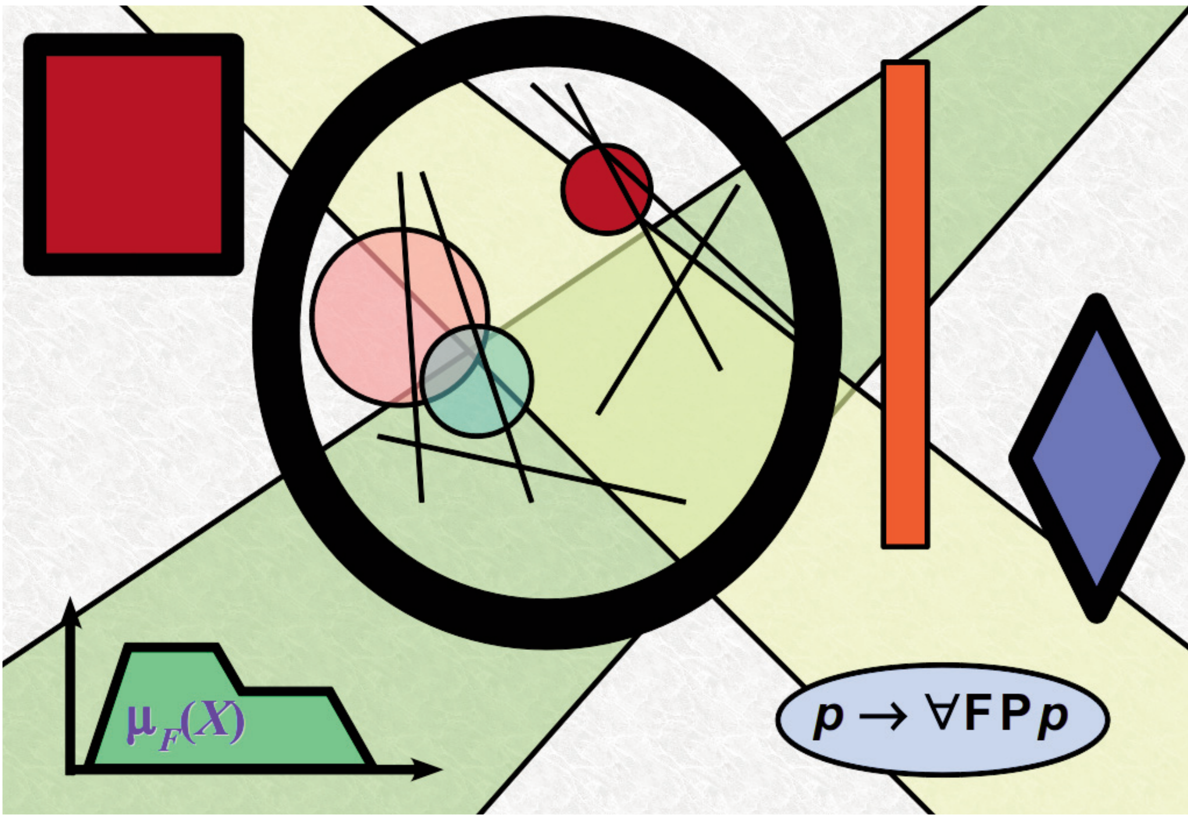
Introduction Pratique aux

Logiques non classiques

Maurice Bernadet

avec exercices corrigés



hermann

Du même auteur : “*Introduction pratique aux logiques classiques*”

www.editions-hermann.fr

Isbn 978 27056 8062 6

Table des matières

Remerciements

Ce livre repose sur une compilation de nombreux livres et articles, dont je n'ai pu faire figurer qu'une faible partie dans la bibliographie, page 198 ; c'est pourquoi je souhaite avant tout rendre hommage à tous les logiciens, classiques ou non, qui ont permis de formaliser, au moins partiellement, le raisonnement humain : Aristote, le précurseur, puis Boole, Frege, Hilbert, Russel surtout, en raison de sa profonde humanité et de ses engagements passionnés en faveur de la paix, et aussi Lukasiewicz, Church, Gödel, Türing, Zadeh...

Revenant à mon humble niveau, je dois remercier mes proches, mon épouse Évelyne et mes fils Loïc et Philippe, pour la patience dont ils ont à nouveau fait preuve lors de la rédaction de cet ouvrage, rédaction qui a fait suite à celle du précédent [(*)], ce qui a prolongé la période où j'ai été peu disponible à leur égard.

Je remercie également Henri Briand, qui, lorsqu'il était Directeur du Département Informatique de l'IRESTE, école qui, depuis, s'est intégrée à Polytech'Nantes, m'a proposé la responsabilité d'un cours sur les logiques non classiques.

Je remercie aussi Philippe Fauvernier, Directeur des Éditions Hermann pour sa confiance, ses remarques et ses conseils.

Enfin, la réalisation de cet ouvrage m'a été facilitée par l'utilisation de la suite bureautique OpenOffice sous Linux. Je remercie la communauté OpenOffice.org pour l'aide que j'ai pu trouver, tant dans la documentation en ligne que dans les réponses qui m'ont été apportées dans les forums.

(*) *Introduction Pratique aux Logiques Classiques,* Maurice Bernadet, Éditions Hermann, Paris 2010. Je ne peux que recommander ce livre ;-) .

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préalables

Si ce livre fait suite à l'ouvrage *"Introduction Pratique aux Logiques Classiques"*, paru également aux éditions Hermann, il en est indépendant. Cependant, pour des lecteurs n'ayant aucune ou que peu de connaissances en logique, il est conseillé de lire, avant le présent ouvrage, un livre relatif aux logiques classiques. Cela n'est cependant pas indispensable et, dans ce cas, nous recommandons de lire plus attentivement cette introduction.

Cet ouvrage est consacré aux logiques **non** classiques, logiques qui ont été conçues à partir des logiques classiques, pour représenter et reproduire des modes de raisonnements plus proches des véritables raisonnements humains. Alors que les logiques classiques s'attachent à des raisonnements ***immuables, rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines,*** tels les raisonnements mathématiques, les logiques non classiques se sont affranchies de ces contraintes, ce qui est, en pratique, le cas de nombreux raisonnements.

Nous verrons que, si certaines logiques non classiques sont des extensions des logiques classiques, d'autres sont en rupture avec certains de leurs principes. Chaque classe de ces logiques fera l'objet d'un chapitre particulier ; nous considèrerons successivement les logiques multivaluées, les logiques floues, puis les logiques modales et temporelles, pour terminer avec les modes de raisonnements non monotones et les raisonnements prenant en compte l'incertitude.

D'une manière générale, cet ouvrage se veut pratique, c'est-à-dire que les aspects théoriques y sont parfois survolés ou simplifiés : nous nous nous sommes plus attachés aux mécanismes et aux algorithmes qu'à leurs fondements théoriques. Chaque chapitre consacré à une logique ou à un mode de raisonnement est suivi d'exercices, dont les corrigés sont donnés en fin d'ouvrage. Dans la mesure du possible, les exercices sont dans un ordre croissant de difficulté, mais, parfois, pour des raisons de mise en page des corrigés, cet ordre n'est pas parfaitement respecté.

1.2 Éléments principaux des logiques classiques

Rappelons qu'une logique se préoccupe de l'étude des raisonnements, de leur modélisation et de leur validation. On ne peut pas parler de ***la*** *logique*, sauf en tant que domaine particulier de la philosophie ; il faut parler ***des*** *logiques* : les logiques classiques comprennent par exemple la logique des propositions, la logique des prédicats d'ordre 1, la logique des prédicats d'ordre 2…

Une logique formalise des énoncés déductifs ou raisonnements exprimés dans le langage courant ; formaliser un énoncé, c'est le représenter par une formule. Un raisonnement comporte des énoncés initiaux appelés "prémisses" et des énoncés déduits des prémisses, appelés "conclusions". Une fois ces énoncés représentés par des formules, les formules initiales sont appelées, par analogie, "formules prémisses" et les formules déduites, "formules conclusions".

Les premières logiques considérées ont été les logiques classiques. Elles ont été construites afin de modéliser et de vérifier la validité de raisonnements, en particulier les raisonnements mathématiques. Elles s'attachent donc à des raisonnements rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines.

L'énoncé le plus simple formalisé par les logiques classiques est ***la proposition***. Une proposition concerne un fait simple, qui peut être soit vrai soit faux ; une proposition est représentée par un symbole simple, généralement une lettre : p, q, r…

Les propositions interviennent dans un raisonnement par l'intermédiaire d'opérateurs adverbiaux ("non"), de conjonctions de coordination ("et", "ou", "ni"...) ou de conjonctions de subordination ("si", "alors", "donc"…). Ces opérateurs sont représentés dans les formules par des symboles et sont appelés, alors, connecteurs, même si l'on utilise aussi le terme d'opérateurs. Le symbole "$\neg$" correspond à la négation d'une proposition, le symbole "$\wedge$" au *"et"* (conjonction logique), le symbole "$\vee$" au *"ou"* (disjonction logique). Un énoncé conditionnel de la forme *"si condition(s), alors conséquence(s)"*, se voit associer le symbole "$\rightarrow$", dit d'implication logique.

Par exemple, l'énoncé

"S'il pleut, je prends un parapluie".

se traduira par la formule

$$p \rightarrow q,$$

avec p représentant la proposition *"il pleut"*
et q la proposition *"je prends un parapluie".*

Un des principaux modes de raisonnement est celui qui, en présence d'une implication et de sa (ou ses) formule(s) prémisses(s), en déduit la (ou les) formule(s) conséquence(s).

Par exemple, si nous considérons le raisonnement

"S'il pleut, je prends un parapluie",
or *"il pleut",*
donc *"je prends un parapluie"* ;

nous pouvons formaliser ce raisonnement, en utilisant les symboles précédents, par

$p \rightarrow q$,
or p ,
donc q ;

ce que l'on peut résumer en

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

ou en $$(p \rightarrow q) \wedge p \vdash q$$

Le symbole "$\vdash$" exprime que l'on peut déduire des formules écrites à sa gauche, les formules écrites à sa droite.

Ce raisonnement peut aussi s'écrire sous la forme ci-dessous, moins rigoureuse, mais néanmoins valide :

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q .$$

C'est un des modes de raisonnements fondamentaux des logiques classiques : on l'appelle le **modus ponens.**

En prolongement de la logique des propositions, les **logiques des prédicats** ont été construites pour considérer des ensembles d'individus ou d'entités.

Un prédicat énonce les propriétés d'individus ou d'ensembles d'individus, ainsi que des relations entre ces individus ou ces ensembles d'individus. Un prédicat, énoncé dans le langage courant, peut être représenté, dans une formule, par un symbole accompagné d'arguments pour constituer un prédicat formel.

Par exemple, si nous considérons des phrases comme

"Si une souris rencontre un chat, la souris a peur du chat" ;

ou, ce qui est équivalent, mais moins naturel en français,

"Pour toute souris et pour tout chat
si une souris rencontre un chat, la souris a peur du chat" ;

La logique des prédicats permet de formaliser cet énoncé, par exemple, en écrivant la formule

$$\forall X\, \forall Y\, [s(X) \wedge c(Y) \wedge r(X, Y)] \rightarrow p(X, Y)$$

dans laquelle

$\forall X$ désigne tout individu X, dont $s(X)$ précise que X est une souris,

$\forall Y$ désigne tout individu Y, dont $c(Y)$ précise que Y est un chat et

$r(X, Y)$ exprime que *"X rencontre Y"*,

$p(X, Y)$ exprime que *"X a peur de Y"*.

Il est aussi possible d'exprimer un énoncé comme

"Il y a des souris qui n'ont peur d'aucun chat",

par exemple, par $\exists X\, s(X) \wedge \neg \exists Y\, c(Y) \wedge p(X, Y)$,

ou par la formule équivalente $\exists X\, s(X) \wedge \forall Y\, [c(Y) \rightarrow \neg p(X, Y)]$

où $\exists X\, s(X)$ traduit *"il y a des souris"*
et $\neg \exists Y\, c(Y)$ *"il n'y aucun chat"...*

Remarquons au passage que ces deux énoncés se contredisent, ce que la logique des prédicats permet de démontrer rigoureusement, de manière formelle.

À partir de ces quelques indications, nous pouvons nous intéresser à ce qui caractérise une logique sur le plan théorique.

1.3 Aspects théoriques d'une logique

Sur le plan théorique, une logique comporte trois aspects :

- un langage symbolique permettant
  l'expression et la représentation formelle d'énoncés ;
- un système formel de déduction ;
- un lien entre les formules et une certaine réalité :
  une sémantique, qui considère le lien entre les formules
  et la vérité des énoncés qu'elles représentent.

Ces trois aspects sont fondamentaux pour définir une logique, même si l'on privilégie parfois certains d'eux.

1.3.1 L'aspect langage symbolique (ou formel)

Le langage formel L associé à une logique permet de transcrire des énoncés du langage courant sous une forme systématique et rigoureuse ; cette forme est constituée d'une suite de phases ou formules (les énoncés du langage).

La syntaxe du langage formel *L* décrit donc la structure morphologique des énoncés, c'est-à-dire quelles formes ils doivent respecter. Cette syntaxe

- pose la définition de formules atomiques,
- définit des connecteurs (opérateurs au niveau sémantique),
- et énonce des règles syntaxiques, permettant de combiner les formules atomiques à l'aide des connecteurs, pour constituer *des formules bien formées* (en abrégé : *f.b.f.*).

Les logiques classiques définissent des symboles pour représenter les *propositions* (énoncés les plus simples) ou des *prédicats* ; les prédicats traduisent aussi bien des propriétés que des relations entre entités d'un domaine. Les connecteurs permettent d'associer plusieurs sous-formules à l'intérieur d'une même formule ; ils se traduisent en opérateurs au niveau sémantique, pour combiner les valeurs de vérité des formules propositionnelles ou des formules prédicatives.

Les symboles que nous utiliserons, sont ceux utilisés par les mathématiciens et les informaticiens, américains en particulier. Nous les rappelons dans le tableau ci-dessous, à côté des symboles de Russell, qui sont plus souvent utilisés par les philosophes :

Symboles que nous utiliserons : ceux des mathématiciens et informaticiens (américains)	Notations de Russell, utilisées par les philosophes
$\neg$ négation,	~ négation,
$\wedge$ conjonction ("et"),	. conjonction ("et"),
$\vee$ disjonction ("ou"),	$\vee$ disjonction ("ou"),
$\rightarrow$ implication,	$\supset$ implication,
$\leftrightarrow$ équivalence,	$\equiv$ équivalence,
$\top$ tautologie ("toujours vrai"),	**1** tautologie ("toujours vrai"),
$\bot$ contradiction ("toujours faux")	**0** contradiction ("toujours faux")

Principaux symboles logiques

La logique des prédicats utilise aussi les deux symboles, $\forall$ et $\exists$, appelés *quantificateurs*, suivis d'un identificateur de variable.

- *Le quantificateur universel*, $\forall$, se lit *"quel que soit ..."*.
- *Le quantificateur existentiel*, $\exists$, se lit *"il existe au moins un ... tel que ..."*.

1.3.2 Les mécanismes de déduction

Une ***déduction formelle*** est un enchaînement formel d'énoncés, établis en appliquant certaines règles, *les règles d'inférence*. Une règle d'inférence permet d'écrire, à partir de formules déjà établies (prémisses), de nouvelles formules (conclusions) ; le modus ponens est un exemple de règle d'inférence.

La déduction formelle peut s'utiliser de deux manières :

- pour établir de nouveaux énoncés (théorèmes) ou
- pour effectuer des déductions à partir de formules prémisses.

Plus généralement, on définit

- un ensemble d'axiomes (f.b.f. initiales),
- des règles d'inférences r_i, notées

$f1, f2 \ldots, fn \ \vdash_{r_i} \ g1, g2, \ldots, gm$ qui se lisent

"f1, f2 …, fn permettent de poser (par r_i) *g1, g2, ... , gm"*.

Par exemple, *le modus ponens* s'écrit $f,\ f \to g\ \vdash_{MP}\ g$,
les lettres *MP* étant l'abréviation de modus ponens.

La preuve d'une formule est une suite de formules, établies par application des règles d'inférences et aboutissant à la formule prouvée.

On note

$f1, f2\ \ldots, fn\ \vdash f$, si la formule f se déduit à partir des axiomes et de $f1,\ f2\ \ldots, fn$;

$\vdash f$, si la formule f se déduit uniquement à partir des axiomes et des règles d'inférences (on dit alors que f est un théorème).

Le symbole (...) $\vdash$ ... se lit "*(de ...) on déduit formellement ...*".

1.3.3 Une logique en tant que théorie de la vérité : la sémantique

L'objet de la sémantique est d'***interpréter*** les formules d'un langage formel *L,* c'est-à-dire de leur attribuer des valeurs de vérité. Les logiques classiques utilisent comme valeurs de vérité les éléments d'un des ensembles de symboles {Vrai, Faux} ou {1, 0}.

Quelques définitions

- une *formule valide* s'évalue à Vrai dans toute interprétation,
- une *formule inconsistante* s'évalue à Faux dans toute interprétation,
- une *formule non valide* s'évalue à Faux dans au moins une interprétation,
- une *formule consistante* s'évalue à Vrai dans au moins une interprétation.

On dit qu'*une formule f **découle** des formules* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, si *f* s'évalue à Vrai dans toute interprétation où *f1, f2*, ..., *fn* s'évaluent à Vrai. On dit aussi alors que la formule *f est entraînée* (matériellement) par les formules *f1, f2*, ..., *fn*.

On note

$f1, f2\ \ldots, fn \models f$, si $f1,\ f2, \ldots fn$ entraînent matériellement f;

$\models f$, si f est une formule toujours vraie (une tautologie).

Le symbole $\models$ représente *l'entraînement matériel* (*entailment* en anglais.

1.3.4 Liens entre preuves formelles et implication matérielle

a) Définitions

Logique saine

une logique est appelée saine, quand toute preuve formelle correspond à un enchaînement de vérités dans le domaine représenté (ou que tout théorème est une tautologie). C'est-à-dire, que pour toute formule f,

si $\vdash f$, alors $\models f$, ou

si $f1, \ldots, fn \vdash f$, alors $f1, \ldots, fn \models f$.

Logique complète

une logique est appelée complète, quand à tout enchaînement de vérité dans le domaine représenté correspond une preuve formelle (ou que toute tautologie est un théorème). C'est-à-dire, que pour toute formule f,

si $\models f$, alors $\vdash f$, ou

si $f1, \ldots, fn \models f$, alors $f1, \ldots, fn \vdash f$.

b) Remarques

1) Tout système logique doit être sain : il est souhaitable, en effet, que tout ce que l'on démontre formellement corresponde à la vérité dans les domaines représentés.

2) La logique des propositions et la logique des prédicats d'ordre 1 sont complètes, mais ce n'est pas le cas de tous les systèmes logiques : par exemple, l'arithmétique n'est pas complète (démonstrations de Gödel et de Church).

3) Un autre problème se pose aussi : *la décidabilité d'une logique.*

   Une logique est dite décidable s'il existe un algorithme qui permet en un temps fini de savoir si une formule est un théorème ou non.

   Dans les systèmes sains et complets, ces algorithmes peuvent se placer au niveau syntaxique (par exemple, la méthode de résolution) ou sémantique (méthodes des tables de vérité, des tableaux ou arbres sémantiques).

c) Résultats importants

- *La logique des propositions* est saine, complète et décidable.

- *La logique des prédicats d'ordre 1* est complète, saine, mais semi-décidable : on dispose d'algorithmes permettant de prouver les théorèmes, mais qui risquent de ne pas se terminer quand les formules testées ne sont pas des théorèmes.

1.4 Logiques classiques et non classiques

1.4.1 Étude informelle des limites des logiques classiques

Si les logiques classiques ne considèrent que des raisonnements rigoureux, précis et reposant sur des connaissances certaines, les raisonnements humains courants ne possèdent pas toujours ces caractéristiques. Si, par exemple, nous considérons les énoncés ci-dessous :

"Toute personne qui pratique la logique n'est pas stupide".

"Toute personne qui n'est pas stupide est intelligente".

"Jean pratique la logique".

Il semble légitime d'en déduire *"Jean est intelligent"*.

Cependant, cette déduction n'est pas valide dans le cadre des logiques classiques. Il lui manque en effet la phrase *"Jean est une personne",* faute de quoi, si mon ordinateur s'appelait Jean et, étant donné que mon ordinateur pratique la logique (dans la mesure où il peut exécuter des programmes permettant d'évaluer des raisonnements), on pourrait déduire que *"mon ordinateur est intelligent"*, ce qui n'est pas vrai : un ordinateur peut simuler une certaine forme d'intelligence, mais je ne pense pas que l'on puisse dire d'un ordinateur qu'il est intelligent !

Un domaine dans lequel les logiques classiques ne se montrent pas toujours satisfaisantes est celui du diagnostic (médical, en particulier). En effet, supposons que l'on formule des règles de diagnostic, liées au résultat d'un examen tel, pour rester à un niveau général, la prise de température :

"Si la température est inférieure ou égale à 38°5,
la maladie est un rhume" (1)

"Si la température est supérieure à 38°5,
la maladie est une grippe". (2)

Que va-t-on décider si la mesure n'est pas possible, parce que, par exemple le thermomètre ne fonctionne pas ? (Ne pensez pas que c'est impossible, cela m'est arrivé, chez un généraliste dont les piles du thermomètre étaient déchargées...). Plus fréquemment, il s'agira d'un examen non pratiqué ou d'un examen dont on attend les résultats.

Un autre cas considère deux seuils, comme dans les énoncés

"Si la température est inférieure à 38°,
la maladie est un rhume".

"Si la température est supérieure à 39°,
la maladie est une grippe".

On se rend compte, dans ce contexte, qu'aucune conclusion n'est possible pour une température entre 38 et 39°. De plus, comment pourrait-on utiliser des implications sur des symptômes différents et donnant lieu à des conclusions contradictoires ?

Une première solution pourrait être obtenue en décidant de ne rien déduire. En effet, si le thermomètre est cassé, je n'ai pas de mesure possible et les faits concernant la température sont indéterminés : aucune règle ne s'applique.

Une méthode plus rigoureuse serait d'évaluer l'incertitude sur les maladies, par exemple par une probabilité, ce qui permet, d'une part de combiner des règles associées à des symptômes différents, mais aussi, de choisir le traitement susceptible d'être le plus efficace.

En fait, plus fréquemment, un médecin exprimera plutôt les énoncés (1) et (2) par

"Si la température est peu élevée,
la maladie est ***sans doute*** *un rhume",*

"Si la température est forte,
la maladie est ***sans doute*** *une grippe".*

On ne peut pas traduire ces règles dans une logique classique. Et que pourrait-on en déduire, si, des piles neuves ayant été mises en place, le thermomètre indiquait une température de 37,9° ?

De plus, les logiques classiques ignorent les possibilités d'erreurs dans les faits manipulés. En effet, si je lis 40° sur un thermomètre et si j'en déduis un diagnostic de grippe, les logiques classiques ne permettent pas de rectifier ce jugement, au cas où je découvrirais par la suite que le thermomètre est bloqué sur 40° : une hypothèse implicite des règles énoncées ci-dessus est que les températures prises en compte sont correctes.

Les logiques classiques ne permettent pas non plus les déductions sur les connaissances ou les croyances d'individus, humains ou agents informatiques. Considérons par exemple, l'énoncé

"Si je sais qu'il pleut et que je crois que mon voisin ne le sait pas,
si je le lui annonce,
je suis en droit de croire que dorénavant, il le sait".

Cet énoncé ne peut être pris en compte par une logique classique : on pourrait envisager d'utiliser des prédicats *"croire"* ou *"savoir",* mais leurs arguments devraient eux-mêmes être des prédicats...

Enfin, tout ce qui relève de prévisions est ignoré pas les logiques classiques, tel l'énoncé

"Si le ciel se couvre
et si la pression atmosphérique baisse,
la pluie va tomber ".

En effet, les logiques classiques ignorent les aspects temporels des énoncés. De plus, la déclaration ci-dessus s'exprimerait plus généralement sous la forme

"Si le ciel se couvre
et si la pression atmosphérique baisse rapidement,
il risque de se produire du mauvais temps dans un futur proche".

Cet énoncé utilise plusieurs notions, ignorées par les logiques classiques : outre l'aspect temporel, interviennent des graduations imprécises comme *"rapidement", "mauvais temps", "proche"* ainsi que l'expression d'incertitude *"il risque de"*, elle aussi imprécise.

Pour permettre l'utilisation d'énoncés comme ceux que nous venons d'exposer, les logiciens modernes ont créé diverses logiques, appelées "non classiques". Le but de ces logiques est de prendre en compte ces différents aspects, souvent non rigoureux, du raisonnement humain. Pour des raisons de simplicité d'exposé, nous les étudierons séparément dans l'ordre suivant :

1) les logiques multivaluées, dont les valeurs de vérité peuvent être autres que Vrai ou Faux, en particulier "incertain" ou "indéterminé" ;

2) les logiques floues qui prennent en compte les énoncés imprécis ou vagues ;

3) les logiques modales qui permettent d'exprimer la possibilité ou la nécessité de formules, ainsi que la croyance ou la connaissance, relatives à certaines formules ;

4) les logiques temporelles qui prennent en compte le temps dans les raisonnements ;

5) les logiques non monotones qui permettent de faire des hypothèses puis, si nécessaire, de les réfuter ;

6) les modes d'évaluation de l'incertain, permettant de proposer des décisions, espérées optimales, en présence d'incertitudes.

Il faut remarquer que, dans des applications, en particulier celles qui concernent les systèmes à bases de connaissances, plusieurs logiques non classiques peuvent se combiner : il est ainsi possible de pratiquer des raisonnements non monotones sur des évaluations d'incertitudes, de faire des prévisions temporelles évolutives, comme en météorologie, de maintenir la cohérence des connaissances ou des croyances d'agents informatiques, d'utiliser des règles de formulations imprécises pour déterminer des degrés de certitudes…

Avant de les détailler séparément, faisons un rapide tour des logiques non classiques que nous allons considérer. Cela permettra au lecteur d'avoir une idée de ce que seront les chapitres suivants et de choisir les chapitres qu'il souhaite étudier en priorité. Il faut remarquer que si le chapitre 3 (logiques floues) prolonge le chapitre 2 (logiques multivaluées), ils peuvent être étudiés sans problème dans un ordre quelconque, alors qu'il est fortement conseillé d'avoir assimilé le chapitre 4 (logiques modales) avant le 5 (logiques temporelles). Les autres chapitres peuvent être considérés comme indépendants.

1.4.2 Rapide survol des logiques non classiques

Les logiques non classiques sont de deux types :

1) des extensions de la logique classique qui conservent toutes les caractéristiques des logiques classiques : langages, axiomes, règles d'inférence, sémantique ; elles se voient ajouter suivant les cas :

- de nouveaux opérateurs ou de nouveaux objets au niveau syntaxique (logiques modales) ;
- de nouvelles valeurs de vérité au niveau sémantique (logiques multivaluées).

2) des logiques en rupture avec les logiques classiques et qui ne respectent pas certains axiomes des logiques classiques, tels la monotonie, le principe du tiers exclu (qui exprime que, soit une formule, soit sa négation, doit être vraie) ...

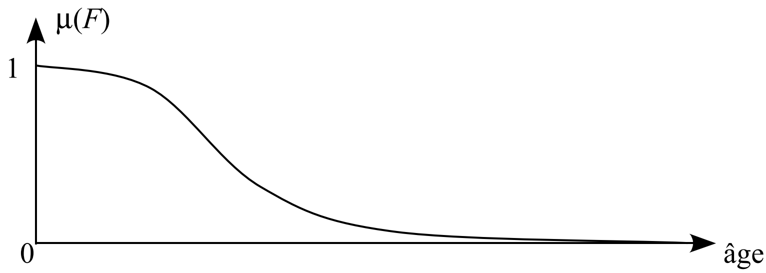
a) Les logiques multivaluées

- les logiques trivaluées ajoutent une troisième valeur de vérité à l'ensemble {Vrai, Faux}, valeur dont la signification peut être, suivant les logiques, "inconnu", "indécidable", "absurde"...

- les logiques multivaluées générales utilisent des valeurs de vérité en plus grand nombre pour graduer le degré de vérité des formules (ce qui se généralise dans les logiques floues) ou pour donner à la vérité des formules des significations spécifiques au domaine considéré.

b) Les logiques de l'imprécis

Ce sont essentiellement les logiques floues ; elles s'efforcent d'exprimer l'imprécision des formulations courantes par une graduation de la vérité des formules. Par exemple, la formule F représentant l'énoncé *"Jean est jeune"* a un degré de vérité, noté $\mu(F)$, lié à l'âge de Jean et qui peut correspondre à la courbe ci-dessous



Ces logiques présentent quelques difficultés d'emploi :

- elles traduisent une formulation subjective, liée à un individu dans un contexte donné ;
- de nombreux opérateurs peuvent être utilisés et leur choix est difficile.

Elles se généralisent dans le cas de formules, à la fois imprécises et incertaines, à l'aide de la théorie des possibilités. (Attention : la notion d'incertain doit être bien distinguée de celle d'imprécis !).

c) Les logiques modales

Elles utilisent des *modalités*.

Une modalité est un opérateur M, tel que, si F est une formule, $M F$ est aussi une formule.

Les premières modalités, dites aléthiques, étaient

$\Box$ ...	il est nécessaire que ...
$\Diamond$ ...	il est possible que ...

Mais d'autres modalités ont été ajoutées et peuvent être utilisées :

- des modalités de connaissance/croyance (logiques épistémiques),
- des modalités d'obligation et d'autorisation (logiques déontiques),
- des modalités temporelles…

d) Les logiques temporelles

On en distingue deux classes principales :

- les logiques temporelles avec datation ou réification du temps, dans lesquelles, soit le temps est considéré comme un argument de plus dans les prédicats, soit il intervient à l'intérieur de "méta-prédicats" ;
- les logiques temporelles modales ; elles utilisent des opérateurs modaux exprimant

  qu'une formule sera toujours vraie ($\Box$ ou G)

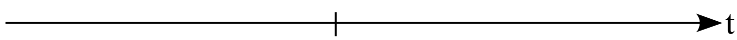
  qu'une formule sera vraie au moins une fois ($\Diamond$ ou F)

  avec, éventuellement, d'autres modalités pour le passé et le présent.

De plus, le temps peut être représenté par des dates précises (*points*), mais aussi par des *intervalles* entre deux dates.

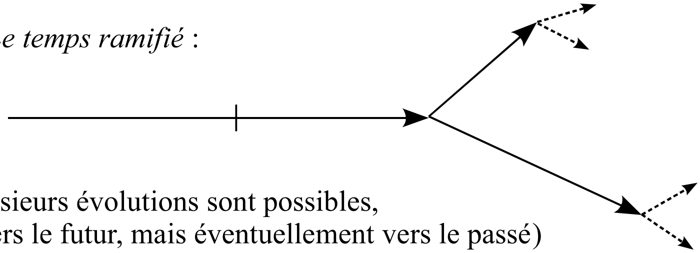
On peut aussi distinguer deux conceptions du temps :

- *Le temps linéaire* :



(une seule évolution est possible, vers le futur comme vers le passé)

- *Le temps ramifié* :



(plusieurs évolutions sont possibles,
ici vers le futur, mais éventuellement vers le passé)

Les logiques temporelles trouvent beaucoup d'applications en informatique :

- la formalisation de programmes parallèles,
- la spécification et la validation de protocoles de communication,
- la spécification et la validation de simulation de processus,
- la spécification et la mise au point du matériel...

Leur principal problème est leur complexité importante.

e) Les logiques permettant des raisonnements non monotones

Divers mécanismes permettent des raisonnements non monotones ; parmi ceux-ci, considérons quelques exemples :

• *Les systèmes de négation par échec*, considèrent un deuxième opérateur de négation '~' , (qui n'est pas, ici, le symbole de négation de Russell) et qui, pour une formule *f,* exprime que cette formule ne peut être prouvée ; $\sim f$ signifie "on ne peut déduire f ". On ajoute alors la règle d'inférence *"si* $\sim f$ *alors* (*sup*)*poser* $\neg f$*".*
Ce principe correspond à ce que nous appellerons *l'hypothèse du monde clos*.

• *La circonscription* est un opérateur du deuxième ordre qui limite l'application des prédicats aux individus dont on sait qu'ils les vérifient, soit en les désignant explicitement ou, mieux, par des formules qui les caractérisent.

• *La logique des défauts* utilise des "règles de défaut" de la forme

$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$, que l'on peut lire :

"Si l'on croit α et qu'il est possible de croire β, alors on (sup)pose γ".

...

f) Les logiques de l'incertain

Elles cherchent à exprimer l'incertitude que l'on peut avoir sur la vérité ou la non-vérité des formules. Trois modes de représentation de l'incertain sont les plus souvent utilisés :

- *la théorie des probabilités* permet d'associer à chaque formule une "probabilité subjective" (1 pour une formule certainement vraie, 0 pour une formule certainement fausse) en utilisant les propriétés des probabilités.

- *la théorie des croyances* (ou *de Dempster-Shafer,* du nom de ses créateurs) permet d'associer à chaque sous-ensemble d'hypothèses une masse de probabilité et de définir à partir de ces masses la croyance et la plausibilité des formules.

- *la théorie des possibilités* exprime la certitude sur une formule par deux coefficients, la possibilité de cette formule et sa nécessité. Cette théorie est très liée aux logiques floues.

On peut considérer que la théorie des probabilités est la plus rigoureuse, suivie de la théorie de Dempster-Shafer, puis de la théorie des possibilités, mais des méthodes empiriques de représentation de l'incertain sont parfois utilisées avec efficacité.

g) La logique intuitionniste

Elle rejette les démonstrations par l'absurde (dans lesquelles, par exemple, pour prouver p, on prouve que $\neg p$ n'est pas vrai, c'est-à-dire produit une contradiction). Pour cette logique, *les seules preuves doivent être constructives*.

Le principe du tiers exclu ($p \vee \neg p \equiv \top$) n'est pas conservé.

Il s'agit d'une logique beaucoup plus rigoureuse que la logique classique, mais moins pratique.

Cette logique est peu utilisée en informatique, mais sa démarche est originale, c'est pourquoi nous la mentionnons ici, même si nous ne la développons pas dans cet ouvrage.

h) Autres logiques non classiques

Ce sont les logiques dynamiques, logique quantique, logiques linéaires, … Nous ne les aborderons pas ici, car elles sont peu utilisées, en informatique tout au moins.

Nous allons, dans les chapitres suivants, étudier plus en détail les logiques non classiques les plus intéressantes, en particulier celles qui intéressent l'informatique et les systèmes à base de connaissances. Cependant, pour ne pas nous limiter à un seul domaine et montrer le caractère général des logiques, tant classiques que non classiques, nous emprunterons beaucoup d'exemples et d'exercices à d'autres domaines que l'informatique.

Chapitre 2

Logiques Multivaluées

2.1 Généralités

On se place au niveau sémantique, où l'on ajoute des valeurs de vérité à celles de la logique classique, "Vrai" et "Faux" (ou 0 et 1). L'idée de départ est que certains énoncés ne peuvent se voir attribuer une valeur de vérité classique.

• Ainsi, Aristote étudie l'énoncé

"Demain, il y aura ou il n'y aura pas de bataille navale".

Cette formule est vraie, mais quelle est la vérité de la proposition *"demain, il y aura une bataille navale"* ?

• De même, Lukasiewicz énonce:

"Le 21 décembre prochain à midi, je serai à Varsovie".

Cette proposition est possible (et sans doute même plausible pour Lukasiewicz), mais non certaine.

• Bochvar considère la formule : *"Cette proposition est fausse"* ;

si cette proposition est Vraie, alors son énoncé est Faux ;

si cette proposition est Fausse, alors son énoncé dit Vrai.

Cette formule se contredit elle-même !

On a donc introduit une troisième valeur de vérité, généralisée parfois ensuite pour construire des logiques à plus de trois valeurs. Ces logiques sont généralement (puisqu'on est au niveau sémantique) caractérisées par des tables de vérité.

2.2 Principes des logiques trivaluées

Elles sont parfois aussi appelées logiques trivalentes. Trois systèmes sont plus intéressants ; ils sont désignés du nom de leur concepteur :

- Lukasiewicz

• considère une troisième valeur de vérité, désignée par le symbole i et signifiant *"indéterminé"* ou *"incertain"*,

• impose que la loi d'identité $p \to p$ soit toujours vérifiée.

- Kleene

• considère une troisième valeur, *i,* signifiant *"indécidé"*,

• décide qu'une formule *F* prend la valeur i, quand, ni *F,* ni $\neg$ *F,* ne peuvent être prouvés,

• définit l'implication comme une généralisation de l'implication classique : $p \to q \;\equiv\; \neg p \vee q$.

- Bochvar

• utilise une troisième valeur, *m* ("meaningless"), pour indiquer qu'une formule est "sans signification" ou "paradoxale",

• suppose que la présence d'une formule évaluée à *m* dans une formule quelconque, rend l'évaluation de cette formule égale à *m* (règle de *contamination*).

Nous conseillons ici d'effectuer, à titre d'exercice, la construction des tables de vérité du *et* ($\wedge$), du *ou* ($\vee$), de la négation ($\neg$), de l'implication ($\to$) et, éventuellement de l'équivalence ($\leftrightarrow$), dans ces trois logiques. Nous en donnons les résultats ci-dessous, mais cet exercice permet de comprendre comment les valeurs de vérité classiques {Vrai, Faux}, notées ici par leurs abréviations {V, F} se combinent avec la nouvelle valeur, désignée par *i* ou par *m*.

Pour la logique de Lukasiewicz, comme pour celle de Kleene, *la négation* s'écrit immédiatement :

p	$\neg p$
V	F
i	i
F	V

Pour *la conjonction* (le *"et"*, noté $\wedge$) et *la disjonction* (le *"ou"*, noté $\vee$) il n'y a pas non plus de différence : en présence d'une valeur *"i"*, si l'autre valeur n'est pas *"i"*, les règles classiques se généralisent aisément, par exemple $\mathrm{V} \wedge i = i$, $\mathrm{V} \vee i = \mathrm{V}$, $\mathrm{F} \wedge i = \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \vee i = i$.

Pour *l'implication*, la logique de Lukasiewicz et celle de Kleene diffèrent dans l'évaluation de $i \rightarrow i$. En effet, Lukasiewicz a décidé de conserver le principe d'identité, pour lequel $p \rightarrow p$ est vrai, quelle que soit la valeur de *p,* et sa logique évalue donc $i \rightarrow i$ à Vrai. Cela correspond à la case grisée de la table ci-dessous.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	*i*	*i*	V	*i*
V	F	F	V	F
i	V	*i*	V	V
i	*i*	*i*	*i*	V
i	F	F	*i*	*i*
F	V	F	V	V
F	*i*	F	i	V
F	F	F	F	V

Étant donné que Kleene définit $p \rightarrow q$ comme $\neg p \vee q$, l'emploi des opérateurs $\neg$ et $\vee$ lui fait évaluer $i \rightarrow i$ à i ; exception faite de la case grisée qui devient donc *i*, les tables sont les mêmes.

Pour la logique de Bochvar,
on applique la *règle de contamination* :
une valeur *m* donne, à toute formule qui la contient, la valeur *m*.

Ainsi, la table de vérité de la négation d'une proposition *p* est

p	$\neg p$
V	F
m	*m*
F	V

Et, pour les autres opérateurs principaux :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	*m*	*m*	*m*	*m*
V	F	F	V	F
m	V	*m*	*m*	*m*
m	*m*	*m*	*m*	*m*
m	F	*m*	*m*	*m*
F	V	F	V	V
F	*m*	*m*	*m*	*m*
F	F	F	F	V

Sur le plan formel, il est aussi possible de définir ces logiques à partir d'axiomes que doivent vérifier les opérateurs.

On peut remarquer que

– le système de Lukasiewicz vérifie le principe d'identité : $p \rightarrow p$ (ou $p \leftrightarrow p$), mais pas le principe du tiers exclu : $p \vee \neg p$ = Vrai ; il vérifie partiellement la non-contradiction : $p \vee \neg p$ = Faux;
– le système de Kleene ne vérifie ni le principe d'identité ni celui du tiers exclu ;
– le système de Bochvar est d'un intérêt pratique moins évident.

Des opérateurs supplémentaires peuvent être définis :

- l'assertion, notée α

la formule αp est vraie si et seulement si p peut être bien affirmée (donc si p est vraie) et fausse dans le cas contraire, d'où la table de vérité :

p	αp
Vrai	Vrai
i (ou *m*)	Faux
Faux	Faux

- la rotation, notée @ (ou ρ)

elle transforme la valeur de vérité d'une formule par rotation circulaire entre les valeurs possibles ; on peut considérer deux rotations :

@ ou $@^{+}$: → Faux → *i* → Vrai →

$@^{-}$: ← Faux ← *i* ← Vrai ←

D'où les tables de vérité

p	@ *p*	$@^{-}p$
Vrai	Faux	*i*
i	Vrai	Faux
Faux	*i*	Vrai

On peut remarquer que $@^{-}p = @^{-1}p = @^{2}p$

- l'opérateur de Slupecki τ

il est surtout intéressant sur le plan formel ;

il réalise la fonction tierce τ (ou T),

telle que $\tau(p)$ = i, quelle que soit la valeur de vérité de *p* :

p	$\tau(p)$
Vrai	*i*
i	*i*
Faux	*i*

2.3 Utilisation des logiques trivaluées

Il est souvent pratique d'utiliser d'autres valeurs de vérité que {Vrai, *i*, Faux}, par exemple les ensembles de *symboles* {1, ½, 0} ou {1, 0, -1} ou, parfois, {3, 2, 1} …

Pour plus de lisibilité, nous utiliserons désormais l'ensemble des valeurs {1, ½, 0}, que généralisent les logiques de Lukasiewicz à plus de trois valeurs et que nous verrons plus loin.

2.3.1 Vérification d'une formule

Pour vérifier la validité d'une formule, la méthode la plus naturelle consiste à construire sa table de vérité. Le principal problème est la taille des tables de vérité : si l'on considère n propositions, la table de vérité comportera 3^n lignes, soit 9 lignes si n=2, 27 lignes si n=3, 81 si n=4... ; on se limite donc, en général, à des formules courtes.

Il existe cependant d'autres méthodes, inspirées de celles de la logique classique : arbres (ou tableaux) sémantiques, résolution. Ces méthodes sont encore souvent du domaine de la recherche et nous ne les étudierons pas ici.

2.3.2 Construction d'une formule

On part souvent d'une formulation explicite, que l'on précise à l'aide d'une table de vérité.

On construit ensuite la formule à partir de la table de vérité ; il existe pour cela plusieurs méthodes, mais nous en proposons une qui, si elle ne réduit pas la formule, a l'avantage d'être automatisable.

Méthode :
on réalise la fonction, terme par terme :

- les termes qui produisent les valeurs 1 (Vrai) puis
- les termes qui produisent les valeurs ½ (indéterminé)

Pour réaliser un terme :
- si une variable X est à 1, elle apparaît comme telle : X ;
- si une variable Y est à ½, elle apparaît sous la forme de $@Y$;
- si une variable Z est à 0, elle apparaît sous la forme de $@^2Z$.

Un terme est constitué par la conjonction (et logique, $\wedge$) des variables avec les opérateurs de rotation associés ;
par exemple, pour $X = 1$, $Y = ½$, $Z = 0$, on crée le terme

$$X \wedge @Y \wedge @^2Z, \text{ parfois noté } X \,.\, @Y \,.\, @^2Z.$$

Un terme qui doit produire une valeur 1 de la fonction ne doit pas introduire de valeur ½ : on le fait précéder par l'opérateur α.

Un terme t qui doit produire une valeur ½ de la fonction ne doit générer que ce ½, sans introduire de 1. Il intervient donc sous la forme : $½ \wedge \alpha t$ ou $½ \,.\, \alpha t$.

Exemple

construisons la formule *F,* décrite par table de vérité ci-dessous

p	q	F	
1	1	½	terme à ½ : $p \wedge q \;\Rightarrow\; ½ \wedge \alpha(p \wedge q)$
1	½	0	
1	0	½	terme à ½ : $p \wedge @^2q \;\Rightarrow\; ½ \wedge \alpha(p \wedge @^2q)$
½	1	0	
½	½	½	terme à ½: $@p \wedge @q \;\Rightarrow\; ½ \wedge \alpha(@p \wedge @q)$
½	0	1	terme à 1 : $@p \wedge @^2q \Rightarrow \alpha(@p \wedge @^2q)$
0	1	0	
0	½	1	terme à 1 : $@^2p \wedge @q \Rightarrow \alpha(@^2p \wedge @q)$
0	0	0	

D'où $F = ½ \wedge \alpha(p \wedge q) \vee ½ \wedge \alpha(p \wedge @^2q) \vee ½ \wedge \alpha(@p \wedge @q)$
$\vee\, \alpha(@p \wedge @^2q) \vee \alpha(@^2p \wedge @q)$.

On peut regrouper les termes qui génèrent 1 et ceux qui génèrent ½ :

$F = \alpha[\,(@p \wedge @^2q) \vee (@^2p \wedge @q)\,]$
$\vee\, ½ \wedge \alpha[\,(p \wedge q) \vee (p \wedge @^2q) \vee (@p \wedge @q)\,]$.

2.4 Logiques à plus de trois valeurs

2.4.1 Logiques de Lukasiewicz

Lukasiewicz a généralisé sa logique trivaluée, en considérant n+1 valeurs prises dans l'intervalle [0, 1] : 0, 1/n, 2/n, …, (n-1)/n, 1 .

En notant | *P* |, la valeur de vérité de la formule *P*, il définit :

$$|\neg p| = 1 - |p|$$
$$|p \vee q| = \max(|p|, |q|)$$
$$|p \wedge q| = \min(|p|, |q|)$$
$$|p \rightarrow q| = \begin{cases} 1 & \text{si } |p| \leq |q| \\ 1 - |p| + |q| & \text{si } |p| > |q| \end{cases}$$

À titre d'exercice, on pourra reconstruire les tables de vérité pour n = 2, donc sur {0, ½, 1}.

Ces logiques se généralisent à un nombre infini de valeurs dans les logiques floues.

2.4.2 Logiques multivaluées sur un treillis

Un treillis τ est un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel (relation réflexive, antisymétrique et transitive), telle que :

$$\forall e1, e2 \in \tau \qquad \exists e_m \in \tau \ \left| \begin{array}{l} e_m \leq e1 \\ e_m \leq e2 \end{array} \right.$$

$$\text{et} \qquad \exists e_M \in \tau \ \left| \begin{array}{l} e_M \geq e1 \\ e_M \geq e2 \end{array} \right.$$

C'est à dire que deux éléments quelconques ont dans τ, une borne inférieure et une borne supérieure. Un treillis a un plus grand élément appelé 1 et un plus petit élément appelé 0.

