette situation est typique des définitions récursives. Une fonction récursive est une fonction qui peut être définie au moyen d'équations récursives comme ci-dessus.
Malheureusement, quand on combine des fonctions récursives, on n'est souvent plus en mesure de faire aboutir tous les calculs. C'est pourquoi on préfère la notion de fonction partielle récursive, c'est-à-dire une fonction définie par un système d'équations tel que les calculs peuvent, pour certaines valeurs, ne pas se terminer.
Pour une fonction partielle récursive $f$, on utilise une convention d'écriture très pratique : $f(x) = y$ signifie « si le calcul de $f(x)$ se termine, alors la valeur calculée est égale à $y$ ».

Ces notions « passent » très simplement des fonctions aux prédicats. Un prédicat R est récursif si sa fonction caractéristique, définie par

$c(n) = 1$ si $\mathrm{R}(n)$ est vrai
et $c(n) = 0$ si $\mathrm{R}(n)$ est faux

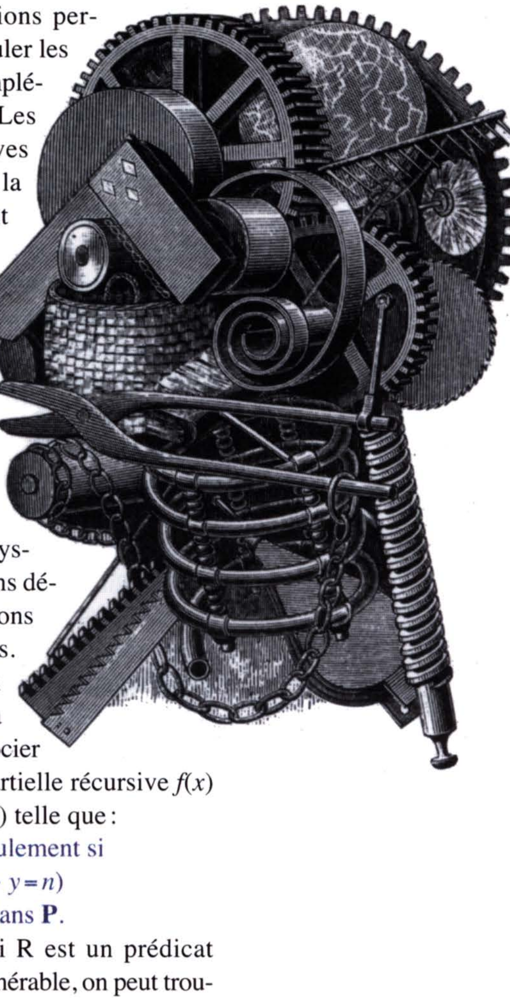
est récursive.

R est récursivement énumérable si la fonction définie par

$c(n) = 1$ si $\mathrm{R}(n)$ est vrai
et $c(n)$ indéfini si $\mathrm{R}(n)$ est faux

est partielle récursive.
Si le complémentaire (ou la négation) de R est récursivement énumérable, on dit que R est co-récursivement énumérable.
On se convainc aisément que R est récursif s'il est à la fois récursivement énumérable et co-récursivement énumérable.

## Calculabilité et prouvabilité



Ces quelques notions permettent de reformuler les théorèmes d'incomplétude de Gödel. Les équations récursives pour l'addition et la multiplication sont exactement les axiomes définissant ces opérations dans l'arithmétique de Peano, désignée par **P**.
On peut généraliser cette remarque et écrire dans le système **P** les équations définissant les fonctions partielles récursives.
En effet, comme on le sait grâce à Gödel, on peut associer à toute fonction partielle récursive $f(x)$ une formule $\varphi(x, y)$ telle que :

$f(m) = n$ si et seulement si
$\forall\, y\ (\varphi(m, y) \Leftrightarrow y = n)$
est prouvable dans **P**.

Par conséquent, si R est un prédicat récursivement énumérable, on peut trouver une formule $\varphi(x)$ telle que :

$\mathrm{R}(n)$ est vrai si et seulement si
$\varphi(n)$ est prouvable dans **P**.

Ces équivalences peuvent être déclinées pour des prédicats co-récursivement énumérables ou récursifs. On aurait tort de penser que la traduction n'est possible que dans un sens (des équations récursives vers l'arithmétique) : il est strictement équivalent de dire qu'une fonction est récursive ou qu'il existe une formule $\varphi(x, y)$ telle que :

$f(m) = n$ si
$\forall\, y\, (\varphi(m, y) \Leftrightarrow y = n)$
est prouvable dans **P**.
$f(m)$ est indéfini s'il n'existe pas de $n$ dans $\mathbb{N}$ tel que
$\forall\, y\, (\varphi(m, y) \Leftrightarrow y = n)$
est prouvable dans **P**.

En effet, on peut exprimer la prouvabilité d'une formule dans l'arithmétique de Peano au moyen d'un système d'équations. Cette propriété est un des ingrédients essentiels de la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Elle exprime, entre autres, que l'ensemble des nombres de Gödel de formules démontrables dans **P** est un prédicat récursivement énumérable (il n'est pas récursif, auquel cas on pourrait «décider» de la prouvabilité de toute formule écrite dans le langage de l'arithmétique).

Il y a plus : les résultats de Gödel s'appliquant à tout système d'axiomes suffisamment riche pour y faire des mathématiques non triviales, on peut remplacer, dans la courte discussion qui précède, **P** par un autre système « raisonnable » sans modifier le moins du monde la classe des fonctions partielles récursives. Cette identité entre calculabilité et prouvabilité traduit une affinité plus profonde et plus subtile entre calculs et preuves. C'est ce qui fonde l'approche logique « moderne » des langages de programmation.

*Il n'existe pas de « programme » permettant de décider si l'exécution d'un « programme » G sur une entrée Y se terminera.*

## La thèse de Church

Les fonctions partielles récursives (dans la suite, on laissera tomber l'épithète « partielle(s) ») sont évidemment calculables. Peut-on en trouver d'autres ? On vient de voir qu'on ne gagne rien à considérer les fonctions définies à partir d'une formule prouvable dans un système d'axiomes au moins aussi riche que **P**. En fait, toutes les tentatives sérieuses pour parvenir à une définition mathématique rigoureuse des fonctions calculables ont désespérément abouti au même ensemble de fonctions. Cela justifie la fameuse thèse de Church, qui affirme que les fonctions calculables sont exactement les fonctions récursives. Cela n'est nullement un axiome, encore moins un théorème, puisqu'il lie une notion imprécise (la calculabilité) à un concept mathématiquement défini.

La confiance dans ce postulat repose en grande partie sur la démonstration que les grands modèles de la calculabilité ($\lambda$-calcul, machine de Turing, fonctions récursives, etc.) qui ont vu le jour dans les années 1930, sont équivalents : une fonction calculable selon un des modèles susmentionnés l'est forcément selon tous les autres. Attention, cela n'entraîne pas qu'il revienne au même de faire les calculs dans l'un ou l'autre modèle !

## Programme universel

Une manière de bien cerner les contours de la calculabilité est d'introduire une fonction récursive universelle (à deux arguments) $f(x, y)$ capable de simuler le comportement de toutes les fonctions récursives à un argument. Cela signifie que pour toute fonction récursive $g$, il existe un entier naturel $p$ qui vérifie :

pour tous $m$ et $n$, $g(m) = n$
si et seulement si $f(p, m) = n$.

Cela s'exprime également en disant que l'exécution du « programme » $f$, quand on lui passe deux entrées $x$ et $y$ dont la première est le code d'un « programme » $g$, simule l'exécution de $g$ sur l'entrée $y$. En particulier, si l'exécution de $g$ ne se termine pas lorsqu'on la lance sur l'entrée $y$, alors l'exécution de $f$ ne se termine pas lorsqu'on la lance sur les entrées $x$ et $y$. L'existence d'une fonction récursive universelle signifie, pour tout langage de programmation suffisamment riche, l'existence d'un auto-interpréteur.

On construit assez facilement $f$ en prenant pour $p$ le nombre de Gödel d'une formule représentant $g$. Tout aussi facilement, on construit un prédicat récursivement énumérable universel $R(x, y)$ : pour tout prédicat récursivement énumérable $Q(y)$, il existe un entier naturel $p$ qui vérifie :

pour tout $n$, $Q(n)$ si et seulement si $R(p, n)$.

Le prédicat (à un argument) défini par $\neg R(x, x)$ est co-récursivement énumérable mais n'est pas récursivement énumérable, sinon il existerait un entier naturel $p$ tel que :

> pour tout $n$, $\neg R(n, n)$
> si et seulement si $R(p, n)$
> et on aboutirait à une absurdité
> pour $n = p$.

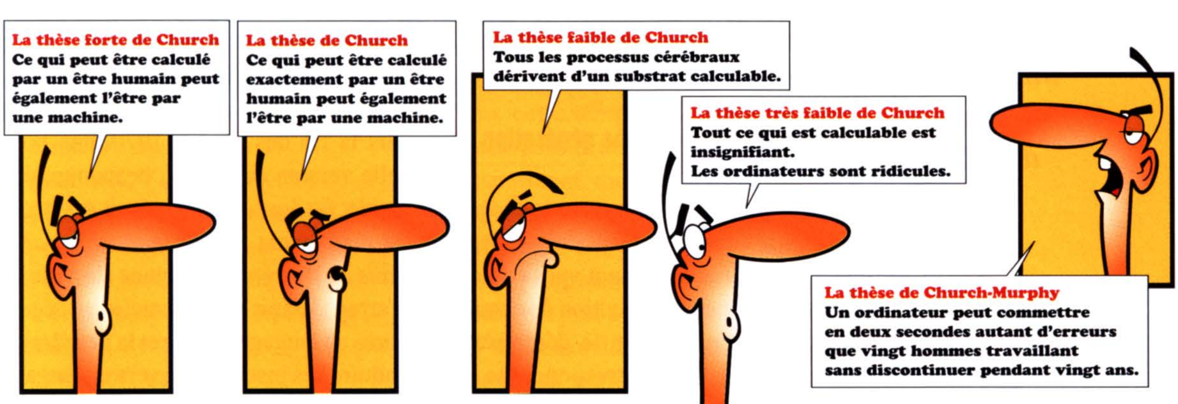
Il suffit de faire un pas de plus, en revenant à la définition de $\neg R(n, n)$ en termes de prouvabilité, pour retomber sur un avatar de l'énoncé « je ne suis pas prouvable ».

Plus concrètement, il n'existe pas de « programme » permettant de décider si l'exécution d'un « programme » $g$ sur une entrée $y$ se terminera ; si c'est le cas, l'exécution du programme universel sur le couple d'entrées $(g, y)$ s'arrêtera, sinon on est coincé… Ce problème de l'arrêt est un exemple frappant de prédicat récursivement énumérable, mais non récursif.

## Vers une théorie de la complexité

Avec l'apparition des ordinateurs, il est vite apparu qu'avant de lancer l'exécution d'un programme, des renseignements plus précis que la simple assurance de sa terminaison étaient nécessaires. Quel temps le calcul va-t-il prendre ? Quel espace mémoire le calcul va-t-il requérir ? Ces questions sont d'importance considérable pour un informaticien, soucieux d'utiliser au mieux des ressources forcément limitées. Pour pouvoir bâtir une théorie mathématique de la complexité, un modèle de la calculabilité comme les fonctions récursives ou la prouvabilité dans **P** ne suffit pas : il faut un authentique modèle de calcul, qui permette de coder les données de façon réaliste, de mesurer rigoureusement le nombre de pas d'exécution et l'espace de travail occupé. La proposition généralement la plus acceptée est celle faite par A. Turing en 1936 (voir l'article « Les machines de Turing »).

**C. T.**



par Nicolas delerue

# Programmer en logique : le prolog

**Les logiciens disposent d'un langage de programmation spécifique pour écrire des programmes proches des formulations qu'ils utilisent usuellement : le Prolog.**

*Il existe plusieurs versions modernes du Prolog utilisant des syntaxes différentes et toutes reposent sur la machine abstraite de Warren.*

La plupart des langages de programmation traditionnels sont des langages dits « séquentiels », c'est-à-dire que les lignes du programme correspondent chacune à une suite d'instructions devant être exécutées par l'ordinateur au moment où il lit la ligne. Ce fonctionnement est très utile pour la plupart des tâches que l'on demande à un ordinateur, mais n'est pas du tout adapté aux formulations usuellement employées par les logiciens. Pour traiter de problèmes de logique, ils disposent donc de leur propre langage : le Prolog (qui signifie « PROgrammation et LOGique » ou « PROgramming in LOGic »).

## Un langage de quatrième génération

Le langage Prolog repose sur la *théorie des clauses* de Horn. Dans cette théorie les formules (clauses) sont vues comme des programmes. L'exécution de chaque programme consiste en la démonstration de la formule correspondante en fournissant un résultat qui rende l'équation initiale vraie. De plus, il existe toujours, pour une clause de Horn, une stratégie de recherche de la preuve. Dans le milieu des années 1970, Kowalski proposa une formulation de la résolution des clauses de Horn sous forme de procédures (c'est-à-dire sous une forme exécutable par un ordinateur). Cette formulation fut utilisée par une équipe de chercheurs marseillais pour écrire un démonstrateur de théorèmes qu'ils appelèrent PROLOG ( PROgrammation et LOGique). Le premier système de programmation logique était né !

La première version de Prolog était écrite en Fortran et utilisait des algorithmes qui le rendaient assez lent. Cependant vers la fin des années 1970, une nouvelle version de Prolog, beaucoup plus rapide, fut écrite. Elle reposait sur ce qui est maintenant appelé *la machine abstraite de Warren*. La machine abstraite de Warren définit les instructions nécessaires au langage Prolog et la manière de traduire ces instructions vers un langage de bas niveau (c'est à dire un langage

compris par l'ordinateur). Il existe plusieurs versions modernes du Prolog utilisant des syntaxes différentes (mais l'esprit est le même) et toutes reposent sur la machine abstraite de Warren.
Il a été démontré que la programmation en clause de Horn sur laquelle repose le Prolog est une programmation calculatoirement complète, c'est-à-dire que toute fonction associant un résultat à un ensemble de données initiales peut être écrite en Prolog. De plus la programmation en Prolog est plus proche du langage humain que la programmation avec d'autres langages, ce qui fait que le Prolog est considéré comme un langage de 4e génération et a servi de base aux recherches japonaises en vue de l'établissement d'un langage de 5e génération.

## Deux points sont-ils connectés ?

Un exemple de problème très facile à résoudre en Prolog mais beaucoup plus compliqué avec d'autres langages est la détermination d'un chemin entre deux points.
Prenons les points de la figure 1, ci-contre comme exemple.

Tout d'abord comment savoir s'il existe un chemin entre deux point X et Y ? Il est possible de dire qu'il existe un chemin entre X et Y si X et Y sont connectés (par un lien bleu) ou si X est connecté à un point Z et qu'il existe un chemin de Z à Y, ce qui peut se traduire avec des descripteurs sous la forme :
∃ **chemin**(X, Y) si (**lien**(X, Y)
ou (∃ Z/(**lien**(X, Z)) et (**chemin**(Z, Y))
Les cas où **lien**(X, Y) est vrai devant être définis préalablement.
La même chose s'écrira en Prolog :
**chemin**(X, Y) :-
    **lien**(X, Y).
**chemin**(X, Y) :-

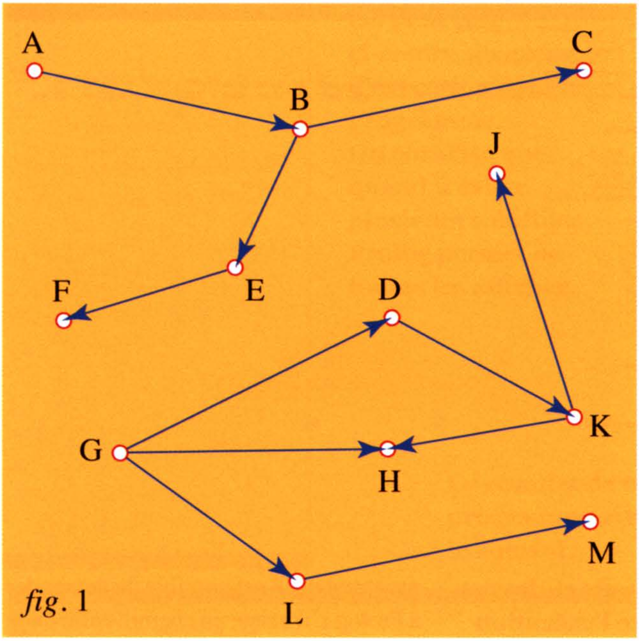


*fig.* 1

    **lien**(X, Z),
    **chemin**(Z, Y).
À ceci il faut ajouter des instructions indiquant les liens. Ici il est préférable d'utiliser des liens à sens unique. En effet, si les liens vont dans les deux sens, le démonstrateur peut « boucler » (de X à Y puis de Y à X). Au prix de quelques complications cela peut être évité.
On constate que quand une définition correspond à une clause A ou à une clause B, il suffit de donner les deux clauses. Prolog tentera alors de prouver l'une puis l'autre. Pour demander à l'utilisateur de taper quelque chose, Prolog indique :
**| ?-**
Dans cet exemple, la première commande permet de charger le programme. Au moment du chargement du programme, Prolog le compile et indique à l'utilisateur s'il y a eu des erreurs. Une fois le programme chargé en mémoire, Prolog est prêt à répondre aux requêtes de l'utilisateur. La seconde instruction de cet exemple permet d'afficher le code du programme. Les instructions suivantes

```
Exemple Prolog 1
Exemple Prolog Tangente 1 > gprolog
GNU Prolog 1.2.1
By Daniel Diaz
Copyright (C) 1999,2000 Daniel Diaz
| ?-  ['connection.pro'].
compiling /programmation/prolog/tangente/connection.pro for byte code...
/programmation/prolog/tangente/connection.pro compiled, 16 lines read - 1409 bytes written, 22 ms

yes
| ?-  listing.

chemin(A, B) :-
        lien(A, B).
chemin(A, B) :-
        lien(A, C),
        chemin(C, B).

lien(a, b).
lien(b, c).
lien(b, e).
lien(e, f).
lien(g, d).
lien(d, k).
lien(k, j).
lien(k, h).
lien(g, h).
lien(g, l).
lien(l, m).

yes
| ?- chemin(a,b).

true ?

yes
| ?- chemin(a,e).

true ?

yes
| ?- chemin(a,m).

no
| ?- chemin(e,a).

no
| ?- 
```

**L'exemple ci-dessus montre l'exécution de ce programme avec l'interpréteur GNU Prolog (disponible gratuitement à l'adresse indiquée à la fin de cet article).**

montrent qu'il est possible de demander à Prolog s'il existe un chemin entre deux points et celui-ci répond alors par l'affirmative ou la négative. Dans le cas où il a trouvé un chemin, il affiche qu'il a trouvé et il demande à l'utilisateur si celui-ci veut plus de réponses (ce qui n'est pas utile dans le cas présent).

Le langage Prolog fait la différence entre les majuscules et les minuscules et c'est d'ailleurs ce qui lui permet de faire la différence entre la variable X et la valeur *x*. Ainsi la définition

**chemin**(*x*, *y*)

définit le chemin entre *x* et *y* alors que

**chemin**(X, Y)

cherche tous les chemins possibles, le début de ces chemins étant, à chaque fois, placé dans la variable X et la fin dans la variable Y. Il est aussi possible de taper :

**chemin**(*a*, Y).

Prolog renverra alors tous les chemins existants qui commencent par le point *a*.

*La programmation en Prolog est plus proche du langage humain que la programmation avec d'autres langages.*

## Trouver le chemin le plus court

Savoir que les points sont connectés est certes intéressant, mais il serait préférable de connaître le trajet à suivre. Ce qui peut se formuler par :

**chemin**(X, Y, Trajet) :-
  **lien**(X, Y),
  **Trajet** = [X, Y].
**chemin**(X, Y, Trajet) :-
  **lien**(X, Z),
  **chemin**(Z, Y, TrajZY),
  **append**([X], TrajZY, Trajet).

Dans cet exemple les crochets (dans la première définition) permettent de définir une liste dans laquelle on met deux éléments X et Y. Dans la seconde définition l'instruction **append** permet de réunir deux listes (la liste [X] et la liste TrajZY) pour en produire une troisième (Trajet).

Cet exemple fait appel à la notion de résultat retourné par le Prolog. En effet lors de l'appel à chemin le troisième argument correspond à la variable dans laquelle Prolog doit mettre le résultat, ce résultat étant exploité à la ligne suivante.

Prolog permet également de définir une négation, ce qui sera indispensable pour rechercher le chemin le plus court entre deux points.

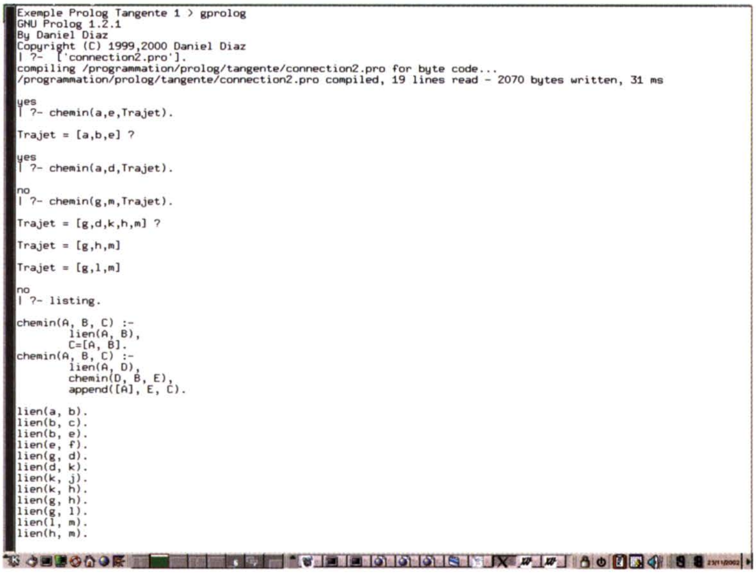
Pour définir le chemin le plus court, il faut d'abord définir ce qu'est un chemin trop long pour être le plus court.

C'est simplement un chemin tel qu'il existe un chemin plus court :

**tropLong**(X, Y, D1) :-
  **chemin**(X, Y, _ , D2),
  D2 < D1.

Dans cette définition, puisque le trajet renvoyé par l'appel à chemin n'est pas important, on ne lui donne pas de nom, ce qui se symbolise par un blanc souligné (_).

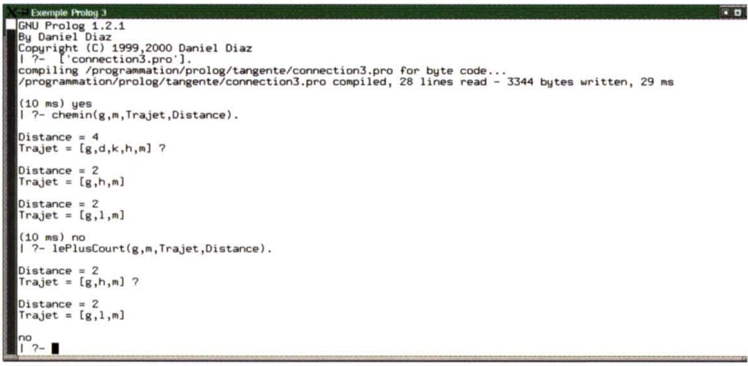
Pour trouver un chemin plus court, il suffit de chercher un chemin qui ne soit pas trop long en utilisant le symbole de la négation (\+) :



```
Exemple Prolog Tangente 1 > gprolog
GNU Prolog 1.2.1
By Daniel Diaz
Copyright (C) 1999,2000 Daniel Diaz
| ?-  ['connection2.pro'].
compiling /programmation/prolog/tangente/connection2.pro for byte code...
/programmation/prolog/tangente/connection2.pro compiled, 19 lines read - 2070 bytes written, 31 ms

yes
| ?- chemin(a,e,Trajet).

Trajet = [a,b,e] ?

yes
| ?- chemin(a,d,Trajet).

no
| ?- chemin(g,m,Trajet).

Trajet = [g,d,k,h,m] ?

Trajet = [g,h,m]

Trajet = [g,l,m]

no
| ?- listing.

chemin(A, B, C) :-
        lien(A, B),
        C=[A, B].
chemin(A, B, C) :-
        lien(A, D),
        chemin(D, B, E),
        append([A], E, C).

lien(a, b).
lien(b, c).
lien(b, e).
lien(e, f).
lien(g, d).
lien(d, k).
lien(k, j).
lien(k, h).
lien(g, h).
lien(g, l).
lien(l, m).
lien(h, m).
```

**On peut voir ci-contre un exemple d'exécution d'un tel programme.
On constate que quand il existe plusieurs solutions, Prolog permet de toutes les afficher.**

**Le résultat de ce programme est le suivant :**



```
Exemple Prolog 3
GNU Prolog 1.2.1
By Daniel Diaz
Copyright (C) 1999,2000 Daniel Diaz
| ?-  ['connection3.pro'].
compiling /programmation/prolog/tangente/connection3.pro for byte code...
/programmation/prolog/tangente/connection3.pro compiled, 28 lines read - 3344 bytes written, 29 ms

(10 ms) yes
| ?- chemin(g,m,Trajet,Distance).

Distance = 4
Trajet = [g,d,k,h,m] ?

Distance = 2
Trajet = [g,h,m]

Distance = 2
Trajet = [g,l,m]

(10 ms) no
| ?- lePlusCourt(g,m,Trajet,Distance).

Distance = 2
Trajet = [g,h,m] ?

Distance = 2
Trajet = [g,l,m]

no
| ?-
```

**plusCourt**(X, Y, D) :-
  **\+ tropLong**(X,Y,D).

Enfin le chemin le plus court est le seul chemin vérifiant la propriété « plusCourt » :

**lePlusCourt**(X, Y, Trajet, D) :-
  **chemin**(X, Y, Trajet, D),
  **plusCourt**(X, Y, D).

Le langage Prolog permet donc d'écrire des codes très courts et très performants lorsqu'il s'agit de démontrer une propriété ou de parcourir des arbres, alors qu'avec un langage de programmation classique, écrire ce genre de code est souvent long et ennuyeux. Cette propriété en fait un langage très utilisé en intelligence artificielle. Écrit initialement pour démontrer la validité d'équations, Prolog déborde maintenant largement des applications prévues par ses inventeurs…

N. D.

**Références**

Le site officiel du PROLOG (il est possible d'y télécharger le GNU Prolog) :
**http://pauillac.inria.fr/~diaz/gnu-prolog/**
Des guides pour en savoir plus et apprendre à programmer en PROLOG (en anglais) :
**http://cbl.leeds.ac.uk/~tamsin/prologtutorial/**
**http://www.csupomona.edu/~jrfisher/www/prolog_tutorial/intro.html**
Des éléments sur la théorie du PROLOG :
**http://www.irisa.fr/lande/ridoux/LPAZ/node2.html**
Un livre d'introduction à la machine abstraite de Warren :
**http://www.vanx.org/archive/wam/wam.html**

# Géométrie automatique

**Comment prouver que deux triangles sont égaux? Depuis Euclide, ce sujet est le prétexte à de petits problèmes géométriques aux démonstrations élégantes.**

**Euclide de Max Ernst, 1945.**

On trouve dans les vieux livres de géométrie plane, un théorème connu sous le nom de « cas d'égalité des triangles ». Il affirme que deux triangles du plan sont égaux (en fait, isométriques) si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est remplie :

1) ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.
2) ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.
3) ils ont trois côtés égaux chacun à chacun.

