Mairie de Médiathèque PEREIRE Paris

REMERCIEMENTS

Que soient remerciés ici tous ceux qui, à un titre ou à un autre, m'ont guidé sur la voie de la Logique, et tout particulièrement : Mme le professeur Anne Fagot-Largeault qui, avec indulgence et clarté, m'apprit les premiers pas ; M. Philippe de Rouilhan qui, généreusement, en de multiples occasions, me fit don de son temps pour apaiser mes questions sur le mystère des variables et la nature exacte de la quantification ; M. le professeur Jacques Bouveresse, qui me fit l'honneur immérité d'accorder une préface à ce livre.

Toute ma gratitude va à M. Jean Mosconi qui, avec dévouement, accepta la tâche ingrate de relire la totalité du manuscrit, et me suggéra de nombreuses améliorations ; cet ouvrage lui doit doublement : parce qu'il fut jadis mon maître, parce qu'il a bien voulu en être le premier lecteur ; sans l'assurance de sa collaboration, je n'eus jamais osé relever le défi que représentait ce travail.

Enfin, je remercie les Éditions Payot, et en particulier M. Dominique Colas, qui ont décidé de l'existence de ce manuel.

PRÉFACE

Dans une lettre à Russell, du 15 décembre 1913, Wittgenstein pose la question suivante : « N'est-il pas extrêmement remarquable de voir à quel point la logique est une science grande et infiniment spécifique ? Je crois que ni toi ni moi n'avons su cela il y a un an et demi. » Dans une lettre antérieure, datée du 6 janvier de la même année, il avait déjà constaté plus sobrement : « La logique est une très bonne invention. » Il est certainement difficile aujourd'hui de se faire une idée exacte de l'enthousiasme qu'a pu susciter, à cette époque, la découverte des possibilités extraordinaires que la nouvelle logique semblait receler, non seulement pour la philosophie des mathématiques qu'elle était en train de révolutionner complètement, mais également pour la philosophie en général. Russell et Wittgenstein ont évoqué l'un et l'autre par la suite, avec nostalgie, les discussions interminables et épuisantes qu'ils avaient eues avant la guerre sur les questions de logique et de philosophie de la logique les plus abstruses. Le souvenir qu'ils ont gardé l'un et l'autre de cette époque grandiose contraste, de façon frappante, avec l'opinion peu flatteuse que chacun des deux a eue plus tard de ce que l'autre a fait par la suite en philosophie.

Russell, raconte Wittgenstein, s'écriait fréquemment au cours de leurs conversations : « Logic's hell ! ». « Et cela, remarque-t-il, exprime *tout à fait* ce que nous ressentions lorsque nous réfléchissions sur les problèmes logiques, à savoir leur difficulté énorme, leur caractère dur et *lisse*. » Mais il est clair qu'en dépit de sa difficulté proprement diabolique, la logique faisait également figure, aux yeux de certains, à cette époque que l'on peut qualifier rétrospectivement d'héroïque, de terre promise ou de paradis pour la philosophie, une discipline dont Russell constatait en 1914 (après beaucoup d'autres) qu'elle est, de toutes les branches du savoir, celle qui « a eu le plus d'ambition et atteint le moins de résultats ».

Dans *Notre connaissance du monde extérieur,* Russell n'hésite pas à afffirmer que « tout problème philosophique, soumis à une analyse et à une élucidation indispensable, se trouve, ou bien n'être pas philosophique du tout, ou bien être logique, dans le sens où nous employons ce terme ». La logique est encore actuellement synonyme, aux yeux de beaucoup de philosophes, de contraintes et de restrictions intolérables et arbitraires imposées à la liberté de l'imagination philosophique. Russell y voyait au contraire un moyen d'étendre celle-ci dans des proportions dont la logique traditionnelle ne pouvait donner aucune idée : « La logique moderne [...] a pour effet d'élargir notre imagination abstraite, et de fournir un nombre infini d'hypothèses éventuellement applicables à l'analyse de n'importe quel fait complexe. [...] L'ancienne logique réduisait la pensée en esclavage. La logique nouvelle lui donne des ailes. A mon avis, elle a fait accomplir le même progrès à la philosophie que Galilée à la physique, montrant du moins le genre de problèmes susceptibles de recevoir une solution et ceux dont la solution doit être abandonnée parce qu'elle dépasse les forces humaines. »

Il ne subsiste sans doute aujourd'hui, même chez ceux qui restent persuadés que la logique peut être un excellent instrument pour le traitement des problèmes philosophiques et que son intervention a fait progresser de façon décisive la discussion de certains d'entre eux, rien qui puisse se comparer aux espérances, aux naïvetés et aux illusions qui ont été, comme dans toutes les périodes révolutionnaires, la caractéristique de la phase initiale. Mais, quoi que l'on pense, de façon générale, de la transformation radicale que l'utilisation du nouvel instrument mis au point par Frege et ses successeurs a fait subir au contenu et au style de la recherche philosophique traditionnelle, on ne peut raisonnablement contester qu'une révolution du genre de celle qu'évoque Russell a bel et bien eu lieu à un moment donné et qu'elle a non seulement permis d'introduire dans la discussion d'une quantité considérable de problèmes philosophiques un degré de clarté et de précision tout à fait inhabituel (auquel ne pouvaient évidemment pas rester insensibles tous les gens qui considèrent la clarté et la précision comme des vertus éminemment philosophiques, et non pas essentiellement comme la preuve d'un manque de créativité et d'élévation tout à fait contraire à la nature de la réflexion philosophique), mais également ouvert à l'imagination philosophique des perspectives et des horizons tout à fait nouveaux.

Wittgenstein n'était apparemment plus convaincu, dès le début des années trente, que la nouvelle logique soit une aussi bonne invention qu'il l'avait d'abord estimé. Dans les *Remarques sur les fondements des mathématiques,* il constate que : « La "logique mathématique" a complètement déformé la pensée de mathématiciens et de philosophes en conférant à une interprétation superficielle des formes de notre langue usuelle le statut d'analyse des structures des faits. Elle n'a fait, il est vrai, en cela, que continuer à bâtir sur

la logique aristotélicienne. » Il n'est pas particulièrement rassurant de constater que le véritable succès de mode dont Wittgenstein commence à bénéficier en France est probablement lié en grande partie à la découverte récente de choses pourtant connues depuis longtemps ailleurs, à savoir qu'il avait une opinion plutôt négative sur les améliorations supposées que la nouvelle logique a apportées en philosophie et ne considérait en tout cas certainement pas que la philosophie à souffert jusqu'ici essentiellement d'un manque d'exactitude et de scientificité pour lequel on a enfin trouvé, avec l'invention de la méthode logique, le remède adéquat.

L'attitude de Wittgenstein a certainement de quoi séduire, à première vue, tous les gens qui considèrent le simple fait de s'opposer à une prétendue « tyrannie » de la logique et de la science sur le monde et l'intellect contemporains comme la référence philosophique par excellence et le signe distinctif auquel on reconnaît aujourd'hui le vrai philosophe. Il n'en reste pas moins qu'il n'y a aucune confusion possible entre la réaction de rejet (probablement excessive) d'un philosophe qui est resté jusqu'au bout un admirateur inconditionnel de Frege et qui avait été lui-même associé de la façon la plus directe qui soit aux entreprises et aux ambitions dont il a dénoncé après coup le caractère chimérique, et l'attitude de philosophes qui continuent simplement à chercher des raisons susceptibles de justifier leur ignorance pure et simple de la logique contemporaine, de ce qu'elle est et de ce qu'elle fait.

Parlant de Wittgenstein et de Carnap, en 1972, Gödel a dit que l'œuvre de la deuxième période de Wittgenstein, comparée à ce qu'il avait fait au début, constituait une régression caractéristique. C'est également de cette façon, comme je l'ai dit, que Russell voyait les choses. Même si l'on ne partage pas du tout cette opinion, on peut la comprendre assez aisément. Russell et Gödel

ne sont certainement pas les seuls à préférer nettement au deuxième Wittgenstein celui du *Tractatus*, disciple direct de Frege et exploitant à sa façon, sinon convaincante, du moins tout à fait originale et radicale, le potentiel philosophique révolutionnaire de la nouvelle logique. D'après Hao Wang, « Gödel a continué tout au long des années à croire que la logique mathématique était utile pour la philosophie parce qu'elle rend la philosophie plus précise et plus facile pour ceux qui ne sont pas spécialement doués ». C'est peut-être parce que les Français sont si convaincus d'être particulièrement doués pour la philosophie qu'ils ne croient généralement pas nécessaire d'utiliser les services de la logique et considèrent celle-ci comme bonne exclusivement pour les Anglo-Saxons, auxquels elle tient lieu de talent et qui ont remplacé, à ce qu'on dit, la (vraie) philosophie par la logique.

Pour ce qui est de Carnap, Gödel le soupçonne d'avoir discrédité la logique mathématique en en faisant un mauvais usage, en la mettant notamment au service de ce qu'il considère comme une entreprise de destruction de la philosophie. Une des raisons pour lesquelles Gödel est resté convaincu de l'importance de la logique mathématique est le rôle essentiel qu'elle joue dans l'utilisation de la méthode axiomatique, qui a toujours été sa méthode favorite pour la caractérisation des concepts, non seulement dans les sciences, mais également en philosophie. Mais Gödel entend par « axiomatisation » quelque chose de comparable à ce que Newton a fait à un moment donné pour la physique et distingue rigoureusement le recours à la méthode axiomatique des tendances formalistes et conventionnalistes qui lui sont généralement associées dans l'esprit des philosophes. Il voit dans l'axiomatisation un moyen d'appréhender de façon de plus en plus précise des concepts qui sont déjà là (sa position est sur ce point identique à celle de Frege) ; et il envisage

même comme une possibilité à long terme la construction, pour la philosophie elle-même, d'une théorie axiomatique exacte du même genre que celle que Newton avait réussi à donner à la physique.

Il n'y a probablement pas de pays où la logique mathématique ait souffert autant et aussi longtemps qu'en France de la culpabilité par association qui résulte de l'usage discutable (et, bien entendu, de surcroît systématiquement simplifié et caricaturé dans la plupart des présentations courantes) qu'en ont fait à un moment donné les néopositivistes logiques. Trop de philosophes ont encore aujourd'hui tendance à considérer le néopositivisme logique (ou, en tout cas, ce qu'il en reste) comme étant en quelque sorte la philosophie officielle des logiciens, ce qui est tout simplement absurde. Entre le moment où elle a été rattachée de façon un peu trop étroite à des programmes philosophiques pour lesquels les Français n'éprouvaient *a priori* aucune espèce de sympathie et celui où elle a fini par ressembler extérieurement à une simple branche des mathématiques dont on ne voit pas très bien en quoi elle devrait intéresser plus que les autres le philosophe, on peut dire que la logique mathématique n'a jamais eu réellement sa chance dans le milieu philosophique français.

Si j'ai cité l'exemple — il est vrai, très particulier — de Gödel, c'est parce qu'il démontre de façon éclatante la possibilité d'une tout autre conception et d'un tout autre usage de la logique que ceux auxquels on a l'habitude de songer en priorité et qui suscitent (ce qui, du reste, ne signifie pas nécessairement, justifient) la méfiance et l'hostilité des philosophes. Selon Gödel, la logique mathématique « n'est rien d'autre qu'une formulation précise et complète de la logique formelle ». La logique mathématique comporte, à ses yeux, deux aspects : « D'un côté, elle est une section des mathématiques qui traite de classes, relations, combinaisons de symboles, etc., au lieu que ce soit de nombres, fonctions, figures géométriques, etc. De l'autre, elle est une science antérieure à toutes les autres, qui contient les idées et les principes sous-jacents à toutes les sciences. C'est dans ce deuxième sens que la logique mathématique a été pour la première fois conçue par Leibniz dans sa *Characteristica universalis,* dont elle aurait formé une partie centrale. »

D'après ce que l'on sait de ses écrits philosophiques inédits, ce que Gödel propose dans certains d'entre eux n'est en fait ni plus ni moins que le retour, par-delà Kant, à un programme rationaliste d'inspiration ouvertement leibnizienne. Wang nous apprend qu'il souhaitait utiliser la méthode philosophique dont il avait trouvé l'exemple chez Husserl (un des rares philosophes de notre époque auxquels il s'est intéressé de façon approfondie) « pour parvenir à un système de métaphysique qui aurait une portée comparable à celle de la monadologie de Leibniz, mais plus solidement fondé sur une intuition partageable et disciplinée ». S'agissant de tout autre que Gödel, une telle ambition pourrait faire figure aujourd'hui de simple curiosité philosophique. Mais peut-être faut-il réapprendre justement qu'en dépit de Kant et de Wittgenstein (que Gödel n'aimait visiblement pas beaucoup) et de ce qu'il a décidé d'ignorer comme relevant uniquement de l'« esprit de l'époque », il est possible, même aujourd'hui, de considérer et d'évaluer la logique mathématique en fonction de ce que l'on peut appeler sa « grande » tradition philosophique, celle de Leibniz, Bolzano, Frege et Gödel.

C'est un fait bien connu que la France n'a apporté aucune contribution notable à la révolution « galiléenne » dont parle Russell et a même réussi à l'ignorer presque complètement jusqu'à une date relativement récente. Tout ce qui pouvait être dit sur les raisons

historiques et philosophiques de cette anomalie l'a été à différentes reprises ; et il n'est pas nécessaire de revenir une fois de plus sur ce point. Pendant des années, la logique et la philosophie analytico-logique ont évoqué essentiellement pour les philosophes français l'idée d'une guerre de liquidation entreprise contre la métaphysique, et plus généralement contre la « vraie » philosophie, sans que les changements considérables qui sont intervenus entre-temps, et qui sont restés pour l'essentiel ignorés, contribuent en quoi que ce soit à ébranler ce préjugé aussi tenace que grotesque. Aujourd'hui, on surprend beaucoup certains philosophes français lorsqu'on leur explique qu'il existe une métaphysique analytique florissante, dans laquelle l'instrument logique continue plus que jamais à faire la preuve de son utilité pour la philosophie. Il est vrai que les théoriciens de la fin de la métaphysique occidentale sont généralement si ignorants de l'état réel de la philosophie dans le monde et si persuadés du caractère inattaquable et définitif de leur diagnostic qu'il ne leur viendrait pas à l'esprit d'essayer de le vérifier et qu'ils en oublient parfois tout simplement l'axiome modal élémentaire en vertu duquel tout ce qui est réel doit être également possible.

Comme l'a dit une fois Hintikka, ce qui est critiquable chez les philosophes est sans doute moins leur ignorance de la logique que leur ignorance fort peu socratique de cette ignorance. Ce que l'on continue à lire, sous la plume de philosophes français réputés, sur des résultats comme le théorème de Gödel est, de façon générale, tout bonnement affligeant. Wittgenstein dirait que, si l'on veut comprendre ce qu'une démonstration démontre, il faut regarder la démonstration. Mais les philosophes se contentent généralement de tirer des conclusions philosophiques parfaitement contestables d'une formulation approximative ou erronée du résultat. L'attitude des philosophes envers la logique mathématique est le plus souvent un mélange typiquement ambivalent de répulsion instinctive et de vénération superstitieuse. D'un côté, on refuse complètement la technique austère et rébarbative, qui n'a rien de spécialement philosophique ; de l'autre, on considère comme possible et même probable que ceux qui ont réussi à la maîtriser correctement et à acquérir une distance suffisante par rapport à elle aient accès à un monde philosophique mystérieux et redoutable dont l'entrée reste, en principe, interdite au profane, mais dans lequel on aimerait cependant pouvoir pénétrer de temps à autre (par exemple, lorsqu'il est question, justement, de résultats aussi prestigieux et révolutionnaires que ceux de Gödel) sans avoir à payer le prix imposé pour cela.

Il est évident — même si cette vérité élémentaire est encore trop souvent ignorée — que le seul moyen de guérir les philosophes de leur complexe d'infériorité (ou de supériorité) et des réactions d'agressivité qu'il engendre est de les persuader d'acquérir un minimum de familiarité avec la technique logique elle-même, d'apprendre à connaître l'instrument avant de prétendre le juger philosophiquement. C'était la conviction profonde de Roger Martin, à la mémoire duquel ce livre est fort justement dédié et dont on ne dira jamais assez que, si l'enseignement de la logique a pu être maintenu et développé en France et si la logique est aujourd'hui enseignée en principe, sous la forme précise sous laquelle elle se présente actuellement, dans tous les départements de philosophie, c'est en grande partie à ses efforts que nous le devons, je veux dire à l'action qu'il a menée pendant des années avec une patience, une humilité et une abnégation admirables en faveur de la logique et d'une véritable pédagogie de la logique adaptée à un public philosophique mal préparé, souvent indifférent et quelquefois ouvertement hostile. Ayant été moi-même un de ses collaborateurs directs depuis

le milieu des années soixante jusqu'à sa mort, je peux témoigner personnellement du fait qu'il a fallu partir presque littéralement de rien et se débrouiller, comme on dit, tant bien que mal avec les instruments du bord. Aujourd'hui encore, bien que le chemin parcouru depuis ait été considérable et que la situation soit, de toute évidence, infiniment meilleure, l'enseignement de la logique et de la philosophie de la logique en France continue à souffrir cruellement d'un manque désastreux d'instruments pédagogiques appropriés. Le retard en matière de traductions reste énorme, les bon ouvrages d'initiation, les manuels et les recueils d'exercices en français sont encore beaucoup trop rares ; et ce qui existe est souvent mal adapté aux attentes et aux besoins réels.

Je ne peux, dans ces conditions, que saluer avec admiration et reconnaissance l'excellente *Introduction à la logique* que vient de rédiger François Rivenc. Dire que je recommande chaleureusement cet ouvrage serait rester nettement en dessous de la vérité. Je suis convaincu qu'il deviendra rapidement un instrument de travail indispensable. Il est l'œuvre d'un jeune enseignant de logique qui a été formé à la meilleure école et possède les meilleures références, dont les connaissances techniques sont irréprochables et le jugement tout à fait sûr et que des années d'expérience de l'enseignement de la logique à des étudiants de philosophie rendaient particulièrement compétent pour cette tâche difficile entre toutes : rendre la logique contemporaine accessible dans toute la mesure du possible à un public de non-spécialistes. Pour autant que puisse en juger d'après sa propre expérience de l'apprentissage et de l'enseignement de la discipline le non-spécialiste que je suis (malheureusement) resté moi-même, le résultat est d'une qualité exceptionnelle et constitue une réussite tout à fait remarquable.

Puisque François Rivenc a mis en épigraphe de son livre une citation de Valéry, qui ne laisse aux hommes que le choix entre la logique (au sens large) et la guerre, je ne peux que souhaiter en terminant que la parution d'un ouvrage comme le sien contribue, au moins indirectement, à réintroduire au sein d'une communauté philosophique qui, dans la période précédente, a préféré un peu trop systématiquement la guerre à la logique et le terrorisme intellectuel à l'argumentation cet amour de la logique et ce goût de la preuve qui constituent effectivement une des formes de la politesse que se doivent les uns aux autres des esprits supposés rationnels.

Jacques BOUVERESSE

« Rappelez-vous tout simplement qu'entre les hommes il n'existe que deux relations : la logique ou la guerre. Demandez toujours des preuves, la preuve est la politesse élémentaire qu'on se doit. Si l'on refuse, souvenez-vous que vous êtes attaqués, et qu'on va vous faire obéir par tous les moyens. Vous serez pris par la douceur ou par le charme de n'importe quoi, vous serez passionnés par la passion d'un autre. »

P. Valéry, *Monsieur Teste.*

INTRODUCTION

Ce livre s'adresse à un public de non-spécialistes, particulièrement à des étudiants en philosophie et sciences humaines, qui ne sont pas censés posséder un bagage mathématique important, mais sont désireux de maîtriser les notions de base et les techniques propres à la logique mathématique. De la totalité de la logique, seul un champ fort étroit est traité, et encore, bien sûr, de manière non exhaustive : ce qu'on appelle la logique élémentaire, en un sens précis du terme, c'est-à-dire cette partie de la logique où les notions de « tous les » et « quelque » s'appliquent à des objets, baptisés « individus », plutôt qu'à des propriétés de ces objets ou à des classes contenant ces objets.

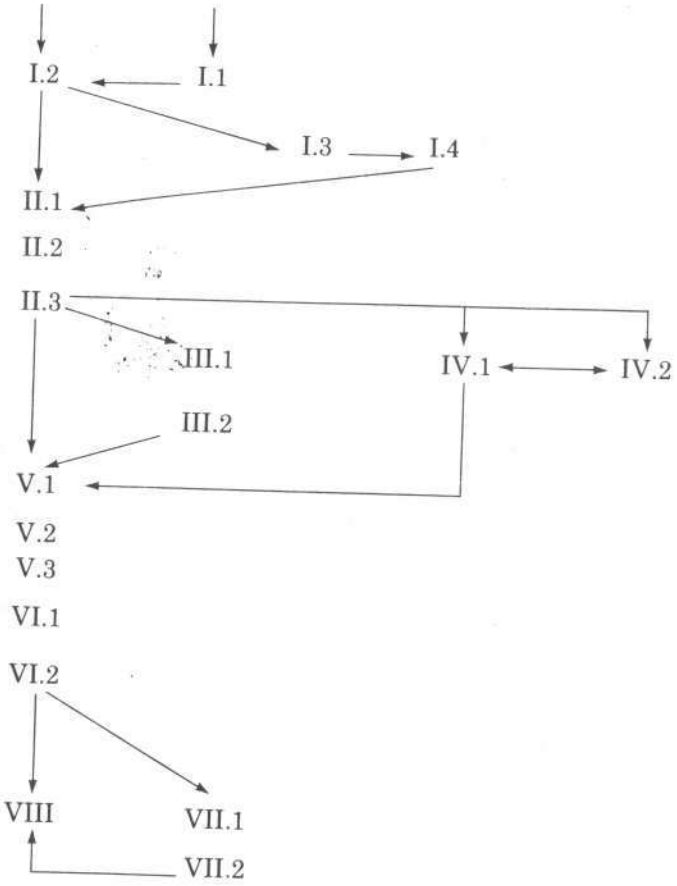
L'objectif principal poursuivi par ce livre correspond à un constat tiré d'une expérience d'enseignement de la logique à des étudiants en philosophie. Les difficultés susceptibles d'arrêter un étudiant philosophe, quand il aborde la logique, ne sont pas essentiellement d'ordre technique ; l'attente qui est souvent la sienne tourne autour de l'idée que s'il est un lieu où le maximum d'exactitude et de clarté doit prévaloir, la logique est cette discipline. Mais, d'autre part, les notions mises en jeu dès le commencement sont complexes, et philosophiquement profondes. La déception, et les difficultés qui s'ensuivent, peuvent venir du caractère vague et approximatif du traitement qu'on leur a donné ; si bien qu'un relatif savoir-faire technique peut reposer sur un flou conceptuel complet, un manque de compréhension des démarches intellectuelles accomplies. Sans avoir naturellement la prétention d'avoir réussi à aplanir toutes les difficultés théoriques, j'ai tenté de clarifier les fondements (et les problèmes)

philosophiques qui sous-tendent la construction de la logique. Les traits caractéristiques de ce livre proviennent de ce souci : un développement assez long a été réservé aux questions purement formelles concernant le langage introduit, afin d'accéder à une vue nette concernant les rapports entre langage ordinaire (dans lequel sont conduits les raisonnements usuels) et langage artificiel (formalisé). La question de la nature des variables, des traits distinctifs de la « théorie de la quantification » en tant que manière de représenter la généralité a été abordée dans le premier chapitre de la II^e partie ; des problèmes comme ceux du statut des « lettres d'énoncé » (I^re partie), ou des « symboles de prédicat » (II^e partie) ont fait l'objet de remarques aussi étendues qu'il était possible dans le cadre d'un manuel de ce format. Le lien avec d'autres points de vue accessibles au lecteur français, en raison de l'existence de traductions, a été précisé, et, partout où l'occasion se présentait, des références historiques et philosophiques ont été données. Bref, bien que ce livre soit une introduction à la logique mathématique, on peut espérer que le lecteur sentira la présence permanente, en arrière-fond, de cet ensemble d'analyses et de démarches qui constitue la philosophie de la logique. Il ne s'agit pas d'opposer une logique « mathématique » à une logique « philosophique », mais de donner à la première la rigueur et la signification philosophiques qu'elle exige.