Si l'on note la plus grande borne inférieure de e1 et e2 par e_m et leur plus petite borne supérieure par e_M, on peut construire une logique multivaluée sur ce treillis, en définissant :

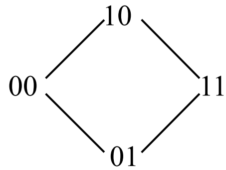
$$\left| \begin{array}{l} e1 \wedge e2 = e_m \\ e1 \vee e2 = e_M \end{array} \right.$$

La négation n'est définissable que dans le cas de treillis complémentés, où :

$$\forall ei \in \tau \qquad \exists ej \in \tau \qquad \text{tel que} \qquad \left| \begin{array}{l} ei \wedge ej = 0 \\ ei \vee ej = 1 \end{array} \right.$$

ej est alors le complément de ei.

1er exemple : on définit une logique à quatre valeurs, permettant de représenter l'incertitude et la contradiction.



La valeur associée à une formule *F* est représentée par 2 bits :

le 1er bit représente la vérité de F ;

le 2e bit représente la vérité de $\neg F$.

Cette valuation par deux chiffres binaires permet d'exprimer

la certitude en la vérité de F par 10,

la certitude en la fausseté de F par 01,

la contradiction sur F par 11,

l'ignorance sur F par 00.

2e exemple : un système logique, conçu par le logicien Prior, considère quatre valeurs de vérité que l'on peut attribuer à une formule :

1 correspond à une formule vraie et connue comme vraie ;

2 correspond à une formule vraie et non connue comme vraie ;

3 correspond à une formule fausse et non connue comme fausse ;

4 correspond à une formule fausse et connue comme fausse.

Un autre système proposé par le logicien Post, considère des valeurs de 1 à 12, associées chacune à un mois de l'année et permettant d'indiquer, en particulier, les mois de floraison de plantes.

2.5 Conclusions

La principale difficulté des logiques à plus de trois valeurs est que les tables de vérité deviennent vite très grandes et que le nombre d'opérateurs possibles est encore plus grand.

Les seules logiques multivaluées véritablement utilisées en pratique sont les logiques trivaluées et celles à nombre infini de valeurs (en particulier les logiques floues).

2.6 Exercices

(*Corrigés à partir de la page 139*)

1) Montrez que, dans les logiques trivaluées de Lukasiewicz et de Kleene, les formules ci-dessous sont des tautologies :

a : $\neg p = (p \wedge @p) \vee @(p \vee @p)$;

b : $\alpha p = @(@p \vee @^2 p)$;

c : $@(p \wedge @p) \vee @(p \wedge @^2 p) \vee @(@p \wedge @^2 p)$.

2) Écrivez, dans la logique de Lukasiewicz trivaluée, la table de vérité de la fonction exprimant la vérité de :

$$(p \rightarrow \neg\, q) \vee (p \textit{ inconnu} \rightarrow q) \vee (\neg\, p \rightarrow p \textit{ inconnu})$$

et celle de $(p \rightarrow \neg\, q) \wedge (p \textit{ inconnu} \rightarrow q) \wedge (\neg\, p \rightarrow q \textit{ inconnu})$.

3) Démontrez, en logique trivaluée de Lukasiewicz, la formule (de "De Morgan") :

$$\neg\,(p \vee q) \;=\; \neg\, p \wedge \neg\, q\,.$$

4) Démontrez que, dans la logique trivaluée de Lukasiewicz, on a :

$$\neg\, p \vee \neg\, q \rightarrow \neg\,(p \wedge q)\,.$$

Qu'en est-il en logique de Kleene ?

5) Exprimez dans une logique à 3 valeurs, la formule, construite à partir de 3 symptômes *p, q, r* et définissant un syndrome *S* tel que :

- *S* est vrai, si et seulement si deux au moins des symptômes sont vrais ;
- *S* est incertain, si et seulement si un seul des symptômes est vrai et au moins l'un des deux autres est incertain ;
- *S* est faux, dans tous les autres cas.

Remarque : la table de vérité n'est pas nécessaire.

6) Démontrez à l'aide d'une table de vérité, qu'en logique trivaluée de Kleene, on a :

$$p \rightarrow q \equiv \neg\, p \vee q\,.$$

Qu'en est-il en logique trivaluée de Lukasiewicz ?

7) Déterminez, dans la logique trivaluée de Kleene, la validité de l'équivalence

$$\alpha(p \rightarrow q) \;\equiv\; \alpha p \rightarrow \alpha q\,.$$

8) Qu'exprime la formule $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$?

Est-elle vraie en logique trivaluée de Lukasiewicz ?

Et en logique trivaluée de Kleene ?

9) Écrivez la formule φ, trivaluée, construite avec les quatre variables *p, q,r, s* et telle que :

- φ est vraie, si *r* ou *s* est vraie, à condition que ni *p* ni *q* ne soient vraies ;
- φ est inconnue, quand *r* ou *s* est inconnue ou quand (*p* ou *q*) est vraie et (*r* et *s*) aussi ;
- φ est fausse dans les autres cas.

10) Exprimez la formule *M* (représentant le résultat d'un vote **m**ajoritaire), construite avec les trois variables trivaluées *p, q, r* et telle que :

- *M* est vraie, quand au moins deux des variables *p, q, r* sont vraies ;
- *M* est indéterminée, quand deux au moins des variables *p, q, r* sont indéterminées ou quand une est vraie, une autre fausse et la troisième indéterminée;
- *M* est fausse dans les autres cas, c'est-à-dire quand au moins deux des variables sont fausses.

Remarque : il peut être plus facile d'exprimer la condition *C* pour laquelle *M* est fausse et d'utiliser la négation de cette condition en utilisant le terme $(i \wedge \alpha \neg C)$ ou $(i \wedge \alpha @^2 C)$.

Chapitre 3

Logique(s) Floue(s)

3.1 Objectifs

Les logiques floues ont été élaborées en 1973 par *Lotfi Zadeh* à partir de la théorie des sous-ensembles flous qu'il avait formulée en 1965 ; elles ont deux buts :

- manipuler des *connaissances vagues* ;
- représenter des *appréciations subjectives,* pour essayer de reproduire des raisonnements ou des comportements humains.

Exemples de connaissances vagues

concepts ou prédicats flous :

"grand, chaud, joli…"

faits flous :

"la terre est à peu près ronde et légèrement aplatie aux pôles".

règles floues :

"pour réussir, il faut travailler beaucoup",

"si le malade tousse beaucoup, donnez-lui un peu de sirop",

"plus on est de fous, plus on rit",

"plus la chaussée est abîmée, moins elle est confortable".

(Ces deux derniers énoncés sont des règles d'inférences graduelles ou *topoï*) incertitudes floues :

"il est vraisemblable, très possible, probable…"

quantificateurs flous :

"certains, beaucoup, la plupart, peu de, généralement, souvent, parfois…"

comparateurs flous :

"aussi, moins, plus…"

(*flous* : ils sous-entendent "presque" ou "plutôt")

adverbes (ou modificateurs) flous :

"peu, très, assez, plutôt, presque…"

3.2 Fondements : les (sous-)ensembles flous

3.2.1 Généralités

Les concepts des sous-ensembles flous ont été théorisés par Lotfi Zadeh en 1965. Cette théorie considère un ensemble U (au sens classique), appelé "univers du discours" ou "univers de référence".

Un sous-ensemble classique *S* de U peut être défini :

- par la liste de ses éléments, ou
- par une fonction, μ_S, appelée *fonction caractéristique* de *S,* ou fonction de discrimination de *S,* qui est une fonction de U dans l'ensemble {0, 1}, telle que :

$$\forall x \in \mathrm{U} \left| \begin{array}{ll} \mu_S(x) = 1 & \text{si } x \in S \\ \mu_S(x) = 0 & \text{si } x \notin S \end{array} \right.$$

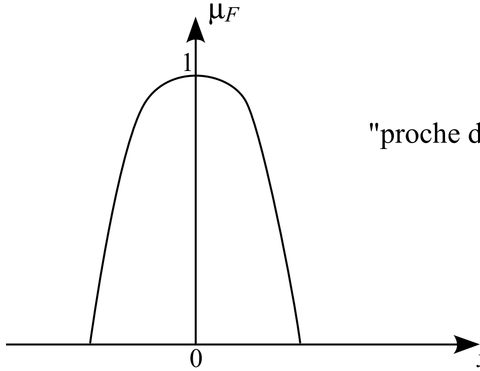
On dit aussi que *S* est un sous-ensemble précis (*"crisp",* en anglais).

Un sous-ensemble flou *F* (en anglais *"fuzzy subset"*, souvent abrégé en *"fuzzy set"*) de U peut être défini en généralisant le concept de fonction caractéristique :

- la fonction caractéristique ou fonction d'appartenance, μ_F, d'un sous-ensemble flou *F* de U est définie **sur l'intervalle** [0, 1] (au lieu de l'ensemble {0, 1}, composé seulement du 0 et du 1) ;
- $\mu_F(x)$ représente **le degré d'appartenance** de *x* à *F*.

• ***si* U *est continu*** (par exemple R, l'ensemble des réels),
on peut décrire $\mu_F(x)$ par une fonction.

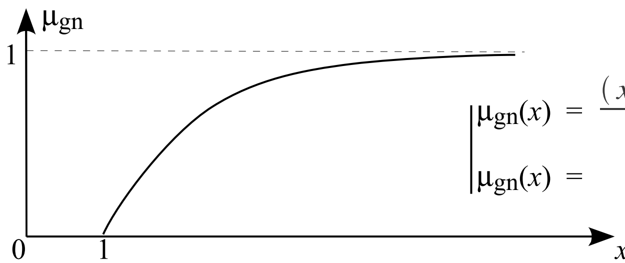
Exemple 1 : "proche de 0"



"proche de 0" : $\mu_F(x) = \dfrac{1}{1 + 10 * x^2}$

On définit de même "proche de a" par $\mu_F(x) = \dfrac{1}{1 + 10 * (x - a)^2}$

Exemple 2 : "grand nombre" (gn)



$$\begin{cases} \mu_{gn}(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ \mu_{gn}(x) = 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

• ***si* U *est discret*,**
on associe à chaque objet de U son degré d'appartenance à F.

Exemple 1 : si U = {petit, moyen, grand},
on peut exprimer le sous-ensemble flou "*pas très grand*" par

pas très grand = {0,8/petit, 0,5/moyen, 0,2/grand}

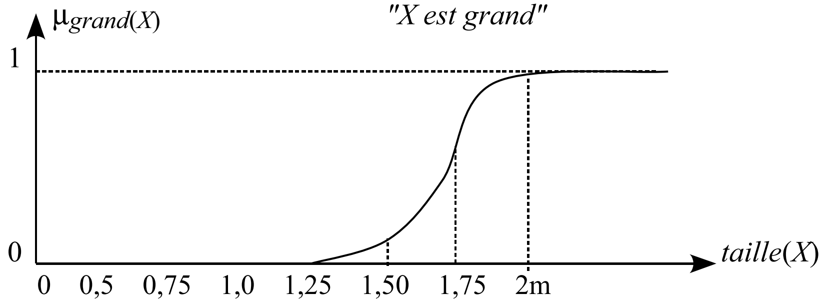
ou *pas très grand* = 0,8/petit + 0,5/moyen + 0,2/grand .

Exemple 2 : si U = N, l'ensemble des entiers naturels,
on peut exprimer *"voisin de 6"*, noté $\tilde{6}$, par

$\tilde{6}$ = 0,1/3 + 0,3/4 + 0,6/5 + 1,0/6 + 0,6/7 + 0,3/8 + 0,1/9 .

Remarques

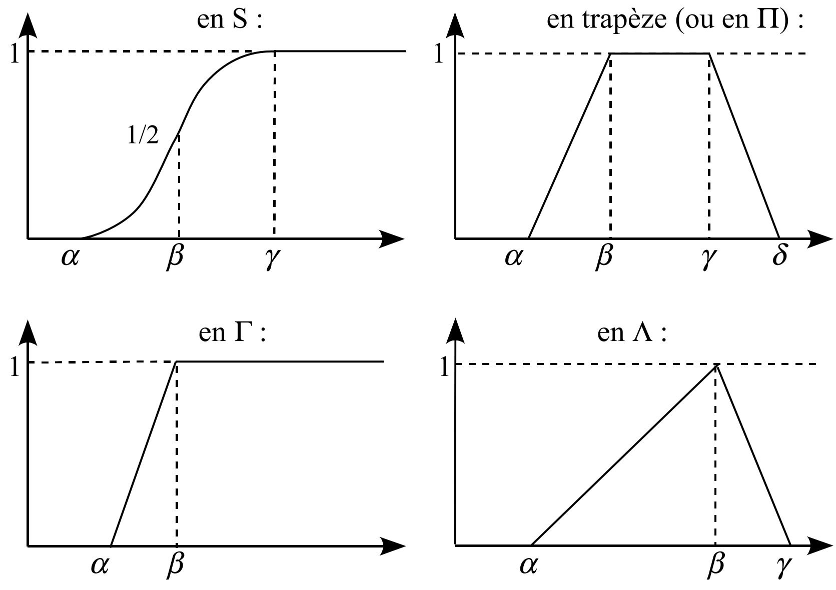
1°) Souvent, on cherchera à prendre U le plus précis possible ; par exemple, la taille d'une personne sera définie sur l'ensemble des tailles réelles :



2°) La subjectivité intervient de manière importante dans les évaluations (pour évaluer les tailles, il y aurait sûrement une grande différence entre une évaluation des tailles par un enfant, par un adulte petit ou par un adulte grand).

3°) Le contexte aussi est important : on n'évaluera pas de la même manière $\mu_{\text{grand}}(X)$ pour des jockeys et des basketteurs.

4°) On utilise souvent des courbes standardisées :



avec:

$$\mu_S(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le \alpha \\ 2*\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{si } \alpha < x \le \beta \\ 1-2*\left(\dfrac{x-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{si } \beta < x < \gamma \\ 1 & \text{si } x \ge \gamma \end{cases}
\qquad
\mu_\Pi(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha < x \le \beta \\ 1 & \text{si } \beta < x \le \gamma \\ \dfrac{\delta-x}{\delta-\gamma} & \text{si } \gamma < x < \delta \\ 0 & \text{si } x \ge \delta \end{cases}$$

et

$$\mu_\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha < x < \beta \\ 1 & \text{si } x \ge \beta \end{cases}
\qquad
\mu_\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha < x \le \beta \\ \dfrac{\gamma-x}{\gamma-\beta} & \text{si } \beta < x < \gamma \\ 0 & \text{si } x \ge \gamma \end{cases}$$

3.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

- On appelle *hauteur* d'un sous-ensemble flou F sur un univers de discours U, le plus grand degré d'appartenance à F :

$hauteur(F) = \mu_{MAX} : [\ (\exists x \in U\ \ \mu_F(x) = \mu_{MAX}) \wedge (\forall x \in U\ \mu_F(x) \le \mu_{MAX})\ ]$;

- un sous-ensemble flou F sur un univers de discours U est dit *normalisé* quand sa hauteur est de 1, c'est-à-dire que l'un au moins des éléments de U appartient totalement à F.

- on appelle *support* d'un sous-ensemble flou F sur un univers de discours U, l'ensemble des éléments de U dont le degré d'appartenance à F n'est pas nul :

$$support(F) = \{\ x \in U \mid \mu_F(x) > 0\ \} ;$$

- on appelle *noyau* (*kernel* en anglais) d'un sous-ensemble flou F sur un univers de discours U, l'ensemble des éléments de U dont le degré d'appartenance à F vaut 1 :

$$noyau(F) = \{\ x \in U \mid \mu_F(x) = 1\ \} ;$$

- on appelle *α-coupe* (*α-cut*) d'un sous-ensemble flou *F* sur un univers de discours U, l'ensemble des éléments de U dont le degré d'appartenance à *F* est supérieur ou égal à une valeur α, prise dans l'intervalle [0, 1] :

$$\alpha\text{-}coupe(F) = \{ x \in U \mid \mu_F(x) \geq \alpha \} ;$$

- *le cardinal d'un ensemble classique* est le nombre de ses éléments ; *le cardinal d'un sous-ensemble flou F* sur un univers de discours U peut être défini de deux manières différentes :

- comme un scalaire de valeur réelle que l'on note *card*(*F*) ou | *F* |, et qui correspond au cardinal classique pour un ensemble non flou :
  $card(F) = \sum_{x \in U} \mu_F(x)$;
- ce peut aussi être un nombre flou, recensant pour chaque degré de vérité le nombre d'éléments de U qui lui correspondent, et que l'on peut définir

si U est discret, par $\widetilde{card}(F) = \sum_{\alpha \in [0,1]} card\left(\left\langle x \middle| \mu_F(x) = \alpha \right\rangle\right) / \alpha$;

si U est continu, par $\widetilde{card}(F) = \int_{\alpha=0}^{1} card\left(\left\langle x \middle| \mu_F(x) = \alpha \right\rangle\right) / \alpha$.

D'autres définitions ont été proposées pour ce cardinal flou, nous nous limitons à celle-ci, qui paraît plutôt "naturelle".

3.2.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

Considérant deux sous-ensembles flous A et B sur un même univers du discours U, on définit :

- *l'égalité* entre les 2 sous-ensembles flous A et B :
  A = B ssi $\forall x \in U \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$
  ("ssi" signifiant "si et seulement si")
- *l'inclusion* de A dans B :
  $A \subseteq B$ ssi $\forall x \in U \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

On peut aussi définir, à l'aide des opérateurs proposés par Zadeh :

- *le complément* de A par rapport à U, par : $\mu_{CA}(x) = 1 - \mu_A(x)$;

- *l'intersection* entre A et B par : $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$;

- *la réunion* de A et B par : $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

Mais on peut utiliser d'autres fonctions pour ces 3 opérateurs : un complément flou général, une norme triangulaire (appelée aussi t-norme ou norme-t) pour l'intersection et une conorme triangulaire (appelée aussi co t-norme, conorme-t ou t-conorme) pour la réunion.

Un complément flou, C, doit avoir comme propriétés

- des conditions aux limites : $\mathsf{C}(0) = 1$ et $\mathsf{C}(1) = 0$;
- ainsi que la monotonie inverse :
  $\forall a, b \in [0, 1] \quad a < b \ \rightarrow \ \mathsf{C}(a) > \mathsf{C}(b)$;
- souvent, en plus, la continuité et l'involution $\mathsf{C}(\mathsf{C}(a)) = a$.

Une norme triangulaire (ou t-norme), $\top$,
doit avoir comme propriétés

- des conditions aux limites :
  $\top(0, 0) = \top(0, 1) = \top(1, 0) = 0$ et $\top(1, 1) = 1$,
- plus la commutativité :
  $\forall a, b \in [0, 1] \quad \top(a, b) = \top(b, a)$,
- l'associativité :
  $\forall a, b, c \in [0,1] \ \top(a, \top(b, c)) = \top(\top(a, b), c)$,
- la monotonie :
  $\forall a, a', b, b' \in [0,1] \quad a \leq a'$ et $b \leq b' \ \rightarrow \ \top(a, b) \leq \top(a', b')$,
- souvent, aussi, la continuité et
- l'idempotence : $\forall a \in [0,1] \ \top(a, a) = a$.

Une conorme triangulaire (t-conorme ou conorme-t), $\perp$,
doit avoir comme propriétés

- des conditions aux limites :
  $\perp(1, 1) = \perp(1, 0) = \perp(0, 1) = 1$ et $\perp(0, 0) = 0$,
- plus la commutativité, l'associativité, la monotonie,
- et souvent, aussi, la continuité et l'idempotence.

En général, une t-conorme est associée à une t-norme particulière.

T-normes et t-conormes courantes

- probabilistes

  $\top(a, b) = a * b$

  $\perp(a, b) = a + b - a*b$

- de Lukasiewicz

  $\top(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$

  $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$

- de Weber

$$\top_W(a, b) = \left| \begin{array}{l} a \text{ si } b = 1 \\ b \text{ si } a = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$$\perp_W(a, b) = \left| \begin{array}{l} a \text{ si } b = 0 \\ b \text{ si } a = 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Remarques

1) Il existe de nombreuses classes de t-normes et t-conormes (par exemple celles de Sugeno, Yager, Hamacher, Dubois, …), mais on a toujours :

$$\top_W(a, b) \leq \top(a, b) \leq \min(a, b) ;$$

$$\max(a, b) \leq \perp(a, b) \leq \perp_W(a, b).$$

2) En général, on commence par utiliser les opérateurs définis par Zadeh avant d'en considérer d'autres.

Rappelons que ces opérateurs sont

$$C(a) = 1 - a, \quad \top(a, b) = \min(a, b), \quad \perp(a, b) = \max(a, b).$$

3) Pour le complément, on peut parfois utiliser :

$$C_\lambda(a) = \frac{1-a}{1-\lambda . a}, \text{ avec } \lambda \in [-1, +\infty] \qquad \text{(classe de Sugeno) ;}$$

ou

$$C_\omega(a) = (1-a^\omega)^{1/\omega}, \text{ avec } \omega \in [0, +\infty] \quad \text{(classe de Yager).}$$

Exemple d'utilisation de ces opérateurs :

Soit U, un ensemble de vitesses possibles pour un véhicule sur une route, de 0 à 150km/h et discrétisées de 15 en 15. On considère deux sous-ensembles flous sur l'univers des vitesses : *les vitesses rapides* et *les vitesses dangereuses* ; les valeurs des degrés d'appartenance sont supposés fixés par un expert.

Vitesse	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
μ_{rapide}	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,4	0,8	0,9	1	1	1
$\mu_{dangereuse}$	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	1	1	1

On souhaite déterminer le sous-ensemble flou des *vitesses **non** dangereuses* et celui des *vitesses rapides **et** dangereuses*.

- pour évaluer le degré d'appartenance des vitesses au sous-ensemble flou des *vitesses **non** dangereuses*, on utilise la valeur de $1-\mu_{dangereuse}$, ce qui donne le résultat ci-dessous :

Vitesse	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
dangereuse	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	1	1	1
non *dangereuse*	1	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0	0	0	0

- pour évaluer le degré d'appartenance des vitesses au sous-ensemble flou des *vitesses rapides **et** dangereuses,* on calcule $min(\mu_{rapide}, \mu_{dangereuse})$ pour chacune des vitesses. On obtient :

Vitesse	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
rapide	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,4	0,8	0,9	1	1	1
dangereuse	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	1	1	1
*rapide **et** dangereuse*	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,4	0,7	0,9	1	1	1

Nous nous garderons bien de commenter ces résultats ! Si l'une de ces évaluations n'est pas en accord avec l'opinion de la personne dont on cherche à modéliser le raisonnement (souvent un expert du domaine considéré), d'autres opérateurs doivent être essayés ; on peut aussi personnaliser les opérateurs utilisés à l'aide de tables.

3.2.4 Relations floues

On considère *n* univers du discours : $U_1, U_2, \ldots, U_n$; une relation floue d'ordre *n* (ou d'arité *n*, c'est-à-dire qui a *n* arguments) est un sous-ensemble flou de $U_1 * U_2 * \ldots * U_n$.

Exemples

1) sur un même univers du discours U = {0, 30, 60, 90, 120, 150} (vitesses), la relation floue *"plus rapide"* entre deux vitesses peut être représentée par un tableau :

U_1 \ U_2	0	30	60	90	120	150
0	0	0,2	0,4	0,7	0,9	1
30	0	0	0,3	0,6	0,8	0,9
60	0	0	0	0,2	0,5	0,7
90	0	0	0	0	0,1	0,6
120	0	0	0	0	0	0,2
150	0	0	0	0	0	0

2) Sur deux univers du discours :

U1 = {Paris, New-York} et U2 = {New-York, Londres, Pékin},

on peut définir une estimation subjective de R = *"lointain"*, par

R(U1, U2) = 1,0/(New-York, Pékin) + 0,0/(New-York, New-York)
+ 0,6/(New-York, Londres) + 0,9/(Paris, Pékin)
+ 0,7/(Paris, New-York) + 0,3/(Paris, Londres)

ou par le tableau équivalent :

Origine / Destination	New-York	Paris
New-York	0	0,7
Londres	0,6	0,3
Pékin	1	0,9

3.3 Logique floue

3.3.1 Principe

Une proposition floue
est un énoncé de la forme *"X est A"*, où *X* est un élément de l'univers du discours U, non déterminé, et *A* un sous-ensemble flou sur U.

Exemple
l'énoncé du langage courant, *"Jean est grand",* se traduit par la proposition floue *"la taille de Jean est grande"* ; ici, U est l'ensemble des valeurs numériques des tailles possibles, *X* désigne la valeur associée à la taille de Jean et *A* l'ensemble flou des "grandes tailles".

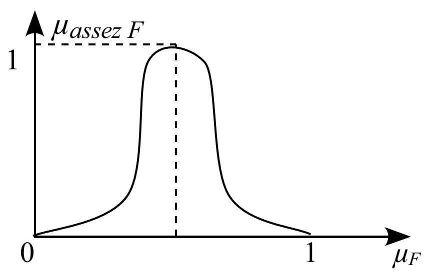
Le degré de vérité noté $\mu_{X\ est\ A}$ de la proposition *"X est A"* est défini comme le degré d'appartenance de *X* au sous-ensemble flou *A* :

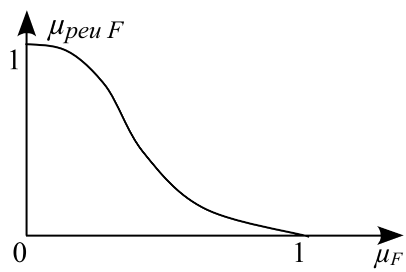
$$\mu_{X\ est\ A} = \mu_A(X)$$

Le sous-ensemble flou, *A,* peut être précisé à l'aide d'un *modificateur flou* tel que *très*, *assez*, *plutôt*, *peu*…
On définit souvent

$$\mu_{très F}(x) = \mu_F^{\,2}(x) \quad \text{et} \quad \mu_{plutôt F}(x) = \sqrt{\mu_F(x)}$$

et les modificateurs flous *"assez"* et *"peu"*, par des fonctions dont la forme est indiquée ci-dessous :





3.3.2 Opérateurs logiques flous

- ***Une négation floue*** est réalisée à l'aide d'un complément ensembliste flou, puisque l'on peut écrire que le degré de vérité de ¬ *"X est A"* est le degré d'appartenance de *X* au complément du sous-ensemble flou *A* ; on utilise le plus souvent le complément standard, C(a) = 1-a.

- ***Une conjonction floue*** (opérateur "et" flou) est réalisée par une intersection ensembliste floue, puisque l'on peut écrire

  "X est A" ***et*** *"X est B"* ≡ *"X est A* $\cap$ *B"*.

  On la définit donc par une t-norme (norme triangulaire) $\top$;
  on utilise souvent :
  - le minimum (Zadeh) $\top(a, b) = \min(a, b)$,
  - l'intersection probabiliste $\top(a, b) = a*b$,
  - la différence bornée $\top(a, b) = \max(0, a+b-1)$, aussi appelée conjonction de Lukasiewicz (*"bold"* en anglais, pour bornée).

- ***Une disjonction floue*** (opérateur "ou" flou) est réalisée par une union ensembliste floue, puisque l'on peut écrire

  "X est A" ***ou*** *"X est B"* ≡ *"X est A* $\cup$ *B"*.

  On la définit donc par une t-conorme (conorme triangulaire) $\perp$;
  on utilise souvent :
  - l'union standard (Zadeh) : $\perp(a, b) = \max(a, b)$,
  - l'union probabiliste : $\perp(a, b) = a+b-a*b$,
  - la somme bornée (Lukasiewicz) : $\perp(a, b) = \min(1, a+b)$.

Dans les logiques classiques, la conjonction et la disjonction sont liées par les lois de "De Morgan" :

$$\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \quad \text{et} \quad \neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q \ ;$$

il semble souhaitable que ces relations soient aussi vérifiées pour des formules floues. Pour cela, on doit avoir

$$\mathsf{C}(\top(\mu_p, \mu_q)) = \perp(\mathsf{C}(\mu_p), \mathsf{C}(\mu_q)) \quad \text{et} \quad \mathsf{C}(\perp(\mu_p, \mu_q)) = \top(\mathsf{C}(\mu_p), \mathsf{C}(\mu_q)),$$

ou

$$\mathsf{C}(\top(a, b)) = \perp(\mathsf{C}(a), \mathsf{C}(b)) \quad \text{et} \quad \mathsf{C}(\perp(a, b)) = \top(\mathsf{C}(a), \mathsf{C}(b)) \ ;$$

on dit alors que la t-norme $\top$ et la t-conorme $\perp$ sont *duales par rapport au complément flou* C.

Parmi les couples de t-norme et t-conorme duales par rapport au complément flou standard, on peut citer :

– le minimum et le maximum :

$$\top(a, b) = \min(a, b), \qquad \perp(a, b) = \max(a, b) \ ;$$

– le produit et la somme probabiliste :

$$\top(a, b) = a*b, \qquad \perp(a, b) = a+b-a*b \ ;$$

– la différence et la somme bornées (ou de Lukasiewicz) :

$$\top(a, b) = \max(0, a+b-1), \quad \perp(a, b) = \min(1, a+b).$$

- ***Une implication floue***

est une fonction, I, de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $[0, 1]$, qui, pour toutes les valeurs de vérité a et b de deux propositions floues, respectivement *p* et *q*, définit la valeur de vérité I(a, b) de la formule *"si p, alors q"*. Cette fonction I peut être définie sous différentes formes, non équivalentes en logique floue, mais qui le deviennent en logique classique.

1) En logique classique, on peut définir la fonction I évaluant l'implication par :

$$\forall a\in \{0, 1\}\ \forall b\in \{0, 1\} \quad I(a, b) = \neg a \vee b \qquad (1),$$

ce qui donne en logique floue :

$$\forall a\in [0, 1]\ \forall b\in [0, 1] \quad I(a, b) = \perp(C(a), b) \ (2).$$

2) La logique classique permet aussi d'écrire :

$$\forall a\in \{0,1\}\ \forall b\in \{0,1\} \quad I(a, b) = \max\{x\in \{0,1\} \mid a \wedge x \leq b\} \quad (3),$$

d'où en logique floue :

$$\forall a\in [0, 1]\ \forall b\in [0, 1] \quad I(a, b) = \sup\{x\in [0, 1] \mid \top(a, x) \leq b\} \ (4),$$

Les relations (1) et (3) sont équivalentes, mais les relations (2) et (4) ne le sont pas, car elles portent sur des valeurs de vérité floues ; la formule (1) peut aussi s'écrire sous les formes suivantes :

$$I(a, b) = (\neg a) \vee (a \wedge b) \quad (\text{car } \neg a \vee a = 1), \qquad (5)$$

$$I(a, b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee b, \qquad (6)$$

ce qui donne en logique floue :

$$I(a, b) = \perp(C(a), \top(a, b)), \qquad (7)$$

$$I(a, b) = \perp(\top(C(a), C(b)), b) \qquad (8)$$

où $\top$, $\perp$ et C doivent satisfaire les lois de Morgan.

Les formules (2), (4), (7) et (8) permettent de construire différentes classes d'implications floues :

- *Les S-implications* sont définies à partir de la formule (2) qui définit une implication floue I à partir d'une t-conorme $\perp$:

  $$I(a, b) = \perp(C(a), b) ;$$

  on définit ainsi à partir des unions floues de base (ou de leurs intersections duales) :

  - pour l'union standard, le maximum (intersection duale, le minimum),

l'implication de Kleene-Dienes :

$$\forall a\in [0, 1]\ \forall b\in [0, 1] \quad I(a, b) = \max(1-a,b) ;$$

- pour l'union probabiliste (intersection duale : le produit), l'implication de Reichenbach :

$\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1] \qquad I(a, b) = 1\text{-}a+a*b$:

- pour la somme bornée (intersection duale, la différence bornée), l'implication de Lukasiewicz :

$\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1] \qquad I(a, b) = \min(1, 1\text{-}a+b)$.

- *Les R-implications* sont définies par la formule (4) qui définit une *implication* à partir d'une t-norme $\top$:

  $$I(a, b) = \sup\{x \in [0,1] \mid \top(a, x) \leq b\} \ ;$$

  on dit alors qu'on définit l'implication comme ***le résidu*** de la t-norme $\top$. Cela permet de définir :

  - pour l'intersection standard (le minimum), l'implication de Gödel :

  $$\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1]\ \ I(a, b) = \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \ ; \end{array}\right.$$

  - pour l'intersection probabiliste, l'implication de Goguen :

  $$\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1]\ \ I(a, b) = \left|\begin{array}{ll} 1 & \text{si } a \leq b \\ b/a & \text{si } a > b \ ; \end{array}\right.$$

  - pour la différence bornée, l'implication de Lukasiewicz :

  $\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1]\ \ I(a, b) = \min(1, 1\text{-}a+b)$.

- *La classe des QL-implications* utilise la relation (7) avec une t-norme $\top$ et une t-conorme, $\perp$ duales par rapport au complément flou C, soit $I(a, b) = \perp(C(a), \top(a, b))$; on peut alors définir :

  - avec le maximum comme t-conorme (t-norme : le minimum), l'implication de Zadeh :

  $\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1]\ \ I(a, b) = \max(1\text{-}a, \min(a, b))$,

  - pour l'union probabiliste (t-norme : le produit), l'implication probabiliste définie par

  $\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0, 1]\ \ I(a, b) = 1\text{-}a+a^2 * b$,

  - pour la somme bornée (t-norme : la différence bornée), l'implication de Kleene-Dienes :

  $\forall a \in [0, 1]\ \ \forall b \in [0,1]\ \ I(a, b) = \max(1\text{-}a, b)$.

En pratique, on peut aussi définir spécifiquement l'implication associée à chaque règle, par une relation entre A et B et donc par un tableau.

3.3.3 Règles d'inférence floues

Si A et B sont deux sous-ensembles flous, plusieurs règles d'inférences peuvent s'appliquer :

- *la règle de déduction* :

$$\left.\begin{array}{r} X\ est\ A \\ A \subseteq B \end{array}\right| \vdash \quad X\ est\ B$$

- *la règle de déduction dispositionnelle* :

$$\left.\begin{array}{r} \text{généralement } X\ est\ A \\ A \subseteq B \end{array}\right| \vdash \quad \text{généralement } X\ est\ B$$

- *la règle de conjonction* :

$$\left.\begin{array}{r} X\ est\ A \\ X\ est\ B \end{array}\right| \vdash \quad X\ est\ A \cap B$$

avec $\mu_{A \cap B}(x) = \mathsf{T}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

- ***le modus ponens généralisé* (*M.P.G. en abrégé*),** est la règle d'inférence la plus utilisée, qui s'énonce :

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } X\ est\ A\text{, alors } Y\ est\ B \\ \quad X\ est\ A' \end{array}\right| \vdash \quad Y\ est\ B'$$

(avec A' voisin de A).

Le modus ponens généralisé est lié à l'implication utilisée. Cette implication peut être définie à l'aide d'un des opérateurs vus ci-dessus ou, plus empiriquement, en définissant pour chaque règle, la relation entre A et B à l'aide d'une table.

Le modus ponens généralisé correspond à l'opération inverse de l'implication :

- à partir de l'implication définie par $\mu_i(a, b)$
- et de $\mu_{A'}(a)$, le degré de vérité de la prémisse " *X est A'* ",

le M.P.G. permet de déterminer

- $\mu_{B'}(b)$, le degré de vérité de la conclusion " *Y est B'* ".

D'une manière générale, le modus ponens généralisé peut s'écrire

$$\forall b \in U_B \quad \mu_{B'}(b) = \max_{a \in U_A} [\, G(\, \mu_{A'}(a), \mu_i(a, b)\,)\,]$$

où G est une fonction d'arité 2, définie en liaison avec la définition de l'implication. Cette fonction est généralement une t-norme ; elle peut être définie comme

a) $Ga(x, y) = \min(x, y)$,
b) $Gb(x, y) = x * y$,
c) $Gc(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$;

Si, parmi les opérateurs μ_i que l'on peut choisir pour l'implication floue, on se limite aux huit suivants, dont le nom est indiqué à droite :

1) $\mu_i(a, b) = 1\text{-}\mu(a) + \mu(a) * \mu(b)$ (Reichenbach),

2) $\mu_i(a, b) = \max\{1\text{-}\mu(a), \min(\mu(a), \mu(b))\}$ (Wilmott),

3) $\mu_i(a, b) = \min(\mu(a), \mu(b))$ (Mandani),

4) $\mu_i(a, b) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mu(a) \leq \mu(b) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$ (Rescher-Gaines),

5) $\mu_i(a, b) = \max(1 - \mu(a), \mu(b))$ (Kleene-Dienes),

6) $\mu_i(a, b) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mu(a) \leq \mu(b) \\ \mu(b) & \text{sinon} \end{array} \right.$ (Brouwer-Gödel),

7) $\mu_i(a, b) = \left| \begin{array}{ll} \min(\mu(b)/\mu(a), 1) & \text{si } \mu(a) \neq 0 \\ 1 & \text{si } \mu(a) = 0 \end{array} \right.$ (Goguen),

8) $\mu_i(a, b) = \min(1\text{-}\mu(a)+\mu(b), 1)$ (Lukasiewicz),

les fonctions Ga et Gb peuvent être utilisées dans le cas des implications n° 3, 4, 6, 7 ; la fonction Gc est utilisable dans tous les cas, mais, souvent, on utilise quand même le minimum, Ga, plus rapide à calculer.

3.3.4 Choix d'un jeu d'opérateurs logiques flous

Suivant la nature des applications, on sera amené à choisir un jeu d'opérateurs flous en tenant compte de différentes contraintes.

• *Pour un système à base de connaissances,* reposant sur le modus ponens généralisé, les meilleurs résultats correspondent aux associations entre :

- la t-norme de Lukasiewicz (t-norme "bold") et l'implication de Lukasiewicz,
- la t-norme de Gödel (le minimum de Zadeh) et l'implication de Brouwer-Gödel,
- la t-norme probabiliste et l'implication de Goguen.

Ainsi, pour la mise en œuvre du modus ponens généralisé, les meilleurs jeux d'opérateurs associent une t-norme $\top$ (ainsi que la t-conorme duale) et la R-implication I qu'elle définit par :

$$\mathrm{I}(a, b) = \sup\{x \in [0,1] \mid \top(a, x) \leq b\}.$$

Ce résultat est justifié théoriquement, en particulier par Hajek, qui a montré que l'implication la mieux adaptée au modus ponens généralisé, pour une t-norme donnée, est le résidu de cette t-norme (la définition d'une R-implication est en effet le résidu de la t-norme associée).

• *D'autres applications ont pour but de synthétiser des connaissances* formulées par des experts ou par des systèmes automatiques de découvertes de connaissances, en utilisant des règles basées sur des implications floues ; dans ce contexte, il est souvent souhaitable d'agréger les règles.

En logique classique, on peut écrire

$$(a \to c) \wedge (b \to c) \ \vdash \ (a \vee b) \to c \qquad (1),$$

et il semble intéressant de pouvoir procéder de même avec des règles floues, sans avoir à réévaluer la règle floue $(a \vee b) \to c$.

Si l'on cherche parmi les jeux d'opérateurs flous, ceux qui permettent d'écrire la forme condensée ci-dessous, associée à l'inférence (1) :

$$\top(\mathrm{I}(a, c), \mathrm{I}(b, c)) = \mathrm{I}(\bot(a, b), c),$$

$\top$ étant une t-norme, $\bot$ sa t-conorme duale et I une implication floue, on démontre qu'utiliser le *minimum* comme t-norme et le *maximum* comme t-conorme est la seule solution, parmi les jeux d'opérateurs flous de base. Ce résultat est indépendant de l'implication choisie.

De même, pour conserver la réduction classique

$$(a \to b) \wedge (a \to c) \ \vdash \ a \to (b \wedge c)$$

ou, avec les mêmes notations condensées,

$$\top(\mathrm{I}(a, c), \mathrm{I}(a, c)) = \mathrm{I}(a, \top(b, c)),$$

le même jeu d'opérateurs flous (*minimum* et *maximum*) doit être utilisé.

Comme le modus ponens généralisé s'avère meilleur avec le minimum et le maximum quand on utilise aussi l'implication de Brouwer-Gödel, c'est souvent ce jeu d'opérateurs que l'on utilisera :

$$\top(a, b) = \min(a, b),$$

$$\bot(a, b) = \max(a, b),$$

$$\mu_{a \to b}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(a) \leq \mu(b), \\ \mu(b) & \text{sinon} \end{cases}$$

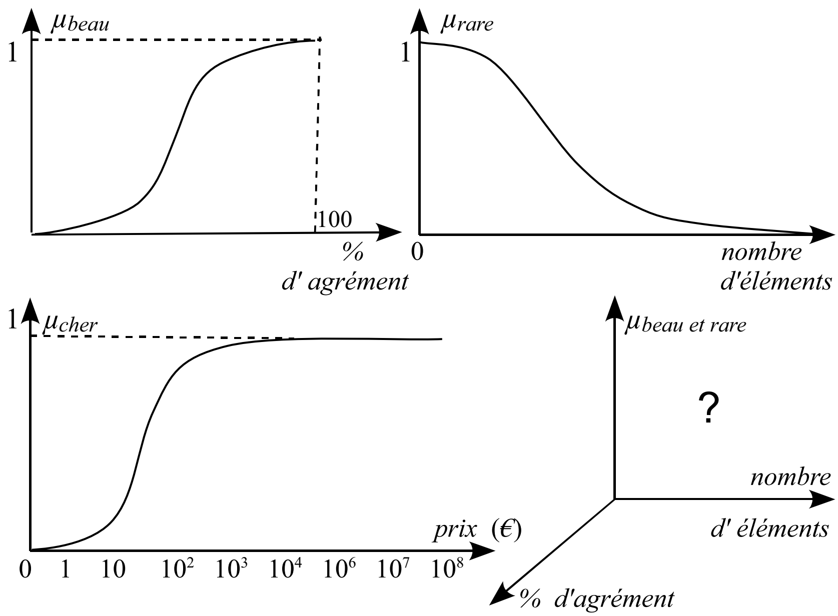
3.4 Exemple détaillé

Considérons la formule : *"Ce qui est beau et rare coûte cher"*.

1°) Si l'on choisit d'utiliser des ***univers de discours continus***, on peut

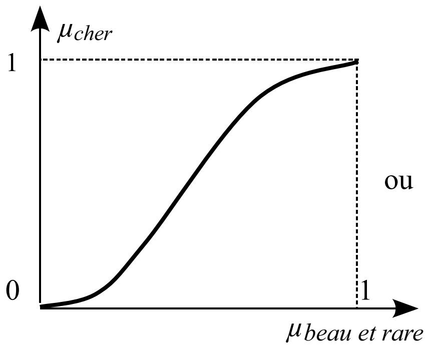
- évaluer la beauté sur l'intervalle [0, 1], comme la proportion de personnes qui trouvent l'objet beau,
- évaluer le degré de rareté à partir du nombre d'éléments au monde : $[0, +\infty[$,
- évaluer le coût à partir du prix, sur $[0, +\infty[$.

On peut alors utiliser des fonctions μ_{beau}, μ_{rare}, μ_{cher}, définies par des courbes comme ci-dessous :

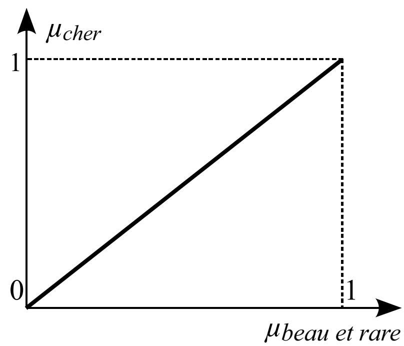


Le symbole ? indique que le lien entre *"beau et rare"* et leurs éléments respectifs d'évaluation (le pourcentage d'agrément et le nombre d'éléments) est difficile à apprécier de la part d'un expert, alors que le choix d'une t-norme pour réaliser le *"et"* est souvent malaisé pour rester proche de l'intuition.

D'autre part, l'implication entre *"beau et rare"* et *"cher"* peut être décrite par des fonctions représentées par une des courbes ci-dessous :



ou



La principale difficulté est donc de décrire la courbe $\mu_{beau\ et\ rare}$

- en fonction de μ_{beau} et μ_{rare} ou
- en fonction du pourcentage d'agrément et du nombre d'éléments ;

pour cela, on peut essayer successivement plusieurs fonctions jusqu'à l'obtention d'un résultat satisfaisant, mais, souvent, il peut être intéressant de discrétiser les domaines, solution que nous envisageons maintenant.

2°) Si l'on considère des ***univers de discours discrets***, on peut, par exemple, évaluer

- la beauté sur :

$U_{beauté}$ = {horrible, laid, disgracieux, neutre, agréable, joli, magnifique},

- la rareté sur :

$U_{rareté}$ = {commun, répandu, inhabituel, unique},

- le coût sur :

$U_{coût}$ = {gratuit, peu cher, abordable, coûteux, inestimable}.

Sur ces univers de discours, on peut définir alors :

beau = 0,4/agréable + 0,8/joli + 1/magnifique ;

rare = 0,2/répandu + 0,6/inhabituel + 1/unique ;

cher = 0,3/abordable +0,8/coûteux + 1/inestimable .

Étant donné que l'énoncé *"X est beau et rare"* correspond à la formule *"X est beau **et** X est rare"*, si l'on utilise le minimum pour réaliser l'opérateur flou *"et",* on obtient :

beau et rare = 0,2/(agréable, répandu) + 0,4/(agréable, inhabituel) + 0,4/(agréable, unique) + 0,2/(joli, répandu) + 0,6/(joli, inhabituel) + 0,8/(joli, unique) + 0,2/(magnifique, répandu) + 0,6/(magnifique, inhabituel) + 1/(magnifique, unique) .

On peut alors choisir d'exprimer l'implication *"beau et rare → cher"* à l'aide d'un des opérateurs d'implication vus ci-dessus, ou, sinon, utiliser une table, représentant l'avis d'un expert.

C'est cette solution que nous considérons maintenant, en utilisant la table ci-dessous pour représenter l'implication floue

"beau et rare → cher",

correspondant à l'énoncé

"ce qui est beau et rare coûte cher".

	cher		
beau et rare	abordable : 0,3	coûteux : 0,8	inestimable : 1
0,2 de (agréable, répandu) et (joli, répandu)	0,3	0,4	0
0,4 de (agréable, inhabituel) et (agréable, unique)	0,2	0,6	0
0,6 de (joli, inhabituel) et (magnifique, inhabituel)	0,2	0,8	0,4
0,8 de (joli, unique)	0,1	0,7	0,9
1 de (magnifique, unique)	0	0	1

Cette table a été établie d'après une ***estimation subjective***. La seule contrainte à respecter, dans ce cas, est que la plus grande valeur par colonne doit correspondre au degré de vérité de l'attribut que l'on veut trouver en conclusion. Cela correspond ici, pour *"cher",* aux valeurs entourées : 0,3 pour abordable, 0,8 pour coûteux, 1 pour inestimable.

Application du modus ponens généralisé

Si nous considérons un objet *"beau et plutôt rare"*, en définissant

"plutôt rare" = 0,4/répandu + 0,8/inhabituel,

avec, à nouveau

"beau" = 0,4/agréable + 0,8/joli + 1/magnifique ;

nous pouvons évaluer *"beau et plutôt rare"*, en utilisant le minimum pour l'opérateur de conjonction floue (*"et"*).

Nous obtenons alors

"beau et plutôt rare" = 0,4/(agréable, répandu)
+ 0,4/(agréable, inhabituel) + 0,4/(joli, répandu)
+ 0,8/(joli, inhabituel) +0,4/(magnifique, répandu)
+ 0,8/(magnifique, inhabituel).