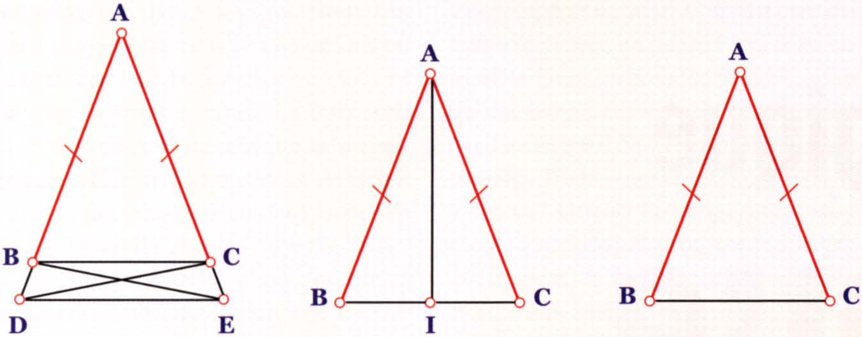
Un triangle isocèle étant défini comme un triangle ayant deux côtés de même longueur, un des premiers théorèmes de la géométrie élémentaire énonce qu'**un triangle isocèle possède au moins deux angles égaux**.
La première démonstration connue est celle d'Euclide dans ses *Éléments*.

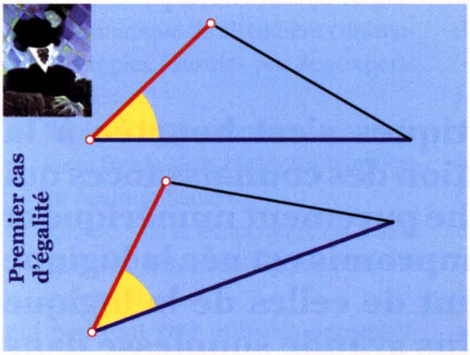
Un triangle isocèle ABC étant donné (AB = AC), Euclide prolonge les deux côtés égaux de façon à avoir AD = AE. D'après le premier cas d'égalité des triangles, les triangles DAC et EAB sont égaux. Euclide compare ensuite les triangles CBD et BCE : BD = CE, CD = BE et BC est commun aux deux triangles. CBD et BCE sont donc égaux d'après le troisième cas d'égalité. L'égalité des angles en B et C du triangle isocèle ABC en découle immédiatement.

La démonstration classique des manuels scolaires du début du XX^e^ siècle introduit le milieu I du côté BC.

Les triangles ABI et ACI sont tels que : IB = IC, AB = AC et AI est commun aux deux triangles. Le troisième cas d'égalité des triangles permet de conclure : les angles de ABC de sommets B et C sont égaux.

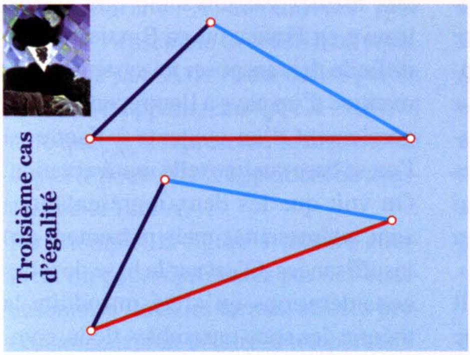
La géométrie euclidienne du plan ne pouvait laisser indifférents les pionniers de la démonstration automatique. C'est



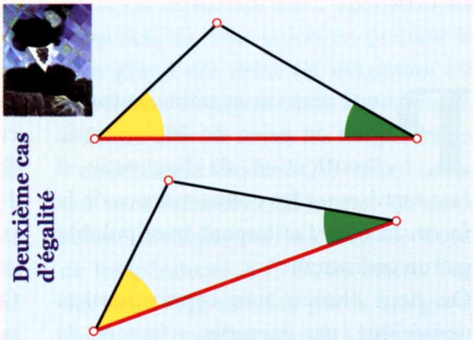




la première théorie qui fut axiomatisée (Euclide, puis Hilbert) et les résultats de plus de deux mille de recherche offre un immense champ d'exploration et de vérification. Le théorème du triangle isocèle réserva une petite surprise.
Voici sa démonstration « automatique ».

Comparons les triangles ABC et ACB : AB = AC ; AC = AB ; angle ABC = angle ACB. D'après le premier cas d'égalité des triangles : angle en B = angle en C.




Cette démonstration est un petit bijou : élégante et minimaliste (aucun ajout à la figure initiale). Au départ, une idée simple mais forte : comparer le triangle à lui-même ; au bout, une conclusion qui fuse. De quoi séduire même un mathématicien blasé. Les concepteurs du programme



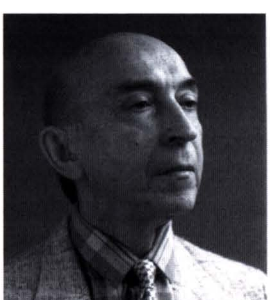

furent enchantés. Découvrir une preuve inédite dans un domaine aussi rebattu que la géométrie du viel Euclide n'est pas un mince exploit. Par acquis de conscience, ils firent une rapide recherche bibliographique et… déchantèrent ; « leur » démonstration avait été découverte par Pappus d'Alexandrie, dix-sept siècles auparavant.

**D. B.**

par B. Bouchon-Meunier

# La logique floue

**La création de systèmes automatiques s'est heurtée à la nécessité de trouver une représentation des connaissances qui soit intermédiaire entre une approche purement numérique et une approche symbolique. De ce compromis est née la logique floue, dont les règles se rapprochent de celles de la logique classique tout en permettant une plus grande souplesse dans le raisonnement.**



**Lotfi A. Zadeh**

Pour créer un système automatique de prise de décision, de classification, de diagnostic, il faut représenter les connaissances de la façon la plus facilement manipulable par un ordinateur.

On peut choisir une représentation numérique, par exemple, « Je mets la chaudière en position 3 quand la température extérieure est inférieure à 4 ° C », …, « Je mets la chaudière en position 0 quand la température extérieure est supérieure à 18 ° C », qui peut s'appuyer sur des données observées sur un thermomètre. Une telle représentation est peu conforme à ce que des êtres humains expriment spontanément, qui serait plutôt « Je mets la chaudière au maximum quand il fait vraiment froid », « J'éteins la chaudière quand il fait doux ». De plus, un découpage brusque ne correspond pas à la réalité des perceptions humaines, qui ne font pas de différence entre des températures de 17,8 ° C et de 18,2 ° C correspondant pourtant à une chaudière en position 1 et une chaudière éteinte.

On peut aussi choisir une représentation symbolique, par exemple « Il fait vraiment froid », « Il fait doux ». Mais une température « douce » ne correspond pas aux mêmes valeurs selon que l'on se trouve en France ou en Russie et il est difficile de transposer un système automatique d'un pays à l'autre, ou plus généralement d'un contexte à l'autre, si l'on se base sur une telle représentation.

On voit que les deux représentations sont intéressantes mais présentent des insuffisances. C'est sur la base de telles considérations qu'a été introduite la théorie des sous-ensembles flous, communément appelée logique floue (au sens large). Elle associe une définition numérique à des symboles ou mots du langage naturel et constitue donc une interface entre le numérique et le symbolique. Elle permet d'utiliser en même temps des connaissances exprimées de façon naturelle par des experts ou des utilisateurs et des données numériques fournies par des instruments de mesure ou des capteurs (de distance, de poids, etc.). Par exemple, un système de gestion automatique de chaudière contiendra des règles fournies par des experts telles que :

> Règle 1 : « si la température est vraiment froide alors régler le chauffage en position haute »,
> Règle 2 : « si la température est froide alors régler le chauffage en position intermédiaire »…

qui pourront être utilisées automatiquement en fonction des indications numériques précises fournies par un capteur de température.

## Théorie des ensembles flous

La logique floue a été introduite en 1965 à Berkeley par Lotfi A. Zadeh, qui a proposé le concept de sous-ensemble flou comme un assouplissement du concept de sous-ensemble de la théorie classique des ensembles, acceptant l'idée qu'un élément peut appartenir partiellement à deux classes. Plus précisément, soit X un univers (par exemple l'ensemble des réels), un *sous-ensemble flou* A de X est défini par sa fonction d'appartenance $f_A : X \to [0, 1]$ telle que $f_A(x)$ représente le degré avec lequel le point $x$ de X appartient au sous-ensemble flou A.

Par exemple, la figure 1 montre comment on peut représenter par des sous-ensembles flous les termes utilisés précédemment pour décrire la température. Une température de 0 ° C appartient ainsi tout à fait (avec un degré 1) au sous-ensemble flou « vraiment froid », alors qu'une température de 17 ° C appartient avec un degré 0,5 à chacun des sous-ensembles flous « modérément froid » et « doux ». Quand la température augmente progressivement, on passe graduellement de la catégorie « vraiment froid » à la catégorie « froid »…, le degré d'appartenance à la seconde augmentant au fur et à mesure que le degré d'appartenance à la première diminue.

La théorie des sous-ensembles flous permet de traiter des connaissances imprécises.

On définit des *opérations* sur les sous-ensembles flous qui étendent celles de la théorie des ensembles classiques. L'intersection de A et de B est définie en prenant le plus petit des deux degrés d'appartenance à A et B en chaque point de X (le *minimum* est l'opérateur de conjonction), leur union en prenant le plus grand des deux (le *maximum* est l'opérateur de disjonction). Par exemple, si Pierre affirme aimer les températures « modérément froides » (A) et Paul celles qui sont « douces » (B), tous les deux seront satisfaits par la catégorie floue de températures $A \cap B$, au moins l'un des deux sera satisfait par la catégorie floue de températures $A \cup B$, toutes deux représentées dans la figure 2. Une troisième opération consiste à définir le complément BC du sous-ensemble flou B, de fonction d'appartenance $f_{B^c}(x) = 1 - f_B(x)$ en tout point $x$ de X, par exemple le complément de « doux » correspond à « pas doux ». Munie de ces trois opérations, la théorie des sous-ensembles flous de X satisfait les mêmes propriétés que la théorie classique des

*La théorie des sous-ensembles flous abolit la non-contradiction et le tiers exclu.*

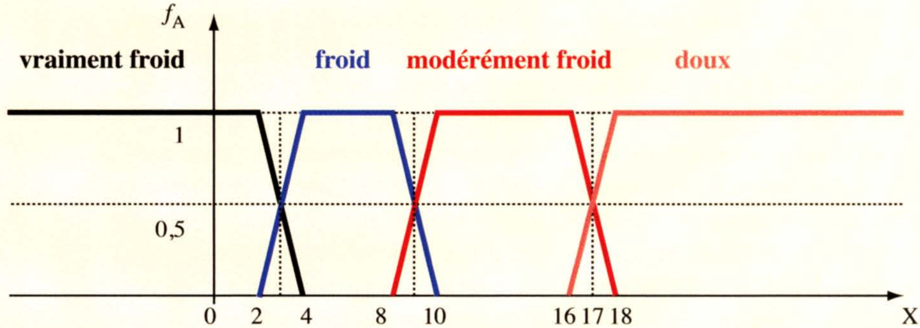



*Figure* 1 : Exemple de sous-ensembles flous décrivant la température

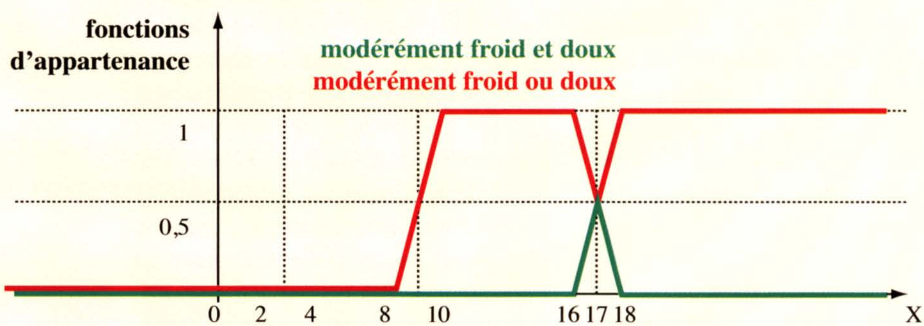



*Figure* 2 : Opérations sur les sous-ensembles flous

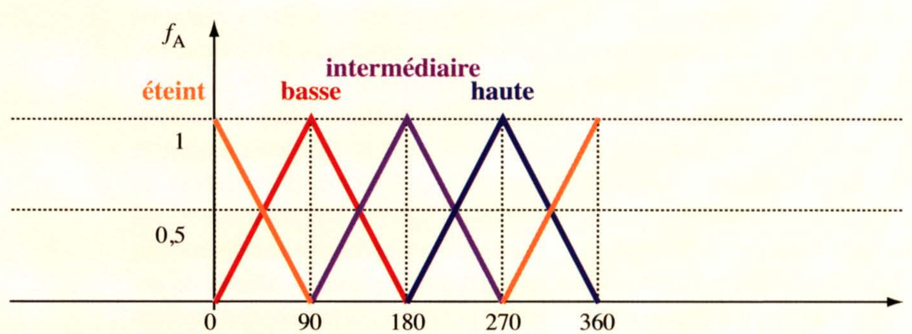



*Figure* 3 : Exemple de sous-ensembles flous décrivant la position du sélecteur de puissance ensembles, sauf celles de la non-contradiction ($A \cap A^c = \emptyset$), ce qui est naturel puisque c'est celle que l'on souhaite assouplir, et du tiers exclu ($A \cup A^c = X$).

## Raisonner en logique floue

Raisonner à partir de connaissances représentées en utilisant la théorie des ensembles flous constitue la *logique floue* (au sens strict). Elle consiste à tirer parti de l'imprécision manipulée pour gagner de la souplesse dans le raisonnement. Considérons les règles 1 et 2 ci-dessus qui expriment des liaisons imprécises entre la caractérisation de la température (telle qu'indiquée dans la figure 1) et celle du réglage de la chaudière (des descriptions floues de la position d'un sélecteur de puissance sont proposées dans la figure 3). Elles constituent des règles floues pouvant être utilisées en présence de données telles que « la température est relativement froide » ou « la température est d'environ 0° C », qui peuvent être différentes des descriptions mises en jeu dans les prémisses des règles, fournissant des conclusions sur le réglage de la chaudière, ce qui serait impossible en logique classique.

Plus formellement, la logique floue repose sur des propositions floues de la forme « V est A » où V est une variable, comme la température, définie sur un univers X et A une description floue de V, comme « froide ». Pour une variable W définie sur un univers Y, la règle floue la plus simple est de la forme :

(F) « si V est A alors W est B »,

associée à une implication floue introduite comme une généralisation de l'implication de la logique classique et définie par une fonction $r : X \times X \to [0, 1]$ pour rendre compte de la force $r(x, y)$ avec laquelle la règle se déclenche en $x$ et $y$. Il en existe plusieurs définitions, dont la plupart issues des logiques multivalentes et on peut citer par exemple l'implication de Kleene-Dienes qui généralise l'équivalence classique entre les propositions $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ :

$\mathbf{r}(x, y) = \max(1 - f_A(x), f_B(y))$ pour tout $x$ de X et $y$ de Y,

La méthode de raisonnement la plus utilisée est le modus ponens généralisé, qui consiste à utiliser une règle, telle (F), en présence d'une observation qui ne lui convient qu'imparfaitement :

(O) « V est A′ ».

La conclusion obtenue :

(C) « W est B′ »

est d'autant plus proche de « W est B » que A′ est compatible avec A.

Elle est définie, en tout point $y$ de Y, par la fonction d'appartenance :

$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T(f_{A'}(x), r(x, y))$, pour un opérateur T choisi en fonction de l'implication $r$ pour rester compatible avec le modus ponens classique, c'est-à-dire de telle sorte que l'on obtienne B′ égal à B dès que A′ est identique à A. Par exemple, pour l'implication indiquée, on peut utiliser l'opérateur dit de Lukasiewicz :

$$T(a, b) = \max(a + b - 1, 0).$$

## Incertitudes et règles graduelles

Il existe une grande variété d'implications floues et elles ont des comportements qui peuvent différer en matière d'expressibilité de la conclusion obtenue, d'apparition d'incertitude ou de traitement de la gradualité par exemple. Certaines d'entre elles permettent de modéliser des règles graduelles, très souvent émises par des experts, telles que « plus V est A, plus W est B », comme

*La logique floue consiste à tirer parti de l'imprécision manipulée pour gagner de la souplesse dans le raisonnement.*

« plus il fait froid, plus j'augmente le chauffage » ou encore des règles faisant intervenir des incertitudes telles que « plus V est A, plus il est certain que W est B » comme « plus il fait froid, plus il est certain que les orangers gèlent ».

Notons à ce propos que l'*incertitude* sur une proposition floue «V est A» peut être identifiée comme l'existence d'une valeur minimale non nulle de la fonction d'appartenance.

Ainsi, la proposition P = « V est A avec une incertitude $\epsilon$ » est associée à la fonction d'appartenance $f_P(x) = \max(f_A(x), \epsilon)$ pour tout $x$ de X, cette interprétation étant issue de la *théorie des possibilités* qui complète la théorie des sous-ensembles flous en traitant des incertitudes (doutes sur la validité de connaissances) alors que celle-ci traite des imprécisions (connaissances exprimées en langage naturel ou de façon approximative).

À titre d'exemple, l'observation (O) « la température est de 0 ° C » fournit à l'aide de la règle 1 la conclusion (C) « régler le chauffage en position haute » puisque 0° appartient à la catégorie « vraiment froide » avec un degré 1. La règle 2 fournit une conclusion indéterminée, de fonction d'appartenance égale à 1 partout, puisque 0 ° C appartient à la catégorie « froide » avec un degré 0. Pour agréger ces deux conclusions partielles, on effectue leur intersection, ce qui donne finalement « régler le chauffage en position haute ».

On peut ensuite exploiter directement cette conclusion exprimée avec des mots fournis par les experts et représentés par des sous-ensembles flous. Si l'on a besoin d'une conclusion précise, comme c'est le cas dans la commande floue de processus par exemple, on « défuzzifie » la conclusion floue obtenue, c'est-à-dire que l'on choisit le point de Y le plus représentatif qui correspondra, dans l'exemple considéré, à la position du sélecteur de puissance sur 270 ° (valeur maximale de la fonction d'appartenance de «haute» dans la figure 3).

*Les implications floues ont des comportements qui peuvent différer en matière d'expressibilité de la conclusion obtenue, d'apparition d'incertitude ou de traitement de la gradualité.*

Il faut noter pour terminer que le raisonnement en logique floue ne se limite pas à ce schéma déductif. La théorie des sous-ensembles flous apporte de la souplesse et de la gradualité dans la plupart des schémas de raisonnement de logiques non classiques traditionnelles. Le raisonnement par défaut peut ainsi exploiter des quantificateurs tels que « généralement » représenté par des sous-ensembles flous de l'univers des pourcentages. Le raisonnement temporel peut tirer parti d'intervalles temporels imprécis représentés par des sous-ensembles flous. Le raisonnement abductif flou peut, de façon duale du raisonnement déductif, exploiter une règle de la forme (F) en présence d'une donnée de la forme « W est B′ », avec B′ différent de B, pour en tirer une hypothèse « V est A′ », A′ étant plus ou moins proche de A. Le raisonnement inductif ou raisonnement à partir d'exemples peut se fonder sur des exemples décrits imprécisément ou bien décrits tantôt symboliquement, tantôt numériquement, l'interface entre les différents types de descriptions se faisant par l'intermédiaire de sous-ensembles flous. D'autres formes de raisonnement telles que le raisonnement par analogie ou le raisonnement interpolatif admettent également une contre-partie floue.

**B B.-M.**

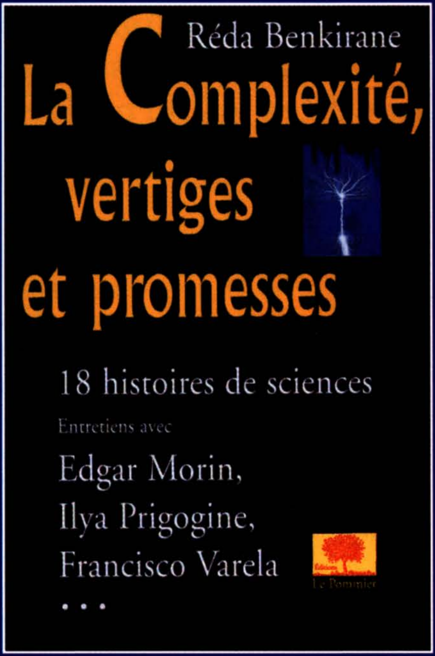
# La complexité, vertiges et promesse

La méthode de Descartes, tout le monde connaît. En résumé, pour appréhender un problème « compliqué », on le découpe en problèmes « plus simples » que l'on résout. Ensuite, il suffit de « recoller » les solutions locales pour obtenir la solution globale. Seulement, dans bon nombre de situations « le tout est plus que la somme des parties ». Ce constat que l'on peut faire au quotidien (« une maison est plus qu'un tas de briques ! ») est à la base de ce qu'on appelle la pensée complexe.

Le principe de complexité (provenant de complexus, signifiant ce qui est tissé ensemble) consistant à distinguer mais à relier les constituants d'un tout est au cœur de nombreuses recherches contemporaines. Sous forme d'entretiens habilement menées, Réda Benkirane explore ce thème en interrogeant ceux qui sont confrontés à la complexité.

Ainsi ces 18 histoires de sciences amènent à côtoyer des chercheurs venus de diverses disciplines (sciences exactes ou sciences humaines).

Les lecteurs de *Tangente* seront sans doute sensibles aux entretiens avec Ivar Ekeland, Yves Pomeau, Gregory Chaitin ou Laurent Nottale... Ils auront également cœur à s'interroger avec Edgar Morin ou Michel Serres sur le sens des mots, ou à apprendre avec Jean-Louis Deneubourg comment procèdent « les insectes [qui] n'ont pas de plans mais construisent des cathédrales » !




**La complexité, vertiges et promesses, 18 histoires de sciences.**
Réda Benkirane.
Éd. Le Pommier, 2002.

Bref, un travail colossal et remarquable qui ne se lit pas linéairement (et c'est la moindre des choses pour un tel sujet) mais selon ses pensées du moment. Forcément complexes.

N. V.

par Nicolas Delerue

# Les logiques non classiques

**La logique telle que nous l'étudions au lycée n'est pas la seule forme de logique existante. Voici quelques autres types de logiques dites « alternatives » qui ont été explorées au cours du XXe siècle.**

## Les logiques modales et leurs dérivées

Les logiques modales proposent d'ajouter de nouveaux *modes* à ceux de la logique classique. Ainsi un terme peut être *nécessaire* ou *possible*. Les logiques dites *temporelles* ajoutent une perspective temporelle (d'où leur nom) en considérant aussi des modes tels que « X sera toujours… », « X sera... », « X a toujours été… » ou encore « X a été... ». La logique *déontique*, quant à elle, s'intéresse plus à ce qui est permis en utilisant des modes tels que « Il est permis que… », « Il est obligatoire que... » ou « Il est interdit que... ». D'autres formes de logiques modales, dites *épistémiques*, utilisent des modes tels que « X croit que… » ou « X sait que… ».

## Les logiques d'ordre supérieur et la théorie des types

Pourquoi faire la différence entre opérateurs et opérandes ? Dans les logiques d'ordre supérieur cette distinction n'a plus lieu d'être et tous les objets sont à la fois opérateurs et opérandes. Cela peut paraître compliqué mais a inspiré les informaticiens qui en ont dérivé la programmation orientée objet sur laquelle repose la plupart des langages modernes (Java, C++, …). L'un des fondateurs des logiques d'ordre supérieur, au début du XXe siècle, fut Bertrand Russell.

## Les logiques à plusieurs valeurs

Le monde qui nous entoure n'est pas manichéen, tout n'est pas vrai ou faux. Certains logiciens se sont donc intéressés à des logiques où trois états sont possibles : « Vrai », « Faux » ou « Indéterminé ». Plusieurs systèmes de règles possibles ont été proposées par Bochvar, Kleene, et Lukasiewicz respectivement (le résultat d'une opération impliquant « Vrai » ou « Faux » et « Indéterminé » est différent selon ces trois logiciens).

Il est possible d'aller encore plus loin et de considérer qu'il existe plusieurs degrés de « Vrai » et de « Faux », ceux-ci pouvant, par exemple, être « fort » ou « faible ». Un opération impliquant un « Vrai fort » avec un « Faux faible » ne donnera pas le même résultat qu'avec un « Vrai faible » et un « Faux fort ».

## La logique probabiliste

La logique probabiliste étend l'idée des logiques à plusieurs valeurs en considérant que toutes les valeurs sont possible entre 0 (faux) et 1 (vrai).
Chaque assertion est créditée d'une certaine probabilité qui peut ensuite être manipulée selon les règles de la logique probabiliste. Ainsi, alors qu'en logique classique il n'est pas possible de faire un lien entre (1) « À midi le ciel est gris » et (2) « À 13 h il pleut » – (1) n'implique pas (2) –, en logique probabiliste ces deux événements seront connectés par une implication (probabilité) non nulle.

## Les logiques non monotones ou logiques des défauts

Dans la réalité, nous sommes souvent amenés à tirer des conclusions sans avoir en main tous les éléments nécessaires à notre décision. En termes de logique classique, si un élément nouveau (appelé un axiome), non incompatible avec les précédents, vient s'ajouter, il ne peut pas nous faire changer nos conclusions (appelées théorèmes), ce qui est contraire à ce qui peut se produire dans la réalité. En logique classique, le nombre de théorèmes ne peut que croître quand le nombre d'axiomes augmente, c'est donc une logique *monotone*. Les logiques *non monotones* ou logiques des *défauts*, au contraire, permettent au nombre de théorèmes de décroître quand le nombre d'axiomes augmente, c'est-à-dire qu'une information nouvelle peut remettre en cause des conclusions antérieures.

## La logique quantique

La logique quantique se base sur la physique quantique découverte au début du XX^e^ siècle et traitant principalement des objets plus petits que les atomes. Alors qu'en physique classique un objet doit être dans un état A ou B (par exemple chaud ou froid), en physique quantique, il peut être dans une superposition des états A et B (ce qui est difficile à admettre pour nous esprits vivant dans un monde classique) ! La logique quantique permet donc de faire des opérations avec des « états superposés ». Cela intéresse beaucoup les informaticiens, par exemple pour calculer les diviseurs d'un nombre. En effet, alors qu'en logique classique, il faut diviser ce nombre successivement par tous ses diviseurs possibles, en logique quantique, il suffit de le diviser une seule fois par une superposition de tous ses diviseurs possibles pour trouver lesquels donnent un résultat « vrai ».

**N. D.**

Note : Les logiques non classiques sont principalement enseignées en 3^e^ cycle d'université, les exemples ci-dessus sont donc volontairement simplifiés et doivent être considérés avec précaution.

**Pour en savoir plus :**

**Sur les logiques modales (en anglais)**
**http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/**
**Logiques à plusieurs valeurs (en anglais)**
**http://www.columbia.edu/~av72/non_classical_logics/LectureNotes/Lecture_03.pdf**

 par Jean-Louis Krivine

# La correspondance de Curry-Howard

**La notion moderne de programme est devenue un outil fondamental de la théorie de la démonstration. Son importance ne cesse de grandir dans bien d'autres sciences : la biologie, les neurosciences, les sciences cognitives, etc. Et, avec la diffusion massive de l'informatique, elle a aussi envahi notre vie de tous les jours. Mais nous nous contenterons ici de parler uniquement de son impact sur les mathématiques et la logique.**

L'évolution du concept de fonction a accompagné, jusqu'à aujourd'hui, celle de l'axiomatisation des mathématiques. Son dernier avatar, qui est la notion moderne de *programme*, est devenu un outil fondamental de la théorie de la démonstration. Revenons tout d'abord sur l'histoire de la notion de fonction, et ce qu'on pourrait appeler (de façon très schématique) les fonctions au sens d'Euler et les fonctions au sens de Riemann.