Les choix opérés à l'intérieur même du développement résultent d'un compromis (insatisfaisant sans doute, comme tout compromis) entre le souci de couvrir un champ relativement important et celui de ne pas multiplier les difficultés techniques, entre le souci de généralité et celui de simplicité ; ainsi, bien que le chapitre V considère des langages avec identité (et éventuellement des symboles de fonction), ce point de vue général est progressivement abandonné. L'identité

n'est pas traitée : il m'a semblé que la complexité de la démonstration du Théorème de complétude, acceptable si on se limitait au premier ordre sans identité, devenait rédhibitoire, relativement au niveau de construction mathématique admissible dans ce livre, si l'on élargissait le point de vue à des langages avec identité. Cependant, l'étude de procédures formelles de preuve fait l'objet d'un double traitement : en termes de système d'axiomes, et en termes de tableaux analytiques (l'une des raisons de ce choix a été qu'il n'existe pas, à ma connaissance, de présentation de la « méthode des arbres » disponible en français). Pour ce qui est de la limitation principale du champ couvert, elle tient à la nature même de l'ouvrage, d'être un manuel d'introduction : si les bases du calcul du premier ordre sont données dans un esprit « model-theoretic », la Théorie des Modèles elle-même reste notre terre promise. L'espoir qui justifie ce livre est que le lecteur, parvenu au terme de l'ouvrage et ayant acquis la maîtrise des rudiments, poursuive par lui-même dans quelque manuel de théorie des modèles.

Les passages introduits par le mot « REMARQUE » peuvent être sautés lors d'une lecture rapide. Plus généralement, plusieurs modes d'emploi de ce livre sont possibles, selon des itinéraires plus ou moins courts ; le schéma ci-dessous illustre ces différents trajets, la voie longue étant plus à droite que la voie courte.



Les preuves des théorèmes sont indiquées par ***Preuve***.

Des exercices simples (d'application immédiate des notions introduites) sont de temps en temps proposés au fil du texte, et présentés sous la rubrique ***Exercice***.

Le symbolisme adopté est le symbolisme usuel (à ceci près qu'il y a des variantes) et se conforme la plupart du temps à Chang & Keisler, 1973.

F. RIVENC.

Première partie

Calcul des énoncés

« La logistique est la première logique formelle construite de façon strictement synthétique. Voici ce qu'il faut entendre par là : elle est la première logique qui monte méthodiquement du simple au complexe. »

H. Scholz, *Abriss der Geschichte der Logik*, 1931 (trad. fr. : *Esquisse d'une histoire de la logique*, Aubier-Montaigne).

CHAPITRE PREMIER

Le langage pour le calcul des énoncés

I.1 REMARQUES INTRODUCTIVES

A propos de sa première tentative pour dériver l'arithmétique à partir de notions et vérités purement logiques, Frege écrit :

« Pour éviter que rien d'intuitif ne vienne s'introduire là à mon insu, tous les efforts devaient être faits pour que la chaîne des inférences ne comporte aucune lacune. Tandis que j'essayais d'obéir à cette exigence de la manière la plus rigoureuse possible, je rencontrai un obstacle dans l'inadéquation du langage ; quelle que fût la lourdeur des expressions que j'étais disposé à accepter, au fur et à mesure que les relations devenaient plus complexes, j'étais de moins en moins capable d'obtenir la précision requise. De ce défaut provient l'idée de la présente idéographie (*Begriffsschrift*). »

Préface à la *Begriffsschrift*, 1879.

Il est généralement admis qu'on doit à Frege la première entreprise de construction d'un langage *formalisé*. La logique *symbolique*, ou *logique mathéma-*

tique, n'est rien d'autre que l'étude de la logique procédant par la construction d'un tel langage : on parle parfois à ce propos de *méthode logistique* (Church, 1956) : on ne confondra pas cet usage du terme « logistique » avec la doctrine suivant laquelle les mathématiques sont « réductibles » à la logique.

On insiste souvent, pour justifier la construction d'un langage artificiel pour l'étude de la logique, sur l'ambiguïté, dans les langues naturelles, de certains mots essentiels destinés à représenter les connexions logiques : de là l'introduction de symboles spéciaux, au sens défini sans équivoque, pour remplacer des locutions et des tournures dont les rôles sont difficiles à cerner avec exactitude. Cette ambiguïté proprement sémantique n'est cependant pas le seul motif qui conduit à la construction d'un langage artificiel : pensons aux « ambiguïtés de groupement » que peut présenter un énoncé complexe, comme :

Si Dieu n'existe pas, tout est permis, mais l'homme est la mesure de toute chose.

Plus généralement, l'intérêt de la formalisation pourra être éclairé par les remarques suivantes :

D'une part, toute recherche logique introduit une certaine « stylisation » des formes grammaticales variées du langage ordinaire, sous peine de devoir multiplier à l'excès les formes de raisonnement admises comme valides. On dira par exemple que les énoncés :

Il pleut ou il ne pleut pas.

Un livre contient toujours une erreur ou certains livres ne contiennent pas d'erreur.

Ou l'intelligence divine pense, ou elle ne pense rien.

sont des *instances* de la forme d'énoncé :

P ou non P

bien que ce ne soit exactement le cas d'aucun des trois.

Une telle réduction à un patron commun de formes variées est aussi vieille que la logique elle-même ; ainsi dans l'œuvre d'Aristote, des énoncés comme :

Si tous les hommes sont mortels, et si tous les Grecs sont hommes, alors tous les Grecs sont mortels.

Si tout (objet) blanc est inanimé et si tout cygne est blanc, alors tout cygne est inanimé.

sont réduits à la forme canonique du syllogisme (ici de la première figure) :

Si A est affirmé de tout B et B de tout Γ, A est affirmé de tout Γ.

(*Premiers Analytiques*, I, 4.)

D'autre part, il y a des cas où l'on peut estimer à bon droit que la ressemblance grammaticale est logiquement trompeuse : d'où l'intérêt de disposer d'un langage artificiel où des constructions différentes manifesteront explicitement la différence logique. Considérons les deux exemples :

(1) J'ai vu un portrait de Charlotte Corday ; Charlotte Corday est l'assassin de Marat ; donc j'ai vu un portrait de l'assassin de Marat.

(2) J'ai vu un portrait de quelqu'un ; quelqu'un est l'inventeur de la bicyclette ; donc j'ai vu un portrait de l'inventeur de la bicyclette.

Malgré la grande ressemblance de forme, l'argument (1) est *correct* (logiquement valide), alors que (2) bien sûr ne l'est pas. Certes, un instant de réflexion dissipera l'erreur éventuelle dans ce cas simple, mais il est désirable de disposer de constructions telles qu'elles nous dispensent de faire appel à chaque instant à l'intuition (qui au reste ne nous serait d'aucun secours

dans des situations plus complexes). Pour déduire une conclusion de *prémisses* (ou pour vérifier qu'une conclusion présentée comme telle est bien *déductible* de prémisses données), nous n'aurons pas à réfléchir au sens des énoncés, mais seulement à appliquer des règles de transformation explicitement formulées, et en nombre relativement restreint, à des expressions construites selon des procédés uniformes et réguliers, la pauvreté des constructions admises selon les règles de *formation* rendant possible la restriction du nombre de règles de *transformation*. La construction d'un langage formalisé n'est rien d'autre que le développement de cette idée simple.

L'entreprise de formalisation commence ordinairement par la description et l'étude de la composante purement *formelle* du langage, abstraction faite de toute considération de sens.

Tout d'abord, l'alphabet (parfois : le vocabulaire) du langage est spécifié par une liste des symboles qui seront ultérieurement les seuls à être utilisés (du moins comme symboles *du* langage). Ces symboles, dits *symboles primitifs*, peuvent être en nombre fini ou infini ; s'ils sont en nombre infini, ils seront cependant présentés d'une manière telle qu'on puisse toujours *décider*, devant un symbole donné, s'il s'agit ou non d'un symbole primitif du langage considéré.

Une suite quelconque finie de symboles primitifs est appelée une *expression* (ce qui ne veut pas dire qu'une telle suite « exprime » un sens ! Le mot « expression » est peut-être malheureux ici : nous l'adopterons cependant, tant son usage est bien attesté). Lorsqu'un symbole primitif figure dans une expression, on parle d'une *occurrence* de ce symbole dans l'expression, et s'il y figure à plusieurs reprises, de la première, deuxième, ..., n-ième occurrence de ce symbole. Le nombre d'occurrences de symboles dans une expression

est appelé la *longueur* de l'expression ; des exemples tirés du français peuvent aider à saisir ces notions simples : ainsi le mot français « achat » comporte-t-il deux occurrences de la lettre « a », et est de longueur 5.

En second lieu, des règles dites *règles de formation* sont données, par lesquelles certaines expressions sont mises à part et considérées comme bien formées (on pourra les concevoir, en gros, comme l'équivalent des expressions reconnues comme grammaticales d'une langue naturelle). Ces expressions sont parfois dites *expressions bien-formées* (ebf), ou *formules* ; nous adopterons ici ce dernier terme par souci de brièveté. La définition des formules par les règles de formation sera telle que là encore, devant une expression donnée, on disposera d'une méthode effective pour *décider* si oui ou non cette expression est une formule.

La spécification d'un langage par sa *base primitive* comporte toujours la donnée d'un alphabet et de règles de formation. Selon les cas, et selon les auteurs, on considère qu'appartient également à la base primitive : la donnée d'un certain nombre de formules à titre de *formules primitives* ou *axiomes* ; et finalement celle de *règles de transformation* ou *règles d'inférence*, conformément auxquelles, à partir de certaines formules considérées comme *prémisses*, une formule peut être inférée à titre de conclusion (les mots « prémisses », « conclusion », « inférence », à cette étape purement formelle, n'ont que le sens que leur confèrent les règles elles-mêmes : la notion de « conclusion », par exemple, peut être dite purement syntaxique, dans la mesure où « être une conclusion » désigne seulement la propriété d'être obtenu à partir d'une formule ayant telle forme par une transformation conforme aux règles).

Bien que la construction d'un langage formel procède sans que l'on attache de sens aux symboles primitifs ni aux formules, on a ordinairement en vue une *interprétation* (parfois dite : interprétation principale,

ou attendue), telle que, par exemple, certaines formules puissent être tenues, sous cette interprétation, pour une paraphrase convenable d'expressions du langage ordinaire, ou d'un langage « semi-ordinaire » (par exemple, des énoncés mathématiques). En général, la terminologie utilisée dans la description et la classification des symboles et expressions : « symboles d'énoncés », « connecteurs », etc., comme on le verra ci-dessous, préfigure dès l'étape formelle la signification ou la fonction qui leur sera attachée ultérieurement. Finalement, un langage formel auquel est associé une interprétation par des règles *sémantiques* devient un langage formalisé au sens plein.

REMARQUE

1) En ce qui concerne les usages du terme « langage » dans ce type de contexte, la terminologie n'est pas absolument fixée. Certains auteurs décrivent comme un « langage » ce que Church (1956) appelle le *système logistique* ou un *calcul non interprété* (d'après Carnap, 1934), i.e. le système formé par la donnée des symboles primitifs et des règles de formation et de transformation, abstraction faite de toute considération sémantique. Cet usage du terme « langage » s'écarte notablement de l'usage courant du mot ; on peut considérer qu'il est plus naturel de concevoir un langage comme un ensemble de symboles avec les règles de formation des formules, auquel est d'emblée attachée une interprétation ; les axiomes et règles d'inférence seront considérés ultérieurement comme définissant la « logique » pour ce langage : dans la terminologie de Chang & Keisler (1973) par exemple, on définit, relativement à un langage, un *système formel*, en stipulant des axiomes et des règles primitives d'inférence. Le lecteur s'apercevra qu'en passant de la I^re^ à la II^e^ partie, nous avons quelque peu profité de cette flexibilité du terme.

2) En un sens ou un autre, un langage formalisé prétend exhiber, manifester, ou reproduire la structure ou la *forme logique* mieux que ne le fait le langage ordinaire. Il y a cependant différentes manières de concevoir la portée de l'analyse logique solidaire d'un choix déterminé de formes de constructions, qui ne sont pas philosophiquement équivalentes.

L'idéal au moins régulateur de la formalisation peut être celui d'un « langage logiquement parfait », qui refléterait « comme un miroir » la structure logique du monde. C'était certainement le point de vue de Russell (et dans une certaine mesure celui de Frege) ; on le trouve exprimé ainsi sous la plume de Russell :

« Un langage logiquement parfait [...] serait complètement analytique et révèlerait comme un miroir la structure logique des faits affirmés ou niés. Le langage construit dans *Principia Mathematica* est conçu comme devant être un langage de ce type. Il est constitué d'une syntaxe et ne contient pas de vocabulaire ; [mais] il a la prétention d'être un langage tel que, si vous lui ajoutez un vocabulaire, vous aurez un langage logiquement parfait. »

(*The Philosophy of Logical Atomism*, 1918)

En relative opposition avec ce point de vue, les motifs pragmatiques de simplification et de régularité peuvent être mis au premier plan : le but de l' « enrégimentement » des formes linguistiques ordinaires dans une « notation canonique » est essentiellement de permettre d'élaborer une théorie relativement simple de la déduction. Ce point de vue est ainsi exprimé par Quine :

« La simplification de la théorie est un des motifs principaux de la généralisation des artifices de notation dans la logique moderne [...]. C'est une question de stratégie que de conserver une théorie simple là où nous le pouvons, et, quand nous voulons appliquer la théorie à des énoncés particuliers du langage ordinaire, de transformer ces énoncés en une "forme canonique" adaptée à la théorie. »

(*Word and Object*, 1960, chap. v.)

I.2 LE LANGAGE $\mathscr{L}_p$

Les symboles primitifs du langage sont :

$$(\ ,\ ),\ \neg,\ \Lambda,\ V,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

ou symboles *logiques*, les deux premiers étant appelés respectivement : parenthèse ouvrante et parenthèse fermante, les autres *connecteurs* ;

et une liste infinie (plus précisement : infinie dénombrable) de *symboles d'énoncés* ou *atomes* :

$$p\ q\ r\ s\ p_1\ q_1\ r_1\ s_1\ p_2\ q_2\ \ldots$$

(l'ordre indiqué ici étant dit l'ordre alphabétique des atomes). Les virgules de la première liste et les points de suspension de la seconde ne sont pas des symboles formels, mais des signes de ponctuation utilisés en écrivant ces symboles.

Bien que le point de vue de l'interprétation soit absent des considérations de ce chapitre, la compréhension du lecteur sera facilitée par les indications données ci-dessous concernant la manière dont il convient de lire oralement les connecteurs :

$\neg$: non Λ : et
V : ou $\rightarrow$: si ... alors
$\leftrightarrow$: si et seulement si

(Nous discuterons dans un chapitre ultérieur de la légitimité de cette lecture des connecteurs envisagée comme authentique « traduction ».)

Une expression de $\mathscr{L}_p$ est une suite finie de symboles primitifs ; par exemple :

$$p_{53},\qquad))\neg q,\qquad (p \rightarrow q)$$

sont des expressions.

Pour poursuivre l'étude de notre langage formel, nous avons besoin d'utiliser un langage dans lequel nous pourrons parler de notre *langage-objet* et établir

certaines de ses propriétés. Ce langage sera ici une partie du français usuel, éventuellement enrichie de notations et de termes mathématiques dont l'usage se révélera utile : un tel langage sera dit un *méta-langage*, ou langage de l'observateur (les termes *« syntaxe »*, « langage syntaxique » (« syntax-language ») sont également utilisés, mais ordinairement lorsqu'on a en vue le traitement formalisé de la syntaxe elle-même).

Nous devons disposer dans le méta-langage : premièrement de *noms* des symboles, expressions, et formules du langage objet ; et deuxièmement de *variables* qui nous permettront de parler de manière générale de symboles ou d'expressions d'une certaine forme (des variables dont les valeurs possibles sont les symboles ou expressions du langage-objet, ou dont le « domaine de valeurs » est constitué des symboles et expressions du langage-objet) ; bref, de *constantes* et *variables syntaxiques*.

REMARQUE

Il est possible d'utiliser la convention familière suivant laquelle on obtient un nom d'un mot ou d'un symbole en insérant des guillemets de part et d'autre de ce mot ou symbole, ce qui revient à *mentionner* (plutôt qu'à utiliser comme dans les contextes habituels) le mot ou le symbole mis entre guillemets. Selon cette convention, nous pourrons dire par exemple à propos de l'un des connecteurs du langage-objet :

(1) « $\neg$ » est un symbole logique

Il est également possible d'introduire dans le méta-langage des noms particuliers pour certains symboles, par exemple : « le signe de négation », ou en abrégé : « ng ». L'énoncé (1) pourra dès lors être réécrit ainsi :

(2) ng est un symbole logique

En combinant éventuellement ces deux procédés, il est possible de disposer d'un nom de toute expression

particulière du langage objet, qui indique les symboles qui constituent l'expression ainsi que l'ordre dans lequel ils se suivent (nom ou description structurale d'une expression, selon Tarski, 1936). Par exemple, l'expression du méta-langage :

(3) l'expression qui commence par « (», suivi du premier symbole d'énoncé, suivi de « Λ », suivi de ng, suivi du troisième symbole d'énoncé, suivi de «) »

est un nom (du type description structurale) de l'expression du langage-objet :

$$(p \wedge \neg r)$$

On peut enfin abréger « l'expression qui commence par x suivi de y » en : « [x ⌢ y] », ce qui permet d'écrire (3) sous la forme :

(4) [[[[[par0⌢« p »]⌢conj]⌢ng]⌢« r »]⌢parF]

où le lecteur aura saisi que « par0 » désigne « (», « parF » désigne «) », « conj » désigne « Λ », «« p »» désigne « p », etc.

Exercice

Vérifier que dans les trois lignes ci-dessus, l'usage des guillemets est conforme à la convention annoncée plus haut !

Quel que soit l'intérêt théorique de l'utilisation de ce procédé de construction de noms dans le cadre de certaines recherches, il aboutit rapidement, comme le lecteur peut le constater en (4), à des écritures difficilement lisibles.

La convention usuelle qui régit la formation de noms de symboles et d'expressions, et que nous adopterons ici, est la suivante :

LES SYMBOLES PRIMITIFS DU LANGAGE-OBJET SERONT UTILISÉS COMME NOMS D'EUX-MÊMES DANS LE MÉTA-LANGAGE ; ET LA JUXTAPOSITION DES NOMS SERA UTILISÉE COMME NOM POUR LA JUXTAPOSITION.

(en d'autres termes : les symboles seront utilisés de façon *autonyme* ; et pour désigner une suite de symboles, nous écrivons leur nom l'un après l'autre ; sous cette double convention, l'énoncé (1) de la page 39 peut être réécrit simplement :

$\neg$ est un symbole logique

et nous pourrons parler dans le méta-langage de l'expression (p Λ ¬r) sans devoir la disposer de manière isolée en milieu de page, typographie tacitement utilisée comme équivalent à la mise entre guillemets.)

Nous utiliserons comme variables syntaxiques les lettres suivantes :

Γ, Δ, ... pour des expressions quelconques

φ, ψ, χ, ... pour des formules quelconques

a, éventuellement avec des indices souscrits, pour des atomes (dans l'écriture avec indices, on ne doit pas penser que « $\mathbf{a}_1$ », « $\mathbf{a}_2$ » (par exemple) renvoient nécessairement à des atomes distincts)

c pour un connecteur binaire quelconque (c'est-à-dire n'importe quel connecteur à l'exception de ¬).

La convention qui préside à l'usage des variables syntaxiques est du même ordre que celle qui gouverne l'usage des noms : la juxtaposition de variables d'expressions représente la suite constituée des symboles de la première expression (ici indiquée de manière indéterminée) suivis des symboles de la seconde expression, et ainsi de suite.

Enfin, les deux conventions peuvent être combinées quand nous avons à représenter une forme d'expression, c'est-à-dire un contexte déterminé pour des expressions non spécifiées : par exemple, quand nous voulons parler de la suite constituée de (, suivie des symboles de φ

dans leur ordre, suivis de Λ, suivi des symboles de ψ dans leur ordre, suivis de) ; sous cette convention, la suite mentionnée à l'instant sera représentée par la notation :

$$(\varphi\Lambda\psi)$$

où les parenthèses et le connecteur sont utilisés de manière autonyme comme stipulé. (Cette convention est structurellement analogue au procédé de la quasi-citation [*quasi-quotation*] de Quine 1940, en ceci que la quasi-citation revient à constituer un nom du contexte déterminé, nom comportant des blancs où sont insérés les variables. Mis à part la différence de notation — Quine 1940 utilise des demi-crochets ou « corner » pour signaler la quasi-citation, de sorte que la formule écrite plus haut devient :

$$\ulcorner(\varphi\Lambda\psi)\urcorner$$

la principale différence réside dans le fait que Quine n'opère pas avec un langage-objet artificiel et spécifié, mais que les variables φ, ψ, sont comprises comme indiquant de manière indéterminée des énoncés du langage ordinaire ou d'un langage semi-ordinaire).

Exercice

Expliquer pourquoi ni la notation :

« $(\varphi\Lambda\psi)$ »

ni même, à défaut de la convention sur l'autonymie, la notation :

$$(\varphi\Lambda\psi)$$

ne seraient utilisables (pour la seconde question, on se souviendra de la règle fondamentale qui préside à l'usage des variables : peuvent être de façon sensée substitués à des variables des noms des valeurs possibles de ces variables).

Nous allons utiliser ces conventions pour formuler les règles de formation de $\mathscr{L}_p$.

RÈGLES DE FORMATION

(I) un atome est une formule ;

(II) si Γ, Δ, sont des formules, alors (¬Γ), (Γ c Δ) sont des formules ;

(III) une expression est une formule seulement si elle l'est en vertu de (I) ou de (II).

Exemples de formules :

$$q_5, \quad (\neg(r \rightarrow s_3)), \quad (p\ V\ (p_1 \rightarrow p)), \quad (\neg p)$$

Les règles (I) à (III) peuvent être considérées comme constituant une définition *inductive* de l'ensemble **F** des formules de $\mathscr{L}_p$.

REMARQUE

Il y a deux manières équivalentes de transformer cette définition en une définition explicite de **F** ; la première revient à considérer **F** de façon « globale », « par en haut » ;

1) Soit A l'ensemble des atomes, S l'ensemble des symboles logiques, et E* l'ensemble des suites finies à éléments dans $A \cup S$;

Un sous-ensemble X de E* est dit dans ce contexte *inductif* si et seulement si (en abrégé : *ssi*) il possède les deux propriétés suivantes :

(I) $A \subseteq X$

(II) si $\Gamma, \Delta \in X$, alors $(\neg\Gamma), (\Gamma\ c\ \Delta) \in X$

La condition (II) signifie que X est *clos* pour les opérations de construction d'expressions définies par :

$$\xi_{\neg}(\Gamma) = (\neg\Gamma)$$
$$\xi_{\Lambda}(\Gamma, \Delta) = (\Gamma\ \Lambda\ \Delta), \text{ etc.}$$

LEMME I.1 Il existe un unique sous-ensemble de E* ayant les propriétés : 1) d'être inductif ; 2) d'être contenu dans tout sous-ensemble inductif de E*.

Preuve

Considérons l'ensemble I des sous-ensembles inductifs de E* ; puisque E* lui-même appartient à I, I n'est pas vide, et on peut considérer :

$$F^\circ = \bigcap \{X \subseteq E^* ; X \text{ est inductif}\}$$
$$= \{\Gamma \in E^* ; \text{pour tout } X \in I, \Gamma \in X\}$$

Exercice

Le lecteur vérifiera lui-même que F° est inductif, et que pour tout $X \in I$, $F^\circ \subseteq X$.

On dit que F° est le plus petit ensemble inductif, au sens où il est inclus dans tout sous-ensemble inductif de E*.

2) La seconde définition procède de bas en haut :

$$\text{Soit } F_0 = A$$

et pour chaque entier $n \geqslant 0$:

$$F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\Gamma) ; \Gamma \in F_n\} \cup \{(\Gamma \text{ c } \Delta) ; \Gamma, \Delta \in F_n\}$$

Posons :

$$F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$$

LEMME I.2 $F^\circ = F_\omega$

Preuve

On montre que :

1) F_ω est inductif, et donc $F^\circ \subseteq F_\omega$;
si $\Gamma, \Delta \in \bigcup F_n$, il existe un entier k et un entier k' tels que $\Gamma \in F_k$ et $\Delta \in F_{k'}$; soit $p = \max |k, k'|$; alors $(\neg\Gamma)$ et $(\Gamma \text{ c } \Delta) \in F_{p+1}$, et donc $(\neg\Gamma)$, $(\Gamma \text{ c } \Delta) \in F_\omega$.

2) on montre par récurrence ordinaire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n \subseteq F^\circ$; finalement $F_\omega = F^\circ$.

En vertu de cette identité, on parlera simplement de l'ensemble **F** des formules du langage.

Notons qu'en vertu de la définition de **F**, tout ensemble inductif de formules est l'ensemble de toutes les formules. Ce fait peut être utilisé pour prouver que toutes les formules ont une certaine propriété : il suffit en effet de montrer que l'ensemble des formules ayant cette propriété est inductif ; d'où le :

THÉORÈME I.3 Toute formule a un nombre égal de parenthèses ouvrantes et de parenthèses fermantes.

Preuve

L'ensemble des formules ayant ladite propriété contient les atomes (qui ont 0 parenthèses ouvrantes et 0 parenthèses fermantes) et est clos pour les opérations de constructions de formules (qui rajoutent chaque fois une ouvrante et une fermante) ; c'est donc un ensemble inductif : via la minimalité de **F**, c'est donc l'ensemble de toutes les formules.