Nous pouvons alors construire le tableau associé, dans lequel nous rappelons entre parenthèses la valeur de l'implication :

beau et plutôt rare	abordable	coûteux	inestimable
0,4	($\mu_{\rightarrow}$ = 0,2) **0,2**	($\mu_{\rightarrow}$ = 0,6) 0,4	($\mu_{\rightarrow}$ = 0) 0
0,8	($\mu_{\rightarrow}$ = 0,1) 0,1	($\mu_{\rightarrow}$ = 0,7) **0,7**	($\mu_{\rightarrow}$ = 0,9) **0,8**
coût :	0,2	0,7	0,8

Méthode utilisée :

Nous avons appliqué le modus ponens généralisé avec la fonction

G(x, y) = min(x, y),

1) en prenant dans chaque case du tableau,
le minimum entre $\mu_{beau\ et\ plutôt\ rare}$ et $\mu_{\rightarrow}$,
($\mu_{\rightarrow}$ est une autre notation pour le degré d'implication, μ_i) ;

2) puis, dans chaque colonne, la valeur maximale.

D'où, ici, un résultat de :

0,2 / abordable + 0,7 / coûteux + 0,8 / inestimable.

Ce résultat caractérise le sous-ensemble flou représentant le coût associé à un objet *"beau et plutôt rare"*. Le degré de 0,8 pour inestimable peut sembler un peu fort par rapport au degré de 0,7 pour coûteux ; pour vérifier la validité de ce résultat par rapport au domaine d'application, on peut demander à un expert du domaine si ce résultat lui semble satisfaisant et, dans la négative, ajuster la table de l'implication ou modifier la définition des sous-ensembles flous *"beau"* et *"plutôt rare"*.

3.5 Autres opérateurs de mise en œuvre

3.5.1 Agrégation entre sous-ensembles flous

Si plusieurs règles floues fournissent plusieurs sous-ensembles flous $F_1, F_2, ..., F_n$ sur l'univers du discours U pour un même attribut, il faut regrouper $F_1, F_2, ..., F_n$ en un seul sous-ensemble flou sur U ; c'est le rôle de *l'opérateur d'agrégation*.

L'opérateur d'agrégation, que nous noterons *"agr"*, entre les degrés d'appartenance doit vérifier :

• des conditions aux limites :

$agr(0, 0, \ldots, 0) = 0$ et $agr(1, 1, \ldots, 1) = 1$,

• la monotonie non décroissante :

$\forall i \in [1, n] \quad ai \leq bi \rightarrow agr(..., ai, \ldots) \leq agr(..., bi, \ldots)$,

(les autres arguments étant inchangés).

• la continuité,

• la symétrie généralisée :

$agr(a1, \ldots, an) = agr(perm(a1, a2, \ldots, an))$

(quelle que soit la permutation *perm* de a1, a2, …, an).

On peut utiliser à cet effet

- le maximum,
- le minimum,

ou, plus généralement,

- une t-norme, une t-conorme ou
- une pondération entre une t-norme et la t-conorme associée,

- une moyenne généralisée, définie par

$$agr_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

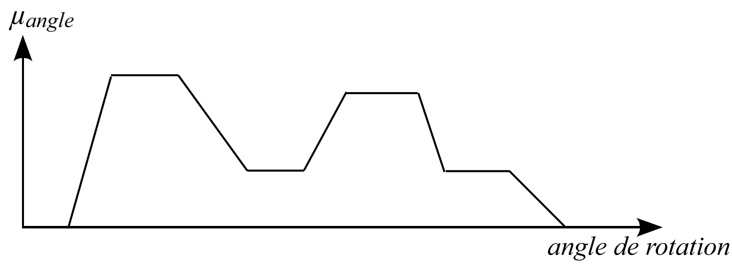
avec, en cas particuliers, les moyennes, arithmétique (quand $\alpha = 1$) et géométrique (quand α tend vers 0).

Souvent une t-norme sera trop forte, puisque $\top(0, 1, 1, \ldots, 1) = 0$ et une t-conorme sera trop faible, puisque $\perp(1, 0, 0, \ldots, 0) = 1$;
le choix d'une pondération entre une t-norme et la t-conorme associée ou l'emploi d'une moyenne sera généralement plus satisfaisant. La moyenne arithmétique est plus proche des méthodes statistiques, mais elle présente l'inconvénient de ne pas être associative.

3.5.2 Le problème de la "défuzzification"

Quand un ensemble de règles permet de déterminer une quantité floue comme paramètre d'une action, se pose le problème de la *valeur précise* à utiliser, ce que nous appelons, faute d'un mot français correspondant, *défuzzification*.

Par exemple,
pour une opération *"tourner la vanne de ... (un certain angle)"*, on peut avoir obtenu un angle souhaitable, correspondant à une quantité floue de la forme :



Il faut alors déterminer l'angle dont on va effectivement faire tourner la vanne. On peut prendre pour cela

- une valeur parmi celles pour lesquelles μ_{angle} est maximum ;
- la valeur associée à la moyenne des μ_{angle} maximum ;
- le centre de gravité de la surface fermée par la courbe μ_{angle}.

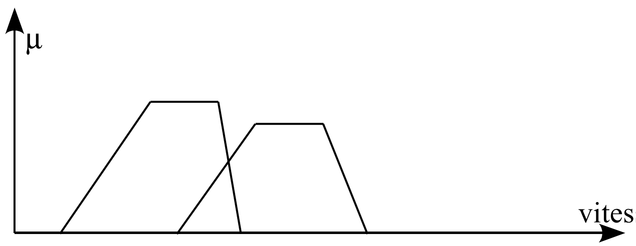
Le choix de l'une de ces méthodes pourra être fait en fonction d'une stratégie particulière, variable suivant les conditions, ou après de nombreux essais.

Autre exemple

Considérons les deux règles floues

- si la route est glissante, je dois avoir une vitesse réduite.
- si je suis en retard, je dois aller vite.

Dans le cas où la route est glissante et si je suis modérément en retard, ces deux règles peuvent induire une courbe de la forme ci-dessous :



On pourra prendre une vitesse de compromis ou se limiter à une vitesse plus réduite, pour des raisons de sécurité.

3.6 Conclusions

- la "logique floue" ne constitue pas une seule logique, mais en fait *plusieurs logiques* : les opérateurs *et, ou, non*, ainsi que l'implication peuvent être définis de nombreuses façons ;

- ces logiques permettent de traduire une subjectivité, qui n'est généralement pas la même d'un individu à un autre ;

- les logiques floues sont très utiles pour essayer de reproduire un comportement humain que l'on ne peut formuler par des formules booléennes, en particulier quand interviennent des paramètres de perception ;

- elles permettent également de modéliser des systèmes complexes pour lesquels la théorie ne donne pas de formalisation ou pour lesquels on ne sait pas résoudre les équations.

- plutôt que de "logique floue", il faudrait donc plutôt parler de "méthodologie floue" ou "méthodologie du flou".

3.7 Exercices

(*Corrigés page 146*)

1) Soit U, un ensemble de vitesses possibles pour un véhicule sur une route, de 0 à 150km/h et discrétisées de 30 en 30, On considère deux sous-ensembles flous sur l'univers des vitesses : les vitesses rapides et les vitesses dangereuses ; ces deux sous-ensembles ont été définis par un expert à l'aide du tableau ci-dessous :

Vitesse	0	30	60	90	120	150
μ_{rapide}	0	0,1	0,3	0,8	1	1
$\mu_{dangereuse}$	0	0,3	0,6	0,9	1	1

A) Évaluez l'implication associée à l'énoncé

"Si une vitesse est rapide elle est dangereuse",

pour l'implication de Gödel, définie par

$$\mu_i(a, b) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mu(a) \le \mu(b) \\ \mu(b) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Évaluez la conséquence de cette implication, si l'on considère une *"vitesse assez rapide"* définie par :

$$0{,}3/30 + 0{,}6/60 + 1/90 + 0{,}7/120 + 0{,}4/150$$

B) Reprenez ces évaluations pour l'implication de Lukasiewicz, définie par $\mu_i(a, b) = \min(1-\mu(a)+\mu(b), 1)$

2) On définit le domaine des températures d'un malade, T, et le domaine des doses d'un médicament, D, (en nombre d'unités), par :

$$T = \{37, 37{,}5, 38, 39, 40\} \qquad D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Un comportement thérapeutique est décrit par les niveaux de correspondance entre les doses du médicament et la température du malade :

T° C \ Doses	1 u	2 u	3 u	4 u
37,5	0,4	0,2	0,1	0
38	0,5	1	0,6	0,2
39	0,3	0,7	1	0,4
40	0,2	0,6	1	0,7

Cette table décrit en particulier la règle :

"Si le malade est plutôt fiévreux,
alors la dose du médicament doit être modérée".

Si *"plutôt fiévreux"* est décrit par le sous-ensemble flou

0,4/37,5 + 1,0/38 + 0,3/39 + 0,1/40

quel est le sous-ensemble flou associé à *"une dose modérée"* ?

3) On définit le domaine V des vitesses d'un véhicule et le domaine de sa consommation par :

V = {lent, modéré, rapide}
C = {faible, moyenne, importante, forte}

La relation entre les degrés de vitesse et le niveau de consommation a été décrite par :

vitesse \ consommation	faible	moyenne	importante	forte
lent	0,8	0,2	0	0
modéré	0,3	0,8	0,6	0,2
rapide	0	0,4	0,8	1

Cela traduit en particulier la règle :

"Si la vitesse est grande, la consommation est élevée" ;

si *"une grande vitesse"* est décrite par le sous-ensemble flou

"grande vitesse" = 0,1/lent + 0,5/modéré + 1,0/rapide,

quel est le sous-ensemble flou décrivant une *"consommation élevée"* ?

4) Un expert décrit la relation entre la température et la pression d'un système, sur l'univers des températures :

T = {froid, frais, normal, chaud, brûlant}

et celui des pressions :

P = {faible, moyen, fort}.

Cette relation est représentée par le tableau ci-dessous, qui traduit en particulier la règle :

"Si la température est importante, la pression est élevée".

Quel est le sous-ensemble flou associé à *"pression élevée"*, si

"température importante" = 0,3/normal + 0,8/chaud + 1,0/brûlant ?

Pression / Température	faible	moyen	fort
froid	0,8	0,2	0
frais	0,4	0,4	0
normal	0,2	0,8	0,1
chaud	0,1	0,6	0,8
brûlant	0	0,4	1,0

5) On considère trois univers du discours :

taille = {grand, moyen, petit} ;
teinte = {blond, brun} ;
sensibilité = {faible, modéré, fort} .

La relation entre la sensibilité d'une personne au soleil, la couleur de ses cheveux et sa taille est décrite par le tableau ci-dessous :

	sensibilité		
teinte * taille	faible	modéré	fort
blond grand	0	0,6	1
blond moyen	0,2	0,7	0,9
blond petit	0,4	1	0,8
brun grand	0,6	1	0,2
brun moyen	0,7	0,8	0,1
brun petit	1,0	0,4	0

Quelle est la sensibilité d'un individu *"châtain et assez grand"*, si

châtain = 0,5/blond + 0,6/brun
assez grand = 0,6/moyen + 0,8/grand ?

6) Pour exprimer des connaissances (sommaires) en météo marine, on utilise trois univers du discours, dont le *fetch* (distance sur laquelle le vent souffle sans obstacle) :

vent = {faible, modéré, fort} ;
fetch = {réduit, étendu} ;
conditions = {agréables, agitées, dures} .

La relation entre la force du vent, le fetch et les conditions de navigation est évaluée par le tableau ci-dessous :

	conditions		
vent * fetch	agréables	agitées	dures
faible réduit	1	0,1	0
modéré réduit	0,8	0,4	0,1
fort réduit	0,4	0,6	0,4
faible étendu	1	0,2	0
modéré étendu	0,7	1	0,5
fort étendu	0	0,8	1

Quelle seront les conditions de navigation pour
"un vent assez fort et un fetch intermédiaire", avec
un *"vent assez fort"* = 0,5/modéré + 0,8/fort
un *"fetch intermédiaire"* = 0,4/réduit + 0,8/étendu ?

7) Pour gérer un système d'air conditionné, on évalue une sensation de confort sur le domaine

C = {pénible, neutre, agréable},

en fonction de la température et de l'humidité, évaluées respectivement sur les domaines

T = {froid, doux, chaud} et
H = {sec, moyen, saturé}.

Cette évaluation est représentée par le tableau ci-dessous

	confort		
température * humidité	agréable	supportable	pénible
froid sec	0,6	1	0,2
froid moyen	0,4	0,8	0,5
froid saturé	0,2	0,5	0,8
doux sec	0,8	0,9	0,2
doux moyen	1	0,8	0
doux saturé	0,6	0,8	0,4
chaud sec	0,6	0,4	0,2
chaud moyen	0,8	0,7	0,2
chaud saturé	0,2	0,4	1

Comment s'évalue la sensation de confort pour

"une température plutôt chaude ***et*** *une humidité assez élevée"* ,

avec *"une température plutôt chaude"* = 0,6/doux + 0,8/chaud

et *"une humidité assez élevée"* = 0,4/moyenne + 0,6/saturée ?

Que devient cette sensation pour

"une température moyenne ***et*** *une humidité* ***pas*** *très forte"*,

avec *"une température moyenne"* = 0,5/froid + 0,8/chaud

et *"une humidité très forte"* = 0,1/faible + 0,6/moyenne +1/forte ?

8) Un système de chauffage à base de règles floues, évalue :

- l'humidité sur le domaine H = {sec, humide}
- la température sur le domaine T = {froid, doux, chaud}
- la combustion sur le domaine C = {réduite, modérée, forte}

L'humidité et la température permettent de fixer la combustion à l'aide du tableau ci-dessous :

		combustion	
température * humidité	réduite	modérée	forte
froid humide	0	0,4	1
froid sec	0,2	0,6	0,8
doux humide	0,2	0,9	0,7
doux sec	0,3	0,8	0,5
chaud humide	0,8	0,5	0,1
chaud sec	1	0,2	0

Ce tableau représente en particulier la règle :

"Si l'humidité est assez élevée ***ou*** *la température fraîche,*
alors la combustion est importante",

avec *"une humidité assez élevée"* = 0,2/sec + 0,6/humide,

et *"une température fraîche"* = 0,8/froid + 0,4/doux.

Comment peut-on évaluer une *"combustion importante"* ?

9) L'adéquation d'une personne à un profil de recrutement est évaluée en logique floue, par l'intermédiaire de deux sous-ensembles flous, l'expérience et le niveau de formation initiale.

L'expérience de la personne est évaluée sur le domaine

E = {débutant, confirmé, expert},

et son niveau de formation sur le domaine

N = {licence, master, doctorat}.

L'intérêt présenté par la candidature de cette personne est évalué sur le domaine

I = {faible, moyen, fort},

par une relation entre l'adéquation au profil et cet intérêt ; cette relation est décrite par le tableau ci-dessous :

intérêt / adéquation	faible	moyen	fort
0	1	0	0
0,2	0,8	0,1	0
0,4	0,5	0,5	0,2
0,6	0,3	0,7	0,4
0,8	0,1	1	0,6
1	0	0,8	1

L'adéquation à un profil est calculée par l'agrégation, pour tous les attributs, de la correspondance entre le profil d'un candidat et le profil requis. Cette correspondance entre la valeur effective d'un attribut flou et la valeur souhaitée peut être évaluée par

$$max_{modalités\ mA\ de\ l'attribut\ A}\left(min(\mu_{mA}(C), \mu_{mA}(S))\right),$$

avec

– $\mu_{mA}(C)$, la valeur prise par la modalité *m* de l'attribut *A* pour le candidat *C*,

et

– $\mu_{mA}(S)$, la valeur souhaitée (*S*) pour la modalité *m* de l'attribut *A*.

A) Quels opérateurs d'agrégations vous semblent les mieux adaptés ?

B) Considérons le profil

"plutôt confirmé et niveau d'études élevé",

avec *"plutôt confirmé"* = 0,4/débutant + 0,8/confirmé + 0,6/expert

et *"niveau d'études élevé"* = 0,4/licence + 0,6/master + 1,0/doctorat,

et un candidat

"bien confirmé et de bon niveau d'études",

avec *"bien confirmé"* = 0,2/débutant + 0,9/confirmé + 0,4/expert

et *"bon niveau d'études"* = 0,5/licence + 0,8/master +0,6/doctorat ;

quel est l'ensemble flou correspondant à l'intérêt présenté par le candidat, compte-tenu du profil cherché ?

(*Corrigé p. 155*)

Chapitre 4

Logiques Modales

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions

Une logique modale est une extension d'une logique classique par l'ajout d'opérateurs modaux. ***Un opérateur modal*** est un opérateur qui s'applique aux formules de la logique classique pour exprimer une "modalité" sur ces formules : si F est une formule, classique ou modale, et μ, un opérateur modal, la formule μF est une *modalité* de la formule F.

On utilise généralement des *paires* d'opérateurs modaux : si l'on utilise un opérateur modal de symbole $\Box$, on lui associe un autre opérateur modal, de symbole $\Diamond$, et tel que $\Diamond F = \neg \Box \neg F$; $\Box$ est appelé opérateur modal universel et $\Diamond$ opérateur modal existentiel.

4.1.2 Notations et formulations

On distingue différents opérateurs modaux suivant la signification qu'on leur attribue.

a) Les opérateurs de nécessité/possibilité

Ils sont dits aussi "ontologiques" ou "aléthiques" :

$\Box$ se lit "nécessairement" ou "il est nécessaire que...",
$\Diamond$ se lit "possiblement" ou "il est possible que ...";

Ainsi,

- la formule $\Box F$ est vraie, si et seulement si
  la formule F est nécessairement vraie ou
  F est vraie dans toutes les situations envisageables ou
  F est vraie dans tous les mondes possibles.

- la formule $\Diamond F$ est vraie, si et seulement si
  il est possible que la formule F soit vraie ou
  F peut être vraie dans une situation particulière ou
  F est vraie dans au moins un monde possible.

Suivant les auteurs, d'autres notations sont parfois utilisées :

L ou N pour $\Box$ et M pour $\Diamond$.

b) Les opérateurs d'obligation/permission

Ils sont dits aussi "déontiques" ; dans ce cas

$\Box$ se lit "obligatoirement"
$\Diamond$ se lit "est autorisé" ou "est permis" :

ainsi,

- la formule $\Box F$ est vraie si la formule f est obligatoire ;
- la formule $\Diamond F$ est vraie si la formule f est permise.

D'autres notations sont aussi possibles :

O (obliged) pour $\Box$ et P (permitted) pour $\Diamond$.

c) Les opérateurs de connaissance ou de croyance

Ils sont dits aussi "épistémiques".

Deux significations différentes sont ici possibles :

- $\Box F$ peut se lire "on sait F " (ou "je sais F") ;
  une autre notation est possible : K (knowledge).
- $\Box F$ peut aussi se lire "on croit F " (ou "je crois F") ;
  une autre notation est possible : B (belief).

La signification de l'opérateur $\Diamond$ n'est alors pas directe :
à partir de la définition $\Diamond F = \neg \Box \neg F$, on peut lire

- $\Diamond F$ comme "on ne sait pas $\neg F$"
  (ou "je ne sais pas si F est fausse").

ou

- $\Diamond F$ comme "on ne croit pas $\neg F$"
  (ou "je ne crois pas que F soit fausse").

Toutes ces modalités peuvent se combiner, à condition, évidemment, d'utiliser des symboles différents.

Remarque : on peut lier les modalités aléthiques et la logique trivaluée de Lukasiewicz. En effet, la logique trivaluée de Lukasiewicz utilise 3 valeurs de vérité {Vrai, i, Faux} et les opérateurs modaux de nécessité et de possibilité peuvent prendre leurs valeurs dans {Vrai, Faux}, à partir des valeurs de la formule trivaluée considérée. Pour une formule F trivaluée, on peut évaluer sa nécessité, $\Box F$, et sa possibilité, $\Diamond F$, en fonction de ses valeurs de vérité :

F	$\Box F$	$\Diamond F$
Vrai	Vrai	Vrai
i	Faux	Vrai
Faux	Faux	Faux

On peut vérifier que $\Diamond F = \neg F \rightarrow F$ et que $\Box F = \neg (F \rightarrow \neg F)$.

4.2 Formalisme

Une logique (multi)modale peut être définie formellement par

- l'ajout à une logique classique d'opérateurs modaux $\mu_1 \ldots \mu_i \ldots \mu_n$;

- toute formule de la logique classique est une formule de la logique modale ;

- si F est une formule syntaxiquement correcte de la logique classique ou de la logique modale, alors $\mu_i F$ est une formule ("bien formée") de la logique modale.

A ces opérateurs modaux, on associe des axiomes qui caractérisent la logique modale considérée.

4.3 Axiomes possibles d'une logique modale

Si l'on considère deux modalités $\Box$ et $\Diamond$,
telles que $\Diamond p = \neg \Box \neg p$, on pose en général

- **deux axiomes de base**
  - l'axiome d'identité : $\Box p \rightarrow \Box p$;
  - l'axiome de distribution, appelé aussi axiome K (initiale du logicien Kripke) : $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

- **deux règles d'inférence**

  - la règle de nécessité, appelée parfois, en abrégé, RN :

$$\frac{\vdash P}{\Box P} \qquad \begin{array}{l}\text{(si } P \text{ est un théorème,} \\ \quad P \text{ est nécessaire)}\end{array}$$

  - le modus ponens ou, en abrégé, MP :

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

où P et Q sont des formules qui peuvent comporter des modalités.

Ces deux axiomes et ces deux règles d'inférences sont caractéristiques de ce que l'on appelle un *système modal normal*, dont une des propriétés est que

si l'on a $p \rightarrow q$, on peut écrire $\Box p \rightarrow \Box q$.

Si la modalité $\Box$ représente la croyance, cela signifie que, si l'implication $p \rightarrow q$ est vraie, tout agent qui croit p croit systématiquement q, sans pour autant que cet agent croie (ou sache) que $p \rightarrow q$ est vraie (alors que l'axiome K exprime seulement que si un agent **croit** $p \rightarrow q$ et qu'il croit p, alors il croit aussi q).

D'autres axiomes permettent de construire des logiques modales particulières ; leurs noms ont été attribués par différents auteurs, pour évoquer des logiciens ou simplement en les numérotant.

- l'axiome T : $\Box p \rightarrow p$
  (si $\Box$ signifie "savoir",
  il exprime que "si je sais p, alors p est vrai") ;

- l'axiome D : $\Box p \rightarrow \Diamond p$, ou forme faible de T, s'écrit aussi
  $\Box p \rightarrow \neg \Box \neg p$
  (il exprime que "je ne peux croire simultanément p et $\neg p$") ;

- l'axiome 4 : $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, ou d'introspection positive
  (il exprime que "si je sais p, alors je sais que je sais p" ou
  "si je crois p, alors je crois que je crois p") ;

- l'axiome 5 : $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$, ou d'introspection négative est aussi appelé E (euclidien) ; il est équivalent à : $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$
  ("si je ne sais pas p, alors je sais que je ne sais pas p" ou
  "si je ne crois pas p, alors je crois que je ne crois pas p").

Des axiomes moins courants peuvent aussi être utilisés :

- l'axiome B : $p \to \Box \Diamond p$

  le nom de cet axiome évoque Brouwer, père de la logique intuitionniste (en fait, l'axiome B ne sert pas pour la logique intuitionniste, qui n'utilise que les axiomes 4 et T, mais pour la logique quantique).

  Cet axiome n'a pas d'interprétation épistémique.

- l'axiome L (ou *w*) : $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

  est utilisé dans les logiques de la prouvabilité (introspection mathématique), où $\Box p$ se lit "p est prouvable".

  On peut définir alors
  - la consistance : $\Box p \to p$ (si p est prouvable, p est vrai) et
  - la complétude : $p \to \Box p$ (si p est vrai, p est prouvable)

Principales logiques modales et leurs axiomes

Suivant les axiomes choisis, on aura des logiques différentes que l'on désigne par la liste de leurs axiomes ; on a ainsi les logiques

K	parfois appelée κ (kappa),
KT	parfois appelée τ (tau),
K4	appelée S4 faible,
KT4	appelée S4,
KT45	appelée S5,
KD	appelée déontique,
KD4	appelée S4 déontique,
KD45	appelée S5 déontique ...

Les logiques S4 et S5 sont les plus fréquemment utilisées.

4.4 Sémantique

4.4.1 Principe

Rappelons qu'en logique, une sémantique est une méthode rigoureuse permettant d'évaluer la vérité des formules : toute formule doit pouvoir être "interprétée" (c'est-à-dire évaluée par une valeur dans l'ensemble des valeurs de vérité), à partir des valeurs de vérité des formules de base (dites formules "atomiques").

En logique modale, les valeurs de vérité sont, comme en logique classique, choisies dans l'ensemble {Faux, Vrai} ou {0, 1}.

Cependant, il n'est généralement pas possible d'évaluer la valeur de vérité d'une formule modale quelconque en n'utilisant que les valeurs de vérité des formules atomiques qui la constituent. On dit que les logiques modales ne sont pas *véri-fonctionnelles* : à partir de la valeur de vérité {Vrai ou Faux} d'une formule p on ne peut généralement pas déterminer la valeur de vérité de $\Box p$ ou celle de $\Diamond p$.

Par exemple, dans le meilleur des cas, on peut écrire :

p	$\Box p$	$\Diamond p$
Vrai	?	Vrai
Faux	Faux	?

Un mécanisme particulier d'interprétation des formules modales est donc nécessaire ; la sémantique des logiques modales, due à Kripke, repose sur le concept ***d'ensemble de mondes possibles*.**

Ainsi,

- on peut lire la formule $\Box p$ comme :
"p est vraie
dans *tous* les mondes que je peux envisager ou rencontrer", ou
dans *toutes* les situations que je peux envisager ou rencontrer" ;

- on peut lire la formule $\Diamond p$ comme :
"p est vraie
dans *au moins* un monde que je peux envisager ou rencontrer", ou
dans *au moins* une situation que je peux envisager ou rencontrer".

On considère, à cet effet, un ensemble W de mondes, de situations, d'états du monde ou d'états d'esprit, liés par une relation, R, relation qui exprime l'accessibilité entre les mondes, situations, états du monde ou états d'esprit considérés.

4.4.2 Formalisme

On appelle "univers" ou "système de référence", un couple $<$W, $R>$, où

- W est un ensemble de mondes possibles,
- R est une relation d'accessibilité entre les mondes de W, telle que si w et w' sont des éléments de W, wRw' exprime que le monde w' est directement accessible depuis le monde w.

Si L est un ensemble de formules, une *interprétation* de L dans le système <W, R> est une fonction, i, de W$*L$ dans {Vrai, Faux} :

$$W*L \xrightarrow{\ i\ } \{\text{Vrai, Faux}\}.$$

Pour chaque monde w de W et pour chaque formule φ de L, la fonction d'interprétation, i, fournit la vérité de φ dans le monde w.

On note $w \models_i \varphi$, si et seulement si
la formule φ est vraie pour l'interprétation i dans le monde w, ou

$$w \models_i \varphi \iff i(w, p) = \text{Vrai}$$

et on lit $w \models_i \varphi$, comme
"φ est valide dans le monde w pour l'interprétation i".

On définit ensuite (en notant "ssi" pour "si et seulement si"),

1°) comme en logique classique :

$w \models_i p \wedge q$ ssi $w \models_i p$ et $w \models_i q$

$w \models_i p \vee q$ ssi $w \models_i p$ ou si $w \models_i q$ (ou les deux)

$w \models_i p \rightarrow q$ ssi on n'a pas $w \models_i p$ ou si $w \models_i q$ (ou les deux)

$w \models_i \neg p$ ssi on n'a pas $w \models_i p$.

2°) pour les opérateurs modaux :

$w \models_i \Box p$ ssi $\forall w' \in W \quad wRw' \Rightarrow w' \models_i p$

$w \models_i \Diamond p$ ssi $\exists w' \in W$ tel que wRw' et $w' \models_i p$.

Ces 2 dernières lignes expriment que

- $\Box p$ s'interprète à Vrai dans le monde w, si et seulement si
  p s'interprète à Vrai
  dans tous les mondes accessibles par R depuis w ;
- $\Diamond p$ s'interprète à Vrai dans le monde w, si et seulement si
  p s'interprète à Vrai
  dans au moins un monde accessible par R depuis w.

On peut, alors, établir les valeurs de vérité d'une formule quelconque par application de ces règles.

4.4.3 Exemple

Considérons un système de référence <W, *R*> et un ensemble *L* de formules propositionnelles :

W = {*aujourd'hui, demain*} noté : {*auj.*, *dem.*}

R = {(*auj.*, *dem.*), (*auj.*, *auj.*), (*dem.*, *dem.*)}

$L = \{p_1, p_2\}$.

avec — ce que l'on peut aussi noter :

$i(auj., \ p_1)$ = Vrai	$auj. \ \models_i \ p_1$
$i(auj., \ p_2)$ = Faux	$auj. \ \models_i \ \neg p_2$
$i(dem., p_1)$ = Faux	$dem. \models_i \ \neg p_1$
$i(dem., p_2)$ = Vrai	$dem. \models_i \ p_2$.

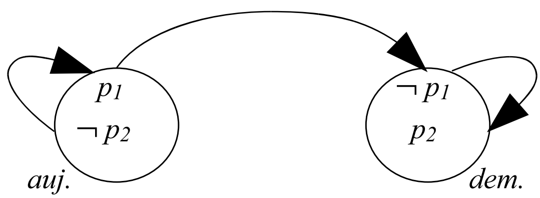
A-t-on : $auj. \ \models_i \Box p_1$?

$auj. \ \models_i \Diamond p_1$?

$dem. \models_i \Diamond p_1$?

et $p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$?

Solution : commençons par représenter l'univers {*auj.*, *dem.*} par le graphique ci-dessous



où l'arc  correspond à "*auj. R dem.*",
ce qui exprime que *demain* est accessible depuis *aujourd'hui*.

À partir de ce schéma, on peut répondre aux questions posées ci-dessus :

1) a-t-on $auj. \ \models_i \Box p_1$?

Réponse : depuis *aujourd'hui*, on a accès à *aujourd'hui* et à *demain*,

et $dem. \models_i \neg p_1$; on a donc un monde accessible depuis *aujourd'hui,*

où p_1 est faux. Ainsi, $auj. \models_i \Box p_1$ n'est pas vrai.

2) *auj.* $\models_i \Diamond p_1$?

Réponse : depuis *aujourd'hui*, on a accès à *aujourd'hui* et à *demain*, or *auj.* $\models_i p_1$; on a donc un monde accessible depuis *aujourd'hui* où p_1 est vrai ; ainsi, *auj.* $\models_i \Diamond p_1$ est valide.

3) *dem.* $\models_i \Diamond p_1$?

Réponse : depuis *demain*, on n'a accès qu'à *demain,*
or *dem.* $\models_i \neg p_1$, donc *dem.* $\models_i \Diamond p_1$ est faux.

4) $p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$?

Réponse : p_1 est vrai dans *aujourd'hui,* mais on n'a pas, d'après la réponse 3) ci-dessus, *dem.* $\models_i \Diamond p_1$; puisque *demain* est accessible depuis *aujourd'hui*, on n'a donc pas $\Box \Diamond p_1$.
L'implication ayant une prémisse vraie et une conclusion fausse n'est donc pas vraie dans le monde *aujourd'hui*. Même si elle vraie dans *demain,* puisque p_1 s'y évalue à faux, l'implication $p_1 \rightarrow \Box\Diamond p_1$, n'est pas toujours vraie dans la logique modale considérée.

4.4.4 Liens entre la relation d'accessibilité entre mondes et les axiomes formels

À une propriété particulière de la relation R d'accessibilité entre les mondes de W est souvent associé un des axiomes possibles ; cela facilite les méthodes de preuve au niveau sémantique.

La relation R peut être :

1°) réflexive : $\forall w \in W \quad w R w$
(tout monde est accessible depuis lui-même) ;

2°) symétrique : $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 R w_2 \Leftrightarrow w_2 R w_1$
(si w2 est accessible depuis w1, w1 est accessible depuis w2) ;

3°) reproductible : $\forall w \in W \quad \exists w' \in W \quad w R w'$;

4°) transitive : $\forall w_1, w_2, w_3 \in W \quad w_1 R w_2$ et $w_2 R w_3 \Rightarrow w_1 R w_3$;

5°) euclidienne : $\forall w_1, w_2, w_3 \in W \quad w_1 R w_2$ et $w_1 R w_3 \Rightarrow w_2 R w_3$;
...

On démontre qu'à chacune de ces propriétés correspond de manière biunivoque un axiome :

1°) à la réflexivité correspond l'axiome (T) $\Box p \to p$;

2°) à la symétrie correspond l'axiome (B) $p \to \Box \Diamond p$;

3°) à la reproductibilité correspond l'axiome (D) $\Box p \to \Diamond p$;

4°) à la transitivité correspond l'axiome (4) $\Box p \to \Box\Box p$;

5°) à "l'euclidianité" correspond l'axiome (5) $\Diamond p \to \Box \Diamond p$;

...

Cependant, il n'y a pas d'axiomes associés à certaines propriétés :

la non-réflexivité : $\forall w \in W \quad \neg (w R w)$;

l'anti-symétrie : $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 R w_2$ et $w_2 R w_1 \Rightarrow w_1 = w_2$;

l'asymétrie : $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 R w_2 \Rightarrow \neg (w_2 R w_1)$;

...

4.5 Principales classes de logiques modales

Nous ne considérons maintenant que

- des logiques aléthiques (nécessités/possibilités) ou
- des logiques épistémiques (croyances ou connaissances) ;

en effet,

- les logiques temporelles utilisent plusieurs modalités et seront vues ultérieurement,
- les logiques déontiques (devoirs, obligations) sont peu utilisées en informatique,
- les autres logiques modales ne sont quasiment pas utilisées en informatique.

4.5.1 Logiques aléthiques

Elles peuvent prendre en compte diverses nécessités :

- des nécessités logiques : $\Box (p \vee \neg p)$
- des nécessités physiques : $\Box$ (température > - 273°C).

Elles sont, en général, normales et sont construites à partir de

- la règle de nécessité : si $\vdash p$, alors $\vdash \Box p$
- l'axiome K : $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Deux logiques sont les plus courantes :

- S4 ou <u>KT4</u> d'après le nom de ses axiomes

  $\downarrow$

  d'où une relation R réflexive
  transitive

- S5 ou <u>KT45</u> d'après le nom de ses axiomes

  $\downarrow$

  $$\text{d'où une relation } R \left.\begin{array}{l}\text{réflexive}\\ \text{transitive}\\ \text{euclidienne}\end{array}\right\} \begin{array}{l} R \text{ est donc une équivalence}\\ \quad \text{et } R \text{ est symétrique.}\end{array}$$

4.5.2 Logiques épistémiques

On distingue les logiques

- des connaissances, où $\Box$ se note aussi K (*"Knowledge"*)
- des croyances, où $\Box$ se note aussi B ou Bel (*"Belief"*).

Ces logiques peuvent, de plus, être

- personnalisées (auto-épistémiques)
  "je sais", qui peut se noter K, ou
  "je crois", qui peut se noter Bel ;
- ou généralisées à des individus $x, y, z, \ldots$
  "x sait", qui peut se noter $\mathrm{K}x$;
  "x croit", qui peut se noter $\mathrm{Bel}x$.

a) Logiques des connaissances

Elles ne sont pas, en général, normales ; en effet, la règle de nécessité, RN, n'est pas valide :

$$\cancel{\text{si } \vdash p, \text{ alors } \vdash \Box p}$$

sauf si l'on prétend à l'omniscience, puisque cette règle signifierait que toute formule vraie est connue.

Généralement, on utilise les axiomes :

T $\Box p \to p$

4 $\Box p \to \Box\Box p$

5 $\Diamond p \to \Box \Diamond p$.

L'axiome T exprime que si l'on *sait p*, c'est que *p* est vrai.

L'axiome 4 exprime que si l'on *sait p*, on *sait* que l'on *sait p*.

L'axiome 5 exprime que si l'on *sait* que *p* est possible, on *sait* que l'on *sait* que *p* est possible
ou si l'on *ne sait pas* $\neg p$, on *sait* que l'on *ne sait* pas $\neg p$.

b) Logiques des croyances

Elles sont similaires aux logiques des connaissances, mais n'utilisent pas l'axiome T : ce n'est pas parce que l'on croit quelque chose que cette chose est nécessairement vraie, mais "si l'on croit quelque chose, on croit qu'il est possible de la croire" ($\Box p \to \Box \Diamond p$, ce que l'on pourrait déduire des axiomes D et 4).

4.6 Méthodes de preuve pour les logiques modales

Pour chaque logique modale, les méthodes de preuve peuvent changer, du fait d'axiomes différents, ce qui se traduit par des propriétés différentes de la relation d'accessibilité entre les mondes.

4.6.1 Méthodes syntaxiques

Elles utilisent les axiomes de la logique et le modus ponens, pour démontrer formellement une formule (souvent on cherche à démontrer que la négation de la formule débouche sur une contradiction).

Deux méthodes syntaxiques sont automatisables, la méthode des séquents et la méthode de résolution. Nous ne les étudierons pas ici, car elles effectuent des démonstrations mettant en jeu les axiomes, ce qui demande de bien connaître les logiques que l'on utilise et leurs théorèmes principaux.

Par exemple, une formule que l'on pourrait vouloir utiliser dans les démonstrations, telle $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ n'est généralement pas un théorème et ne peut être utilisée.

Nous leur préférons donc les méthodes sémantiques, à notre avis plus accessibles à des non-spécialistes de ces logiques et plus "parlantes".

4.6.2 Méthodes sémantiques

Elles considèrent la négation de la formule à démontrer et essayent de vérifier que, dans toutes les éventualités possibles, on aboutit à une contradiction ; dans ce cas, la négation de la formule étant contradictoire, la formule est une tautologie (démonstration dite "par l'absurde"). Ces méthodes utilisent les propriétés de la relation d'accessibilité.

Principe

On cherche à démontrer la contradiction dans le monde de départ, puis, pour les ensembles de formules qui restent sans contradiction, on se place dans des mondes particuliers, accessibles par la relation entre les mondes. Deux méthodes similaires sont disponibles, la méthode de Hughes et Cresswell et la méthode des arbres sémantiques.

C'est cette dernière que nous développons maintenant.

Méthode des arbres sémantiques en logique modale

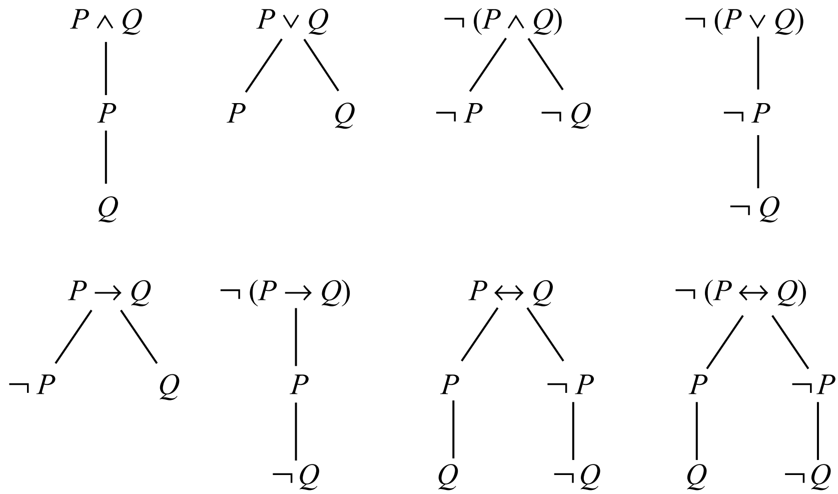
Cette méthode ne diffère pas dans son principe de celle que les auteurs anglais ou américains appellent "méthode des tableaux sémantiques" ; seule la présentation est différente.

Comme en logique classique, on considère la négation de la formule à démontrer et l'on cherche à mettre en évidence que, dans tous les cas possibles, on aboutit à une contradiction.

Les logiques modales considèrent en plus, si nécessaire, les mondes accessibles depuis un monde particulier (initialement, le monde courant, w_0).

1°) on écrit les unes au-dessous des autres les formules prémisses et le complément de la formule à prouver.

2°) on applique les mêmes règles de construction des graphes sémantiques qu'en logique des propositions pour les *opérateurs classiques* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$; ces règles sont rappelées ci-dessous :



On marque (ici par *) à gauche ou à droite, toute formule que l'on a décomposée, pour ne pas l'utiliser deux fois. Pour des raisons de densité d'écriture, on omet souvent les barres verticales.

3°) Dans les branches où l'on n'a pas abouti à une contradiction, on utilise les *formules modales* (celles qui comportent une modalité "en tête"), en considérant les mondes accessibles depuis le monde où on est placé (le monde courant).

• si la relation d'accessibilité est réflexive (axiome T : $\Box p \rightarrow p$), on écrit dans le monde courant :

$$\begin{array}{c} \Box p \\ | \\ p \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} \neg \Diamond p \\ | \\ \neg p \end{array} \quad (\text{ou } \Box \neg p\,)$$

(on ne marque pas les formules comme $\Box p$ et $\neg \Diamond p$, que l'on pourra utiliser ultérieurement, si l'on doit considérer des mondes accessibles depuis le monde dans lequel on s'est placé).

• s'il reste alors des branches sans contradiction, on considère pour ces branches, les mondes possibles associés aux formules $\Diamond p$ et $\neg \Box p$:

$$\begin{array}{c|c} w_i & \Diamond p \\ \hline w_i' & p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} w_i & \neg \Box p \\ \hline w_i'' & \neg p \end{array}$$

En effet,

- si, dans wi, on a $\Diamond p$, c'est qu'il y a au moins un monde wi', accessible depuis wi, où p est vraie ; on considère donc, alors, le monde wi'.

- si, dans wi, on a $\neg\Box p$, c'est qu'il y a au moins un monde wi", accessible depuis wi, où $\neg p$ est vraie ; on considère donc, alors, le monde wi".

***Dans les nouveaux mondes considérés*, ** wi' ou wi" :

- si la branche associée de wi contient des formules comme $\Box p$, on ajoute la formule p, puisque, si, dans wi, l'on a $\Box p$, dans tous les mondes accessibles depuis wi, p doit être vraie.

- si la branche associée de wi contient des formules comme $\neg\Diamond p$, on ajoute la formule $\neg p$, puisque si, dans wi, on a $\neg\Diamond p$, dans tous les mondes accessibles depuis wi, p doit être fausse.

De plus,

– si la relation d'accessibilité est transitive (ce qui correspond à l'axiome 4 : $\Box p \to \Box\Box p$), on ajoute aux mondes considérés :

  $\Box p$ s'il y a $\Box p$ dans wi, ou
  $\neg\Diamond p$ s'il y a $\neg\Diamond p$.

– si la relation d'accessibilité est symétrique (cas de la logique S5), on doit en plus "remonter" les formules $\Box p$ et $\neg\Diamond p$ dans les mondes "antérieurs" (et, en fait, dans tous les mondes adjacents).

4) On arrête l'algorithme :

– quand on a obtenu une contradiction dans toutes les branches de l'arbre : la formule initiale est alors démontrée.

– sinon, quand il reste des branches sans contradiction que l'on ne peut pas développer plus ; la négation de la formule n'est pas contradictoire : la formule n'est donc pas une tautologie ;

– enfin, si une branche boucle indéfiniment en considérant des suites de mondes identiques : la formule n'est pas non plus une tautologie.

Exemple

1) Pour déterminer la validité dans S4 de la formule

$$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$$

nous en considérons la négation :

$$\neg \{ \Box (p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q) \} \quad * \ (1)$$

$$\Box (p \wedge q) \quad * \quad (2) \text{ de } (1)$$

$$\neg (\Box p \wedge \Box q) \quad * \quad (3) \ \text{"} \quad \text{"}$$

monde initial : w0

(4)	$\neg \Box p$	$\neg \Box q$	(4')	(de 3)
	$p \wedge q$	$p \wedge q$	(5)	(de 2)
	p	p		(de 5)
	q	q		" "

Aucune contradiction n'apparaît dans w0 ; nous considérons alors un monde par branche :
w1' à gauche, associé à $\neg \Box p$ (4), donc où $\neg p$ est vrai (6 ci-dessous),
w2' à droite, associé à $\neg \Box q$ (4'), donc où $\neg q$ est vrai (6' ci-dessous),
et nous reportons la formule (2) : $\Box (p \wedge q)$, dans chacun de ces mondes.

	monde w1'			monde w2'	
(6)	$\neg p$		(6')	$\neg q$	
(7)	$\Box (p \wedge q)$	report de (2)	(7')	$\Box (p \wedge q)$	report de (2)
(8)	$p \wedge q$	de (7)	(8')	$p \wedge q$	de (7')
(9)	p	de (8)	(9')	p	de (8')
(10)	q	" "	(10')	q	" "
	$\perp$(6, 9)			$\perp$(6', 10')	

Dans chacune des branches, on aboutit à une contradiction : dans le monde w'1, la contradiction notée, $\perp(6, 9)$, entre les formules repérées par (6) et (9) et, dans le monde w'2, la contradiction, notée $\perp$(6', 10'), entre les formules repérées par (6') et (10').

Comme la négation de la formule est contradictoire dans tous les cas, la formule est prouvée.

2) Cherchons dans S4 puis dans S5 la validité de $p \rightarrow \Box \Diamond p$ *;*

A) Dans S4 : considérons la négation de cette formule :

w0	$\neg [p \rightarrow \Box \Diamond p]$ *	(1)
	p	(2) de (1)
	$\neg \Box \Diamond p$ *	(3) " "
	$\Diamond \neg \Diamond p$	(4) de (3)
w1	$\neg \Diamond p$	(5) de (4)
	$\neg p$	(6) de (5)

On ne peut pas aller plus loin : dans S4, la formule n'est pas une tautologie.

B) Dans S5, la relation d'accessibilité entre les mondes est réflexive, transitive et symétrique (et euclidienne). De *w1*, la formule $\neg \Diamond p$*,* identique à $\Box \neg p$*,* doit remonter dans *w0,* ce qui ajoute à *w0* la formule $\neg p$, contradictoire avec p (cf. l'arbre ci-dessous)

w0	$\neg [p \rightarrow \Box \Diamond p]$ *			
	p	$\neg \Diamond p$	$\neg p$	$\perp$
	$\neg \Box \Diamond p$ *			
	$\Diamond \neg \Diamond p$			
w1	$\neg \Diamond p$			
	$\neg p$			

La négation de la formule est contradictoire; la formule est donc une tautologie.

On constate, sur cet exemple, que des formules qui ne sont pas des théorèmes de S4, peuvent être des théorèmes de S5. Cependant, tous les théorèmes de S4 sont aussi des théorèmes de S5 : les propriétés de la relation d'accessibilité entre les mondes de S5 sont celles de S4, plus la symétrie (w0 *R* w1 $\Leftrightarrow$ w1 *R* w0).

4.7 Conclusions

Les logiques modales offrent un grand choix d'axiomes, permettant de traduire "au plus près" les propriétés des systèmes que l'on souhaite formaliser (les "modèles" selon la terminologie des logiciens).