*Pour Riemann, une fonction est une « boîte noire » où toute idée de calcul, ou de formule, a disparu.*

## Brève histoire de la notion de fonction

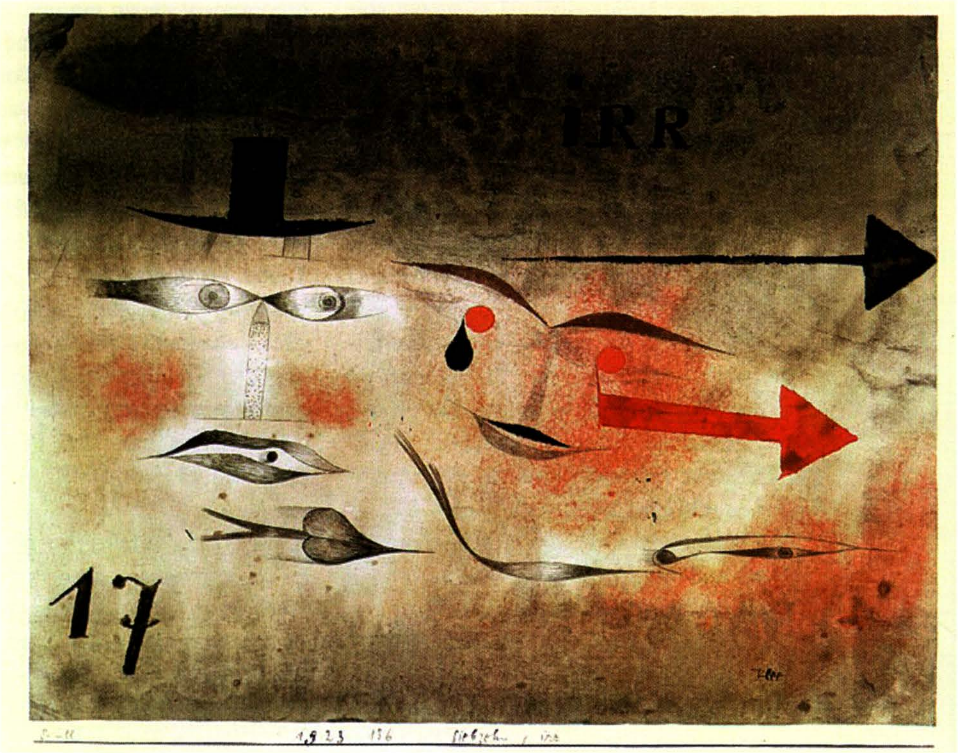
Pour Euler, une fonction est donnée par une « formule », que celle-ci permette, ou non, le calcul de la fonction.
Par exemple,

$$e^x ;$$
$$1+x+\ldots+x^n+\ldots ;$$
$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t ;$$

sont considérées comme des fonctions d'une variable $x$. Le domaine n'est pas précisé a priori, et la formule représente une « tentative » de calcul de la fonction, qui peut ne pas aboutir.
Par exemple, l'expression $1+x+\ldots+x^n+\ldots$ représente la fonction $1/(1-x)$ même si $|x|>1$, alors que cette série ne converge pas.

De même $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ représente la fonction $\Gamma$ même pour des valeurs négatives de $x$, pour lesquelles cette intégrale n'existe pas.

Bien entendu, on peut donner un sens à ces expressions, au moyen d'outils




***17 Astray*, Paul Klee, 1923. Kunstmuseum Öffentliche Kunstsammlung Bâle.**

mathématiques créés bien après Euler (séries formelles, prolongement analytique, distributions, opérateurs non bornés, etc.). Mais on est obligé de procéder au cas par cas, d'employer une méthode particulière pour chaque fonction. Il a toujours paru impossible d'obtenir une définition précise de la notion de fonction « à la Euler ». Du coup, cette notion a été abandonnée pendant fort longtemps, au profit de celle introduite par Riemann.
Mais, comme nous le verrons, la notion eulérienne de fonction a, depuis peu, fait un retour en force.

Avec Riemann, la perspective change du tout au tout, et on en vient à une approche qu'on appellerait maintenant « axiomatique » ; comme on le sait, cette tendance ne va faire que croître et embellir, et nous verrons à quoi tout cela va aboutir.

Toute idée de calcul, ou de formule, a disparu : une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une « boîte noire », c'est-à-dire un objet indéterminé, dont on ne connaît qu'une seule propriété : quand on lui donne un réel, elle rend un réel. On ne s'autorise à raisonner qu'à l'aide de cette seule propriété.
Quels avantages y a-t-il donc à brider ainsi le raisonnement ?

Cet article reprend dans sa quasi intégralité le texte de la conférence de J.-L. Krivine, intitulée « Fonctions, programmes et démonstrations » donnée le 23 mars 1994, dans le cadre de la journée « Les fonctions en mathématiques sous le concept, Babel ? ».
Depuis cette date, des contributions importantes (dont celles de l'auteur) ont fait évoluer la discipline, mais il nous a semblé que ce texte n'avait rien perdu de ses qualités et restait une excellente introduction à la « théorie de la démonstration ».

La rédaction de *Tangente*.

En fait, cela signifie que l'on va pouvoir maintenant démontrer des propriétés sur des classes de fonctions, et non plus, comme Euler, sur des fonctions particulières. Ou encore démontrer des propriétés négatives : telle fonction est continue sur ℝ, et nulle part dérivable. Le but de ce changement radical de point de vue est ce qu'on appelle la « rigueur » : il s'agit d'avoir des définitions précises des notions de fonction continue, dérivable, analytique, etc. La rigueur, en mathématiques, n'est pas le but en soi, mais le moyen de permettre au raisonnement mathématique de s'épanouir. Les raisonnements et les calculs d'Euler n'étaient pas toujours rigoureux au sens où nous l'entendons aujourd'hui, mais c'était bien des mathématiques, comme chacun sait.

Cette axiomatisation a eu des effets bénéfiques tout à fait évidents : elle a permis l'apparition d'un domaine privilégié, celui des fonctions analytiques (holomorphes) où les deux conceptions des fonctions se marient exceptionnellement bien. Mais elle a aussi permis toutes les extensions de la notion de fonction, qui deviennent alors indispensables en analyse : mesures (« fonctions » de Dirac), distributions (où l'opération de dérivation est libre), espace de Hilbert, puis espaces fonctionnels divers et variés...

On peut donc retenir que c'est à propos de la notion de fonction qu'est apparu le besoin de rigueur, d'où est sortie la méthode axiomatique et, finalement, la théorie des ensembles : on veut savoir précisément ce qu'est une fonction, à savoir expliciter complètement les propriétés qu'on utilise quand on raisonne avec les fonctions. Puis, on se posera le même problème pour la notion de nombre réel, puis celle de nombre entier, et finalement la notion d'ensemble.

Toutes ces questions, qui peuvent paraître de prime abord insolubles, car elles s'attaquent à des notions de plus en plus élémentaires, de plus en plus fondamentales, seront pourtant successivement résolues (Dedekind, Peano, Cantor, Zermelo), et l'aboutissement de ce travail sera la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, où tous les objets mathématiques trouvent leur place, et se prêtent, sans rechigner, à la rigueur du raisonnement mathématique.

Est-on arrivé alors au bout de cette quête ? Pas du tout, et la notion de fonction, dont on s'était bien éloigné, va refaire surface de plus belle.

*Le théorème de Gödel-Herbrand montre que l'on peut décrire les preuves mathématiques de façon purement formelle, au moyen d'un système de règles de déduction, comme les règles d'un jeu.*

### Le raisonnement mathématique

En effet, ce qui est maintenant dans le collimateur, c'est le sacro-saint raisonnement mathématique lui-même !
La question est dorénavant : qu'est-ce que ca veut dire de raisonner correctement ? Et, qui plus est, pourquoi faut-il donc, à tout prix, raisonner correctement ? Problèmes difficiles s'il en est, et sans aucun rapport, semble-t-il, avec la notion de fonction.

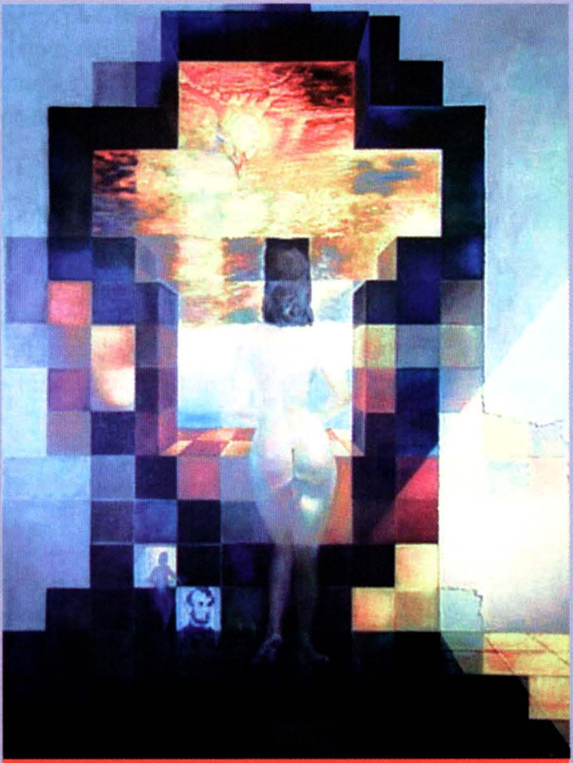
Et pourtant, l'inconscient des mathématiciens avait déjà depuis fort longtemps, fait le rapprochement entre raisonnement et fonction : en effet, on emploie le même symbole → pour l'implication (et on sait que l'implication symbolise le raisonnement mathématique) et pour l'application, c'est-à-dire

pour désigner une fonction (on écrit $f: A \to B$ pour dire que $f$ est une fonction de domaine A et d'image B, c'est-à-dire une application de A dans B).
Ce qui semble n'être qu'une coïncidence de notation est, en fait, un indice qui a permis la découverte d'un outil extraordinairement puissant pour analyser le raisonnement mathématique : il s'agit de ce qu'on a appelé la *correspondance de Curry-Howard*. Mais ne brûlons pas les étapes, et reprenons l'histoire dans l'ordre.

Les premiers systèmes axiomatiques (Frege, Russell) sont plutôt des des-

## Un programme pour voir

La notion d'espace vectoriel est un outil pour représenter l'espace dans lequel nous nous trouvons. Or, nous avons un outil évident pour nous repérer dans les trois dimensions de l'espace, ce sont nos deux yeux. En somme, la notion d'espace vectoriel doit être quelque chose, qui se trouve dans notre cerveau, et qui a un rapport avec nos yeux. De quoi s'agit-il donc ?
Réponse : les yeux ne sont que des capteurs, qui envoient au cerveau l'information indispensable au repérage dans l'espace. Mais cette information, composée des millions de points colorés (qu'on appelle pixels en informatique) que les cellules de nos rétines envoient au cerveau, est encore sans structure, informe. Pour « voir » la profondeur, la hauteur et la largeur, le cerveau doit traiter cette masse de données à l'état brut au moyen d'un outil adéquat. Or, un outil de traitement de l'information, c'est exactement ce que l'on appelle un programme, ou un logiciel. Nous avons tous, dans le cerveau, ce programme qui traite l'information issue des yeux, et qui nous permet de « voir ». C'est un logiciel remarquablement bien fait, les spécialistes d'intelligence artificielle essaient de l'imiter et n'arrivent qu'à de grossières approximations. Une expérience très simple montre d'ailleurs ce qui se passe quand ce programme ne fonctionne pas : vous connaissez sûrement ces images, formées de carrés colorés (de très gros pixels). Si on les regarde de près, elles n'ont aucun sens, on ne « voit » rien, car l'information reste non traitée, telle que les yeux la fournissent. Mais si on les éloigne un peu, un visage apparaît : le programme de la vision a fonctionné, il a traité l'information, et on voit une image.



**Cette œuvre de Salvador Dali *Gala contemplant le mer Méditerranée* (1976) cache une seconde image. Pour la faire apparaître, notre logiciel de traitement d'image a besoin que l'on s'éloigne d'elle : on distingue alors le portrait d'Abraham Lincoln.**

Revenons à la notion d'espace vectoriel : sa nature devrait être claire maintenant. Il s'agit évidemment, d'une (petite) partie de ce programme, ce qu'en informatique on appelle un module de programmation.

criptions du raisonnement mathématique. Ce qui est remarquable, c'est qu'ils sont déjà exhaustifs, c'est-à-dire qu'ils prétendent, à juste titre, mais sans en apporter la preuve, le représenter dans son intégralité. La justification viendra, avec le théorème de complétude de Gödel-Herbrand, qui est sans doute le théorème le plus important et le plus central de la logique. Il montre, en effet, que l'on peut décrire les preuves mathématiques de façon purement formelle, au moyen d'un système de règles de déduction, comme les règles d'un jeu : une démonstration n'est alors pas autre chose qu'une partie jouée à ce jeu, en observant correctement les règles.

Ce théorème est remarquable, d'une part à cause de ce qu'il démontre, mais aussi, et surtout parce qu'il réussit à *énoncer* que certains systèmes axiomatiques représentent l'intégralité du raisonnement mathématique. En effet, il est bien loin d'être évident que l'on puisse seulement énoncer rigoureusement une chose pareille.

On sait donc maintenant que le raisonnement mathématique est complètement mécanisable, et on connaît diverses façons de le mécaniser. Tout le monde comprend qu'il s'agit là d'une découverte très belle et très importante : on peut construire, théoriquement, des machines à faire des mathématiques. Bien sûr, dès que cela devient possible, on s'empresse d'en construire effectivement, et ce sont toutes les recherches sur ce qu'on appelle la *démonstration automatique*.

Maintenant que le raisonnement est complètement analysé et mécanisé, y a-t-il encore quelque chose à chercher ? Que pourrait-on dire de plus ?
En fait, cette analyse a fait apparaître la notion de machine, et des calculs qu'on peut, ou qu'on ne peut pas, faire sur machine. Une nouvelle sorte de fonction a fait son entrée : ce sont les fonctions récursives, ou fonctions calculables sur machine. Beaucoup de définitions vont en être données (Gödel, Turing, Church ...) qui se révèlent toutes équivalentes.
Mais il faut noter qu'on ne pourra pas démontrer de « théorème de complétude » disant que les fonctions récursives sont toutes les fonctions calculables sur machine : cet énoncé, qu'on appelle la *thèse de Church* n'est, en fait, qu'une définition mathématique de la notion de fonction calculable.

## Identifier des preuves à des programmes

Comme par hasard, (mais, bien sûr, ce n'en est pas un), les véritables machines, c'est-à-dire les ordinateurs, font, au même moment, leur apparition. Or, pour un ordinateur, il ne suffit pas, mais pas du tout, qu'une fonction soit calculable pour qu'il la calcule. Il faut, en plus, qu'on lui donne un moyen (un algorithme) pour la calculer, c'est-à-dire un programme. Et nous voilà revenus à la notion de fonction à la Euler, où la fonction est donnée par une formule mathématique, qui représente le calcul de la fonction (calcul qui peut aboutir ou non).

Bien entendu, cette notion s'est quelque peu modifiée en cours de route : la formule a été remplacée par un programme (mais, là aussi, le calcul peut aboutir ou non, on en verra plus loin des exemples), et il ne s'agit plus de fonctions de variable réelle ou complexe, mais de fonctions d'entiers (plus généralement, de fonctions définies sur des structures de données finitaires, comme les entiers, les mots, les formules, les arbres...).


Les seuls utilisateurs ayant accès au système d'exploitation d'un ordinateur, qu'on appelle les « super-utilisateurs », sont normalement les ingénieurs système qui s'occupent de maintenir la machine en état de fonctionnement. Il y a une clé, ou un mot de passe, mis en place par celui qui a installé le système d'exploitation, clé dont la connaissance permet de passer en « super-utilisateur ».

Or, comme chacun sait, tout ce qui est interdit provoque l'envie d'enfreindre l'interdiction. Ainsi sont apparus les « hackers » qui tentent de prendre le contrôle du système d'exploitation d'ordinateurs auxquels ils ne devraient pas avoir accès, dans le but de détruire ou d'acquérir de l'information, ou tout simplement pour s'amuser.

Le mathématicien se trouve dans une situation tout à fait comparable à celle du « hacker » : il est en face d'une machine (le cerveau, le sien mais aussi celui des autres) qui lui a été livrée en état de marche, donc avec son système d'exploitation, mais sans documentation et sans clé ! Il se trouve relégué au simple niveau d'utilisateur courant, et encore ne peut-il utiliser que des programmes tout faits, il n'a même pas le droit de programmer la machine. Situation tout à fait intolérable et humiliante. Comme tout bon « hacker », son but ultime est de se hisser au rang de « super-utilisateur ». Comment faire ? On devine que ça ne va pas être facile, et, disons-le tout de suite, ce but ultime n'est pas encore atteint. Mais, à notre avis, on n'en est peut-être pas si loin.

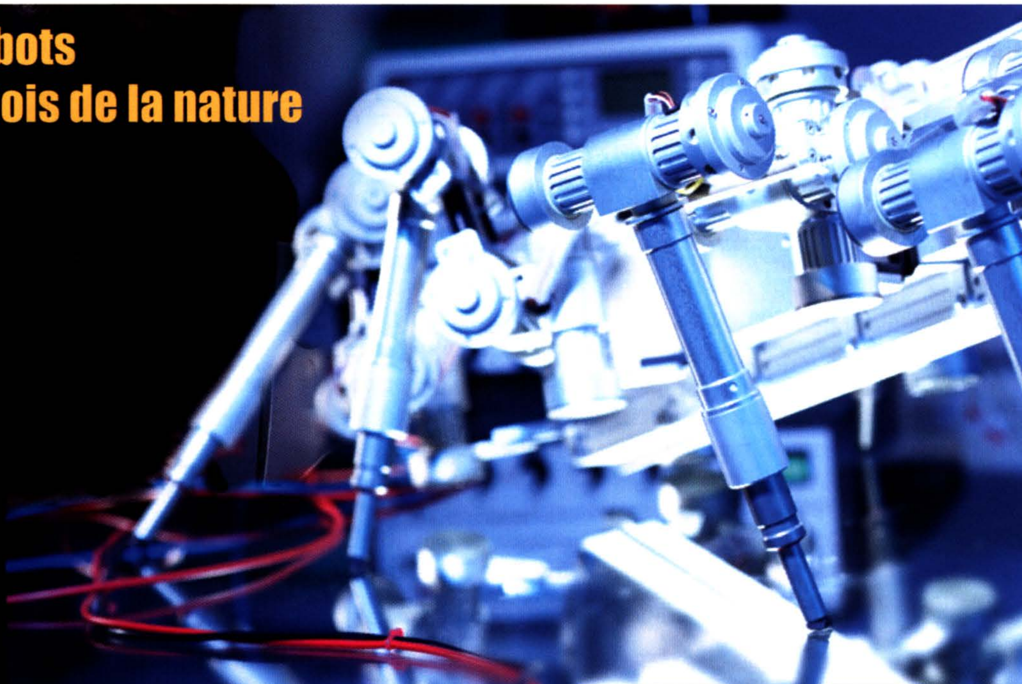
Quand on se trouve devant une machine inconnue, sans aucune documentation, le seul moyen d'apprendre à s'en servir et à la programmer (sans parler d'arriver à maîtriser son système d'exploitation), c'est de s'armer de patience et la faire fonctionner, en la surveillant attentivement pour décoder, petit à petit, les programmes qui s'y trouvent (programmes d'application ou programmes système). C'est plus difficile à déchiffrer que les hiéroglyphes, car, non seulement on n'a pas de pierre de Rosette, mais on ne sait même pas dans quels caractères c'est écrit...

Le mathématicien s'est donc armé d'une longue patience — on peut bien le dire, puisqu'il travaille depuis près de trois mille ans. Il a commencé à décoder des programmes d'application : la géométrie, puis l'algèbre, puis l'analyse réelle, les fonctions de variable complexe, la théorie des nombres, et enfin le développement explosif des mathématiques au XX[e] siècle.

Un réseau d'ordinateurs est un ensemble de machines, reliées entre elles par câble, par téléphone ou par radio, et qui peuvent ainsi échanger des informations. Bien entendu, le système d'exploitation de chaque machine comporte des programmes spécialisés très complexes, qui servent à la communication à travers le réseau : on les appelle des « protocoles de communication ». Les mathématiciens ont découvert, dans le cerveau, un programme de ce type, ou qui pouvait servir à cela, et l'on fait fonctionner : c'est le langage mathématique, qui a fini par aboutir à ce qu'on appelle la méthode axiomatique.

Mais alors, cela devait arriver, quelques-uns parmi nos chercheurs en mathématiques se sont dit que ce programme était tout aussi intéressant, et peut-être même plus, que d'autres, comme objet d'étude. C'est la naissance d'une nouvelle branche des mathématiques la logique mathématique, et, pour être plus précis, la théorie de la démonstration. Son but est donc d'essayer de décoder ce protocole de communication.

# Robots et lois de la nature



Imaginons que vous ayez à programmer un robot, de façon à ce qu'il puisse se déplacer dans une pièce, sans se heurter aux meubles ni aux murs. Vous commencez par écrire votre programme en fonction d'une pièce donnée, par exemple celle où vous vous trouvez maintenant. Mais, s'il passe dans la salle à côté, notre robot aura perdu son adaptation et se cassera immanquablement la figure. Qu'à cela ne tienne, on en prend un autre, et vous modifiez votre programme en lui ajoutant une partie destinée à tenir compte de la nouvelle pièce. Ce faisant, vous vous rendez compte qu'il est déraisonnable d'essayer d'écrire un programme pour chaque pièce possible, jamais vous n'aurez le temps, jamais ils ne tiendront dans la mémoire du robot. En plus, vous allez casser trop de matériel, avec vos essais !

Vous reprenez alors votre travail de programmeur sur de nouvelles bases, en vous demandant ce qu'on peut dire de général sur toutes les pièces où pourra se trouver votre robot ; et vous inventerez des lois : les pièces sont des parallélépipèdes rectangles, les meubles aussi, les plafonds est à au moins deux mètres, etc. Ces lois, qui forment une espèce de géométrie, vont, bien sûr, se retrouver inscrites, sous formes de modules, dans le programme final.

Si maintenant un autre programmeur, ou le robot devenu subitement intelligent, se met à décoder votre programme, il va évidemment y trouver ces lois, qu'il baptisera « lois de la nature », et, naïvement, il s'émerveillera de leur extraordinaire similitude avec l'environnement. S'il avait décodé votre premier programme mal fait, il n'aurait rien trouvé du tout. Mais il n'a jamais eu l'occasion de le faire, car votre premier robot avait été bien trop vite mis à la casse.

Si l'on admet que les mathématiques ne sont que le décodage de programmes « utiliaires » que Dieu, autrement dit un milliard d'années d'évolution, a écrits dans le cerveau des êtres vivants supérieurs, il n'y a rien d'étonnant à ce que ces programmes soient en profond accord avec l'environnement de ces êtres vivants et que, en lisant ces programmes dans notre propre cerveau, nous croyions découvrir les « lois de la nature ».

La notion centrale va être, dorénavant, celle de programme, c'est elle qui va jouer le rôle essentiel. En effet, elle a un rôle naturel de référence ultime, c'est-à-dire de notion qui peut servir à définir toutes les autres. La raison en est la suivante : une notion peut être considérée comme expliquée, c'est-à-dire complètement analysée, s'il est possible de l'expliquer à une parfaite brute (ou, si l'on préfère, à un parfait Candide), c'est-à-dire à un ordinateur.

Il faut donc, pour cela, pouvoir traduire cette notion en termes de programmes, puisque c'est la seule chose que comprend un ordinateur.
C'est cette méthode qu'on va maintenant employer pour poursuivre l'analyse du raisonnement mathématique : on va analyser la notion de preuve à l'aide de celle de programme. L'idée nouvelle, c'est de tenter d'identifier les preuves à des programmes. Elle trouve son origine dans ce qu'on appelle la sémantique de Heyting pour la logique intuitionniste.

Voici un exemple simple qui montre bien de quoi il s'agit : qu'est-ce qu'une preuve de la proposition A → B, si c'est un programme. La réponse donnée par Heyting est simple et intuitive : c'est un programme qui, à chaque fois qu'on lui donne une preuve de A (à l'aide d'un système d'axiomes quelconque), fournit une preuve de B (à l'aide de ces mêmes axiomes).
Et nous voilà bien en train d'identifier la flèche de l'implication A → B avec celle d'une fonction : Pr(A) → Pr(B), Pr(A) étant l'ensemble des preuves de A.
Par ailleurs, comme on veut identifier les preuves et les programmes, on voit que la proposition A correspond à l'ensemble des preuves de A, donc à un ensemble de programmes, qu'on appellera programmes de type A. Autrement dit, un théorème A correspond à ce qu'on appelle un *type* en informatique. Nous avons ainsi établi les premiers éléments d'une correspondance très féconde et très profonde entre les notions de théorie de la démonstration, et celles de programmation : c'est ce qu'on appelle la correspondance de Curry-Howard. C'est cette correspondance qui va nous permettre de poursuivre l'analyse de la notion de preuve mathématique.

Écrivons les premiers termes de cette correspondance, que nous venons d'obtenir (nous verrons plus loin comment cette liste se prolonge) :

| Théorie de la démonstration | | Programmation |
|---|---|---|
| **Preuve** | ⇔ | **Programme** |
| **Théorème** | ⇔ | **Type, spécification** |
| **Preuve de A → B** | ⇔ | **Programme qui prend une preuve de A et rend une preuve de B** |

Par exemple, A → A est un théorème, quelle que soit la proposition A, et une preuve de A → A correspond à un programme qui prend une preuve de A et rend une preuve de A.
Il existe bien un tel programme, à savoir celui pour la fonction identité (le programme qui rend exactement ce qu'on lui donne).

Un autre exemple, un peu plus compliqué, mais qui montre bien le rôle des fonctions, est le théorème :
(A → B) → ((B → C) → (A → C)).
Une preuve de ce théorème est un programme (s'il en existe) qui prend une fonction (programme) de A dans B, une

fonction de B dans C, et rend une fonction de A dans C. Il existe bien un tel programme, qui consiste à composer les deux fonctions (programmes) données. On voit, sur ces exemples triviaux, que les programmes ont une propriété curieuse : si on les considère comme des fonctions, leurs arguments et leur valeur sont aussi des programmes. Autrement dit, ils forment un monde fermé de fonctions dont on ne sort jamais. Et c'est bien ce qui se passe dans une machine : un programme est alors une partie de la mémoire de l'ordinateur, ses données, c'est-à-dire ses arguments, sont aussi des zones de la mémoire, et son résultat est également inscrit dans une zone de la mémoire. On a donc affaire à des segments de la mémoire de la machine, qui agissent les uns sur les autres (le moteur de cette action étant le processeur de l'ordinateur).

Pour décrire mathématiquement cette situation, il nous faut construire un univers dans lequel les objets représentent des fonctions dont les arguments et les valeurs sont aussi ces fonctions ; autrement dit, un univers de fonctions agissant sur elles-mêmes.

## Le lambda-calcul

Une telle structure a été inventée par A. Church dans les années 1930, c'est-à-dire bien avant l'avènement des ordinateurs. Le $\lambda$-calcul, comme il l'a appelé, est resté longtemps une théorie tout à fait confidentielle et plutôt ésotérique. On comprend facilement, d'après tout ce qui vient d'être dit, qu'elle occupe maintenant une place centrale à la fois en théorie des programmes (c'est-à-dire en informatique) et en logique (en théorie de la démonstration). En voici une brève description.

C'est une structure munie de deux opérations, l'une très simple, l'autre plus subtile. Le $\lambda$-calcul sera alors la structure la plus simple possible (la structure libre, si l'on veut) où ces deux opérations sont définies.