I.3 LE THÉORÈME DE NON-AMBIGUÏTÉ

Le lecteur a sans doute déjà l'intuition que toute formule *complexe* (i.e. : qui n'est pas un atome) est formée par application d'un connecteur, dit connecteur *principal* de la formule, à une ou deux (suivant les cas) *sous-formules* ; et que, corrélativement, toute formule complexe est décomposable en sous-formules plus simples ; par exemple, la formule :

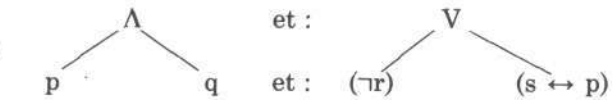
$$\neg((p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee (s \leftrightarrow p)))$$

est formée par application du connecteur :

à :

et chacune de ces sous-formules est formée respectivement par application de :

à :



Pour achever *l'arbre généalogique* de la formule initiale, notons enfin que les deux dernières formules de droite sont formées respectivement par application de :

à :

(l'arbre s'achève quand on est parvenu aux atomes).

Il s'agit à présent de donner un sens précis à cette intuition, de la généraliser, et de s'assurer que toute formule n'est décomposable que d'une unique façon en sous-formules : en d'autres termes, qu'il n'y a pas dans le langage d'ambiguïté de groupement (l'importance de ce fait apparaîtra au chapitre suivant).

DÉFINITIONS

1) ψ est dite sous-formule *immédiate* de φ *ssi* :
ou (I) $\varphi = (\neg\psi)$
ou (II) il existe une formule χ et un connecteur binaire c tels que $\varphi = (\psi \text{ c } \chi)$ ou $\varphi = (\chi \text{ c } \psi)$.
(Si $\varphi = \mathbf{a}$, φ n'a pas de sous-formule immédiate.)

2) ψ est *sous-formule* de φ *ssi* :
ou (I) $\varphi = \psi$
ou (II) ψ est sous-formule immédiate de φ
ou (III) il existe une formule χ qui est sous-formule de φ et telle que ψ est sous-formule de χ.
(On notera que la définition de « sous-formule immédiate » ne présuppose pas celle de « sous-formule » : c'est au contraire cette dernière qui présuppose la première.)

REMARQUE

Le lecteur qui serait inquiet de l'apparente circularité de la clause (III) peut remarquer qu'il est possible de transformer cette définition en définition explicite de la notion de sous-formule via la notion de chaîne de formation.

Une chaîne de formation de φ est une suite finie de formules $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ telle que $\varphi_n = \varphi$ et telle que chaque φ_i, pour $1 \leqslant i < n$, soit sous-formule immédiate de φ_{i+1}.

ψ est sous-formule de φ *ssi* il existe une chaîne de formation $(\psi, \varphi_2, \ldots, \varphi)$.

Pour faciliter les démonstrations concernant les formules, il est usuel d'associer à chaque formule un entier. Ceci peut se faire de différentes façons ; considérons la fonction :

$$l : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{N}$$

définie par :

$$l(\mathbf{a}) = 1$$
$$l((\neg\varphi)) = l(\varphi)+3$$
$$l((\varphi\ c\ \psi)) = l(\varphi)+1(\psi)+3$$

Cette fonction associe à chaque formule un entier, qui est dit la *longueur* de la formule (cf. I.1). On peut aussi considérer la fonction :

$$d : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{N}$$

définie par :

$$d(\mathbf{a}) = 0$$
$$d((\neg\varphi)) = d(\varphi)+1$$
$$d((\varphi\ c\ \psi)) = d(\varphi)+d(\psi)+1$$

qui associe à chaque formule un entier dit le *degré* de la formule, ou le nombre d'occurrences de connecteurs dans la formule.

Pour démontrer qu'une propriété P est vraie de toutes les formules, on raisonne alors par *récurrence* (arithmétique) sur la longueur (ou sur le degré selon les cas) des formules. Un raisonnement par récurrence sur la longueur (par exemple) aura la forme typique suivante :

1) on assure la « base de la récurrence », en montrant que P est vraie des formules de longueur 1 ;

2) on démontre le « pas » de récurrence, i.e. :
Si (hypothèse de récurrence) P est vraie des formules de longueur $\leqslant k$, alors P est vraie des formules de longueur $k+1$;

3) on conclut de 1) et de 2), moyennant le *principe de récurrence*, que P est vraie des formules de longueur n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

REMARQUE

Le principe de récurrence invoqué en 3) doit l'être sous la forme (dite parfois : de récurrence sur la suite des valeurs) :
Si P est vraie de 0, (ou, suivant les cas, de 1) et si, si P est vraie de tout entier $\leqslant k$, P est vraie de $k+1$, alors P est vraie de n, quel que soit n.

En effet, considérons une formule de longueur $k+1$ ($k \neq 0$), qui sera par exemple de la forme $(\neg\varphi)$; la formule φ concernée par l'hypothèse de récurrence n'est pas de longueur k, mais de longueur $k-2$; il faut donc que l'hypothèse de récurrence concerne toutes les valeurs $\leqslant k$.

Exercice

1) Reformuler la preuve du THÉORÈME I.3 en raisonnant par récurrence sur la longueur des formules ;

2) Montrer, en raisonnant par récurrence sur le degré, que toute formule a un nombre égal de parenthèses ouvrantes (ou de parenthèses fermantes) et de connecteurs.

3) Montrer par récurrence que pour toute formule φ,

$$l(\varphi) > d(\varphi)$$

4) Soit b le nombre d'occurrences de connecteurs binaires dans une formule φ, et a le nombre d'occurrences d'atomes ; montrer que pour tout φ, $a = b+1$.

Nous pouvons à présent revenir au Théorème de non-ambiguïté :

LEMME I.4 Tout segment initial propre d'une formule comporte plus de parenthèses ouvrantes que de fermantes.

Preuve

1) Regardons le cas où $d(\varphi) = 0$: φ est un atome, et la propriété est (trivialement) vraie dans la mesure où φ n'a pas de segment initial propre ; il n'en a donc pas auquel la propriété fasse défaut ;

2) Regardons le cas où $d(\varphi) > 0$: φ est alors de la forme $(\neg\psi)$, ou $(\psi c\chi)$;

Si $\varphi = (\neg\psi)$, les segments initiaux propres de φ sont :

1 (
2 $(\neg$

3) $(\neg\psi_0$, où ψ_0 est un segment initial propre de ψ

4 $(\neg\psi$

par hypothèse de récurrence, ψ_0 contient un excès de parenthèses ouvrantes, donc il en est de même pour le segment $(\neg\psi_0$; par Th. I.3, ψ contient autant d'ouvrantes que de fermantes, si bien que le segment $(\neg\psi$ contient une ouvrante en excès ; donc tous les segments initiaux propres de φ ont un excès d'ouvrantes (il suffit de le constater pour les lignes 1 et 2).

Exercice

Achever la démonstration (analogue) pour le cas restant, i.e. $\varphi = (\psi c\chi)$.

LEMME I.5 Aucun segment initial propre d'une formule n'est une formule.

Preuve

Par Th. I.3 et Lemme I.4.

THÉORÈME I.6 (de non-ambiguïté, ou de lecture unique) : une formule ne peut être décomposée que d'une unique manière en sous-formules immédiates.

Preuve

Remarquons tout d'abord que le cas où :

$$(\neg\varphi) = (\psi c\chi)$$

est impossible, car alors ψ commencerait par $\neg$, ce que les règles de formation excluent.

En revanche, il n'est pas immédiat que si :

$$(\varphi c\psi) = (\chi c\sigma)$$

alors $\varphi = \chi$, et $\psi = \sigma$ (i.e. qu'une formule de la forme $(\varphi c\psi)$ est constituée d'un unique couple de sous-formules immédiates).

Supposons donc que :

$$(\varphi c\psi) = (\chi c\sigma)$$

et que néanmoins $\varphi \neq \chi$; alors φ doit être segment initial propre de χ, ou l'inverse, ce qui contredit le Lemme I.5 ; donc :

$$\varphi = \chi$$

et donc aussi :

$$\psi = \sigma$$

REMARQUE

La même formule peut bien sûr être considérée comme formée à partir de deux paires différentes d'*expressions* : si Γ = ((p, et Δ = q) $\rightarrow$ q), et si H = ((p $\rightarrow$ q), et Θ = q), alors :

$$\Gamma \rightarrow \Delta = H \rightarrow \Theta$$

nommément :

$$((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

mais le théorème concerne la décomposition en *sous-formules*, qui sont des formules.

Il résulte immédiatement du Th. I.6 que toute formule qui n'est pas un atome contient un *unique* connecteur principal, qui est *le* connecteur qui s'applique à *la* sous-formule ou qui relie les deux sous-formules de la paire dont l'unicité vient d'être montrée.

Ainsi la preuve du Th. I.6 peut être convertie en une procédure mécanique (un algorithme), qui permette de décider, une expression étant donnée, si oui ou non il s'agit d'une formule (cf. l'exigence formulée en I.1 que l'ensemble des formules d'un langage soit décidable). Si l'expression est une formule, la procédure reviendra à construire son arbre généalogique. La procédure s'appuie sur la propriété du connecteur principal : elle consiste donc à chercher systématiquement le connecteur principal, et une fois celui-ci trouvé (s'il n'y en a pas, la procédure peut s'arrêter tout de suite sur une réponse : non !), à itérer la même recherche sur les deux expressions ainsi isolées ; l'arbre généalogique est donc construit du haut « vers le bas ».

(On suppose que le lecteur a une compréhension intuitive des termes « chemin » et « branchements » ; pour des définitions plus formelles concernant les arbres, cf. chap. VIII.)

Soit une expression donnée (à ce stade, il n'y a qu'un seul chemin sur l'arbre, et un seul branchement, constitué par l'expression elle-même) :

1) Si tous les chemins de l'arbre se terminent par un atome, la procédure est achevée : réponse OUI ! Sinon, choisir le premier branchement à partir de la gauche où figure une expression qui n'est pas un atome.

2) Le premier symbole doit être (; sinon, aller en 5. Si le second symbole est $\neg$, aller en 4.

3) Lire l'expression de gauche à droite jusqu'à atteindre (Γ, où Γ est une expression ayant un nombre égal d'ouvrantes et de fermantes ; si l'expression est lue en entier avant que Γ soit trouvée, aller en 5 ; Γ doit être suivi de c, sinon aller en 5. Le reste doit être Δ), sinon aller en 5. Ouvrir un branchement, réécrire Γ, puis Δ ; retour à l'instruction 1.

4) Si $\neg$ est le second symbole, $\neg$ est le connecteur principal ; le reste doit être Γ), sinon aller en 5 ; réécrire Γ, retour à l'instruction 1 ;

5) Réponse : NON !

On remarquera que la procédure est *effective*, au sens où elle ne comporte qu'un nombre fini d'instructions, chacune de longueur finie ; au sens également où l'effectuation de la procédure n'exige qu'un nombre fini de pas : en effet, chaque expression écrite sur une branche est plus courte que la précédente, si bien que la profondeur de l'arbre est bornée par la longueur de l'expression initiale. De plus la procédure décrite est unique, au sens où on n'a pas le choix, à une étape donnée, des règles à appliquer, ni des constituants auxquels les appliquer.

I.4 QUELQUES COMPLÉMENTS SYNTAXIQUES

Les règles de formation du paragraphe précédent déterminent une fois pour toutes quelles expressions sont des formules, et il n'est nullement question de les modifier. Cependant, les écritures deviennent rapidement difficiles à lire, comme c'est le cas, par exemple, avec la formule :

$$(((\neg p) \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((((q \wedge r) \vee p) \wedge (\neg s)) \rightarrow (\neg r)))$$

A titre de « concession à la brièveté de la vie humaine et à la patience » du lecteur (Church, 1956), il est d'usage d'introduire des conventions permettant d'abréger la notation pour les formules. Ces abréviations ne doivent évidemment pas être comprises comme de nouvelles formules, mais comme des *noms* abrégés (la règle générale d'autonymie étant maintenue) pour des formules.

DÉFINITION

1) La *portée* de $\neg$ dans $(\neg\psi)$ est ψ ;

2) La *portée* de c dans $(\psi c \chi)$ est la paire de sous-formules ψ, χ.

Conventions d'omission des parenthèses :

1) Les parenthèses extérieures seront systématiquement omises, si bien que nous écrirons :

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

pour :

$$(p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

2) Le connecteur $\neg$ sera écrit sans parenthèse, la définition de sa portée restant inchangée, i.e. :

$$\neg p \wedge q$$

abrège :

$$(\neg p) \wedge q$$

(Attention : $\neg p \wedge q$ ne saurait être compris comme une abréviation pour : $\neg(p \wedge q)$! On dit parfois que $\neg$ a la plus petite portée possible.)

3) On utilisera parfois un ordre de *dominance* entre connecteurs, qui, par rang décroissant, est :

$$\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$$

le connecteur de rang le plus élevé ayant une portée plus grande, i.e. :

$$p \wedge q \vee r \rightarrow p \leftrightarrow s$$

abrège :

$$(((p \wedge q) \vee r) \rightarrow p) \leftrightarrow s$$

(Attention : dans l'exemple donné à l'instant, toutes les parenthèses pouvaient finalement être omises, parce que la construction de la formule « coïncidait » avec l'ordre conventionnel de dominance entre connecteurs : le connecteur principal de la formule était le connecteur dominant, et il en était de même dans chaque sous-formule relativement aux autres connecteurs ayant une occurrence dans la sous-formule en question. Mais ce n'est naturellement pas toujours le cas, et certaines parenthèses ne peuvent pas être supprimées ; regardons la formule :

$$(((p \rightarrow q) \vee s) \wedge r)$$

toute omission de parenthèses autres que les parenthèses extérieures reviendrait à former une abréviation qui ne serait pas l'abréviation de *cette* formule !)

Exercice

Identifier la portée de chaque connecteur en restaurant les parenthèses dans les formules suivantes (écrites en abrégé) :

$$p \to \neg p \leftrightarrow \neg p \qquad \neg(r \leftrightarrow s) \wedge q \to p$$

4) Dans certains contextes (cf. chap. III), il sera utile d'omettre les parenthèses en cas d'occurrences répétées de $\wedge$ et V ; l'écriture :

$$p \wedge q \wedge r$$

abrégera :

$$((p \wedge q) \wedge r)$$

la convention étant « de groupement à gauche » ; en fait il se révélera sans inconvénient d'adopter la même écriture sans parenthèse pour un « groupement à droite », i.e. comme abréviation de la formule :

$$(p \wedge (q \wedge r))$$

Exercice

Le logicien polonais Jan Lukasiewicz a introduit une notation sans parenthèse, qui consiste à introduire un connecteur devant la ou les formules sur laquelle ou lesquelles il porte (notation dite « polonaise ») ; en outre il utilise les lettres N, K, A, C, E pour $\neg$, $\wedge$, V, $\to$, $\leftrightarrow$, respectivement, de sorte que (par exemple) la formule :

$$(((q \wedge r) \to (\neg p)) \leftrightarrow p)$$

devient :

ECKqrNpp

Réécrire les formules des pages 54 à 56 en notation « polonaise ».

(Cf. par exemple Lukasiewicz 1934, où ne sont cependant introduits que N et C à titre de connecteurs primitifs.)

Il se révélera utile par la suite de disposer de la notion de *substitution* d'une formule à un atome dans une formule ; la notation :

$$S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\varphi|$$

(qui, bien sûr, n'appartient pas au langage-objet, mais au méta-langage) sera utilisée pour désigner la formule qui résulte de φ par remplacement de toutes les occurrences de **a** par la formule ψ (qui peut être ou ne pas être un atome).

L'opération de substitution est définie de manière inductive :

1) φ est un atome :

$$\text{si } \varphi = \mathbf{a},\ S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\varphi| = \psi$$

$$\text{et si } \varphi \neq \mathbf{a},\ S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\varphi| = \varphi$$

(si **a** n'a pas d'occurrence dans φ, le résultat de la substitution est φ elle-même).

2) $\varphi = (\neg\chi)$:

$$S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\varphi| = \left(\neg\, S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\chi|\right)$$

3) $\varphi = (\chi c \sigma)$:

$$S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\varphi| = \left(S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\chi|\ c\ S\,{}^{\mathbf{a}}_{\psi}\,\sigma|\right)$$

Exemple

$$S\,{}^{p}_{r\ V\ s}\,p \to (q \to p)| = (r\ V\ s) \to (q \to (r\ V\ s))$$

Exercice

Démontrer (par récurrence sur le degré de φ) que $S \begin{smallmatrix} \mathbf{a} \\ \psi \end{smallmatrix} \varphi|$ est bien une formule.

Cette notation est élargie à la notion de *substitution simultanée*, de sorte que :

$$S \begin{smallmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n \end{smallmatrix} \varphi|$$

désignera la formule qui résulte de la substitution simultanée des formules $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ (non nécessairement distinctes) aux atomes $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, dans la formule φ ; (les atomes $\mathbf{a}_i$ étant tous distincts).

Le résultat de la substitution simultanée aux atomes $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, peut toujours être obtenu par une suite de substitutions successives de la manière suivante : soient $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, les n premiers atomes dans l'ordre alphabétique n'ayant pas d'occurrence dans les formules $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ qui sont à introduire dans la formule initiale ; on substitue alors successivement $\mathbf{b}_1$ à $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2$ à $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ à $\mathbf{a}_n$, puis ψ_1 à $\mathbf{b}_1$, ψ_2 à $\mathbf{b}_2$, ..., ψ_n à $\mathbf{b}_n$.

Exercice

Soit la formule : $(p \to q)$

1) Écrire explicitement : $S \begin{smallmatrix} p & q \\ q & r \end{smallmatrix} (p \to q)|$

2) Montrer qu'on n'obtient pas le résultat de la substitution simultanée de q à p et de r à q (trouvé en 1) par des substitutions successives, d'abord de q à p, puis de r à q, si l'on ne prend pas la précaution mentionnée dans l'alinéa précédent d'introduire des atomes sans occurrence dans les formules à introduire.

Une comparaison du point de vue adopté ici avec d'autres approches familières au lecteur français (notamment : Quine, *Logique élémentaire*, *Méthodes de logique*, et Kleene, *Logique mathématique*) en raison justement de l'existence de ces traductions peut contribuer à une meilleure compréhension.

Il est caractéristique de la méthode de Quine de ne pas se donner un langage-objet au sens strict, i.e. un langage artificiel spécifié, mais de garder en vue le langage ordinaire ; plus précisément, des énoncés du langage ordinaire qu'on peut considérer comme simples au sens où ils ne sont pas eux-mêmes composés d'énoncés, mais qui peuvent se combiner pour former des énoncés composés suivant une certaine structure (dite structure de fonction de vérité). A vrai dire, il ne s'agit pas exactement des énoncés tels qu'on les rencontre dans l'usage habituel du langage, mais d'énoncés apprêtés par ces « opérations préparatoires » (cf. « Mr Strawson, *On Logical Theory* », 1953[a]) que sont la paraphrase, l'élimination des ambiguïtés et des lacunes de valeur de vérité, la réduction à une forme canonique, bref les adaptations nécessaires à l'application de la logique.

En conséquence, les lettres « p », « q », et les composés formés à partir d'elles (l'équivalent de nos formules) ne sont pas des symboles du langage-objet, mais des abréviations d'énoncés quelconques, ou mieux, « des énoncés abrégés de manière ambiguë » (cf. *Ontological Remarks on the Propositional Calculus*, 1934) ; de même le symbole « ¬ » (ou un symbole fonctionnellement équivalent) est une notation brève pour le mot « non », le symbole « V » une nouvelle manière d'épeler le mot « ou », etc. Les schémas ainsi formés n'ont pas véritablement de sens, non pas comme les formules d'un langage formel en attente d'une interprétation, mais plutôt dans la mesure où à aucun moment les symboles ne sont compris comme renvoyant (nommant dans le cas des connecteurs, ou indiquant de manière indéter-

minée dans le cas des lettres « p », « q », etc.) à des entités (fonctions de vérité, « propositions » ou valeurs de vérité). Ce sont de simples instruments auxiliaires, et « la théorie de la déduction est ainsi reconstruite comme un simple *organon* pour les énoncés » (*Ontological Remarks*).

Ultérieurement, les mots « valide », « équivalent », s'appliquent aux schémas ; et une vérité logique (i.e. un énoncé logiquement vrai) est un énoncé qui est une instance d'un schéma valide. Quand Quine parle en termes de « tautologies » (*Mathematical Logic*, 1940) ce terme s'applique aux énoncés eux-mêmes, et quand il s'agit des schémas, Quine parle de « formes de tautologies » ; ici au contraire, (cf. chap. II) « tautologique » se dira des formules.

Encore différente est la présentation par Kleene du calcul propositionnel ; à titre provisoire au moins (comparer *Logique mathématique* § 1 et § 39 où est introduit un langage formel comportant des variables de propositions), sa méthode d'exposition est la suivante : les lettres écrites sur la page (qui sont chez Kleene des capitales romaines de la fin de l'alphabet au lieu des minuscules romaines utilisées ici) ne sont pas les symboles du langage-objet, mais des *noms* d'éléments du langage-objet, les noms des formules simples ou atomes du langage-objet. Le langage-objet lui-même n'est pas spécifié, au sens où nous ne savons pas quels sont ses symboles ni ses formules simples. Tout ce que nous savons, c'est que ce langage contient des énoncés déclaratifs, désignés justement par les lettres « P », « Q », etc., étant donné que deux lettres différentes désignent deux énoncés différents ; qu'aucun de ces énoncés n'est composé d'autres énoncés du langage, ceci afin d'assurer l'unicité de décomposition de toute suite finie de symboles ; que bien que nous ignorions leur structure interne, ils sont construits d'une manière telle qu'ils sont susceptibles d'avoir une valeur de vérité déterminée, i.e. d'être vrais ou faux.

Le langage-objet n'étant pas spécifié, il nous est loisible de penser qu'il s'agit d'un langage « symbolique » et qu'il contient les connecteurs « ¬ », « V », etc., dont les noms peuvent alors être introduits entre les lettres romaines ; mais il nous est aussi loisible de penser que « le langage-objet est une *partie* convenablement limitée et réglée d'une langue naturelle » (où l'on reconnaîtra l'esprit de la méthode de Quine), et les connecteurs peuvent être alors conçus comme les noms, dans le méta-langage, des tournures correspondantes de la langue naturelle.

En relation avec les considérations sémantiques du chapitre suivant, où l'on considère différentes distributions de valeurs de vérité assignant tantôt la valeur Vrai, tantôt la valeur Faux au même énoncé ou atome, le lecteur peut s'inquiéter de la cohérence de ce point de vue, et faire remarquer que si nos lettres représentent (nomment) des énoncés déterminés, ces énoncés ont une valeur de vérité fixée une fois pour toutes : ils sont soit vrais, soit faux, mais ne sauraient être tantôt considérés comme vrais et tantôt comme faux.

A cette objection, on peut cependant répondre que cette « variation » de leur valeur de vérité est purement épistémique, au sens où elle est relative à notre ignorance du contenu de ces énoncés. En raison de cette ignorance, nous sommes libres de les *traduire* de toutes les manières possibles par des énoncés français (qui eux sont vrais ou faux de manière fixée) que nous sommes justifiés à considérer comme simples dans le cadre d'une recherche déterminée ; la notion de distribution de valeur de vérité sur les atomes peut alors être comprise comme l'équivalent « mathématique » de cette idée de traduction.

A propos des atomes (qu'ils soient compris comme les lettres mêmes de notre langage formel $\mathscr{L}_p$, ou comme les énoncés désignés par ces lettres) on parle parfois de *paramètres*, plutôt que de variables ; plutôt que de les concevoir comme « prenant des valeurs », ou « indiquant de manière indéterminée » des objets qui sont dits leurs valeurs, on les conçoit alors comme susceptibles d'une interprétation, quelconque mais déterminée.

C'est ainsi que nous allons les considérer au chapitre prochain.

La morale à tirer de l'examen de ces diverses possibilités est que nous pouvons choisir selon nos préférences, à condition cependant d'y voir clair dans notre choix !

CHAPITRE II

Tautologies, la relation de conséquence (tauto)logique

II.1 UNE SÉMANTIQUE POUR LE LANGAGE $\mathscr{L}_p$

On considère un ensemble {V, F} à deux éléments dits *valeurs de vérité*, respectivement le Vrai (V) et le Faux (F). Il importe peu, d'un point de vue opératoire (du point de vue du calcul), de savoir ce que sont au juste ces éléments, et l'on pourrait aussi bien considérer l'ensemble {0, 1} ; cependant, si l'on veut que le calcul mérite le nom de calcul *logique*, il est plus naturel de penser que les atomes sont susceptibles de prendre la valeur Vrai ou la valeur Faux.

REMARQUE

Il est également indifférent, dans ce contexte, de considérer les deux valeurs de vérité comme des *objets* logiques, ou comme des propriétés qui peuvent être attachées aux atomes. Le premier point de vue est cohérent avec l'idée que les lettres « p », « q », etc., sont des variables susceptibles de prendre V ou F comme valeurs ; mais il nous engage à tenir les énoncés qui peuvent être substitués aux variables lors d'une application de la logique à un argument donné, comme des *noms* d'une valeur de vérité ; c'était la position de

Frege que les énoncés sont des noms du Vrai ou du Faux.