La sémantique des mondes possibles est très intéressante, puisqu'elle permet de mieux visualiser la signification des formules ; son utilisation dans la méthode de preuve des arbres sémantiques permet assez facilement à un non-spécialiste de ces logiques d'évaluer des formules modales, en utilisant les propriétés de la relation d'accessibilité entre les mondes, propriétés généralement associées aux axiomes.

Les applications des logiques modales sont nombreuses : en plus des logiques aléthiques et des logiques épistémiques que nous avons évoquées, des logiques temporelles modales que nous détaillerons par la suite, elles se généralisent dans les logiques dynamiques.

Les logiques dynamiques sont des logiques modales particulières ; elles permettent l'évaluation des programmes par l'utilisation de modalités traduisant les conséquences d'actions : si une formule propositionnelle p est vraie dans tous les cas après l'action α, on écrit $[\alpha]\ p$, si elle est vraie après la suite d'actions α puis β, on écrit $[\alpha\ ;\ \beta]\ p$. Si p est vraie après exécution en parallèle de α et β, on note $[\alpha\ \&\ \beta]\ p$, si c'est après l'exécution d'un nombre quelconque de fois α, on écrit $[\alpha^*]\ p$ et si p est vraie après l'une des 2 actions α ou β, choisie de manière non déterministe, on écrit $[\alpha \cup \beta]\ p$. La complexité de ces logiques, qui combinent des opérateurs logiques et des connecteurs temporels entre les actions, nous interdit de les détailler ici, mais l'étude des logiques temporelles modales permettra d'en entrevoir les principes.

Outre les raisonnements temporels, les logiques modales permettent de modéliser des raisonnements géométriques dans le plan ou dans l'espace sous la forme de *logiques spatiales* ; elles contribuent également au *raisonnement intuitionniste*, pour lequel les raisonnements par l'absurde ne sont pas valides en ce qu'ils permettent d'établir l'existence d'entités particulières, mais ne permettent pas de trouver ces entités.

Nous n'avons pas abordé non plus les *logiques modales prédicatives*, en raison de leur complexité ; ces logiques font porter les modalités sur des formules de la logique des prédicats (d'ordre un), plutôt que sur des formules purement propositionnelles.

Nous devons cependant mentionner un axiome, souvent utilisé dans ces logiques, désigné du nom de "formule de Barcan" :

$$\forall X \Box p \ \rightarrow \ \Box \forall X p \ ;$$

cette formule exprime que

"Si quelque soit X, il est nécessaire que p soit vrai,
alors il est nécessaire que, quelque soit X, p soit vrai".

La réciproque de cette formule peut aussi être utilisée :

$$\Box \forall X p \rightarrow \ \forall X \Box p \ ;$$

elle exprime que

"S'il est nécessaire que quelque soit X, p soit vrai,
alors, quelque soit X, il est nécessaire que p soit vrai".

Ces logiques modales prédicatives posent des problèmes qui leur sont spécifiques : les individus ou les entités que l'on symbolise sont-ils identiques d'un monde à l'autre ? Et les mêmes individus possèdent-ils les mêmes noms ? Dans les logiques des connaissances cela n'est pas évident : si je sais qu'un individu a un certain statut et si je connais les fonctions associées à ce statut, si je ne sais pas le nom de cette personne, je ne peux associer à ce nom les fonctions que je connais pourtant…

4.8 Exercices

(*Corrigés page 157*)

1) Quelle est la validité dans S4 de la formule $p \rightarrow \Box \Diamond p$?
Et dans S5 ?

2) Quelle est la validité dans S4 de la formule $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$?
Et dans S5 ?

3) Quelle est la validité dans S4 de $\neg p \rightarrow \neg \Diamond \Box p$?
Et dans S5 ?

4) Déterminez, par la méthode des arbres sémantiques, la validité dans S4 des formules :

a) $\Box p \rightarrow p$;

b) $p \rightarrow \Box p$;

c) $\Box(p \vee \neg p)$;

d) $\Box \neg p \rightarrow \neg \Diamond p$;

e) $\Box(\Box p \vee \neg \Diamond p)$;

f) $\neg \Box \neg (p \vee \Box \neg \Box p)$;

g) $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$;

h) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$;

i) $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$;

j) $\Box(\Box p \vee \Diamond \neg p)$; qu'exprime cette formule dans le cas d'une logique aléthique ?

k) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box q)$;

l) $\Box \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond \Box \Diamond p$;

m) $\Box[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)]$;

n) $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box(\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$;

o) $\Box[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(p \rightarrow r)]$;

p) $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$.

Chapitre 5

Logiques Temporelles

5.1 Généralités

Les logiques temporelles ont été conçues pour prendre en compte le fait que, dans le monde réel, les valeurs de vérité de certaines formules peuvent être différentes à des instants différents.

Il est alors nécessaire de distinguer

- Les faits ou propriétés (statiques) :
  "le programme est défectueux".
- Les évènements (pour lesquels un comptage est possible) :
  "l'exécution du programme a été interrompue".
- Les processus (qui nécessitent une durée) :
  "l'ordinateur est en train de compiler".

Différentes propriétés du temps sont envisageables :

- le temps peut être discret (dans le cas de processus évoluant par étapes) ou continu ;
- il peut avoir ou non une origine ("l'origine des temps") ;
- le temps peut être fini (avec une "fin des temps") ou infini ;
- il peut être réversible ou irréversible (ce dernier cas étant le plus fréquent !) ;
- il peut être aussi linéaire ou ramifié (c'est-à-dire avec différentes éventualités), dans le futur et/ou dans le passé.

On distingue deux grandes classes de logiques temporelles :

- les logiques temporelles avec datation ou avec réification du temps,
- les logiques temporelles modales.

1) logiques temporelles avec datation ou avec réification du temps

Dans le cas d'une *datation*, le temps est considéré comme une entité, que l'on ajoute comme argument aux prédicats.
Par exemple :

départ(*train123, 12h30*), *il_a_plu*([*20h, 22h*]) …

Pour la *réification du temps*, on utilise des méta-prédicats, qui expriment la vérité dans le temps des formules (composées de propositions ou prédicats non datés).
Par exemple :

Vrai(*départ*(*train123*), *12h30*), *Faux*(*il_a_plu,* [*20h, 22h*]) …

Ces deux usages du temps sont à peu près équivalents.

Nous considérerons plutôt des formules avec datation, proches des notations des physiciens et plus simples, bien que l'utilisation des méta-prédicats soit plus proche des habitudes des logiciens.

On distingue aussi

- *la datation par points* : le temps est représenté par une date choisie dans un ensemble T et associée à chaque proposition ou prédicat. On peut utiliser des logiques du premier ordre ou du deuxième ordre, suivant les propriétés voulues pour le temps.

  On peut alors considérer le temps comme linéaire ou ramifié et lui attribuer un caractère discret ou continu.

- *la datation par intervalles* : à chaque proposition ou prédicat est associé un intervalle de datation (dont la durée peut être nulle et coïncider alors avec un point).

2) logiques temporelles modales

Les logiques temporelles modales utilisent des *opérateurs modaux* pour traduire les propriétés temporelles des propositions. On distingue plusieurs types de modalités temporelles, correspondant aux diverses logiques avec datation.

. les modalités temporelles par points

Elles permettent d'utiliser des opérateurs vers le futur :

$\square$ ou G : il est vrai et il sera toujours vrai que …
$\Diamond$ ou F : il est vrai ou il sera vrai que …

et des opérateurs vers le passé :

H : il s'est toujours trouvé que …
P : il s'est trouvé dans le passé que…

On distingue de plus, des opérateurs modaux *linéaires* et des opérateurs modaux *arborescents*.

. les modalités temporelles par intervalles

Les opérateurs modaux qu'elles utilisent expriment des relations entre intervalles temporels et un intervalle courant représente le présent.

Après ce rapide tour d'horizon des principaux types de logiques temporelles, nous allons examiner ces logiques plus en détail.

5.2 Logiques temporelles avec datation

5.2.1 Datation par points

a) Généralités

On définit un *cadre temporel* (ou structure temporelle) comme un couple $< T, R >$ où
- T, ensemble non vide, est l'ensemble des dates,
- R, relation d'arité 2 sur T, est une relation de précédence entre dates.

Pour représenter les propriétés intuitives du temps,
on pose souvent que :

$\forall t_1, t_2 \in T \qquad t_1 \neq t_2 \rightarrow \neg (t_1 R\, t_2 \wedge t_2 R\, t_1)$ (asymétrie)

$\forall t_1, t_2, t_3 \in T \qquad t_1 R\, t_2 \wedge t_2 R\, t_3 \rightarrow t_1 R\, t_3$ (transitivité).

R est donc une *relation d'ordre*

- *strict* si $\forall t \in T \;\; \neg\, t R t$ (non-réflexivité) ;
- *simple* si $\forall t \in T \;\; t R t$ (réflexivité)
  et si $\forall t_1, t_2 \in T \;\; (t_1 R\, t_2) \wedge (t_2 R\, t_1) \rightarrow t_1 = t_2$ (antisymétrie).

On note généralement la relation R par le symbole $\leq$ pour un ordre simple et par $<$ pour un ordre strict.

L'ensemble T peut être quelconque : ce peut être un ensemble de symboles ou de valeurs, ou l'un des ensembles arithmétiques *N*, *Z*, *Q*, *R.* Ce peut aussi être *un treillis*, c'est-à-dire un ensemble non totalement ordonné, dans lequel deux dates ne sont pas toujours comparables ($\exists t_1, \exists t_2 \in T : \neg (t_1 \mathrm{R}\ t_2) \wedge \neg (t_2 \mathrm{R}\ t_1)$), mais dans lequel deux dates quelconques ont toujours une borne inférieure et une borne supérieure.

b) Propriétés possibles d'un cadre temporel

Remarque : ces propriétés pourront être parcourues rapidement. Nous ne pouvions pas ne pas présenter leurs traductions mathématiques, mais ces traductions ne sont pas indispensables à la compréhension et à l'utilisation des logiques temporelles : elles s'adressent aux lecteurs qui voudraient "aller plus loin".

1°) la linéarité

- on a un ordre total ou linéaire

si deux dates quelconques peuvent être ordonnées, l'une par rapport à l'autre :

$\forall t_1, t_2 \in T \quad (t_1 \leq t_2) \vee (t_2 \leq t_1)$

ou $\forall t_1, t_2 \in T \quad t_1 \neq t_2 \rightarrow (t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1)$;

- on a un ordre linéaire à gauche

si, pour toute date t_1, tous celles qui la précèdent sont totalement ordonnées :

$\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad [(t_2 < t_1) \wedge (t_3 < t_1)] \rightarrow [(t_2 = t_3) \vee (t_2 < t_3) \vee (t_3 < t_2)]$

ou $\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad [(t_2 \leq t_1) \wedge (t_3 \leq t_1)] \rightarrow [(t_2 \leq t_3) \vee (t_3 \leq t_2)]$;

dans ce cas, le futur peut être ramifié.

- on a un ordre linéaire à droite

si, pour toute date t_1, tous celles qui la suivent sont totalement ordonnées :

$\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad [(t_1 < t_2) \wedge (t_1 < t_3)] \rightarrow [(t_2 = t_3) \vee (t_2 < t_3) \vee (t_3 < t_2)]$

ou $\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad [(t_1 \leq t_2) \wedge (t_1 \leq t_3)] \rightarrow [(t_2 \leq t_3) \vee (t_3 \leq t_2)]$;

dans ce cas, le passé peut être ramifié.

2°) le temps peut être fini ou non

- existence d'un début des temps :

il y a un début des temps (t_0), si et seulement si

$\exists t_0 \in T \quad \forall t \in T \;\; (t \neq t_0) \rightarrow \;(t_0 < t) \qquad$ (ou $\;\; \exists t_0 \in T \quad \forall t \in T \;\; t_0 \leq t$) ;

- existence d'une fin des temps :

il y a une fin des temps (t_F) si et seulement si

$\exists t_F \in T \; \forall t \in T \; (t \neq t_F) \rightarrow (t < t_F) \qquad$ (ou $\; \exists t_F \in T \quad \forall t \in T \;\; t \leq t_F$) ;

- il y a éternité à gauche

s'il n'y a pas de début des temps, donc
si tout élément de T a un au moins un prédécesseur :

$\forall t \in T \;\; \exists t' \in T \;\; (t \neq t') \wedge \;(t' < t) \qquad$ (ou $\; \forall t \in T \quad \exists t' \in T \;\; t' < t$) ;

- il y a éternité à droite

s'il n'y a pas de fin des temps, donc,
si tout élément de T a au moins un successeur :

$\forall t \in T \;\; \exists t' \in T \; (t \neq t') \wedge \;(t < t') \qquad$ (ou $\;\; \forall t \in T \quad \exists t' \in T \;\; t < t'$).

3°) Propriétés de compacités (propriétés locales)

- densité :

un cadre temporel est dense, si et seulement si, entre deux dates différentes, il y en toujours une troisième :

$$\forall t_1, t_2 \in T \quad (t_1 < t_2) \;\rightarrow\; \exists t_3 \in T \;\; [(t_1 < t_3) \wedge (t_3 < t_2)]$$

- discrétion :

un cadre temporel est *discret à droite*, si toute date t_1 qui a des successeurs a un plus petit successeur :

$\forall t_1 \in T \; (\exists t_2 \in T \; t_1 < t_2) \rightarrow \; \exists t_3 \in T \; [(t_1 < t_3) \wedge \neg \, \exists t_4 \in T \; (t_1 < t_4 \;\wedge\; t_4 < t_3)]$

un cadre temporel est *discret à gauche*, si toute date t_1 qui a des prédécesseurs a un plus grand prédécesseur :

$\forall t_1 \in T \; (\exists t_2 \in T \; t_2 < t_1) \rightarrow \; \exists t_3 \in T \; [(t_3 < t_1) \wedge \neg \, \exists t_4 \in T \; (t_3 < t_4 \wedge t_4 < t_1)]$.

un cadre temporel *discret* est, à la fois, discret à droite et à gauche.

Exemple d'utilisation de ces propriétés

pour modéliser une séquence de traitements informatiques, on utilise souvent un temps linéaire discret avec un début des temps et on cherche à prouver l'existence d'une fin des temps, l'arrêt du programme.

- complétude :

dans le cas d'un cadre temporel avec ordre total, il y a complétude, si, quand une proposition, *p,* quelconque, change de valeur de vérité, il existe un dernier instant pour la première valeur de vérité ou un premier instant pour la deuxième valeur.

Cela s'exprime sous une forme intuitive par l'énoncé ci-dessous :

pour toute proposition p, si p précède $\neg p$,

alors p a un dernier instant

ou $\neg p$ a un premier instant ;

c'est à dire, formellement, en rendant implicite l'appartenance des dates à l'ensemble T :

$$\forall \boldsymbol{p} \ [\exists t\, p(t) \wedge \exists t' \neg p(t') \wedge (t < t')] \rightarrow$$
$$\big([\exists t_1 (t_1 \geq t) \wedge p(t_1) \wedge \{\forall t_2 (t_2 \geq t \wedge p(t_2)) \rightarrow (t_2 < t_1)\}]$$
$$\vee [\exists t_1 (t_1 \leq t') \wedge \neg p(t_1) \wedge \{\forall t_2 (t_2 \leq t' \wedge \neg p(t_2)) \rightarrow (t_1 < t_2)\}] \big)$$

C'est *une propriété d'ordre 2*, puisque le premier quantificateur porte sur une proposition (cela pourrait être un prédicat), mais elle est importante, car elle caractérise R, l'ensemble des nombres réels, qui admet un ordre continu : total, dense, complet, sans début ni fin.

- bon ordre :

un ordre total est un bon ordre si toute partie non vide possède un plus petit élément, ce que l'on peut traduire pour le temps par :

$$\forall p\ \exists t\ \ p(t) \rightarrow \{\ \exists t_0\, p(t_0)$$
$$\wedge [\forall t_2\ \{p(t_2) \wedge \neg \exists t_1 (t_2 < t_1 \wedge t_1 < t_0 \wedge \neg p(t_1))\} \rightarrow (t_2 \geq t_0)]\ \},$$

c'est-à-dire que toute proposition, *p,* vraie à un instant t, l'est devenue à partir d'un instant initial t_0 bien précis. C'est le cas quand T = N, l'ensemble des nombres entiers naturels ; cette propriété est à la base des raisonnements par récurrence. La condition entre crochets exprime que toute éventuelle date t_2, se situant par rapport à t_0 dans un intervalle où p est vraie continuellement, ne peut être antérieure à t_0.

On dit, dans ce cas, que le cadre temporel est bien ordonné.

5.2.2 Datation par intervalles

Principe

Dans un cadre temporel (T, <), où < représente un ordre strict, on appelle *intervalle* tout couple $(g, d) \in T*T$, tel que $g < d$.

On appelle I, l'ensemble de tous les intervalles possibles, et on associe à chaque proposition *p,* l'ensemble des intervalles où elle est vérifiée.

Pour un intervalle i de I, la notation *p*(i) exprime que la proposition *p* est vraie dans tout l'intervalle i.

Relations primitives entre intervalles

- précédence (<) :

i_1 précède i_2, si tout point de i_1 précède tout point de i_2 ;

- chevauchement (o, overlap) :

i_1 et i_2 se chevauchent s'ils ont une partie commune ;

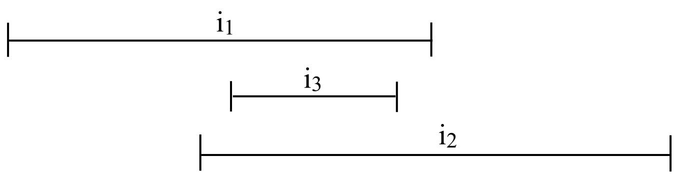
- inclusion ($\subseteq$) :

i_1 est inclus dans i_2 si tout point de i_1 appartient à i_2 ;
c'est un cas particulier de chevauchement.

Liens entre le chevauchement et l'inclusion

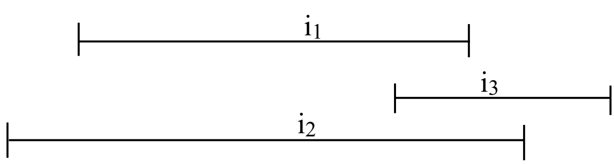
- i_1 et i_2 se chevauchent, si et seulement si, il existe un intervalle i_3 contenu dans i_1 et i_2 :

$$i_1 \text{ o } i_2 \leftrightarrow \exists i_3 \in I \ (i_3 \subseteq i_1) \wedge (i_3 \subseteq i_2)$$



- i_1 est inclus dans i_2, si et seulement si, tout intervalle i_3 se chevauchant avec i_1 se chevauche aussi avec i2 :

$$i_1 \subseteq i_2 \leftrightarrow \forall i_3 \in I \quad i_3 \text{ o } i_1 \rightarrow i_3 \text{ o } i_2$$



Comme pour la logique réifiée par points, on étudie les propriétés possibles des intervalles. On définit également des opérateurs entre intervalles : l'intersection, l'union…

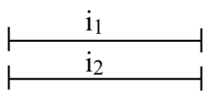
Plusieurs logiques d'intervalles généralisent ces opérateurs, en particulier celle d'Allen, celle de Mac Dermott et celle de Shoham. Nous nous limiterons ici à un résumé de la logique d'Allen, qui est un exemple de logique avec réification du temps sous forme d'intervalles.

La logique d'intervalles proposée par Allen

1) Allen considère **13 relations possibles entre deux intervalles :**

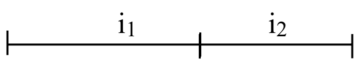
- l'identité :	=					
- plus 6 relations :	<	m	o	d	e	s
- et leurs transposées :	>	m^t	o^t	d^t	e^t	s^t

On peut représenter les 7 premières par les schémas ci-dessous :

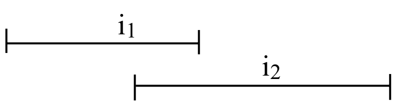


$i_1 = i_2$

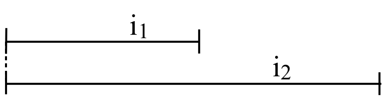
$i_1 < i_2$



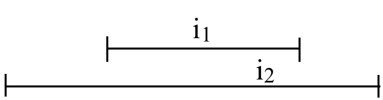
i_1 *m* i_2 (<u>m</u>eets : rencontre)



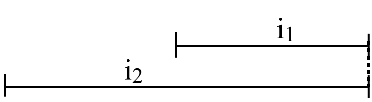
i_1 o i_2 (<u>o</u>verlaps : chevauche)



i_1 *s* i_2 (<u>s</u>tarts : débute)



i_1 *d* i_2 (<u>d</u>uring : pendant)



i_1 *e* i_2 (<u>e</u>nds : termine)

2) **Un système temporel d'Allen** utilise ces relations et des axiomes sur ces relations ; Allen distingue

• **les propriétés**

HOLDS(p, i), est vrai
si la propriété p est vraie pendant un intervalle i,
et seulement si,
sur tout intervalle $j \subset i$, HOLDS(p, j) est vrai ;

HOLDS($p \wedge q$, i) est vrai
si HOLDS(p, i) et HOLDS(q, i) sont vérifiés ;

HOLDS($\neg\, p$, i) est vrai
si HOLDS(p, j) est faux pour tout intervalle $j \subset i$.

• **les évènements**

OCCURS(e, i) exprime
que l'événement e survient pendant l'intervalle i ;
l'événement e doit couvrir la totalité de l'intervalle i :

$$\forall j \;\; j \subset i \rightarrow \neg \text{ OCCURS}(e, j)$$

• **les processus**

OCCURING(P, i) exprime
qu'un processus P se déroule pendant l'intervalle i ;
OCCURING(P, i) est vrai si P se déroule sur i,
même sans être actif sur tous les sous-intervalles.

• **la causalité** est exprimée par deux prédicats :

ECAUSE(e1, i_1, e2, i_2) exprime que l'évènement e1,
survenant pendant i1,
est la cause de l'événement e2 survenant pendant i2
(i2 ne peut pas précéder i1).

ACAUSE(a, e) exprime que
l'agent a est cause de l'événement e ;

ACAUSE(a, P) exprime que
l'agent a est cause du processus P.

5.3 Logiques temporelles modales

Elles ignorent les datations, mais représentent les relations entre les repères temporels (dates ou intervalles). On dispose de *logiques modales de points* et de *logiques modales d'intervalles*, similaires aux logiques modales avec datation ou réification du temps.

Parmi les logiques modales de points on distingue :

- les logiques temporelles linéaires
  (*LPTL* : *linear point temporal logics*),
- les logiques temporelles arborescentes
  (*APTL* : *arborescent point temporal logics*).

5.3.1 Logiques temporelles modales linéaires et continues

Ces logiques, initialement conçues par A. Prior, sont parfois appelées "Tense Logics" ;
elles utilisent généralement quatre modalités :

G et F pour le futur
H et P pour le passé

Gp exprime que toujours dans le futur, la formule p sera vraie,
Fp exprime qu'il arrivera dans le futur, que la formule p soit vraie.
Hp exprime que toujours dans le passé, la formule p a été vraie,
Pp exprime qu'il est arrivé dans le passé, que la formule p soit vraie.

Si l'on considère le futur,
un système temporel modal comporte au moins

- la règle de nécessité : si $\vdash p$, alors $\vdash Gp$
  (tout théorème est une vérité éternelle !)
- l'axiome K faible : $G(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg G\neg p \rightarrow \neg G\neg q)$
  ou $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Fp \rightarrow Fq)$
- l'axiome 4 (transitivité) : $Gp \rightarrow GGp$;

on peut souvent ajouter l'axiome K : $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$ et considérer alors des systèmes normaux.

Si l'on choisit une relation d'accessibilité entre instants qui est un ordre partiel (≤) on ajoute :

$Gp \rightarrow p$ (axiome T) et
$Gp \rightarrow GGp$ (axiome 4).

On retrouve alors les axiomes de la logique modale S4, auxquels il faut ajouter l'antisymétrie de la relation d'accessibilité (le temps est irréversible), ce qui n'est pas traduisible par un axiome.

On démontre que la logique modale S5 est trop forte pour une logique temporelle et, donc, qu'une logique temporelle modale usuelle se place entre S4 et S5.

Si l'on considère le passé,

on a les mêmes relations avec la modalité H :

- la règle de nécessité : si $\vdash p$, alors $\vdash Hp$
- l'axiome K faible : $H(p \to q) \to (Pp \to Pq)$

  ou l'axiome K : $H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$
- l'axiome T : $Hp \to p$
- l'axiome 4 (transitivité) : $Hp \to HHp$

Des axiomes lient passé, présent et futur :

$$p \to HFp$$

(si p est vraie à présent, vue de toute date passée, elle sera vraie) ;

$$p \to GPp$$

(si p est vraie à présent, vue de toute date future, elle a été vraie).

De plus,

- si la relation d'ordre est totale (ou linéaire), on ajoute :

$$Fp \wedge Fq \to [F(p \wedge Fq) \vee F(Fp \wedge q) \vee F(p \wedge q)]$$

(*de 2 événements futurs, ou l'un précédera l'autre, ou ils surviendront en même temps*) ;

$$Pp \wedge Pq \to [P(p \wedge Pq) \vee P(Pp \wedge q) \vee P(p \wedge q)]$$

(*de 2 événements passés, ou l'un a précédé l'autre, ou ils sont survenus en même temps*) ;

- si l'on considère une origine des temps :

$$H\bot \vee PH\bot$$

(*il a existé un instant t0 pour lequel $H\bot$ est vérifié, c'est-à-dire qu'aucun instant n'a précédé t0*) ;

- si l'on considère une fin des temps :

$$G\bot \vee FG\bot$$

(*il existera un instant tF pour lequel $G\bot$ est vérifié, c'est-à-dire qu'aucun instant ne suivra tF*) ;

- si le système est dense (et continu), on doit ajouter :

$$Fp \to FFp$$

$$Pp \to PPp.$$

Remarques

1°) On peut faire correspondre les modalités temporelles à des datations :

$Gp \equiv \forall t\ [\ t > t_{now} \rightarrow p(t)\ ]$ ou $Gp \equiv \forall t\ [\ t \geq t_{now} \rightarrow p(t)\ ]$

$Fp \equiv \exists t\ [\ t > t_{now}\ \wedge\ p(t)\ ]$ ou $Fp \equiv \exists t\ [\ t \geq t_{now}\ \wedge\ p(t)\ ]$

$Hp \equiv \forall t\ [\ t < t_{now} \rightarrow p(t)\ ]$ ou $Hp \equiv \forall t\ [\ t \leq t_{now} \rightarrow p(t)\ ]$

$Pp \equiv\ \exists t\ [\ t < t_{now}\ \wedge\ p(t)\ ]$ ou $Pp \equiv\ \exists t\ [\ t \leq t_{now}\ \wedge\ p(t)\ ]$

2°) On considère parfois deux opérateurs dyadiques (c'est-à-dire à deux opérandes), U (until : jusqu'à) et S (since : depuis), entre deux propositions p et q :

- $p\,U\,q$, noté parfois $Up\,q$ ou $U(p, q)$, exprime que "p sera vrai depuis l'instant présent,
  jusqu'à une date où q sera vrai" (ou q est déjà vrai).
- $p\,S\,q$, noté parfois $Sp\,q$ ou $S(p, q)$, exprime que "p a été vrai jusqu'à l'instant présent
  ou depuis une date ou q était vrai" (ou q est encore vrai).

On peut alors définir les opérateurs F et P à partir de S et U:

$Fp \equiv (p \vee \neg\, p)\, Up\ = \top\, Up$ et

$Pp \equiv (p \vee \neg\, p)\, Sp\ = \top\, Sp$

(où le symbole $\top$ désigne la tautologie).

Ces opérateurs permettent d'exprimer des relations temporelles entre formules, relations qui ne peuvent pas s'exprimer uniquement avec les modalités *F, G, P, H.* Dans ce cours d'introduction, nous ne détaillerons pas plus ces opérateurs ; des exercices offriront la possibilité de les utiliser.

3°) On utilise parfois une autre modalité J (*"Jetzt"*, c'est-à-dire *"maintenant"* en Allemand) qui exprime qu'une formule est vraie à l'instant présent : *"Jp"* se lit *"p est vrai maintenant"*. Sauf ambiguïté, nous simplifierons les formules, en écrivant plutôt *"p",* si p est vrai à l'instant présent.

5.3.2 Logiques temporelles modales linéaires et discrètes

On y considère le temps comme une succession d'instants discrets ; on peut traduire la discrétion par un axiome exprimant que si p a toujours été vraie et si, dans le futur, p devient fausse, il y aura un instant unique où p changera de valeur de vérité, instant jusqu'où p aura toujours été vraie, avec un axiome similaire pour le passé :

$p \wedge Hp \rightarrow FHp$ et $p \wedge Gp \rightarrow PGp$.

On considère souvent, dans ce cas, un opérateur modal o (appelé "next"), tel que op est vrai si et seulement si p est vrai à l'instant suivant. Cet opérateur s'écrit parfois avec X ou N au lieu de o.

Propriétés de l'opérateur o :

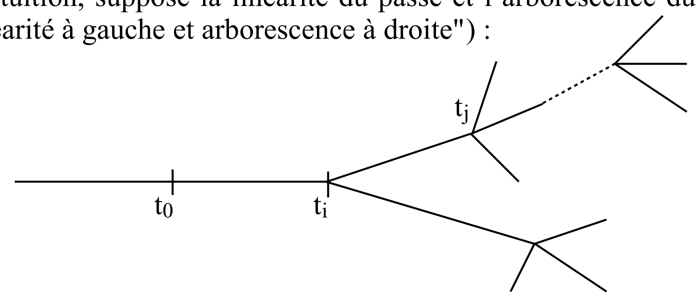
- $Gp \rightarrow op$
(si p sera toujours vrai dans le futur, p sera vrai à l'instant suivant),
- $op \rightarrow Fp$
(si p sera vrai à l'instant suivant, p sera vrai à une date future),
- $o\,p \equiv \neg\, o \neg\, p$ (logique linéaire : il y a un seul futur),
- $o\,(p \rightarrow q) \rightarrow (o\,p \rightarrow o\,q)$ (axiome K),
- $Gp \rightarrow (p \wedge op \wedge Gop)$ (propriété dite d'induction),
- $G(p \rightarrow op) \rightarrow (p \rightarrow Gp)$.

On démontre les théorèmes suivants :

$o\,(p \wedge q) \equiv (o\,p \wedge o\,q)$;
$G\,(p \wedge q) \equiv (G\,p \wedge G\,q)$;
$G\,p \vee G\,q \rightarrow G(p \vee q)$;
$o\,(p \vee q) \rightarrow (o\,p \vee o\,q)$;
$G\,p \equiv (p \wedge o\,G\,p)$;
$G\,o\,p \equiv o\,G\,p$.

5.3.3 Logiques temporelles modales arborescentes

Parmi ces logiques, la plus simple et celle qui correspond le mieux à l'intuition, suppose la linéarité du passé et l'arborescence du futur ("linéarité à gauche et arborescence à droite") :



- t_0 (ou t_{now}) désigne l'instant présent ;

- on considère qu'à certains instants tels t_i ou t_j,
plusieurs éventualités (ou bifurcations) sont possibles.

Une formule *Fp,* énoncée en t_0, peut se lire alors de deux manières différentes, exclusives l'une de l'autre :

1 *Fp* est vraie en t_0,
parce qu'il y a **au moins un chemin du futur** où *p* sera vraie.

2 *Fp* est vraie en t_0,
parce que, **dans tout chemin futur de l'arbre,** à partir de t_0, il y aura un moment où *p* sera vraie.

Deux opérateurs distincts apparaissent donc nécessaires :

$$\exists F \quad \text{et} \quad \forall F,$$

et l'on écrit

• $\exists Fp$ si et seulement si,
il existe au moins un chemin dans le futur, où *p* sera vraie ;

• $\forall Fp$ si et seulement si,
dans tout chemin du futur, il arrivera un moment où *p* sera vraie.

On peut alors poser les définitions de $\forall G$ et $\exists G$:

$\forall Gp \equiv \neg \exists F \neg p$ (*Gp* est vrai dans toutes les branches)

$\exists Gp \equiv \neg \forall F \neg p$ (*Gp* est vrai dans au moins une branche).

Pour considérer un temps discret, on ajoute les opérateurs $\exists$o et $\forall$o, caractéristiques de l'état suivant et de ses éventualités.

On peut alors utiliser comme axiomes :

(1) si $\vdash p$, alors $\vdash \forall G\, p$;

(2) $\forall G\,(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall G\, p \rightarrow \forall G\, q)$ axiome K sur $\forall G$;

(3) $\forall o\,(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall o\, p \rightarrow \forall o\, q)$ axiome K sur $\forall o$;

(4) $\forall G\, p \rightarrow (p \wedge \forall o\, p \wedge \forall G\, \forall o\, p)$;

(5) $\forall G\,(p \rightarrow \forall o\, p) \rightarrow (p \rightarrow \forall G\, p)$ ou induction 1 ;

(6) $\forall G\,(p \rightarrow q) \rightarrow (\exists G\, p \rightarrow \exists G\, q)$;

(7) $G p \rightarrow (p \wedge o\, G\, p)$;

(8) $\forall G\, p \rightarrow \exists G\, p$;

(9) $\forall G\,(p \rightarrow \exists o\, p) \rightarrow (p \rightarrow \exists G\, p)$ ou induction 2.

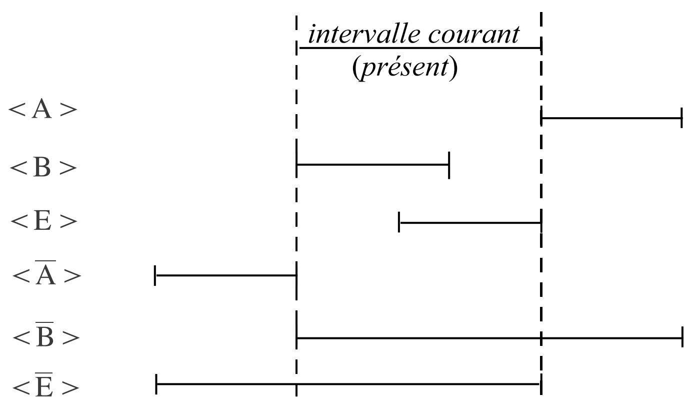
On peut également envisager une arborescence vers le passé en définissant des opérateurs $\forall P$, $\exists P$, $\forall H$, $\exists H$ et en utilisant des axiomes similaires à ceux énoncés ci-dessus.

5.3.4 Logiques modales d'intervalles linéaires

Par analogie avec les logiques temporelles réifiées par intervalles, on peut définir trois paires d'opérateurs modaux (nous choisissons ici les opérateurs proposés par Shoham) :

- $< A >$: durant un intervalle commençant immédiatement après l'intervalle courant (*After*).
- $< B >$: durant un intervalle inclus dans l'intervalle courant et débutant avec lui (*Begins*).
- $< E >$: durant un intervalle inclus dans l'intervalle courant et finissant avec lui (*Ends*).
- $< \overline{A} >$: durant un intervalle se terminant avec l'intervalle courant.
- $< \overline{B} >$: durant un intervalle dont l'intervalle courant est au début.
- $< \overline{E} >$: durant un intervalle dont l'intervalle courant est à la fin.

On peut représenter ces opérateurs par le schéma ci-dessous :



Avec ces opérateurs, on définit :

$<D> = <B>\ <E>$: dans un intervalle inclus dans l'intervalle courant (*During*) ;

$<L> = <A>\ <A>$: dans un intervalle après l'intervalle courant (*Later*) ;

$<O> = <E>\ <\overline{B}>$: dans un intervalle futur chevauchant l'intervalle courant (*Overlapping*) ;

$<\overline{D}> = <\overline{B}>\ <\overline{E}>$: dans un intervalle recouvrant totalement l'intervalle courant ;

$<\overline{L}> = <\overline{A}>\ <\overline{A}>$: dans un intervalle avant l'intervalle courant ;

$<\overline{O}> = <B>\ <\overline{E}>$: dans un intervalle passé et chevauchant l'intervalle courant ;

soit, la représentation graphique :

$<D> = <B>\ <E>$

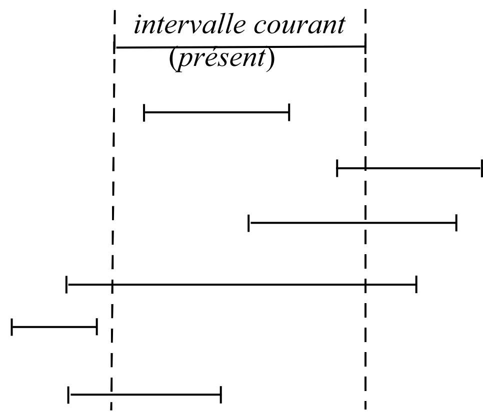
$<L> = <A>\ <A>$

$<O> = <E>\ <\overline{B}>$

$<\overline{D}> = <\overline{B}>\ <\overline{E}>$

$<\overline{L}> = <\overline{A}>\ <\overline{A}>$

$<\overline{O}> = <B>\ <\overline{E}>$



Les propriétés de ces opérateurs modaux vont caractériser la logique temporelle utilisée. Le nombre d'axiomes possibles est ici très grand ; on choisit au coup par coup ceux qui correspondent aux propriétés que l'on souhaite pour le temps.

5.3.5 Logiques modales d'intervalles arborescentes

Les opérateurs que nous venons de voir correspondent à une logique temporelle linéaire ; on peut envisager de les généraliser à une logique arborescente, avec les opérateurs :

$$\forall<A>,\ \forall<B>,\ \forall<L> \ldots$$

$$\exists<A>,\ \exists<B>,\ \exists<L> \ldots$$

Les logiques généralisées ainsi, deviennent d'une grande complexité ; c'est pourquoi cette généralisation est peu fréquente.

5.4 Conclusions

5.4.1 Taxinomie des logiques temporelles

Nous proposons ci-dessous une classification hiérarchique des logiques temporelles :

- Logiques Temporelles Propositionnelles TPL (Temporal Propositionnal Logics)
  - réifiées datation
    - points (différents axiomes possibles)
    - intervalles (≠ axiomes possibles)
  - modales
    - points
      - linéaires
        - discrètes
        - continues
      - arborescentes
        - discrètes
        - continues
    - intervalles
      - linéaires
        - …
        - …
      - arborescentes
        - …
        - …

Nous avons indiqué par des pointillés les possibilités qui ne sont quasiment pas utilisées, compte tenu de leur grande complexité …

5.4.2 Exemple de transcription d'un énoncé temporel

Considérons la formule *"Après la pluie, vient le beau temps"* et essayons de la traduire dans les logiques temporelles que nous avons considérées, en tenant compte de ce que cette phrase énonce un dicton, donc une vérité supposée éternelle. Nous utiliserons les propositions *"pluie"* et *"beauTemps"*, dont la signification est sans ambiguïté.

- **Dans une logique avec réification du temps,**

on peut écrire à l'aide des méta-prédicats "Vrai" et "Faux" :

$$\forall t \in T \;\; Vrai(pluie,\, t) \rightarrow \;\exists t' \in T\, [\; t' > t \;\wedge\, Vrai(beauTemps,\, t')\;] \;;$$

- **Dans une logique avec datation par points,**

on transforme les propositions *"pluie"* et *"beauTemps"* en prédicats avec un argument typé (c'est-à-dire ici, pris dans T, l'ensemble des temps) : la date.

$$\forall t \in T \;\; pluie(t) \rightarrow \;\exists t' \in T\, [\; t' > t \;\wedge\; beauTemps(t')\;] \;;$$

- **Dans une logique avec datation par intervalles,**

on transforme les propositions *"pluie"* et *"beauTemps"* en prédicats avec un argument typé (ici, pris dans I, l'ensemble des intervalles temporels).

$$\forall i \in I \; pluie(i) \rightarrow \;\exists i' \in I \;\;[\; i' > i \;\wedge beauTemps(i')\;] \;;$$

on peut aussi sophistiquer cette formule pour exprimer que le beau temps peut arriver juste après la pluie et donc que les deux intervalles i et i' peuvent se toucher (relation m)

$$\forall i \in I \;\; pluie(i) \rightarrow \;\exists i' \in I \;\;[(i \; m \; i' \;\vee\; i' > i) \;\wedge beauTemps(i')\;] \;;$$

- **Dans une logique avec réification du temps par intervalles,**

par exemple celle d'Allen, on peut écrire

$$\forall i \in I \; Holds(pluie,\, i) \rightarrow \exists i' \in I \;\;[\; i' > i \;\;\wedge\;\; Holds(beauTemps,\, i')\;] \;;$$

ou

$$\forall i \in I \; Holds(pluie,\, i) \rightarrow \exists i' \in I \;\;[\;(i\, m\, i' \vee i' > i) \\ \wedge\;\; Holds(beauTemps,\, i')\;] \;;$$

- **Dans une logique temporelle modale linéaire par points,**

on peut exprimer que, s'il pleut maintenant, il y aura dans le futur un moment où il fera beau :

$$pluie \rightarrow F\; beauTemps \;;$$

mais, comme la formule exprime un dicton, vrai à l'instant présent, mais qui aussi a toujours été vrai dans le passé et qui sera toujours vrai dans le futur, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & H(pluie \rightarrow F\; beauTemps) \\ \wedge\;\; & \;\;(pluie \rightarrow F\; beauTemps) \\ \wedge\; & G(pluie \rightarrow F\; beauTemps) \;; \end{aligned}$$

- **Dans une logique temporelle modale arborescente,**

on peut exprimer que, s'il pleut maintenant, quoiqu'il arrive, il y aura dans le futur un moment où il fera beau :

$$pluie \rightarrow \forall F\ beauTemps\ ;$$

cependant, comme l'énoncé est un dicton, vrai aujourd'hui, mais qui a aussi toujours été vrai dans tous les passés imaginables et qui sera toujours vrai dans tous les futurs possibles, on écrit :

$$\begin{aligned} & \forall H\ (pluie \rightarrow \forall F\ beauTemps) \\ \wedge\ & (pluie \rightarrow \forall F\ beauTemps) \\ \wedge\ & \forall G\ (pluie \rightarrow \forall F\ beauTemps) \end{aligned}$$

- **Dans une logique temporelle modale linéaire par intervalles,**

en utilisant les opérateurs de Shoham, on commence par exprimer que, s'il pleut dans l'intervalle courant, il y aura, dans un intervalle futur ($<\mathrm{L}>$), ou dans un intervalle commençant juste après l'intervalle courant ($<\mathrm{A}>$), un moment où il fera beau :

$$pluie \rightarrow (<\mathrm{A}>\ beauTemps \vee <\mathrm{L}>\ beauTemps)\ ;$$

comme la formule exprime un dicton, vrai aujourd'hui, mais aussi qui a toujours été vrai dans le passé et qui sera toujours vrai dans le futur, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & <\overline{\mathrm{L}}>\ [pluie \rightarrow (<A>\ beauTemps \vee <L>\ beauTemps)] \\ \wedge\ & <\overline{\mathrm{A}}>\ [pluie \rightarrow (<A>\ beauTemps \vee <L>\ beauTemps)] \\ \wedge\ & \qquad [pluie \rightarrow (<A>\ beauTemps \vee <L>\ beauTemps)]\ \text{(présent)} \\ \wedge\ & <\mathrm{A}>\ [pluie \rightarrow (<A>\ beauTemps \vee <L>\ beauTemps)] \\ \wedge\ & <\mathrm{L}>\ [pluie \rightarrow (<A>\ beauTemps \vee <L>\ beauTemps)]\,. \end{aligned}$$

On constate qu'il n'est pas simple avec cette logique de considérer toutes les éventualités !

5.4.3 Choix d’une logique temporelle

Quelle logique temporelle doit-on choisir :

- discrète ou continue ?
- par points ou par intervalles ?
- linéaire ou ramifiée ?
- avec datation, réification du temps ou modale ?

Il n'y a pas de méthode a priori, cela dépend du système que l’on veut modéliser.

On peut juste formuler quelques indications :

- Pour l'étude des propriétés des programmes, on considère généralement :
  - pour un seul programme, une logique linéaire discrète ;
  - pour plusieurs programmes parallèles (avec non-déterminisme), une logique discrète, mais ramifiée.
- Les logiques avec ramification du temps considèrent souvent un nombre fini d'états.
- Une arborescence vers le passé peut être intéressante pour connaître les causes expliquant une situation donnée, par exemple une panne.
- Les logiques avec réification du temps ou avec datation sont plus proches des physiciens alors que les logiques modales sont plus proches des logiciens.

5.4.4 Méthodes de preuves

Nous ne les détaillerons pas ici, vu le grand nombre de logiques temporelles et de leurs variantes, mais nous en indiquons quelques bases.

a) Pour les logiques avec datation ou réification du temps

Comme elles sont d'ordre 1, on applique les méthodes de la logique des prédicats (résolution, tableaux sémantiques, …) avec la prise en compte des axiomes temporels.

b) Pour les logiques temporelles modales

Construites au-dessus de S4, on peut utiliser la méthode des arbres sémantiques. On élimine les boucles qui pourraient apparaître, en cherchant les contradictions sur les formules telles

$$Gp \text{ et } \neg Gp, \quad Fp \text{ et } \neg Fp.$$

c) Pour les logiques discrètes

Quand on considère un "nouveau monde" (ou plutôt un "nouvel instant"), on doit considérer souvent le futur le plus proche (si l'on a *op* il y aura *p*), puis des futurs plus éloignés.

Les exercices montreront des exemples d'utilisation de ces méthodes.

5.5 Exercices

(*Corrigés à partir de la page 168*)

1) Exprimez sous deux formes différentes, la phrase

*"Si la situation actuelle ne s'était pas produite auparavant,
elle ne se produira plus".*

On peut représenter la situation évoquée par une proposition *"situation"* associée à cette situation, par exemple une proposition équivalente à une conjonction de formules décrivant la situation.

2) Traduisez dans la logique temporelle de votre choix, l'énoncé

*"Il pleut et, tant qu'il continuera à pleuvoir,
je garderai mon parapluie".*

3) Formulez dans la logique temporelle de votre choix, la phrase

*"Quelles que pourront être les mesures de prévention,
une panne se produira tôt ou tard".*

On pourra utiliser le prédicat *"prévention*(*M*)*"* exprimant que la mesure de prévention *M* a été prise et la proposition *"panne"* exprimant qu'une panne se produit.

4) Exprimez dans une logique temporelle avec datation et dans une logique temporelle modale, l'énoncé :

*"Tout fichier imprimable dont on requiert l'impression,
finira toujours par être imprimé".*

Utilisez les prédicats
"fichier", *"imprimable"*, *"requête"* (d'impression) et *"imprimé"*.

5) Exprimez dans une logique temporelle avec datation et dans une logique temporelle modale, l'énoncé :

*"Si deux personnes se sont rencontrées deux fois,
elles se rencontreront encore par la suite".*

Utilisez un prédicat *"rencontre*(*X, Y*)*"*, symétrique, qui énonce que les personnes *X* et *Y* se sont rencontrées.

6) Exprimez dans une logique temporelle avec datation et dans une logique temporelle modale, l'énoncé :

"Toute personne commençant un master,
a obtenu auparavant une licence" ;

on pourra utiliser les prédicats

"personne", "master", "licence", "commencer", "obtenir".