La première opération est appelée l'*application*, et son sens intuitif est très simple : si j'ai une fonction $f$ et un argument $g$ (qui, comme on l'a vu est aussi une fonction), alors je peux appliquer $f$ à $g$ et j'obtiens $f(g)$ (qui est aussi une fonction).
On se donne donc, sur la structure considérée, une opération binaire, qu'on appelle application, et sur laquelle aucun axiome n'est postulé !

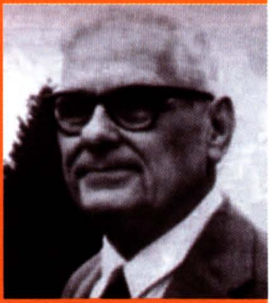
Maintenant, il y a une autre opération, un peu plus difficile à saisir intuitivement, comme son nom l'indique d'ailleurs, car elle est appelée *abstraction*. On peut indiquer approximativement son sens intuitif en disant que c'est la transformation d'une formule de calcul (comme celle des fonctions à la Euler) en objet mathématique. C'est ce qu'on fait, tout à fait couramment, en mathématiques, quand on dit :
« Considérons la fonction définie par la formule $e^x + x$, ou $1/(1 + x^2)$… » ;
ou encore :
« Considérons la fonction $x \mapsto e^x + x$ ».
A. Church a introduit la notation $\lambda x e^x + x$ pour désigner cette fonction.
Plus précisément, le sens intuitif de cette opération d'abstraction est le suivant : elle consiste à remplacer la fonction considérée par son nom, ou encore sa référence.

Par exemple arctan est le nom de la fonction définie par :

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

# Échec et math

L'histoire des sciences est riche d'exemples d'inventions techniques ou intellectuelles révolutionnaires qui furent, à l'aune des intentions de leur concepteur, des échecs.
Il n'est qu'à citer le téléphone conçu, par Graham Bell, pour améliorer la communication avec les sourds. De même, lorsque, à l'aube des années 1930, Alonzo Church invente le lambda-calcul, son propos est de fournir une alternative plus simple aux fondements des mathématiques que la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. L'espoir fut rapidement déçu, mais le concept de calculabilité naquit de cet échec initial et le $\lambda$-calcul devint une pierre angulaire de la théorie de la démonstration et de l'informatique.



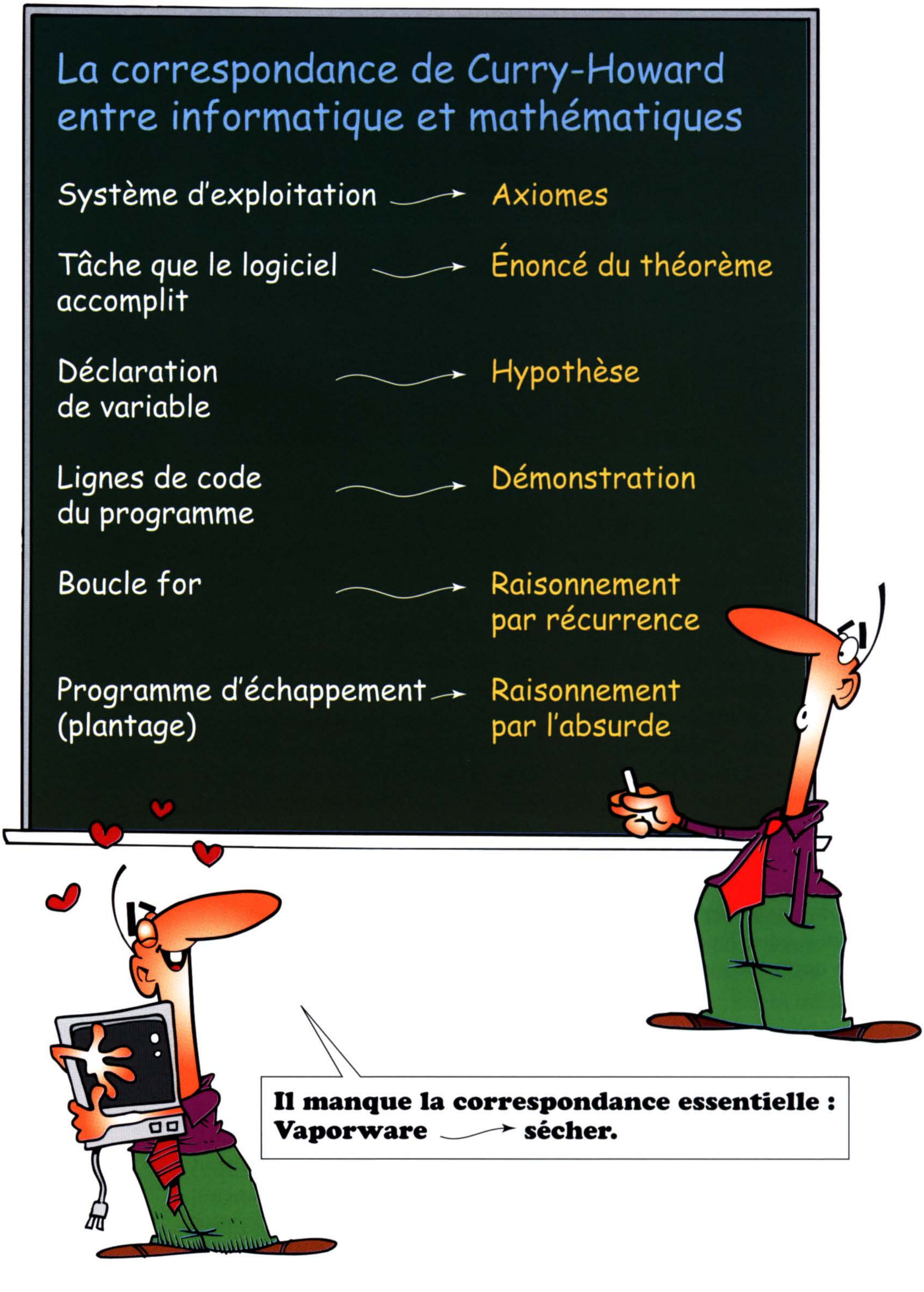
**Alonzo Church (1903-1995)**

Cela veut donc dire que $\lambda x \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ est « arctan ».

Si une fonction $\phi(x)$ est définie dans un texte mathématique sous la référence Définition 25, cela veut dire que $\lambda x\phi(x)$ est « Définition 25 ».
Cette opération n'est, évidemment, pas toujours possible pour les fonctions mathématiques, car elles n'ont pas toutes un nom, ou une référence où elles ont été définies.
Par contre, elle est absolument indispensable si on veut pouvoir considérer les fonctions comme des programmes, c'est-à-dire si on se limite à ne considérer que des fonctions qui sont des programmes.

En fait, l'opération d'abstraction correspond à des notions tout à fait élémentaires et fondamentales de programmation, de celles qu'on apprend dans les premiers cours d'informatique : ce sont les notions d'adresse et de pointeur.
Rappelons brièvement de quoi il s'agit : la mémoire d'un ordinateur est divisée en petites cases, qui contiennent chacune un mot, et qui ont chacune un numéro, qu'on appelle leur adresse. Chaque case a donc une adresse fixe, et un contenu variable. Or, le contenu d'une case $a$ peut tout à fait être l'adresse d'une case $b$. La case mémoire $a$ est alors appelée pointeur sur $b$.

Considérons alors un programme, que l'on désigne par $P(x)$, pour dire qu'il opère sur une variable $x$, qui n'est pas autre chose qu'une case mémoire. Ce programme occupe une zone mémoire, en général très grande, c'est-à-dire une longue suite de cases. S'il doit servir d'argument à un autre programme $Q(y)$, il faut pouvoir le désigner par une quantité qui tienne dans une seule case mémoire, c'est-à-dire par une adresse (qui est, par exemple, mais pas toujours, l'adresse du début de la zone mémoire occupée par le programme $P(x)$). Cette adresse sera notée $\lambda xP(x)$ qui peut alors se lire « adresse du programme P dépendant de la variable $x$ ». On peut alors mettre cette adresse dans la case mémoire $y$ qui devient ainsi un pointeur sur le programme $P(x)$. Il ne reste plus alors qu'à lancer le programme $Q(y)$.


La correspondance de Curry-Howard entre informatique et mathématiques
Système d'exploitation → Axiomes
Tâche que le logiciel accomplit → Énoncé du théorème
Déclaration de variable → Hypothèse
Lignes de code du programme → Démonstration
Boucle for → Raisonnement par récurrence
Programme d'échappement (plantage) → Raisonnement par l'absurde
Il manque la correspondance essentielle :
Vaporware → sécher.

Revenons au $\lambda$-calcul comme structure mathématique, qui est donc défini par ces deux opérations d'application et d'abstraction. C'est donc un objet mathématique très simple et très élémentaire à définir, mais, par contre, très difficile à étudier, et qui pose de redoutables problèmes aux mathématiciens qui s'en occupent. Il ressemble beaucoup, en cela, à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et il est d'ailleurs tout aussi passionnant.

Les éléments de cette structure sont appelés les termes du $\lambda$-calcul, ou encore $\lambda$-termes. Par exemple, $\lambda x\, x$ (l'application identique), ou $\lambda x\, x(x)$ (l'opération d'appliquer un programme à lui-même) sont des $\lambda$-termes.

Puisque les termes du $\lambda$-calcul représentent des programmes, il doit y avoir une opération qui représente l'exécution d'un programme, autrement dit le calcul de la fonction pour une valeur donnée de l'argument. C'est ce qu'on appelle la $\beta$-réduction. Elle consiste, par exemple, à transformer $(\lambda x(x+x))(2)$ en $2+2$.

En général, elle fait passer de $(\lambda x\, \mathrm{P}(x))(\mathrm{A})$ à $\mathrm{P}(\mathrm{A})$. Cela paraît tout à fait trivial, mais cela correspond, dans l'ordinateur, à l'opération expliquée il y a quelques instants : pour appliquer le programme d'adresse $\lambda x\mathrm{P}(x)$ à celui d'adresse A, on met dans la case mémoire $x$ l'adresse A (on transforme $x$ en un pointeur sur A) et on exécute le programme P.

L'exécution d'un $\lambda$-terme consistera donc à effectuer des $\beta$-réductions, jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus aucune de possible. On dit alors que le terme est normal.

Par exemple, $\lambda(x\ xx)(\lambda x\ x)$ donne $(\lambda x\, x)(\lambda x\, x)$ puis $\lambda x\, x$ et on s'arrête là.

Or, en programmation, on écrit souvent des programmes qui ne s'arrêtent pas, par exemple des boucles infinies. Cette situation se retrouve dans le $\lambda$-calcul, où l'exemple le plus simple de boucle infinie est donné par $(\lambda x\ xx)(\lambda x\ xx)$. On voit aussi que l'on retrouve ici une expression qui ressemble fort aux séries ou intégrales divergentes que manipulait Euler.

***Tout théorème de mathématiques a une double signification. Outre son sens habituel, il peut être vu comme type, ou spécification de programmes.***

Pour pouvoir, dans cette structure, calculer sur les entiers, il faut les représenter par des $\lambda$-termes. A. Church, l'inventeur du $\lambda$-calcul, a trouvé une facon naturelle de le faire. L'idée de Church pour cela est simple : si l'entier 3 doit être un $\lambda$-terme, c'est- à-dire un programme, ce doit être le programme qui prend une fonction et l'itère trois fois, c'est-à-dire la compose trois fois avec elle-même. Autrement dit, on doit écrire :

$$3 = \lambda f\, \lambda x\, f\,(f\,(f\,(x))).$$

Même chose, bien sûr, pour n'importe quel entier. On a ainsi défini ce qu'on appelle les *entiers de Church*.

On voit particulièrement bien ici, comment la notion de programme peut être utilisée comme concept primitif servant à définir tous les autres : un entier est défini comme un programme qui se comporte de telle et telle facon vis-à-vis des autres programmes.

Grâce à cette représentation, on peut programmer, dans le $\lambda$-calcul, certaines fonctions d'entiers dans les entiers. Par exemple, l'addition, qui est :

$\lambda m\lambda n\lambda f\lambda x m(f)(\mathrm{n}(f)(x))$,

ou la multiplication :

$\lambda m\lambda n\lambda f m\,(n(f))$.

Et l'un des premiers résultats établis par Church et Kleene, est que les fonctions d'entiers que l'on peut programmer dans ce langage sont toutes les fonctions récursives, c'est-à-dire toutes les fonctions d'entiers programmables sur machine. Autrement dit, le $\lambda$-calcul est, malgré sa simplicité, un langage de programmation universel. On est d'ailleurs très vite passé de la théorie à la pratique, et l'un des premiers langages de programmation, LISP, est directement inspiré du $\lambda$-calcul.

### La correspondance de Curry-Howard

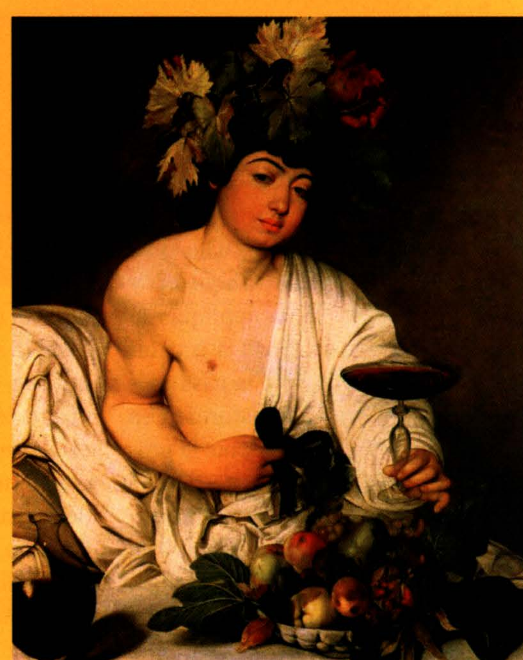
Mais revenons à la correspondance de Curry-Howard entre preuves et programmes.

Nous allons pouvoir l'expliciter un peu mieux, maintenant que nous avons, avec le $\lambda$-calcul, une représentation mathématique des fonctions comme programmes.

À chaque démonstration mathématique, effectuée dans un système formel convenable, on va faire correspondre un programme, sous la forme d'un terme du $\lambda$-calcul.

Pour cela, à chaque pas de la démonstration, on assemble des pièces détachées, qui, à la fin, constituent le programme cherché. Par exemple, supposons qu'à un moment donné dans la démonstration, on applique la règle du modus ponens : de A et de A → B, déduire B. Cela veut dire qu'on a déjà démontré A, donc obtenu un programme

## Le théorème du buveur



Le théorème du buveur (le « Drinking Principle » des Anglo-saxons) peut s'énoncer de manière plaisante : il existe au moins un individu dont on peut affirmer : « S'il boit, tout le monde boit ».

En effet, de deux choses l'une : soit, à un instant donné, tout le monde boit et il nous suffit alors de choisir un buveur quelconque, appelons-le Joe, pour avancer avec raison : « Si Joe boit, alors tout le monde boit ».

Sinon, la proposition « Tout le monde boit » est fausse. Autrement dit, sa négation est vraie, à savoir : « Il existe au moins une personne qui ne boit pas ». Rien nous interdit d'appeler à nouveau Joe cet individu. Et il est encore vrai de dire : « Si Joe boit, alors tout le monde boit ». (Il faut se faire à l'idée que « le faux implique le faux » est une proposition vraie.)

Le théorème précédent peut prendre une tournure beaucoup plus dramatique. N'est-on pas en droit d'avancer la réalité d'un dangereux personnage dont la mort entraineraît instantanément celle de tous ses congénères ? Il est rassurant d'ajouter que l'identité de cet inquiétant « sème la mort » change à chaque instant.

L'impact de ce théorème (« le plus trivial des théorèmes non triviaux », dixit J.-L. Krivine) devrait être considérable en informatique théorique. Le lecteur intéressé pourra consulter avec profit le n° 1010 de *Science & Vie* (février 2002) : « L'intelligence dévoile enfin sa vraie nature. Toute pensée est un calcul !) ».

($\lambda$-terme) $t_A$, et aussi démontré $A \to B$, donc obtenu un autre programme $u_{A \to B}$. Alors le terme $v_B$ que l'on construit à ce stade de la démonstration est $u(t)$. On voit ainsi que la règle de déduction essentielle de la logique, qui est le modus ponens, est associée à l'opération d'appliquer une fonction à son argument.
Toutes les autres règles de démonstration sont traitées d'une facon analogue, mais je ne le ferai pas pour éviter de trop entrer dans la technique.

Quand on a un théorème T, les programmes qui correspondent aux diverses démonstrations de T sont appelés programmes de *type* T. Il y a donc une infinité de programmes d'un type donné, ce type étant une formule qui est un théorème.
Intuitivement, le type d'un programme est, en quelque sorte, sa spécification c'est-à-dire ce qu'il fait, son but, ce pour quoi il a été écrit. On comprend qu'il y ait beaucoup de programmes différents pour réaliser le même but.
Ce qui est, en fait, tout à fait remarquable, c'est qu'on ait trouvé ainsi une approche mathématique de cette notion de spécification, qui semble pourtant particulièrement difficile à cerner avec précision (puisqu'il s'agit de définir ce qu'est l'intention du programmeur).
Ajoutons qu'on est là dans un champ immense pour les applications pratiques, puisque la question de la conformité d'un programme à ses spécifications est un des problèmes clés de l'industrie informatique. Le crash de la fusée Ariane V à son premier vol est un bon exemple de ce qui se passe quand ce problème n'est pas résolu correctement.

Si nous reprenons les deux exemples simples que nous avons examinés précédemment, à savoir les deux « théorèmes »

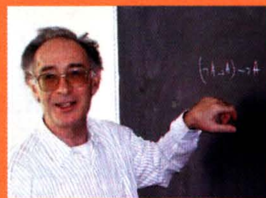
$$A \to A \text{ et}$$
$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)),$$

nous voyons que $\lambda x\, x$ ou $(\lambda x\, x)(\lambda x\, x)$ sont des exemples de programmes de type $A \to A$ ;
$\lambda f \lambda g \lambda x\; g(f(x))$, qui est l'opérateur de composition des fonctions, est un exemple de programme de type :
$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

**Haskell Curry (1900-1982)**

Pour donner un autre exemple, moins trivial, considérons un théorème d'arithmétique comme : « Il existe une infinité de nombres premiers ».
À chaque preuve de ce théorème va correspondre un programme, et tous ces programmes ont le même type, qui est ce théorème lui-même. Il est facile de deviner ce que font tous ces programmes : ce sont des fonctions qui, pour chaque entier $n$, fournissent un nombre premier $p > n$. Voilà donc la spécification associée à ce théorème de théorie des nombres.

Nous voyons donc que, maintenant, chaque théorème de mathématiques a pris une nouvelle signification : outre son sens habituel, celui que lui donnent tous les mathématiciens qui s'en servent, il a un sens comme type, ou spécification de programmes.
Pour certains théorèmes, en gros ceux que l'on appelle constructifs, cette nouvelle signification est claire, et très proche du sens habituel.
C'est le cas des exemples que nous avons donnés. Or, ce sont des théorèmes que l'on peut prouver dans une logique plus faible que la logique classique, qu'on appelle logique intuitionniste (introduite par Brouwer), dans laquelle on interdit le raisonnement par l'absurde, ou le tiers exclu (A ou non A).
Elle a, en gros, la propriété suivante : si on démontre, dans cette logique, qu'il existe un objet ayant une certaine pro-



Jean-Louis Krivine est professeur à l'université de Paris VII, C. N. R. S.
Logicien de réputation internationale, il s'est fait connaître par ses travaux sur l'axiome du choix dénombrable dont il a donné une interprétation informatique qui est l'horloge du processeur.

priété, on donne, en même temps, un moyen de construire un tel objet.

C'est pourquoi on a cru pendant longtemps que seules les démonstrations constructives pouvaient donner lieu à des programmes, c'est-à-dire que la correspondance de Curry-Howard était limitée à la logique intuitionniste.
Mais, depuis quelques années, on s'est apercu que ce n'était pas le cas, et que le raisonnement par l'absurde correspondait à des méthodes de programmation utilisées depuis fort longtemps. C'est une remarquable découverte qui a été faite par Felleisen et Griffin, qui sont, il faut le noter, deux informaticiens.

Toutefois, lorsqu'il s'agit de théorèmes non constructifs, on ne comprend pas, en général, quel est le type qui leur est associé, et il y a là un problème extrêmement intéressant, parce qu'encore tout à fait mystérieux : la recherche du sens caché des théorèmes !
Cependant, on avance dans cette direction, et la découverte même de Felleisen et Griffin en est un exemple : ce qu'ils ont trouvé, en effet, ce n'est pas autre chose que la signification informatique des théorèmes non constructifs les plus simples, à savoir le tiers exclu : A ou non A, et le raisonnement par l'absurde : (non non A) $\rightarrow$ A.
Leur idée est tout à fait étonnante, et il faut un certain temps de réflexion pour se convaincre qu'elle est correcte : les instructions qu'ils associent à ces deux théorèmes sont ce qu'on appelle, en informatique, les instructions d'échappement, qui ont été inventées par les programmeurs pour le traitement des exceptions et des erreurs. Vous les voyez en action, chaque fois que l'ordinateur émet une protestation, c'est-à-dire qu'il affiche un message d'erreur, généralement accompagné d'un bip, par exemple, parce que vous lui demandez de lire une disquette que vous n'avez pas mise dans le lecteur.

Avouez qu'il n'était pas évident, a priori, que cette situation avait quelque chose à voir avec le raisonnement par l'absurde !
La recherche sur la correspondance de Curry-Howard entre preuves et programmes, est donc très active (et ce d'autant plus qu'elle n'est pas seulement motivée par ses implications philosophiques, mais aussi, et peut-être surtout, par les applications industrielles abordées tout à l'heure). On est en train, petit à petit, de construire un véritable « dictionnaire » dans lequel chaque notion de programmation a une traduction en théorie de la démonstration, et vice-versa. C'est une situation tout à fait remarquable, dont on a déjà eu un exemple dans l'histoire des mathématiques : lors de la découverte, par Kolmogoroff, de l'axiomatique des probabilités à l'aide de la théorie de la mesure.
Chaque notion probabiliste a trouvé alors sa traduction en une notion de théorie de la mesure. On obtient, par exemple le tableau 1.
Donnons un apercu de l'état actuel du

« dictionnaire » pour la correspondance de Curry-Howard. Comme je viens de le dire, certaines de ces équivalences n'ont été obtenues que très récemment. Elles sont toutes assez surprenantes, et inattendues a priori comme le montre le tableau 2.

En conclusion, on peut dire qu'on assiste actuellement à l'émergence d'un domaine tout à fait fascinant, où les concepts de fonction et de programme jouent un rôle clé. Il est clair qu'on tient là un fil conducteur extrêmement solide, qui est en train de nous mener à une compréhension en profondeur des mécanismes et de la nature même du raisonnement mathématique. Un autre trait étonnant de ce domaine est que, malgré son caractère extrêmement abstrait (quand même, il ne s'agit de rien de moins que l'analyse du raisonnement !), il soit en prise directe avec les applications. Il faut d'ailleurs remarquer que certaines des idées et des intuitions essentielles qui permettent cette analyse, nous viennent, non pas des mathématiques ou de la logique, mais directement de la programmation et de l'informatique.

**J.-L. K.**

| Calcul des probabilités | | Théorie de la mesure |
|---|---|---|
| Probabilité | ⇔ | Mesure |
| Événement | ⇔ | Ensemble mesurable |
| Variable aléatoire | ⇔ | Fonction mesurable |
| Espérance | ⇔ | Intégrale |
| Indépendance | ⇔ | Produit d'espaces mesurés |
| Espérance conditionnelle | ⇔ | Théorème de Radon-Nikodym |

**Tableau 1**

| Théorie de la démonstration | | Programmation |
|---|---|---|
| Règle logique (règle de déduction) | ⇔ | Instruction |
| Preuve | ⇔ | Programme |
| Axiome, hypothèse | ⇔ | Déclaration de variable |
| (Preuve d'un) lemme | ⇔ | Procédure, fonction |
| Théorème, (conclusion d'une preuve) | ⇔ | Type, spécification (d'un programme) |
| Raisonnement par récurrence | ⇔ | Boucle "for" |
| Réduction d'une preuve (élimination des coupures) | ⇔ | Exécution d'un programme |
| Négation | ⇔ | Continuation |
| Raisonnement par l'absurde | ⇔ | Instruction d'échappement |
| ⊥ (Faux) | ⇔ | Type des programmes exécutables ou encore du "top-level" |

**Tableau 2**


**Bibliographie**

**H. Barendregt, *The lambda-calculus*,** North Holland Pub. Co

**J. Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor, *Proofs and types*,** Cambridge Univ. Press

**J.-L. Krivine, *Lambda-calcul, types et modèles*,** Masson.

par Hervé Lehning

# Syntaxe et sémantique

**Le calcul propositionnel peut s'effectuer de deux façons diamétralement opposées. Dans la voie syntaxique, il n'est pas besoin de comprendre le sens des symboles que l'on manipule alors que dans la voie sémantique, ce sens est au centre de la méthode.**

Les notions de syntaxe et de sémantique ne sont pas particulières à la logique. Il s'agit en fait de deux notions inséparables de celle de langage dont la logique n'est qu'un cas particulier. En première approximation, on pourrait même la considérer comme une restriction du langage naturel mais, en tant que langage, la logique mathématique admet une définition beaucoup plus précise.

## Langages formels

Commençons par examiner la définition de la notion de langage formel. Elle part d'un ensemble de symboles nommé *alphabet*. Dans les langues d'Europe occidentale, il est habituel d'utiliser comme symboles les lettres de l'alphabet latin. Les mathématiques et la logique utilisent également d'autres symboles comme +, $\Rightarrow$ ou $\vee$. Leur alphabet est donc plus étendu que celui des langues ordinaires. Un alphabet A étant donné, un mot sur A est par définition une suite de lettres de A et un langage sur A est – toujours par définition – un ensemble de mots sur A.

*Les langages formels ont une syntaxe, que celle-ci soit explicitée sous forme de règles ou non.*

Par exemple, $A = \{a, b, \Rightarrow\}$ est un alphabet et $L = \{a, a \Rightarrow b, b, ba\}$ est un langage sur A, l'ensemble L′ des mots de longueur paire en est un autre. Dans cette approche formelle, nous voyons qu'il n'est donné aucun sens particulier aux mots d'un langage. Autrement dit, les langages formels n'ont pas a priori de sémantique.

En revanche, on doit être capable de dire si un mot sur l'alphabet A appartient ou non au langage donné. Autrement dit, les langages formels ont une syntaxe, que celle-ci soit explicitée sous forme de règles ou non.

***Le paradis terrestre*** **de Frans Pourbus le Vieux, (1545-1581). © De Jonckheere. La logique se prête bien à une représentation arborescente. Cet arbre de la sagesse ne porte qu'un seul fruit interdit : la contradiction.**

## Forme arborescente des propositions logiques

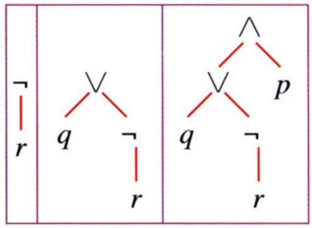
Pour définir la syntaxe des propositions logiques, on part d'un ensemble fini V appelé ensemble des variables propositionnelles, des deux symboles « vrai » et « faux » appelés constantes et de trois symboles particuliers ne faisant pas partie de V que l'on note $\vee$, $\wedge$ et $\neg$.
C'est à dessein que nous n'attribuons pour l'instant aucune valeur sémantique (aucun sens) à ces trois symboles.