A défaut de cette hypothèse, on peut dire simplement que nos atomes peuvent être affectés de la propriété d'être vrais, ou d'être faux, ce qui rend bien compte de la possibilité de les traduire en énoncés d'un langage, énoncés dont seule la valeur de vérité nous intéresse.

L'important est qu'en ne considérant que deux valeurs de vérité, nous faisons nôtre le *Principe de bivalence*, selon lequel tout énoncé est soit vrai, soit faux (il n'y a pas de troisième valeur de vérité, qui pourrait être, par exemple, l'indéterminé).

Lukasiewicz (cf. Lukasiewicz, 1930, Appendice) a affirmé que le principe de bivalence, comme principe logique fondamental, remontait plutôt aux Stoïciens qu'à Aristote :

« *Omnis enuntiatio aut vera aut falsa est* » (Chrysippe, cité par Cicéron).

Une *distribution* de valeurs de vérité sur les atomes est une fonction :

$$\delta : A \rightarrow \{V, F\}$$

associant donc V, ou F, à tous les éléments de A (i.e. à tous les atomes). Une distribution de valeurs de vérité est évidemment quelconque : le logicien, en tant que tel, n'a pas à connaître de la vérité ou de la fausseté factuelle de tel ou tel énoncé !

A chaque connecteur est associé de plus une application définie de la façon suivante (nous laisserons de côté pour l'instant la question de savoir dans quelle mesure cette définition du « sens » des connecteurs reflète l'usage ordinaire des locutions qui leur ont été associées par anticipation).

Au connecteur (unaire) $\neg$ est associée l'application :

$$\neg^* : \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$$

définie par :

$$\neg^* (V) = F, \text{ et : } \neg^* (F) = V$$

(On ne confondra pas $\neg$, qui est un symbole de $\mathscr{L}_p$, et $\neg^*$, qui est l'application associée à $\neg$ par l'interprétation.)

A chaque connecteur binaire est associée une application :

$$c^* : \{V, F\}^2 \rightarrow \{V, F\}$$

ces applications sont définies par la table :

	$\wedge^*$	$\vee^*$	$\rightarrow^*$	$\leftrightarrow^*$
(V, V)	V	V	V	V
(V, F)	F	V	F	F
(F, V)	F	V	V	F
(F, F)	F	F	V	V

(Chacune des colonnes de cette table est souvent dite « table de vérité » du connecteur auquel l'application définie par la colonne est associée.)

Considérons à présent une formule, par exemple $(p \rightarrow q)$, et une distribution δ_1 dont nous savons que $\delta_1(p) = V$ et $\delta_1(q) = F$ (nous verrons tout à l'heure qu'il est sans inconvénient d'ignorer les valeurs des autres atomes pour cette distribution). A la paire ordonnée (V, F) l'application associée au connecteur $\rightarrow$ coordonne la valeur F (cf. 2e ligne, 3e colonne de la table) : nous dirons que cette valeur est *la valeur, pour la distribution* δ_1, de la formule $(p \rightarrow q)$. En généralisant à partir de cet exemple, nous aimerions pouvoir parler, à propos de n'importe quelle formule, de la valeur de cette formule pour une distribution de valeurs de vérité donnée. Autrement dit, il nous faut définir une application :

$$\overline{\delta} : \mathbf{F} \rightarrow \{V, F\}$$

qui satisfasse les conditions suivantes :

1) qu'elle soit une *extension* de δ, i.e. pour chaque atome : $\overline{\delta}(a) = \delta(\mathbf{a})$,

2) qu'elle « respecte les tables de vérité » des connecteurs, i.e. :

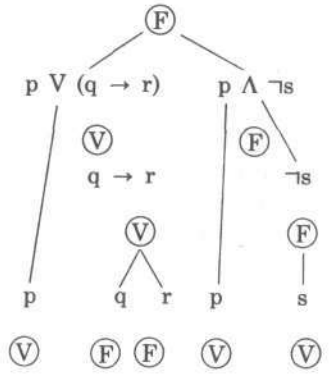
$$\overline{\delta}[(\neg\psi)] = \neg^*[\overline{\delta}(\psi)]$$
$$\overline{\delta}[(\psi c\chi)] = c^*[\overline{\delta}(\psi), \overline{\delta}(\chi)]$$

3) que la valeur d'une formule pour une distribution donnée ne dépende que de la valeur pour cette distribution des atomes ayant une occurrence dans la formule.

Parvenu à ce stade, le lecteur est peut-être déjà convaincu qu'une telle application existe, qu'elle est unique, et que de plus elle est calculable, au sens où, en appliquant de façon itérée les tables des connecteurs, on peut *évaluer* de proche en proche les sous-formules d'une formule à partir des atomes jusqu'à obtenir la valeur de la formule pour une distribution donnée (ou pour une restriction d'une distribution donnée aux atomes ayant une occurrence dans la formule). Et l'intuition ne le trompe pas :

Exemple d'évaluation d'une formule pour une distribution de valeurs de vérité (connue sur ses atomes) par calcul « de proche en proche » en remontant dans l'arbre généalogique de la formule :

$$(pV\ (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge \neg s)$$



Les valeurs de vérité des atomes pour la distribution considérée sont inscrites en lettres cerclées sous les atomes ; en remontant nous calculons la valeur de $(q \rightarrow r)$ et de $\neg s$ pour cette distribution, et ainsi de suite jusqu'à obtenir la valeur de la formule initiale. Dans la pratique des calculs, on convient d'inscrire les valeurs sous le connecteur principal des sous-formules, si bien que le calcul peut être présenté sur une seule ligne :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (p & V & (q & \rightarrow & r)) & \rightarrow & (p & \wedge & \neg & s) \\ V & V & F & V & F & F & V & F & F & V \end{array}$$

Exercice

Évaluer la même formule pour la distribution qui donne à p, q, r, s, respectivement les valeurs F, V, F, V.

Le théorème suivant semble donc extrêmement plausible (il s'agit d'une version spécialisée d'un théorème général concernant les définitions de fonctions par récurrence).

THÉORÈME II.1 Pour toute distribution δ de valeurs de vérité, il existe une unique fonction $\overline{\delta} : \mathbf{F} \rightarrow \{V, F\}$ satisfaisant les conditions 1) et 2) mentionnées p. 65-66.

Preuve

On construit « par morceaux », pour chaque entier $n \geqslant 0$, une extension δ_n de δ à F_n (cf. section I.2) :

– pour $n = 0$, $\delta_0 = \delta$;
– une formule φ appartenant à F_{n+1} (mais n'appartenant à aucun F_k pour $k \leqslant n$) est soit $\neg\psi$, soit $(\psi c \chi)$, où ψ et $\chi \in F_n$; on définit donc δ_{n+1} à partir de δ_n de la manière suivante :
dans le premier cas :

$$\delta_{n+1}(\neg\psi) = \neg^*(\delta_n(\psi))$$

dans le second :

$$\delta_{n+1}((\psi c \chi)) = c^*(\delta_n(\psi), \delta_n(\chi))$$

(remarque : l'unicité de décomposition de φ [cf. Théorème I.6] garantit que $\delta_{n+1}(\varphi)$ est définie d'une manière unique à partir de δ_n.)

On considère alors $\overline{\delta} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \delta_n$

$\overline{\delta}$ satisfait évidemment les conditions 1) et 2) ; reste à montrer qu'elle est unique ;

Soit $\dot{\overline{\delta}} : \mathbf{F} \to \{V, F\}$ satisfaisant les conditions 1) et 2) ; supposons $\overline{\delta} \neq \dot{\overline{\delta}}$; on peut alors considérer le plus petit entier p où $\overline{\delta}$ et $\dot{\overline{\delta}}$ « divergent », i.e. le plus petit entier p tel que $\varphi \in F_p$ et $\overline{\delta}(\varphi) \neq \dot{\overline{\delta}}(\varphi)$; comme $\overline{\delta}$ et $\dot{\overline{\delta}}$ sont toutes deux des extensions de δ, $p > 0$; il existe donc un entier n tel que $p = n+1$ et tel que $\varphi = \neg\psi$, ou $\varphi = (\psi c \chi)$, où ψ et $\chi \in F_n$;
mais alors : $\overline{\delta}(\psi) = \dot{\overline{\delta}}(\psi)$ et $\overline{\delta}(\chi) = \dot{\overline{\delta}}(\chi)$,
et donc aussi : $\overline{\delta}(\neg\psi) = \neg^*(\overline{\delta}(\psi)) = \neg^*(\dot{\overline{\delta}}(\psi)) = \dot{\overline{\delta}}(\neg\psi)$
et de même pour le cas où $\varphi = (\psi c \chi)$; d'où une contradiction et finalement $\overline{\delta} = \dot{\overline{\delta}}$.

LEMME II.2 (ou Lemme d'évaluation : le lemme montre que la condition 3) p. 66 est également satisfaite).

Soit une formule φ comportant les atomes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, et deux distributions de valeurs de vérité δ et δ' telles que $\delta(\mathbf{a}_i) = \delta'(\mathbf{a}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (i.e. δ et δ' coïncident sur les atomes de φ) ; alors :

$$\overline{\delta}(\varphi) = \overline{\delta}'(\varphi)$$

Exercice

Démontrer II.2 par récurrence sur la longueur de φ.

Calculer la table de vérité d'une formule, c'est évaluer la formule dans les différents « cas possibles », i.e. pour toutes les distributions de valeurs de vérité. Le Lemme II.2, aussi évident qu'il paraisse, a pour conséquence cruciale qu'il n'est besoin de considérer qu'un nombre *fini* de cas, et qu'il s'agit donc d'un calcul au sens strict. Une formule ne comporte en effet qu'un nombre fini d'atomes, chacun d'eux étant susceptible de prendre 2 valeurs ; en « identifiant » les distributions qui coïncident sur les atomes de la formule (plus précisément : en les regroupant en classes d'équivalence et en confondant à dessein chaque classe avec une distribution), il y aura, pour une formule à n atomes, 2^n distributions (classes) différentes à considérer.

Exemple : pour une formule comportant 3 atomes, il y aura $2^3 = 8$ « cas » à considérer, donc 8 lignes dans la table de vérité de la formule (par exemple) :
$\neg p \to (q \vee r)$

p	q	r	¬p	q V r	¬p → (q V r)
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Exercice

Calculer les tables de vérité des formules :

$$(q \wedge \neg p) \rightarrow (r \leftrightarrow (\neg q \vee p))$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

Que remarquez-vous ?

II.2 TAUTOLOGIES ET SCHÉMAS DE TAUTOLOGIES

Définitions :

1) une distribution δ de valeurs de vérité *satisfait* une formule φ *ssi* $\overline{\delta}(\varphi) = V$;
2) une formule φ est *satisfiable ssi* il existe (au moins) une distribution δ telle que $\overline{\delta}(\varphi) = V$;
3) une formule φ est une *tautologie* (ou : est tautologiquement valide) *ssi* pour toute distribution δ, $\overline{\delta}(\varphi) = V$; la dernière colonne de sa table n'exhibera donc que V sur toutes les lignes.
4) une formule φ est une *antilogie* (ou contradictoire) *ssi* pour toute distribution δ, $\overline{\delta}(\varphi) = F$;
5) une formule est *neutre ssi* elle n'est ni une tautologie, ni une antilogie.

L'expression : « φ est tautologique » sera abrégée en :

$$\models \varphi$$

On peut donc classer les formules suivant le schéma suivant :

Non-valides

Tautologies Neutres Antilogies

Satisfiables

REMARQUES

Le terme « tautologie », pris en ce sens, remonte à Wittgenstein 1921 :

« Die Sätze der Logic sind Tautologien » (*Tractatus*, 6.1). Wittgenstein faisait cependant un usage plus large de ce mot, qui recouvrait au moins également la notion de formule valide au sens de la II[e] partie ; les tautologies sont dites par Wittgenstein « vides de sens » (« sinnlos »), au sens où elles « ne disent rien », ne contiennent pas d'information sur l'état du monde.

Les tautologies correspondent dans notre langage à certaines « lois » ou vérités logiques : par exemple, la formule $(p \rightarrow p)$ peut être comprise comme exhibant la forme logique de l'énoncé :

S'il fait jour, alors il fait jour

(principe d'identité stoïcien, cité par Cicéron, *Premiers Académiques*).

Selon le Lemme II.2 et les remarques qui le suivent, la question de savoir si telle ou telle formule donnée est une tautologie admet une réponse par oui ou par non au terme du calcul de la table de vérité de la formule : un tel calcul s'effectuera en un nombre fini de pas, et la procédure suivie peut être explicitement décrite de sorte qu'on puisse exécuter les instructions de manière entièrement mécanique (en ce sens, nous n'avons pas complètement décrit ici la procédure de calcul d'une table : par exemple, certains choix concer-

nant l'ordre dans lequel évaluer les sous-formules ont été laissés à l'initiative du lecteur). Quand on dispose d'une procédure de *décision* (du type calcul d'une table, par exemple) pour une classe infinie dénombrable de questions appelant une réponse par oui ou par non, on dit que le problème (la classe de questions) est *décidable*. Au vu de ce qui précède, on dira donc que le problème :

$$\models \varphi \, ?$$

est décidable.

A propos du « Problème de la décision » (*Entscheidungsproblem*), caractérisé comme « le problème fondamental de la logique mathématique », i.e. le problème de trouver une procédure de décision pour la validité (ou pour la satisfiabilité), Hilbert-Ackermann, 1928, note que « la décision concernant la validité universelle d'une expression, i.e. le problème de décider par une méthode effective, finie, si ou ou non une expression logique donnée (note : une formule) est logiquement vraie ou non, est complètement résolu pour le calcul des énoncés ». La procédure de décision mentionnée par cet ouvrage n'est cependant pas celle des tables de vérité, mais celle des formes normales (cf. chap. III). La procédure des tables est introduite par Post, 1921 (trad. franç. sous le titre *Introduction à une théorie générale des propositions élémentaires, in* Largeault, *Logique mathématique : Textes*), mais, dans le contexte de cet article, il s'agit plutôt d'une procédure de décision pour la « dérivabilité » à l'intérieur d'un système formel, le sous-système des *Principia Mathematica* qui concerne le calcul des énoncés, ou calcul propositionnel : « Pour toute fonction donnée (formule), le théorème (note : la complétude pour le calcul des énoncés) nous donne une méthode directe pour décider si oui ou non cette fonction peut être assertée (note : i.e. est un théorème) » (trad. fr., p. 38) ; La méthode mentionnée dans la citation fait appel au calcul des tables de vérité. Sur les notions de « dérivabilité » et de « théorème », cf. la II[e] partie.

En dépit de son intérêt théorique, la procédure des tables est fastidieuse du point de vue pratique. Pour autant que « la première tâche de la logique est de découvrir ces combinaisons d'énoncés qui sont logiquement vraies » (Hilbert-Ackermann, 1928, § 5), le théorème suivant est fort utile : il nous dit comment obtenir de nouvelles tautologies à partir de tautologies déjà connues.

THÉORÈME II.3 (ou Théorème de substitution) :
Soit φ une formule comportant les atomes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$,

$$\text{et } \varphi^* = S^{\mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \, \ldots \, \mathbf{a}_n}_{\psi_1 \, \psi_2 \, \ldots \, \psi_n} \varphi| :$$

$$\text{Si } \models \varphi, \text{ alors } \models \varphi^*$$

Preuve

Soit δ une distribution quelconque de valeurs de vérité ; chaque ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, a pour cette distribution une valeur $\overline{\delta}(\psi_i)$; on considère une distribution δ' identique à δ sauf sur les $\mathbf{a}_i$ où elle est définie ainsi :

$$\delta'(\mathbf{a}_i) = \overline{\delta}(\psi_i)$$

on montre par récurrence que :

$$\overline{\delta}'(\varphi) = \overline{\delta}(\varphi^*)$$

(intuitivement : le calcul de la valeur de φ pour δ' sera identique au calcul, à partir des valeurs des ψ_i, de la valeur de φ^* pour δ.)

Comme $\models \varphi$, il s'ensuit que $\models \varphi^*$.

On détaille ici la partie de la preuve qui procède par récurrence :

1) $d(\varphi) = 0$, et $\varphi = \mathbf{a}$:
observons qu'alors $\varphi^* = \psi$ (cf. I.4 déf. de la substitution) ;

donc : $\overline{\delta}'(\varphi) = \delta'(\mathbf{a})$
$= \overline{\delta}(\psi)$ par déf. de δ'
$= \overline{\delta}(\varphi^*)$

(remarque : si $\varphi \neq \mathbf{a}$, c'est trivialement vrai dans la mesure où $\varphi^* = \varphi$, et où δ et δ' coïncident ailleurs qu'en **a**)

2) $d(\varphi) \geqslant 1$, et $\varphi = \neg\chi$:

$\overline{\delta}'(\varphi) = \neg^*(\overline{\delta}'(\chi))$
$= \neg^*(\overline{\delta}(\chi^*))$ Hyp. de récurrence
$= \overline{\delta}(\neg\chi^*)$
$= \overline{\delta}(\varphi^*)$ Déf. de substitution

Exercice

Achever la démonstration pour le cas où $\varphi = (\chi c \sigma)$.

REMARQUE

Bien évidemment, la réciproque du Théorème II.3 n'est pas vraie ! La formule $(p \rightarrow q)$ n'est pas tautologique, alors que $S^{p}_{p\ \wedge\ \neg p}(p \rightarrow q)$ est une tautologie.

Exercice

Vérifier la dernière affirmation !

Montrer sans calculer sa table de vérité, mais en utilisant la Théorème II.3 que :

$$\models (r \rightarrow s) \rightarrow ((p\ V\ q) \rightarrow (r \rightarrow s))$$

(Suggestion : utiliser l'exercice p. 70)

On représente usuellement la liste infinie des tautologies obtenues (en vertu du théorème) par substitution des formules φ, ψ, χ, etc., aux atomes d'une tautologie par un *schéma de tautologie*, c'est-à-dire par une expression contenant des variables syntaxiques ; par exemple, le schéma :

$$\varphi V \neg\varphi$$

représente toutes les tautologies qu'on peut dériver par substitution à partir de :

$$pV\neg p$$

Il est bon que le lecteur soit familier avec les schémas indiqués ci-dessous ; les noms donnés à ces schémas sont inspirés des noms des tautologies correspondantes dans *Principia Mathematica*, et des suggestions de Church (1956). (Aucune signification particulière n'est attachée à l'ordre dans lequel ils sont numérotés.)

1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ Principe de simplification

2) $\varphi \rightarrow \varphi$ P. d'identité

3) $\varphi\ V\ \neg\varphi$ P. du tiers exclu

4) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ Loi de double négation

5) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ Loi converse de double négation

6) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ Loi complète de double nég.

7) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
P. de transitivité de l'implication

8) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
Loi d'auto-distributivité de l'implication

9) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ Loi de transposition (ou de contraposition)

10) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

11) $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$ — P. de *reductio ad absurdum*

12) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$ — Exportation-Importation

13) $\varphi \leftrightarrow \varphi$ — « Réflexivité » de $\leftrightarrow$

14) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$ — « Symétrie » de $\leftrightarrow$ (ou : commutativité)

15) $(\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow ((\varphi \leftrightarrow \chi) \leftrightarrow \chi)$ — « Associativité » de $\leftrightarrow$

D'autres schémas seront introduits ultérieurement.

THÉORÈME II.4 *(Modus Ponens)*

Si $\models \varphi$, et $\models (\varphi \rightarrow \psi)$, alors $\models \psi$

Exercices

- Démontrer II.4 (suggestion : Supposer que $\not\models \psi$; il y a donc une distribution δ telle que $\bar{\delta}(\psi) = F$; examiner les conséquences de cette hypothèse...).
- Soit φ une formule neutre : prouver que par des substitutions appropriées de formules aux atomes de φ, on peut obtenir soit une tautologie, soit une antilogie.
(suggestion : examiner successivement sur un exemple simple une distribution qui satisfait la formule, puis une distribution qui la falsifie ; pour la première distribution, que faut-il substituer aux atomes qui ont la valeur vrai [respectivement : la valeur faux] pour faire en sorte que la formule ainsi obtenue ait toujours la valeur Vrai ? même question pour le second cas ; généraliser.)
- Sans faire de table de vérité, mais en utilisant le fait qu'une formule de la forme $(\varphi \rightarrow \psi)$ est fausse dans un seul cas, prouver que :

$$\models (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

(variante de « l'attaque sélective remontante » de Quine, 1950, chap. VII).

En utilisant le même fait, montrer que :

$$\not\models p \vee q \rightarrow p \wedge q$$
$$\not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

(note : la notation « $\not\models \varphi$ » exprime : « φ n'est pas une tautologie ».)

Musée de Médiathèque PEREIRE PARIS

II.3 LA NOTION DE CONSÉQUENCE (TAUTO)LOGIQUE

Dans un passage célèbre du *Ménon*, Platon fait parler Socrate en ces termes :

« Voici ce que j'entends par "en partant d'une hypothèse" : c'est un procédé analogue à celui qu'emploient maintes fois les géomètres pour envisager une question comme celle-ci, quand, à propos d'un espace, on leur demande par exemple si, dans le cercle que voici, il est possible d'inscrire l'espace triangulaire que voilà. A cette question un géomètre répondrait : "Je ne sais pas encore si cet espace est dans les conditions voulues ; mais il est à propos, je pense, en vue du problème posé, de faire une sorte d'hypothèse, du genre de celle-ci : supposé que ledit espace soit (tel et tel)..., telle conséquence en résulte." »

(*Le Ménon*, 86d - 87a, trad. L. Robin.)

Et de son côté, Aristote définit le syllogisme (dialectique) comme « un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces

données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données ».

(*Premiers Analytiques*, I, 1, trad. Tricot.)

Ces remarques justifient la définition que nous allons donner de l'expression « telle formule est conséquence (tauto)logique d'un ensemble de formules » : la restriction « tautologique » insiste sur le fait que la définition n'épuise certainement pas le contenu de la notion intuitive de « conséquence » : nous en verrons un exemple au début de la II[e] partie. Conformément à cette restriction, quand nous aurons montré au chap. IV qu'un énoncé en langage ordinaire est conséquence logique d'un autre énoncé en appliquant simplement la définition donnée ici, nous dirons plus explicitement que cet énoncé est conséquence (tauto)logique, ou conséquence au sens du calcul des énoncés de l'autre énoncé ; ou (ce qui revient au même) que ce dernier *implique tautologiquement* le premier énoncé (dans les termes de Quine : « implique vérifonctionnellement »). En dépit de cette restriction, la justification de la définition réside bien dans la remarque de Platon (pour reprendre l'exemple du *Ménon*) que si les deux hypothèses :

– La vertu est un savoir
– Tout savoir est objet d'enseignement

sont vraies, alors s'ensuit la conséquence :

– La vertu est objet d'enseignement

ou, en d'autres termes, qu'il n'est pas possible que les deux premiers énoncés soient vrais et le troisième faux.

DÉFINITION

Soit Σ un ensemble de formules ; une distribution de valeurs de vérité δ est un *modèle* de Σ *ssi* δ satisfait simultanément toutes les formules de Σ.

DÉFINITION

Soit Σ un ensemble de formules ; φ est *conséquence (tauto)logique* de Σ *ssi* tout modèle de Σ satisfait φ.

On note :

$$\Sigma \models \varphi$$

le fait que φ est conséquence (tauto)logique de Σ (ou, selon une autre expression, le fait que Σ implique [tauto]logiquement φ).

LEMME II.5 (Adjonction de prémisses)

Si $\Sigma \models \varphi$, alors $\Sigma ; \psi \models \varphi$

(note : la notation « $\Sigma ; \psi$ » abrège : « $\Sigma \cup \{\psi\}$ »)

La preuve, évidente, est laissée en exercice ; remarquer que la réciproque n'est pas vraie ! (Contre-exemple ?)

LEMME II.6 $\models \varphi$ *ssi* $\emptyset \models \varphi$

Preuve

1) Soit $\models \varphi$; supposons que $\emptyset \not\models \varphi$; alors il existe une distribution qui est modèle de $\emptyset$ et qui ne satisfait pas φ, ce qui contredit l'hypothèse.

2) Inversement, il suffit de remarquer que toute distribution est modèle de $\emptyset$ (quelle formule de $\emptyset$ n'est pas satisfaite ?) ; donc si $\emptyset \models \varphi$, toute distribution satisfait φ.

REMARQUE

Le Lemme II.6 rend justice de l'apparente ambiguïté de l'usage de la notation « $\models$ » ; nous pouvons même,

rétrospectivement, comprendre les occurrences de « $\models \varphi$ » comme des écritures abrégées pour « $\emptyset \models \varphi$ ». Certains auteurs (Enderton, 1972) préfèrent définir la notion de tautologie à partir de celle de conséquence (tauto)logique : sont des tautologies (par définition) les formules conséquences de $\emptyset$.