7) Exprimez dans une logique temporelle avec datation et dans une logique temporelle modale, l'énoncé :

"Tout programme qui n'a pas été relu avant d'être lancé,
finira par se planter" ;

on pourra utiliser les prédicats

"programme", "relu", "lancé", "planté".

8) Quelle est la logique dans laquelle s'exprime la formule :

$$\forall X\, promettre\,(jean, X) \;\rightarrow\; \forall F\, réaliser\,(jean, X)\;?$$

Quelle signification pouvez-vous lui donner ?
Exprimez cette formule dans une logique avec datation.

9) Exprimez dans une logique temporelle avec datation et dans une logique temporelle modale l'énoncé :

"Si, avant le départ du train, Alain n'est pas arrivé,
nous ne l'attendrons jamais plus".

Utilisez les prédicats ou propositions

"arriver(X)", "départTrain", "attendre(X, Y)"

et les constantes *"a"* pour *Alain* et *"n"* pour *nous*.

10) Traduisez dans une logique avec datation, la formule temporelle modale : $G(p \wedge q) \rightarrow (Gp \wedge Gq)$.
Démontrez sa validité sous sa forme modale.

11) A quelle logique correspond la formule $Gp \rightarrow \mathrm{o}\,Gp$?
Démontrez que cette formule est une tautologie.

12) Démontrez que la formule

$$G\,(p \rightarrow \mathrm{o}\,p) \rightarrow (\mathrm{o}\,p \rightarrow G\,p)$$

est une tautologie.

13) Exprimez dans une logique temporelle avec réification du temps, et dans une logique temporelle modale l'énoncé :

"Tout programme qui s'est planté pourra se replanter,
tant qu'il n'aura pas été corrigé".

Prédicats conseillés :

"programme", *"planter"* et *"corriger"* ;

la possibilité de plantage peut être traduite, soit par un prédicat spécifique "*peutSePlanter*", soit par une modalité de possibilité.

14) Exprimez dans une logique adéquate, l'énoncé :

"Toute interruption déclenchée alors qu'elle est masquée,
deviendra active au temps d'horloge qui suivra le démasquage".

Prédicats conseillés :

"interruption(*X*)*"* pour *"X est une interruption"*,

"masqué(*X*)*"* pour *"X est masqué*(*e*)*"* et

"actif(*X*)*"* pour *"X est actif*(*ve*)*".*

Chapitre 6

Raisonnements Non Monotones

6.1 Introduction

La logique classique est monotone, en ce que, si l'on considère un ensemble de formules bien formées (f.b.f.), $\Delta = f_1, f_2 \ldots f_x$, dont se déduit une autre formule, f, l'ajout d'une formule, f_{x+1}, n'invalide pas la déduction de f.

Dans une logique classique, on peut écrire :

si $\Delta \vdash f$, alors $\Delta, f_{x+1} \vdash f$.

Dans une logique acceptant les raisonnements non-monotones,
cela n'est plus vrai :

même si $\Delta \vdash f$, on peut avoir $\Delta, f_{x+1} \nvdash f$;

cela peut être lié à ce que

1°) $\Delta \vdash f$ repose sur des hypothèses que f_{x+1} vient contredire,
avec deux possibilités : la preuve de f peut reposer

sur un *raisonnement incertain et conjectural* ou

sur un *raisonnement révisable* parce que nature introspective ;

2°) f_{x+1} invalide au moins une des formules de Δ.

Un raisonnement incertain et conjectural est de la forme

"*Généralement les objets de type T ont la propriété p ;*
si X est un objet de type T,
***on en déduit que** X a* (*vraisemblablement*) *la propriété p*".

par exemple

"Généralement les oiseaux peuvent voler ;
si Titi est un oiseau,
***on en déduit que** (vraisemblablement) Titi peut voler".*

Un raisonnement révisable parce qu'introspectif est de la forme

"*De mon état de connaissances, je peux déduire que …*"

par exemple :

"Puisque je ne me connais pas de frère plus âgé,
j'en déduis que je n'ai pas de frère plus âgé".

Les logiques non monotones ont été conçues pour modéliser ces différentes sortes de raisonnements. Elles peuvent groupées en deux classes :

1) les logiques minimalistes, indépendantes du domaine :
- l'hypothèse du domaine clos (DCA, domain closure assumption) ;
- l'hypothèse du monde clos (CWA, closed world assumption) ;
- la circonscription ou complétude des prédicats.

2) les logiques de raisonnement par défaut :
- la logique des défauts (de Reiter) ;
- la logique non monotone de Mac Dermott ;
- la logique auto-épistémique (ou de Moore).

Dans chacune de ces deux classes, les logiques sont voisines, mais avec des hypothèses différentes et des notations différentes. La logique auto-épistémique est cependant une autre formulation de la logique de Mac Dermott : nous n'en considérerons ici qu'une seule, celle de Mac Dermott.

Remarque : pour simplifier les formules prédicatives écrites ci-dessous, nous rendrons souvent implicites les quantifications universelles ; par exemple,

$\forall X\, \forall Y\, [p(X) \wedge q(Y)] \rightarrow r(X, Y)$ se réduira à $[p(X) \wedge q(Y)] \rightarrow r(X, Y)$.

6.2 Logiques minimalistes

6.2.1 L'hypothèse du domaine clos

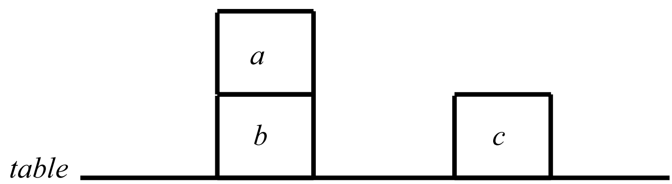
On l'appelle parfois DCA, abréviation de l'expression anglaise "Domain Closure Assumption".

Principe : on suppose que les seuls objets qui existent sont ceux mentionnés en clair dans les formules et on exploite cette exhaustivité.

Exemple : soit un univers de cubes où les seuls objets mentionnés sont : *a, b, c, table* (*a, b* et *c* étant des cubes et *table* leur support) ; l'hypothèse du domaine clos s'exprime par la formule :

$$\forall X \ (X = table) \lor (X = a) \lor (X = b) \lor (X = c) \qquad \text{(DCA)}$$

Considérons l'état de cet univers représenté par la figure ci-dessous :



Nous pouvons représenter cet état par les formules suivantes :

1. *a sur b*
2. *b sur table*
3. *c sur table*
4. $\neg$ *table sur X* (la table ne repose sur aucun objet du domaine)
5. $[\, X \textit{ sur } Y \land Y \neq Z \,] \rightarrow \neg\, X \textit{ sur } Z$
   (un cube ne peut en chevaucher deux autres)
6. $libre(X) \leftrightarrow \forall Y \ \neg\, (Y \textit{ sur } X)$ ou $libre(X) \leftrightarrow \neg\, \exists Y\, (Y \textit{ sur } X)$
7. $\neq (a,\ b,\ c,\ table)$ (les objets considérés sont tous différents).

Pour prouver *"libre(a)"*, une solution possible utilisant l'hypothèse du domaine clos est :

de 1, 5, 7, nous déduisons $\neg$ *a sur a* (8) ;
de 2, 5, 7, nous déduisons $\neg$ *b sur a* (9) ;
de 3, 5, 7, nous déduisons $\neg$ *c sur a* (10) ;
de 4, nous déduisons $\neg$ *table sur a* (11) ;
de DCA et 8, 9, 10, 11, nous déduisons $\neg\, \exists X\, (X \textit{ sur } a)$ (12) ;
de 12 et 6, nous déduisons : ***libre*(*a*)**.

6.2.2 L'hypothèse du monde clos

On l'appelle parfois CWA, abréviation de l'expression en anglais, "Closed World Assumption".

Principe

1°) on suppose l'hypothèse du domaine clos (DCA) ;

2°) si une formule φ, liée, c'est-à-dire sans variable (*"bound"*), ne peut être démontrée, on suppose $\neg\varphi$; c'est-à-dire que tout fait propositionnel (correspondant à une formule prédicative liée), que l'on ne peut démontrer, est supposé faux.

Exemple

Dans l'univers de cubes, déjà vu ci-dessus, on peut représenter, dans le cas de l'hypothèse du monde clos, le système par les seules formules

1. *a sur b*
2. *b sur table*
3. *sur table*
4. $libre(X) \leftrightarrow \forall Y \neg (Y\ sur\ X)$ ou $libre(X) \leftrightarrow \neg \exists Y (Y\ sur\ X)$.

Par l'hypothèse du monde clos (CWA), on peut déduire :

$\neg$ *a sur a,* $\neg$ *b sur a,* $\neg$ *c sur a,* $\neg$ *table sur a*

cela, parce que l'on ne peut prouver

ni *a sur a*, ni *b sur a*, ni *c sur a*, ni *table sur a* ;

l'hypothèse du domaine clos (DCA) permet alors d'écrire :

5 : $\neg \exists Y (Y\ sur\ a)$

et, de 4 et 5, découle ***libre*(*a*)**.

6.2.3 La circonscription des prédicats

Principe général

L'hypothèse du monde clos suppose que seules les formules sans variables qui sont vraies, sont celles que l'on peut prouver ; la circonscription s'applique aux formules des prédicats du premier ordre en général.

C'est un mécanisme de la logique des prédicats du deuxième ordre, qui consiste à remplacer un prédicat donné par un autre, ce dernier ne pouvant être prouvé que par les connaissances présentes.

Principe théorique : si l'on a originellement le prédicat Π, on le remplace par un prédicat α tel que

$$\forall p\ prédicat(p)\ \ [\ (\forall X\, p(X) \rightarrow \Pi(X)\ ) \rightarrow (\ \forall X\, p(X) \rightarrow \alpha(X)\ )\ ]$$

où α est minimal, c'est à dire tel qu'il n'existe pas de prédicat α' tel que :

$$\forall X[\alpha(X) \rightarrow \alpha'(X)] \wedge \neg\, \forall X\, [\alpha'(X) \rightarrow \alpha(X)]\,.$$

(La véritable formule de circonscription est plus dense, mais plus difficile à lire ; nous l'omettons ici).

En pratique, on remplace le prédicat que l'on veut circonscrire par un prédicat équivalent à la disjonction (le "ou" logique) des termes qui le justifient.

Exemple 1

Si l'on a

$$\left|\begin{array}{l} \forall X\ \ kangourou(X) \rightarrow\ \ marsupial(X) \\ \forall X\ \ opossum(X)\quad \rightarrow\ \ marsupial(X) \end{array}\right.$$

la circonscription du prédicat *marsupial* revient à écrire :

$$\forall X\, marsupial(X) \leftrightarrow [kangourou(X) \vee opossum(X)]$$

Exemple 2

Si l'on ajoute aux formules ci-dessus

$$\left|\begin{array}{l} \forall X\, koala(X) \rightarrow marsupial(X) \\ marsupial(toto), \end{array}\right.$$

la circonscription de *marsupial* devient :

$$\forall X\, marsupial(X) \leftrightarrow [kangourou(X) \vee opossum(X) \\ \vee\, koala(X) \vee (X = toto)]\,.$$

La circonscription s'applique en principe à tous les prédicats, mais pour des raisons de complexité, elle n'est utilisée que pour un nombre limité de prédicats dans une application.

6.3 Logiques avec raisonnements par défaut

6.3.1 Principes généraux

On cherche à exprimer des propriétés typiques de la plupart des individus d'une même classe, avec prise en compte d'exceptions.

Exemple :

Considérons la hiérarchie (taxinomique) suivante :

$être(titi)$
$oiseau(X) \rightarrow être(X)$
$autruche(X) \rightarrow oiseau(X)$
$autrucheVolante(X) \rightarrow autruche(X)$
(pourquoi pas, si on la met dans un avion !) ;-)

on peut lui ajouter des règles de typicalité :

$[être(X) \wedge \neg\, oiseau(X)] \rightarrow \neg\, vole(X)$
$[oiseau(X) \wedge \neg\, autruche(X)] \rightarrow vole(X)$
$[autruche(X) \wedge \neg\, autrucheVolante(X)] \rightarrow \neg\, vole(X)$
$autrucheVolante(X) \rightarrow vole(X)$

Difficultés

Dans les taxinomies importantes les règles avec exception deviennent longues ; il faut rajouter de nombreuses exceptions dans la partie prémisse des règles :

$$[oiseau(X) \wedge \neg autruche(X) \wedge \neg malade(X) \wedge \neg manchot^{1}(X) \wedge \neg \ldots] \rightarrow vole(X).$$

De plus, si l'on veut rajouter une exception, il faut changer les formules correspondantes ; cela peut être long et difficile s'il y a beaucoup de formules.

Une solution consiste à créer un prédicat $anormal_i(X)$ pour la règle de typicalité i, ou mieux, utiliser un prédicat général tel
$anormal(Type,\ Propriété,\ Individu)$.

Par exemple

$[oiseau(X) \wedge \neg\, anormal(oiseau,\ vol,\ X)] \rightarrow vole(X)$
$[autruche(X) \wedge \neg\, anormal(autruche,\ vol,\ X)] \rightarrow anormal(oiseau,\ vol,\ X)$
$autrucheVolante(X) \rightarrow anormal(autruche,\ vol,\ X)$
…

1 Attention : le mot anglais "penguin" utilisé dans l'exemple original ne se traduit pas en français par pingouin, mais par manchot ! Le mot français pingouin désigne un oiseau marin qui peut généralement voler (sauf exception : maladie, …).

6.3.2 La logique des défauts de R. Reiter

Elle utilise

- une **logique classique**
  (logique des propositions ou des prédicats d'ordre un) ;
- des **règles d'inférences appelées *"défauts"***, de la forme $\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$
  (ou $\alpha : \beta \,/\, \gamma$), dans lesquelles
  α s'appelle le pré-requis,
  β la justification,
  γ le conséquent,
  et qui se lisent :
  "si l'on croit α et qu'il est possible de croire β,
  alors il est justifié de croire γ".

Un défaut normal est un défaut de la forme $\frac{\alpha : \beta}{\beta}$;
par exemple, $\frac{oiseau(X) : vole(X)}{vole(X)}$ est un défaut normal.

Mécanisme d'inférence

Le mécanisme d'inférence des systèmes avec défauts est décrit par l'algorithme ci-dessous :

Algorithme

Début

Effectuer d'abord toutes les inférences classiques ;

Appliquer ensuite tous les défauts possibles
sur ces résultats ;

Tant que de nouvelles inférences classiques sont possibles ou que de nouveaux défauts sont applicables :

Si de nouvelles inférences classiques sont possibles,
les effectuer ;

(puis)

Si de nouveaux défauts sont applicables,
les appliquer ;

Fin Tant que

Fin

Cet algorithme présente deux difficultés :

1) la convergence n'est pas assurée (mais il a été prouvé qu'elle est certaine quand tous les défauts sont normaux) ;

2) suivant l'ordre d'utilisation des défauts, on peut avoir plusieurs résultats possibles.

On appelle *extension* (notée ε) de la logique des défauts considérée, un ensemble maximum de conséquents cohérents. Les deux difficultés énoncées ci-dessus peuvent s'exprimer aussi, en disant qu'un système avec défauts peut avoir zéro, une ou plusieurs extensions.

Formellement

1) On définit une théorie avec défauts comme un couple $<W, D>$

W est un ensemble de formules de la logique des prédicats,

D est un ensemble de défauts de la forme $\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$.

2) On définit alors la fonction *Concls*(*F, D*),
où *F* est un ensemble de formules et *D* l'ensemble des défauts :

$$Concls(F, D) = \{ \gamma \mid \exists\ d \in D : d = \frac{\alpha : \beta}{\gamma} \wedge \alpha \in F \wedge \neg \beta \notin F^{(1)} \} ;$$

ainsi, la fonction *Concls*(*F, D*) renvoie l'ensemble des conséquents γ des défauts, dont le pré-requis α est considéré comme vrai, et dont il est possible que la justification β soit vraie (c'est-à-dire que l'on n'a aucune raison de supposer $\neg \beta$).

3) On forme les extensions partielles successives :

$\varepsilon_0 = Th(W)$, c'est l'ensemble des théorèmes de *W*, c'est-à-dire toutes les formules que l'on peut démontrer dans *W* ;

$\varepsilon_1 = Th(\varepsilon_0 \cup Concls(\varepsilon_0, D))$;

…

$\varepsilon_i = Th(\varepsilon_{i-1} \cup Concls(\varepsilon_{i-1}, D))$;

…

et, "finalement",

$$\varepsilon = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i .$$

(1) En théorie, il faudrait utiliser ici ε au lieu de *F*, ce qui n'est pas très réaliste, puisque c'est ε que l'on cherche à déterminer !

Il n'y a donc pas d'algorithme permettant de construire $\mathcal{E}$ dans tous les cas, puisqu'il faut éventuellement faire la réunion d'une infinité de formules.

Exemples

1°) le système : $\left| \begin{array}{l} W : oiseau(titi) \\ D : oiseau(X) : vole(X) \,/\, vole(X) \end{array} \right.$

exprime que *titi* est un oiseau et que, par défaut, un oiseau est supposé voler ; il a une seule extension :

$$\left| \begin{array}{l} oiseau(titi) \\ vole(titi) \ ; \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire aussi:

$$\{\ oiseau(titi),\ vole(titi)\ \}$$

2°) le système : $\left| \begin{array}{l} W : \left| \begin{array}{l} autruche(titi) \\ \forall X\ autruche(X) \rightarrow \{oiseau(X) \wedge \neg\ vole(X)] \end{array} \right. \\ D :\ oiseau(X) : vole(X) \,/\, vole(X) \end{array} \right.$

exprime que *titi* est une autruche, qu'une autruche est un oiseau qui ne vole pas et que, par défaut, un oiseau est supposé voler ; il a une seule extension :

$$\{\ autruche(titi),\ oiseau(titi),\ \neg\ vole(titi)\ \}$$

3°) le système

$$\begin{array}{rl} W : & \left| \begin{array}{l} \forall X\ \neg\ \big[(citoyen(X, USA) \wedge citoyen(X, France)\big] \\ parle(Jean, français) \\ habite(Jean, USA) \end{array} \right. \\ D : & \left| \begin{array}{l} parle(X, français) : citoyen(X, France) \,/\, citoyen(X, France) \\ habite(X, P) : citoyen(X, P) \,/\, citoyen(X, P) \end{array} \right. \end{array}$$

exprime qu'on ne peut être simultanément citoyen Français et citoyen des USA et aussi que Jean parle français et habite aux USA. Par défaut, quelqu'un qui parle français est supposé Français et, par défaut, quelqu'un qui habite aux USA est supposé citoyen des USA.

Ce système a deux extensions :

- l'une est l'ensemble de faits :

$\{\ parle(Jean, français),\ habite(Jean, USA),\ citoyen(Jean, France)\ \}$,

- et l'autre :

$\{\ parle(Jean, français),\ habite(Jean, USA),\ citoyen(Jean, USA)\ \}$.

4°) le système :

$$\left|\begin{array}{l} W = \varnothing \\ D = \{\, p \,/\, \neg\, p \,\} \end{array}\right.$$

n'a aucune extension (c'est un exemple très artificiel).

6.3.3 NML, la logique non monotone de Mac Dermott

Principe

La logique NML (Non Monotonic Logic) ajoute aux implications classiques des règles de la forme :

$$(p \wedge M p') \rightarrow q \quad (1),$$

où M se lit *"est consistent* (*ou cohérent*) *avec tout ce que l'on croit"* ; on peut donc lire une règle de la forme (1) comme :

"Si l'on sait p et si p' peut être cru, alors on peut supposer q".

La logique NML ne retient que les conclusions obtenues sans incohérence. En cas de contradiction possible entre les conclusions de deux règles de la forme (1), elle ne tranche pas, en décidant d'ignorer les formules sur lesquelles une contradiction est apparue.

Exemple

Nous reprenons ici un exemple qui est devenu un classique, tiré d'un article de la revue "Artificial Intelligence", et qui se réfère à l'histoire des USA de la période 1960-1980.

N.B. : Richard Nixon (1913-1994) a été vice-président, puis président des États-Unis de 1968 à 1974. Il était, à la fois, républicain et quaker, d'où la contradiction relevée dans cet exemple. Étant donné qu'il a mis fin à l'engagement américain au Vietnam, on pourrait peut-être *a posteriori* le considérer comme pacifiste ; ce n'est sans doute pas le cas, puisqu'il a été forcé à la paix sous la pression de l'opinion publique américaine.

Cet exemple considère les formules :

$$\left|\begin{array}{l} \forall X\,[\mathit{républicain}(X) \wedge M \neg\, \mathit{pacifiste}(X)] \rightarrow \neg\, \mathit{pacifiste}(X) \\ \forall X\,[\mathit{quaker}(X) \wedge M\, \mathit{pacifiste}(X)] \rightarrow \mathit{pacifiste}(X) \\ \mathit{républicain}(\mathit{nixon}) \\ \mathit{quaker}(\mathit{nixon}) \end{array}\right.$$

Elles entraînent une contradiction entre $\neg\, \mathit{pacifiste}(\mathit{nixon})$ et $\mathit{pacifiste}(\mathit{nixon})$, donc NML s'interdit de déduire quoi que ce soit de ces règles et de ces faits.

Un intérêt de la logique non monotone de Mac Dermott, est qu'on peut déduire des formules de type (1) d'autres formules de type (1), par exemple

$$\left.\begin{array}{r} p \wedge Mq \to q \\ \neg p \wedge Mq \to q \end{array}\right| \!\!\text{——}\quad Mq \to q$$

La logique auto-épistémique de Moore reprend ce type de formules, mais est construite de manière plus formelle, comme une logique modale. À titre anecdotique, indiquons que son équivalence avec la logique de Mac Dermott a été démontrée formellement une première fois, mais que cette démonstration s'est avérée erronée. Depuis, une autre démonstration, valide celle-ci, a été publiée.

6.4 Implémentation des raisonnements non monotones

La réalisation de raisonnements non monotones nécessite l'emploi de *listes de justifications*, qui mémorisent pour chaque fait déduit, l'ensemble des ses justifications, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets, composés d'une règle et des faits prémisses de la règle.

Exemple :

de	$p \to r$	(1)
	$q \to r$	(2)
	p, q	
on déduit	r	

Si l'on retire p, la déduction de r à l'aide de l'implication (1) n'est plus valide, mais si q reste vrai, l'implication (2) permet de continuer d'affirmer r.

Pour ne pas avoir à refaire toutes les déductions en cas de retrait d'un fait, on associe à chaque formule déduite, la liste des ensembles de formules qui la justifient :

- initialement, r est justifié par $(\{p \to r,\ p\}, \{q \to r,\ q\})$;
- après le retrait de p, la vérité de r reste justifiée par $(\{q \to r,\ q\})$.

Deux types de mécanismes sont disponibles pour cela :

- les systèmes de maintien de la vérité : les T.M.S. (*truth maintenance systems*), dont le nom devrait plutôt être C.M.S. (coherence maintenance systems), c'est-à-dire systèmes de maintien de la cohérence.

- les systèmes de maintien de la cohérence entre ensembles d'hypothèses : les A.T.M.S. (*assumption based T.M.S.*), qui considèrent tous les sous-ensembles d'hypothèses cohérentes entre elles.

Leur étude n'est pas du ressort de ce document ; nous renvoyons le lecteur aux cours d'intelligence artificielle.

6.5 Conclusions

Les logiques de raisonnements non monotones permettent d'effectuer des inférences en l'absence de certitudes sur certains faits, et, si nécessaire, de réviser par la suite ces inférences.

Avec *les logiques minimalistes*, la preuve d'un fait peut être établie par ***chaînage avant*** (on tire toutes les conclusions des faits connus par application des règles jusqu'à conclure sur le fait que l'on souhaite établir), mais on peut aussi choisir une démarche de ***chaînage arrière*** (on part du fait que l'on cherche à vérifier et l'on examine quelles règles peuvent le justifier, puis on cherche à prouver les faits qui sont dans les prémisses de ces règles…).

Avec *les logiques de raisonnement par défaut,* on peut établir des ensembles cohérents d'hypothèses vraisemblables, compte tenu de la connaissance partielle que l'on peut avoir d'un système.

Quand plusieurs hypothèses sont contradictoires, deux attitudes sont possibles :

- une attitude dite "sceptique" refusera d'utiliser les conclusions fournies par toute hypothèse susceptible d'être contredite,

- une attitude dite "crédule", choisira un ensemble d'hypothèses cohérentes entre elles, afin de faire progresser les inférences et de permettre une prise de décision effective, quitte à réviser par la suite de nombreuses conclusions, au cas où certaines de ces hypothèses se révéleraient fausses.

Le choix entre une stratégie sceptique et une stratégie crédule peut s'effectuer en considérant les coûts de décisions erronées : si les actions liées à une décision sont réversibles et de faible coût, une stratégie crédule pourra rapprocher rapidement de la solution d'un problème par une succession d'essais et de retours en arrière en cas d'échec ; si le risque lié à une décision erronée est très important, on choisira une attitude sceptique pour ne pas risquer d'utiliser des hypothèses qui pourraient se révéler fausses ultérieurement.

6.6 Exercices

(*Corrigés page 175*)

1) Utilisez l'hypothèse du monde clos pour démontrer le fait *"célibataire(Alain)"* à partir des connaissances ci-dessous :

$$
\begin{array}{|l}
\textit{étudiant}(\textit{Alain}) \\
\textit{marié}(\textit{Bernard, Cathy}) \\
\textit{marié}(\textit{Daniel, Eugénie}) \\
\textit{marié}(X, Y) \rightarrow \textit{marié}(Y, X) \\
\neg \exists Y\, \textit{marié}(X, Y) \rightarrow \textit{célibataire}(X)
\end{array}
$$

Quelles connaissances doivent être ajoutées si l'on ne considère que l'hypothèse du domaine clos ?

Remarque : le fait *"étudiant(Alain)"* est là uniquement pour que le symbole *"Alain"* soit présent dans les connaissances, sinon, l'hypothèse du monde clos ferait répondre "non" à la question *"célibataire(Alain) ?"*, uniquement parce que le symbole *"Alain"* serait inconnu.

2) On considère les formules :

$$
\begin{array}{|l}
[\textit{oiseau}(X) \wedge \neg\, \textit{autruche}(X)] \rightarrow \textit{vole}(X) \\
\textit{chauveSouris}(X) \rightarrow \textit{vole}(X) \\
\textit{autruche}(X) \rightarrow \textit{oiseau}(X) \\
\textit{autruche}(\textit{titi}) \\
\textit{vole}(\textit{airbus})
\end{array}
$$

Quelle est la circonscription du prédicat *"vole"* pour cet ensemble de formules ?

3) Déterminez la ou les extensions du système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} a(X) \rightarrow b(X) \\ [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow d(X) \\ a(1)\;\; a(2)\;\; c(2)\;\; c(3) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} a(X) : c(X) \,/\, c(X) \\ \\ c(X) : \neg\, d(X) \,/\, \neg\, d(X) \end{array} \right.$$

4) Quelles sont les extensions du système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow b(X) \\ b(X) \rightarrow [a(X) \wedge d(X)] \\ a(1) \quad b(2) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} a(X) : \neg\, c(X) \,/\, \neg\, c(X) \\ b(X) : \; c(X) \,/\; c(X) \\ c(X) : \neg\, d(X) \,/\, \neg\, d(X) \end{array} \right.$$

5) Utilisez l'hypothèse du monde clos (CWA) pour prouver le fait "*vide*(*boîte3*)" sur l'ensemble de formules :

$$\left| \begin{array}{l} dans(a,\ boîte1) \\ dans(b,\ boîte2) \\ dans(boîte3,\ boîte2) \\ contient(X,\ Y) \leftrightarrow dans(X,\ Y) \\ vide(X) \leftrightarrow \neg\, \exists Y\, contient(X,\ Y)\,. \end{array} \right.$$

6) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} [a(X) \wedge b(X)] \rightarrow \neg\, c(X) \\ a(1) \quad b(2) \end{array} \right. \qquad D: \left| \begin{array}{l} a(X) : b(X) \,/\, b(X) \\ b(X) : c(X) \,/\, c(X) \end{array} \right.$$

7) Utilisez l'hypothèse du monde clos (CWA) pour prouver "*disjoints*(*pairs, impairs*)" quand on ne dispose que des formules :

$$\left| \begin{array}{l} p(X) \leftrightarrow appartient(X,\ pairs) \\ i(X) \leftrightarrow appartient(X,\ impairs) \\ \neg\, \exists X\, [appartient(X,\ Y) \wedge appartient(X,\ Z)] \rightarrow disjoints(Y,\ Z) \\ p(0) \quad i(1) \quad p(2) \quad i(3) \quad p(4) \end{array} \right.$$

8) Utilisez l'hypothèse du monde clos (CWA) pour prouver : "*isolés*(*a, g*)", quand on ne dispose que des formules :

$$\left| \begin{array}{l} isolés(X,\ Y) \leftrightarrow \neg\, connectés(X,\ Y) \\ reliés(X,\ Y) \rightarrow connectés(X,\ Y) \\ [reliés(X,\ Z) \wedge connectés(Z,\ Y)] \rightarrow connectés(X,\ Y) \\ reliés(a,\ b) \quad reliés(b,\ c) \quad reliés(e,\ b) \quad reliés(f,\ g) \end{array} \right.$$

9) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} c(X) \to [m(X) \wedge n(X)] \\ m(X) \to \neg\, p(X) \\ c(b) \quad n(o) \quad m(h) \quad n(h) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} n(X) : p(X) \,/\, p(X) \\ \\ m(X) : \neg\, n(X) \,/\, \neg\, n(X) \end{array} \right.$$

10) Pourquoi, à partir de l'ensemble de formules ci-dessous et de l'hypothèse du monde clos,
ne peut-on pas prouver le fait "*filsUnique*(*b*)" ?

$$\left| \begin{array}{l} filsUnique(X) \leftrightarrow \neg\, \exists Y\, frère(X, Y) \\ frère(X, Y) \leftrightarrow \exists Z\, [père(Z, X) \wedge père(Z, Y)] \\ père(a, b) \quad père(b, c) \quad père(b, d) \quad père(e, f) \end{array} \right.$$

Comment faut-il modifier cet ensemble de formules pour que cela soit possible ?

11) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} a(X) \to b(X) \\ [a(X) \wedge c(X)] \to \neg\, d(X) \\ a(1) \quad a(2) \quad c(2) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} b(X) : c(X) \,/\, c(X) \\ \\ c(X) : d(X) \,/\, d(X) \end{array} \right.$$

12) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} a(X) \to b(X) \\ c(X) \to a(X) \\ a(1) \quad c(2) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} a(X) : c(X) \,/\, c(X) \\ [c(X) \wedge a(X)] : d(X) \,/\, d(X) \\ c(X) : \neg\, b(X) \,/\, \neg\, b(X) \end{array} \right.$$

13) Utilisez l'hypothèse du monde clos pour prouver "*vole*(*titi*)",
si l'on n'a que les formules :

$$\left| \begin{array}{l} [oiseau(X) \wedge \neg\, atypique(X, oiseau, vol)] \to vole(X), \\ manchot(X) \to [oiseau(X) \wedge atypique(X, oiseau, vol)], \\ autruche(X) \to [oiseau(X) \wedge atypique(X, oiseau, vol)], \\ pingouin(X) \to oiseau(X), \\ [oiseau(X) \wedge blessé(X)] \to atypique(X, oiseau, vol), \\ oiseau(toto),\ blessé(toto),\ autruche(tata),\ pingouin(titi). \end{array} \right.$$

14) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} a(X) \rightarrow b(X) \\ [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow \neg\, d(X) \\ a(1) \quad a(2) \quad c(2) \quad c(3) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} a(X) : c(X) \,/\, c(X) \\ \\ c(X) : d(X)/d(X) \end{array} \right.$$

15) Quelle(s) extension(s) possède le système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} [f(X) \wedge p(X, Y)] \rightarrow f(Y) \\ \\ f(a) \quad p(a, b) \quad p(b, c) \quad d(a) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{l} : \neg\, d(X) \,/\, \neg\, d(X) \\ \\ [f(X) \wedge \neg\, d(X)] : s(X) \,/\, s(X) \end{array} \right.$$

Chapitre 7

Raisonnements en Présence d'Incertitudes

7.1 Introduction

Les logiques qui permettent les raisonnements en présence d'incertitudes, appelées aussi "logiques de l'incertain", sont parfois regroupées avec les logiques de raisonnement sur des connaissances imprécises, dans ce que l'on appelle alors les logiques de "raisonnement approximatif". Il est toutefois important de bien noter la différence entre la notion d'incertain et celle d'imprécis.

7.1.1 La notion d'incertain

Elle concerne des formules dont la vérité n'est pas connue (problèmes de confiance), par exemple :

"Hélène va *probablement* être reçue à l'examen".

"Contourner le centre-ville est *peut-être* plus rapide".

"Je suis *persuadé* qu'il ment".

"Si le malade a 38°, il a *sans doute* une grippe".

7.1.2 La notion d'imprécis

Elle caractérise des formules exprimant un ensemble de valeurs possibles pour un attribut, ou ayant des degrés de vérité gradués, par exemple :

"Jean mesure entre 1,70 m et 1,75 m".

"La température est d'environ 20°".

"Il fait chaud".

"Jean est presque aussi adroit que Marie".

"Si le malade tousse beaucoup, donnez-lui un peu de sirop".

7.1.3 L'imprécis et l'incertain

Ils peuvent aussi se combiner dans une même formule, par exemple :

"Alice va *sans doute* avoir une assez bonne note".

"Il *devrait* faire plutôt chaud demain".

"Il est *peu probable* que l'on gagne beaucoup en jouant au loto".

Les raisonnements imprécis peuvent être modélisé par la logique floue, la théorie des ensembles approximatifs ("rough sets"), le calcul des petites variations,… Nous avons déjà étudié les logiques floues, les autres modes de raisonnement imprécis sont moins souvent utilisés, aussi nous ne les détaillerons pas ici.

Nous allons donc étudier dans ce chapitre les principales méthodes utilisables pour le raisonnement en présence d'incertitudes. Ces méthodes sont :

- la théorie des probabilités,
- la théorie des croyances (dite aussi de Dempster-Shafer),
- la théorie des possibilités,
- des méthodes empiriques.

7.2 La théorie des probabilités

7.2.1 Principes

Ses fondements sont parfaitement établis ; en effet, différents auteurs (Cox, Savage) ont montré qu'un ***agent pleinement rationnel*** ne peut utiliser qu'un seul modèle pour évaluer des degrés d'incertitude : ***les probabilités***.

Hypothèses :

Les axiomes de Kolmogorov définissent formellement les probabilités $P(E)$ (qui peuvent être des probabilités subjectives) d'événements (ou observations) tels que E :

1) $0 \leq P(E) \leq 1$;
2) $P(E) = 1$, si et seulement si E est certain ;
3) Si $E1, E2, ..., En$ sont des évènements mutuellement exclusifs,
$P(E1 \vee E2 \vee ... \vee En) = P(E1) + P(E2) + ... + P(En)$.

Ces axiomes permettent de construire des raisonnements totalement rationnels dans des situations d'incertitude ; l'évaluation des probabilités subjectives peut être effectuée à partir du taux de pari qu'un individu est prêt à accepter dans la situation considérée.

La théorie des probabilités propose la seule évaluation de l'incertitude qui puisse être utilisée de manière rigoureuse en théorie de la décision : les probabilités permettent d'évaluer, pour chaque décision, l'espérance de gain et/ou de perte. Cependant, la nécessité d'évaluer toutes les probabilités a priori, toutes les probabilités conditionnelles et de déterminer s'il y a indépendance entre les évènements, fait que cette théorie peut être difficile à mettre en œuvre, ce qui peut justifier l'emploi d'autres modes de représentation de l'incertain. Pour le moment, nous considérons les résultats principaux de la théorie des probabilités, puis nous indiquerons quelques méthodes qui ont été proposées pour réduire un peu la complexité de leur utilisation.

Notons que l'on peut distinguer *deux types de probabilités* :

- des évaluations fréquentielles (statistiques),
- des évaluations subjectives, liées ou non aux précédentes.

7.2.2 Utilisation des probabilités

Rappelons quelques résultats de la théorie des probabilités.

On démontre d'abord à partir des axiomes de Kolmogorov, que

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \quad \text{et}$$
$$P(A) + P(\neg A) = 1 .$$

Ensuite, on considère que deux *évènements* (ou hypothèses) sont *indépendants* si

$$P(E1 \wedge E2) = P(E1) * P(E2) .$$

On définit la *probabilité conditionnelle* d'une hypothèse H, étant donné une observation E, par $P(H/E) = P(H \wedge E)/P(E)$; comme l'on a aussi $P(E/H) = P(H \wedge E)/P(H)$, on établit le ***théorème de Bayes*** :

$$P(H/E) = \frac{P(H) * P(E/H)}{P(E)}$$

et, puisque $P(E) = P(H) * P(E/H) + P(\neg H) * P(E/\neg H)$,
on peut aussi écrire

$$P(H/E) = \frac{P(H) * P(E/H)}{P(E/H) * P(H) + P(E/\neg H) * P(\neg H)}.$$

Cette formule se généralise à plusieurs hypothèses $H_1, \ldots, H_n$, mutuellement exclusives et exhaustives :

$$P(H_i/E) = \frac{P(H_i) * P(E/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) * P(E/H_k)}.$$

Dans le cas de plusieurs observations $E_1, E_2, \ldots, E_m$, on peut écrire :

$$P(H_i/(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_m)) = \frac{P(H_i) * P(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_m/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) * P(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_m/H_k)}.$$

La principale difficulté est alors que, si l'on a m observations possibles et n hypothèses, on doit évaluer n probabilités a priori et $n * 2^m$ probabilités conditionnelles !

Pour réduire le nombre de ces probabilités conditionnelles, on suppose souvent *l'indépendance conditionnelle* des observations vis-à-vis des hypothèses, ce que l'on peut exprimer par

$$P((E_i \wedge E_j)/H) = P(E_i/H) * P(E_j/H) ;$$

le théorème de Bayes s'écrit alors :

$$P(H_i/(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_m)) = \frac{P(H_i) * P(E_1/H_i) * P(E_2/H_i) * \cdots * P(E_m/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) * P(E_1/H_k) * P(E_2/H_k) * \cdots * P(E_m/H_k)}$$

Cette formule est valide à trois conditions :

- $H_1, \ldots, H_n$ doivent être mutuellement exclusives,
- $H_1, \ldots, H_n$ doivent être exhaustives,
- il doit y avoir indépendance conditionnelle des observations par rapport aux hypothèses.

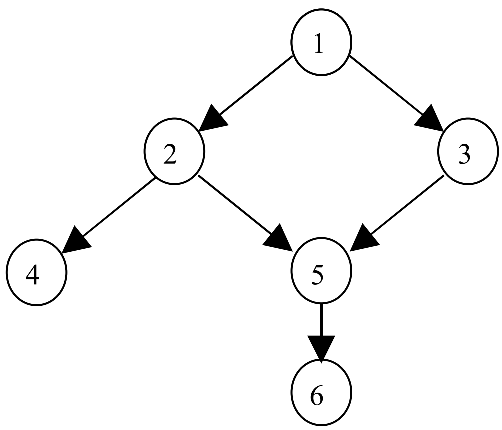
On suppose souvent que ces trois conditions sont vérifiées (en particulier l'indépendance), mais cette approximation est parfois insuffisante ; il faut alors trouver un moyen de ne considérer que les probabilités conditionnelles associées à des ensembles d'évènements non indépendants.

Pour cela, on dispose d'une méthode : les réseaux Bayésiens (Bayesian Networks) de Judea Pearl.

7.2.3 Les réseaux bayésiens

Un réseau bayésien est un graphe orienté acyclique (D.A.G. ou *directed acyclic graph*), dans lequel il y a un arc allant d'une hypothèse, *Hi,* à une autre, *Hj*, si et seulement si *Hi* est une cause possible de *Hj* .

Exemple



Dans le réseau bayésien ci-dessus,
- l'évènement 1 est une cause possible des événements 2 et 3,
- l'évènement 2 est une cause possible des événements 4 et 5,
- l'évènement 3 est une cause possible de l'événement 5,
- l'évènement 5 est une cause possible de l'événement 6.

On n'a alors besoin de connaître que (!) :

$P(H2/H1)$, $P(H2/\neg H1)$, $P(H3/H1)$, $P(H3/\neg H1)$, $P(H4/H2)$, $P(H4/\neg H2)$, $P(H5/(H2 \wedge H3))$, $P(H5/(H2 \wedge \neg H3))$, $P(H5/(\neg H2 \wedge H3))$, $P(H5/(\neg H2 \wedge \neg H3))$, $P(H6/H5)$, $P(H6/\neg H5)$, avec, en plus, les probabilités a priori :

$$P(H1), P(H2), P(H3), P(H4), P(H5), P(H6).$$

7.2.4 Méthode simplifiée en cas d'indépendance réelle ou supposée

Cette méthode a été utilisée initialement dans le système expert ***Prospector***, le premier système expert à avoir été rentabilisé, puisqu'il a permis de découvrir un gisement de molybdène (métal rare).

Principe

1) On considère une hypothèse H et une observation E, composée d'évènements $E1, \ldots, En$;

- si les évènements $E1, \ldots, En$ sont mutuellement indépendants, on a :

$$P(E1, E2, \ldots, En) = P(E1) * P(E2) * \ldots * P(En) ;$$

- sinon, on suppose que

$$P(E1, E2, \ldots, En) = \min_{i=1,n} P(Ei).$$

2) On définit alors deux facteurs :

- l'évaluation des *chance*s de H (odds) :

$$O(H) = \frac{P(H)}{P(\neg H)} = \frac{P(H)}{1-P(H)} ;$$

- la *vraisemblance* (likehood) de E quand H est vrai

$$\lambda(E/H) = \frac{P(E)}{P(E/\neg H)}.$$

3) Le théorème de Bayes s'écrit alors :

- si E est vrai :

$$O(H/E) = \lambda(E/H) * O(H) = \lambda * O(H);$$

- si E est faux :

$$O(H/\neg E) = \lambda(E/\neg H) * O(H) = \overline{\lambda} * O(H),$$

avec $\lambda = \lambda(E/H)$ et $\overline{\lambda} = \lambda(E/\neg H)$.

Cette méthode permet d'écrire des formules comme

$$\lambda((E \wedge F)/H) = \lambda(E/H) * \lambda(F/H),$$

pour prendre en compte des symptômes successifs.

7.3 La théorie des croyances (dite de Dempster-Shafer)

7.3.1 Principe

1°) On considère un ensemble H d'hypothèses exhaustives et mutuellement exclusives :

$$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\} ;$$

2°) On définit une fonction m (appelée b.p.a. pour "basic probability assignment" : assignation de probabilités de base) qui assigne des "masses de probabilités", prises dans l'intervalle dans [0, 1], à chaque sous-ensemble de H ; la fonction m est telle que :

$$m(\varnothing) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{A \subseteq H} m(A) = 1.$$

On appelle *élément focal* tout sous-ensemble A de H, tel que $m(A) > 0$,

3°) On définit alors la croyance, *Bel*, dans un sous-ensemble d'hypothèses A, par :

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

et la plausibilité, *Pl*, d'un sous-ensemble d'hypothèses A, par :

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) = \sum_{B,\, B \cap A \neq \varnothing} m(B)$$

Par exemple

Si l'on considère $H = \{a, b, c, d\}$, on peut écrire

$$Bel(\{a, c, d\}) = m(\{a\}) + m(\{c\}) + m(\{d\}) + m(\{a, c\}) + m(\{a, d\}) + m(\{c, d\}) + m(\{a, c, d\}) ;$$

$$Pl(\{a, b\}) = m(\{a\}) + m(\{a, b\}) + m(\{a, c\}) + m(\{a, d\}) + m(\{a, b, c\}) + m(\{a, b, c, d\}) + m(\{a, b, d\}) + m(\{b\}) + m(\{b, c\}) + m(\{b, d\}) + m(\{b, c, d\}).$$

Heureusement, le nombre d'éléments focaux est généralement faible, ce qui réduit le nombre de masses effectivement utilisées.

7.3.2 Propriétés de la croyance et de la plausibilité

$$Pl(\varnothing) = Bel(\varnothing) = 0 ;$$

$$Pl(H) = Bel(H) = 1 ;$$

$Bel(A) \leq Pl(A)$;

$Bel(A) + Bel(\neg A) \leq 1$;

$Pl(A) + Pl(\neg A) \geq 1$;

Si $A \subseteq B$, $Bel(A) \leq Bel(B)$ et $Pl(A) \leq Pl(B)$.

On représente parfois les croyances par un intervalle

$$[Bel(A), Pl(A)] ;$$

et, dans ce cas,

[0, 1] exprime que l'on n'a aucune croyance pour ou contre A (situation d'ignorance totale) ;

[0, 0] exprime que l'on est totalement certain que A est faux ;

[1, 1] exprime que l'on est totalement certain que A est vrai.

7.3.3 Cas de plusieurs observations (indépendantes)

Si l'on considère deux observations $e1$ et $e2$, associées respectivement à deux b.p.a., $m1$ et $m2$, l'assignation de probabilités de base à l'ensemble $\{e_1, e_2\}$ peut être appelée $m12$; son évaluation doit être symétrique par rapport à $e1$ et $e2$.

Pour évaluer $m12$, on utilise généralement *la formule de Dempster* :

on note $\forall X \in 2^H \quad m12(X) = m1 \oplus m2(X)$, (*)

qui s'évalue par $m1 \oplus m2(X) = K * \sum_{A \cap B = X} m1(A) * m2(B)$,

où K est un coefficient de (re-)normalisation, tel que :

$$\frac{1}{K} = 1 - \sum_{A \cap B = \emptyset} m1(A) * m2(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m1(A) * m2(B).$$

Ce coefficient a pour rôle de répartir la masse de probabilité associée à l'ensemble vide d'hypothèses ($\emptyset$), entre les ensembles d'hypothèses plausibles.

On peut aussi garder la masse $m12(\emptyset)$ non nulle, pour exprimer le degré de contradiction entre les b.p.a.

En pratique, on construit un tableau à deux entrées m_1 et m_2, où l'on ne note que les éléments focaux de chaque b.p.a. ; un exemple de disposition possible est donné ci-dessous.

(*) 2^H est une notation qui représente l'ensemble des parties de H.

$m1$ \ $m2$	{a, b, c}	{a, b, d}
{d}	∅	{d}
{a, b}	{a, b}	{a, b}

se regroupent dans $m12(\{a, b\})$

Exemple

On considère un délit avec quatre suspects :

Alain, désigné par a
Bernard, par b
Claude, par c
Daniel, par d.

Un témoignage met en cause Alain ou Claude avec une masse $m1(\{a, c\}) = 0{,}6$;

un autre témoignage tend à disculper Claude, donc à mettre en cause les autres, c'est-à-dire les membres du sous-ensemble {a, b, d}, avec une masse $m2(\{a, b, d\}) = 0{,}7$.

On a donc :

$m1(\{a, c\}) = 0{,}6$; $m1(\{a, b, c, d\}) = 0{,}4$;

$m2(\{a, b, d\}) = 0{,}7$; $m2(\{a, b, c, d\}) = 0{,}3$.

(on attribue la masse restante dans chaque b.p.a. à l'ensemble de toutes les hypothèses possibles, pour avoir une somme à 1).