On définit alors les propositions logiques de la façon inductive suivante :
- vrai et faux sont des propositions logiques,
- si $p$ appartient à V alors $p$ est une proposition logique,

- si P est une proposition logique alors $\begin{array}{c}\neg\\ | \\ \mathrm{P}\end{array}$ est une proposition logique,

- si P et Q sont des propositions logiques alors $\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{P} & & \mathrm{Q}\end{array}$ et $\begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ \mathrm{P} & & \mathrm{Q}\end{array}$ sont des propositions logiques.

Par exemple, si $\mathrm{V} = \{p, q, r\}$, les définitions précédentes permettent de construire de proche en proche les trois propositions logiques suivantes :




Les symboles $\vee$ et $\wedge$ sont appelés des *connecteurs* binaires car ils connectent deux propositions logiques entre elles pour former une autre proposition et $\neg$ un *connecteur unaire* car il ne connecte qu'une proposition pour en former une autre.

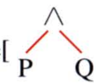
Notez bien qu'ici, nous ne cherchons pas à donner un sens quelconque à ces constructions.

## Écriture et syntaxe des propositions logiques

Cette façon de décrire les propositions logiques sous forme d'arbres est dite *arborescente*. Elle est utilisée en informatique, en particulier pour l'écriture des programmes d'intelligence artificielle. Elle n'est cependant pas très pratique pour l'écriture sur une feuille de papier car elle demande beaucoup trop de place. C'est pourquoi on a recours à une écriture linéaire équivalente.

Plus précisément, on définit une fonction Ecriture qui à une proposition logique P associe un mot noté Ecriture[ P ] sur l'alphabet A réunion de V, de l'ensemble des constantes {vrai, faux} et de l'ensemble de symboles { (, ), $\vee$, $\wedge$, $\neg$ } (les trois connecteurs logiques plus les parenthèses) de la façon inductive suivante :

- Ecriture[vrai] = vrai et Ecriture[faux] = faux,
- si $p$ est un élément de V alors Ecriture[$p$] = $p$,
- Ecriture[  ] = (¬ Ecriture[P]),

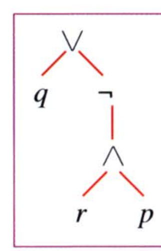
- Ecriture[  ]

= (Ecriture[P] $\wedge$ Ecriture[Q]),
- Ecriture[  ]

= (Ecriture[P] $\vee$ Ecriture[Q]),

Ainsi, les trois propositions logiques précédentes s'écrivent :
$(\neg\, r)$, $(q \vee (\neg\, r))$ et $((q \vee (\neg\, r)) \wedge p)$.

Dans cette écriture, le rôle des parenthèses est d'éviter les ambiguïtés. Supprimons par exemple les parenthèses de la troisième proposition ci-dessus, on obtient : $q \vee \neg\, r \wedge p$ c'est-à-dire une écriture pouvant également représenter la proposition :




qui s'écrit en utilisant des parenthèses :

$$(q \vee (\neg\, (r \wedge p))).$$

Cette écriture est dite *infixe* car les connecteurs binaires sont placés entre les propositions logiques qu'ils connectent. On peut également utiliser une écriture *postfixe* où les connecteurs binaires sont situés après les propositions logiques qu'ils connectent. Dans ce cas, les parenthèses sont inutiles (voir l'encadré « Écriture postfixe »).
D'autre part, remarquez que, dans un mot construit ainsi, à toute parenthèse ouvrante il correspond une parenthèse

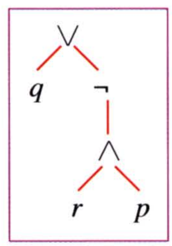
fermante. Un tel mot contient donc autant de parenthèses des deux espèces.

Grâce à cette propriété, on peut dire que certains mots écrits sur l'alphabet constitué des variables logiques et des symboles {vrai, faux, (, ), $\vee$, $\wedge$, $\neg$} ne font pas partie du langage des propositions logiques.
Par exemple, $((q \vee (\neg\ r) \wedge p)$ ne convient pas car il manque une parenthèse fermante.

Cette propriété ne suffit cependant pas pour caractériser les mots représentant une proposition logique. La condition pour cela est qu'il existe une proposition logique sous forme arborescente dont l'écriture est ce mot. En pratique, il s'agit donc de reconstruire l'arbre à partir du mot. Pour cela, l'essentiel reste de compter les parenthèses. Considérons par exemple le mot :

$$((\neg\ (p \wedge q)) \vee (r \vee (\neg\ p))).$$

En comptant les parenthèses, on s'aperçoit que $(\neg\ (p \wedge q))$ et $(r \vee (\neg\ p))$ sont les premières propositions connectées possibles. On en déduit l'arbre représenté par le mot précédent :

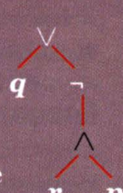


*Pour qu'un mot fasse partie du langage des propositions logiques, il faut qu'à toute parenthèse ouvrante corresponde une parenthèse fermante.*

# Écriture postfixe

Il est possible d'écrire les propositions logiques sans utiliser de parenthèses. Pour décrire cette écriture, nous partons également de leur forme arborescente.
On définit une nouvelle fonction Ecriture qui à une proposition logique P associe un mot noté Ecriture[P] sur l'alphabet A réunion de V, de {vrai, faux} et de l'ensemble de symboles {$\neg$, $\vee$, $\wedge$} de la façon inductive suivante :

- Ecriture[vrai] = vrai et Ecriture[faux] = faux,
- si $p$ est un élément de V alors Ecriture[$p$] = $p$,
- Ecriture[  ] = Ecriture[P] $\neg$,
- Ecriture[  ] = Ecriture[P] Ecriture[Q] $\wedge$,
- Ecriture[  ] = Ecriture[P] Ecriture[Q] $\vee$.

Ainsi, la proposition logique  s'écrit sous forme postfixe : $qrp \wedge \vee \neg$.

*Pour qu'un mot fasse partie du langage des propositions logiques, il faut qu'à toute parenthèse ouvrante corresponde une parenthèse fermante.*

## Sémantique des propositions logiques

Maintenant que nous savons reconnaître les écritures valides de propositions logiques, voyons ce qu'elles signifient c'est-à-dire leur sémantique. Pour cela, nous attribuons des valeurs de vérité aux variables propositionnelles. Plus précisément, si Valeur est une application qui à chaque variable propositionnelle $p$ associe l'une des valeurs de l'ensemble {vrai, faux}, on l'étend à toutes les propositions logiques grâce aux tableaux suivants :

- Valeur[vrai] = vrai
et Valeur[faux] = faux.

- Valeur[¬ P] :

| Valeur[P] | Valeur[¬P] |
|---|---|
| vrai | faux |
| faux | vrai |

- Valeur[P $\wedge$ Q] :

| Valeur[P] | Valeur[Q] | Valeur[P $\wedge$ Q] |
|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | faux |
| faux | vrai | faux |
| faux | faux | faux |

- Valeur[P $\vee$ Q] :

| Valeur[P] | Valeur[Q] | Valeur[P $\vee$ Q] |
|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | vrai |
| faux | vrai | vrai |
| faux | faux | faux |

Dans chacun des cas précédents, en fonction de Valeur[P] et de Valeur[Q], on détermine Valeur[¬ P], Valeur[P $\wedge$ Q] et Valeur[P $\vee$ Q].
De proche en proche, on en déduit les valeurs de vérité associées à toute proposition logique.
Par exemple, les valeurs de vérité de la proposition $(q \vee (\neg\ (r \wedge p))$ sont données par :

- Si Valeur[P] = vrai

| Valeur[$q$] | Valeur[$r$] | Valeur[$(q \vee (\neg r)) \wedge p$] |
|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | vrai |
| faux | vrai | faux |
| faux | faux | vrai |

- Si Valeur[P] = faux

| Valeur[$q$] | Valeur[$r$] | Valeur[$(q \vee (\neg r)) \wedge p$] |
|---|---|---|
| vrai | vrai | faux |
| vrai | faux | faux |
| faux | vrai | faux |
| faux | faux | faux |

Autrement dit :
Valeur[$(q \vee (\neg\ (r \wedge p))$] = vrai dans les deux cas suivants :

- si Valeur[$p$] = vrai et Valeur[$q$] = vrai,
- si Valeur[$p$] = vrai, Valeur[$q$] = faux
- et Valeur[$r$] = faux.

Ainsi, à toutes valeurs de vérité attribuées aux variables propositionnelles, on fait correspondre une valeur de vérité à toutes les propositions logiques construites sur ces variables.

## Équivalence des propositions logiques

Deux propositions logiques sont dites équivalentes si, pour toutes valeurs de

vérité attribuées aux variables propositionnelles sur lesquelles elles sont construites, elles ont la même valeur de vérité. Pour signifier que P et Q sont équivalentes, on note $P \equiv Q$.
Voici plusieurs exemples classiques d'équivalence :

- la *commutativité* de $\wedge$ et $\vee$ :
$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

- l'*associativité* de $\wedge$ et $\vee$ :
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$
$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

- la *distributivité* de $\wedge$ et $\vee$ :
$$((p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$
$$((p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

- vrai est *élément neutre* de $\wedge$ et *élément absorbant* de $\vee$ :
$$(p \wedge \text{vrai}) \equiv p$$
$$(p \vee \text{vrai}) \equiv \text{vrai}$$

- faux est *élément neutre* de $\vee$ et *élément absorbant* de $\wedge$ :
$$(p \vee \text{faux}) \equiv p$$
$$(p \wedge \text{faux}) \equiv \text{faux}$$

- le principe du *tiers exclu* :
$$p \equiv (\neg (\neg p))$$

- les *lois de Morgan* :
$$(\neg (p \wedge q)) \equiv ((\neg p) \vee (\neg q))$$
$$(\neg (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

Pour démontrer ces équivalences, il suffit de calculer les valeurs de vérité de chacune des propositions logiques écrites ci-dessus. Remarquez que dans ce cas, l'équivalence a encore lieu si on remplace les variables propositionnelles par des propositions logiques. Par exemple, on peut démontrer la deuxième loi de Morgan en utilisant le première et le tiers exclu.

Cette notion d'équivalence permet de définir d'autres connecteurs, par exemple $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ :

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$$
$$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))$$

Nous obtenons alors d'autres équivalences logiques classiques telles que la contraposition :

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \Rightarrow (\neg q)).$$

## Syntaxe et sémantique

Pour démontrer une telle équivalence, nous disposons donc de deux voies : la voie sémantique, en montrant que les valeurs de vérité sont les mêmes, et la voie syntaxique, qui se fonde sur des manipulations à partir d'équivalences connues.

En guise d'exemple, considérons la démonstration de la contraposition. La voie sémantique consiste à considérer séparément les deux propositions logiques $(p \Rightarrow q)$ et $((\neg p) \Rightarrow (\neg q))$ et à en dresser les tables de vérité en utilisant les définitions ci-dessus, on trouve deux fois le même résultat :

| V.[$p$] | V.[$q$] | V.[$(p \Rightarrow q)$] | V.[$(\neg q \Rightarrow \neg p)$] |
|---|---|---|---|
| vrai | vrai | vrai | vrai |
| vrai | faux | faux | vrai |
| faux | vrai | vrai | faux |
| faux | faux | vrai | vrai |

On en déduit que :
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \Rightarrow (\neg q))$.

***Pour démontrer l'équivalence de propositions logiques, il suffit de calculer les valeurs de vérité de chacune d'elles.***

On peut raisonner de manière complètement syntaxique en écrivant les équivalences :

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg\, p) \vee q)$$

donc, par substitution :

$$((\neg\, q) \Rightarrow (\neg\, p)) \equiv ((\neg\, (\neg\, q)) \vee (\neg\, p))$$

or, d'après la règle du tiers exclu :

$$(\neg\, (\neg\, q)) \equiv q$$

donc :

$$((\neg\, q) \Rightarrow (\neg\, p)) \equiv q \vee (\neg\, p)).$$

La commutativité de $\vee$ donne donc :

$$((\neg\, q) \Rightarrow (\neg\, p)) \equiv ((\neg\, p\,) \vee q)$$

d'où le résultat.

En particulier, on distingue les propositions logiques qui prennent la valeur « vrai » pour toutes valeurs de vérité attribuées aux variables propositionnelles qui les composent (voir l'article « Les règles de la déduction » page 18). En guise d'exemple, démontrons le modus ponens par les deux voies présentées.

Dans la voie sémantique, on dresse la table de vérité de la proposition $((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$ pour constater qu'elle prend toujours la valeur « vrai » quelques soient les valeurs attribuées à $p$ et $q$.

Dans la voie syntaxique, on utilise une série d'équivalences en partant de la définition du connecteur $\Rightarrow$ :

$$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg\, p) \vee q),$$

d'où :

$$((p \wedge (p \Rightarrow q)) \equiv ((p \wedge ((\neg\, p) \vee q))$$

donc, par distributivité :

$$((p \wedge (p \Rightarrow q)) \equiv ((\,p \wedge (\neg\, p)) \vee (p \wedge q))$$

or $(\,p \wedge (\neg\, p) \equiv$ faux qui est élément neutre de $\vee$ donc :

$$((p \wedge (p \Rightarrow q)) \equiv (p \wedge q)$$

d'où l'on tire :

$$((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \Rightarrow q)$$

et, en utilisant à nouveau la définition de $\Rightarrow$ :

$$((p \wedge q) \Rightarrow q) \equiv ((\neg\, (p \wedge q)) \vee q)$$

et, d'après la loi de Morgan :

$$((p \wedge q) \Rightarrow q) \equiv (((\neg\, p) \vee (\neg\, q)) \vee q)$$

ce qui donne par associativité de $\vee$ :

$$((p \wedge q) \Rightarrow q) \equiv ((\neg\, p) \vee ((\neg\, q)) \vee q)))$$

or $((\neg\, q)) \vee q)) \equiv$ vrai

d'où :

$$((p \wedge q) \Rightarrow q) \equiv ((\neg\, p) \vee \text{vrai})$$

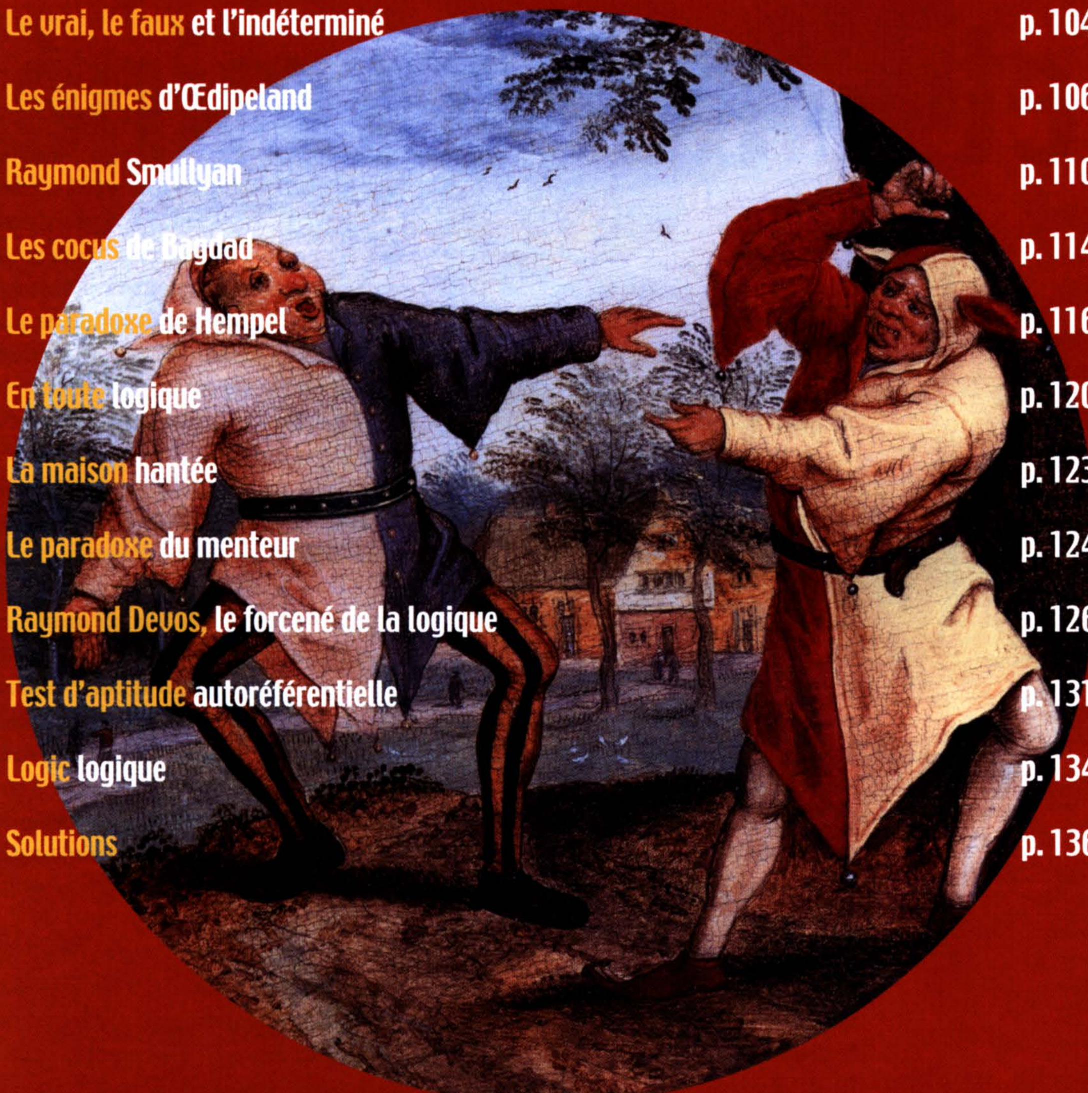
or vrai est un élément absorbant de $\vee$ d'où :

$$((p \wedge q) \Rightarrow q) \equiv \text{vrai}$$

On a ainsi démontré que $((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$ est une *tautologie*. On remarque qu'une telle démonstration n'est pas vraiment adaptée aux êtres humains car beaucoup trop fastidieuse. En revanche, elle l'est particulièrement bien aux ordinateurs.

**H. L.**

# Jeux logiques





## Les fous de logique

**La logique est un immense territoire ludique où les paradoxes titillent le bon sens, où les mots se prennent au jeu, où l'auto-référence nous entraîne dans ses labyrinthes et où Menteurs et Sorcières, Fous et Sages s'affrontent dans des joutes impitoyables.**

# Le vrai, le faux et l'indéterminé

Les problèmes de logique amusante mettant en scène un *sincère* (personnage disant *toujours* la vérité) et un *menteur* (personnage ne disant *jamais* la vérité) sont légion.
Le plus connu de ces problèmes fait intervenir un sincère et un menteur montant la garde devant deux portes. Arrive un voyageur à l'esprit délié qui sait premièrement que l'une des portes ouvre sur le paradis et l'autre sur l'enfer et, deuxièmement, que l'un des gardes est un menteur et l'autre un sincère. En revanche, il ignore quelle est la bonne porte et qui est le menteur. Le voyageur, peut-il, en posant une seule question, trouver, de manière certaine, le chemin du paradis ?
La réponse est affirmative. Il suffit, par exemple, que le voyageur demande à l'un quelconque des personnages : « Quelle porte ton compagnon désignerait-il si je lui demandais de m'indiquer le chemin du paradis ? ».
En effet, si le garde interrogé est un sincère, il montrera la porte ouvrant sur l'enfer puisque il sait que son collègue répondra faussement à la question du voyageur. Si, par contre, le garde est un menteur, il désignera lui aussi la porte de l'enfer car il lui est impossible de rapporter fidèlement la bonne réponse que ne manquerait pas de donner le sincère. Quelle que soit l'indentité du garde, le voyageur peut ouvrir, en toute confiance, la porte qui n'a pas été désignée.

## Le singe sincère, le singe menteur et le singe couci-couça

Imaginez-vous maintenant en présence de trois singes : un sincère, un menteur et un couci-couça. Ce dernier répond de manière aléatoire aux questions qu'on lui pose ; parfois il ment, parfois il dit la vérité. Vous ne connaissez pas qui est le sincère, qui est le menteur et qui est le couci-couça (ce qui n'est pas le cas des singes).

Vous avez le droit de poser au plus trois questions pour identifier chacun des singes (il va sans dire que vous êtes sur la planète des singes et que les singes parlent) et vous êtes libre à tout moment de choisir votre interlocuteur. La seule contrainte est que les questions ne peuvent amener que les réponses « oui » ou « non ».

Comment vous y prenez-vous ?

## Une solution

Aidons-nous du tableau ci-contre où D, *m*, G désignent respectivement les singes qui sont, vis-à-vis de vous, à droite, au milieu et à gauche. Les six lignes indiquent les six façons de permuter les trois identités : Sincère, Menteur, Couci-couça.

| | G | *m* | D |
|---|---|---|---|
| [1] | S | M | C |
| [2] | S | C | M |
| [3] | M | C | S |
| [4] | M | S | C |
| [5] | C | S | M |
| [6] | C | M | S |

*Première question.*
Demandez à G : « Ton voisin *m* dit-il plus souvent la vérité que le troisième larron D ? ». S'il répond « Oui », éliminez les lignes [1] et [4], et retenez que D n'est pas le Couci-couça. S'il répond « Non », ignorez les lignes [2] et [3], et retenez que m n'est pas le Couci-couça.

*Deuxième question.*
Adressez-vous au singe dont vous êtes sûr qu'il n'est pas le Couci-couça et demandez-lui s'il est le Couci-couça. S'il répond « Oui », c'est le Menteur, s'il répond « Non », c'est le Sincère.

*Troisième question.*
Demandez toujours au même singe si le singe que vous allez montrer du doigt est le Couci-couça. Sa réponse déterminera sans ambiguïté l'identité de ses deux congénères.

**M. J.**

## Avec une seule question

Adressez-vous à l'un des singes et demandez-lui :
« Si je demande à chacun de vous si je suis un singe, et si chacun de vos congénères donne la même réponse, votre propre réponse sera-t-elle en accord avec la leur ? »
Le sincère répondra « Non », le Menteur « Oui ».
Le troisième singe devra se taire. Il sait que ses acolytes ne peuvent s'accorder et que s'il répondait, soit par un « Oui », soit par un « Non », il serait forcé de mentir. Cette réponse de nature déterministe contredirait le caractère aléatoire de ses réponses.

**par Gérard Cohen-Zardi**

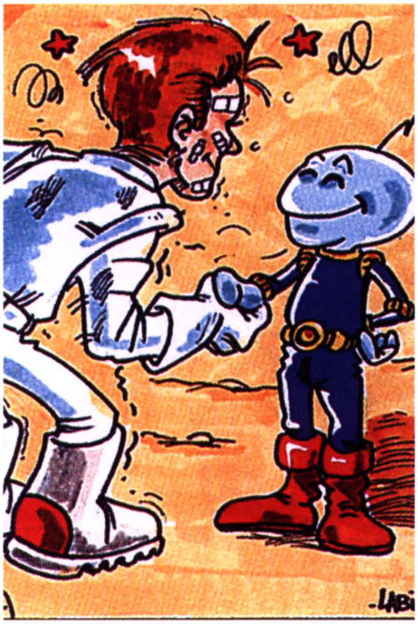
# Les énigmes d'Œdipeland

**Sur la planète Œdipeland habitent de curieux petits personnages bleus. Ils sont partagés en deux races : les Vils et les Francs. Un Vil ne prononce que des phrases fausses tandis qu'un Franc ne dit que des phrases vraies. Pour nous, humains, ils sont indiscernables tant du point de vue la race (Franc ou Vil) que du sexe (Fille ou Garçon).**

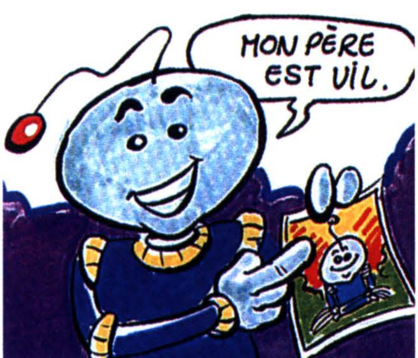

Le savant Alcestus qui les a découverts et étudiés a su trouver comment se déterminait la race d'un enfant. En fait un garçon a toujours la race de sa mère alors qu'une fille hérite de celle de son père.

## L'énigme de Nathaly

En visite sur la planète Œdipeland…



Vous rencontrez Nathaly, un (ou une) jeune Œdipien(ne) qui accepte de vous servir de guide.

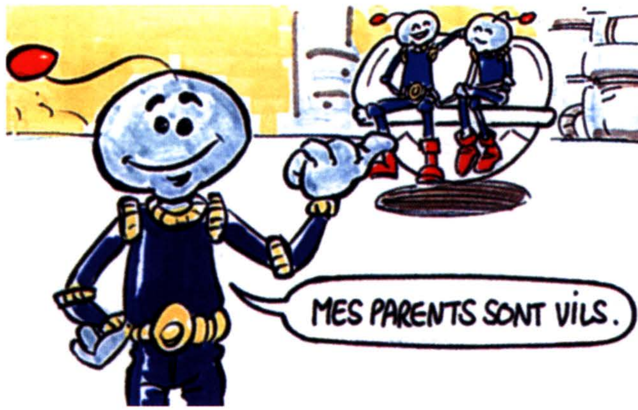



Nathaly se présente à vous…
Vous pouvez en conclure le sexe de Nathaly.

**Quel est-il ? Et quoi d'autre ?**

## L'énigme de Dominique

Vous rencontrez alors Dominique qui vous affirme :




**Vous en déduisez évidemment sa race.**

Dominique ajoute alors :

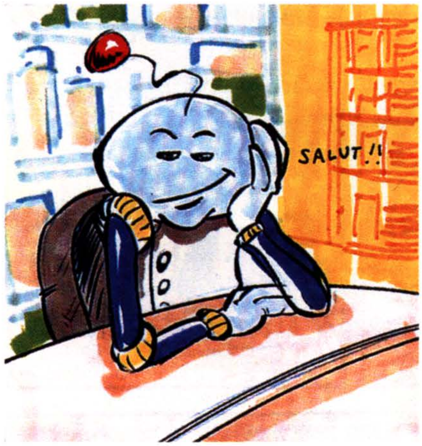

Cette fois vous savez tout de Dominique.

**Quels sont ses trois chromosomes ?**

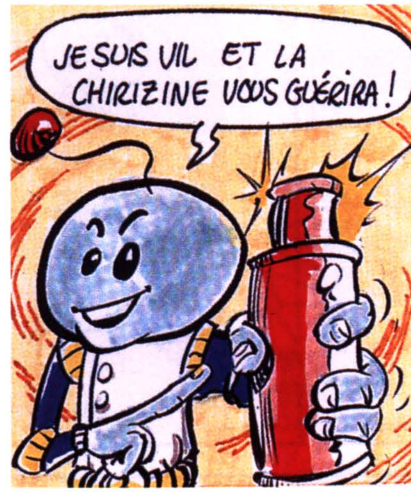
## Remède miracle !

En visite à Œdipeland, vous tombez malade. Attention, sur cette planète, pas de demi-mesure, si un médicament ne vous guérit pas, il vous tue !

Heureusement, Apothèke l'employé(e) va vous aider, mais attention à sa race !




Sa déclaration ne vous rassure qu'à moitié :




**Que pouvez-vous en conclure ?**

## Allô docteur ?

Vous téléphonez à SOS. médecin. Un individu vous déclare :


**En première appréciation vous vous dites qu'à défaut d'autre chose, c'est un fin psychologue, mais est-ce un médecin ?**

**G. C.-Z.**


Sur la planète Œdipeland, la logique est reine. Ses petits hommes bleus, personnages facétieux mais logiciens rigoureux, entraînent le visiteur terrien d'énigme en énigme dans un album comprenant une B.D. (dessinée par Labidi) et des fiches didactiques interactives.