LEMME II.7 $\models \varphi$ *ssi* pour tout ensemble Σ de formules :

$$\Sigma \models \varphi$$

Preuve

1) Soit $\models \varphi$; supposons que pour un ensemble Σ, $\Sigma \not\models \varphi$; alors il existe une distribution qui est modèle de Σ et ne satisfait pas φ, ce qui contredit l'hypothèse.

2) Inversement, il suffit de remarquer que si φ est conséquence de tout ensemble, φ l'est en particulier de $\{(p \vee \neg p)\}$ (par exemple).

LEMME II.8 (« *Ex falso quodlibet sequitur* ») :
Σ n'admet pas de modèle *ssi* pour toute formule φ :

$$\Sigma \models \varphi$$

(note : d'un ensemble qui n'admet pas de modèle, on dit parfois qu'il est « contradictoire » ou « inconsistant » : il serait préférable alors de préciser « sémantiquement inconsistant », pour ne pas confondre cette notion avec celle, syntaxique, d'inconsistance : cf. II[e] partie, chap. VII).

La preuve, évidente, est laissée en exercice.

LEMME II.9 $\Sigma \models \varphi$ *ssi* Σ ; $\neg\varphi$ n'admet pas de modèle.
La preuve découle directement de la définition de la notion de conséquence (tauto)logique.

Si Σ est un ensemble fini de formules (seul ce cas est à prendre en compte du point de vue de l'application de la logique à des raisonnements conduits en langage ordinaire), et si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, sont les éléments de Σ, on notera :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

le fait que $\Sigma \models \psi$; si $\Sigma = \{\varphi\}$, on écrira simplement :

$$\varphi \models \psi$$

(note : si Σ est fini, on peut toujours se ramener au cas présenté à l'instant comme un cas particulier : car il revient au même de considérer les formules de Σ, ou l'unique formule qui est la conjonction de ces formules.)

THÉORÈME II.10 (Théorème [sémantique] de la déduction) :

1) $\varphi \models \psi$ *ssi* $\models (\varphi \rightarrow \psi)$

2) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \models \psi$
ssi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \models (\varphi_n \rightarrow \psi)$

(note : 1) n'est évidemment qu'un cas particulier de 2), mis en valeur pour faciliter la compréhension.)

Preuve

L'ordre des prémisses n'intervenant pas dans la définition de « $\models$ », on peut se contenter de considérer des ensembles de prémisses ;
soit $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ et $\Sigma' = \Sigma - \{\varphi_n\}$;

1) Soit $\Sigma \models \psi$; supposons que $\Sigma' \not\models (\varphi_n \rightarrow \psi)$;

alors il existe une distribution δ qui est modèle de Σ' et ne satisfait pas $(\varphi_n \rightarrow \psi)$, i.e. telle que $\overline{\delta}(\varphi_n) = V$, et $\overline{\delta}(\psi) = F$; cette distribution est donc un modèle de Σ qui ne satisfait pas ψ, ce qui contredit l'hypothèse.

2) Réciproquement, si $\Sigma' \models (\varphi_n \rightarrow \psi)$, tout modèle de Σ' qui satisfait φ_n satisfait ψ ; donc tout modèle de Σ satisfait ψ, i.e. $\Sigma \models \psi$.

COROLLAIRE II.11 Pour $n \geqslant 2$,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \models \psi$$

ssi $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots (\varphi_{n-1} \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi))\ldots)$

Preuve

Par n applications de Th. II.10.

En vertu du Corollaire II.11, le problème de déterminer quelles formules sont conséquences (tauto)logiques d'un ensemble fini de formules revient au problème de déterminer quelles formules sont des tautologies. (C'est en vue du corollaire que nous nous sommes limités, dans la démonstration du théorème de la déduction, à des ensembles finis, bien que le théorème soit également vrai pour des ensembles infinis de formules.)

Donc, eu égard à la remarque de la p. 71, pour un ensemble fini de formules, le problème :

$$\Sigma \models \varphi \, ?$$

est décidable.

En vertu du même théorème (et de son corollaire), il revient au même de considérer la logique des énoncés comme une recherche systématique des tautologies ou comme une investigation portant sur la relation de conséquence (tauto)logique. Selon les auteurs, l'un ou l'autre de ces points de vue est privilégié quand il s'agit de caractériser la logique ; on trouve par exemple sous la plume de Quine des remarques comme celle-ci :

« Comme toute science, la logique a pour but la poursuite de la vérité. Ce qui est vrai, ce sont certains énoncés ; et la poursuite de la vérité, c'est l'effort pour séparer les énoncés vrais des autres, ceux qui sont faux. » (Quine, 1950, trad. fr. M. Clavelin.)

« Comme préalable à la caractérisation des vérités logiques, nous avons considéré comme donnée la notion générale de vérité. Nous avons simplement distingué les vérités logiques des autres... »
(Quine, 1940, Introduction.)

Représentatives de l'autre point de vue sont les caractérisations suivantes de la logique :

« La logique étudie la relation de *conséquence* entre les prémisses et la conclusion d'un argument correct. »
(Mates, 1965.)

Ou encore :

« La logique symbolique est un modèle mathématique de la pensée déductive [...] ». Les questions qui la concernent sont : « 1. Que signifie pour un énoncé "s'ensuivre logiquement" de certains autres ? 2. Si un énoncé s'ensuit logiquement de certains autres, quelles méthodes de preuve sont nécessaires pour établir ce fait ? » (Enderton, 1972.)

On peut penser que la préférence pour ce dernier type de caractérisation est liée à l'attention prêtée au fait que la logique intervient essentiellement dans la mise à jour des connexions entre axiomes et théorèmes

dans les théories déductives formalisées ou en voie de formalisation, comme logique « sous-jacente » (« underlying logic ») de ces théories ; d'où sa place toute particulière parmi les théories déductives.

Le premier point de vue (épinglé plus haut par les citations de Quine) peut être motivé par le désir de réduire les notions « logiques » : analyticité, inconsistance, conséquence (« entailment ») à la notion fondamentale et supposée plus claire de vérité logique : un tel programme est explicite chez Quine, par exemple dans l'article « Mr Strawson on Logical Theory » : « J'ai plaidé, écrit Quine, pour que la caractérisation de la portée (« scope ») de la logique, celle de Mr Strawson, en termes d'analyticité, soit abandonnée au profit d'une caractérisation en termes de vérité et de vocabulaire logique ». On relira aussi, dans cet ordre d'idée, *Philosophie de la logique*, chap. IV (p. 75 de la trad. française). Plus généralement, le désir de souligner la parenté de la logique avec les théories au sens usuel peut être motivé par le « gradualisme », comme théorie de l'essentielle parenté épistémologique des sciences « plus » périphériques (empiriques, comme ne dirait pas Quine) et des sciences plus proches d'une position centrale à l'intérieur de notre « organisation conceptuelle ».

Exercices

1) (Adapté de Kleene, 1967 : pour la notation abrégée « φ^* », cf. Théorème II.3.)

Prouver que si : $\varphi \models \psi$, alors : $\varphi^* \models \psi^*$

2) Montrer à partir de la définition de « $\models$ » que si :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi_1$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi_p$$

et si :

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p \models \chi \quad (n, p \geqslant 0)$$

alors :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \chi$$

(transitivité de $\models$)

3) (Adapté de Church, 1956.) Sous le nom de « syllogismes hypothétiques », « syllogismes disjonctifs », « dilemmes », la logique traditionnelle reconnaissait comme valides un certain nombre de schémas d'inférence, par exemple :

Modus Ponens : Si A, alors B ; A ; donc B.

Modus Tollens : Si A, alors B ; non B ; donc non A.

Modus tollendo ponens : A ou B ; non A ; donc B.

Modus ponendo tollens : A ou B ; A ; donc non B.[1]

Dilemme simple constructif : si A, alors C ; si B, alors C ; A ou B ; donc C.

Dilemme simple destructif : si A, alors B ; si A, alors C ; non B, ou non C ; donc non A.

Les lettres A, B, C, D indiquent des places où des énoncés peuvent être introduits ; en relation avec (1), on se demandera si « ou » doit être pris au sens « inclusif », auquel cas il peut être rendu par « V », ou au sens exclusif (« l'un ou l'autre, mais pas les deux à la fois »), auquel cas on doit le rendre par une formule plus complexe (laquelle ?) ; on admettra de plus que « si..., alors... » est à prendre au sens de l'implication matérielle, i.e. qu'il peut être rendu par « $\rightarrow$ », et que « donc » inclut la signification de « $\models$ ».

(I) Écrire les schémas d'inférence correspondants pour le langage $\mathscr{L}_p$ (sur le modèle des écritures de ce § II.3).

(II) Écrire les tautologies correspondantes.

(III) Vérifier par tous les moyens disponibles que les schémas d'inférence sont valides (corrects), i.e. qu'en effet les prémisses impliquent (tauto)-logiquement la conclusion.

CHAPITRE III

L'équivalence (tauto)logique

III.1 LE THÉORÈME DE REMPLACEMENT

Les deux formules : $\neg(p \wedge \neg q)$ et : $(\neg p \vee q)$, bien que différentes, ont un point commun : pour toute distribution de valeur de vérité, l'évaluation de l'une donne le même résultat que l'évaluation de l'autre ; cette propriété est à la fois théoriquement importante, et d'un grand intérêt d'un point de vue pratique.

DÉFINITION

φ est (tauto)logiquement équivalente à ψ *ssi*, pour toute distribution δ, $\overline{\delta}(\varphi) = \overline{\delta}(\psi)$.

On note usuellement « *eq* » cette relation entre formules. On vérifie aisément que la relation *eq* est réflexive, symétrique, et transitive, i.e. qu'il s'agit d'une relation d'équivalence (au sens mathématique usuel) entre formules. Si l'on regarde à présent la table de vérité du connecteur $\leftrightarrow$, il est clair que :

$$\varphi \; eq \; \psi \; ssi \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

(note : on ne confondra pas cependant l'affirmation [dans le méta-langage] que φ *eq* ψ, et la formule [qui n'est évidemment pas une affirmation !] : $(\varphi \leftrightarrow \psi)$; pour éviter ce genre de confusion, certains auteurs [Quine,

Carnap, 1958] ont introduit l'usage de parler du « biconditionnel », plutôt que de « l'équivalence *matérielle* » à propos de $\leftrightarrow$).

Nous donnons ici une liste (non exhaustive) de schémas de tautologies qui peuvent être compris comme autant d'affirmations concernant l'équivalence de certaines formules :

Lois d'associativité :

16) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

17) $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$

Lois d'idempotence :

18) $(\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi$

19) $(\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi$

Lois de distributivité :

20) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (de $\wedge$ par $\vee$)

21) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (de $\vee$ par $\wedge$)

Lois d'absorption (ou de développement) :

22) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi$

23) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$

Lois de De Morgan :

24) $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

25) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Expressions de connecteurs en termes d'autres connecteurs :

26) $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

27) $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

28) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

29) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Lois de négation :

30) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$

31) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$

De deux formules équivalentes on peut penser qu'elles sont *interchangeables* (Carnap, 1958), au sens où si φ est sous-formule d'une formule quelconque, et si ψ est équivalente à φ, le remplacement de φ par ψ n'affectera pas l'évaluation de la formule initiale, et ce pour n'importe quelle distribution de valeurs de vérité.

Exercice

Vérifier l'affirmation précédente en considérant la formule :

$$p \wedge r \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee (r \wedge q))$$

puis en calculant la table de vérité de la formule obtenue en y remplaçant $(p \rightarrow q)$ par $(\neg p \vee q)$.

C'est cette intuition que confirme le

THÉORÈME III.1 (ou Théorème de remplacement) :

Soit φ une formule contenant comme sous-formules une ou plusieurs occurrences de ψ (ce que nous noterons « $\varphi/_{\psi}$ »), et soit $\varphi/_{\psi'}$ une formule obtenue à partir de $\varphi/_{\psi}$ par remplacement d'une ou plusieurs occurrences de ψ par ψ' (noter que la notation « $\varphi/_{\psi'}$ » est ambiguë, puisqu'il n'est pas précisé quelle, ou quelles, occurrence(s) de ψ dans φ sont remplacées) ;

si ψ *eq* ψ', alors $\varphi/_{\psi}$ *eq* $\varphi/_{\psi'}$.

Preuve

(Intuitivement, on peut dire : puisque ψ' *eq* ψ, le calcul de la table de $\varphi/_{\psi'}$ à partir du calcul de

ψ', sera identique au calcul de la table de $\varphi/_{\psi}$ à partir du calcul de ψ.) La démonstration rigoureuse, par récurrence sur le degré de φ, est laissée en *exercice* au lecteur (qui notera que la sous-formule ψ peut être φ elle-même).

COROLLAIRE III.2 Si $\vDash \varphi/_{\psi}$ et ψ *eq* ψ', alors $\vDash \varphi/_{\psi'}$.

Le COROLLAIRE III.2 peut être utilisé pour montrer qu'une formule est une tautologie en la dérivant d'une tautologie déjà connue par remplacements successifs de formules interchangeables. Dans ce cas, il est usuel de disposer les différentes formules obtenues à chaque étape les unes en dessous des autres, cette disposition illustrant la transitivité de la relation *eq* ; éventuellement, on mentionnera à droite de chaque ligne de la dérivation la « Loi » (cf. tautologies 16 à 31) qui justifie l'écriture de la formule figurant sur la ligne. (« Méthode de la chaîne » de Kleene, 1967.)

Exemple :

On veut prouver :

$$\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

Si l'on ne voit pas d'emblée de quelle tautologie connue on peut dériver cette formule, le mieux est de se livrer à une démarche « tâtonnante » (heuristique) essayant tous les remplacements possibles jusqu'à tomber sur une tautologie connue (en général, l'intuition met sur la voie des bonnes transformations !). Dans ce cas, la dérivation proprement dite correspond à une lecture « de bas en haut » de la suite des formules :

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

par 28 ;

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

par 26 deux fois ;

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

par Loi de commutativité de $\wedge$ et de $\vee$ (32 et 33) deux fois ;

La dernière ligne est une tautologie connue : cf. schéma 13.

Exercice

Écrire 32 et 33, i.e. les Lois de commutativité de $\wedge$ et de $\vee$.

Sur le modèle de l'exemple ci-dessus, montrer :

34) $\vDash p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

35) $\vDash p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

REMARQUE

Le Théorème de remplacement illustre (ou souligne) un fait qui n'a pas manqué de frapper le lecteur : dans toutes les constructions admises dans notre langage, la valeur de vérité d'une formule complexe ne dépend que de la valeur de vérité des formules qui la composent. Autrement dit : les modes de composition admis dans notre langage sont *vérifonctionnels* au sens où « une façon de former des énoncés composés à partir d'énoncés composants est dite vérifonctionnelle si les composés ainsi formés ont toujours des valeurs de vérité correspondantes aussi longtemps que leurs composants ont des valeurs de vérités correspondantes » (Quine, 1950).

On dit aussi que les contextes où figurent des énoncés sont (ou désignent) dans ce cas des *fonctions de vérité* : plus précisément dans le langage construit ici, à chaque connecteur est *associée* une fonction de vérité (une fonction *booléenne*, cf. ci-dessous § 2).

Le caractère vérifonctionnel de ces modes de composition est explicite chez Frege, cf. par exemple la 3e *Recherche logique* (1923). Dans ce texte, les « compositions de Pensées » *(Gedankengefüge)* construites à partir de « et » et « non » sont dites « compositions mathématiques », en raison de la conviction de Frege qu' « en ce qui concerne les mathématiques (...), n'intervient dans leurs compositions de Pensées aucun autre mode de formation ». Un équivalent du théorème de remplacement est formulé en conclusion de cette 3e *Recherche* : « Si dans une composition de Pensées mathématique, on remplace une Pensée par une Pensée de même valeur de vérité, la composition de Pensée ainsi obtenue a la même valeur de vérité que la composition initiale. » (Le terme « Pensée » peut être compris comme désignant le contenu de signification logique ou « *Sinn* » (sens) d'un énoncé complet, i.e. soit vrai soit faux absolument parlant.)

Il arrive souvent que le terme « extensionnel » soit utilisé, en relation avec des contextes où figurent des énoncés, au même sens que « vérifonctionnel ». Dans ce cas le caractère vérifonctionnel est compris comme un cas particulier de l'extensionalité, qui est une notion plus générale. Le lien s'établit comme suit : de même que dans certains contextes (dits, pour cette raison, « extensionnels ») le remplacement d'un terme général (« homme », « bipède sans plume ») par un terme général *de même extension* (ou *co-extensif*), i.e. vrai des mêmes objets, (dans l'exemple : « animal raisonnable ») n'affecte pas la valeur de vérité de l'énoncé où a lieu le remplacement, de même dans ce type de contexte, le remplacement d'un énoncé par un énoncé de même valeur de vérité n'affecte pas la valeur de vérité de l'énoncé composé ; et il en est de même, dans ce type de contexte, pour le remplacement de noms propres ou de descriptions désignant le même objet (ayant même « *Bedeutung* » dans la terminologie de Frege). Pour cette raison, objets nommés (références), extensions de termes généraux, et valeurs de vérité, sont parfois rassemblés dans la catégorie des entités extensionnelles

et opposés aux *intensions* (attributs, propositions, significations...).

On ne confondra pas, enfin, le fait que les modes de composition considérés ici, sont extensionnels au sens précisé plus haut, avec ce qu'on appelle parfois le Principe d'extensionalité (ou la Thèse d'extensionalité) tel qu'il est formulé par Wittgenstein, *Tractatus*, 5.54, et qui consiste, semble-t-il, à affirmer que les contextes apparemment intensionnels comme « A croit que p » doivent être analysés de manière à dissiper ce qui n'est qu'une illusion (cf. Russell, *Introduction au Tractatus*, et Ramsay, *The Foundations of Mathematics*).

Si nous faisons à présent un retour en arrière vers les schémas 26, 27, 28, nous pouvons les concevoir, *via* le Théorème de remplacement, comme des *règles d'élimination* : par exemple, à partir d'une formule contenant n occurrences de →, n applications de 26 et du Théorème de remplacement permettront de dériver une formule équivalente à la formule initiale mais d'où → aura été éliminé.

Pour la même raison, les Lois 24, 25, 30 et 31 peuvent être comprises comme des *règles de limitation de la portée* de ¬ : chaque fois que dans une formule nous rencontrons une occurrence de ¬ devant une parenthèse, nous « rentrons » ¬ à l'intérieur de la parenthèse au cours d'une application de l'une de ces Lois (et du Théorème de remplacement). Finalement, des applications itérées des Lois 24 à 31, ainsi que de la Loi 6 (p. 75) réinterprétée comme *règle d'élimination de* ¬¬, doivent nous permettre de trouver, pour toute formule φ, une formule équivalente à φ, mais qui présente la propriété remarquable de ne comporter que les connecteurs binaires Λ et V ; de n'avoir que des ¬ dont la portée est limitée aux atomes.

On peut ramasser ces réflexions dans les deux résultats suivants :

THÉORÈME III.3 (ou : Loi de De Morgan généralisée) : Soit φ une formule quelconque dont les seuls connecteurs sont Λ, V, et $\neg$; et soit φ° la formule obtenue à partir de φ en interchangeant Λ avec V, V avec Λ, et chaque atome avec sa négation ;

alors :

$$\neg\varphi \; eq \; \varphi^\circ$$

(note : au vu de la Loi 6, il est plus simple d'entendre la clause : « chaque atome échangé avec sa négation », en un sens large, i.e. : chaque **a** remplacé par $\neg$**a**, et chaque $\neg$**a** remplacé par **a** (en toutes ses occurrences).

COROLLAIRE III.4 Pour toute formule φ, il existe une formule équivalente à φ, où ne figurent que les seuls connecteurs Λ, V, et $\neg$, et où $\neg$ est limité aux atomes.

(note : l'expression : « $\neg$ limité aux atomes » est une abréviation utile de : « seuls des atomes figurent dans la portée de toutes les occurrences de $\neg$ ».)

Preuve de III.3

(Par récurrence sur la longueur de φ) : l'hypothèse de III.3 est que φ ne contient ni $\rightarrow$, ni $\leftrightarrow$;

1) $l(\varphi) = 1$, et $\varphi = \mathbf{a}$:

alors $\neg\varphi = \neg\mathbf{a} = \varphi^\circ$, et donc $\neg\varphi \; eq \; \varphi^\circ$;

2) $l(\varphi) > 1$, et $\varphi = \neg\psi$; observons que dans ce cas :

$$\varphi^\circ = \neg\psi^\circ$$

par hypothèse de récurrence :

$$\neg\psi \; eq \; \psi^\circ$$

d'où :

$$\neg\neg\psi \; eq \; \neg\psi^\circ$$

i.e. :

$$\neg\varphi \; eq \; \varphi^\circ$$

3) $l(\varphi) > 1$, et $\varphi = (\psi \Lambda \chi)$ (par exemple ; la preuve est la même pour le cas où $\varphi = (\psi \text{ V } \chi)$) ; observons que dans ce cas :

$$\varphi^\circ = (\psi^\circ \text{ V } \chi^\circ)$$

et :

$$\neg\varphi = \neg(\psi \Lambda \chi)$$

donc :

$\neg\varphi \; eq \; (\neg\psi \text{ V } \neg\chi)$ par 24

$\neg\varphi \; eq \; (\psi^\circ \text{ V } \chi^\circ)$ par hypothèse de récurrence et Th. de remplacement

i.e. :

$$\neg\varphi \; eq \; \varphi^\circ$$

Soit donc une formule φ : par les règles d'élimination 26 et 28 (ou 29), nous obtenons une formule φ' qui satisfait l'hypothèse de III.3 ; (nous pouvons convenir d'éliminer à cette étape toutes les occurrences de $\neg\neg$ par application de la règle 6) ; finalement chaque fois que nous rencontrons, en partant conventionnellement de la gauche, une occurrence de $\neg$ devant une parenthèse, nous éliminons cette occurrence en appliquant III.3 (c'est-à-dire en faisant subir à la formule dans la portée de cette occurrence de $\neg$ la transformation décrite dans le passage de φ à φ° dans l'énoncé du théorème). La procédure s'achève quand $\neg$ est limité aux atomes.

Exemple : soit la formule

$$\neg(((p \rightarrow q) \text{ V } s) \Lambda (\neg p \rightarrow \neg(r \Lambda s)))$$

deux applications de 26 donnent la formule (équivalente) :

$$\neg(((\neg p \vee q) \vee s) \wedge (\neg\neg p \vee \neg(r \wedge s)))$$

après élimination de $\neg\neg$ par application de 6, une application de III.3 donne la formule (équivalente) :

$$((p \wedge \neg q) \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg(\neg r \vee \neg s))$$

et finalement une dernière application de III.3 nous donne :

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$$

après omission des parenthèses superflues selon nos conventions habituelles (il est conseillé de n'utiliser l'omission conventionnelle des parenthèses qu'une fois la procédure achevée !).

REMARQUE

En un sens, le THÉORÈME III.3 n'apporte rien de fondamentalement nouveau, et l'on pourrait obtenir III.4 sans passer par lui, en utilisant simplement 24 et 25 autant de fois qu'il le faut. Cependant l'utilisation de III.3 abrège souvent les calculs ; à titre d'exemple, voici la suite de transformations analogue pour la même formule avec seulement 24 et 25 (à partir de la deuxième ligne) :

$$\neg((\neg p \vee q) \vee s) \vee \neg(\neg\neg p \vee \neg(r \wedge s))$$

par 24 après élimination de $\neg\neg$:
puis :

$$(\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg s)) \vee (\neg p \wedge (r \wedge s))$$

par 25 deux fois
puis :

$$(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge (r \wedge s))$$

par 25
puis :

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$$

par 6
et ce, bien que deux étapes aient été inscrites sur la même ligne !

Nous allons voir qu'un résultat plus fort peut être obtenu, qu'illustre la forme remarquable (et inattendue) de la formule obtenue dans l'exemple considéré : en effet cette formule, outre qu'elle satisfait aux conditions de III.4, ne comporte que des occurrences de $\wedge$ limitées à des atomes ou à des négations d'atomes. Nous allons voir que ce résultat peut toujours être obtenu ; nous allons en même temps introduire un nouveau point de vue sur l'équivalence.

Exercice

Montrer que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *eq* $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$ (i.e. exprime le « ou » exclusif)

Réécrire les schémas 1 à 15 (à l'exception bien sûr de 3) dans le style décrit par le Corollaire III.4 ; en utilisant tous les résultats disponibles, montrer qu'on pourrait dériver certains schémas d'autres schémas pris comme « schémas primitifs ».

III.2 LA COMPLÉTUDE FONCTIONNELLE

Pouvons-nous dire, dans notre langage où figurent cinq connecteurs (munis de leur interprétation), tout ce que nous « voudrions dire », compte tenu des limites imposées par le choix de la bivalence et de la vérifonctionnalité ? Cette question est susceptible d'une formulation précise, et d'une réponse positive.