On construit alors le tableau des intersections des éléments focaux des deux b.p.a :

$m1$ \ $m2$	{a, b, d} (0,7)	{a, b, c, d} (0,3)
{a, c} (0,6)	{a} 0,42	{a, c} 0,18
{a, b, c, d} (0,4)	{a, b, d} 0,28	{a, b, c, d} 0,12

Donc : $m12(\{a\}) = 0{,}42$;

$m12(\{a, c\}) = 0{,}18$;

$m12(\{a, b, d\}) = 0{,}28$;

$m12(\{a, b, c, d\}) = 0{,}12$.

Et l'on déduit $Bel(a) = 0{,}42$, $Pl(a) = 1$

$Bel(b) = 0$, $Pl(b) = 0{,}4$

$Bel(c) = 0$, $Pl(c) = 0{,}3$

$Bel(d) = 0$, $Pl(c) = 0{,}3$

$Bel(\{a, c\}) = 0{,}42 + 0{,}18 = 0{,}60$.

On constate qu'il est difficile de conclure, mais que le coupable est sans doute a.

Remarque : la formule de Dempster rend l'agrégation des masses de probabilité commutative et associative ; on peut donc prendre les indices dans un ordre quelconque et l'un après l'autre.

7.3.4 Intérêts de l'utilisation des croyances

- Les croyances prennent en compte deux facteurs, la plausibilité et la croyance, qui encadrent la probabilité ; on démontre en effet que $\mathrm{Bel}(A) \leq \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{Pl}(A)$.
- L'utilisation des croyances permet de représenter l'ignorance totale, alors que, dans ce cas, la théorie des probabilités suppose l'équiprobabilité des hypothèses, ce qui représente mal cette situation d'ignorance.
- Les croyances n'utilisent pas d'évaluation a priori, parfois difficiles à évaluer quand on utilise des probabilités.

7.3.5 Inconvénients des croyances

- Comment évaluer les masses de probabilités ? (une probabilité, elle, peut être évaluée à partir du pari qu'un expert serait prêt à faire).
- Leur complexité est importante : on doit considérer tous les sous-ensembles de l'ensemble d'hypothèses.
- Il est difficile de choisir sur quoi baser une décision : sur les croyances ou sur les plausibilités ?

Pour remédier à ces défauts, on pourrait envisager d'utiliser des intervalles de probabilités ; cependant, c'est un mécanisme qui a été peu développé, sans doute en raison de sa complexité.

7.4 La théorie des possibilités

Elle est liée à la logique floue et permet facilement prendre en compte l'incertitude dans des formules floues. Dans ce cours d'introduction aux logiques non classiques, nous ne détaillerons pas l'utilisation de la théorie des possibilités pour représenter l'incertitude dans les formules floues ; nous renvoyons aux ouvrages cités dans la bibliographie.

7.4.1 Principes

A chaque proposition p sont associés deux indices numériques :

- sa possibilité $\Pi(p) \in [0, 1]$,
- sa nécessité $N(p) = 1 - \Pi(\neg p)$,

avec $\Pi(\bot) = 0$ et $N(\top) = 1$,

et l'on utilise les axiomes :

$$\Pi(p \vee q) = maximum(\Pi(p), \Pi(q))$$
$$N(p \wedge q) = minimum(N(p), N(q)).$$

L'incertitude sur p est alors représentée par $[N(p), \Pi(p)]$.

On a toujours $N(p) \leq \Pi(p)$ et, pour une formule p précise (non floue) :

si $\Pi(p) < 1$, alors $N(p) = 0$

si $N(p) > 0$, alors $N(\neg p) = 0$

On représente alors :

- l'ignorance complète par $\Pi(p) = 1$ et $N(p) = 0$
- la certitude dans p par $\Pi(p) = 1$ et $N(p) = 1$
- la certitude dans $\neg p$ par $\Pi(p) = 0$ et $N(p) = 0$

7.4.2 Intérêts de la théorie des possibilités

- Les calculs sont rapides, car ils n'utilisent que le minimum et le maximum.
- La théorie des possibilités permet de prendre en compte l'incertitude dans les systèmes à base de règles floues.

7.4.3 Inconvénients de l'utilisation des possibilités

- La notion de possibilité apparaît plus difficile à évaluer que celle de probabilité : la théorie des probabilités peut utiliser la sémantique du pari, mais comment évaluer le degré avec lequel une chose est possible ?
- Les opérateurs *minimum* et *maximum* ne sont pas toujours bien adaptés, mais on peut les remplacer par une norme triangulaire et la conorme triangulaire associée.

On fait parfois la confusion avec les degrés de vérité de formules floues ; en fait ce n'est pas la même chose, même si les possibilités s'avèrent pratiques pour représenter l'incertain en logique floue.

Remarques

1) Il est important de bien différencier un degré de vérité et une probabilité :

Par exemple, si nous considérons *Liquides*, l'ensemble des liquides et *Potables*, l'ensemble des liquides potables, et que nous trouvions deux bouteilles A et B telles que :

$$\mu_{Potables}(\mathrm{A}) = 0{,}9 \quad \text{et} \quad P(\mathrm{B} \in Potables) = 0{,}9\ ;$$

il vaut mieux boire A ; en effet, l'énoncé concernant A exprime que le contenu de A appartient aux liquides potables avec un degré de 90% (par exemple, A contient 10% d'eau de mer), alors que l'énoncé concernant B exprime que le contenu de B a 9 chances sur 10 d'être potable, mais on ne sait rien du liquide contenu dans un cas sur 10 et qui pourrait alors être un poison violent !

2°) La différence entre probabilité et possibilité peut être montrée par l'exemple suivant :
la formule *F*, signifiant *"Jean a mangé X tartines au petit déjeuner",* avec $X \in$ U = {0, 1, 2, 3, …}, peut se voir associer :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pi_F(X)$	1	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$P_F(X)$	0,1	0,3	0,5	0,1	0	0	0	0	0	0

où $\Pi_F(X) = \mu_F(X)$ est le degré de facilité avec lequel Jean peut manger X tartines

et $P_F(X)$ la probabilité qu'il en mange effectivement X.

On constate que si Jean mange assez souvent deux tartines (une fois sur deux), il lui serait possible d'en manger sans difficulté jusqu'à quatre et, avec une difficulté croissante, de plus grands nombres.

Problème : comment évaluer le degré de facilité ou de difficulté ?

N.B. Ces deux exemples sont dus à L. Zadeh.

7.5 Autres méthodes : méthodes "empiriques"

La manipulation de connaissances incertaines peut être effectuée par des méthodes ad'hoc, moins fondées théoriquement, mais qui s'avèrent souvent efficaces.

Par exemple, un des premiers systèmes experts, appelé MYCIN, utilisait deux coefficients :

MB (*measure of belief*) et *MD* (*measure of disbelief*) ;

et l'on y évaluait un *facteur de confiance, CF* (*confidence factor*) par :

$$CF = MB - MD$$

ou, parfois, $CF = (MB - MD) / 1 - \min(MB, MD)$

Plus généralement, on peut construire des représentations de l'incertain avec deux facteurs, α et β :

α est le degré jusqu'où on peut croire en une proposition p,

β est le degré jusqu'où on peut croire en sa négation $\neg p$,

et l'on choisit une t-norme et la t-conorme associée, pour évaluer les opérateurs *"et"* et *"ou"* dans les formules logiques.

7.6 Conclusions

La représentation de connaissances incertaines peut s'effectuer par diverses méthodes, qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients :

- l'utilisation des probabilités est la méthode la plus rigoureuse, mais elle demande d'évaluer de nombreuses probabilités et de connaître les dépendances entre les évènements ; elle est souvent biaisée dans le cas de l'ignorance totale : de nombreux exemples montrent que choisir l'équiprobabilité des hypothèses dans ce cas, est peu satisfaisant. Des intervalles de probabilités pourraient résoudre ce problème, mais les mécanismes deviendraient, alors, encore plus complexes.

- la représentation de l'incertain par des fonctions de croyances est une approche voisine de celle des intervalles de probabilités, avec une plus grande complexité ; elle pose le problème de l'évaluation des "masses de probabilités" : quelle signification rigoureuse peut-on donner aux valeurs choisies ?

- l'utilisation de la théorie des possibilités pose le même problème d'évaluation des coefficients de possibilité et nécessité ; par contre, la complexité est réduite, puisque les opérateurs mis en œuvre sont uniquement le *minimum* et le *maximum*. Il est à remarquer aussi que cette théorie ne se préoccupe pas de la dépendance ou de l'indépendance des faits considérés : la représentation de l'incertitude en est simplifiée, mais au détriment d'une certaine rigueur.

Dans une application, il est conseillé de choisir la méthode qui semble a priori la mieux adaptée, puis, après quelques essais, de changer, si nécessaire, le mode de représentation choisi pour évaluer l'incertain ; il faut avoir prévu cette possibilité dans la conception des outils pour que ce changement soit facile à réaliser !

7.7 Exercices

(*Corrigés page 186*)

1) Parmi les énoncés ci-dessous, indiquez ceux qui expriment l'incertain et/ou l'imprécis ?

A : Il sera vraisemblablement absent.

B : Ma voiture ne fonctionne pas très bien.

C : Il est admis en master.

D : La température extérieure est sans doute fraîche.

E : Elle est probablement très intelligente.

F : Il a obtenu 15 au contrôle de logique.

G : Je vais sans doute rater mon train.

H : Le temps n'est pas très beau.

I : Ce tableau est cher.

J : Il a raté son train.

K : Il sera sans doute absent à l'examen.

L : La température du radiateur est probablement élevée.

2) On considère un système S comportant trois composants *a*, *b*, *c*, dont un au plus peut être défectueux.

Les pannes de S sont dues à :

a pour 20%, *b* pour 30% et *c* pour 50%.

Si les symptômes d'une panne sont $s1$, $s2$ et $s3$, on a constaté que:

une panne de provoque	*a*	*b*	*c*
$s1$ dans	30% des cas	60%	20%
$s2$ dans	60%	20%	30%
$s3$ dans	40%	60%	90%

Une panne se produit avec $s1$, $s3$ mais pas $s2$.

Quelles sont les probabilités de son origine ?

3) On suppose que les seules maladies bénignes sont les rhumes et les grippes et que leurs symptômes sont indépendants ; on a constaté que 80% de ces maladies sont des rhumes et que 20% sont des grippes.

Un rhume provoque

de la toux dans 60% des cas et

de la fièvre dans 80% des cas ;

Une grippe provoque

de la toux dans 20% des cas et

de la fièvre dans 80% des cas.

Que peut-on dire d'un malade qui tousse et qui a de la fièvre et d'un malade qui a de la fièvre sans tousser ? Et d'un malade qui ne tousse pas et n'a aucune fièvre ?

4) Un système d'aide au diagnostic considère 4 maladies $\{a, b, c, d\}$ et utilise la théorie des croyances (Dempster-Shafer) pour représenter l'incertain.
Un symptôme permet d'associer les masses de probabilités :

$m(\{a, b, c\}) = 0{,}4 \qquad m(\{a, b, c, d\}) = 0{,}1$
$m(\{a, b, d\}) = 0{,}2 \qquad m(\{c, d\}) = 0{,}2$
$m(\{b, c, d\}) = 0{,}1$

Quelles sont la croyance et la plausibilité du couple $\{a, b\}$, maladies dont le traitement est le même ?

5) Un système comporte 4 composants *a*, *b*, *c*, *d*, dont un seul peut être défectueux à un moment donné.

Un expert observant un symptôme s1, attribue l'origine d'une panne à l'aide des masses de probabilités de la théorie de Dempster-Shafer :

$m1(\{a, b, c\}) = 0{,}7 \qquad m1(\{d\}) = 0{,}1$

et, pour un autre symptôme s2, indépendant de s1 :

$m2(\{a, d\}) = 0{,}2 \qquad m2(\{b\}) = 0{,}4$

Déterminez, sans normalisation :
- les masses associées à l'ensemble des deux symptômes s1 et s2,
- les plausibilités et croyances en *a, b, c, d*, comme origines de la panne associée à s1 et s2.

6) On suppose que, dans un pays, il pleut 40% du temps. On a constaté que, quand il pleut, une demi-journée avant, il y a eu des nuages dans 60% des cas, ainsi qu'une variation notable de la pression atmosphérique dans 50 % des cas. Actuellement, il n'y a aucun nuage et la pression atmosphérique est stable. Pouvez-vous évaluer la probabilité qu'il pleuve une demi-journée plus tard ?

7) On suppose que, quand un ordinateur ne démarre plus du tout, il n'y a que deux pannes possibles et mutuellement exclusives :

- soit un défaut externe, dans 80 % des cas : coupure ou débranchement du câble d'alimentation secteur,
- soit un défaut interne : panne du bloc d'alimentation.

Un défaut interne provoque une odeur de brûlé dans 80 % des cas, alors que cela représente 10 % des cas pour un défaut externe. Que peut-on dire si une panne survient sans odeur particulière ?

8) Un modèle météorologique très simplifié distingue 3 types de temps : beau temps (*b*), nuageux sans pluie (*n*) et pluvieux (*p*), dans l'ensemble exclusif et exhaustif $\{b, n, p\}$.

A) On modélise le raisonnement du météorologiste par la théorie des probabilités. Le beau temps est présent 30% du temps et la pluie 30%.
Avant du beau temps, une baisse de pression survient dans 10% des cas et un vent de secteur nord dans 40% des cas. Avant un temps nuageux, une baisse de pression survient dans 30% des cas et un vent de secteur nord dans 20% des cas. Avant de la pluie, une baisse de pression survient dans 80% des cas et un vent de secteur nord dans 10% des cas. Quelles seront les prévisions si l'on constate à la fois une baisse de pression et un vent de secteur nord ? On supposera l'indépendance des observations par rapport aux prévisions (ce qui n'est pas vrai dans la réalité).

B) On modélise maintenant le raisonnement du météorologiste par la théorie des croyances (Dempster-Shafer).

Dans ce contexte, un prévisionniste associe à une baisse de pression, une masse de probabilité $m1(\{n, p\}) = 0{,}7$ et à un vent de secteur nord, une masse de probabilité $m2(\{b, n\}) = 0{,}8$; quelles seront les croyances et les plausibilités de chaque hypothèse élémentaire, si l'on a à la fois une baisse de pression et un vent de secteur nord ?

Comparez ces deux évaluations.

Chapitre 8

Corrigés des Exercices

8.1 Corrigés des exercices du chapitre 2

(*Énoncés à partir de la page 25*)

1 a) Vérifions que $\neg p = (p \wedge @p) \vee @(p \vee @p)$ est une tautologie.

p	$\boldsymbol{\neg p}$	$@p$	$p \wedge @p$ (***a***)	$p \vee @p$	$@(p \vee @p)$ (***b***)	$\boldsymbol{a \vee b}$
V	**F**	F	F	V	F	**F**
i	**i**	V	i	V	F	**i**
F	**V**	i	F	i	V	**V**

La deuxième et la dernière colonne sont identiques ;
la formule est donc prouvée.

b) Vérifions que $\alpha p = @(@p \vee @^2 p)$ est une tautologie.

p	$\boldsymbol{\alpha p}$	$@p$	$@^2 p$	$@p \vee @^2 p$	$\boldsymbol{@(@p \vee @^2 p)}$
V	**V**	F	i	i	**V**
i	**F**	V	F	V	**F**
F	**F**	i	V	V	**F**

La deuxième et la dernière colonne sont identiques :
la formule est prouvée.

c) $$Fc = @\,\underbrace{(p \wedge @p)}_{a} \;\vee\; @\,\underbrace{(p \wedge @^2p)}_{b} \;\vee\; @\underbrace{(@p \wedge @^2p)}_{c}$$

p	$@p$	$@^2p$	$p \vee @p$	$p \vee @^2p$	$@p \vee @^2p$	$@a$	$@b$	$@c$	Fc
V	F	i	V	V	i	F	F	V	V
i	V	F	V	i	V	V	V	F	V
F	i	V	i	V	V	V	F	F	V

Fc est toujours vraie : c'est une tautologie.

2) On veut construire la table de vérité, en logique trivaluée de Lukasiewicz, des formules

$F = (p \to \neg q) \vee (p \text{ } inconnu \to q) \vee (\neg p \to q \text{ } inconnu)$ et

$G = (p \to \neg q) \wedge (p \text{ } inconnu \to q) \wedge (\neg p \to q \text{ } inconnu)$.

Si l'on interprète l'énoncé *"F inconnu"* comme étant vrai si et seulement si la formule *F* est inconnue et comme étant faux dans les autres cas, on peut écrire :

$p \text{ } inconnu = \alpha\, @p$ et $q \text{ } inconnu = \alpha\, @q$.

La table de vérité des formules *F* et *G* est alors :

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	p *inconnu*	p *inconnu* $\to q$	q *inconnu*	$\neg p \to$ q *inconnu*	F	G
V	V	i	V	F	V	F	V	V	V
V	i	i	i	F	V	V	V	V	i
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F
i	V	F	V	V	V	F	i	V	i
i	i	i	V (*i*)	V	i	V	V	V	i
i	F	V	i	V	F	F	i	i	F
F	V	F	V	F	V	F	F	V	F
F	i	i	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	V	F

On peut remarquer que ces évaluations seraient les mêmes dans la logique de Kleene : seule la case grise, marquée (*i*) changerait, mais ni l'évaluation de *F,* ni celle de *G*.

3) Vérifions qu'en logique de Lukasiewicz trivaluée, la formule (dite de "De Morgan"),

$$\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q \text{ reste valide.}$$

Pour cela, construisons la table de vérité :

p	q	$p \vee q$	$\boldsymbol{\neg (p \vee q)}$	$\neg p$	$\neg q$	$\boldsymbol{\neg p \wedge \neg q}$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	i	V	**F**	F	i	**F**
V	F	V	**F**	F	V	**F**
i	V	V	**F**	i	F	**F**
i	i	i	**i**	i	i	**i**
i	F	i	**i**	i	V	**i**
F	V	V	**F**	V	F	**F**
F	i	i	**i**	V	i	**i**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

Les deux colonnes en gras sont bien identiques : la formule est bien démontrée.

4) Démontrons à l'aide de la table de vérité ci-dessous que, dans la logique trivaluée de Lukasiewicz, la formule

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg (p \wedge q)$$

est une tautologie :

				$\boldsymbol{a}$		$\boldsymbol{b}$	
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$\boldsymbol{a \rightarrow b}$
V	V	F	F	F	V	F	V
V	i	F	i	i	i	i	V
V	F	F	V	V	F	V	V
i	V	i	F	i	i	i	V
i	i	i	i	i	i	i	V
i	F	i	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	i	V	i	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

Puisque $a \to b$ s'évalue toujours à Vrai, cette formule est bien une tautologie.

Dans la logique trivaluée de Kleene, on a i $\to$ i $\equiv$ i ; les cases grisées prennent alors la valeur i ; la formule n'est donc pas une tautologie dans cette logique.

Nous pouvons remarquer que, dans la logique de Kleene, l'opérateur d'équivalence logique, $\leftrightarrow$, est différent des symboles d'égalité, =, ou d'identité, $\equiv$, qui expriment que les formules de part d'autre s'évaluent de manière identique dans tous les cas ; on peut donc écrire

$$(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg (p \wedge q) \quad \text{ou} \quad (\neg p \vee \neg q) \neg (p \wedge q),$$

sans avoir $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg (p \wedge q)$.

5) Exprimons dans une logique trivaluée, la formule, construite à partir de 3 symptômes *p, q, r* et définissant un syndrome *S*, tel que :

- *S* est vrai si et seulement si deux au moins des symptômes sont vrais ;
- *S* est incertain si et seulement si un seul des symptômes est vrai et au moins l'un des deux autres incertain ;
- *S* est faux dans tous les autres cas.

Pour exprimer *S* en fonction de *p, q, r*, la table de vérité n'est pas nécessaire, il suffit d'utiliser les spécifications ci-dessus pour écrire la formule e:n deux parties :

- *S* **est vrai** si au moins deux des symptômes sont vrais, donc *S* est vrai si et seulement si la sous-formule $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge r)$ est vraie, ce qui se traduit par la sous-formule *S1*

$$S1 = \alpha\,[\,(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge r)\,]\ ;$$

- *S* **est incertain** si et seulement si un seul des symptômes est vrai et au moins l'un des deux autres est incertain ; cette condition s'exprime par la sous-formule *S2* :

$$S2 = (p \wedge @q) \vee (p \wedge @r) \vee (q \wedge @p) \vee (q \wedge @r) \vee (r \wedge @p) \vee (r \wedge @q)$$

Cette sous-formule doit produire une valeur "incertain" uniquement quand elle vraie et, dans les autres cas, elle ne doit pas rendre la formule principale vraie. Cela est réalisé par le terme $\frac{1}{2} \wedge \alpha S2$.

La formule complète est donc

$$S = \alpha\,[\,(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge r)\,]$$
$$\vee\ ½ \wedge \alpha\,[\,(p \wedge @q) \vee (p \wedge @r) \vee (q \wedge @p) \vee (q \wedge @r)$$
$$\vee (r \wedge @p) \vee (r \wedge @q)\,].$$

Nous ne chercherons pas à simplifier cette formule : les méthodes adéquates ne sont pas du ressort de livre d'introduction, car elles ne sont pas faciles à mettre en œuvre. Ce qui est important, c'est d'avoir obtenu une formule qui correspond rigoureusement à l'énoncé ; des essais intuitifs de réduction de formules trivaluées aboutissent trop souvent à des erreurs, nous l'avons constaté...

6) Utilisons une table de vérité pour démontrer qu'en logique trivaluée de Kleene, on a

$$p \rightarrow q \equiv \neg\, p \vee q$$

			a	b
p	q	$\neg\, p$	$\neg\, p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	i	F	i	i
V	F	F	F	F
i	V	i	V	V
i	i	i	i	i
i	F	i	i	i
F	V	V	V	V
F	i	V	V	V
F	F	V	V	V

Nous constatons que les colonnes $a = \neg\, p \vee q$ et $b = p \rightarrow q$ ont les mêmes contenus : dans la logique trivaluée de Kleene, la définition classique de l'implication ($p \rightarrow q = \neg\, p \vee q$) est vraie (c'est d'ailleurs ainsi qu'elle est définie par Kleene).

En logique trivaluée de Lukasiewicz, i $\rightarrow$ i $\equiv$ V ; la case grisée deviendrait V, les colonnes a et b diffèreraient : la définition classique de l'implication n'est donc pas valide pour Lukasiewicz.

7) Testons la validité en logique trivaluée de Kleene, de la formule :

$$\alpha\,(p \to q) \equiv \ \alpha p \to \alpha q$$

Pour cela, nous en construisons la table de vérité :

p	q	$p \to q$	$\boldsymbol{\alpha\,(p \to q)}$	αp	αq	$\boldsymbol{\alpha p \to \alpha q}$
V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	i	i	**F**	V	F	**F**
V	F	F	**F**	V	F	**F**
i	V	V	**V**	F	V	**V**
i	i	i	**F**	F	F	**V**
i	F	i	**F**	F	F	**V**
F	V	V	**V**	F	V	**V**
F	i	V	**V**	F	F	**V**
F	F	V	**V**	F	F	**V**

On constate que sur les 2 lignes grisées, les valeurs de $\alpha(p \to q)$ et $\alpha p \to \alpha q$ diffèrent. Pour la logique de Lukasiewicz, cela aurait été le cas, mais uniquement pour la deuxième de ces deux lignes, puisque l'on y évalue $\alpha\,(\text{i} \to \text{i})$ à αV c'est-à--dire à V. L'équivalence proposée n'est donc pas une tautologie, tant pour la logique trivaluée de Kleene que pour celle de Lukasiewicz.

8) La formule $[(p \to q) \wedge p] \to q$ correspond à la règle d'inférence du modus ponens, valide en logique classique avec deux valeurs de vérité. Dans la logique trivaluée de Lukasiewicz, on peut chercher à vérifier cette formule à l'aide de la table de vérité ci-dessous.

Nous constatons que ce n'est pas une tautologie. En effet, le modus ponens des logiques classiques s'évalue à i quand p = i et q = F (case grisée). Dans ce cas, $p \to q$ s'évalue à i, $(p \to q) \wedge p$ aussi à i et le modus ponens à i $\to F$ c'est-à-dire *i.*

En ce qui concerne la logique trivaluée de Kleene, nous avons mis entre parenthèses les valeurs qui changent ; le modus ponens ne s'y généralise pas non plus.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
V	V	V	V	V
V	i	i	i	V (i)
V	F	F	F	V
i	V	V	i	V
i	i	V (i)	i	V (i)
i	F	i	i	i
F	V	V	F	V
F	i	V	F	V
F	F	V	F	V

9) On veut écrire la formule φ, trivaluée, construite avec les quatre variables *p, q, r, s* et telle que :

- φ est vraie si *r* ou *s* est vraie, à condition que ni *p* ni *q* ne soient vraies ;
- φ est inconnue, quand *r* ou *s* est inconnue ou quand (*p* ou *q*) est vraie et (*r* et *s*) aussi ;
- φ est fausse dans les autres cas.

Pour que φ soit vraie, si *r* ou *s* est vraie, à condition que ni *p* ni *q* ne soient vraies, on utilise la sous-formule :

$$V = \alpha\,[(r \vee s) \wedge \neg\, p \wedge \neg\, q]$$

(l'opérateur α permet de ne pas se préoccuper des valeurs "inconnu") ;

Une sous-formule *I,* vraie dans tous les cas où φ doit être inconnue, correspond aux conditions que *r* ou *s* soit inconnu ou que (*p* ou *q*) soit vrai en même temps que (*r* et *s*) ; elle peut s'exprimer par :

$$I = \alpha\{(@r \vee @s) \vee [(p \vee q) \wedge r \wedge s]\},$$

formule que l'on ne cherche pas à réduire.

La formule φ s'exprime alors par :

$$\varphi = V \vee (½ \wedge I),$$

soit, en remplaçant *V* et *I* par les formules associées :

$$\varphi = \alpha\,[(r \vee s) \wedge \neg\, p \wedge \neg\, q]$$
$$\vee\, (½ \wedge \alpha\{(@r \vee @s) \vee [(p \vee q) \wedge r \wedge s]\}) .$$

10) Pour que la formule *M,* que l'on cherche à construire, soit vraie quand au moins deux des variables *p, q, r* sont vraies, on peut utiliser le terme :

$$T1 = \alpha\,[(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$$

Pour que *M* soit indéterminée quand deux au moins des variables *p, q, r* sont indéterminées ou quand une est vraie, une autre fausse et la troisième indéterminée, le terme associé *T2* comporterait neuf sous-termes : trois pour exprimer que deux des variables sont indéterminées et six pour exprimer les cas où une variable est vraie, une autre fausse et la troisième indéterminée, tel

$$T2 = i \wedge \alpha\,[(@p \wedge @q) \vee (@p \wedge @r) \vee (@q \wedge @r) \vee (p \wedge @q \wedge @^2 r) \vee (p \wedge @r \wedge @^2 q) \vee ...]$$

Il est plus simple d'exprimer la condition pour laquelle *M* est fausse, et d'utiliser la négation de cette condition ; *M* est fausse quand au moins deux des variables sont fausses, donc quand

$C = [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)]$ est vrai, ou quand

$C' = [(@^2 p \wedge @^2 q) \vee (@^2 p \wedge @^2 r) \vee (@^2 q \wedge @^2 r)]$ est vrai.

On peut alors exprimer que *M* est au moins indéterminée quand *C* (ou *C'*) n'est pas vraie, le terme *T1* assurant que la formule est vraie quand au moins deux des variables sont vraies :

$$\begin{aligned} M &= T1 \vee (\, i \wedge \alpha C\,) \\ &= \alpha\,[\,(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)\,] \\ &\qquad \vee (\, i \wedge \alpha\, [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)]\,). \end{aligned}$$

8.2 Corrigés des exercices du chapitre 3

(*Énoncés de la page 53 et suivantes*)

1) Sur U, ensemble de vitesses, on a défini les deux sous-ensembles flous : les *vitesses rapides* et les *vitesses dangereuses*, par :

Vitesse	0	30	60	90	120	150
μ_{rapide}	0	0,1	0,3	0,8	1	1
$\mu_{dangereuse}$	0	0,3	0,6	0,9	1	1

A) Évaluons "*vitesse rapide → vitesse dangereuse*" par l'implication de Gödel : si $\mu(a) \leq \mu(b)$ $\mu_i(a, b) = 1$, sinon $\mu_i(a, b) = \mu(b)$.

Vitesse en km/h	0	30	60	90	120	150
dangereuse : $\mu(b)$ rapide : $\mu(a)$	0	0,3	0,6	0,9	1	1
0 km/h : 0	1	1	1	1	1	1
30 km/h : 0,1	0	1	1	1	1	1
60 km/h : 0,3	0	1	1	1	1	1
90 km/h : 0,8	0	0,3	0,6	1	1	1
120 km/h : 1	0	0,3	0,6	0,9	1	1
150 km/h : 1	0	0,3	0,6	0,9	1	1

Avec la prémisse
"vitesse assez rapide" = 0,3/30 + 0,6/60 + 1/90 + 0,7/120 + 0,4/150, le modus ponens généralisé s'obtient en prenant le minimum entre la prémisse et l'implication, puis le maximum par colonne (il est pratique de rappeler entre parenthèses le coefficient de l'implication) :

dangereuse rapide	0 km/h	30 km/h	60 km/h	90 km/h	120 km/h	150 km/h
0 km/h : 0	(1) 0	(1) 0	(1) 0	(1) 0	(1) 0	(1) 0
30 km/h : 0,3	(0) 0	(1) 0,3	(1) 0,3	(1) 0,3	(1) 0,3	(1) 0,3
60 km/h : 0,6	(0) 0	(1) 0,6	(1) 0,6	(1) 0,6	(1) 0,6	(1) 0,6
90 km/h : 1	(0) 0	(0,3) 0,3	(0,6) 0,6	(1) 1	(1) 1	(1) 1
120 km/h : 0,7	(0) 0	(0,3) 0,3	(0,6) 0,6	(0,9) 0,7	(1) 0,7	(1) 0,7
150 km/h : 0,4	(0) 0	(0,3) 0,3	(0,6) 0,4	(0,9) 0,4	(1) 0,4	(1) 0,4
maximum par colonne	0	0,6	0,6	1	1	1

D'où un résultat de : 0,6/30 +0,6/50+1/90+1/120+1/150,

B) L'implication de Lukasiewicz : $\mu_i(a, b) = \min(1 - \mu(a) + \mu(b), 1)$, s'évalue en

Vitesse en km/h	0	30	60	90	120	150
dangereuse : μ(b) rapide : μ(a)	0	0,3	0,6	0,9	1	1
0 km/h : 0	1	0,3	0,6	0,9	1	1
30 km/h : 0,1	0,9	1	1	1	1	1
60 km/h : 0,3	0,7	1	1	1	1	1
90 km/h : 0,8	0,2	0,5	0,8	1	1	1
120 km/h : 1	0	0,3	0,6	0,9	1	1
150 km/h : 1	0	0,3	0,6	0,9	1	1

Pour la même prémisse,
"*vitesse assez rapide*" = 0,3/30 + 0,6/60 + 1/90 + 0,7/120 + 0,4/150,
le modus ponens généralisé donne :

dangereuse rapide	0 km/h	30 km/h	60 km/h	90 km/h	120 km/h	150 km/h
0 km/h : 0	(1) 0	(0,3) 0	(0,6) 0	(0,9) 0	(1) 0	(1) 0
30 km/h : 0.3	(0,9) 0.3	(1) 0.3	(1) 0.3	(1) 0.3	(1) 0.3	(1) 0.3
60 km/h : 0.6	(0,7) 0.6	(1) 0.6	(1) 0.6	(1) 0.6	(1) 0.6	(1) 0.6
90 km/h : 1	(0,2) 0.2	(0,5) 0.5	(0,8) 0.8	(0,9) 0.9	(1) 1	(1) 1
120 km/h : 0.7	(0) 0	(0,3) 0.3	(0,6) 0.6	(0,9) 0.7	(1) 0.7	(1) 0.7
150 km/h : 0.4	(0) 0	(0,3) 0.3	(0,6) 0.4	(0,9) 0.4	(1) 0.4	(1) 0.4
maximum par colonne	0,6	0,6	0,8	0,9	1	1

D'où un résultat de 0,6/0 +0,6/30 +0,8/60+0,9/90+1/120+1/150, Dans les deux cas, on constate que la vitesse "*plutôt rapide*" est fortement dangereuse, alors qu'on s'attendrait à une vitesse *"plutôt dangereuse"*. De plus, l'implication de Lukasiewicz fait considérer une vitesse de 0km/h dangereuse avec un degré de 0,6.

De fait, le modus ponens généralisé avec les implications de Gödel ou de Lukasiewicz pour la règle *"Si X est A alors Y est B"* ne s'applique que si la formule prémisse est de la forme *"X est A' "*, où *A'* est un sous-ensemble flou **voisin** de *A*. Ici, pour tenir compte de la progression du danger avec la vitesse, il aurait été préférable de définir la relation entre la vitesse et le danger par une table établie avec l'aide d'un expert. Pour les exercices suivants, nous avons donc préféré représenter les règles floues en représentant la relation entre la prémisse et la conclusion dans une table, supposée construite avec l'aide d'un expert du domaine concerné.

2) Si la relation entre la fièvre et le nombre de doses de médicament prend en compte la règle :

"Si le malade est plutôt fiévreux,
alors la dose de médicament doit être modérée",

avec *"plutôt fiévreux"* = 0,4/37,5 + 1,0/38 + 0,3/39 + 0,1/40 ,
le sous-ensemble flou associé à *"une dose modérée"* peut être obtenu à l'aide du modus ponens généralisé (nous rappelons entre parenthèses les degrés de l'implication) :

T (°C)	μ_T \ Doses	1 u	2 u	3 u	4 u
37,5	0,4	(0,4) 0,4	(0,2) 0,2	(0,1) 0,1	(0,0) 0
38	1,0	(0,5) 0,5	(1,0) 1,0	(0,6) 0,6	(0,2) 0,2
39	0,3	(0,3) 0,3	(0,7) 0,3	(1,0) 0,3	(0,4) 0,3
40	0,1	(0,2) 0,1	(0,6) 0,1	(1,0) 0,1	(0,7) 0,1
maximum par colonne		0,5	1	0,6	0,3

D'où

"une dose modérée" = 0,5 / 1u + 1,0 / 2u + 0,6 / 3u + 0,3 / 4u ,
ce qui semble raisonnable !

3) Si la table prend en compte la règle :

"Si la vitesse est grande, la consommation est élevée",

avec *"grande vitesse"* = 0,1/lent + 0,5/modéré + 1,0/rapide,

le sous-ensemble flou associé à une "*consommation élevée*" peut être obtenu en appliquant le modus ponens généralisé :

consommation

vitesse : μvit	faible	moyenne	importante	forte
lente : 0,1	(0,8) 0,1	(0,2) 0,1	(0) 0	(0) 0
modérée : 0,5	(0,3) 0,3	(0,8) 0,5	(0,6) 0,5	(0,2) 0,2
rapide : 1,0	(0) 0	(0,4) 0,4	(0,8) 0,8	(1) 1
max./colonne	0,3	0,5	0,8	1

D'où le sous-ensemble flou associé à *"une consommation élevée"* :

0,3/faible + 0,5/moyenne + 0,8/importante +1,0/forte.

4) Nous considérons l'univers des températures :

T = {froid, frais, normal, chaud, brûlant}

et celui des pressions :

P = {faible, moyen, fort} .

Si le tableau qui représente la relation entre la température et la pression intègre la règle :

"Si la température est importante, la pression est élevée",

avec

"*température importante*" = 0,3/normal + 0,8/chaud + 1,0/brûlant,

nous pouvons utiliser le modus ponens généralisé pour déterminer le sous-ensemble flou associé à *"une pression élevée"*.

À nouveau, plutôt que de reproduire, à partir de l'énoncé, le tableau de la relation entre la température et la pression, nous rappelons, entre parenthèses, le degré de cette relation.

Pression / Température	faible	moyen	fort
froid 0,0	(0,8) 0,0	(0,2) 0,0	(0,0) 0,0
frais 0,0	(0,4) 0,0	(0,4) 0,0	(0,0) 0,0
normal 0,3	(0,2) 0,2	(0,8) 0,3	(0,1) 0,1
chaud 0,8	(0,1) 0,1	(0,6) 0,6	(0,8) 0,8
brûlant 1,0	(0,0) 0,0	(0,4) 0,4	(1,0) 1,0
maximum /colonne	0,2	0,6	1,0

D'où *"une pression élevée"* = 0,2/faible + 0,6/moyen + 1,0/fort.

5) Si nous avons *châtain* = 0,5/blond + 0,6/brun
assez grand = 0,6/moyen + 0,8/grand,

nous pouvons évaluer *"châtain **et** assez grand"* par le minimum, donc par

0,5/(blond, moyen) + 0,6/(brun, moyen) + 0,5/(blond, grand)
+ 0,6/(brun, grand).

Nous utilisons alors le modus ponens généralisé, en rappelant entre parenthèses l'implication :

				sensibilité	
teinte	∗ taille	μ	faible	modéré	fort
blond	grand	0,5	(0,0) 0,0	(0,6) 0,5	(1,0) 0,5
blond	moyen	0,5	(0,2) 0,2	(0,7) 0,5	(0,9) 0,5
blond	petit	0,0	(0,4) 0,0	(1,0) 0,0	(0,8) 0,0
brun	grand	0,6	(0,6) 0,6	(1,0) 0,6	(0,2) 0,2
brun	moyen	0,6	(0,7) 0,6	(0,8) 0,6	(0,1) 0,1
brun	petit	0,0	(1,0) 0,0	(0,4) 0,0	(0,0) 0,0
maximum / colonne :			0,6	0,6	0,5

Donc un résultat (très neutre) : 0,6/faible + 0,6/modéré + 0,5/fort.

6) Avec *"un vent assez fort"* = 0,5/modéré + 0,8/fort
et *"un fetch intermédiaire"* = 0,4/réduit + 0,8/étendu,
nous pouvons évaluer *"un vent assez fort **et** un fetch intermédiaire"* par

0,4/(modéré, réduit) + 0,4/(fort, réduit) + 0,5/(modéré, étendu) + 0,8/(fort, étendu)

D'où l'application du modus ponens généralisé (nous rappelons entre parenthèses le degré d'implication),

	conditions		
vent * fetch	agréables	agitées	dures
faible réduit 0,0	(1,0) 0,0	(0,1) 0,0	(0,0) 0,0
modéré réduit 0,4	(0,8) 0,4	(0,4) 0,4	(0,1) 0,1
fort réduit 0,4	(0,4) 0,4	(0,6) 0,4	(0,4) 0,4
faible étendu 0,0	(1,0) 0,0	(0,2) 0,0	(0,0) 0,0
modéré étendu 0,5	(0,7) 0,5	(1,0) 0,5	(0,5) 0,5
fort étendu 0,8	(0,0) 0,0	(0,8) 0,8	(1,0) 0,8
maximum / colonne :	0,5	0,8	0,8

D'où le résultat : 0,5/agréables + 0,8/agitées + 0,8/dures.

7) La sensation de confort s'évalue sur le domaine

C = {pénible, neutre, agréable},

en fonction de la température évaluée sur

T = {froid, doux, chaud}

et de l'humidité sur

H = {sec, moyen, saturé}.

Nous pouvons évaluer
*"une température plutôt chaude **et** une humidité assez élevée"*, avec

"température plutôt chaude" = 0,6/doux + 0,8/chaud
"humidité assez élevée" = 0,4/moyenne + 0,6/saturée

sur le produit cartésien des univers de température et d'humidité en prenant le minimum (***et***) des degrés d'appartenance à chacun des deux sous-ensembles flous, soit

0,4/(doux, moyen) + 0,4/(chaud, moyen) + 0,6/(doux, saturé) + 0,6/(chaud, saturé).

Appliquons le modus ponens généralisé sur le tableau, dont nous n'utilisons que les lignes associées à un degré de vérité non nul (nous reportons, ici encore, entre parenthèses, la valeur de l'implication).

			confort	
température ∗ humidité		agréable	supportable	pénible
doux	moyen	0,4	(1,0) 0,4	(0,8) 0,4	(0,0) 0,0
doux	saturé	0,6	(0,6) 0,6	(0,8) 0,6	(0,4) 0,4
chaud	moyen	0,4	(0,8) 0,4	(0,7) 0,4	(0,2) 0,2
chaud	saturé	0,6	(0,2) 0,2	(0,4) 0,4	(1,0) 0,6
maximum / colonne			0,6	0,6	0,6

D'où un résultat, très neutre :

0,6/agréable + 0,6/supportable + 0,6/pénible.

Si nous considérons maintenant

"une température moyenne" = 0,5/froid + 0,8/chaud et

"une humidité très forte" = 0,1/faible + 0,6/moyenne +1/forte,

nous pouvons évaluer une *"humidité pas très forte*", comme

"*non*(*humidité très forte*)", avec le complément $C(a) = 1-a$; soit

"humidité pas très forte = 0,9/faible + 0,4/moyenne +0/forte

Ainsi, *"une température moyenne et une humidité pas très forte*" correspond à

0,5/(froid, faible) + 0,8/(chaud, faible) + 0,4/(froid, moyenne) + 0,4/(chaud, moyenne) .

Appliquons à nouveau le modus ponens généralisé, en rappelant, entre parenthèses, le degré de l'implication :

température ∗ humidité			agréable	supportable	pénible
froid	faible	0,5	(0,4) 0,4	(0,8) 0,5	(0,2) 0,2
froid	moyenne	0,4	(0,6) 0,4	(0,6) 0,4	(0,0) 0,0
froid	forte	0,0	(0,8) 0,0	(0,4) 0,0	(0,0) 0,0
chaud	faible	0,8	(0,1) 0,1	(0,6) 0,6	(0,6) 0,6
chaud	moyenne	0,4	(0,0) 0,0	(0,8) 0,4	(1,0) 0,4
chaud	forte	0,0	(0,4) 0,0	(0,4) 0,0	(0,1) 0,0
max. par colonne			0,4	0,6	0,6

Soit un résultat de : 0,4/pénible + 0,6neutre + 0,6/agréable.

8) Si la table qui représente la relation entre la température, l'humidité et la combustion, intègre la règle :

*"Si l'humidité est assez élevée **ou** la température fraîche,*
alors la combustion est importante",

nous devons évaluer

*"une humidité assez élevée **ou** une température fraîche"*, avec
"température fraîche" = 0,8/froid + 0,4/doux et
"humidité assez élevée" = 0,2/sec + 0,6 / humide.

Considérons à cet effet, le produit cartésien des univers de discours {sec, humide} et {froid, doux, chaud}, en utilisant le ***maximum*** pour le "***ou***", soit :

0,8/(sec, froid) + 0,4/(sec, doux) + **0,2/(sec, chaud)**
+ 0,8/(humide, froid) + 0,6/(humide, doux) + **0,6/(humide, chaud).**

Il faut faire attention à ne pas oublier les termes en gras, qui ne découlent pas des sous-ensembles flous "*humidité assez élevée*" et "*température fraîche*", mais de l'opérateur ***ou*** qui oblige à considérer tous les éléments des univers de discours. Nous verrons, après application du modus ponens généralisé, que l'expert a sans doute commis cette erreur ! Appliquons donc le modus ponens généralisé :

combustion

température ∗ humidité	réduit	modéré	fort
Froid humide : 0,8	(0,0) : 0,0	(0,4) : 0,4	(1,0) : 0,8
Froid sec : 0,8	(0,2) : 0,2	(0,6) : 0,6	(0,8) : 0,8
Doux humide : 0,4	(0,2) : 0,2	(0,9) : 0,6	(0,7) : 0,6
Doux sec : 0,4	(0,3) : 0,3	(0,8) : 04	(0,5) : 0,4
Chaud humide : 0,0	(0,8) : 0,6	(0,5) : 0,5	(0,1) : 0,1
Chaud sec : 0,0	(1,0) : 0,1	(0,2) : 0,2	(0,0) : 0,0
Maximum / colonne	0,6	0,6	0,8

D'où,
une *"combustion importante"* = 0,6/réduit + 0,6/modéré + 0,8/fort.

Le terme "0,6/réduit" semble trop fort ; il est produit par le terme **0,6/(humide, chaud)** résultant de l'opérateur *"ou"* évalué ci-dessus.

Il est vraisemblable que l'expert n'a pas tenu compte que l'opérateur *"ou"* prendrait en compte d'autres modalités que celles explicitement mentionnées dans les sous-ensembles flous *"température fraîche"* et *"humidité assez élevée"*, alors que, pour le *"ou",* on doit considérer **le produit cartésien de la totalité des univers de discours**.

9) (*Énoncé de la page 58*)

A) L'adéquation à un profil cherché est calculée par l'agrégation pour tous les attributs, de la correspondance entre le profil d'un candidat et le profil requis. Les opérateurs d'agrégation qui semblent les mieux adaptés sont le minimum ou la moyenne.

Le *minimum* permet de faire un rejet très fort des candidats pour lesquels un des attributs est éloigné du profil désiré : si l'on a des attributs *A1, A2, An-1* avec une correspondance forte (éventuellement à 1) et un attribut *An* avec une correspondance faible (à la limite, 0), le profil global s'évaluera à une valeur faible (dans le cas limite, à 0).

Si ce choix du minimum pour l'agrégation rend la sélection trop stricte, la *moyenne* (éventuellement pondérée en fonction de l'importance relative attribuée aux critères) permet un bon compromis.

B) La correspondance entre la valeur effective d'un attribut flou et la valeur souhaitée est évaluée par

$$max_{modalités\ mA\ \ de\ l'\ attribut\ A}\left(min\left(\mu_{mA}(C),\mu_{mA}(S)\right)\right)$$

avec

- $\mu_{mA}(C)$, la valeur prise par la modalité *m* du candidat *C* pour l'attribut *A* et
- $\mu_{mA}(S)$, la valeur souhaitée, *S,* pour la modalité *m* de l'attribut *A*.

Pour un profil *"plutôt confirmé et niveau d'études élevé "*, avec
- *"plutôt confirmé"* = 0,4/débutant + 0,8/confirmé + 0,6/expert
- *"niveau d'études élevé"* = 0,4/licence + 0,6/master + 1,0/doctorat ,

et un candidat *"bien confirmé"* et de *"bon niveau d'études"*, avec
- *"bien confirmé"* = 0,2/débutant + 0,9/confirmé + 0,4/expert et
- *"bon niveau d'études"* = 0,5/licence + 0,8/master +0,6/doctorat ,

nous déterminons l'adéquation du candidat au profil cherché pour chaque attribut :

• pour l'attribut "expérience",

profil cherché = 0,4/débutant + 0,8/confirmé + 0,6/expert
profil du candidat = 0,2/débutant + 0,9/confirmé + 0,4/expert
minimum = 0,2 0,8 0,4
maximum = 0,8 ;

l'adéquation au profil pour cet attribut est donc de 0,8.

• pour l'attribut "niveau de formation"

profil cherché = 0,4/licence + 0,6/master + 1,0/doctorat
profil du candidat = 0,5/licence + 0,8/master + 0,6/doctorat,
minimum = 0,4 0,6 0,6
maximum = 0,6 ;

l'adéquation du candidat au profil pour cet attribut est donc de 0,6.