# Solutions

## L'énigme de Nathaly

Si Nathaly est Franc son père est vraiment Vil. Au contraire, si Nathaly est Vil, il ment, et son père est Franc. Nathaly et son père sont donc de races différentes. Nathaly est donc un garçon car à Œdipland une fille a la race de son père.
De plus, comme tout garçon, Nathaly a la race de sa mère. Ses parents sont donc de races différentes.
Nathaly est donc un métis.
(Tout ceci est d'une logique irréfutable et pourtant les conclusions semblent sans rapport avec l'affirmation de Nathaly. Amusant...non ?)

## L'énigme de Dominique

Si Dominique dit vrai alors ses deux parents sont Vils et il est Vil : impossible. Il est donc Vil et l'un de ses parents est Franc. La deuxième affirmation nous signale que sa mère est Franche. Etant d'une race différente de celle de sa mère, Dominique est forcément une fille.

## Remède miracle !

(Précisons ici que quand deux phrases sont reliées par un « et » , la phrase globale n'est vraie que lorsque les deux sont vraies.)
Ainsi si Apothèque était Franc, « je suis Vil » étant fausse toute sa phrase serait un mensonge, chose impossible pour un Franc.
Apothèque est donc Vil, par conséquent il ment. La phrase précédent le « et » étant vraie celle qui le suit est fausse, donc pas de chirizine si vous tenez à la vie !

## Allô Docteur ?

Si votre interlocuteur est Franc : La partie précédant le « ou » étant fausse, celle qui le suit est donc vraie. Il est bien O.R.L., c'est un médecin.
Si votre interlocuteur est Vil :
La partie précédant le « ou » doit être fausse (sinon il dirait vrai !) .
« Je ne suis pas médecin » est donc fausse. C'est bien un médecin qui vous parle.
Est-il est O.R.L. ? Est-il Franc ou Vil ?... vous ne le saurez jamais.

L'inventeur du petit monde d'Œdipeland se nomme Gérard Cohen-Zardi et il enseigne les mathématiques et la logique à l'université Denis Diderot (Paris VII). Il a mis également au point un logiciel intelligent et étonnant, capable de résoudre toutes les énigmes logiques du type de celles d'Œdipeland.
Vous pouvez le télécharger sur le site internet : www.poleditions.com

# Raymond Smullyan

**Mathématicien et philosophe, Raymond Smullyan sut marier logique et écriture pour le plaisir des amateurs d'énigmes et autres nostalgiques de Lewis Carroll.**

On ne peut parler de logique, ou de paradoxes et de casse-tête logiques, sans citer Raymond Smullyan. Né en 1919, mathématicien et logicien, il enseigna la philosophie à l'université d'Indiana aux Etats-Unis. Digne émule de Martin Gardner, il s'est également produit comme magicien professionnel et a régulièrement tenu des rubriques dans des revues telles que *Scientific American* et *Pour la Science*.

## La logique, le jeu et l'art du conte

Écrivain et humoriste, musicien, il est dans la droite ligne de la pensée de Lewis Carroll à qui il a dédié un de ses livres *Alice in Puzzle-Land* paru chez Dover en 1982 et sous-titré « Un conte carrollien pour les enfants de moins de quatre-vingts ans. »

*Loin de se limiter à la logique, chacun des livres de Raymond Smullyan contient de délicieuses anecdotes, des rappels d'énigmes bien connues ou particulièrement mises en scène.*

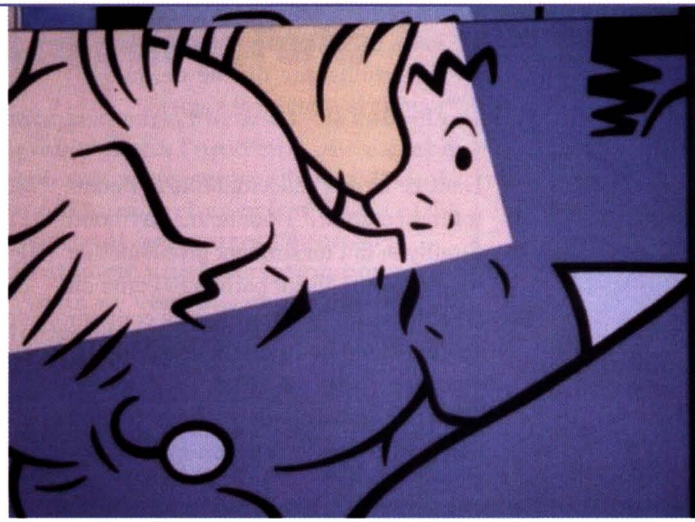
*Quel est le titre de ce livre ?* (Dunod, 1981) est un recueil de 253 énigmes basées essentiellement sur la logique, sans doute le plus original et divertissant jamais publié, emmenant le lecteur au cœur des travaux de Gödel.

Un homme regarde un portrait et dit à ses voisins : « Je n'ai ni frère ni sœur mais le père de cet homme est le fils de mon père » De qui regarde-t-il le portrait ?

Le chapitre « Alice dans la forêt » de l'oubli est bien entendu un hommage à Lewis Carroll :

Dans la forêt Alice a deux compagnons : un lion qui ne ment que les lundis, mardis et mercredis et une licorne qui ne ment que les jeudis, vendredis et samedis. Un jour le lion dit à Alice : « Hier c'était un de mes jours de mensonges. » La licorne dit alors :

# Un baiser logique



Le Baiser
© Luc Verschuuren

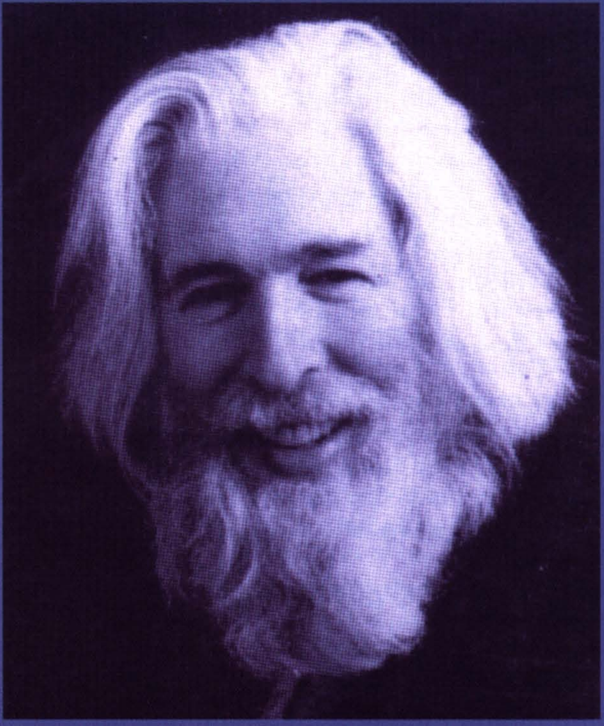
Un étudiant en mathématiques, ayant donné rendez-vous à une jeune fille, lui dit : « J'aimerais te demander une faveur. Je vais te dire quelque chose. Tout ce que je demande, si ce que je dis est vrai, c'est que tu me donnes une photo de toi. Veux-tu faire cela pour moi ? » La jeune fille donna son accord. « Mais, continua le jeune homme, si ce que je dis est faux, tu dois me promettre de ne pas me donner ta photo. D'accord ? »
Elle le fut aussi.
L'étudiant formula alors sa phrase de telle façon que, après un temps de réflexion, la jeune fille se rendit compte, amusée, que pour tenir sa parole, elle devait lui donner, non pas une photographie, mais un baiser !

*Que pouvait-il bien lui avoir dit ?*

En affirmant : « Tu ne me donneras pas ta photo et tu ne me donneras pas de baiser », l'étudiant est assuré d'obtenir un baiser. Le petit raisonnement suivant le montre sans détour.
La proposition énoncée par le jeune homme peut-elle être vraie ? Si on consulte la table de vérité du connecteur « et », on voit que s'il en est ainsi, chacune des propositions « Tu ne me donneras pas ta photo » et « Tu ne me donneras pas un baiser » est vraie. Mais, d'après la promesse faite par la jeune fille, si elle ne peut pas donner sa photo, c'est que le jeune homme a énoncé une proposition fausse, contrairement à notre supposition. Il en résulte que la proposition « Tu ne me donneras pas ta photo et tu ne me donneras pas un baiser » est fausse.
L'une au moins des deux propositions « Tu ne me donneras pas de photo » et « Tu ne me donneras pas un baiser » est donc fausse. Il ne peut s'agir de la première puisque le jeune mathématicien a dit quelque chose de faux. Il s'ensuit que « Tu me donneras un baiser » est nécessairement vraie.

« Moi aussi, hier c'était un de mes jours de mensonges. » Alice qui est intelligente devine de quel jour de la semaine il s'agit !

Dans ce livre, l'indécidabilité et l'autoréférence sont à l'honneur. Raymond Smullyan fait un sort aux problèmes de menteurs qui disent parfois la vérité ou de coffrets qui peuvent ne pas contenir ce qui est indiqué sur leur étiquette.
Avec *Le livre qui rend fou* (Dunod, 1984), il nous conduit effectivement dans cette douce folie un brin masochiste de résolution d'énigmes apparemment simples qui nous enferment dans le piège de raisonnements en boucle ou inextricables. La « machine à fabriquer des nombres » est une de ses créations les plus exemplaires.
Puis avec *Ça y est je suis fou* (Dunod, 1993) Smullyan récidive. Il a encore à dire et à trouver sur les faux vrais diseurs de vérités possibles. En outre, ses méta-jeux et ses généralisations mettant en jeu l'infini, Cantor, Gödel, semblent l'aboutissement d'une tentative pour nous contaminer de son mal diabolique. Le titre en anglais est d'ailleurs *Satan, Cantor and Infinity*.



**« Je pense que le mysticisme peut être caractérisé comme étant l'étude des propositions qui sont équivalentes à leurs propres négations.**
**Le point de vue occidental est que la classe de ces propositions est vide. Le point de vue oriental est que la classe de ces propositions est vide si et seulement si elle ne l'est pas. »**

**Raymond Smullyan**

## Ceci n'est pas un titre

Loin de se limiter à la logique, chacun de ses livres contient de délicieuses anecdotes, des rappels d'énigmes bien connues ou particulièrement mises en scène.
Ainsi *Sherlock Holmes en échecs* (Flammarion, 1983, réédité en 2000) présente des problèmes d'échecs de toute nature sous forme d'une enquête policière destinée à retrouver un fabuleux trésor. De même *Les énigmes de Shéhérazade* (Flammarion, 1998) nous entraîne aux suites des *Mille et une nuits*. La deuxième partie du livre est consacrée à la logique moderne et entre autre à la logique coercitive.

« Quelle est la question qui bon gré mal gré vous oblige à dire la vérité ? Quelle est la question qui vous oblige à mentir ? »

Par sa verve et son sens pédagogique Smullyan a poussé à l'extrême le délice que nous éprouvons à nous instruire sans nous en rendre compte. Du grand art.

**A. Z.**

# Un des mystère des coffrets de Portia

**Dans le *Marchand de Venise* de Shakespeare, Portia a trois coffrets, un d'or, un d'argent et un de plomb et, dans l'un d'eux, elle a caché son portrait. Quand un de ses soupirants se présente, elle lui fait choisir l'un des coffrets, et c'est celui qui aura la chance (ou l'astuce) de trouver le coffret contenant son portrait qui pourra l'épouser.**
**Mais le couvercle de chaque coffret porte une inscription pour guider le choix du soupirant, car Portia ne veut pas choisir un époux pour sa vertu mais pour son intelligence.**

**Elle traça un jour les inscriptions suivantes :**


**Coffret en or** **Coffret en argent** **Coffret en plomb**

**Et expliqua à son soupirant que de ces 3 affirmations, une seule au plus était vraie.**

**Quel coffret le candidat au mariage devait-il choisir pour épouser Portia ?**

**Solution**

**Les inscriptions des coffrets d'or et de plomb se contredisent, donc l'une d'elles est fausse et l'autre vraie. Puisqu'au plus une inscription parmi les trois est vraie, celle du coffret d'argent est fausse et le portrait est dans le coffret en argent.**
**On pourrait résoudre ce problème d'une autre façon. Si le portrait était dans le coffret en or nous aurions deux inscriptions exactes (sur les coffrets en or et en argent) ce qui n'est pas possible. Si le portrait était dans le coffret en plomb nous aurions encore deux inscriptions exactes (sur les coffrets en argent et en plomb). Donc le portrait est dans le coffret en argent.**

par E. Janvresse & T. de la Rue

# Les cocus de Bagdad

**Cette histoire fait partie du folklore mathématicien. L'un de ces contes qui se transmettent au coin du feu de la génération $n$ à la génération $n + 1$.**

Cela se passe il y a très longtemps dans la grande cité de Bagdad, dont les habitants étaient réputés pour être tous d'excellents logiciens. La vie sociale à Bagdad était alors ordonnée par des règles extrêmement strictes qui n'admettaient aucune exception.

Celle qui est à l'origine de l'histoire concerne les maris trompés : lorsqu'une femme était infidèle, le seul à l'ignorer dans la cité était son mari. Mais si par malheur celui-ci venait à l'apprendre, il devait alors répudier sa femme le soir-même.

Il y avait en ce temps-là 50 cocus à Bagdad. Tous les habitants connaissaient donc les 50 cocus, sauf les cocus eux-mêmes qui n'en connaissaient que 49. C'est alors qu'un matin, sur la grande place de la ville, chacun découvrit ce qu'une main anonyme avait écrit sur un mur, bien visible :

**« Il y a au moins un mari trompé à Bagdad. »**

Un voyageur présent ce jour-là dans la cité s'étonna de l'intense émotion que ce graffiti provoquait dans la population, puisque tout le monde savait déjà ce qui était proclamé. D'ailleurs, le soir même aucune des femmes infidèles ne fut répudiée. Mais le voyageur était loin de s'imaginer les conséquences que la divulgation de cette information, pourtant connue de tous, allait entraîner.
Revenant à Bagdad après sept semaines de voyage, il constata que l'agitation était encore plus vive. Et le lendemain soir de son arrivée, les 50 femmes infidèles furent répudiées. (Aucune autre liaison illégitime ne s'étant déclarée entre temps.)

Poussé par la curiosité, il se risqua à interroger sur ce sujet sensible l'ami chez lequel il séjournait :
– Je ne comprends pas, dit-il. Pourquoi les maris bafoués se sont-ils tous aperçus justement aujourd'hui qu'ils étaient cocus puisque personne ne leur a rien dit de plus ?
– Je vois que tu n'es pas aussi bon logicien que nous ! S'il n'y avait eu qu'une

femme volage à Bagdad, son époux l'aurait su en découvrant l'inscription puisque lui n'en connaissait aucune. Comme il ne s'est rien passé le premier soir, tous les habitants en ont conclu qu'il y avait au moins deux époux malchanceux parmi eux, mais surtout, que tout le monde en avait conscience.

– D'accord, mais ils le savaient déjà puisque chacun en connaissait au moins 49.

– Oui, mais lorsque rien ne se passait le $n$-ième soir, nous en déduisions tous qu'il y avait au moins $n + 1$ femmes adultères et que tout le monde le savait. Aussi, s'il ne se passait toujours rien le $(n + 1)$-ième soir, c'est que tous les maris connaissaient $n + 1$ cocus et donc qu'il y en avait au moins $n + 2$.

– J'ai compris ! Le tournant décisif a eu lieu le 49$^{e}$ soir, lorsque les maris trahis ont constaté que rien ne se passait et donc que tout le monde connaissait au moins 49 femmes infidèles. Sachant qu'eux-mêmes n'en connaissaient que 49, ils en ont aussitôt déduit la conclusion qui s'imposait.

– En effet, c'est un exemple typique de raisonnement par récurrence : cela consiste à démontrer une hypothèse $H_i$ qui dépend d'un entier $i$.

On vérifie que :

1) elle est vraie pour $i = 1$ ($H_1$ est vraie) ;

2) si elle est vraie jusqu'à un entier $n$, elle est vraie pour $(n + 1)$ : $H_i$ vraie pour tout $i \leqslant n$ implique $H_{n+1}$ vraie.

Alors le principe de récurrence dit que $H_i$ est tout le temps vraie (quel que soit $i$).

Pour l'hypothèse $H_i$ = « s'il y a $i$ cocus, ils répudient leurs femmes le $i$-ième soir », voilà le raisonnement qu'a tenu chacun des habitants de notre cité :

1) $H_1$ est vraie.

2) Supposons que $H_i$ est vraie jusqu'à un entier $n$, et qu'il y a $(n + 1)$ cocus.

Alors si les femmes ne sont pas répudiées le $n$-ième soir, c'est qu'il y a au moins $(n + 1)$ femmes infidèles. Or, chaque cocu n'en connaît que $n$, et réalise donc l'infidélité de sa femme, qu'il répudie le lendemain, c'est-à-dire le $(n + 1)$-ième soir. Ainsi, $H_{n+1}$ est vraie.

Puisqu'il y avait 50 cocus à Bagdad, les épouses infidèles ont donc été répudiées le 50$^{e}$ soir.

Question subsidiaire : que se serait-il passé si l'on avait écrit qu'il y avait au moins trois et non au moins un mari trompé ?

**É. J. & T. R.**

 par Daniel Barthe

# Le paradoxe de Hempel

**Selon les canons de la logique classique l'observation d'un flamant rose confirme l'hypothèse que tous les corbeaux sont noirs. Une telle conclusion semble intenable. Le paradoxe de Hempel réserve d'autres surprises !**

Carl Hempel

On appelle « induction » toute inférence de nature non démonstrative permettant, à partir de l'examen d'un nombre fini d'observations, d'énoncer une loi générale. Lancée en l'air, une pierre retombe ; il serait déraisonnable de se contenter d'une seule expérience. Si la pierre est lancée un million de fois et si elle retombe un million de fois, alors le constat « Lancée en l'air, une pierre retombe » prend force de loi.

## L'induction en mathématiques

Le processus mental, qualifié d'« inductif », rejette les phénomènes contingents pour se focaliser sur les longues séries de faits réguliers et stables autorisant à remonter du « particulier au général ».

Examinons, par exemple, les entiers naturels pairs supérieurs ou égaux à 4 :

$4 = 2 + 2$ ;
$6 = 3 + 3$ ;
$8 = 3 + 5$ ;
$10 = 7 + 3$ ;
$12 = 5 + 7$ ;
$14 = 3 + 11$ ; … ;
$778 = 101 + 677$ ; … ;
$13\,020 = 5\,101 + 7\,919$ ; …

Aussi loin que l'on puisse aller, un nombre pair semble pouvoir toujours s'écrire comme somme de deux nombres premiers. En mathématiques, procéder inductivement amène à énoncer des conjectures, sorte de vérités « en suspens » (dans l'exemple précédent, il s'agit de la « conjecture de Goldbach »). Une conjecture peut avoir un sort fu-

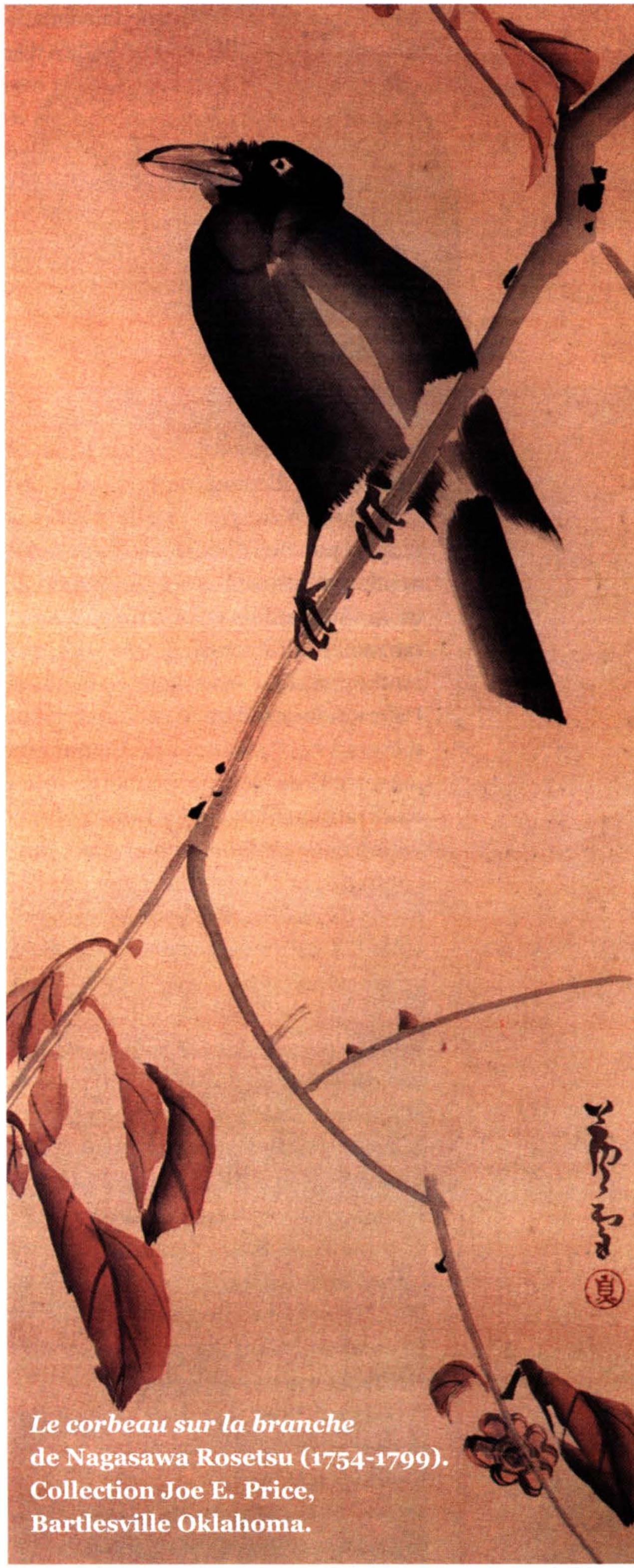
*L'observation d'un corbeau noir confirme l'hypothèse « Tous les corbeaux sont noirs ». L'existence d'un corbeau albinos infirme et ruine cette même hypothèse.*

neste ; un simple contre-exemple l'infirme. Fermat conjectura ainsi que les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ sont toujours premiers. Euler montra que $F_5$ était composé :

$$F_5 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721.$$

Une conjecture peut devenir un théorème (voir l'article « Les démonstrations automatiques » à propos de la conjecture sur les algèbres de Robbins). Un statut intermédiaire, celui de « quasi-certitude » est parfois atteint : il en est ainsi de la conjecture de Golbach : J. R. Chen a démontré, en 1966, que tout entier pair « suffisamment grand » s'écrivait comme somme d'un nombre premier et d'un quasi-premier (produit d'au plus deux nombres premiers).
Certaines conjectures acquièrent le titre ambigu de « proposition indécidable » : elles ne sont pas « prouvables » dans un certain cadre axiomatique.
Enfin, de nombreuses conjectures semblent hors de portée des mathématiques actuelles : tel est le cas de la conjecture sur les *nombres premiers jumeaux* qui affirment qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers de la forme $(p, p+2)$.

Hors du champ mathématique, où le sort de toute loi obtenue de manière inductive peut avoir l'espoir d'être un jour tranchée, le *problème du fondement de l'induction* reste une question délicate. D'Aristote à Kant, en passant par Bacon, Mill et Hume, les philosophes ont affirmé que nos connaissances empiriques et scientifiques reposaient, essentiellement, sur des inductions.
« Tous les corbeaux sont noirs », « Tous les matins, le soleil se lève », « L'éclair précède le tonnerre », « Un corps massif tombe avec une accélération constante » sont des affirmations inductives. Mais en



***Le corbeau sur la branche***
**de Nagasawa Rosetsu (1754-1799).**
**Collection Joe E. Price,**
**Bartlesville Oklahoma.**

quoi l'induction fonde-telle la connaissance ? La science se résume-t-elle à une collection de timbres ? Le patron de bistro qui, après avoir longuement observé sa clientèle, avanc : « Qui boit vite, paie lentement », est-il un savant ? Autrement dit, l'induction peut-elle nous proposer autre chose que des proverbes ou des pseudo-lois plus ou moins sophistiqués ?

## Le radicalisme poppérien

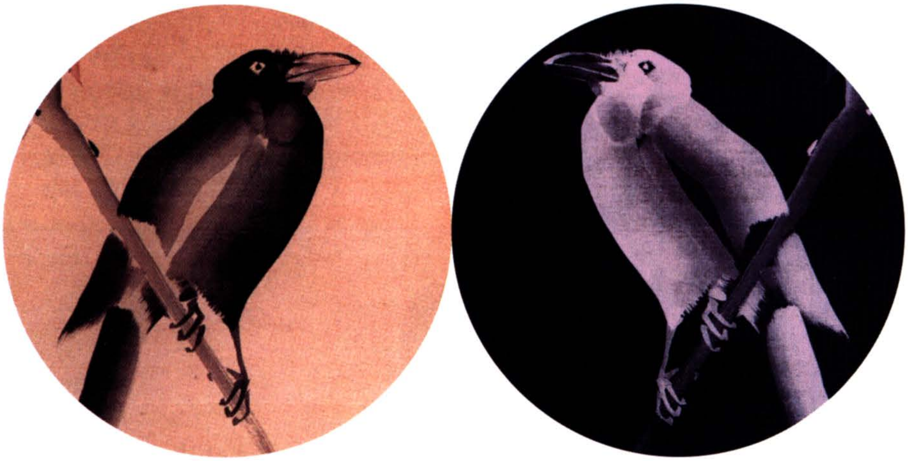
Karl Popper rejette en bloc l'idée que la science puisse reposer sur l'induction. Une collection de faits ou d'observations n'est rien si elle n'est pas étayée par une théorie. L'hypothèse explicative prime l'observation. Lancer un million de fois une pierre en l'air et constater qu'à chaque fois, elle retombe, ne nous renseigne en rien sur l'attraction terrestre. Seule une hypothèse ad hoc, ici la loi de l'attraction universelle de Newton, permet de structurer rationnellement les faits d'observation et de *déduire* de nouveaux faits contredisant l'approche inductive : si la vitesse initiale de la pierre dépasse un certain seuil (vitesse de libération), la pierre ne retombera pas.

Déduire, c'est prédire. Pour Popper, une théorie scientifique n'est fiable que si elle résiste à ses prédictions. Le propre d'une véritable connaissance est d'être réfutable. Toute théorie non réfutée est en sursis. La vérité est inaccessible. Les constructions théoriques sont soit des conjectures, soit des croyances. La psychanalyse peut s'allonger sur son divan et s'endormir sur l'une et l'autre oreille ; elle n'est pas réfutable.
Il ne saurait donc y avoir de « logique inductive », mais seulement une ou des logiques « déductives ».
Si la science ne procède pas par accumulation de données d'observation, si, au contraire, l'obtention de séries de faits cohérents est toujours le fruit d'un choix fondé sur un critère théorique, le problème de l'induction ne se pose plus. Il se transforme en problème de la confirmation.
Infirmer ou confirmer, telle est la question.

## Le paradoxe de Hempel

Si vous voulez vérifier l'hypothèse « Tous les corbeaux sont noirs », la chose la plus simple à faire consiste à rechercher des corbeaux et à observer leur couleur. Chaque nouveau corbeau noir confortera l'hypothèse, mais la simple vue d'un corbeau albinos, rouge ou vert ruinera définitivement votre affirmation.