Appelons *fonction booléenne* à n arguments, $n \geqslant 1$, une application quelconque :

$$B : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$$

par exemple, chaque connecteur binaire a été interprété par une fonction booléenne à deux arguments, dite la fonction associée à ce connecteur, dont le graphe figure dans le tableau de la p. 65 ; et le connecteur $\neg$ a été interprété par une fonction booléenne à 1 argument, notée $\neg^*$.

D'autres fonctions booléennes simples sont par exemple :

$$I_i : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$$

définie par :

$$I_i(X_1, ..., X_n) = X_i$$

où $X \in \{V, F\}$;
ou encore la fonction **T** définie par :

$$T(X_1, ..., X_n) = V$$

Chaque formule « génère » une fonction booléenne, qu'on peut extraire de la table de vérité de la formule ; dans la table de vérité d'une formule φ contenant au plus les n premiers atomes (dans l'ordre alphabétique), les atomes sont canoniquement introduits dans l'ordre alphabétique (sous la forme de l'ordre de lecture de gauche à droite des premières colonnes de la table) ; et sur chaque ligne est inscrite en dernière colonne la valeur de la formule pour la distribution qui donne à chacun des atomes la valeur inscrite sous l'atome en question.

Il est donc naturel de définir la fonction B_φ générée par la formule φ contenant au plus les n premiers atomes comme la fonction qui pour le n-uplet $(X_1, ..., X_n)$, où $X_i \in \{V, F\}$, prend la valeur de φ pour la ligne correspondante de la table, i.e. où X_i est la valeur donnée au i-ème atome.

(Il convient dans ce contexte de se représenter la table de vérité d'une formule où certains parmi les n premiers atomes dans l'ordre alphabétique n'ont pas d'occurrence comme intégralement écrite, i.e. avec en

entrée la liste intégrale des n premiers atomes : en vertu du Lemme II.2, cet élargissement est sans influence sur le calcul de φ).

Autrement dit : soit $\varphi(n)$ une formule contenant au plus les n premiers atomes ; la fonction booléenne générée (ou réalisée) par $\varphi(n)$, $B_{\varphi(n)}$, est définie par :

$$B_{\varphi(n)}(X_1, ..., X_n) = \overline{\delta}(\varphi(n))$$

pour la distribution δ telle que $\delta(\mathbf{a}_i) = X_i$, $\mathbf{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant le i-ème atome dans l'ordre alphabétique.

Par exemple, si $\varphi = (q \rightarrow p)$, la fonction B_φ est définie par :

$$B_\varphi(F, V) = F, \quad B_\varphi(V, X) = B_\varphi(X, F) = V$$

> ***Exercice***
>
> En se reportant à la définition ci-dessus, écrire explicitement les graphes des fonctions générées par les formules $(q \rightarrow r)$ et $(r \rightarrow q)$, formules qui toutes deux comportent au plus les 3 premiers atomes dans l'ordre alphabétique !

Il est clair d'après notre définition que deux formules équivalentes comportant au plus les n premiers atomes génèrent la même fonction booléenne : car, par exemple, les formules $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$ ont même table de vérité ; il en est de même pour les formules :

$$p \wedge q \quad \text{et :} \quad (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

comme le lecteur est invité à le vérifier par lui-même.

REMARQUE

Faute de la clause : « comportant *au plus* les n premiers atomes », dans la définition de la fonction

générée par une formule, on ne pourrait dire au sens strict que toutes les formules équivalentes génèrent la même fonction : cela resterait vrai pour les formules (par exemple) $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$, qui comportent les mêmes atomes, mais ne le serait plus (par exemple) des formules $p \wedge q$ et $p \wedge q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg r$, la première générant une fonction booléenne à 2 arguments, l'autre une fonction booléenne à 3 arguments (qui ne peuvent donc être la même fonction !).

Si nous revenons à présent à la question posée au début de ce paragraphe, la réponse promise peut se formuler ainsi : de même que toute formule génère une fonction booléenne, réciproquement pour toute fonction booléenne à n arguments, il existe une formule qui réalise cette fonction (c'est en ce sens que notre langage permet de tout dire !).

THÉORÈME III.5 Soit **G** une fonction booléenne à n arguments ; il existe une formule φ telle que :

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_{\varphi},$$

i.e. telle que φ réalise la fonction **G**.

Preuve

Un exemple facilitera la compréhension :
Soit **G** la fonction booléenne définie par :

$$\mathbf{G}(V, V, V) = F$$
$$\mathbf{G}(V, V, F) = F$$
$$\mathbf{G}(V, F, V) = V$$
$$\mathbf{G}(V, F, F) = F$$
$$\mathbf{G}(F, V, V) = V$$
$$\mathbf{G}(F, V, F) = V$$
$$\mathbf{G}(F, F, V) = F$$
$$\mathbf{G}(F, F, F) = F$$

Pour chacun des triplets pour lesquels **G** prend la valeur V, considérons respectivement les conjonctions :

$$p \wedge \neg q \wedge r$$
$$\neg p \wedge q \wedge r$$
$$\neg p \wedge q \wedge \neg r$$

en notant que chacune d'elles prend la valeur V exactement pour la distribution sur ses atomes qui correspond au triplet considéré ; puis formons la disjonction de ces trois conjonctions :

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Le lecteur vérifiera, s'il n'en est pas déjà convaincu, que cette formule réalise **G**.

Revenons à présent à la démonstration générale :

Cas 1) : **G** prend toujours la valeur F ; dans ce cas, considérer $\varphi = p \wedge \neg p$;

Cas 2) : sinon, il y a k n-uplets (k lignes dans le graphe de **G**) pour lesquels la fonction prend la valeur V ; on les énumère ainsi :

$$(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n})$$
$$(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n})$$
$$\ldots$$
$$(X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn})$$

pour le i-ème n-uplet, $1 \leqslant i \leqslant k$, soit :

$$\chi_{ij} = \begin{cases} \mathbf{a}_j \text{ si } X_{ij} = V \\ \neg \mathbf{a}_j \text{ si } X_{ij} = F \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

soit :

$$\psi_i = \chi_{i1} \wedge \chi_{i2} \wedge \ldots \wedge \chi_{in}$$

et soit :

$$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_k$$

φ réalise la fonction **G**, i.e. $\mathbf{G} = \mathbf{B}_{\varphi}$: en effet :

(1) $\mathbf{B}(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}) = V$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$ puisque la distribution δ telle que $\delta(\mathbf{a}_j) = X_{ij}$ satisfait ψ_i et donc satisfait φ ;

et (2) la valeur de **B** pour les $2^n - k$ autres n-uplets est F, puisqu'une seule distribution satisfait chaque ψ_i, et donc seules les k distributions définies en (1) satisfont φ ; donc $\mathbf{B}_\varphi = \mathbf{G}$.

En fait, la formule φ dont le Théorème III.5 prouve l'existence a la forme remarquée à la fin du précédent paragraphe : seuls des atomes ou leurs négations sont dans la portée des occurrences de Λ (outre qu'elle satisfait les conditions de III.4). Une telle formule est dite en *Forme normale disjonctive* ; l'un des intérêts des formes normales disjonctives est qu'elles exhibent clairement leurs conditions de vérité, i.e. les distributions de valeurs de vérité qui satisfont les conjonctions dont elles sont composées.

COROLLAIRE III.6 Pour toute formule φ, il existe une forme normale disjonctive φ' telle que φ *eq* φ'.

REMARQUE

Pour des raisons qu'on va préciser à l'instant, la forme normale disjonctive tirée (suivant la procédure décrite dans la preuve de III.5) d'une fonction booléenne donnée, ou, ce qui revient au même, de la table de vérité d'une formule quelconque, est parfois dite forme normale disjonctive distinguée (et si on l'obtient à partir de la table de vérité d'une formule, forme normale disjonctive *développée* de la formule initiale). Ce terme réfère à la propriété suivante : dans chacune des conjonctions qui constituent la forme disjonctive (parfois dites les « disjoints »), figurent, pour une fonction booléenne à n arguments, les n premiers atomes dans l'ordre alphabétique. (Dans la pratique des calculs, si on part d'une formule initiale où certains des n premiers atomes n'ont pas d'occurrence, la notion est évidemment

relativisée à celle des n premiers atomes ayant une occurrence dans la formule : et le j-ième atome [ou sa négation] de ψ_i sera le j-ième selon l'ordre alphabétique de ceux qui ont une occurrence dans la formule ; par exemple, si l'on nous demande la forme normale disjonctive de :

$$\neg s \rightarrow (r \leftrightarrow s)$$

le premier atome de chacun des disjoints sera r ; la forme normale disjonctive développée sera donc :

$$(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$$

et l'on peut dire simplement que la forme est « développée » en ce que chaque disjoint comporte une occurrence de chacun des atomes figurant dans la formule initiale.)

Mais il est aussi possible de revenir au point de vue du paragraphe précédent, et d'obtenir, pour chaque formule, une forme normale disjonctive à la suite de transformations successives ; une fois qu'on a appliqué les règles d'élimination et de limitation de $\neg$ dans l'esprit du Corollaire III.4, il suffit de considérer 20 (1re Loi de distributivité, cf. p. 88) comme une règle de limitation de la portée de Λ ; des applications successives de 20 permettent alors (*via* le Théorème de remplacement) de « limiter » Λ aux atomes ou à des négations d'atomes. Or la forme normale disjonctive obtenue ainsi n'est pas nécessairement développée au sens spécifié plus haut. Un exemple le montrera :

Soit la formule initiale :

$$((p \wedge r) \vee (\neg s \wedge q)) \rightarrow s$$

Les transformations mentionnées au Corollaire III.4 donnent :

$$((p \vee \neg r) \wedge (s \vee \neg q)) \vee s$$

A partir de là, une première application de 20 donne :

$$((p \vee \neg r) \wedge s) \vee ((p \vee \neg r) \wedge \neg q) \vee s$$

Une seconde application de 20 donne, après application de la commutativité de Λ :

$$(s \wedge p) \vee (s \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee s$$

Or, cette formule est bien une forme normale disjonctive, mais non une forme développée : r n'a pas d'occurrence dans le premier disjoint, p n'en a pas dans le second, etc.

Il est cependant toujours possible, à partir d'une forme normale obtenue par cette voie, de retrouver la forme développée, en utilisant l'équivalence de :

$$\varphi \qquad \text{et de :} \qquad (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$$

(règle 36) ; on développera ainsi chacun des disjoints « relativement » aux atomes qui n'y figurent pas ; par exemple, on introduira l'atome q absent du premier disjoint de la forme normale ci-dessus en remplaçant ce disjoint par la formule équivalent :

$$(s \wedge p \wedge q) \vee (s \wedge p \wedge \neg q)$$

etc.

Exercice

A partir de la forme normale ci-dessus, écrire la forme normale développée par des transformations successives ; vérifier en utilisant le Théorème III.5 que le résultat est correct. (On trouvera dans Quine 1950, § 10, 11, 12, de plus amples développements, facilement accessibles au lecteur français, sur cette question.)

Un ensemble de connecteurs est dit *complet ssi* toute fonction booléenne est réalisable par une formule où les seuls connecteurs sont les connecteurs de cet ensemble. Il résulte du Théorème III.5 que l'ensemble $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. En fait ce résultat peut être renforcé :

THÉORÈME III.7 Les systèmes $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont complets.

Preuve

Soit une fonction booléenne ; d'après Th. III.5, il y a une formule φ qui la réalise et dont tous les connecteurs appartiennent à $\{\neg, \wedge, \vee\}$; pour la première partie de III.7, il suffit de remarquer qu'il y a une formule φ' équivalente à φ et ne comportant que les seuls connecteurs $\neg$ et $\wedge$, en vertu de l'équivalence consignée dans le schéma de tautologie dont 35 (p. 91) est une instance ; des applications itérées de ce schéma, utilisé comme règle d'élimination de $\vee$, permettent de dériver φ' de φ.

Même remarque pour la seconde partie du théorème : il suffit de considérer le schéma de tautologie illustré par 34 (p. 91), et de l'utiliser comme règle d'élimination de $\wedge$.

Exercice

Réécrire la forme normale de la p. 103 (i.e. trouver une formule équivalente) dans l'ensemble $\{\neg, \wedge\}$, puis dans l'ensemble $\{\neg, \vee\}$.

Prouver III.7 de façon plus formelle, i.e. par récurrence sur la construction des formules.

Considérons à présent les ensembles de connecteurs $\{|\}$ et $\{\downarrow\}$, où $|$ (« pas à la fois ») est défini par :

(V, V)	F	et ↓ (« ni ... ni ») par :	(V, V)	F
(V, F)	V		(V, F)	F
(F, V)	V		(F, V)	F
(F, F)	V		(F, F)	V

THÉORÈME III.8 Les ensembles {|} et {↓} sont complets.

Preuve

A partir de III.7, il suffit de montrer que ¬ et Λ peuvent être « simulés » par | ; d'après la table de |, il est clair que p|p est équivalent à ¬p, et que (p|q)|(p|q) est équivalent à p Λ q.

Exercice

Prouver de la même manière la seconde partie de III.8 ;

Prouver à nouveau III.8, mais en partant de {¬; V}.

REMARQUE

La possibilité d'un calcul propositionnel basé sur un unique connecteur était connue de C. S. Peirce (vers 1880, dans un fragment non publié à l'époque). Le premier texte publié où cette possibilité est mentionnée date de 1913 : il s'agit d'un article de Sheffer, intitulé « A Set of Five Independant Postulates for Boolean Algebras ».

La ligne verticale (non-conjonction), appelée depuis « barre de Sheffer », n'a été cependant utilisée comme connecteur à proprement parler qu'à partir d'un article du logicien français J. Nicod intitulé « A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic », paru dans les *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1917-1920) ; l'intention de Nicod était de reconstruire l'axiomatique pour le calcul propositionnel sur la base d'un unique axiome, en utilisant l'unique connecteur |.

Il est en général plus compliqué de montrer qu'un ensemble de connecteurs n'est pas complet ; il faut pour cela montrer qu'une certaine fonction booléenne n'est pas réalisable.

On a (par exemple) le :

THÉORÈME III.9 L'ensemble {Λ, →} n'est pas complet.

En effet, toute formule construite avec seulement Λ et → dont l'unique atome est p prendra la valeur V pour la valeur V donnée à p ; il n'y aura donc pas de formule équivalente à ¬p.

Exercice

Soit $\mathscr{L}_{p\$}$ le langage $\mathscr{L}_p$ enrichi par l'introduction d'un connecteur ternaire \$ (et l'ajout d'une règle de formation : φ, ψ, χ étant des formules, \$(φψχ) est une formule) ; \$ est défini par :

$$\overline{\delta}(\$(pqr)) = \begin{cases} \delta(p) & \text{si r est vrai} \\ F & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour toute formule du langage enrichi, il y a une formule équivalente dans $\mathscr{L}_p$.

La présence à côté de 20 d'une deuxième Loi de distributivité (21, ou Loi de distributivité de la disjonction par la conjonction) permet d'obtenir par des suites appropriées de transformations (analogues à celles de la p. 103), pour toute formule φ, une formule qui sera dite *forme normale conjonctive* et qui aura la caractéristique d'être une conjonction de disjonctions où le signe V est limité aux atomes et à des négations d'atomes, tout en étant évidemment équivalente à φ.

La « méthode vénérable des formes normales conjonctives et disjonctives » (Quine, 1941-1965) peut être utilisée comme une procédure de décision pour la validité. Comme il a été indiqué au chapitre précédent, Hilbert-Ackermann (1928) utilisait la méthode de mise en *forme normale conjonctive* pour décider de la validité d'une formule, le test étant le suivant : une formule est tautologique (le terme lui-même ne figure pas dans l'ouvrage) *ssi* après mise en forme normale conjonctive chaque disjonction (parfois : « conjoint ») comporte au moins une occurrence d'un atome et de sa négation. Il est clair en effet qu'une telle disjonction sera tautologique, et qu'une conjonction dont tous les conjoints sont tautologiques sera (exactement dans ce cas) une tautologie.

De même, la mise en forme normale disjonctive constitue une procédure de décision pour la propriété d'être une antilogie : une formule est une antilogie *ssi* après mise en forme normale disjonctive chaque conjonction (chaque disjoint) comporte au moins une occurrence d'un atome et de sa négation ; car alors chaque disjoint sera une antilogie, et une disjonction dont tous les disjoints sont des antilogies sera (exactement dans ce cas) une antilogie.

Le lecteur français trouvera aisément de plus complets développements sur ces points, dans Quine (1941-1965) qui utilise cette méthode comme procédure de décision, et dans Quine (1950) qui la mentionne également (les deux ouvrages sont traduits en français).

Notons enfin que les formes normales disjonctives *développées* fournissent également une procédure de décision pour la validité : une formule comportant n atomes sera une tautologie *ssi* sa forme normale disjonctive développée comporte tous les disjoints possibles (correspondants à toutes les lignes de la table), i.e. 2^n disjoints.

Exercice (Inspiré de Hilbert-Ackermann, 1928.)

On peut rechercher systématiquement toutes les conséquences (tauto)logiques d'un ensemble de formules prises comme hypothèses, relativement aux atomes ayant une occurrence dans ces hypothèses, de la manière suivante : on considère la conjonction des hypothèses, puis on transforme celle-ci en forme normale *conjonctive* développée (en utilisant l'équivalence de φ et de $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\psi)$, règle 37). Pour obtenir (en forme développée) toutes les conséquences, il suffit alors de prendre n'importe quelle sélection de conjoints de ladite forme et de les connecter par Λ. Car chacune de ces sélections sera évidemment satisfaite par toutes les distributions de valeurs de vérité qui satisfont la totalité de la conjonction initiale.

Soit maintenant les formules p et $(p \rightarrow q)$ prises comme hypothèses : montrer en passant par la conjonction des hypothèses, puis par la forme normale conjonctive développée, que q est conséquence tautologique des hypothèses.

Donner d'autres conséquences des hypothèses par la même méthode.

Pour anticiper sur le chapitre suivant, et sur les possibilités d'applications au langage ordinaire, considérons les deux énoncés mathématiques :

Tout nombre réel est algébrique (en abrégé : A).

L'ensemble des nombres réels est dénombrable (en abrégé : B).

On admet qu'on sait (à titre de théorèmes déjà démontrés, par exemple) :

Si tout nombre réel est algébrique, alors l'ensemble des nombres réels est dénombrable.

et : L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

En admettant que nos connecteurs représentent fidèlement les mots logiques français, les deux énoncés deviennent :

$$(A \rightarrow B) \quad \text{et} : \quad \neg B$$

Montrer, en utilisant la méthode de la forme normale conjonctive développée, qu'on peut en déduire la conclusion :

Tout nombre réel n'est pas algébrique (en abrégé : $\neg A$).

CHAPITRE IV

Applications aux arguments en langage ordinaire

« En toute question, et avant tout examen sur le fond, je regarde au langage ; j'ai coutume de procéder à la mode des chirurgiens qui purifient d'abord leurs mains et préparent leur champ opératoire. C'est ce que j'appelle le *nettoyage de la situation verbale.* »

P. Valéry, *in* « Poésie et pensée abstraite », *Variétés V.*

IV.1 REMARQUES PRÉLIMINAIRES

L'un des intérêts (mais non le seul) de la logique réside dans son rôle d'auxiliaire pour l'analyse des arguments conduits en langage ordinaire ou semi-ordinaire dans le cadre d'une discipline scientifique non formalisée, i.e. dont la logique sous-jacente est laissée implicite (comme c'est ordinairement le cas). La logique peut éventuellement nous aider à découvrir des arguments corrects en nous fournissant des procédures systématiques pour la recherche des conséquences d'un ensemble donné de prémisses : c'était le sens du dernier exercice du chapitre précédent. Elle peut aussi nous aider à rattacher un énoncé à d'autres énoncés reconnus (ou simplement tenus pour) vrais en montrant que cet énoncé est déductible à partir de ces derniers. Certes, dans des cas simples, il n'est sans doute pas nécessaire de déployer l'appareil du système construit dans les chapitres précédents. L'intuition logique nous assure sans doute à elle seule que l'énoncé :

Il n'y a pas de mouvement sans cause.

est déductible (est conséquence logique) des énoncés :

Tout énoncé est soit vrai, soit faux.
S'il y a un mouvement sans cause, alors tout énoncé n'est pas soit vrai, soit faux.

(raisonnement attribué à Chrysippe par Cicéron, *De Fato*). Cependant, dans des cas plus complexes, le doute peut surgir : est-il vrai, pour prendre un exemple qui peut sembler déroutant, que l'énoncé :

La Tamise coule à Rome

est conséquence logique de l'énoncé :

Socrate est savant et Socrate n'est pas savant. ?

Traduisons, dans le contexte de cet exercice, l'énoncé : « Socrate est savant » par l'atome « p », et « La Tamise coule à Rome » par l'atome « q » de notre langage. L'énoncé initial, ou *prémisse*, est alors rendu par la formule :

$$(p \wedge \neg p)$$

Une suite d'inférences, dont chaque pas est justifié par l'appel à un schéma d'inférence supposé établi, ou par l'appel à un schéma de tautologie correspondant (cf. Théorème II.10), permet de dériver en effet « q » à titre de conclusion ; la dérivation suivante mentionne à droite de chaque ligne le schéma d'inférence invoqué (sous la forme : ... $\models$ ...) et à quelle(s) ligne(s) précédente(s) de la dérivation il est appliqué :

(1)	$(p \wedge \neg p)$	prémisse
(2)	p	de (1) par : $\varphi \wedge \psi \models \varphi$
(3)	p V q	de (2) par : $\varphi \models \varphi \vee \psi$
(4)	$\neg p$	de (1) par : $\varphi \wedge \psi \models \psi$
(5)	q	de (3) et (4) par : $\varphi \vee \psi, \neg \varphi \models \psi$

La totalité des lignes (1) à (5) constitue une preuve qui montre que « La Tamise coule à Rome » s'ensuit logiquement de la prémisse concernant Socrate (un tel argument destiné à montrer que n'importe quelle proposition s'ensuit d'une contradiction [ou d'une antilogie] était connu de la logique médiévale).

Enfin, la logique permet de contrôler la validité d'arguments présentés comme corrects, mais dont la complexité va au-delà des prises de notre intuition. Cependant, un certain nombre de précautions doivent être prises si l'on veut éviter de tirer, d'un contrôle effectué par le moyen des procédures qu'offre la logique, des conclusions erronées concernant la correction d'une inférence présentée en langage ordinaire. Il peut être utile de garder en mémoire, à propos des problèmes que pose la « symbolisation » d'énoncés (du français par exemple) dans un langage artificiel, cet avertissement de Benson Mates (1965) (bien que le pessimisme qu'il exprime soit peut-être trop radical, et bien qu'aucun logicien philosophiquement sérieux n'ait sans doute soutenu le point de vue qu'il combat) :

« Je me suis senti obligé de rejeter l'approche où les connecteurs et les quantificateurs du système formel sont conçus comme des abréviations pour les mots et expressions correspondants du langage naturel, et où les énoncés formels (note : les « formules ») sont décrits comme des schémas pour les énoncés du langage naturel. Caractéristique de cette approche est la suggestion que les mots logiques comme "si ... alors", "ou", "ne ... pas", sont vagues et ambigüs dans leur utilisation quotidienne, et que l'activité du logicien consiste à sélectionner chaque fois un sens déterminé et à le conférer au symbole formel correspondant. C'est là une prétention que bien peu de choses viennent soutenir, et qui à mon avis est sans doute fausse. En général je me suis efforcé de mettre en lumière le fait

que, malgré la possibilité de traduire dans une certaine mesure les énoncés du langage naturel dans la notation formelle, il y a souvent un sérieux décalage au cours de l'opération. Non seulement il arrive qu'un argument une fois traduit soit formellement incorrect alors que l'original était intuitivement correct, mais il y a aussi des cas où la version traduite est formellement correcte alors que l'original est intuitivement incorrect. Je suppose que le prix à payer, quand on attire l'attention sur ce point, est qu'on cesse de donner l'impression, gratifiante et peut-être pédagogiquement utile, que les logiciens possèdent un instrument ésotérique à tester la correction des arguments construits dans le langage naturel. »

Nous verrons tout à l'heure des exemples du premier cas évoqué par B. Mates ; on rencontre typiquement des exemples du second cas quand des références temporelles sont incorporées aux formes grammaticales du verbe. L'argument suivant peut être à bon droit tenu pour une mauvaise plaisanterie :

Georges a épousé Marie et Marie est veuve ;
donc Georges a épousé une veuve.

(tiré de Quine, 1960, chap. V, § 36, cf. aussi Quine, 1950, I, 8, à propos du « sophisme de l'amphibologie »). Pourtant une traduction inattentive à la référence temporelle contenue dans « a épousé » donnerait une instance de schéma d'inférence valide (au sens du Calcul des prédicats, cf. II[e] partie).

REMARQUE

Évoquons brièvement quelques-uns des problèmes que pose la traduction.