Si l'on prend le minimum pour l'agrégation des attributs, cette agrégation s'évalue à 0,6 ; on peut alors utiliser directement la table associant l'intérêt avec l'adéquation au profil :

intérêt / adéquation	faible	moyen	fort
0	1	0	0
0,2	0,8	0,1	0
0,4	0,5	0,5	0,2
0,6	**0,3**	**0,7**	**0,4**
0,8	0,1	1	0,6
1	0	0,8	1

Nous avons marqué en gras, la ligne associée à une adéquation de 0,6 ; elle nous indique l'intérêt que présente le candidat par rapport au profil comme "0,3/faible + 0,7/moyen + 0,4/fort" ; cet intérêt peut se lire comme *"plutôt moyen"*.

Si l'on utilise la moyenne pour calculer l'agrégation, celle-ci s'évalue à 0,7 ; par interpolation dans la table ci-dessus on obtient un intérêt de "0,2/faible + 0,8/moyen + 0,5/fort" ; cet intérêt peut alors se lire comme *"moyen à assez fort"*. Le candidat semble ainsi un peu plus intéressant. Cependant, dans le cas d'un choix entre plusieurs candidats, on comparerait les évaluations obtenues avec la même méthode d'agrégation, ce qui, pour ce candidat, atténuerait la différence ; cela ne serait pas le cas pour les candidats ayant un profil déséquilibré.

8.3 Corrigés des exercices du chapitre 4

(*Énoncés de la page 79*)

1) A) Validité dans S4 de : $p \to \Box \Diamond p$?
Prenons la négation de cette formule :

(*w0*)	(1)	$\neg [p \to \Box \Diamond p]$ *	d'où :
	(2)	p	(de 1)
	(3)	$\neg \Box \Diamond p$ *	" "
	(4)	$\Diamond \neg \Diamond p$	(de 3)
(*w1*)	(5)	$\neg \Diamond p$	(de 4)
	(6)	$\neg p$	(de 5)

On ne peut pas aller plus loin : dans S4, la formule n'est pas une tautologie.

B) Dans S5, la relation d'accessibilité entre les mondes est réflexive, transitive et symétrique (et euclidienne). De *w1*, la formule $\neg \Diamond p$, identique à $\Box \neg p$, doit remonter dans *w0*, ce qui ajoute à *w0* la formule $\neg p$, contradictoire avec p. (cf. l'arbre ci-après)

(*w0*) $\neg [p \to \Box \Diamond p]$ *

p $\neg \Diamond p$ $\neg p$ $\perp$

$\neg \Box \Diamond p$ *

$\Diamond \neg \Diamond p$

(*w1*) $\neg \Diamond p$ ($\neg \Diamond p$ remonte en *w0*)

$\neg p$

La négation de la formule est contradictoire; la formule est donc une tautologie.

2) Évaluons dans S4 puis dans S 5, la validité de $\Diamond \Diamond p \to \Box \Diamond p$

A) Dans S4 :	$\neg [\Diamond \Diamond p \to \Box \Diamond p]$	(1)
(*w0*)	$\Diamond \Diamond p$	(2) de (1)
	$\neg \Box \Diamond p$	(3) " " (= $\Diamond \neg \Diamond p$)

(2) amène à considérer ($w1$) : $\Diamond p$ (4)

---

(4), à considérer ($w2$) : p aucune contradiction !

---

(3) amène à considérer ($w3$) : $\neg \Diamond p$ (5)

---

et (5), à considérer ($w4$) : $\neg p$ encore aucune contradiction !

Dans S4, la formule considérée n'est donc pas une tautologie.

B) Dans S5, la formule (5) de *w3* ($\neg \Diamond p$) doit remonter dans les autres mondes, en particulier dans *w2*, où elle induit $\neg p$, d'où une contradiction. La formule initiale est donc une tautologie dans S5.

3)
A) Testons la validité dans S4 de $\neg p \rightarrow \neg \Diamond \Box p$;
pour cela, considérons la négation de cette formule :

($w0$) $\neg \{\neg p \rightarrow \neg \Diamond \Box p\}$ * (1)
$\neg p$ (2) de (1)
$\Diamond \Box p$ (3) " "

---

considérons un monde ($w1$) avec $\Box p$ (4) de (3)
dont on ne peut déduire que p (5) de (4)

Il n'y a pas de contradiction : dans S4, la formule n'est pas une tautologie.

B) Dans S5 :

($w0$) $\neg \{ \neg p \rightarrow \neg \Diamond \Box p \}$ *
d'où $\neg p$ $\Box p \rightarrow p$ $\perp$
" " $\Diamond \Box p$

Considérons un monde ($w1$) $\Box p$ ($\Box p$ remonte en $w0$)
p

On constate une contradiction dans le monde *w0* : dans S5, la formule est une tautologie.

4) Cherchons la validité dans S4 des formules suivantes

a) $\Box p \to p$:

considérons sa négation :

	$\neg [\Box p \to p]$ *	(1)
	$\Box p$	(2)
(*w0*)	$\neg p$	(3)
	p	(4) de (2)
	$\perp(3, 4)$	contradiction entre (3) et (4).

La négation de la formule est contradictoire; la formule est donc une tautologie.

b) $p \to \Box p$:

considérons sa négation dans le monde courant, *w0* :

	$\neg [p \to \Box p]$ *	(1)
(*w0*)	p	(2) de (1)
	$\neg \Box p$	(3) " " (ou $\Diamond \neg p$)

---

il n'y a pas de contradiction dans *w0 ;* on considère un autre monde :

(*w1*)	$\neg p$	(4) de (3).

On ne peut ajouter aucune autre formule, ni dans *w0* ni dans *w1* : la négation de la formule n'est pas contradictoire ; la formule n'est pas une tautologie.

c) Déterminons la validité de $\Box(p \vee \neg p)$ dans S4 ;

considérons sa négation dans le monde courant, *w0*

(*w0*)	$\neg \Box(p \vee \neg p)$	(1)

---

on doit considérer le monde *w1* :

	$\neg (p \vee \neg p)$ *	(2) de (1)
(*w1*)	p	(3) de (2)
	$\neg p$	(4) " "
	$\perp(3, 4)$	contradiction entre (3) et (4)

La formule est donc une tautologie.

d) Quelle est la validité dans S4 de la formule $\Box \neg p \rightarrow \neg \Diamond p$?

Considérons sa négation :

	$\neg [\Box \neg p \rightarrow \neg \Diamond p]$	* (1)
	$\Box \neg p$	(2) de (1)
(*w0*)	$\Diamond p$	(3) " "
	$\neg p$	(4) de (2)

---

il n'y a pas de contradiction ; on considère un autre monde, *w1* :

	p	(5) de (3)
(*w1*)	$\Box \neg p$	(6) report de (2)
	$\neg p$	(7) de (6)
	$\perp$(5, 7)	contradiction entre (5) et (7)

La négation de la formule est contradictoire ; la formule est donc une tautologie.

e) Validité de $\Box (\Box p \vee \neg \Diamond p)$ dans S4 ?

Considérons sa négation :

(*w0*)	$\neg \Box (\Box p \vee \neg \Diamond p)$	* (1)

---

on ne peut que considérer immédiatement un autre monde :

(*w1*)	$\neg (\Box p \vee \neg \Diamond p)$	* (2) de (1)
	$\neg \Box p$	(3) de (2)
	$\Diamond p$	(4) " "

---

on doit considérer un monde associé à la formule (3) :

(*w2*)	$\neg p$	il n'y a pas de contradiction ;

---

on considère alors un monde associé à la formule (4) :

(*w3*)	p	il n'y a toujours pas de contradiction.

La négation de la formule n'est pas contradictoire ; la formule n'est donc pas une tautologie.

f) Pour déterminer la validité dans S4 de $\neg\Box\neg(p \vee \Box\neg\Box p)$, partons de sa négation :

(*w0*)	$\Box\neg(p \vee \Box\neg\Box p)$	(1)

Nous devons considérer *w1,* un des mondes accessibles depuis *w0* :

(*w1)*	$\neg(p \vee \Box\neg\Box p)$	(2) de (1)
	$\neg p$	(3) de (2)
	$\neg\Box\neg\Box p$	(4) " "

puis un monde *w2,* à partir de (4), où $\neg\neg\Box p$ ($\equiv \Box p$) est vrai :

(*w2)*	$\Box p$	(5), de (4)

et, finalement, *w3,* un des mondes accessibles depuis *w2* :

(*w3)*	p	(6), de (4)

Il n'y a pas de contradiction : dans S4, la formule n'est pas une tautologie. On peut remarquer que ce résultat ne serait plus vrai dans S5, où la formule (5), $\Box p$, devrait remonter vers *w1* et y faire écrire *p,* ce qui entrerait en contradiction avec (3).

g) Validité dans S4 de $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$?

Considérons à nouveau la négation de cette formule :

	$\neg[\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)]$		*	(1)
(*w0*)	$\Diamond(p \wedge q)$			(2) de (1)
	$\neg(\Diamond p \wedge \Diamond q)$		*	(3) " "
	$\neg\Diamond p$	$\neg\Diamond q$		(4) et (4') de (3)
(*w1*)	$(p \wedge q)$ *	$(p \wedge q)$ *		(5) de (2)
	$\neg p$	$\neg q$		(6) et (6') de (4) et (4')
	p	p		(7) de (2)
	q	q		(8) " "
	$\perp$(6, 7)	$\perp$(6', 8)		

Il y a contradiction entre les formules (6) et (7) et entre les formules (6') et (8).

Puisqu'il y a contradiction dans chaque branche, la formule initiale est une tautologie.

h) Pour $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$, la négation donne :

	$\neg [(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)]$ *		(1)
	$(\Box p \vee \Box q)$ *		(2) de (1)
($w0$)	$\neg \Box(p \vee q)$		(3) " "
	$\Box p$	$\Box q$	(4) et (4') de (2)
	p	q	(5) et (5') de (4') et (4')

comme il n'y a pas de contradiction, considérons un autre monde :

	$\neg (p \vee q)$	$\neg (p \vee q)$	(6) et (6') de (3)
($w1$)	$\Box p$	$\Box q$	(7) et (7') : reports de (4) et (4')
	$\neg p$	$\neg p$	(8) et (8') de (6) et (6')
	$\neg q$	$\neg q$	(9) et (9') " " " "
	p	q	(10) et (10') de (7) et (7')
	$\perp$(8, 10)	$\perp$(9', 10')	contradictions

Il y a une contradiction dans chaque branche ; la formule initiale est donc une tautologie.

i) Pour la formule $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$, la négation est :

	$\neg [\Box (p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)]$ *		(1)
($w0$)	$\Box (p \vee q)$		(2) de (1)
	$\neg (\Box p \vee \Box q)$ *		(3) " "
	$\neg \Box p$		(4) de (3)
	$\neg \Box q$		(5) " "
	$p \vee q$ *		(6), de (2)
	p	q	(7) et (7') de (6)

il n'y a pas de contradiction ; considérons les mondes

($w1$) $\neg p$		($w2$) $\neg q$			(8) et (8') de (4) et (5)
$\Box(p \vee q)$		$\Box(p \vee q)$			(9) et (9') : reports de (2)
$p \vee q$		$p \vee q$			(10) et (10') de (9) et (9')
p	q	p	q		(11) (11') (11'') (11''') de (10) et (10')
$\perp$(8, 11)	?	?	$\perp$(8', 11''')		

Il n'y a pas de contradiction dans les branches de l'arbre repérées par des "?" ; la formule n'est donc pas une tautologie.

j) Pour tester dans S4 la validité de $\Box(\Box p \vee \Diamond \neg p)$, considérons sa négation :

($w0$)	$\neg \Box(\Box p \vee \Diamond \neg p)$	(1)

on doit tout de suite considérer le monde ($w1$)

	$\neg(\Box p \vee \Diamond \neg p)$ *	(2) de (1)
($w1$)	$\neg \Box p$	(3) de (2) $(\equiv \Diamond \neg p)$
	$\neg \Diamond \neg p$	(4) " " $(\equiv \Box \neg \neg p)$

si l'on ne voit pas la contradiction [(1)], on considère un autre monde :

	$\neg p$	(5) de (3)
($w2$)	$\Box p$	(6) report de (4)
	p	(7) de (6)
	$\perp(5, 7)$	contradiction entre (5) et (7)

Nous trouvons une contradiction ; la formule de départ est donc bien une tautologie.
Si l'on considère une logique aléthique (possibilités/nécessités), cette formule exprime qu'il est nécessaire qu'une proposition p soit nécessaire ou que sa négation soit possible.

k) Testons dans S4 la validité de $\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$; prenons sa négation :

	$\neg[\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)]$ *	(1)
($w0$)	$\Box(p \to q)$	(2) de (1)
	$\neg \Box(\Box p \to \Box q)$	(3) " "

considérons le monde $w1$:

	$\neg(\Box p \to \Box q)$ *	(4) de (3)
($w1$)	$\Box(p \to q)$	(5) report de (2)
	$\Box p$	(6) de (4)
	$\neg \Box q$	(7) " "
	$p \to q$ *	(8) de (5)
	p	(9) de (6)
	$\neg p$ $\quad$ q	(de 8) : contradiction sur p, pas sur q ;

(1) : Il y a dans $w1$, une contradiction entre la formule (3), $\neg \Box p$, et la formule (4), $\neg \Diamond \neg p$ (qui est identique à $\Box p$).

nous devons considérer un autre monde, *w2,* pour la branche de droite

	$\neg q$	(10) de (7) = $\neg \Box q$
	$\Box(p \to q)$	(11) report de (5)
($w2$)	$\Box p$	(12) report de (6)
	$p \to q$ *	(13) de (11)
	p	(14) de (12)
	$\neg p$ $\qquad$ q	(15) et (15') de (13)
	$\bot$(14, 15) $\qquad$ $\bot$(15', 10)	contradictions.

La formule est donc une tautologie.

l) Considérons la formule $\Box\Diamond p \to \Box\Diamond\Box\Diamond p$; sa négation est

	$\neg [\Box\Diamond p \to \Box\Diamond\Box\Diamond p]$ *	(1)
($w0$)	$\Box\Diamond p$	(2) de (1)
	$\neg \Box\Diamond\Box\Diamond p$	(3) " "
	$\Diamond p$	(4) de (2)

---

il n'y a aucune contradiction ; nous considérons le monde *w1* :

	$\neg \Diamond\Box\Diamond p$	(5) de (3)
($w1$)	$\Box\Diamond p$	(6) report de (2)
	$\neg \Box\Diamond p$	(7) de (5)
	$\bot$(6, 7)	contradiction entre (6) et (7).

La formule initiale est donc une tautologie.

Remarque : la réciproque $\Box\Diamond\Box\Diamond\, p \to \Box\Diamond\, p$ n'est pas vraie dans S4, mais elle l'est dans S5.

m) considérons la négation de $\Box\ [\ \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)\ ]$

($w0$) $\quad \neg \Box\ [\ \Box\ (p \to q) \to (\Box\ p \to \Box\ q)\ ]$

---

on ne peut que considérer un autre monde, *w1*

	$\neg\ [\ \Box\ (p \to q) \to (\Box\ p \to \Box\ q)\ ]$	* (1)
($w1$)	$\Box\ (p \to q)$	(2) de (1)
	$\neg\ (\Box\ p \to \Box\ q)$	(3) " "
	$\Box\ p$	(4) de (3)

	$\neg \Box q$	(5) " "
	$p \to q$ *	(6) de (2)
	p	(7) de (4)
	$\neg p$ q	(8) et (8') de (6)
	$\bot(7, 8)$?	

il y a contradiction sur p mais pas sur q ; nous considérons, alors, encore un monde, *w2* :

	$\neg q$	(9) de (5)
(*w2*)	$\Box(p \to q)$	(10) report de (2)
	$\Box p$	(11) report de (4)
	$p \to q$ *	(12) de (10)
	p	(13) de (11)
	$\neg p$ q	(14) et (14') de (12)
	$\bot(13,14)$ $\bot(9,14')$	contradictions sur p et sur q.

La négation de la formule est contradictoire dans tous les cas : la formule est une tautologie.

n) La formule $\Box(p \wedge q) \to \Box(\Diamond p \to \Diamond q)$ a pour négation :

	$\neg \{ \Box(p \wedge q) \to \Box(\Diamond p \to \Diamond q) \}$ *	(1)
(*w0*)	$\Box(p \wedge q)$	(2) de (1)
	$\neg \Box(\Diamond p \to \Diamond q)$	(3) " "

Considérons le monde *w1* :

	$\neg(\Diamond p \to \Diamond q)$ *	(4) de (3)
(*w1*)	$\Box(p \wedge q)$	(5) : report de (2)
	$\Diamond p$	(6) de (4)
	$\neg \Diamond q$	(7) " "

utilisons d'abord les formules avec une modalité $\Box$ ou $\neg \Diamond$ en tête :

$p \wedge q$ *	(8) de (5)
$\neg q$	(9) de (7)
p	(10) de (8)
q	(11) " "
$\bot(9, 11)$	contradiction entre (9) et (11)

La formule de départ est donc une tautologie.

o) Validité dans S4 de $\Box [p \to (q \vee r)] \to [\Box (p \to q) \vee \Box (p \to r)]$?
Prenons la négation de cette formule :

	$\neg \{\Box [p \to (q \vee r)] \to [\Box (p \to q) \vee \Box (p \to r)]\}$ *	(1)
	$\Box [p \to (q \vee r)]$	(2) de (1)
($w0$)	$\neg [\Box (p \to q) \vee \Box (p \to r)]$	(3) " "
	$\neg \Box (p \to q)$	(4) de (3)
	$\neg \Box (p \to r)$	(5) " "
	$p \to (q \vee r)$ *	(6) de (2)
	$\neg p \quad q \quad r$	décomposition de (6)

Comme il n'y a pas de contradiction, nous considérons un autre monde :

	$\neg (p \to q)$ *	(7) de (4)
($w1$)	$\Box [p \to (q \vee r)]$	(8) report de (2)
	p	(9) de (7)
	$\neg q$	(10) " "
	$p \to (q \vee r)$ *	(11) de (2)
	$\neg p \quad q \quad r$	décomposition de (11)
	$\bot \quad \bot \quad ?$	

---

il n'y a pas de contradiction sur r ;
nous considérons encore un autre monde à partir de $w0$:

	$\neg (p \to r)$	(12) de (5)
	$\Box [p \to (q \vee r)]$	(13) report de (2)
($w2$)	p	(14) de (12)
	$\neg r$	(15) de (12)
	$p \to (q \vee r)$	(16) de (13)
	$\neg p \quad q \quad r$	décomposition de (16)
	$\bot \quad ? \quad \bot$	

il n'y a pas de contradiction sur q.

Nous ne pouvons plus considérer de nouveaux mondes particuliers, associés à des modalités telles que $\Diamond$ ou $\neg \Box$ et il n' y a aucune contradiction dans les mondes déjà considérés : la formule initiale n'est donc pas une tautologie.

p) Dans S4, la formule $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$ a pour négation

$\neg [\, \Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)\,]$ * (1)

($w0$) $\Diamond(p \vee q)$ (2) de (1)	$\neg \Diamond(p \vee q)$ (2') de (1)	
$\neg(\Diamond p \vee \Diamond q)$ (3) " "	$(\Diamond p \vee \Diamond q)$ (3') " "	
$\neg \Diamond p$ (4) de (3)	$\Diamond p$	$\Diamond q$ (4') et (4") de (3')
$\neg \Diamond q$ (5) de(3)	$\neg (p \vee q)$	$\neg (p \vee q)$ (5') et (5") de (2')
$\neg p$ (6) de (4)	$\neg p$	$\neg p$ (6') et (6") de (5') et (5")
$\neg q$ (7) de (5)	$\neg q$	$\neg q$ (7') et (7") " " " "
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$ (repères des branches)

Il n'y a aucune contradiction : nous devons considérer un autre monde par branche.

- Pour la branche α, nous utilisons la formule (2) de $w0$, $\Diamond(p \vee q)$, et nous reportons (4), $\neg \Diamond p$, et (5), $\neg \Diamond q$.

- Pour la branche β, nous utilisons la formule (4') de $w0$, $\Diamond p$, et nous reportons (2'), $\neg \Diamond(p \vee q) = \Box \neg (p \vee q)$.

- Pour la branche γ, nous utilisons la formule (4") de $w0$, $\Diamond q$, et nous reportons aussi (2'), $\neg \Diamond(p \vee q) = \Box \neg (p \vee q)$.

D'où :

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$
$p \vee q$ (8) de (2)	p (8') de (4')	q (8") de (4")
$\neg \Diamond p$ (4)	$\Box \neg (p \vee q)$ (2')	$\Box \neg (p \vee q)$ (2')
$\neg \Diamond q$ (5)	$\neg (p \vee q)$ (10') de (2')	$\neg (p \vee q)$ (10") de (2')
$\neg p$ (9) de (4)	$\neg p$ (11') de (10')	$\neg p$ (11") de (10")
$\neg q$ (10) de (5)	$\neg q$ (12') " "	$\neg q$ (12") " "
p (13) $\quad q$ (13') de (8)	$\perp$(8', 11')	$\perp$(8", 12")
$\perp$(13,9) $\perp$(13',10)		

Il y a une contradiction dans chaque branche : la formule de départ est donc une tautologie.

8.4 Corrigés des exercices du chapitre 5

(*Énoncés à partir de la page 101*)

1) Exprimons sous deux formes différentes, l'énoncé

"Si la situation actuelle ne s'était pas produite auparavant,
elle ne se produira plus".

Si l'on représente la situation évoquée par une proposition "*situation*", qui décrit la situation, on peut choisir :

• **une logique avec datation** où *tnow* représente la date courante

$$[\ situation(tnow) \wedge \neg \exists t\ \ t < tnow \wedge situation(t)\ ] \rightarrow [\ \neg \exists t'\ \ t' > tnow \wedge situation(t')\ ]\ ;$$

• **une logique temporelle modale**

$[\ situation \wedge \neg\ P\ situation\ ] \rightarrow\ \neg\ F\ \ situation$, ou

$[\ situation \wedge H \neg\ situation\ ] \rightarrow\ G \neg\ situation$

2) Pour traduire dans une logique temporelle la phrase

"Il pleut et tant qu'il continuera à pleuvoir,
je garderai mon parapluie",

nous pouvons utiliser les propositions "*pluie*" et "*parapluie*", avec

• **une logique temporelle avec datation**

dans ce cas, nous exprimons successivement

- *"il pleut maintenant"* par $pluie(tnow)$;
- *"tant qu'il continuera à pleuvoir"*, est un énoncé associé à toute date *t,* postérieure à *tnow,* et qui n'a pas été précédée par une date *t',* placée aussi après *tnow,* et à laquelle il n'aurait pas plu, soit

  $$\forall t\ [t > tnow \wedge pluie(t) \wedge \neg \exists t'\ t' > tnow \wedge t' < t \wedge \neg\ pluie(t')]$$
- *"alors",* sous-entendu, correspond à une implication, et
- "*je garderai mon parapluie"*
  exprime qu'à la date *t, "j'aurais encore mon parapluie"*
  et se traduit par $parapluie(t)$.

Soit la formule complète :

$$\{\ pluie(tnow) \wedge \forall t\ [t > tnow \wedge pluie(t) \wedge \neg \exists t'\ t' > tnow \wedge t' < t \wedge \neg\ pluie(t')]\ \} \rightarrow parapluie(t)\ .$$

• **une logique temporelle modale par points**, permet d'écrire

$pluie \wedge F\,[(pluie \wedge \neg\, P \neg\; pluie) \rightarrow parapluie]$,

mais cette formulation n'est pas satisfaisante : on n'exprime pas correctement que la pluie a duré de l'instant présent jusqu'au moment futur associé à la modalité *F*. Il vaut donc mieux utiliser ici

• soit **une logique modale d'intervalles,** par exemple la logique modale d'intervalles de Shoham :

$pluie \wedge \langle A \rangle\ (pluie \rightarrow parapluie)$;

• soit **une logique temporelle modale par points avec l'opérateur "until"** (*U*) :

$pluie \wedge [\,parapluie\ U \neg\, pluie]$.

3) Pour l'énoncé

"Quelles que pourront être les mesures de prévention,
une panne se produira tôt ou tard",

utilisons le prédicat *"prévention*(*M*)*"* pour exprimer
que la mesure de prévention *M* a été prise et
la proposition *"panne"* pour énoncer qu'une panne se produit.

Nous pouvons alors choisir

- **une logique temporelle avec datation :**
  $\forall M\ \ \forall t\ prévention(M, t) \rightarrow \exists t'\ [t' > t \wedge panne(t')]$;
- **une logique temporelle modale arborescente :**
  $\forall M\, \forall P\ prévention(M) \rightarrow \forall F\ panne$;

Attention : $\forall M$ est une quantification sur la variable logique *M*, alors que $\forall P$ et $\forall F$ sont des modalités temporelles. Si le risque de confusion entre ces notations pose problème, on peut choisir d'autres symboles pour les opérateurs modaux temporels.

4) L'énoncé

"Tout fichier imprimable dont on requiert l'impression,
finira toujours par être imprimé",

peut s'exprimer avec les prédicats

"fichier", *"imprimable"*, *"requête"* (d'impression) et *"imprimé"* :

- **dans une logique temporelle avec datation :**
  $\forall X\ [fichier(X) \wedge imprimable(X)] \rightarrow$
  $[\forall t\ requête(X, t)\ \rightarrow\ \exists t'\ \ (t' > t \wedge imprimé(X, t'))]$;

- **dans une logique temporelle modale arborescente**

$$\forall X\,[fichier(X) \wedge imprimable(X)] \rightarrow [requête(X) \rightarrow \forall F\ imprimé(X)],$$

ou, ce qui est équivalent, mais plus "naturel" :

$$\forall X\,[fichier(X) \wedge imprimable(X) \wedge requête(X)] \rightarrow \forall F\ imprimé(X)\,.$$

(nous avons utilisé X comme variable pour désigner un fichier, plutôt que F, qui correspond à un opérateur modal en logique temporelle).

5) Traduisons l'énoncé

"Si deux personnes se sont rencontrées deux fois, elles se rencontreront encore par la suite",

avec un prédicat *"rencontre*(X, Y)*"*, symétrique, exprimant que deux personnes X et Y se rencontrent.

- **dans une logique temporelle avec datation**

$$\forall X\,\forall Y\,[\exists t\ rencontre(X, Y, t) \wedge \exists t'\ \ (t' > t \wedge rencontre(X, Y, t'))] \rightarrow \exists t''\,[t'' > t' \wedge\ rencontre(X, Y, t'')]$$

- **dans une logique temporelle modale arborescente vers le futur** (par exemple)

$$\forall X\,\forall Y\,[P\ rencontre(X, Y) \wedge rencontre(X, Y)] \rightarrow \forall F\ rencontre(X, Y)$$

6) Nous pouvons traduire l'énoncé

"Toute personne commençant un master, a obtenu auparavant une licence",

en utilisant les prédicats :

"personne", *"master"*, *"licence"*, *"commencer"*, *"obtenir"*.

- **dans une logique temporelle avec datation**

$$\forall X\,\forall M\ \ \forall t\in T\ \ [personne(X) \wedge master(M) \wedge commence(X, M, t)] \rightarrow\ \exists L\,\exists t'\,[licence(L) \wedge t'<t \wedge obtenir(X, L, t')]\ ;$$

- **dans une logique temporelle modale simple**

$$\forall X\,\forall M\,[personne(X) \wedge master(M) \wedge commence(X, M)] \rightarrow \exists L\ [licence(L) \wedge P\ obtenir(X, L)].$$

7) Traduisons l'énoncé :

"Tout programme qui n'a pas été relu avant d'être lancé, finira par se planter".

- **dans une logique temporelle avec datation**

$\forall X\ programme(X) \rightarrow [(\forall t\ lancé(X, t) \wedge \neg \exists t'\ (t' < t \wedge relu(X, t'))$
$\rightarrow \exists t''\ (t'' > t \wedge planté(X, t''))]$

ou, ce qui est équivalent,

$\forall X\ \forall t\ [(programme(X) \wedge lancé(X, t) \wedge \neg \exists t'\ (t' < t \wedge relu(X, t'))$
$\rightarrow \exists t''\ (t'' > t \wedge planté(X, t''))]$

- **dans une logique temporelle modale simple :**

$\forall X\ programme(X) \rightarrow [(\ lancé(X) \wedge \neg\ P\ relu(X)\ ) \rightarrow F\ planté(X)]$ ou
$\forall X\ [programme(X) \wedge\ lancé(X) \wedge \neg\ P\ relu(X)] \rightarrow F\ planté(X)$.

8) La formule

$\forall X\ promettre(jean, X) \rightarrow \forall F\ réaliser(jean, X)$,

correspond à une logique temporelle modale ramifiée (par points) ; cela se déduit de la modalité temporelle $\forall F$. Elle exprime que

"Tout ce que Jean promet, il le réalisera (quoi qu'il arrive)".

Dans **une logique temporelle avec datation**, on peut l'écrire sous la forme

$\forall X\ \forall t\ promettre(jean, X, t) \rightarrow\ \exists t'\ [t' > t \wedge réaliser(jean, X, t')]$.

9) On peut traduire

"Si, avant le départ du train, Alain n'est pas arrivé, nous ne l'attendrons jamais plus",

- **dans une logique temporelle avec datation :**

$[\exists t\ départTrain(t) \wedge\ \neg\ \exists t'\ \ (t' < t \wedge arriver(a, t))]$
$\rightarrow\ \neg \exists t''\ [\ t'' > t \wedge attendre(n, a, t'')]$

- **dans une logique temporelle modale :**

(par exemple, par points et ramifiée vers le futur) :

$[départTrain \wedge \neg\ P\ arriver(a)]\ \rightarrow\ \neg \exists F\ attendre(n, a)$;

ou, ce qui est équivalent,

$[départTrain \wedge \neg\ P\ arriver(a)]\ \rightarrow\ \forall F \neg\ attendre(n, a)$.

10) Considérons la formule temporelle modale

$$G(p \wedge q) \rightarrow (Gp \wedge Gq) ;$$

- elle peut se traduire dans une logique avec datation, par
  $\forall t\ [\ t > tnow \rightarrow (p(t) \wedge q(t))\ ] \rightarrow$
  $[\ \forall t\ (t > tnow \rightarrow p(t)\ ) \wedge \forall t\ (t > tnow \rightarrow q(t))]$;
- pour la démontrer sous sa forme modale, considérons sa négation :

$\neg\ [\ G(p \wedge q) \rightarrow (Gp \wedge Gq)\ ]$ * (1)

(t_{now}) $G(p \wedge q)$ (2) de (1)

$\neg\ (Gp \wedge Gq)$ * (3) " "

$\neg\ Gp$ | $\neg\ Gq$ (4) et (4') de (3)

$p \wedge q$ * | $p \wedge q$ * (5) et (5') de (2)

p | p

q | q

Il n'y a pas de contradiction ! Considérons ***une date*** par branche :

(ti) $\neg\ p$	($t'i$) $\neg\ q$	(6) et (6') de (4) et (4')
$G(p \wedge q)$	$G(p \wedge q)$	(7) et (7') report de 2
$p \wedge q$	$p \wedge q$	(8) et (8') de 7 et 7'
p	p	(9) et (9') de (8) et (8')
q	q	(10) et (10') " " "
$\perp$(6, 9)	$\perp$(6', 10')	

Il y a une contradiction dans chaque branche ;
la formule initiale est donc prouvée.

11) La logique associée à la formule $Gp \rightarrow oGp$ est une logique temporelle linéaire et discrète (op exprime que p sera vraie à l'instant suivant).
Pour la démontrer, considérons sa négation :

$\neg\ [\ Gp \rightarrow oGp\ ]$ (1)

($t0$) Gp (2) de (1)

$\neg\ oGp$ (3) " "

p (4) de (2)

($t1 = t0+1$) $\neg\ Gp$ (5) de (3)

Gp (6) report de (2)

$\perp$(5, 6) contradiction entre (5) et (6)

La formule initiale est donc une tautologie.

12) Pour démontrer que la formule $\mathrm{G}(p \rightarrow \mathrm{o}p) \rightarrow (\mathrm{o}p \rightarrow \mathrm{G}p)$ est une tautologie, considérons sa négation :

	$\neg\, [\, \mathrm{G}(p{\rightarrow}\mathrm{o}p) \rightarrow (\mathrm{o}p{\rightarrow}\mathrm{G}p)\,]$ *	(1)
	$\mathrm{G}(p{\rightarrow}\mathrm{o}p)$	(2) de (1)
(t_0)	$\neg\, (\mathrm{o}p{\rightarrow}\mathrm{G}p)$ *	(3) " "
	$\mathrm{o}p$	(4) de (3)
	$\neg\, \mathrm{G}p$	(5) " "
	$p \rightarrow \mathrm{o}p$ *	(6) de 2
	$\neg\, p$ $\qquad$ $\mathrm{o}p$	(7) et (7') de 6
	? $\qquad$?	pas de contradiction

plaçons nous en *t1 = t0+1* :

	p	(8) de (4)
(*t1*)	$\mathrm{G}(p{\rightarrow}\mathrm{o}p)$	(9) report de 1
	$p \rightarrow \mathrm{o}p$ *	(10) de 9
	$\neg\, p$ $\qquad$ $\mathrm{o}p$	(11) et (11') de 6
	$\perp$(11, 8) $\qquad$?	

il n'y a pas de contradiction dans la branche de droite ;

plaçons nous en *t2 = t0+2* :

	p	(12) de 11'
(*t2*)	$\mathrm{G}(p{\rightarrow}\mathrm{o}p)$	(13) report de 9
	$p \rightarrow \mathrm{o}p$	(14) de 13
	$\neg\, p$ $\qquad$ $\mathrm{o}p$	(15) et (15') de 14
	$\perp$(15, 12) $\qquad$?	

On constate que dans tous les instants successifs, on reporte désormais les mêmes formules. Dans tous les *ti* ($i > 0$), p sera vraie. Or la formule (5), $\neg\, \mathrm{G}p$, exprime que, à un instant au moins, la formule p sera fausse. A cet instant-là, il y aura une contradiction entre p et $\neg\, p$. La négation de la formule est donc contradictoire et la formule est donc une tautologie.

13) Pour exprimer, dans une logique temporelle avec réification du temps et dans une logique temporelle modale, l'énoncé

"Tout programme qui s'est planté
pourra se replanter tant qu'il n'aura pas été corrigé",

nous pouvons considérer un prédicat *"programme"*, un prédicat *"planter"* et un prédicat *"corrigé"* et exprimer la possibilité d'un plantage avec un prédicat spécifique "*peutSePlanter*" ou une modalité.

• **dans une logique avec réification du temps,**

$$\forall X\, [programme(X) \wedge \exists t\; Vrai(plantage(X), t) \wedge \forall t'\, (t' > t \wedge Faux(corrigé(X), t'))] \rightarrow Vrai(peutSePlanter(X), t')$$

ou, en groupant trois variantes de la formule ci-dessus :

$$\forall X\, [programme(X) \wedge \exists t\; Vrai(plantage(X), t)] \rightarrow [\, \forall t'\, (t' > t \wedge \neg\, Vrai(corrigé(X), t')) \rightarrow Vrai(\Diamond plantage(X), t')\,]$$

• **dans une logique temporelle modale,**

- on peut s'inspirer de cette deuxième formulation :

$$\forall X\, [programme(X) \wedge plantage(X) \rightarrow F\, (\neg\, corrigé(X) \rightarrow \Diamond plantage(X))$$

- on peut aussi utiliser l'opérateur "until" (U) :

$$\forall X\, [programme(X) \wedge plantage(X) \rightarrow (\Diamond plantage(X)\; U \neg\, corrigé(X))\, .$$

14) Nous voulons formaliser l'énoncé

"Toute interruption déclenchée quand son masque est mis,
deviendra active au top d'horloge qui suivra le démasquage",

avec *interruption*(X) pour *"X est une interruption"*,
déclenché(X) pour "*X est déclenché*(*e*)",
masqué(X) pour *"X est masqué*(*e*)*",* et *actif*(X) pour *"X est actif*(*ve*)*"*.

Puisque l'énoncé se réfère à ***l'instant suivant*** le démasquage, nous avons besoin d'une logique temporelle ***discrète***.

• Avec une temporelle linéaire discrète ***avec datation***,
nous exprimons que les dates sont discrètes en leur associant un indice associé à leur numéro, telles les dates $t_i, t_{i+1} \ldots$
On peut alors écrire

$$\forall X\, \forall t\, \forall t_i\, \{[interruption(X) \wedge déclenché(X, t) \wedge masquée(X, t) \wedge t_i > t \wedge \neg\, masqué(X, ti) \wedge \neg\, \exists t'\, (t' > t \wedge t' < t_i \wedge \neg\, masquée(X, t'))] \rightarrow actif(X, t_{i+1})\}$$

• On peut aussi utiliser une **logique temporelle modale discrète,** avec l'opérateur *S* (*since*) :

$$\forall X\ \{[interruption(X) \wedge$$
$$(masqué(X)\ S\ déclenché(X)) \wedge \circ \neg\, masqué(X)]$$
$$\rightarrow \circ\circ\, actif(X)\}$$

Généralement, l'opérateur *S* intègre l'instant courant, donc ici l'utilisation de "*masqué*(*X*) *S déclenché*(*X*)" considère qu'à l'instant présent l'interruption est encore masquée.
Pour exprimer son changement d'état, nous devons considérer l'instant suivant avec "$\circ \neg$ *masqué*(*X*)" ; la conclusion de l'implication est donc décalée de 2 temps d'horloge, d'où sa formulation "$\circ\circ$ *actif*(*X*)".

8.5 Corrigés des exercices du chapitre 6

(*Énoncés à partir de la page 117*)

1) Nous voulons démontrer "*célibataire*(*Alain*)",
à partir des connaissances :

étudiant(*Alain*)
marié(*Bernard, Cathy*)
marié(*Daniel, Eugénie*)
$marié(X, Y) \rightarrow marié(Y, X)$
$\neg \exists Y\ marié(X, Y) \rightarrow célibataire(X)$

Si nous utilisons les symboles "*a*" pour *Alain*, "*b*" pour *Bernard*, "*c*" pour *Cathy*, "*d*" pour *Daniel*, "*e*" pour *Eugénie* et "*célib*" pour "*célibataire*", la formulation des connaissances devient :

étudiant(*a*)	(1)
marié(*b, c*)	(2)
marié(*d, e*)	(3)
$marié(X, Y) \rightarrow marié(Y, X)$	(4)
$\neg \exists Y\ marié(X, Y) \rightarrow célib(X)$	(5)

A) **Avec l'hypothèse du monde clos (CWA),** pour prouver *célib*(*a*), nous avons deux possibilités, par chaînage avant ou par chaînage arrière.

• **Par chaînage avant :**

1) des faits (1) et (2) associés à la règle (3) nous déduisons les faits
marié(*c, b*) et *marié*(*e, d*) ;

2) les seuls faits que nous pouvons établir sur le prédicat *marié* sont donc : *marié*(b, c) *marié*(c, b) *marié*(d, e) et *marié*(e, d).

3) Ainsi, il n'y a aucun fait s'unifiant avec *marié*(a, Y) ; la règle (5) nous permet alors d'écrire *célib*(a).

• **Par chaînage arrière :**
pour prouver *célib*(a), cherchons à vérifier la partie prémisse de la règle (5) en instanciant X par a, c'est-à-dire $\neg \exists Y$ *marié*(a, Y) ;

nous essayons alors de vérifier cette formule par l'hypothèse du domaine clos, qui est incluse dans l'hypothèse du monde clos :

$$\forall X\,(X = a \vee X = b \vee X = c \vee X = d \vee X = e),$$

donc

$$\exists Y\ \textit{marié}(a, Y) \leftrightarrow [\textit{marié}(a, a) \vee \textit{marié}(a, b) \vee \textit{marié}(a, c) \vee \textit{marié}(a, d) \vee \textit{marié}(a, e)]\,.$$

Pour cela, cherchons si l'on a :

1. *marié*(a, a) ?
   Non, car ce fait n'est pas connu et que la règle (4) ne donne rien.
2. *marié*(a, b) ?
   Non, car ce fait est absent et que la règle (4) ne donne rien, car on n'a pas *marié*(b, a).
3. *marié*(a, c) ?
   Non, car ce fait est absent et que la règle (4) ne donne rien, car on n'a pas *marié*(c, a).
4. *marié*(a, d) ?
   Non, car ce fait est absent et que la règle (4) ne donne rien, car on n'a pas *marié*(d, a).
5. *marié*(a, e) ?
   Non, car ce fait est absent et que la règle (4) ne donne rien, car on n'a pas *marié*(e, a).

Donc $\exists Y$ *marié*(a, Y) est faux et *célib*(a) est vrai, en tant que conclusion de la règle (5), par instanciation de X avec a.

B) **Avec l'hypothèse du domaine clos (DCA),**

il faut ajouter des connaissances dites de "sens commun", connaissances que l'on a souvent tendance à omettre, tant elles peuvent sembler naturelles, lors de la transcription des règles associées à un domaine d'application.

Ici, il faut ajouter deux règles :

$$\forall X \neg\, marié(X, X)$$

(une personne ne peut être mariée avec elle-même) et

$$\forall X\, \forall Y\, \forall Z\ \ (marié(X, Y)\ \wedge\ X \neq Z\,) \rightarrow \neg\, marié(Z, Y)$$

(une personne ne peut être mariée avec deux autres, tout au moins dans le droit français).

Ces règles sont nécessaires afin de prouver $\neg \exists Y\ marié(a,\ Y)$, pour chaque instance de la formule $marié(a,\ Y)$, alors que l'hypothèse du monde clos suppose ces instances fausses, faute de pouvoir les prouver.

2) Déterminons la circonscription du prédicat *"vole"* pour l'ensemble de formules :

$$\left|\begin{array}{l} [oiseau(X) \wedge \neg\, autruche(X)] \rightarrow vole(X) \\ chauveSouris(X) \rightarrow vole(X) \\ autruche(X) \rightarrow oiseau(X) \\ autruche(titi) \\ vole(airbus) \end{array}\right.$$

On peut regrouper toutes les formules impliquant *"vole(X)"* en une seule :

$$[(oiseau(X) \wedge \neg autruche(X)) \vee chauveSouris(X) \vee X = airbus] \rightarrow vole(X)\,;$$

la circonscription revient à remplacer l'implication par l'équivalence :

$$[(oiseau(X) \wedge \neg autruche(X)) \vee chauveSouris(X) \vee X = airbus] \leftrightarrow vole(X).$$

Si l'on effectue de plus la circonscription de $autruche(X)$

$$autruche(X) \leftrightarrow X = titi,$$

on peut écrire

$$[(oiseau(X) \wedge X \neq titi) \vee chauveSouris(X) \vee X = airbus]\ \leftrightarrow\ vole(X).$$

3) Cherchons la (ou les) extension(s) du système avec défauts :

$$W : \left|\begin{array}{ll} a(X) \rightarrow b(X) & \text{(i1)} \\ [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow d(X) & \text{(i2)} \\ a(1)\quad a(2)\quad c(2)\quad c(3) & \end{array}\right. \qquad D : \left|\begin{array}{ll} a(X) : c(X)\ /\ c(X) & (\delta 1) \\ & \\ c(X) : \neg\, d(X)\ /\ \neg\, d(X) & (\delta 2) \end{array}\right.$$

Repérons les implications par (i1), (i2) et les défauts par (δ1), (δ2).

1a) Dans W, on peut établir les formules :

$b(1)$ et $b(2)$, par l'implication (i1) ; $d(2)$, par l'implication (i2).

1b) On considère alors les défauts :

- δ1 permet d'ajouter $c(1)$; $c(2)$ est déjà établi.
- δ2 permet d'ajouter $\neg\, d(3)$; on ne peut pas utiliser $c(1)$ qui vient juste d'être établi et, comme on a déjà établi $d(2)$, on ne peut pas poser (ou plutôt supposer) $\neg\, d(2)$.

On a donc établi :

$$\varepsilon 1 = \{ a(1), a(2), b(1), b(2), c(2), c(3), d(2), \neg\, d(3) \}.$$

2 a) À partir des nouveaux faits établis en 1a) et ceux que les défauts ont permis de supposer en 1b), on effectue les inférences dans W :

(i1) ne donne rien de plus ; (i2) permet de poser en plus $d(1)$;

2 b) Plus aucun défaut n'est utilisable pour permettre de supposer de nouveaux faits :

pour δ1, aucun nouveau fait $a(...)$ n'a été ajouté ;

pour δ2, comme on vient d'établir $d(1)$, on ne peut pas (sup)poser $\neg\, d(1)$.

Le système a donc une extension et une seule :

$$\varepsilon = \{ a(1), a(2), b(1), b(2), c(2), c(3), d(1), d(2), \neg\, d(3) \}.$$

4) Cherchons les extensions du système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow b(X) \\ b(X) \rightarrow (a(X) \wedge d(X)) \\ a(1) \;\; b(2) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{ll} a(X) : \neg\, c(X) \,/\, \neg\, c(X) & \delta 1 \\ b(X) : c(X) \,/\, c(X) & \delta 2 \\ c(X) : \neg\, d(X) \,/\, \neg\, d(X) & \delta 3 \end{array} \right.$$

1a) Dans W on peut déduire $a(2)$ *et* $d(2)$, d'où une extension partielle :

$$\{ a(1), b(2), a(2), d(2) \}$$

1b) A l'aide des défauts de D, on peut déduire

- pour $a(1)$, $\neg\, c(1)$ par δ1 et
- pour $a(2)$ et $b(2)$, soit $\neg\, c(2)$ par δ1, soit $c(2)$ par δ2 ;

d'où deux extensions partielles :

$$\varepsilon 1 = \{ a(1), b(2), a(2), d(2), \neg\, c(1), \neg\, c(2) \},$$

$$\varepsilon 1' = \{ a(1), b(2), a(2), d(2), \neg\, c(1), c(2) \} ;$$

2 a) avec $\varepsilon 1$, W ne permet aucune nouvelle déduction.
avec $\varepsilon 1'$, W permet seulement de déduire $b(2)$, déjà posé.

2 b) aucun défaut n'est alors utilisable et l'algorithme se termine.

Le système a donc deux extensions :

$$\varepsilon = \{ a(1), b(2), a(2), d(2), \neg c(1), \neg c(2) \},$$
$$\varepsilon' = \{ a(1), b(2), a(2), d(2), \neg c(1), c(2) \}.$$

5) Avec l'hypothèse du monde clos, on veut prouver "*vide*(*boîte3*)" de l'ensemble de formules :

dans(*a, boîte1*)
dans(*b, boîte2*)
dans(*boîte3, boîte2*)
$contient(Y, X) \leftrightarrow dans(X, Y)$
$vide(X) \leftrightarrow \neg \exists Y\, contient(X, Y)$

- **par chaînage avant** : on déduit des formules ci-dessus

contient(*boîte1, a*)
contient(*boîte2, b*)
contient(*boîte2, boîte3*)

Comme on n'a aucun fait tel que "*contient*(*boite3, Y*)", l'hypothèse du monde clos permet d'écrire :

$\neg \exists Y\, contient(boîte3, Y)$.