En 1942, le philosophe américain Carl Hempel décida de s'intéresser plutôt à l'hypothèse équivalente : « Tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau ».
(En effet, la proposition « pour tout $x$ objet de l'univers, si $x$ est un corbeau alors $x$ est noir » admet pour contraposée, qui lui est équivalente, la proposition «pour tout objet $x$ de l'univers, si $x$ est non-noir alors $x$ est un non-corbeau». Soit du point de vue ensembliste, « Si C est inclus dans N, alors le complémentaire de N est inclus dans le compléméntaire de C ». Autrement dit, de manière prosaïque, si l'intérieur de C est dans l'intérieur de N, alors l'extérieur de N est dans l'extérieur de C, et inversement. Voir l'article « La contraposition ».)
Ainsi, chaque fois que l'on voit quelque chose qui n'est pas noir et que ce n'est pas un corbeau (par exemple un flamant rose), on confirme donc l'hypothèse « Tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau » et donc aussi l'hypothèse équivalente « Tous les corbeaux sont noirs ». De même, la vue d'un perroquet rouge, comme la rencontre d'un canari jaune,



devraient renforcer notre conviction.
N'est-ce pas admirable ? La science dans un fauteuil, l'ornithologie sans quitter sa chambre.

Évidemment, pour que ce paradoxe prenne toute son ampleur, il faut admettre deux principes :

– premièrement, qu'une hypothèse générale est confirmée par *toutes* ces instances observationnelles ;

– secondement, qu'il est pertinent d'appliquer les règles de la logique élémentaire à toutes les manifestations de l'univers.

Armé de ces convictions, on peut arguer que la considération du nez rouge d'un clown confirme de manière *infinitésimale* l'hypothèse que tous les corbeaux sont noirs et nier ainsi la présence d'un quelconque paradoxe.

Tout aussi peu sérieux est l'argument qui consiste à restreindre le système de référence. Se limiter à l'univers des oiseaux (et pourquoi pas à celui des corvidés ?) ôte toute force au principe d'induction sur lequel on s'appuie (si un tel principe existe !).

Les difficultés engendrées par la théorie de la confirmation semblent inextricables.

Le coup de grâce a été porté par Hempel lui-même. Si l'observation d'un flamant rose confirme l'hypothèse « Tous les corbeaux sont noirs », elle confirme aussi l'hypothèse « Tous les corbeaux sont blancs ». *Comment un même fait peut-il confirmer deux affirmations contradictoires* ?

**D. B.**

**Bibliographie**


**Karl Popper,**
***La logique de la découverte scientifique,***
Éd. Patot, Paris, 1971.

**Carl J. Hempel,**
***Aspects of Scientific Explanation,***
Free Press, New York, 1964.

**Claudine Tiercelin,**
***Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences,***
Presse Universitaire de France, Paris, 1999.

par A. Zalmanski et M. Criton

# En toute logique

## 1. Autoréférence logique

**Combien le cadre ci-dessous contient-il de phrases vraies ?**

> Dans ce cadre, il y a exactement une phrase vraie.
> Dans ce cadre, il y a exactement une phrase fausse.
> Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases vraies.
> Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases fausses.

## 2. Somme de deux carrés

**Prouver** que la somme de deux carrés différents, multipliée par la somme de deux autres carrés différents fournit de deux façons différentes la somme de deux carrés.

## 3. Triple d'une somme de trois carrés

**Montrer** que trois fois la somme de trois carrés est une somme de quatre carrés.

## 4. Des triangles bien mesurés

**Trouver** tous les triangles dont tous les angles sont des diviseurs de 3602.

**Le bibliothécaire d'Arcimboldo. (Le catalogue des catalogues qui ne mentionnent pas doit-il se mentionner ?)**

## 5. Un brin de logique

René affirme ce qui suit :

1) des trois propositions A, B et C, une seule est vraie,
2) des trois propositions B, C et D, une seule est vraie,
3) des propositions A et D, une seule est vraie !

D'autre part, Andrée prétend ceci :

1) de A, B et C, une seule proposition est vraie,
2) de B, C et D, une seule proposition est vraie,
3) de A, C et D, une seule proposition est vraie !

Un des deux personnages ment au moins une fois.

**Quelles sont les propositions vraies ?**

## 6. Le zèbre

Du même côté de la rue du village de Babel-les-Tours sont bâties cinq maisons de couleurs différentes. Chacune est habitée par un ressortissant d'une nation différente, possédant chacun un animal différent, et consommant une boisson et une marque de cigarettes qui lui sont propres.

Le Norvégien a choisi la première maison à partir de la gauche afin de profiter de la vue sur la belle maison bleue voisine. Pour sa part, l'amateur de café de la maison verte a horreur de la couleur orangée avec laquelle son voisin de gauche a peint sa maison. L'Anglais (des goûts et des couleurs...) a préféré habiter une maison rouge.
Dans la maison jaune on fume des Kool. La fumée des Marlboro déroule ses volutes jusqu'à l'étage et la girafe s'étouffe. L'odorat moins délicat du yak s'accommode des Winston de son voisin et le hérisson apprécie même l'arôme des Kool du sien. Le Quatari fume des Parliament et le fumeur de Lucky Strike se gave de boissons à la framboise.
Alors qu'on livre du xérès à la maison du milieu, l'Ukrainien se prépare un thé très parfumé.
Tout irait pour le mieux si le dogue du Suisse n'aboyait pas toute la journée.
La cinquième boisson pourrait par exemple être de l'eau, mais ça n'a vraiment aucune importance.

**À qui appartient le zèbre ?**

## 7. Le paradis logique

Le bureau du purgatoire logique est gardé par trois anges : A, non-A et Tiersnonexclu. L'ange A dit toujours la vérité, l'ange déchu non-A ment toujours et Tiersnonexclu dit la vérité une fois sur deux. Deux portes sont visibles au fond du bureau : l'une mène au paradis, l'autre à l'enfer logique.
Kurt G., prétendant au paradis, sait qu'il peut poser deux questions aux anges.

**Comment doit-il formuler ces deux questions pour accéder au paradis ?**

## 8. Dieux, Démons et compagnie

Dans une lointaine contrée vivent des Dieux, des Démons et des Mortels. Les Mortels se divisent en Chevaliers et Valets.
Les Dieux et les Chevaliers ne savent pas mentir au contraire des Démons et des Valets qui ne disent jamais la vérité.
Survient un habitant qui affirme tout de go : « Un jour un Dieu a proclamé que j'étais un Démon. Jamais un Chevalier ne m'a traité de Valet. »

**Quelle est son identité ?**

**Solutions pages 136-138**

## 9. La liste des commissions

Mme Smith a perdu sa liste des commissions. Elle parvient, après un moment, à reconstituer exactement la suite des achats prévus dans leur ordre initial. Seules les quantités de chacun des produits lui échappent. Voici la liste partiellement retrouvée :

1. Pommes (?)
2. Citrons (?)
3. Ananas (?)
4. Soupe à la tomate (?)
5. Pizza aux quatre fromages (?)
6. Ficelle (?)
7. Papier soufré (?)
8. Savon (?)
9. Gobelets en carton (?)
0. Vin de Bourgogne (?)

(Il est à remarquer que le « 10 » final a été remplacé, par souci d'économie ménagère, par un « 0 ».)

Dans un dernier effort, Mme Smith, qui n'est pas mathématicienne au Caltech pour rien, se souvient que sa liste était auto-descriptive. Autrement dit, les nombres figurés par un point d'interrogation dans la liste reconstituée, donnent le nombre total de fois où le chiffre figurant devant l'article concerné se retrouve dans la liste. Ainsi, si la liste débute par 1. Pommes (8), 2. Citrons (3), on doit trouver 8 fois le chiffre « 1 » et 3 fois le chiffre « 2 » sur la feuille des commissions.

**Pouvez-vous reconstituer complètement la liste ?**

**Les problèmes de cette rubrique ont pour origine :**

**1, 2 : Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques,**

**3, 4, 5 : *Pillow Problems and A Tangle Tale*, traduit chez POLE sous le titre *Énigmes mathématiques de Lewis Carroll*,**

**6 : adaptation d'une énigme logique de Lewis Carroll,**

**7 : adaptation d'un problème de Martin Gardner,**

**8 : d'après Smullyan.**

# La maison hantée

*Tangente* a decidé de verser un zeste de frisson sur vos jeux. Votre nouvelle mission : chasser d'une maison deux créatures surnaturelles. Alors bonne chance...

Cher ami,

Il y a quelque temps, j'ai acheté cette vieille maison, mais elle est hantée par deux bruits surnaturels, un rire sardonique et un chant lugubre. Elle est donc difficilement habitable. Il y a cependant un espoir, car j'ai déterminé par des essais certaines des lois auxquelles obéit leur comportement, lois obscures mais infaillibles, que l'on peut altérer en jouant de l'orgue ou en brûlant de l'encens. Chaque minute, chaque bruit est absent ou présent, mais il n'y a pas de degré d'intensité. L'état de chacun durant la minute suivante est fonction de ce qui se passait la minute précédente par l'intermé-diaire des lois suivantes : le chant continuera (ou se taira comme à la minute précédente, à moins que l'on ait joué de l'orgue pendant que le rire se taisait, auquel cas il adoptera le comportement opposé.

Pour ce qui est du rire, si on a brûlé de l'encens, il copiera avec une minute de retard le chant. Si on n'a pas brûlé d'encens, il fera exactement le contraire.

En ce moment, les deux bruits retentissent. Quelle manipulation puis-je faire pour ramener le calme définitivement?

A. C.

**Solution**

Voici comment faire pour échapper aux divers maléfices et jouir enfin d'une bonne nuit de sommeil. Quand le rire et le chant se font entendre, évitez surtout de brûler de l'encens. Vous pouvez jouer de l'orgue si vous le désirez, cela n'aura aucun effet sur les rires et les chants, mais cela pourra vous détendre un peu. À la minute suivante, le rire se tiara. C'est le moment de jouer del'orgue, pour faire taire le chant.
Ce silence bienfaisant ne se prolongera que si vous stoppez immédiatemment la musique (sinon, le chant continue) et si vous brûlez aussitôt de l'encens pour faire taire le rire.
Ensuite, il vous faudra vous habituer à dormir avec l'odeur de l'encens, et faire quelques provisions, sinon le rire se remettra à retentir.

par Michel Criton

# Le paradoxe du menteur

Le plus ancien paradoxe logique connu semble être celui d'Épiménide le Crêtois, poète et philosophe grec (fin du VIIe et début du VIe siècle avant notre ère). Épiménide releva ce paradoxe dans les écrits d'un poète de ses contemporains, lui-même Crêtois, qui avait eu l'imprudence de déclarer : « Tous les Crêtois sont des menteurs ». Si ce Crêtois disait vrai, en temps que Crêtois, il mentait, ce qui est évidemment contradictoire. Si ce qu'il disait était faux, il existait des Crêtois qui ne mentaient pas, mais l'auteur de la phrase paradoxale n'en faisait pas partie, ce qui est la seule explication permettant de lever l'apparent paradoxe.

Au IVe siècle avant notre ère, un autre philosophe grec, Eubulide, mit en évidence un autre paradoxe, quant à lui impossible à lever : un homme qui déclare « je mens » ment-il ou dit-il la vérité ?

Ici en effet, la véracité ou la fausseté de la phrase, considérée indépendamment de son contenu contredit sa signification dans tous les cas.

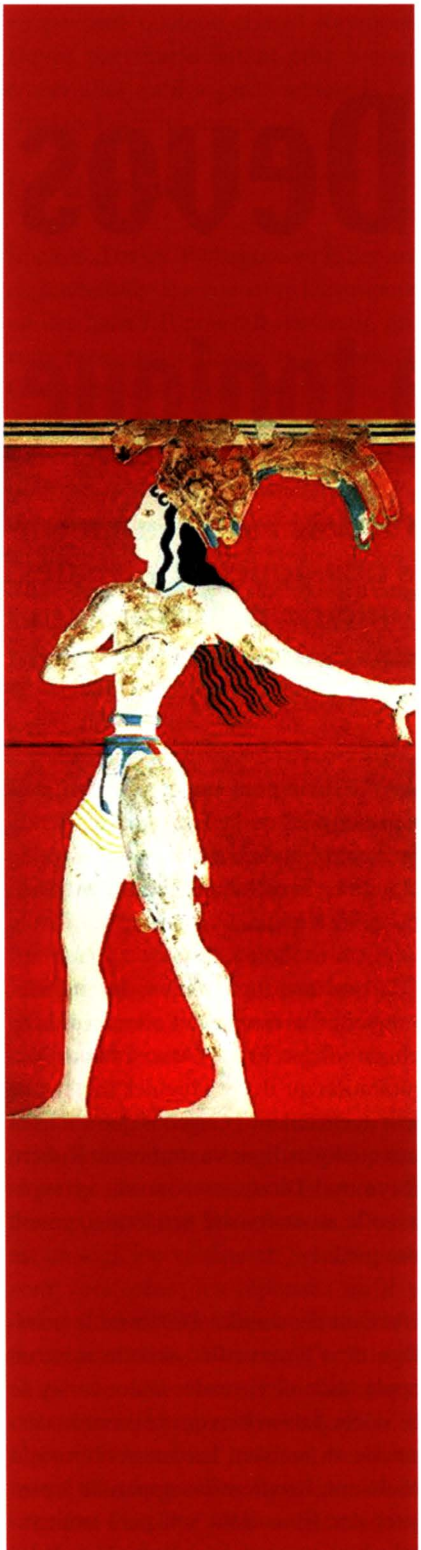
## La postérité du menteur

De nombreuses variantes de ces fameux paradoxes apparurent ensuite, notamment à la fin du XIXe et au début du XXe siècle, avec les débuts balbutiants de la théorie des ensembles et la multitude de paradoxes qui en découlèrent.

On peut ainsi citer le paradoxe du barbier dû au mathématicien et philosophe anglais Bertrand Russell (1872-1970), pour illustrer le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes (un tel ensemble est-il un élément de lui-même ?). Russell évoque un village où un barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et demande qui rase le barbier ? Le barbier ne peut donc se raser lui-même et personne d'autre ne peut le raser. Une réponse amusante à ce paradoxe est que le barbier soit en fait une barbière et n'ait ainsi pas besoin d'être rasée !

Dans une lettre datée du 21 décembre 1904 adressée à Bertrand Russell, G. G. Berry pose la question suivante : « quel est le plus petit nombre entier naturel non exprimable en moins de quatorze mots ? »

La réponse est qu'un tel nombre entier n'existe pas, car sinon l'expression le plus petit nombre entier naturel non ex-



primable en moins de quatorze mots, qui ne contient que treize mots, le définirait, d'où une contradiction.

Jules Richard (1862-1956) reprendra ce thème en 1905 et, en supposant qu'il n'y a pas de paradoxe, affirmera que si l'ensemble des nombres entiers naturels non exprimables en moins de quatorze mots n'a pas de plus petit élément, alors cet ensemble est vide. Et si cet ensemble est vide, alors cela signifie que tout nombre entier naturel peut être décrit en moins de quatorze mots. S'il est difficile de donner crédit à cette propriété numérico-linguistique, il est encore plus difficile de démontrer qu'elle est fausse. Il faudrait alors exhiber un nombre entier naturel non exprimable en moins de quatorze mots. Or la possibilité d'exhiber un tel nombre suppose que l'ensemble que nous évoquions plus haut est non vide !

On peut également citer le paradoxe de la carte de Jourdain, qui est une variante à deux phrases du paradoxe d'Eubulide. Philip E. B. Jourdain est un philosophe anglais (1879-1919) qui proposa ce paradoxe en 1913. Le paradoxe consiste en une carte comportant une phrase sur chacune de ses deux faces. Le recto porte la phrase : « la phrase écrite de l'autre côté de cette carte est vraie », tandis que le verso fait apparaître : « la phrase écrite de l'autre côté de cette carte est fausse ».

**M. C.**

***Le prince aux lys*, Musée d'Heraklios (Crête).**
**Si Épiménide avait été le seul Crêtois au moment où il énonçait son célèbre paradoxe, ce dernier aurait été insoluble.**

# Raymond Devos

## le forcené de la logique

**Depuis plus de quarante ans, Raymond Devos ravit les spectateurs du monde entier par ses jongleries physiques et verbales. L'imagine-t-on donnant un récital uniquement destiné à un public de mathématiciens ? Son impresario aurait peut-être du mal à relever un tel défi ! Et pourtant...**

Problème : un automobiliste s'engage sur un rond – point, mais lorsqu'il veut en sortir, il s'aperçoit que toutes les rues dans lesquelles il pourrait tourner sont en sens interdit. Que fait-il ?

Les cartésiens trouveront bien des solutions. On appelle la police, on s'arrête et on réfléchit aux moyens de s'en sortir, ou que sais-je encore...
Eh bien non ! La réponse, indubitablement exacte, a été donnée par Raymond Devos : on tourne ! Et dans cet inexorable manège il ne sera pas seul, car tous ceux qui ont emprunté (sans le rendre) ce sens giratoire tournent avec lui. Encore heureux que l'auteur ne vous demande pas de calculer la vitesse proportionnelle des véhicules, ou les quantités d'essence consommées par toutes les voitures.

Le dictionnaire le définit ainsi : Devos Raymond comédien auteur français né en 1923. Un personnage solitaire, prenant au pied de la lettre la logique du langage quotidien où l'angoisse, née de situations banales poussées à l'extrême, est mise à nu par l'absurde.

Ces quelques lignes, dans leur académique sécheresse disent-elles toute la richesse du parler de Devos, toute l'exploitation qu'il sait faire des mots et de leur agencement ? Gageons que s'il lisait ces quelques lignes extraites du Robert, Raymond Devos nous aurait effrayés avec la monstruosité des lettres qui ont des pieds !

L'enfant des années 1920 a eu le privilège de s'émerveiller avec la mise en application des grandes découvertes de ce siècle. Les avions qui volaient au dessus de sa maison, les automobiles qui roulaient, les premiers appareils à projeter des films dont son père avait ramené un exemplaire à la maison. Il lui en est resté quelque chose ! Raymond Devos parvient d'autant plus à nous émerveiller qu'il a gardé intacte la faculté de l'être lui-même.

## L'art et la matière

Euclide, Thalès, Pythagore ou Euler accepteraient-ils de reconnaître Devos pour un des leurs ? Il pourrait remonter, lui, cette prestigieuse filière, se gausser de Gauss et des gosses prodiges... Et d'ailleurs, y a-t-il plus subtil inventeur de théorèmes, plus implacable créateur de postulats, plus prolixe fabricant d'équations que ce corpulent natif de Mouscron en Belgique ? Raymond Devos est tour à tour géomètre, algébriste, logicien dans un univers où les mots remplacent les nombres et les chiffres, mais dans lequel ils se combinent selon les règles d'une logique irréfutable.

D'ailleurs il l'avoue lui-même : « Vous savez que j'ai un esprit scientifique » annonce-t-il lorsqu'il observe les atomes qui se tordent de rire. Et qu'advient-il alors ? Eh bien c'est simple il suffit de fournir aux atomes « matière à rire ». Mais pourquoi donc ? Pour les faire « éclater de rire ». Du coup la fission nucléaire deviendrait « une explosion de joie ». C.Q.F.D. !

Mais contrairement au matheux classique qui énonce ses problèmes et en donne calmement les solutions, Devos est un logicien véhément. Ses énigmes sont vociférées, les réponses qu'il y donne s'échafaudent dans un bruit et une fureur inimitables. Parce qu'il ne lui suffit pas de démontrer, il lui faut aussi convaincre ! Un jour dans un salon, il s'aperçoit que bien qu'il ait les deux mains dans les poches, il est en train de se gratter l'oreille ! « Raisonnons calmement ... De deux choses l'une ! Ou j'ai une main de trop... et alors j'aurais dû m'en apercevoir plus tôt... ou il y en a une qui ne m'appartient pas ». Les professeurs de lycées et collèges penseraient-ils à poser à leurs élèves une telle colle ?

**R. Devos mimant « le Penseur » de Rodin.**

## La pédagogie de l'absurde

Il est pédagogue le bougre ! Tous ceux qui ont transpiré à l'école sur les problèmes de robinets qui fuient, qui au lycée n'ont pas su découvrir les inconnues derrière leurs équations ont eu leur revanche en comprenant la mathématique « devosienne ». Lorsqu'il explique les dangers qu'il y a à entraîner les gens dans l'imaginaire, on compatit à ses difficultés car dit-il avec justesse « il faut pouvoir les ramener dans le réel, ensuite... et sans dommage ! » Il le prouve : « Je mime les objets » il le fait avec une bouteille de vin, puis invite un spectateur

à trinquer avec lui. Puis comme il parle beaucoup, le Monsieur boit ses paroles et que croyez vous qu'il advint ? L'artiste voit le Monsieur « qui titubait ».
Sans compter que Devos nous abreuve de définitions. Vous voulez savoir ce qu'est le racisme ? Facile ! Un xénophobe déteste les étrangers « Il déteste à tel point les étrangers que lorsqu'il va dans leur pays il ne peut plus se supporter » ! À y bien réfléchir est-ce si absurde que cela ? S'il avait été enseignant, Raymond Devos aurait aimé un monde bien ordonné, bien structuré, dans lequel un coureur cycliste « qui s'échappe » ne peut aller bien loin tant est nombreuse la foule qui l'acclame. Un monde où les sauteurs en hauteur, lorsqu'il ne peuvent plus franchir de barres trop élevées, prennent en toute logique une perche pour s'élever plus haut. Certes, il arrive que dans cette logique se glissent des grains de sable, parfois de la grosseur d'une roche mais alors, il suffit de compter avec le talent de jongleur et d'équilibriste de cet artiste inimitable pour rétablir l'ordre à l'aide de quelques vérités promptement assénées.

## Le géomètre

Raymond Devos est déjà, par son aisance à se mouvoir sur scène, un défi permanent à la géométrie. L'artiste est, comme dirait Obélix, un peu « enveloppé » ! Et pourtant, il bouge sur scène avec une grâce et une légèreté surprenantes ; il occupe l'espace avec une précision de géomètre, y trace des figures, y importe des personnages et des situations. Observez Raymond Devos au musée Rodin : c'est en « collègue » qu'il va interpeler le fameux penseur du sculpteur. Alors pour savoir à quoi pense cette célèbre statue, Devos prend la pose, menton entre les mains et nous découvrons tous, en même temps que lui, l'irréfutable conclusion : le penseur de Rodin ne pense à rien... Que n'y avons nous pensé plus tôt !

## La table de multiplication façon Devos

Mesdames et messieurs je vous signale tout de suite que je vais parler pour ne rien dire... Et si vous-mêmes, mesdames et messieurs vous n'avez rien à dire, eh bien, on en parle on en discute !
Je ne suis pas ennemi du colloque.
Mais me direz-vous, si on parle pour ne rien dire, de quoi allons nous parler ?
En bien, de rien ! De rien !
Car rien... ce n'est pas rien !
La preuve c'est qu'on peut le soustraire.
Exemple : rien moins rien = moins que rien !
Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose !
On peut acheter quelque chose avec rien ! En le multipliant !
Une fois rien... c'est rien !
Deux fois rien... c'est pas beaucoup !
Mais trois fois rien !... Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose... et pour pas cher !
Maintenant si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien :
rien multiplié par rien = rien,
trois multiplié par trois = neuf,
cela fait : rien de neuf.
Oui... Ce n'est pas la peine d'en parler...

Et ce n'est pas tout. Raymond Devos dessine des objets dans l'espace. Quand son propriétaire lui intime l'ordre de prendre la porte... il le fait. Mais comme il est attentif à l'équilibre des objets, il n'oublie pas le chambranle. Car « sans son chambranle, une porte ne tient pas debout ». Et voici notre héros, flanqué de sa porte, qui traverse la scène, qui passe d'un côté et de l'autre entraînant derrière lui une folle sarabande de personnages, dont un portier, ancien porteur, qui porte la porte ! Et tous ces personnages viennent s'imbriquer dans cette escapade, comme autant de pièces d'un puzzle, dont le spectateur ravi découvre l'implacable enchevêtrement.

## L'algébriste

Les équations de Raymond Devos sont à une ou plusieurs inconnues. Il n'y a là rien de bien original me dira-t-on. Patience ! Tout le monde se souvient d'un de ses premiers sketches intitulé « À Caen les vacances » ! Dans cette équation, il y avait deux inconnues $x$ = quand et $y$ = Caen. Mais la solution va s'avérer bien plus compliquée, chaque fois que $x$ – plein de malice – ira se substituer à $y$ rendant ainsi tous les énoncés, tous les problèmes dérivés sujets à caution. On me dira bien sûr, que c'est inexact, que dans une équation, les $x$ et les $y$ doivent rester à leur place. Mais nul ne pourra en persuader Raymond Devos. De sa voix véhémente, presque larmoyante, il vous détrompera.

S'il le faut, il se mettra même « en colère » pour capturer ses interlocuteurs imaginaires et ses auditeurs dans la nasse de ses raisonnements. D'ailleurs, il faut lui rendre justice : il ne jouera pas toujours le rôle du piégeur ! Toujours sur la route des vacances écoutons Devos qui veut voir la mer et à qui un employé d'hôtel facétieux annonce « qu'elle est démontée ». Mais le même employé refusera de lui venir en aide, lorsque notre héros voudra savoir quand « on la remonte ». Ce ne sera pas faute d'essayer toutes formes d'approches et de raisonnement pour résoudre ce problème ! Rien n'y fera. Notre vacancier malchanceux partira bredouille tandis que l'employé de l'hôtel le consolera en lui annonçant : « pleure pas tu la reverras, ta mère ! ». Une troisième inconnue vient à le rescousse là où $x$ – la première – était une inconnue à sens variable ! Plancher sur les équations « à la Devos » garantit de bonnes nuit d'insomnies…

### Le logicien

Il n'est pas un sujet abordé par Devos, pas un thème traité quine passe à la moulinette de son incontournable logique. La vie quotidienne ne peut qu'obéir à ces règles : si son horoscope indique un accident dans la journée, il emboutira votre voiture et vous serez dans votre tort si vous n'êtes pas du même signe que lui, ah ça mais !

Même quand il est amoureux, l'artiste ne peut échapper à la poésie de cette logique qui le traque, le cerne. « L'objet de ses désirs refuse de devenir sa chose ? » Qu'à cela ne tienne, il va lui-même se transformer en chose... Et, « la première chose » qui lui passe par la tête est de devenir... un peigne « bien sûr ! Ainsi, il pourra séjourner dans le sac à main de sa bien-aimée parvenir à ses fins sans pouvoir néanmoins répondre à la question fondamentale du poète : « objets inanimés avez-vous donc une âme ? »

Ce n'est pas en homme intemporel que Devos aborde la vie en société : lorsqu'il voit placardé sur un mur une inscription lui enjoignant : « Faites l'amour, pas la guerre ! » il ne peut s'empêcher de penser « qu'il y en a qui peut-être qui voudraient faire autre chose ! »

Il n'est pas de mathématiciens qui ne vous souligne à longueur de temps, la poésie que recèle le raisonnement mathématique. Si cela est vrai, Raymond Devos a sa place au Panthéon des mathématiques tant ses raisonnements sont empreints de poésie pure. S'il vous advient de le croiser dans la rue et qu'il vous dit : « Appelez-moi Riton » n'hésitez pas à le paraphraser en lui demandant : « pourquoi Riton ? » (pourquoi ritt-on ?). Il répondra : « parce que je suis drôle ».

C'est on ne peut plus vrai, Raymond !

**J. S.**

## Le rouge et le vert

J'arrive à un carrefour, le feu était au rouge, il n'y avait pas de voitures, je passe !
Seulement, il y avait un agent qui faisait le guet.
Il me siffle. Il me dit :
- Vous êtes passé au rouge !
- Oui il n'y avait pas de voitures !
- Ce n'est pas une raison !
Je dis :
- Ah si ! Quelquefois le feu est au vert. Il y a des voitures et...
Je ne peux pas passer !
Stupeur de l'agent !
Il est devenu tout rouge.
Je lui dis :
- Vous avez le visage en feu !
Il est devenu tout vert !
Alors, je suis passé !

par Jim Propp



# Test d'aptitude autoréférentielle

**Le « puzzle » suivant, dû à Jim Propp, professeur au MIT, possède une solution unique mais il n'est pas nécessaire de le savoir pour résoudre ce magnifique exemple de la folie à laquelle peut conduire un usage immodéré de la récursivité*.**

**1** ■ La première question dont la réponse est *b* est la question

*A*) 1
*B*) 2
*C*) 3
*D*) 4
*E*) 5.