La dénomination « symboles d'énoncés », évoquée en passant au § I.2. à propos des atomes, laisse penser que la traduction fait correspondre nos atomes aux énoncés

figurant dans les arguments en langage ordinaire. Cependant, il est bien connu que diverses occurrences d'un même énoncé peuvent avoir des valeurs de vérité différentes suivant le moment, le lieu, suivant le locuteur ou le contexte, alors qu'un même atome, en ses diverses occurrences, garde bien sûr la même valeur de vérité pour une distribution donnée. L'exigence de valeurs de vérité déterminées pour le système logique, face à la variation fréquente des valeurs de vérité des énoncés ordinaires, peut ainsi amener à contester que notre logique traite véritablement des relations entre énoncés. La question qui est ici posée est celle de savoir quels sont, dans le langage ordinaire, les supports véritables (ou les véhicules) du Vrai et du Faux.

Certains auteurs ont introduit en relation avec ce problème une distinction entre l'*énoncé*, comme forme linguistique ou *type* (« sentence »), et l'*affirmation* (« statement ») : par exemple, Strawson (1950) fait remarquer qu'on peut parler « d'un seul et même énoncé proféré (ou utilisé) en différentes occasions » pour accomplir différentes « *assertions* » (ou affirmations) ; et il peut arriver que le même énoncé (par exemple : « il a gagné les élections ») soit utilisé dans un cas pour accomplir une assertion vraie (par exemple si le locuteur en fait usage pour référer à G. Bush), dans d'autres pour accomplir une affirmation fausse (par exemple, si un locuteur fait usage du même énoncé pour référer à M. Dukakis). « Ce que de tels exemples montrent, c'est que nous ne pouvons identifier ce qui est vrai ou faux (l'affirmation) avec l'énoncé utilisé pour l'accomplir. » De même : « Ce sont les affirmations, et non les énoncés, qui sont inconsistants entre eux, sont conséquence l'un de l'autre, etc. » (Strawson, 1952). En conséquence, les formules du système représentent plutôt, lors de la traduction, des affirmations vérifonctionnelles (« truth-functional statements ») que des énoncés à proprement parler (Strawson, 1952, chap. III par exemple).

Les objections qu'on peut opposer à ce point de vue sont nombreuses, indépendamment de l'obscurité qui demeure sur la nature ultime des « statements » : s'agit-

il d' « actes » accomplis par un locuteur (actes mentaux au sens de jugements, ou « actes de langage », ou de « contenus » véhiculés par les énoncés (au sens de « propositions » comme signification des énoncés) ? Formulons-en trois : d'abord, le point de vue des « statements » est essentiellement légitimé par l'appel à des exemples tirés du langage ordinaire non-scientifique, où les éléments d'indexicalité (ou « égocentriques ») : « je », « il », « ici », « là-bas », etc., sans compter la référence au moment de l'énonciation présente dans les temps des verbes sont particulièrement nombreux ; l'un des traits des langages scientifiques est la suppression de ces éléments, comme c'est particulièrement le cas en mathématiques, où les énoncés sont des « énoncés éternels » au sens de Quine, i.e. dont toutes les occurrences ont même valeur de vérité. Or c'est l'intention fondamentale des systèmes logiques de refléter et formuler la logique des sciences déductives, bien plus que l'usage naturel du langage. Au reste, un auteur comme Strawson semble parfois prêt à reconnaître que vouloir adapter le système logique à toutes les complexités du langage ordinaire est une entreprise vaine, puisque « les expressions du parler de tous les jours (...) n'ont pas de logique exacte et systématique » (Strawson, 1952, chap. II, § 3).

En second lieu, si des variations de contexte à l'intérieur d'un même argument font craindre des changements de valeur de vérité d'un énoncé d'une occurrence à l'autre, il y a toujours moyen de développer un énoncé en « énoncé éternel » en suppléant les indications de personne laissées implicites par les pronoms, les indications de lieux et de dates, et en neutralisant le temps des verbes par l'usage du présent sans valeur temporelle. Une convention régissant l'application de la logique aux arguments en langage ordinaire sera que même si nous n'effectuons pas jusqu'au bout cette transformation de manière explicite, nous ne ferons correspondre à nos atomes que des énoncés *réputés* avoir une valeur de vérité fixe et déterminée (le lecteur français dispose sur ce point des

analyses éclairantes de Quine, 1941-1965 et de Quine, 1950).

Enfin, du point de vue de l'analyse logique, l'appel aux « statements » n'a aucune valeur simplificatrice, dans la mesure où lors de la traduction, la *forme linguistique* qui nous est donnée ne permet pas à elle seule d'*identifier* l'affirmation réellement faite à travers l'usage de cette forme. Comment décider en présence de l'énoncé :

Si Pierre est venu, il est venu.

si l'affirmation accomplie en faisant usage de l'énoncé est que si Pierre est venu, alors son ami, Jean, ou son chien (« il ») est venu aussi, auquel cas la formule qui traduit cette assertion est $(p \rightarrow q)$, ou si au contraire l'affirmation accomplie est une assertion *logiquement vraie*, i.e. qui doit être représentée par la tautologie $(p \rightarrow p)$? Si bien que de toute façon l'étape de la paraphrase et de l'explicitation sera nécessaire, et du point de vue de l'analyse logique, la distinction entre « statement » et « énoncé éternel » risque de n'être plus que terminologique.

Un autre problème bien connu, et qui affecte l'idée même qu'on doit se faire de ce qu'est la traduction du langage ordinaire dans le système logique, touche aux correspondances qu'on peut établir entre les mots de connexion logique ordinaires : « et », « ou », « si..., alors » etc., et les connecteurs du langage artificiel ; la question concerne en particulier le caractère vérifonctionnel ou non des expressions logiques ordinaires.

L'accord est à peu près général pour considérer que « ne ... pas », « et », correspondent assez bien aux connecteurs $\neg$ et $\wedge$; même un auteur aussi soucieux que Strawson de montrer que « les constantes du système ne peuvent être simplement identifiées quant à leur sens avec les expressions du parler de tous les jours » (Strawson, 1952), reconnaît que l'usage standard de « ne ... pas », comme c'est le cas pour $\neg$, consiste à former le *contradictoire* d'un énoncé donné (il y a cependant des exceptions : « certains cygnes ne sont pas blancs » n'est pas le contradictoire de « certains

cygnes sont blancs »). De même il est généralement admis que la forme p Λ q « est une abstraction à partir des différents usages de la forme p et q, la simple conjonction étant un élément minimal dans la conjonction usuelle » (Strawson, 1952), même si parfois « et » n'est pas strictement vérifonctionnel : alors que (p Λ q) est logiquement équivalent à (q Λ p), il est usuel de faire remarquer que (par exemple) « Marie s'est mariée et a eu un enfant » n'a pas le même sens, i.e. les mêmes conditions de vérité, que « Marie a eu un enfant et s'est mariée », le « et » renforçant la nuance de succession temporelle ou de lien causal suggérée au reste par l'ordre des énoncés. Là encore, cependant, la paraphrase visant à rendre explicites les repères de dates permet de dégager un usage vérifonctionnel de « et » inséré entre deux « énoncés éternels ».

En fait, la discussion se concentre le plus souvent sur la distance qui sépare → de la locution « si ..., (alors) ». Sans vouloir reprendre ici un débat qui en un sens se poursuit depuis Philon de Mégare (d'où le nom d'implication « philonienne » parfois donné à l'implication matérielle), il est peut-être utile de distinguer deux aspects du problème : 1) certains usages du conditionnel (« si ... (alors) ») illustrent la possibilité d'absence de valeur de vérité ("truth-value gaps") d'énoncés ordinaires, au même titre sans doute que les énoncés comportant une description en position de sujet grammatical, description à laquelle ne correspond aucun objet. Plutôt vécu comme « une affirmation conditionnelle du conséquent » (Quine, 1950), un conditionnel ne se verrait attribuer une valeur de vérité déterminée, en l'occurrence le Faux, qu'en cas de vérité de l'antécédent et de fausseté conjointe du conséquent. L'attribution de valeurs de vérité déterminées en particulier pour les cas correspondants aux deux dernières lignes de la table est alors une *décision* motivée par l'exigence de vérifonctionnalité ; et la décision *particulière* qui est adoptée est la seule raisonnable : comme le fait remarquer Kleene (1967), choisir la valeur Faux (et non Vrai) pour les deux dernières lignes de

la table, reviendrait à répéter la table de la conjonction ; choisir la valeur Faux dans la troisième ligne seulement reviendrait à répéter la table de ↔ ; enfin changer Vrai en Faux dans la dernière ligne seulement ferait perdre l'équivalence avec la contraposée, équivalence couramment utilisée pourtant dans nombre de raisonnements usuels (en mathématiques notamment).

2) L'usage habituel de la locution « si..., (alors) » n'est sans doute pas vérifonctionnel au sens suivant : si nous formulons un conditionnel, c'est ordinairement en raison d'une croyance en quelque régularité naturelle qui s'exprime sous la forme d'un *conditionnel général* (ou : *implication formelle*, cf. II[e] partie), ou à titre de prédiction concernant un événement particulier qui peut confirmer, ou infirmer, la loi qui s'exprime dans l'implication formelle. Un entomologiste qui croit en la loi (ou cherche à la vérifier) : « Tous les papillons blancs (d'une espèce donnée) sont des mâles » peut, au moment d'entrer dans son laboratoire, examiner un nouveau spécimen, énoncer : « Si ce papillon est blanc, c'est un mâle. » Si le papillon est blanc, mais se révèle femelle, nous dirons que la prédiction s'est révélée fausse, et du coup que la loi est infirmée ; si par contre le spécimen en question est à la fois blanc et mâle, nous y verrons plutôt motif à augmenter notre confiance en la loi qu'à attribuer une valeur de vérité déterminée au conditionnel proféré. Autrement dit, nous vivons les conditionnels énoncés comme des *instances* de lois générales ou d'implications formelles, explicites ou non. Et en cela réside leur caractère non strictement vérifonctionnel. Mais considérons le cas où, bien que l'antécédent : « ce papillon est blanc », comme le conséquent : « ce papillon est mâle » soient tous les deux vrais, il se révélerait qu'il n'y a aucune connexion entre la propriété d'être blanc et celle d'être mâle ; attribuerons-nous pour cette raison la valeur Faux à la prédiction prise pour exemple ? C'est fort douteux.

C'est pourtant à peu près ce qu'affirme Strawson quand il écrit : « La vérification à la fois de l'antécédent et du conséquent d'une affirmation hypothétique ne

montre pas que le locuteur avait raison ; car le conséquent peut être réalisé en raison de facteurs indépendants de la réalisation de l'antécédent, voire malgré elle. Nous sommes prêts à dire que celui qui a formulé une affirmation hypothétique avait raison, seulement si nous sommes également prêts à soutenir que la réalisation de l'antécédent est, en partie du moins, l'explication de la réalisation du conséquent. » (Strawson, 1952) Il me semble que l'entomologiste, dans le cas qui nous occupe, serait fondé à répondre à Strawson qu'il affirmait simplement qu'on ne trouverait pas à la fois le papillon blanc et non-mâle (ce qui correspond à l'équivalence de $(p \rightarrow q)$ et de $\neg(p \wedge \neg q)$), et que donc dans le cas où le papillon était à la fois blanc et mâle, l'énoncé émis était vrai.

Il va de soi par ailleurs que les occurrences de « si..., (alors) » dans les conditionnels irréels, comme par exemple :

Si Napoléon avait gagné Waterloo, la Restauration n'aurait pas eu lieu.

ne sont clairement pas vérifonctionnelles, et ne peuvent en aucun cas être traduites par $\rightarrow$; car la fausseté reconnue de l'antécédent ne rend pas *ipso facto* vrai l'énoncé tout entier, comme c'est le cas pour l'implication matérielle.

Strawson tente en outre de retourner un argument qui tendrait à « prouver que "si" se comporte parfois comme $\rightarrow$ » contre ceux qui l'invoquent. L'argument consiste à faire valoir qu'un exemple comme :

Si tu as raison, je veux être pendu

atteste la présence de cas d'implication matérielle « pure » dans le langage ordinaire : la fausseté admise d'évidence du conséquent entraînant la fausseté de l'antécédent, conformément à la table de $\rightarrow$, et la locution « si... (alors) » combinant deux énoncés sans connexion entre eux ; l'énoncé composé serait donc véritablement vérifonctionnel.

Strawson répond : « C'est là un étrange morceau de logique (...). C'est l'absence de connexion qui fait de

ce cas une bizarrerie, une fleur de rhétorique, un usage déviant de « si ». Si les affirmations hypothétiques étaient des implications matérielles, cette affirmation ne serait pas une fioriture mais une forme linguistique sobre » (Strawson, 1952). Certes on peut accorder à Strawson qu'il s'agit d'un exemple rare, et en ce sens « déviant », d'implication matérielle ; mais fût-il rare, l'exemple est attesté, et cela suffit à montrer la réalité (exceptionnelle certes) de l'implication matérielle dans l'usage ordinaire du langage. L'argument de Strawson n'atteindrait que celui qui verrait dans de tels exemples le paradigme de l'usage ordinaire de « si » : mais personne à ma connaissance n'a soutenu cette position.

En conclusion : l'application du système logique aux raisonnements usuels ne doit pas nous dissimuler que les fins que nous poursuivons ne sont pas de formuler une sorte de « logique du langage ordinaire ». Comme y insiste Quine, le logicien « se soucie peu de l'inadéquation de la notation logique en tant que représentation de l'idiome ordinaire, pour autant qu'il peut s'en servir pour les besoins particuliers de son programme scientifique, là où sinon il dépendrait de la langue vulgaire » (Quine, 1953[a]).

Les exercices présentés dans le prochain paragraphe ont essentiellement une vertu préparatoire et pédagogique ; cependant, comme on le verra, l'application de la logique peut aussi servir des fins de clarification : elle peut nous aider à nous y retrouver dans une argumentation complexe.

IV.2 ANALYSE D'EXEMPLES

Comme Quine y insiste souvent, « la réduction d'une riche variété de constructions grammaticales et de locutions logiques du langage ordinaire plus ou moins

interchangeables à un minimum standard » (Quine, 1953[a]) est un impératif opératoire. Il est bien connu que les valeurs oppositives de « mais », « bien que », etc., peuvent être négligées au profit d'une traduction uniforme par Λ. D'autres locutions sont peut-être moins claires ; si, paraphrasant l'Analytique de la *Critique de la raison pure*, nous formons l'énoncé :

Un concept est vide de contenu, sauf si un objet donné dans l'intuition lui correspond.

nous pouvons restituer la pensée de Kant ainsi :

Si un objet ne lui correspond pas, un concept est vide,

qui se laisse traduire par :

$$(\neg p \rightarrow q)$$

sous la convention que dans le contexte qui nous occupe, « p » abrège l'énoncé : « Un objet correspond au concept », et « q » : « un concept est vide ». (Il est sans importance que d'un exercice ou d'un contexte à un autre, nous traduisions des énoncés français différents par le même atome : ceci convient bien au sens de l'application de notre langage au langage ordinaire, qui a pour but de faire ressortir la structure logique des énoncés ; par contre la règle est bien sûr à respecter, que dans le contexte d'un même exercice : *différents énoncés sont traduits par des atomes différents, et diverses occurrences du même énoncé sont traduites par le même atome*, à cela près que parfois nous nous accordons le droit de réputer pour synonymes des énoncés légèrement différents !)

En vertu de l'équivalence de :

$$(\neg p \rightarrow q) \quad \text{et de :} \quad (p \vee q)$$

ce choix de traduction revient à décider de considérer la locution « sauf si » comme une variante de « ou » (au sens inclusif). Si nous pensons que la pensée de

Kant est mieux rendue par la conjonction des deux énoncés :

Si un objet ne lui correspond pas, un concept est vide, et si un objet lui correspond, un concept n'est pas vide.

la traduction sera :

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$$

formule équivalente à :

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \quad \text{ou encore à :} \quad \neg(p \leftrightarrow q)$$

et nous aurons en revanche compris « sauf si » comme une variante du « ou » exclusif ; le même problème se pose pour la traduction de « à moins que ». En ce domaine il n'y a évidemment pas de règle formelle : tout dépend de ce que nous pensons être l'interprétation la plus vraisemblable. On peut cependant formuler la maxime de traduction suivante : dans le cadre d'un argument, privilégier l'interprétation qui suffit à la validité de l'argument (si elle existe). Il peut se faire, par exemple, que l'interprétation « minimale » de « sauf si » par le « ou » inclusif suffise à nos besoins. Ce principe est un principe de « charité bien entendue » : prêter à l'autre ce qu'il faut, mais pas plus !

Les locutions usuelles : « B, puisque A », « A, donc B », « A, d'où il s'ensuit que B », ne sont pas des connecteurs combinant entre eux des énoncés ; ces expressions indiquent plutôt qu'une inférence est accomplie à partir d'une prémisse tenue pour vraie (A), et d'une autre prémisse, laissée inexprimée, de la forme : si A, alors B, inférence qui permet de poser B. Une locution comparable est « par conséquent ». Voici cependant un exemple où « donc » est utilisé, non pour signaler la conclusion présentée comme conséquence logique (à tort ou à raison) des prémisses, mais pour affirmer un enchaînement causal qui pourrait être formulé sous la forme hypothétique : si A, alors B.

Pascal critique dans ce passage une forme de raisonnement attribué à son correspondant, le Père Noël :

« Présupposons que cette pierre ait été mise dans un grand feu, dont on l'ait retirée depuis peu de temps ; *donc* cette pierre doit être encore chaude : or elle est chaude ; *par conséquent* elle a été mise au feu. »

Pascal, lettre du 29 octobre 1647 au R.P. Noël.

Le raisonnement que critique Pascal peut se mettre sous la forme : si cette pierre a été mise au feu (p), alors elle est chaude (q) ; or elle est chaude (q) ; par conséquent elle a été mise au feu (p) ; sous les conventions indiquées entre parenthèses, l'adversaire de Pascal affirme que :

$$(p \rightarrow q),\ q \models p$$

inférence manifestement invalide : regardons la distribution de valeur de vérité qui donne à p la valeur Faux, à q la valeur Vrai ; elle satisfait les prémisses, mais pas la soi-disant conclusion. Nous pouvons aussi vérifier que la formule :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

n'est pas une tautologie (cf. Th. 10 et son Corollaire). Moralité : nous ne devons pas nous fier aveuglément à la présence de tel ou tel mot, mais toujours réfléchir à la portée des arguments qui nous sont présentés !

Une autre question qui peut se présenter est celle de savoir quels énoncés usuels doivent être tenus pour « simples », autrement dit quels énoncés doivent être traduits par des atomes. Nous pouvons être tentés de penser que par exemple l'énoncé :

Descartes croyait que la vitesse de la lumière est instantanée

doit être tenu pour complexe *du point de vue* de l'analyse logique que nous pouvons en faire, au même titre que l'énoncé :

Si la lumière n'est pas un corps, sa vitesse est instantanée.

Il n'en est rien, comme la confrontation des deux inférences suivantes le fait ressortir :

(I) Si la lumière n'est pas un corps, sa vitesse est instantanée ; la vitesse de la lumière est instantanée si et seulement si l'observation de Römer concernant les satellites de Jupiter est inexacte ; donc si la lumière n'est pas un corps, l'observation de Römer est inexacte.

(II) Descartes croyait que la vitesse de la lumière est instantanée ; la vitesse de la lumière est instantanée si et seulement si l'observation de Römer est inexacte ; donc Descartes croyait que l'observation de Römer est inexacte.

(I) est valide, mais (II) bien sûr ne l'est pas ; plus précisément (II) montre que le contexte « Descartes croyait que » n'est pas extensionnel (ou vérifonctionnel), au sens où le remplacement de l'énoncé : « La vitesse de la lumière est instantanée » par un énoncé de même valeur de vérité ne laisse pas inchangée la valeur de vérité de l'énoncé initial (du Vrai on est passé au Faux !). Comme nos modes de composition sont strictement vérifonctionnels, il est hors de question de tenter de représenter la complexité de : « Descartes croyait que la vitesse de la lumière est instantanée » ; cet énoncé tout entier doit être (le cas échéant) traduit par un atome.

Voici deux exemples d'arguments philosophiques, où l'analyse logique contribue à distinguer clairement la question de la *validité logique* de l'argument, de la question de sa valeur philosophique (qui touche à la vérité du contenu des prémisses, vérité sur laquelle la logique n'a évidemment pas de prise) ; les conventions

de traduction des énoncés tenus pour simples sont indiquées entre parenthèses.

Le premier est un raisonnement de Pyrrhon contre la notion de causalité, et nous est rapporté par Diogène Laërce :

« S'il y a une cause (p), alors ou un corps peut être cause d'un autre corps (q), ou les causes sont incorporelles (r). Mais si deux corps sont de même nature (s), comme en effet ils le sont, un corps ne peut être cause d'un autre corps. D'autre part, si les causes sont incorporelles, ou elles sont causes d'incorporels (t), ou elles sont causes de choses corporelles (u). Mais le premier est impossible, et un incorporel ne peut être cause d'un corps. Donc il n'y a pas de cause. »

Les lettres « t », « u », ne sont pas une modification de notre langage, mais sont des abréviations utiles de (par exemple) « p_1 », « p_2 », qui nous évitent d'utiliser les indices. La clause « comme en effet ils le sont » doit être comprise comme l'affirmation par Pyrrhon de la vérité de l'antécédent « deux corps sont de même nature » dans l'implication dont « un corps ne peut être cause d'un autre corps » est le conséquent. L'énoncé : « le premier est impossible » peut être tenu pour affirmant la négation de « elles sont causes d'incorporels », bien que ce faisant nous effacions la nuance modale (les contextes « il est possible que, impossible que, nécessaire que », etc., relèvent des mêmes considérations que « A croit que »). Moyennant ces décisions raisonnables, on peut représenter ainsi l'argument pyrrhonien ; les prémisses deviennent les formules :

$$\{p \rightarrow (q \vee r), (s \rightarrow \neg q) \wedge s, r \rightarrow (t \vee u), \neg t \wedge \neg u\} = \Sigma$$

que Pyrrhon tient pour vraies pour des raisons qui dépassent le cadre de la logique, et Pyrrhon prétend en outre que :

$$\Sigma \models \neg p$$

affirmation qui, elle, concerne la logique et que le logicien peut vérifier.

Un deuxième exemple permettra au lecteur de se familiariser avec ce type d'analyse ; il s'agit d'un argument théologique emprunté à Aristote (*Métaphysique*, Λ 9) :

« Ou bien l'Intelligence divine pense (p), ou bien elle ne pense rien. Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil (q), mais c'est là chose contraire à sa dignité. Par ailleurs, si elle pense, alors ou elle se pense elle-même (r), ou elle pense quelque autre chose (s). Mais il est absurde qu'autre chose soit l'objet de sa pensée. Donc elle pense, et elle se pense elle-même. »

Là encore, la clause « c'est là chose contraire à sa dignité » peut être comprise comme une affirmation (motivée) de « elle n'est pas dans un état semblable au sommeil », i.e. de « $\neg q$ » ; et « il est absurde » peut être traité comme tout à l'heure « il est impossible ». Si bien que les prémisses deviennent après traduction :

$$\{p \vee \neg p, (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q, p \rightarrow (r \vee s), \neg s\} = \Sigma$$

et Aristote affirme en outre que :

$$\Sigma \models (p \wedge r)$$

Une fois le moment délicat de l'analyse et de la traduction accompli, nous pouvons utiliser les techniques de décision pour la validité présentée dans les chapitres précédents : tables de vérité, formes normales après utilisation éventuelle du Théorème de la déduction (II.10). La réponse du test permet de conclure à la validité (ou non) de l'argument correspondant *sous l'analyse* qui en a été accomplie.

Cette restriction devient particulièrement importante dans les cas de raisonnements qu'on est fondé à traiter comme des *enthymèmes*, i.e. des arguments où certaines prémisses restent implicites (parce que l'auteur les

tient pour obvies, ou estime que d'après le contexte le lecteur sera en mesure de les rétablir). Nous n'en donnons ici qu'un exemple simple (le lecteur français pourra se reporter sur ce point à Kleene, 1967). Dans la Troisième *Méditation*, Descartes raisonne à peu près comme suit :

> « Encore que l'idée de la substance soit en moi (p), si l'idée d'une substance infinie n'a pas été mise en moi par une substance infinie (q), je ne peux avoir l'idée d'une substance infinie (r). Par conséquent il faut nécessairement conclure que Dieu existe (s). »

Nous pouvons en extraire après traduction :

$$p \wedge (\neg q \rightarrow \neg r) \models s$$

où manifestement les prémisses n'impliquent pas (tauto)logiquement la conclusion. En rester là ne rendrait cependant pas justice au texte cartésien. Nous sommes fondés à penser, au vu des pages qui précèdent, que Descartes prend pour accordées les deux prémisses :

J'ai (ou : je peux avoir) l'idée
d'une substance infinie ;
Si l'idée d'une substance infinie
a été mise en moi,
alors Dieu existe.

Ainsi complété, l'argument se laisse représenter ainsi :

$$p \wedge (\neg q \rightarrow \neg r),\ r,\ q \rightarrow s \models s$$

où cette fois les prémisses impliquent (tauto)-logiquement la conclusion.