D'où, d'après la cinquième formule : "*vide*(*boîte3*)".

- **par chaînage arrière :** pour prouver "*vide*(*boîte3*)", nous cherchons un Y vérifiant "*contient*(*boîte3, Y*)", soit par un fait connu, soit par l'équivalence "$contient(Y, X) \leftrightarrow dans(X, Y)$" ;

nous cherchons donc si

contient(*boîte3, a*)	ou	*dans*(*a, boîte3*),
contient(*boîte3, b*)	ou	*dans*(*b, boîte3*),
contient(*boîte3, boîte1*)	ou	*dans*(*boite1, boîte3*),
contient(*boîte3, boîte2*)	ou	*dans*(*boite2, boîte3*),
contient(*boîte3, boîte3*)	ou	*dans*(*boite3, boîte3*).

Aucun de ces faits ne peut être prouvé : l'hypothèse du monde clos suppose alors qu'il n'y a pas de Y, tel que "*contient*(*boîte3, Y*)".

On en déduit "*vide*(*boîte3*)" par l'équivalence

$$vide(X) \leftrightarrow \neg \exists Y\, contient(X, Y).$$

6) Déterminons la ou les extensions du système avec défauts :

$$W : \left| \begin{array}{l} [a(X) \wedge b(X)] \rightarrow \neg\, c(X) \\ \\ a(1),\ \ b(2) \end{array} \right. \qquad D : \left| \begin{array}{ll} a(X) : b(X) \,/\, b(X) & \delta 1 \\ \\ b(X) : c(X) \,/\, c(X) & \delta 2 \end{array} \right.$$

1 a) on ne peut rien inférer dans W ;

1 b) on applique les défauts :

$\delta 1$ permet de poser $b(1)$, $\delta 2$ permet de poser $c(2)$.

Attention : on n'a pas le droit d'utiliser le défaut $\delta 2$ sur $b(1)$ que l'on vient de supposer, avant d'avoir effectué les inférences possibles dans W.

On obtient l'extension partielle $\varepsilon 1 = \{\ a(1),\ b(1),\ b(2),\ c(2)\ \}$.

2 a) dans W, l'implication permet d'ajouter $\neg\, c(1)$ à cette extension.

2 b) le défaut $\delta 2$ n'est plus utilisable ; on ne peut rien ajouter de plus.

On a donc une seule extension, $\varepsilon = \{\, a(1), b(1), \neg\, c(1),\ b(2),\ c(2)\, \}$.

7) Nous voulons prouver *"disjoints(pairs, impairs)"* dans l'hypothèse du monde clos (CWA), à partir des formules :

$$\left| \begin{array}{l} p(X) \leftrightarrow appartient(X, pairs) \\ i(X) \leftrightarrow appartient(X, impairs) \\ \neg\, \exists X\, [appartient(X, Y) \wedge appartient(X, Z)\,] \ \rightarrow disjoints(Y, Z) \\ p(0) \quad i(1) \quad p(2) \quad i(3) \quad p(4) \end{array} \right.$$

• **Par chaînage avant**, nous déduisons d'abord :

appartient(0, pairs) *appartient(2, pairs)* *appartient(4, pairs)*
appartient(1, impairs) *appartient(3, impairs)*

Comme l'hypothèse du domaine clos est reprise par l'hypothèse du monde clos, nous pouvons écrire

$$\forall X\, (X = pairs \vee X = impairs \vee X{=}0 \vee X{=}1 \vee X{=}2 \vee X{=}3 \vee X{=}4).$$

nous constatons que

- l'on n'a ni *appartient(pairs, pairs)*, ni *appartient(pairs, impairs)*, ni *appartient(impairs, pairs)*, ni *appartient(impairs, impairs),*
- si l'on a *appartient(0, pairs)*, on n'a pas *appartient(0, impairs)*,
- si l'on a *appartient(1, impairs)*, on n'a pas *appartient(1, pairs)*,
- si l'on a *appartient(2, pairs)*, on n'a pas *appartient(2, impairs)*,

- si l'on a *appartient*(*3, impairs*), on n'a pas *appartient*(*3, pairs*),
- si l'on a *appartient*(*4, pairs*), on n'a pas *appartient*(*4, impairs*).

Il n'y a donc pas d'individu X du domaine de connaissances, tel que

$$appartient(X, pairs) \wedge appartient(X, impairs) \;;$$

nous pouvons donc en déduire : "*disjoints*(*Y, Z*)".

• **Par chaînage arrière,** on obtiendrait le même résultat,
mais on chercherait à satisfaire

$$appartient(X, pairs) \wedge appartient(X, impairs)\,,$$

en testant successivement :

$X = pairs$, $X = impairs$, $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$, $X = 4$.

Nous ne détaillerons pas cette démarche, similaire à celles des chaînages arrières déjà détaillés et qui serait longue à mettre en œuvre ici, compte tenu du nombre d'éléments du domaine.

8) Nous voulons prouver "*isolés*(*a, g*)", en utilisant l'hypothèse du monde clos, à partir des formules :

$$\begin{array}{ll}
isolés(X, Y) \leftrightarrow \neg\, connectés(X, Y) & (1) \\
reliés(X, Y) \rightarrow connectés(X, Y) & (2) \\
[reliés(X, Z) \wedge connectés(Z, Y)] \rightarrow connectés(X, Y) & (3) \\
reliés(a, b) \;\; reliés(b, c) & \\
reliés(e, b) \;\; reliés(f, g) &
\end{array}$$

• **Par chaînage avant**, nous déduisons des formules ci-dessus :
connectés(*a, b*), *connectés*(*b, c*), *connectés*(*e, b*), *connectés*(*f, g*), *connectés*(*a,c*), *connectés*(*e,c*).

C'est tout ce que nous pouvons déduire pour le prédicat "*connectés*" ; nous constatons que le fait "*connectés*(*a, g*)" n'est pas déduit, donc l'hypothèse du monde clos autorise à écrire "¬ *connectés*(*a, g*)", ce qui, d'après la première formule, permet d'écrire "*isolés*(*a, g*)".

• **Par chaînage arrière,**

nous cherchons à satisfaire "*isolés*(*a, g*)", donc "¬ *connectés*(*a, g*)" ; essayons de prouver "*connectés*(*a, g*)" :

– nous n'avons pas "*reliés*(*a, d*)",
donc l'implication (2) ne peut pas servir pour cela.

– nous avons *"reliés*(a, b)*"* ;
cherchons à utiliser l'implication (3) en testant "*connectés*(b, g)" :
– nous n'avons pas *"reliés*(b, g)*"* ;
cherchons alors à utiliser l'implication (3),
– puisque *"reliés*(b, c)*"* est connu, testons *"connectés*(c, g)*"* :
- on n'a aucun X tel que *"reliés*(c, X)*"*,
donc aucune des implications (2) ou (3)
ne permet d'affirmer *"connectés*(c, g)*"*.
– tous les essais ci-dessus ayant échoué, on en déduit
"$\neg$ *connectés*(a, g)*"*, donc *"isolés*(a, g)*"*.

9) Cherchons les extensions du système avec défauts :

$$W: \left| \begin{array}{l} b(X) \rightarrow c(X) \\ c(X) \rightarrow m(X) \wedge n(X) \quad (1) \\ m(X) \rightarrow \neg p(X) \qquad (2) \\ b(j) \quad n(o) \quad m(h) \quad n(h) \end{array} \right. \qquad D: \begin{array}{ll} n(X) : p(X) \,/\, p(X) & (\text{d1}) \\ & \\ m(X) : \neg n(X) \,/\, \neg n(X) & (\text{d2}) \end{array}$$

1 a) Dans W on peut déduire : $m(b)$ $n(b)$ $\neg p(b)$ et $\neg p(h)$,
d'où une extension partielle :

$$\varepsilon 1 = \{\, b(j), c(j), m(j), n(j), \neg p(j), n(o), m(h), n(h), \neg p(h) \,\}$$

b) avec les défauts : seul d1 permet de poser $p(o)$.

On ne peut ensuite rien déduire de plus. Le système a donc une extension et une seule :

$$\varepsilon = \varepsilon 1 = \{\, b(j), c(j), m(j), n(j), \neg p(j), n(o), p(o), m(h), n(h), \neg p(h) \,\}$$

Remarque : une interprétation naïve des symboles est possible ici ; en effet, pour les prédicats,
$b(X)$ peut signifier que *"X est une baleine"*,
$c(X)$ que *"X est un cétacé"*, $m(X)$ que *"X est un mammifère"*,
$n(X)$ que *"X sait nager"* et $p(X)$ que *"X est un poisson"* ;
pour les constantes, *j* peut désigner *Jonas* (une baleine), *o* désigner *Oscar* (un poisson) et *h*, un être humain particulier.

10) Considérons les formules :

$$\left| \begin{array}{ll} filsUnique(X) \leftrightarrow \neg \exists Y\, frère(X, Y) & (1) \\ frère(X, Y) \leftrightarrow \exists Z\, (père(Z, X) \wedge père(Z, Y)) & (2) \\ père(a, b) \quad père(b, c) \quad père(b, d) \quad père(e, f) & \end{array} \right.$$

Dans l'hypothèse du monde clos, on ne peut pas prouver "*filsUnique*(*b*)" ; en effet, pour prouver "*filsUnique*(*b*)", il faut prouver, d'après (1), que $\neg\, \exists Y\ frère(b,\ Y)$, donc, d'après (2) prouver que l'on n'a pas de Y tel que $\exists Z\ (père(Z,\ b) \wedge père(Z,\ Y))$.

On a un Z tel que "$père(Z,\ b)$", c'est a ; il faut vérifier que l'on n'a aucun Y, tel que "$père(a,\ Y)$". Or, on a "$père(a,\ b)$", donc avec $Y = b$, la formule (2) permet d'écrire "$frère(b,\ b)$", ce qui est contraire à la notion usuelle de la relation "*frère*" (un individu n'est pas considéré comme étant son propre frère).

Il faut donc corriger la formule (2) pour exprimer qu'un individu n'est pas son propre frère, soit :

$$frère(X,\ Y) \leftrightarrow \exists Z\ (père(Z,\ X) \wedge père(Z,\ Y) \boldsymbol{\wedge}\ \boldsymbol{X \neq Y}\ )\ (2').$$

11) Cherchons les extensions du système avec défauts :

$$W : \left|\begin{array}{l} a(X) \rightarrow b(X) \\ {[a(X) \wedge c(X)]} \rightarrow \neg\, d(X) \\ a(1)\quad a(2)\quad c(2) \end{array}\right. \qquad D : \left|\begin{array}{ll} b(X) : c(X)\ /\ c(X) & (\delta 1) \\ & \\ c(X) : d(X)\ /\ d(X) & (\delta 2) \end{array}\right.$$

1 a) Dans W, on établit : $b(1)$, $b(2)$ et $\neg\, d(2)$, d'où l'extension partielle

$$\varepsilon 1 = \{\, a(1),\ b(1),\ a(2),\ b(2),\ c(2),\ \neg\, d(2)\,\}\ ;$$

b) on applique les défauts : $\delta 1$ donne $c(1)$; $\delta 2$ n'est pas applicable.

2 a) Dans W, la deuxième implication permet d'écrire $\neg\, d(1)$;
b) aucun défaut n'est plus applicable.

Le système a donc une extension et une seule, qui est :

$$\varepsilon = \{\, a(1),\ b(1),\ c(1),\ \neg\, d(1),\ a(2),\ b(2),\ c(2),\ \neg\, d(2)\,\}.$$

12) Déterminons les extensions du système avec défauts :

$$W : \left|\begin{array}{l} a(X) \rightarrow b(X) \\ c(X) \rightarrow a(X) \\ a(1)\quad c(2) \end{array}\right. \qquad D : \left|\begin{array}{ll} a(X) : c(X) / c(X) & (\delta 1) \\ {[c(X) \wedge a(X)]} : d(X)\ /\ d(X) & (\delta 2) \\ c(X) : \neg\, b(X)\ /\ \neg\, b(X) & (\delta 3) \end{array}\right.$$

1 a) Dans W, nous déduisons successivement $b(1)$, $a(2)$, $b(2)$, d'où l'extension partielle

$$\varepsilon 1 = \{\, a(1),\ b(1),\ a(2),\ b(2),\ c(2)\,\}\ ;$$

b) Avec les défauts : $\delta 1$ ajoute $c(1)$ et $\delta 2$ ajoute $d(2)$;
$\delta 3$ n'ajoute rien.

2. a) dans W on ne peut rien ajouter ; l'extension partielle est alors :

$$\varepsilon 2 = \{\, a(1),\, b(1),\, c(1),\, a(2),\, b(2),\, c(2),\, d(2) \,\}$$

b) le défaut $\delta 2$ permet d'écrire $d(1)$.

3. dans W on ne peut rien déduire de plus.

Le système a donc une extension et une seule :

$$\varepsilon = \{\, a(1),\, b(1),\, c(1),\, d(1),\, a(2),\, b(2),\, c(2),\, d(2) \,\}.$$

13) Dans l'hypothèse du monde clos (CWA), on veut prouver "*vole*(*titi*)", avec les formules :

$$[oiseau(X) \wedge \neg\, atypique(X, oiseau, vol)] \rightarrow vole(X) \qquad (1)$$
$$manchot(X) \rightarrow [oiseau(X) \wedge atypique(X, oiseau, vol)] \qquad (2)$$
$$autruche(X) \rightarrow [oiseau(X) \wedge atypique(X, oiseau, vol)] \qquad (3)$$
$$pingouin(X) \rightarrow oiseau(X) \qquad (4)$$
$$[oiseau(X) \wedge blessé(X)] \rightarrow atypique(X, oiseau, vol) \qquad (5)$$
$$oiseau(toto), \quad blessé(toto), \quad autruche(tata), \quad pingouin(titi).$$

- **En chaînage avant**

On ne considère que l'individu "*titi*", étant donné qu'aucune formule ne comporte deux variables, ce qui pourrait nécessiter de s'intéresser à deux individus.

On déduit : "*oiseau*(*titi*)", mais pas "*atypique*(*titi, oiseau, vol*)" ;

L'hypothèse du monde clos (CWA) permet alors de supposer

$$\neg\, atypique(titi, oiseau, vol)$$

et l'implication (1) permet de déduire "*vole*(*titi*)".

- **En chaînage arrière**

Pour prouver "*vole*(*titi*)", seule l'implication (1) est disponible. Il faut donc essayer d'en prouver les deux faits prémisses

$$oiseau(titi) \quad et \quad \neg\, atypique(titi, oiseau, vol).$$

- Pour prouver "*oiseau*(*titi*)", les prémisses des implications (2) et (3) ne peuvent être vérifiées par *titi,* puisque l'on n'a ni "*manchot*(*titi*)" ni "*autruche*(*titi*)" ; par contre, l'implication (4) permet d'établir "*oiseau*(*titi*)".
- Pour prouver "¬ *atypique*(*titi, oiseau, vol*)", on cherche à prouver "*atypique*(*titi, oiseau, vol*)" ; pour cela, on constate à nouveau que les implications (2) et (3) ne peuvent être utilisées ; ce n'est pas le cas non plus de l'implication (5), puisque on n'a pas la formule "*blessé*(*titi*)".

Puisque l'on ne peut prouver *"atypique(titi, oiseau, vol)"*, l'hypothèse du monde clos suppose *"¬ atypique(titi, oiseau, vol)"*.

Les deux faits de la partie prémisse de l'implication (1) étant vérifiés pour *"titi"*, on peut appliquer sur cette formule le modus ponens et en tirer la conclusion *"vole(titi)"*.

14) Cherchons la ou les extensions du système avec défauts :

$$W: \left| \begin{array}{l} a(X) \rightarrow b(X) \\ [a(X) \wedge c(X)] \rightarrow \neg d(X) \\ a(1) \quad a(2) \quad c(2) \quad c(3) \end{array} \right. \qquad D: \left| \begin{array}{ll} a(X) : c(X) \,/\, c(X) & \delta 1 \\ & \\ c(X) : d(X) \,/\, d(X) & \delta 2 \end{array} \right.$$

1 a) Dans W on déduit successivement

$$b(1), \; b(2) \; \neg d(2),$$

d'où l'extension partielle

$$\varepsilon 1 = \{ a(1), \; b(1), \; a(2), \; b(2), \; c(2), \; \neg d(2), \; c(3) \}$$

b) Avec les défauts :

δ1 ajoute $c(1)$ et δ2 ajoute $d(3)$.

Remarque : On n'applique pas δ2 sur $c(1)$ que l'on vient d'obtenir, tant que l'on n' a pas fait toutes les inférences dans W ; on ne peut pas appliquer non plus δ2 sur c(2), étant donné que l'on a déjà $\neg d(2)$.

L'extension partielle devient

$$\varepsilon' 1 = \{ a(1), b(1), c(1), a(2), b(2), c(2), \neg d(2), c(3), d(3) \}$$

2 a) Dans W, les faits nouveaux $c(1)$ et $d(3)$ permettent seulement d'ajouter $\neg d(1)$.

b) Aucun défaut n'est utilisable. On ne peut donc ajouter de fait nouveau.

Il y a donc une extension et une seule :

$$\varepsilon = \{ a(1), b(1), c(1), \neg d(1), a(2), b(2), c(2), \neg d(2), c(3), d(3) \} .$$

15) Pour le système avec défauts :

$$W: \left| \begin{array}{l} [f(X) \wedge p(X, Y)] \rightarrow f(Y) \\ \\ f(a) \quad p(a, b) \quad p(b, c) \quad d(a) \end{array} \right. \qquad D: \left| \begin{array}{ll} : \neg d(X) \,/\, \neg d(X) & (\delta 1) \\ & \\ [f(X) \wedge \neg d(X)] : s(X) \,/\, s(X) & (\delta 2) \end{array} \right.$$

1 a) dans W, on peut déduire $f(b)$, puis $f(c)$
   b) le défaut δ1 permet d'ajouter $\neg d(b)$ et $\neg d(c)$.

2 a) W ne permet aucune déduction nouvelle.
   b) le défaut δ2 permet d'ajouter $s(b)$ et $s(c)$.

3 a) W ne permet aucune déduction nouvelle.
   b) aucun défaut n'est utilisable : l'algorithme est terminé.

Le système a donc une extension et une seule :
$\varepsilon = \{f(a), f(b), f(c), p(a, b), p(b, c), d(a), \neg d(b), \neg d(c), s(b), s(c)\}$.

8.6 Corrigés des exercices du chapitre 7

(*Énoncés à partir de la page 134*)

1) Énoncés qui expriment l'incertain et/ou l'imprécis

A : Il sera vraisemblablement absent : *incertain précis* ;

B : Ma voiture ne fonctionne pas très bien : *certain imprécis* ;

C : Il est admis en master : *certain précis* ;

D : La température extérieure est sans doute fraîche : *incertain imprécis*.

E: Elle est probablement très intelligente : *incertain imprécis* ;

F : Il a obtenu 15 à l'examen de logique : *certain précis* ;

G : Je vais sans doute rater mon train : *incertain précis* ;

H : Le temps n'est pas très beau : *certain imprécis* ;

I : Ce tableau est cher : *certain imprécis* ;

J : Il a raté son train : *certain précis* ;

K : Il sera sans doute absent au contrôle : *incertain précis* ;

L : La température du radiateur est probablement élevée : *incertain imprécis*.

2) Le système considéré comporte trois composants a, b, c, dont un au plus peut être défectueux ; les pannes de ce système sont dues à a pour 20%, à b pour 30% et à c pour 50%. Les symptômes d'une panne sont $s1$, $s2$, $s3$, et les liens statistiques entre les pannes et les symptômes sont représentés par le tableau ci-dessous :

une panne de provoque		a	b	c
$s1$	dans	30% des cas	60%	20%
$s2$	dans	60%	20%	30%
$s3$	dans	40%	60%	90%

Si une panne se produit avec $s1$, $s3$, mais pas $s2$, pour connaître les probabilités de son origine, nous appliquons le théorème de Bayes en supposant les symptômes indépendants :

$$P(a/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) = P(a) * P(s1/a) * P(\neg s2/a) * P(s3/a) / \Sigma$$
$$= \pi a / \Sigma \,;$$

$$P(b/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) = P(b) * P(s1/b) * P(\neg s2/b) * P(s3/b) / \Sigma$$
$$= \pi b / \Sigma \,;$$

$$P(c/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) = P(c) * P(s1/c) * P(\neg s2/c) * P(s3/c) / \Sigma$$
$$= \pi c / \Sigma \,;$$

avec $\Sigma = \pi a + \pi b + \pi c$.

D'où $\pi a = 0{,}2 * 0{,}3 * 0{,}4 * 0{,}4 = 96 * 10^{-4}$

$\pi b = 0{,}3 * 0{,}6 * 0{,}8 * 0{,}6 = 864 * 10^{-4}$

$\pi c = 0{,}5 * 0{,}2 * 0{,}7 * 0{,}9 = 630 * 10^{-4}$

et $\Sigma = 1590 * 10^{-4}$.

Soit, $P(a/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) \approx 0{,}06$

$P(b/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) \approx 0{,}54$

$P(c/(s1 \wedge \neg s2 \wedge s3)) \approx 0{,}4$

La panne s'explique plus vraisemblablement par un défaut de b.

3) Nous supposons que les seules maladies possibles sont les rhumes et les grippes, que leurs symptômes sont indépendants et que 80% de ces maladies sont des rhumes et 20% des grippes. En outre,

- Un rhume provoque de la toux dans 60% des cas et de la fièvre dans 50% des cas.

- Une grippe provoque de la toux dans 20% des cas et de la fièvre dans 90% des cas.

En notant *gr* pour une grippe, *rh* pour un rhume, *f* pour de la fièvre et *t* pour de la toux, on peut écrire :

$P(rh) = 0,8 \quad P(gr)= 0,2$
$P(t/rh) = 0,6 \quad P(\neg\, t/rh) = 0,4 \quad P(f/rh)= 0,5 \quad P(\neg\, f/rh)= 0,5$
$P(t/gr) = 0,2 \quad P(\neg\, t/gr) = 0,8 \quad P(\mathrm{f}/gr)= 0,9 \quad P(\neg\, f/gr)= 0,1$

- Pour un malade avec de la toux et de la fièvre, on applique le théorème de Bayes :

$P(rh/(t \wedge f)) = P(rh) * P(t/rh) * P(f/rh) / \Sigma$
$= 0,8 * 0,6 * 0,5 / \Sigma = 240 * 10^{-3} / \Sigma,$
$P(gr/(t \wedge f)) = P(gr) * P(t/gr) * P(f/gr) / \Sigma$
$= 0,2 * 0,2 * 0,9 / \Sigma = 36 * 10^{-3} / \Sigma,$
avec $\Sigma = P(rh) * P(t/rh) * P(f/rh) + P(gr) * P(t/gr) * P(f/gr)$
$= 276*10\text{-}3,$
soit $P(rh/(t \wedge f)) = 240 / 276 \approx 0,87$
$P(gr/(t \wedge f)) = 36 / 276 \approx 0,13.$

- Pour un malade sans toux et avec fièvre :

$P(rh/(\neg\, t \wedge f)) = P(rh) * P(\neg\, t/rh) * P(f/rh) / \Sigma'$
$= 0,8 * 0,4 * 0,5 / \Sigma' = 160 * 10^{-3} / \Sigma',$
$P(gr/(\neg\, t \wedge f)) = P(gr) * P(\neg\, t/gr) * P(f/gr) / \Sigma'$
$= 0,2 * 0,8 * 0,9 / \Sigma' = 144 * 10^{-3} / \Sigma',$
avec $\Sigma' = P(rh)*P(\neg\, t/rh)*P(f/rh) + P(gr)*P(\neg\, t/gr)*P(f/gr)$
$= 304 * 10^{-3},$
soit $P(rh/(\neg\, t \wedge f)) = 160 / 304 \approx 0,526$
$P(gr/(\neg\, t \wedge f)) = 144 / 304 \approx 0,474.$

- Dans le cas où il n'y a ni toux ni fièvre :

$P(\mathrm{rh}/(\neg\, t \wedge \neg\, f)) = P(rh) * P(\neg\, t/rh) * P(\neg\, f/rh) / \Sigma''$
$= 0,8 * 0,4 * 0,5 / \Sigma'' = 160 * 10^{-3} / \Sigma'',$
$P(\mathrm{gr}/(\neg\, t \wedge f)) = P(gr) * P(\neg\, t/gr) * P(f/gr) / \Sigma''$
$= 0,2 * 0,8 * 0,1 / \Sigma'' = 16 * 10^{-3} / \Sigma'',$
avec $\Sigma'' = P(rh) * P(\neg\, t/rh) * P(\neg\, f/rh) + P(gr) * P(\neg\, t/gr) * P(\neg\, f/gr)$
$= 176 * 10\text{-}3,$
soit $P(rh/(\neg\, t \wedge f)) = 160 / 176 \approx 0,91$
$P(gr/(\neg\, t \wedge f)) = 16 / 176 \approx 0,09.$

Comme aucun symptôme n'est présent, aucune de ces deux maladies n'est sans doute présente : pour être rigoureux, il aurait fallu prévoir le diagnostic *"aucune maladie"* ou, mieux, *"autres maladies"*.

4) Avec la théorie des croyances (ou de Dempster-Shafer), pour 4 maladies $\{a, b, c, d\}$ exclusives et exhaustives, un symptôme s permet d'associer les masses de probabilités :

$$\mathrm{m}(\{a, b, c\}) = 0{,}4 \qquad \mathrm{m}(\{a, b, c, d\}) = 0{,}1$$
$$\mathrm{m}(\{a, b, d\}) = 0{,}2 \qquad \mathrm{m}(\{c, d\}) = 0{,}2$$
$$\mathrm{m}(\{b, c, d\}) = 0{,}1$$

Pour calculer la croyance, $\mathrm{Bel}(\{a, b\})$, dans le couple $\{a, b\}$, nous additionnons les masses de probabilité, associées aux sous-ensembles de $\{a, b\}$, donc

$$\mathrm{Bel}(\{a, b\}) = \mathrm{m}(\{a\})+\mathrm{m}(\{b\})+\mathrm{m}(\{a, b\}) = 0\,.$$

Pour calculer la plausibilité, $\mathrm{Pl}(\{a, b\})$, dans le couple $\{a, b\}$, nous additionnons les masses de probabilité, associées aux sous-ensembles de $\{a, b, c, d\}$ qui ont au moins un élément commun avec $\{a, b\}$, donc

$$\mathrm{Pl}(\{a, b\}) = \mathrm{m}(\{a, b, c\})+\mathrm{m}(\{a, b, d\})+\mathrm{m}(\{b, c, d\})+\mathrm{m}(\{a, b, c, d\})$$
$$= 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}8$$

Même si $\{a, b\}$ est plausible, aucun élément ne permet de croire que a ou b soient vrais. On est dans un cas d'ignorance forte.

5) Le système possède quatre composants a, b, c, d, dont un au plus peut être défectueux. La théorie des croyances est utilisée pour déterminer l'origine d'une panne, par assignation de masses de probabilités aux sous-ensembles d'hypothèses en fonction des symptômes (supposés indépendants).

- pour un symptôme s_1, on assigne :

$$\mathrm{m}_1(\{a, b, c\}) = 0{,}7 \text{ et } \mathrm{m}_1(\{d\}) = 0{,}1\ ;$$

- pour un autre symptôme, s_2 :

$$\mathrm{m}_2(\{a, d\}) = 0{,}2 \text{ et } \mathrm{m}_2(\{\mathrm{b}\}) = 0{,}4\,.$$

Tout d'abord, assignons les masses

$$\mathrm{m}_1(\{a, b, c, d\}) = 0{,}2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{m}_2(\{a, b, c, d\}) = 0{,}4\,,$$

pour que la somme des masses de chaque assignation soit égale à 1.

Si les deux symptômes sont présents, nous appliquons la règle de Dempster, en construisant un tableau croisant les masses de probabilité :

$m1$ \ $m2$	$\{a, b, c\}$ 0,7	$\{d\}$ 0,1	$\{a, b, c, d\}$ 0,2
$\{a, d\}$ 0,2	$\{a\}$ 0,14	$\{d\}$ 0,02	$\{a, d\}$ 0,04
$\{b\}$ 0,4	$\{b\}$ 0,28	$\varnothing$ 0,04	$\{b\}$ 0,08
$\{a, b, c, d\}$ 0,4	$\{a, b, c\}$ 0,28	$\{d\}$ 0,04	$\{a, b, c, d\}$ 0,08

D'où

$m12(\{a\}) = 0{,}14$
$m12(\{b\}) = 0{,}28+0{,}08 = 0{,}36$
$m12(\{d\}) = 0{,}02+0{,}04= 0{,}06$
$m12(\{a, d\}) = 0{,}04$
$m12(\{a, b, c\}) = 0{,}28$
$m12(\{a, b, c, d\}) = 0{,}08$

et $m12(\varnothing) = 0{,}04$, ce qui correspond à la contradiction entre les deux assignations.

On peut alors écrire :

$bel(\{a\})= m12(\{a\})= 0{,}14$ $\quad$ $bel(\{b\}) = m12(\{b\})= 0{,}36$

$bel(\{c\})= m12(\{c\})= 0$ $\quad$ $bel(\{d\}) = m12(\{d\})= 0{,}06$

$pl(\{a\}) = m12(\{a\})+m12(\{a, d\})+m12(\{a, b, c\})+m12(\{a, b, c, d\})$
$= 0{,}14+0{,}04+0{,}28+0{,}8 = 0{,}54$

$pl(\{b\}) = m12(\{b\})+m12(\{a, b, c\})+m12(\{a, b, c, d\})$
$= 0{,}36+0{,}28+0{,}08 = 0{,}72$

$pl(\{c\}) = m12(\{a, b, c\})+m12(\{a, b, c, d\}) = 0{,}28+0{,}08 = 0{,}36$

$pl(\{d\}) = m12(\{d\})+m12(\{a, d\})+m12(\{a, b, c, d\})$
$= 0{,}06+0{,}04+0{,}08 = 0{,}18$

6) Dans le pays considéré, il pleut 40% du temps et, quand il pleut, une demi-journée avant, il y a eu des nuages dans 60% des cas, ainsi qu'une variation notable de la pression atmosphérique, dans 50 % des cas.

Quand il n'y a aucun nuage et quand la pression atmosphérique est stable, comment pouvons-nous évaluer la probabilité qu'il pleuve au bout d'une demi-journée ?

En notant *pl* pour la pluie, *n* pour la présence de nuages et *vp* pour une variation de pression notable, le théorème de Bayes s'exprime par

$P(pl/(\neg\, n \wedge \neg\, vp) = P(pl) * P(\neg\, n/pl) * P(\neg\, vp/pl)\ /\ \Sigma,$ avec

$\Sigma = P(pl)*P(\neg\, n/pl)*P(\neg\, vp/pl)+P(\neg\, pl)*P(\neg\, n/\neg\, pl)*P(\neg\, vp/\neg\, pl).$

Comme nous ne connaissons pas $P(\neg\, n\ /\ \neg\, pl)$, ni $P(\neg\, vp\ /\ \neg\, pl)$, nous ne pouvons pas faire le calcul proposé.

7) Si, quand un ordinateur ne démarre plus du tout, il n'y a que deux pannes possibles et mutuellement exclusives :

- soit un défaut externe dans 80 % des cas : coupure ou débranchement du câble d'alimentation secteur,
- soit un défaut interne : panne du bloc d'alimentation.

Un défaut interne provoque une odeur de brûlé dans 80 % des cas, alors que cela représente 10 % des cas pour un défaut externe.

Quand une panne survient sans odeur particulière, nous pouvons écrire, avec *e* = défaut externe, *i* = défaut interne, *o* = odeur de brûlé,

$$\mathrm{P}(e|\neg o) = \mathrm{P}(\mathrm{e}) * \mathrm{P}(\neg \mathrm{o}|\mathrm{e})\ /\ \Sigma = 0{,}8 * 0{,}9\ /\ \Sigma = 0{,}72\ /\ \square$$

$$\mathrm{P}(i|\neg o) = \mathrm{P}(i) * \mathrm{P}(\neg o|i)\ /\ \Sigma = 0{,}2 * 0{,}2\ /\ \Sigma = 0{,}04\ /\ \Sigma$$

avec $\Sigma = \mathrm{P}(e) * \mathrm{P}(\neg o|e) + \mathrm{P}(i) * \mathrm{P}(\neg o|i) = 0{,}72 + 0{,}04 = 0{,}76$

Donc, $\mathrm{P}(e|\neg o) = 0{,}72/0{,}76 = 72/76 = 18/19$ et

$$\mathrm{P}(i|\neg o) = 0{,}04/0{,}76 = 4/76 = 1/19\,.$$

On a très probablement une panne externe !

8) A) La probabilité générale de beau temps est de 30%, celle de la pluie de 30% ; puisque les trois types de temps sont exclusifs et exhaustifs, la probabilité générale des nuages sans pluie est le complément à 100% de la somme des deux autres, soit 40%. Donc

$$P(b) = 0{,}3 \qquad P(n) = 0{,}4 \qquad P(p) = 0{,}3\,.$$

Avant du beau temps, une baisse de pression survient dans 10% des cas et un vent de secteur nord dans 40% des cas ; avant un temps nuageux, une baisse de pression survient dans 30% des cas et un vent de secteur nord dans 20% des cas, et avant de la pluie, une baisse de pression survient dans 80% des cas ainsi qu'un vent de secteur nord dans 10% des cas.

Si l'on constate à la fois une baisse de pression et un vent de secteur nord et si l'on note *bP* pour une baisse de pression et *vN* pour un vent du Nord, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(b/(bP\wedge vN) = \mathrm{P}(b) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/b) \,/\, \Sigma,$$
$$\mathrm{P}(n/(bP\wedge vN) = \mathrm{P}(n) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/n) \,/\, \Sigma,$$
$$\mathrm{P}(p/(bP\wedge vN) = \mathrm{P}(p) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/p) \,/\, \Sigma,$$

avec

$$\Sigma = \mathrm{P}(b) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/b) + \mathrm{P}(n) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/n) + \mathrm{P}(p) * \mathrm{P}((bP\wedge vN)/p).$$

En supposant l'indépendance des observations par rapport aux prévisions, on peut écrire :

$\mathrm{P}((bP\wedge vN)/b) = \mathrm{P}(bP/b) * \mathrm{P}(vN/b) = 0{,}1 * 0{,}4 = 0{,}04$
avec $\mathrm{P}(b) = 0{,}3$;

$\mathrm{P}((bP\wedge vN)/n) = \mathrm{P}(bP/n) * \mathrm{P}(vN/n) = 0{,}3 * 0{,}2 = 0{,}06$
avec $\mathrm{P}(n) = 0{,}4$;

$\mathrm{P}((bP\wedge vN)/p) = \mathrm{P}(bP/p) * \mathrm{P}(vN/p) = 0{,}8 * 0{,}1 = 0{,}08$
avec $\mathrm{P}(p) = 0{,}3$;

d'où, $\Sigma = 0{,}04*0{,}3 + 0{,}06*0{,}4 + 0{,}08*0{,}3$
$= 0{,}012 + 0{,}024 + 0{,}024 = 0{,}06$;

et

$\mathrm{P}(b/(bP\wedge vN)/b) = 0{,}04 * 0{,}3 \,/\, 0{,}06 = 0{,}2$
$\mathrm{P}(n/(bP\wedge vN)/n) = 0{,}06 * 0{,}4 \,/\, 0{,}06 = 0{,}4$
$\mathrm{P}(p/(bP\wedge vN)/p) = 0{,}08 * 0{,}3 \,/\, 0{,}06 = 0{,}4$

Ainsi, un temps nuageux et un temps pluvieux ont la même probabilité de 0,4, alors qu'un beau temps a une probabilité deux fois plus faible de 0,2.

B) En utilisant la théorie des croyances (Dempster-Shafer), on associe
- à une baisse de pression, une masse de probabilité $m1(\{n, p\}) = 0{,}7$
et
- à un vent du nord une masse de probabilité $m2(\{b, n\}) = 0{,}8$.

Si l'on a, à la fois, une baisse de pression et un vent du nord,
on utilise la règle de Dempster :
- à une baisse de pression, est associée la masse de probabilité
$m1(\{n, p\}) = 0{,}7$;
dont le complément à 1 est attribué à l'ensemble des hypothèses,
soit $m1(\{b, n, p\}) = 0{,}3$;
- à un vent du nord, est associée la masse de probabilité
$m2(\{b, n\}) = 0{,}8$;
dont le complément à 1 est attribué à l'ensemble des hypothèses,
soit $m2(\{b, n, p\}) = 0{,}2$.

On obtient alors:

$m1$ \ $m2$	$\{b, n\}$ 0,8	$\{b, n, p\}$ 0,2
$\{n, p\}$ 0,7	$\{n\}$ 0,56	$\{n, p\}$ 0,14
$\{b, n, p\}$ 0,3	$\{b, n\}$ 0,24	$\{b, n, p\}$ 0,06

d'où

$m12(\{n\}) = 0{,}56$ $\quad$ $m12(\{b, n\}) = 0{,}24$
$m12(\{n, p\}) = 0{,}14$ $\quad$ $m12(\{b, n, p\}) = 0{,}06$,
les autres masses étant nulles.

On peut déterminer alors :

$\mathrm{Bel}(\{n\}) = m12(\{n\}) = 0{,}56$

$\mathrm{Bel}(\{b\}) = m12(\{b\}) = 0$

$\mathrm{Bel}(\{p\}) = m12(\{p\}) = 0$

et

$\mathrm{Pl}(\{n\}) = m12(\{n\})+m12(\{b, n\})+m12(\{n, p\})+m12(\{b, n, p\})$
$= 0{,}56+0{,}24+0{,}14+0{,}06 = 1$,

$\mathrm{Pl}(\{b\}) = m12(\{b, n\})+m12(\{b, n, p\}) = 0{,}24+0{,}06 = 0{,}3$,

$\mathrm{Pl}(\{p\}) = m12(\{n, p\})+\mathrm{m}12(\{b, n, p\}) = 0{,}14+0{,}06 = 0{,}2$.

Donc, dans cette situation, un temps nuageux est fortement crédible, même si le beau temps et la pluie ne peuvent être totalement exclus.

Comparaison de ces résultats : les résultats obtenus par les deux méthodes sont différents, même si la même conclusion apparaît en tête dans les deux cas (n : *"nuageux"*). Étant donné que la méthode des probabilités repose sur des évaluations qui peuvent, au moins dans ce cas, être établies par des statistiques, ce sont les résultats qu'elle offre que nous aurions tendance à privilégier. En outre, on ne sait pas comment ont été évaluées les masses de probabilité utilisées dans la méthode de Dempster-Shafer...

Annexes

I) Symboles logiques et abréviations utilisées

A) Opérateurs des logiques classiques

1) notations "modernes"

$\neg$	négation,
$\wedge$	conjonction ("et" logique),
$\vee$	disjonction ("ou" logique),
$\rightarrow$	implication,
$\leftrightarrow$	équivalence,
$\top$	tautologie ("toujours vrai"),
$\bot$	contradiction ("toujours faux") ;

2) notations de Russell ("classiques")

$\sim$	négation,
.	conjonction ("et" logique),
$\vee$	disjonction ("ou" logique),
$\supset$	implication,
$\equiv$	équivalence,
1	tautologie ("toujours vrai"),
0	contradiction ("toujours faux").

B) Quantificateurs (logiques des prédicats)

- le quantificateur universel : $\forall$
  $\forall X\, p(X)$ exprime que p est vrai pour tout X ;
- le quantificateur existentiel : $\exists$
  $\exists X\, p(X)$ exprime que p est vrai pour au moins un X.

C) Symboles "méta-logiques"

Ils permettent d'exprimer les propriétés des logiques.

- La déduction formelle, de symbole |–

  $f_1, f_2 \ldots, f_n \vdash f$ signifie que
  f se déduit des axiomes, des règles d'inférence et de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

  $\vdash f$ signifie que
  f se déduit uniquement des axiomes et des règles d'inférences :
  f est un théorème.

- L'entraînement matériel (*entailment*), de symbole |=

  $f_1,\ f_2, \ldots, f_n \models f$ signifie que
  $f_1, f_2, \ldots, f_n$ entraînent matériellement f :
  si $f_1,\ f_2, \ldots, f_n$ sont toutes vraies, f ne peut être que vraie.

  $\models f$ signifie que
  f est une formule toujours vraie (une tautologie).

D) Logiques modales

$\Box$ est l'opérateur modal universel,

$\Diamond$ l'opérateur modal existentiel.

a) Logiques aléthiques (nécessités, possibilités)

$\Box$ se lit "nécessairement", $\Diamond$ se lit "possiblement" ;
autres notations : L ou N pour $\Box$ et M pour $\Diamond$.

b) Logiques déontiques (obligation, permission)

$\Box$ se lit "obligatoirement", $\Diamond$ se lit "est autorisé" ;
autres notations : O (obliged) pour $\Box$ et P (permitted) pour $\Diamond$.

c) Logiques épistémiques (connaissances ou croyances)

$\Box f$ peut se lire "on croit" f (ou "je crois"),
autre notation : B (belief) ;

$\Box f$ peut se lire "on sait" f (ou "je sais"),
autre notation : K (knowledge).

E) Logiques temporelles modales

a) Générales

Gp exprime que toujours dans le futur, la formule p sera vraie,

Fp exprime qu'il arrivera dans le futur, que la formule p soit vraie.

Hp exprime que toujours dans le passé, la formule p a été vraie,

Pp exprime qu'il est arrivé dans le passé, que la formule p soit vraie.

b) Discrètes

le temps y est vu comme une succession d'instants discrets

o ("next") : op est vrai, si et seulement si p est vrai à l'instant suivant.

c) Ramifiées

à certains instants, des bifurcations sont possibles

- vers le futur :

$\exists Fp$: il existe au moins un chemin dans le futur
où il arrivera que p soit vraie ;

$\forall Fp$: dans tout chemin du futur
il arrivera un moment où p sera vraie.

$\exists Gp$: il existe au moins un chemin dans le futur
où p sera toujours vraie ;

$\forall Gp$: quelque soit l'évolution dans le futur
p sera toujours vraie.

- vers l'instant suivant (logiques discrètes):

$\exists \mathrm{o} p$: il existe au moins un cas pour que
p soit vraie à l'instant suivant.

$\forall \mathrm{o} p$: dans tous les cas,
p sera vraie à l'instant suivant.

- vers le passé :

$\exists Pp$: il y a au moins un chemin du passé où
p a été vraie ;

$\forall Pp$: dans tout chemin du passé il est arrivé que
p a été toujours vraie ;

$\exists Hp$: il y a au moins un chemin du passé où
p a toujours été vraie ;

$\forall Hp$: dans tout chemin du passé,
p a toujours été vraie.

II) Bibliographie succincte

Nous pouvons remarquer que, parmi les ouvrages cités, une forte proportion date de plus de dix ans. Ce sont des ouvrages de synthèse, à la suite desquels peu de choses ont été publiées au niveau synthétique, même si des points de détail ont parfois été approfondis plus récemment, généralement dans des revues et parfois dans des livres.

Audureau E., Enjalbert P., Farinas Del Cerro L., *"Logique Temporelle - Sémantique et Validation de Programmes Parallèles"*, Masson, 1990.

Barwise J. (Ed.), *"Handbook of Mathematical Logic"*, North-Holland, 1977.

Bernadet M., *"Introduction Pratique aux Logiques Classiques"*, Hermann, 2010.

Bestougeff H., Ligozat G., *"Outils Logiques Pour Le Traitement Du Temps - De La Linguistique A L'intelligence Artificielle"*, Masson 1989.

Bouchon-Meunier B., *"La Logique Floue"* - Collection "Que Sais-Je" N° 2702 - Presses Universitaires de France, 1993.

Chellas B.F., "Modal Logic - An Introduction", Cambridge University Press, 1980 (réédité en 1984).

Davis E., Kaufmann M., *"Representation of Commonsense Knowledge"*, Morgan Kaufmann, 1990.

Dubois D. Prade H. and Yager R., *"Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems"*, Morgan Kaufmann, 1993.

Gabbay D., Guenthner F., *"Handbook of Philosophical Logic"*,Vol. 2 & 3 - D. Reidel Publishers, 1984 et 1986.

Genesereth M., Nilsson N., *"Logical Foundations Of Artificial Intelligence"*, Morgan Kaufmann, 1987.

Ginsberg M., Matthew L. (Eds.), *"Readings In Nonmonotonic Reasoning"*, Morgan Kaufmann, 1987.

Hájek P., *"Metamathematiccs of Fuzzy Logic"*, Kluwer Academic Publisher, 1998.

Hughes G.E., Cresswell M.J., *"An Introduction To Modal Logic"*, Methuen, 1968.

Hughes G.E., Cresswell M.J., *"A Companion To Modal Logic"*, Methuen, 1984.

Hughes G.E., Cresswell M. J. *"A New Introduction to Modal Logic"*, Routledge, 1996.

Klir G.J., Bo Yuan, *"Fuzzy Sets And Fuzzy Logics - Theory And Applications"*, Prentice Hall, 1995.

Pearl J., *"Probabilistic Reasoning In Intelligent Systems: Networks Of Plausible Inference"*, Morgan Kaufmann, 1988.

Shafer G., Pearl J. (Eds.), *"Readings in Uncertain Reasoning"*, Morgan Kaufmann, 1990.

Shoham Y. *"Reasoning about Change: Time and Causation from the Standpoint of Artificial Intelligence"*, MIT Press, 1988.

Smets P., Mamdani A., Dubois D., Prade H. (Eds.) *"NonStandard Logics for Automated Reasoning"*, Academic Press, 1988.

Torsun I. S., *"Foundations of Intelligent Knowledge-Based Systems"*, Academic Press, 1995.

Index

Achevé d'imprimer en janvier 2011
par la Sté ACORT Europe
www.cogetefi.com

Dépôt légal à parution

Imprimé en France

Introduction Pratique aux

Logiques non classiques

Maurice Bernadet

Alors que les logiques classiques s'attachent à formaliser et valider des raisonnements rigoureux, précis, et reposant sur des connaissances certaines, les logiques non classiques s'affranchissent de ces contraintes, pour se rapprocher des véritables modes de raisonnement humain. C'est pour cela que l'intérêt pour ces logiques s'est particulièrement intensifié, avec les développements de l'intelligence artificielle et des systèmes d'aide à la décision.
Nous présentons ici les principales logiques non classiques ; nous étudions successivement les logiques multivaluées, les logiques floues, puis les logiques modales et temporelles pour terminer avec l'étude des raisonnements non monotones et des méthodes d'évaluation de l'incertitude.
Cet ouvrage se veut pratique et s'intéresse plus aux mécanismes et aux algorithmes de mise en œuvre des logiques étudiées qu'à leurs fondements théoriques ; chaque chapitre est suivi d'exercices, dont les corrigés détaillés sont donnés en fin de livre.

L'auteur : Maurice Bernadet, ingénieur Sup'Elec, enseigne l'informatique à l'École Polytechnique de l'Université de Nantes. Ses thèmes de recherche concernent les systèmes multi-agents et la découverte de connaissances (floues, en particulier) à partir de bases de données.

Déjà paru aux éditions Hermann par le même auteur : "Introduction pratique aux logiques classiques".

ISBN 978 2 7056 8062 6

9 782705 680626

32 euros

hermann