**2** ■ Les seules deux questions consécutives avec des réponses identiques sont les questions

*A*) 6 et 7
*B*) 7 et 8
*C*) 8 et 9
*D*) 9 et 10
*E*) 10 et 11.

**3** ■ Le nombre de questions avec la réponse *e* est

*A*) 0
*B*) 1
*C*) 2
*D*) 3
*E*) 4.

**4** ■ Le nombre de questions avec la réponse *a* est

*A*) 4
*B*) 5
*C*) 6
*D*) 7
*E*) 8.

**À la manière d'Escher.**

** Récursif : adj. voir Récursif.*

5 ■ La réponse à cette question est identique à la réponse à la question

*A*) 1
*B*) 2
*C*) 3
*D*) 4
*E*) 5.

6 ■ La réponse à la question 17 est

*A*) C
*B*) D
*C*) E
*D*) aucune de ce qui précède
*E*) toutes celles qui précèdent.

7 ■ Alphabétiquement, la réponse à cette question et la réponse à la question suivante sont identiques

*A*) 4 fois
*B*) 3 fois
*C*) 2 fois
*D*) 1 fois
*E*) toujours.

8 ■ Le nombre de questions dont les réponses sont des voyelles est

*A*) 4
*B*) 5
*C*) 6
*D*) 7
*E*) 8.

9 ■ La prochaine question avec la même réponse que celle-ci est la question

*A*) 10
*B*) 11
*C*) 12
*D*) 13
*E*) 14.

10 ■ La réponse à la question 16 est

*A*) D
*B*) A
*C*) E
*D*) B
*E*) C.

11 ■ Le nombre de questions précédant celui-ci avec la réponse *b* est

*A*) 0
*B*) 1
*C*) 2
*D*) 3
*E*) 4.

12 ■ Le nombre de questions dont la réponse est une consonne est
*A*) un chiffre pair
*B*) un nombre impair
*C*) un nombre parfait
*D*) un nombre premier
*E*) divisible par 5.

13 ■ La seule question à numéro impair avec la réponse *a* est

*A*) 9
*B*) 11
*C*) 13
*D*) 15
*E*) 17.

14 ■ Le nombre de questions avec la réponse *d* est

*A*) 6
*B*) 7
*C*) 8
*D*) 9
*E*) 10.

**15** ■ La réponse à la question 12 est

*A*) A
*B*) B
*C*) C
*D*) D
*E*) E.

**16** ■ La réponse à la question 10 est

*A*) D
*B*) C
*C*) B
*D*) A
*E*) E.

**17** ■ La réponse à la question 6 est

*A*) C
*B*) D
*C*) E
*D*) aucune de ce qui précède
*E*) toutes celles qui précèdent.

**18** ■ Le nombre de questions avec la réponse *a* égale le nombre de questions avec la réponse

*A*) B
*B*) C
*C*) D
*D*) E
*E*) aucune de ce qui précède.

**19** ■ La réponse à cette question est

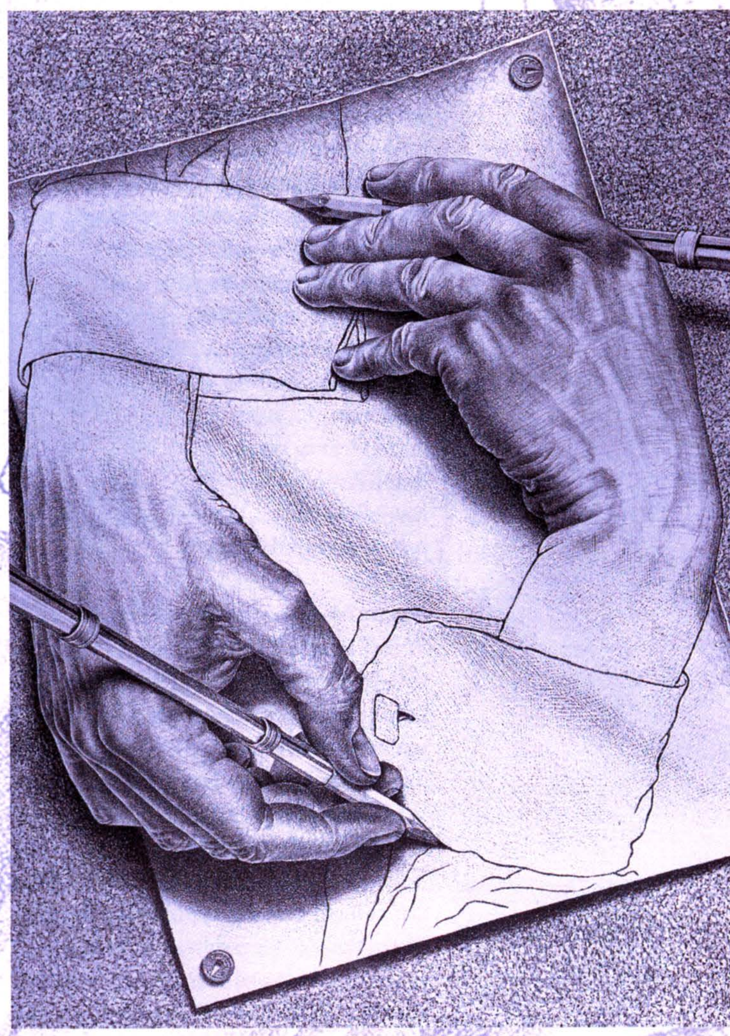
*A*) A
*B*) B
*C*) C
*D*) D
*E*) E

**20** ■ Cet essai normalisé est à l'intelligence ce que le baromètre est à

*A*) la température (seulement)
*B*) vent-vitesse (seulement)
*C*) latitude (seulement)
*D*) longitude (seulement)
*E*) la température, vent-vitesse, latitude, et longitude.

**Le professeur Propp signale que pour trouver la même solution que lui, il faut répondre comme lui à la question 20, mais que dans le cas contraire on a tout faux !**

**Ceci n'est pas un « à la manière d'Escher ».**



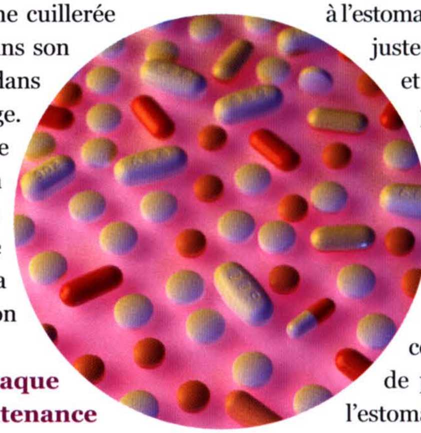
par Marie Berrondo-Agrell

# Logic logique

**Encore de petits problèmes où l'essentiel n'est pas de connaître des resultants techniques particuliers, mais plutôt de réfléchir attentivement et de raisonner astucieusement.**

## 1. Gin orange

Assez souvent le soir, ma femme Emilie et moi nous prenons avant le dîner un verre de gin-orange. Je prépare le cocktail toujours de la même manière : je remplis chaque verre à moitié, celui d'Emilie avec du jus d'orange, le mien avec du gin pur. Je prends alors une cuillerée de jus d'orange dans son verre et je la verse dans le mien. Je mélange. Puis je prends une cuillerée de mon verre et je la verse dans le sien. Je recom-mence la même manipulation sept fois.



**Sachant que chaque verre a une contenance totale de quatorze cuillerées, y a-t-il finalement plus de gin dans le verre d'Emilie que de jus d'orange dans le mien ou le contraire ?**

## 2. L'Europe en couleurs

Considérez une carte politique des différents pays du marché commun.

**Quel est le nombre de couleurs à utiliser afin que chaque pays soit d'une couleur différente de chacun des pays qui lui sont contigus ?**

## 3. Médecine par soi-même

J'ai constaté que l'aspirine soulage mes maux de tête et mon rhumatisme du genou, mais qu'elle me fait mal au cœur et à l'estomac. L'homéopathie soulage justement mes maux de cœur et d'estomac mais elle me provoque de vives douleurs rhumatismales dans la hanche. Quand aux antibiotiques, ils ont heureusement un effet radical contre les migraines et le mal de cœur, mais ils me causent de pénibles douleurs dans l'estomac et le genou, accompagnées d'un violent torticolis. Certes, la cortisone soulage mon torticolis et mon rhuma-tisme du genou, mais elle intensifie celui de la hanche. Quand aux compresses chaudes sur le cou, c'est pour moi une merveilleuse médi-cation contre les maux d'estomac et les torticolis. Or ce matin, je me suis réveillé avec une terrible migraine qui m'empêche de réfléchir à la meilleure façon de me soigner.

**Conseillez-moi s'il vous plait !**

### 4. Quel Micmac !

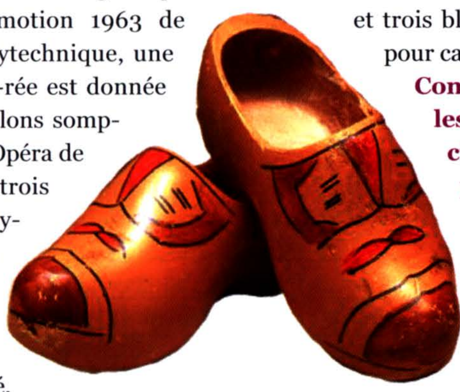
Au début du XVII$^{e}$ siècle, la région du Saint Laurent était peuplée par cent cinquante mille indiens environ se répartissant entre les tribus suivantes: Algonquins, Hurons, Iroquois, Miamis, Sioux et Micmacs. Ces tribus étaient deux à deux, ou bien alliées, ou bien en guerre.

**Sauriez-vous alors démontrer qu'il existait au moins un grou-pe de trois tribus en relations homogènes, c'est-à-dire ou bien toutes les trois alliées, ou bien au contraire où chacune des trois était en guerre avec les deux autres ?**

### 5. La femme du Major

En l'honneur des vingt cinq ans de la promotion 1963 de l'Ecole Polytechnique, une grande soi-rée est donnée dans les salons somptueux de l'Opéra de Paris. Les trois cents polytechniciens concernés sont tous en très bonne santé, tous présents, tous mariés, tous très heureux en ménage et les trois cents épouses sont toutes là elles aussi. Le major de la promotion, passionné par les problèmes statistiques, interroge toutes les autres personnes présentes pour leur demander combien de mains elles ont serré en entrant. Ce nombre est bien sûr très variable et dépend de la personnalité de chacun. Et le major, curieusement, n'obtient ainsi que des réponses différentes les unes des autres.

**Cher lecteur, sauriez-vous déduire de cela le nombre de mains serrées ?**



### 6. Quelle famille !

Toute la famille Labruche part en weekend dans une 304 break. Il y a un grand-père et une grand-mère, un beau-père et une belle-mère, une belle-fille, deux sœurs, deux filles, deux fils, un frère, deux pères et deux mères.

**Comment diable ont-ils pu s'installer, sans même se serrer ?**

### 7. Le dressing-room de Pierre-Alexandre

Pierre-Alexandre apprécie beaucoup son nouveau dressing-room, quoiqu'il soit sans fenêtre. Dans un très gros tiroir se trouvent en vrac ses huit paires de chaussures. Juste au dessus, dans un tiroir plus mince, se trouvent en vrac quatre chaussettes noires, six chaussettes grises et trois bleu marine (chiffre impair pour cause de trou).

**Combien Pierre-Alexandre, les jours de panne électricité, doit-il attraper respectivement de chaussures et de chaussettes pour être sûr de chausser avec deux souliers symétriques des pieds de la même couleur ?**

### 8. La passerelle

Cinq personnes attendent sur la passerelle d'un bateau. Edouard est derrière Mr Scott. Il y a plusieurs personnes entre Mr Scott et Linda. Marguerite aurait aimé qu'il y ait moins de personnes entre elle et Edouard. Mrs Scott est juste devant Mr Scott. Ni Linda ni Marguerite ne sont devant Mrs Scott.

**Comment sont donc placés nos cinq personnages les uns par rapport aux autres ?**

Solutions pages 138-139

# Solutions

## En toute logique (pages 120-122)

**1** • Les phrases 1 et 3 sont contradictoires, de même que les phrases 2 et 4. Le cadre contient donc au plus deux phrases vraies. On en déduit que la phrase 2 est fausse.
D'autre part, les phrases 3 et 4 sont, soit simultanément vraies, soit simultanément fausses. Il existe donc seulement les trois possibilités suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| 1 fausse | 1 vraie | 1 fausse |
| 2 fausse | 2 fausse | 2 fausse |
| 3 vraie | 3 fausse | 3 fausse |
| 4 vraie | 4 fausse | 4 fausse |

Ces trois solutions sont cohérentes. Il pouvait donc y avoir 0 phrase vraie (et 4 fausses), 1 phrase vraie (et 3 fausses), ou bien 2 phrases vraies (et 2 fausses).

**2** • On développe et réarrange pour montrer que :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

On utilisera $-2abcd$ et $+2abcd$ dans le calcul intermédiaire

**3** • Il suffit de développer et réarranger pour montrer que

$$3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2 + (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

**4** • Une solution triviale est le triangle équilatéral.
Il suffit de lister les diviseurs de 360 dans les 3 colonnes d'un tableau et de prendre un angle dans chaque colonne pour que la somme fasse 180°. Il y a 9 solutions faciles à trouver.
L'ensemble des 10 solutions est donnée par la résolution de l'équation à 3 inconnues entières :
$(360/x) + (360/y) + (360/z) = 180$,
soit $(1/x) + (1/y) + (1/z) = 1/2$.

**5** • Examinons les déclarations de René et supposons qu'il dise vrai.
Si A est vraie, B et C sont fausses, donc, pour que la seconde déclaration soit vraie, il faut que D soit vraie, mais alors la troisième déclaration est fausse, puisque A et D seraient vraies toutes les deux. Donc A est fausse.
Si B est vraie, alors C et D sont fausses d'après la seconde déclaration. Donc la troisième déclaration est fausse, puisque ni A, ni D ne seraient vraies. B est donc fausse.
Si C est vraie, B et D sont fausses d'après la seconde déclaration. Mais la troisième ne peut être vraie, puisque A et D sont toutes deux fausses. Donc C est fausse. Mais si A, B et C sont toutes trois fausses, alors René a menti au moins une fois.
**Andrée a donc dit la vérité**.

6 • Numérotons les maisons de 1 à 5 (de gauche à droite). On sait que la maison orangée est immédiatement à gauche de la maison verte. La maison 2 est bleue, donc la 1 n'est pas orangée, et la maison rouge ne peut être qu'en 3 ou en 5. L'ordre des couleurs ne peut donc être que JBROV ou JBOVR. Il en résulte que le Norvégien fume des Kool et que le hérisson vit en 2 dans la maison bleue.
L'amateur de boissons à la framboise qui fume des Lucky Strike, et l'Ukrainien qui boit du thé ne peuvent être ni le Norvégien, qui fume des Kool, ni l'habitant de la maison du milieu qui boit du xérès, ni l'habitant de la maison verte qui boit du café. Si l'Anglais est en 5, il consomme une boisson à la framboise et fume des Lucky Strike et l'Ukrainien ne peut être qu'en 2. Si l'Anglais est en 3, l'Ukrainien peut être en 2 ou en 4. Supposons qu'il soit en 4. Le Qatari ne peut aller qu'en 5.
On a alors le tableau suivant :

| n° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| couleur | jaune | bleue | rouge | orange | verte |
| nationalité | Norvégien | Suisse | Anglais | Ukrainien | Qatari |
| cigarettes | kool | lucky strike | | | parliament |
| boisson | | framboise | xérès | thé | café |
| animal | | hérisson | | | |

On aboutit alors à une impossibilité pour placer le yak, qui a un voisin fumeur de Winston, et la girafe qui fume involontairement des Marlboro. L'Ukrainien est donc en 2. Supposons l'Anglais en 5. Il boit alors de la framboise et fume des Lucky Strike. Le yak doit alors habiter en 1 et l'Ukrainien fumer des Winston, mais il est impossible de placer le Suisse, le Qatari et la girafe.

| n° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| couleur | jaune | bleue | orange | verte | rouge |
| nationalité | Norvégien | Ukrainien | | | Anglais |
| cigarettes | kool | winston | | | lucky strike |
| boisson | | thé | xérès | café | framboise |
| animal | yak | hérisson | | | |

L'Anglais vit donc en 3, et le fumeur de lucky strike en 4. Là encore, le yak ne peut vivre qu'en 1. Le Qatari vit en 5, le Suisse en 4. La girafe ne peut alors habiter qu'en 3, et c'est **le zèbre qui appartient au Qatari**.

7 • Pour le détail des raisonnements voir la page 104 (« Le vrai, le faux et l'incertain »). **Première question** adressée à l'ange située à main gauche de Kurt G. : « *Ton voisin immédiat dit-il plus souvent la vérité que le troisième ange ?* » **Deuxième question** adressée à un ange dont on sait qu'il n'est pas Tiersnonexclu : « *Quelle direction indiquerait celui des anges qui n'est pas Tiersnonexclu si je lui demandais quelle est la direction du paradis ?* »

8 • La première proposition énoncée par l'habitant est fausse. En effet, si elle était vraie, un Dieu aurait affirmer que l'habitant était un Démon. Cette affirmation étant vraie (Dieu dixit), le Démon/habitant aurait dit la vérité avec cette première

proposition, ce qui est impossible.
La première phrase étant fausse, il en est de même de la seconde puisqu'elle est prononcée par le même individu qui est un menteur. Il s'ensuit qu'un Chevalier a dû une fois affirmer que l'habitant était un Valet.
**Un Chevalier disant toujours la vérité, notre habitant est bien un Valet**.

9 • Voici deux solutions possibles :

1. Pommes (11)
2. Citrons (2)
3. Ananas (1)
4. Soupe à la tomate (1)
5. Pizza (1)
6. Ficelle (1)
7. Papier soufré (1)
8. Savon (1)
9. Gobelets en carton (1)
0. Vin de Bourgogne (1)

1. Pommes (7)
2. Citrons (3)
3. Ananas (2)
4. Soupe à la tomate (1)
5. Pizza (1)
6. Ficelle (1)
7. Papier soufré (2)
8. Savon (1)
9. Gobelets en carton (1)
0. Vin de Bourgogne (1)

## Logic logique (pages 134-135)

1 • Chaque verre contient au départ le même volume de liquide. Etant donné qu'à la fin du mélange le volume de liquide dans chaque verre n'a pas changé, la quantité de gin dans le verre de ma femme a forcément été remplacée par du jus d'orange dans le mien. **Il y a donc autant de jus d'orange dans mon verre que de gin dans le verre de ma femme**.

2 • Considérons les pays suivants : Allemagne, Belgique France, Luxembourg. Chacun de ces quatre pays touche les trois autres et doit donc avoir une couleur différente. Quatre couleurs sont donc nécessaires pour la carte d'Europe, quatre couleurs sont également suffisantes (d'après le théorème des quatre couleurs). **Il faudra donc quatre couleurs pour colorier la carte politique de l'Europe**.

**Remarque sur le théorème des quatre couleurs :**
Représentons chaque pays par un point. Si deux pays sont adjacents, traçons une ligne continue entre eux. Pour un groupe $G_n$ de $n$ points tels que chacun soit relié à chaque autre, $n$ couleurs sont nécessaires. On peut trouver dans un plan des groupes $G_2$, $G_3$, $G_4$, mais pas $G_5$.
Les groupes $G_4$ sont donc ceux qui comportent le plus de points possible : quatre couleurs suffisent pour colorer la carte d'Europe, tout comme la carte des départements français, ou tout autre carte géographique par zone.

3 • **Il suffit de prendre de l'aspirine, des antibiotiques et des compresses chaudes sur le cou**. En effet, l'aspirine soulage la tête mais fait mal au cœur et à l'estomac. Les antibiotiques soulagent alors le cœur mais rajoutent des douleurs dans le genou et donnent le torticolis. Le genou est déjà soigné par l'aspirine. Quand à l'estomac et au torticolis, les compresses chaudes sur le cou les guériront.

4 • Considérons la tribu des Micmacs. Elle est en paix ou en guerre avec chacune des cinq autres tribus. Il y aura donc au moins trois de ces tribus avec lesquelles elle entretient le même type de relation. Supposons par exemple (sans rien changer à la généralité du problème) que les Micmacs M soient ainsi en paix avec les Algonquins A, les Iroquois I et les Sioux S.

S'il n'existe aucun triplet de tribus en relations homogènes, il y a au moins une relation de paix dans le triplet A, I, S. Supposons par exemple que A et S soient en paix. Observons alors le triplet ASM : il est homogène car tous les trois sont en paix avec les deux autres. Notre supposition ci-dessus est donc fausse. Conclusion : il existe au moins un groupe de trois tribus en relation homogènes.

**5 •** 600 personnes sont ici présentes. Le major obtient 599 résultats différents. Or le plus grand nombre de mains que l'on peut serrer dans une telle réunion est 598 (puisque chacun arrive accompagné de son conjoint).
Les 599 résultats différents forment donc l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 598. Soit $P_i$ la personne ayant serré $i$ mains différentes en entrant. Considérant $P_{598}$. Toute personne autre que son conjoint lui a serré la main. Donc, $P_0$ ne peut être que son conjoint lui-même. Considérons alors $P_{597}$. Toute personne autre que son conjoint et $P_0$ lui ont serré la main. $P_1$ n'a serré la main qu'à $P_{595}$. Donc $P_1$ est le conjoint de $P_{597}$. On démontrerait de même que le conjoint de $P_{596}$ est $P_2$ etc. et que le conjoint de $P_{300}$ est $P_{298}$. Qui est donc $P_{299}$ ? C'est la femme du major, bien sûr, qui tout comme son mari, a serré 299 mains.

**6 • Il sont juste sept** : monsieur et madame Labruche, leur fils et sa femme ainsi que trois petits enfants ! Un garçon et deux filles.

**7 •** Pour les chaussures : 8 + 1 = 9.
Pour les chaussettes : 3 (nombre de couleurs différentes) + 1 = 4.

**8 •** Dans l'ordre, on peut placer Edouard, puis Mr Scott et Mrs Scott, ensuite Marguerite, puis enfin Linda.


# Tangente

**Publié par**
**Les Éditions POLE**
**SARL au capital de 40 000 euros**
**Siège social :**
**80, bd Saint-Michel**
**75 006 Paris**
**Commission paritaire : 1006 K 80883**
**Dépôt légal à parution**

**Directeur de Publication**
**et de la Rédaction**
**Gilles COHEN**

**Rédacteurs en chefs du numéro**
**Francis CASIRO, Benoît RITTAUD**

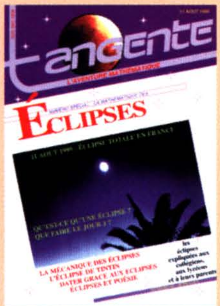
**Secrétaire de rédaction**
**Gaël OCTAVIA**



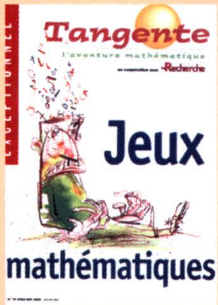


**Abonnements**
**Martine QUEDE**
**Tél : 01 39 98 83 50**
**Fax : 01 39 98 83 52**

**Iconographie**
**Francis CASIRO**
**Autres photos : droits réservés**

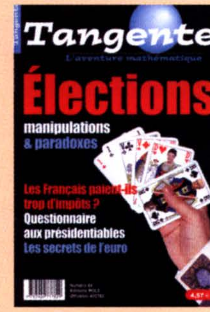



**n° 68**
Les éclipses




**n° 74**
La référence des Jeux mathématiques


**n° 77**
Les statistiques




**n° 84**
Payons-nous trop d'impôts ?

• Tangente, c'est déjà plus de **90 numéros** et **19 hors-séries**, soit près de 6500 pages de lecture et de culture mathématiques.

• Vous pouvez consulter l'index des articles parus sur le site internet **www.Tangente-mag.com/**. Tous les numéros sont encore disponibles, à l'exception des **1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 19, 28, 37, 38, 47, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 69, 70, 72, 73, 75** épuisés. **Numéros doubles :** Les numéros **51–52, 64–65, 69-70** constituent des numéros doubles indissociables.

codif : POLE HS 15

# BON DE COMMANDE À RETOURNER À

## Tangente - BP 10214- 95106 Argenteuil cedex

**N'OUBLIEZ PAS DE REMPLIR AU VERSO NOM, COORDONNÉES ET MOYEN DE PAIEMENT**

**Numéros anciens et spéciaux de Tangente**

❒ N° 68 : Les éclipses 7,32 €
❒ N° 74 : Jeux mathématiques 6,40 €
❒ N° 77 : Statistiques 4,75 €
❒ N° 84 : Maths électorales 4,75 €
❒ N° 79 + N° 80 + Tangente éduc. Spécial TPE 1ère et Tale S 11,50 € (abonnés 9,15 €)
❒ **Collection de 60 numéros entre 1 et 73 : 149 €** (port compris)
❒ **Autres (entre 75 et 97) : indiquez les n^os dans le cadre 4,75 € pièce, 18,30 € les 5 ou 35 € les 10**

**Numéros hors-séries simples de Tangente :** 6,40 €

❒ Maths et sport (HS 19)
❒ Les fractales (HS18)
❒ Les probabilités (HS 17)
❒ Maths pour littéraires (HS16)
❒ La logique (HS15)
❒ Maths et Architecture (HS14)
❒ L'infini (HS13)
❒ Les graphes (HS12)

**Numéros anciens et spéciaux de Tangente-Jeux Démineur & Compagnie**

❒ **Anciens numéros de Tangente-Jeux (entre 1 et 8) : 4 € pièce, 14 € les 4** ................
❒ **Collection Démineur & Compagnie 1 à 6 : 18,50 €** (port compris)

**Numéros anciens et hors-séries de Tangente-sup (Sciences & Info Prépas)**

❒ **Anciens numéros de Tangente-sup (entre 1 et 24) : 5 € pièce 18,50 € les 4** ...............
❒ Transformations et fonctions 14,50 €
❒ Composition-décomposition 11,50 €
❒ Noyau atomique 11,50 €
❒ Contrôle et optimisation 11,50 €

**Numéros hors-séries « Bibliothèque Tangente »**

❒ Jeux mathématiques (HS 20) : 18 €
❒ Maths et sports (HS 19) : 18 €
❒ Les fractales (HS 18) : 18 €
❒ Hasard et probabilités (HS 17) : 18 €

**Montant de la commande à reporter au verso de ce bulletin :**

Achevé d'imprimer pour le compte des Éditions POLE
sur les presses de l'imprimerie Louisjean, 05000 Gap
Dépôt légal 483 - Septembre 2004

Tangente

La

# Logique

- La logique élémentaire
- Le projet de Hilbert
- Logique et informatique
- Jeux et paradoxes

**Comment garantir qu'une argumentation est correcte et qu'aucun cercle vicieux ne s'immisce dans des propos qui se veulent justes ? On comprend à ces mots que la logique est un indispensable bagage pour tous. Syllogismes, tiers exclu, implication ou règles de déduction : le lecteur de cet ouvrage verra naître avec Aristote la logique élémentaire. Puis il rêvera avec Hilbert d'un absolu mathématique avant de l'abattre en compagnie de Gödel. Il se frottera aux logiques nouvelles avec la logique floue. Enfin, il découvrira un immense territoire ludique fait d'énoncés auto-référents ou de joutes impitoyables où s'affrontent Menteurs et Sincères, Sages et Fous, Barbiers, Princesses.**

ISBN 284884018-8

9 782848 840185

**Prix : 18 €**

POLE