La méthode des arbres de vérité (du point de vue sémantique)

Le lecteur peut trouver peu maniables les procédures de décision présentées jusqu'ici, et en un sens il a raison : une table de vérité pour l'implication extraite de l'argument de Pyrrhon, par exemple, comporterait 64 lignes ! A titre de consolation, nous introduisons de manière informelle la « méthode des arbres » considérée comme méthode de construction de « tableaux sémantiques » : nous ne justifierons la méthode en question que par des considérations sémantiques intuitives. Le lecteur trouvera dans la II[e] partie une preuve de complétude de la méthode des arbres (pour le calcul des prédicats) conçue comme système formel de dérivations. Ce double point de vue sur la méthode des arbres a l'intérêt, en outre, de mettre en lumière son caractère naturel.

L'idée de base de la méthode est simple : d'après le Lemme II.9, savoir si oui ou non un ensemble Σ de formules implique φ revient à savoir si oui ou non l'ensemble Σ ; $\neg\varphi$ admet un modèle : la méthode des arbres revient à chercher de manière systématique un *contre-exemple*, i.e. une distribution de valeur de vérité satisfaisant les prémisses et la négation de la conclusion : si une telle distribution existe, il y a au moins un cas où les prémisses sont vraies et la conclusion fausse, et donc les prémisses n'impliquent pas la conclusion ; si par contre il n'en existe pas, les prémisses impliquent (tauto)logiquement la conclusion (Σ ; $\neg\varphi$ n'a pas de modèle : pas de contre-exemple).

Que veut dire « systématique » ici ? Essentiellement que nous éliminons d'emblée les cas inintéressants, i.e. les cas où les prémisses sont fausses. Mais comme l'examen des distributions de valeur de vérité ne permet pas en général d'apercevoir celles qu'il faudrait exclure parce qu'elles donnent aux prémisses la valeur Faux, nous procédons « à l'envers », « d'en haut » plutôt que « d'en bas » : nous considérons les formules complexes et explorons leurs conditions de vérité : ce qui revient à analyser les formules en leurs sous-formules, jusqu'à pouvoir déterminer si ces conditions de vérité sont *compatibles*, i.e. si elles ne donnent pas à un même atome à la fois la valeur Vrai et la valeur Faux.

Un exemple simple montrera l'élégance de la méthode :

On veut savoir si oui ou non :

$$(p \rightarrow \neg q), (\neg r \rightarrow p) \models (q \rightarrow r) ?$$

Un contre-exemple serait un cas où les prémisses seraient vraies et la conclusion fausse : nous posons donc les prémisses et la *négation* de la conclusion et cherchons à savoir si ces formules peuvent être vraies ensemble :

$$(p \rightarrow \neg q) \quad (1)$$

$$(\neg r \rightarrow p) \quad (2)$$

$$\neg(q \rightarrow r) \quad (3)$$

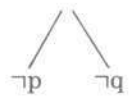
Ces trois formules sont dites *racines* de l'arbre ; puis nous explorons leurs conditions de vérité : la formule de la ligne (3) est vraie dans le seul cas où à la fois q est vrai et r est faux : nous l'indiquons en écrivant sous les formules déjà écrites :

$$q \quad (4)$$

$$\neg r \quad (5)$$

(Les arbres sont des tableaux « one-sided », i.e. la fausseté d'une formule est représentée par l'inscription de sa négation.) La formule de la ligne (1) est vraie

dans le cas où p est faux, ou dans le cas où $\neg q$ est vrai : nous l'indiquons en ouvrant une branche (ou un embranchement) et en inscrivant ces deux cas de vérité :



(6)

Enfin la formule de la ligne (2) est vraie dans le cas où $\neg r$ est faux, ou dans le cas où p est vraie : nous l'indiquons par un nouvel embranchement sous *chacun* des *chemins* issus de l'étape précédente :

(7)

Finalement il n'y a plus de formule à *traiter*, i.e. nous avons analysé les conditions de vérité des formules racines jusqu'aux valeurs de vérité des atomes ; nous obtenons l'arbre :

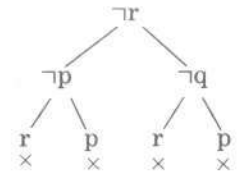
$$(p \rightarrow \neg q) \quad (1)$$

$$(\neg r \rightarrow p) \quad (2)$$

$$\neg(q \rightarrow r) \quad (3)$$

$$q \quad (4)$$

$$\neg r \quad (5)$$



(6)

(7)

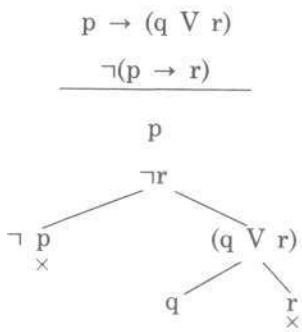
Les croix inscrites sous chacun des chemins indiquent le fait que dans cet exemple, sur chaque chemin figure un atome et sa négation, i.e. que l'atome en question devrait être à la fois vrai et faux, ce qui est impossible :

d'un tel chemin nous disons qu'il est *clos*, et un arbre dont tous les chemins sont clos est dit lui-même clos.

Nous avons recherché toutes les possibilités pour les formules d'être simultanément satisfaites : si un chemin est clos, cela signifie que la possibilité qu'il tente de représenter n'existe pas ; si tous sont clos, qu'il n'y a aucune possibilité, i.e. pas de contre-exemple à l'inférence testée.

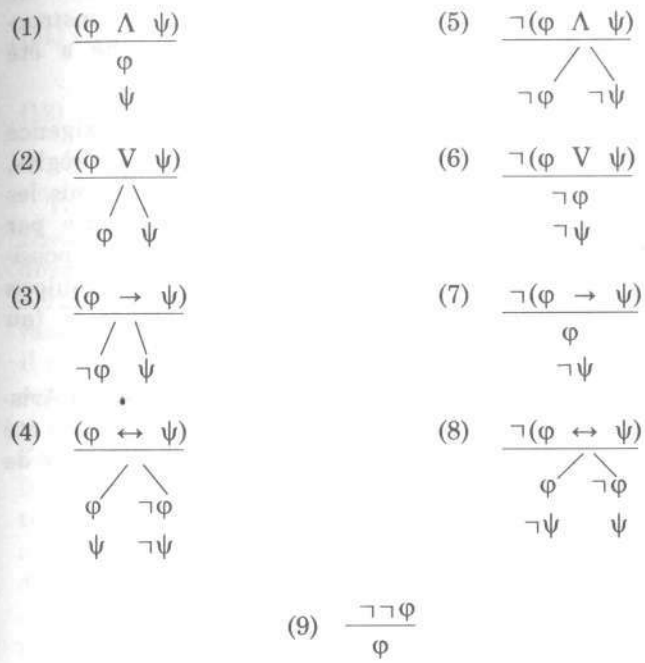
Voici à présent un exemple où le test échoue, parce qu'il se trouve qu'il y a (au moins) un chemin *ouvert* : nous pouvons lire sur le(s) chemin(s) ouvert(s) une « histoire » (Jeffrey, 1967), i.e. une distribution qui satisfait les formules racines : c'est là notre contre-exemple !

Est-il vrai que : $p \rightarrow (q \vee r) \vDash (p \rightarrow r)$?
L'arbre achevé sera :



A la ligne (5) est traitée la formule de la ligne (1) ; sur le premier chemin à gauche, on lit des conditions de vérité incompatibles, et de même sur le dernier chemin à droite. Par contre le chemin intermédiaire esquisse une distribution de valeurs de vérité dont nous pouvons vérifier, en donnant à p et à q la valeur Vrai, et à r la valeur Faux, qu'elle satisfait les prémisses et donne la valeur Faux à la conclusion : $(p \rightarrow r)$ n'est donc pas conséquence (tauto)logique de $p \rightarrow (q \vee r)$.

De façon générale, le choix des sous-formules que nous inscrivons quand nous analysons les conditions de vérité d'une formule située « plus haut » sur un chemin est motivé par la table de vérité du connecteur principal de la formule que nous traitons ; on peut codifier ces règles d'inscription (qui deviendront, quand la méthode des arbres sera reformulée en méthode de preuve pour la dérivabilité, des règles d'inférence proprement dites) sous forme du tableau suivant :



(9) $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$

Nous avons fait l'économie de cette dernière règle, dans la construction du premier arbre, quand à la ligne (7) nous avons directement inscrit r pour indiquer le cas où ¬r est faux : dans la pratique, il est habituel d'omettre les doubles négations.

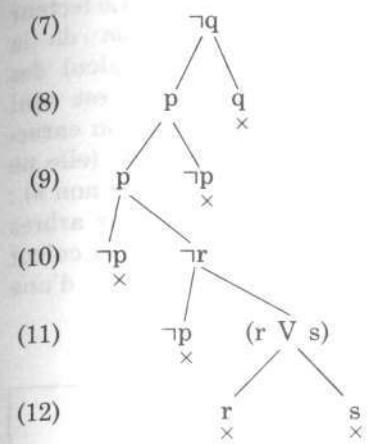
Du point de vue de la rapidité des calculs, il est aussi possible de « fermer » un chemin (en inscrivant une croix, et en cessant d'y inscrire de nouvelles formules) dès qu'apparaissent un atome et sa négation : car dès lors la possibilité explorée par le chemin s'avère inexistante ; par exemple, toujours dans le premier arbre, dès la ligne (6) il était possible de fermer le chemin le plus à droite, où figuraient déjà q et ¬q.

Enfin, dans un test de validité, dès qu'un chemin achevé, i.e. sur lequel toutes les formules ont été traitées, *ouvert*, est trouvé, on peut arrêter la construction de l'arbre : le contre-exemple recherché a été découvert.

On ne saurait cependant assez insister sur l'exigence d'inscrire les sous-formules indiquées par les règles, lors du traitement d'une formule donnée, sur tous les chemins (ouverts à cette étape) qui « passent » par cette formule : car chaque chemin esquisse une possibilité de vérité des formules racines, et nous voulons explorer *toutes* ces possibilités pour vérifier si (au moins) l'une d'elles se confirme.

Vérifions à présent la validité de l'argument d'Aristote, (cf. p. 127) relativement à l'analyse qui en a été faite, par la méthode des arbres ; la construction de l'arbre donnerait le résultat suivant :

(1)	$p \vee \neg p$	
(2)	$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q$	
(3)	$p \rightarrow (r \vee s)$	
(4)	$\neg s$	
(5)	$\neg(p \wedge r)$	nég. de la conclusion
(6)	$(\neg p \rightarrow q)$	à partir de 2 par règle (1)



(8) à partir de 6 par (3)
(9) à partir de 1 par (2)
(10) à partir de 5 par (5)
(11) à partir de 3 par (3)
(12) à partir de 11 par (2)

Tous les chemins sont clos (nous avons « fermé » les chemins au fur et à mesure qu'une impossibilité devenait manifeste, i.e. un atome et sa négation) ; le dernier chemin sur la droite est également clos en raison de la présence de ¬s dans les prémisses (ligne 4) ; il n'y a pas de contre-exemple et l'inférence d'Aristote est donc valide.

Le lecteur notera (et éventuellement vérifiera) que l'arbre n'est pas unique, au sens où à partir des mêmes formules racines, un autre choix dans l'ordre de traitement des formules aurait conduit à un autre arbre (plus long) ; le choix effectué ici est motivé par des considérations pragmatiques de rapidité : par exemple, la conjonction de la ligne 2 a été traitée en premier parce que selon la règle (1), une conjonction ne « branche » pas. De manière générale, on a intérêt à retarder le plus longtemps possible l'apparition d'embranchements.

Nous prétendons cependant (sans le démontrer ici) que tous les choix reviennent finalement au même, au sens où le résultat du test sera le même quel que soit

l'ordre dans lequel les formules sont traitées. Le lecteur trouvera une démonstration de l'*adéquation* de la méthode des arbres, élargie au cadre du calcul des prédicats, dans la II[e] partie (chap. VIII). Il est vrai qu'ainsi élargie la méthode des arbres perd son caractère de procédure de décision pour la validité (elle ne répond pas nécessairement par « oui » ou par « non ») : mais il est facile d'extraire de la méthode des arbres en calcul des prédicats une méthode adaptée au calcul des énoncés dont on peut prouver qu'il s'agit d'une méthode de décision.

Exercice

Prouver par la méthode des arbres la validité de l'inférence de Pyrrhon ; comment la méthode peut-elle être adaptée pour décider si une formule est une tautologie ?

Deuxième partie

Logique du premier ordre

« Un langage formulaire [...] propre à l'expression d'un contenu : c'est là précisément mon intention. »

G. Frege, « Sur le but de l'Idéographie », *in Écrits logiques et philosophiques*, Seuil.

CHAPITRE V

Langages du premier ordre

V.1 TRADUCTION ET PARAPHRASE

A cause de la pauvreté des structures logiques qu'il est à même de représenter, le langage introduit dans la première partie est clairement inadéquat : même la validité d'inférences aussi simples que les inférences syllogistiques correctes ne peut y être établie. La raison en est que l'analyse n'a pas poussé assez loin à l'intérieur des énoncés pour capter la valeur des *expressions de généralité* ; un exemple simple aidera à saisir ce point.

Considérons l'énoncé mathématique :

> S'il y a un nombre supérieur à tout nombre, alors pour tout nombre il en existe un qui lui est supérieur.

Moyennant une convention de traduction évidente, la formule correspondante dans $\mathscr{L}_p$ sera :

$$(p \rightarrow q)$$

qui n'est pas une tautologie. Pourtant l'énoncé initial est logiquement vrai, ou, en un sens à préciser, *valide* ; ce n'est pas seulement que, si nous pensons par exemple à l'ensemble **N** des nombres entiers et au sens de « supérieur », l'antécédent de l'implication est faux (et

à vrai dire, doublement faux : car même s'il y avait un plus grand nombre, il ne serait pas supérieur à lui-même !), si bien que l'énoncé tout entier est vrai. En fait, les notions de « nombre » et de « supérieur » sont sans incidence ici : de quelque manière que nous *interprétions* ces mots, nous aurons un énoncé vrai ; nous pouvons penser, pour l'instant, ces interprétations variées comme l'équivalent de l'opération plus familière de substitution : ainsi, si nous substituons à « nombre » le mot « homme », et à « supérieur à » le mot « aime », nous obtenons l'énoncé vrai :

S'il y a un homme (qui) aime tout homme, alors pour tout homme il en existe un qui l'aime.

(nous reviendrons ultérieurement sur cette notion d'interprétation pour définir la validité logique). Il suffit pour l'instant de remarquer que la validité de l'énoncé pris comme exemple repose sur l'ordre dans lequel apparaissent, dans l'antécédent et dans le conséquent respectivement, les expressions de généralité (parfois dites « quantificateurs usuels ») : « il y a », « il existe », « pour tout ».

Les langages du premier ordre que nous allons considérer ont essentiellement pour but de représenter de manière concise et uniforme ces expressions et leurs relations : pour cette raison, on parle souvent, à propos de cette partie de la logique, de *théorie de la quantification*.

Dans les paragraphes qui suivent, nous expliquons la notation « canonique » pour la logique du premier ordre à partir d'une analyse d'énoncés en langage ordinaire (ou semi-ordinaire quand il s'agit d'énoncés mathématiques). Ce renversement par rapport à l'ordre adopté dans la I^re^ partie se justifie par la plus grande complexité des tournures que nous voulons représenter. Nous décrirons ensuite la structure générale des langages du premier ordre, dont la motivation aura été ainsi clarifiée.

On peut considérer comme une construction de base la *prédication* qui assemble un *terme singulier* (« Socrate », « ceci », « 2 », etc.), et un *terme général* (« homme », « rouge », « impair », etc.) pour former un énoncé qui sera vrai ou faux selon que le terme général est vrai ou faux *de* l'objet auquel réfère le terme singulier ; ou, pour le dire dans un registre plus riche en implications ontologiques, selon que la *propriété* désignée par le terme général est vraie ou fausse (est possédée par) de l'objet en question. Exemples :

Socrate est un homme
Ceci est rouge
2 est impair

Une première simplification consistera à omettre la différence entre les formes substantives, adjectives, et verbales des termes généraux, et à imiter la forme verbale de la prédication dans la mesure où elle ne requiert pas l'appareil auxiliaire de « est » ou « est un » ; ainsi, sur le modèle de :

Théétète vole

les énoncés précédents se noteront :

Fa Gb H2

(par exemple) ; « a » sera compris comme jouant le rôle d'un terme singulier, et plus précisément d'un *nom propre*, c'est-à-dire d'un terme singulier qui n'est ni un déictique (pour des raisons analogues à celles évoquées au chap. IV, p. 116), ni une *description définie* (« le vaincu de Waterloo », « l'étoile du soir », dans la mesure où la complexité de ces expressions peut être représentée dans un langage assez riche). Et les majuscules « F », « G », etc., seront comprises comme jouant le rôle des termes généraux. Si bien que l'écriture « Fa », par exemple, se lira aussi bien ;

a est un F
a est F

a possède la propriété F

A côté des termes généraux *absolus*, le langage ordinaire use de termes généraux *relatifs* : « aime », « précède », « est supérieur à », qui doivent être complétés par deux noms propres pour former un énoncé complet, i.e. doué d'une valeur de vérité :

Desdémone aime Cassio
4 est supérieur à 2

Le symbole arithmétique « > » peut être conçu comme un terme relatif (ou symbole de relation) puisque le dernier énoncé se présentera souvent sous la forme :

$4 > 2$

Dans la mesure où il faut deux noms propres pour former un énoncé complet à partir d'un terme relatif de la catégorie qu'on vient de considérer, on dira volontiers qu'un tel terme comporte deux places vides (à remplir éventuellement par deux noms propres). Corrélativement, de même qu'un terme général absolu est vrai (ou faux) d'un objet, on dira qu'un terme général relatif est vrai (ou faux) d'un objet relativement à un autre, ou mieux d'une *paire ordonnée* d'objets ; ainsi « aime » est vrai de la paire : (Desdémone, Othello), et probablement faux de la paire : (Desdémone, Cassio) ; et « est supérieur à » est vrai de la paire (ordonnée, ou couple) : (4,2), mais faux de la paire (2,4).

On doit également reconnaître l'existence de termes relatifs ternaires (ou « triadiques »), i.e. à trois places vides, par exemple dans les énoncés :

Pierre donne *Principia Mathematica* à Paul
Le point A est entre B et C.

Dans la symbolisation arithmétique usuelle, le symbole de relation s'écrit entre les deux noms propres ou *constantes*, comme on le voit dans l'énoncé : « $4 > 2$ » ; mais comment représenter un énoncé mettant en jeu

un terme général ternaire ? Dans un souci d'unification de la notation, nous mettrons toujours en tête la lettre majuscule qui tient lieu de terme général, suivie des lettres qui font office de noms propres, quel que soit leur nombre (ce qui justifie après coup l'écriture « Fa » dans le cas d'un terme absolu). Nous écrirons donc :

Rab
Sabc

pour, respectivement :

Desdémone aime Cassio
Le point A est entre B et C.

Nous voulons avoir de plus la possibilité de représenter des termes relatifs d'*arité* quelconque, i.e. à un nombre quelconque de places vides ; nos lettres majuscules seront donc comprises comme comportant 1, 2, ..., n places, ce que nous pourrons éventuellement expliciter par un indice « en haut » accompagnant la lettre :

F^1, R^2, S^3, etc.

Remarquons enfin que notre notation convient à des cas où ce qui est dit d'un objet ne se laisse pas exprimer par un terme général disponible dans le langage ordinaire, mais requiert une expression complexe ; ainsi :

Socrate est le plus subtil argumentateur
de tous ses contemporains

peut se représenter par « Pa », où « P » représente « est le plus subtil argumentateur de tous ses contemporains ». Que nous disposions ou non d'un terme général, nous parlerons, à propos de ce qui reste d'un énoncé après omission d'un ou plusieurs noms propres, de *prédicat* ; et dans la catégorie des prédicats, nous distinguerons les prédicats *unaires, binaires, ternaires,* etc. A propos des lettres majuscules nous

parlerons de *lettres de prédicat* d'arité diverse. Cet usage du mot « prédicat » ne doit pas être confondu avec l'usage traditionnel qui concernait l'analyse d'énoncés plus complexes que les énoncés « singuliers » seuls considérés jusqu'à présent : les énoncés généraux dont nous allons bientôt nous occuper. Il trouve plutôt son origine dans l'analyse frégéenne des énoncés en signe d'argument, et signe de fonction, telle qu'elle est introduite au § 9 de la *Begriffsschrift* de 1879. Nous allons voir que nos lettres de prédicat, avec leurs places vides ou *places d'argument*, sont particulièrement bien adaptées à l'expression de la généralité, moyennant l'usage des *variables*.

Un terme *indéfini* : « un homme », « tout nombre », etc., peut apparaître dans les énoncés ordinaires à des places appropriées à des noms propres ; ainsi à côté de :

Socrate est sage
2 est premier

on trouve des énoncés comme :

Un homme est sage
Un nombre est premier.
Tout nombre est divisible par lui-même.

Un terme indéfini est le plus souvent construit à partir d'un terme général (« homme », « nombre ») précédé d'un « applicateur » : « un », « certain », « quelque », « tout »,... (il y a cependant des exceptions : pensons à « quelqu'un »...). Dans les contextes simples, comme les énoncés ci-dessus, les termes indéfinis présentent une certaine parenté avec les noms propres : précisément, ils peuvent figurer à des places appropriées à des noms propres ; en fait c'est là une impression trompeuse, et on est en présence d'une structure logique différente : un exemple simple (il y en a d'autres, comme le comportement dans la pronominalisation)

illustrera l'essentielle différence entre les noms propres et les termes indéfinis. Les deux énoncés :

(1) 2 précède 4
(2) 4 est précédé par 2

sont équivalents ; et il en est ainsi pour des énoncés où figurent un terme relatif reliant deux noms propres et qui ne se distinguent que par le renversement de l'actif en passif (et la modification corrélative de l'ordre des noms propres). Or il n'en est plus de même avec des termes indéfinis ; les deux énoncés :

Un instant (du temps) précède tout instant
Tout instant est précédé par un instant.

qui grammaticalement sont dans la relation de (1) et (2), loin d'être équivalents, présentent les termes d'une antinomie de la raison pure concernant le temps (cet exemple avait frappé Russell en 1903).

En supprimant la ressemblance trompeuse de construction, la notation canonique « contribue à la pensée claire » (Quine) ; un énoncé comme :

Un homme est sage

sera paraphrasé selon la tournure :

Il existe un (objet) x tel que x est un homme
et x est sage.

qui sera traduit en notation symbolique :

$$\exists x\ (Hx \wedge Sx)$$

Méditons sur cet exemple : la paraphrase de l'énoncé usuel (qui est le moment crucial de l'analyse) a pour effet :

1) D'expliciter l'affirmation d'existence contenue dans l'énoncé, qui est vrai *ssi* il existe (au moins) un objet satisfaisant les conditions d'être un homme et d'être sage.

2) De décomposer le terme indéfini spécifique à chaque contexte (« un homme », « un nombre », etc.)

de sorte qu'un même *quantificateur* apparaît uniformément en tête des énoncés (« il existe un [objet] x tel que... », ou « ∃x »), le terme général étant renvoyé en position prédicative (« ... x est un homme ») comme le prédicat « est sage ». La notation canonique n'utilise ainsi que deux quantificateurs : « ∀ », qu'on lira « pour tout », ou « quel que soit », et « ∃ » ; en fait un seul suffit, en raison de leur interdéfinissabilité *via* la négation :

Il existe un (objet) rouge

est clairement équivalent à :

Ce n'est pas le cas que tout (objet) n'est pas rouge

et en raison de cette équivalence, « ∃x » peut être conçu comme une abréviation (introduite par définition) de « ¬∀x ¬ » (nous utiliserons ultérieurement cette possibilité).

3) D'introduire une *variable*, la lettre « x », dont le retour en diverses occurrences montre que c'est du même objet que différentes propriétés sont affirmées ; plus précisément, les deuxième et troisième occurrences de la lettre « x » dans l'énoncé *renvoient*, à la manière de *pronoms*, à la première occurrence de « x » qui suit immédiatement « ∃ » : une paraphrase alternative de :

Un homme est sage.

pourrait être :

Il existe un (objet) qui est un homme
et qui est sage.

L'avantage des variables pour clarifier les *renvois de référence* apparaîtra plus clairement en relation avec la généralité multiple, i.e. les contextes où plusieurs quantificateurs sont imbriqués l'un dans la portée de l'autre ; mais leur nature essentiellement *pronominale* ne doit pas être oubliée.

On dira que dans :

∃x (Hx ∧ Sx)

le quantificateur *lie* les trois occurrences de la lettre « x » ; on dira aussi que « x » figure ici comme *variable liée.*

Alors que l'énoncé :

Socrate est venu et est parti

peut être tenu pour une abréviation de :

Socrate est venu et Socrate est parti

ou :

(Va ∧ Pa),

Quelqu'un est venu et est parti

n'est pas équivalent à :

Quelqu'un est venu et quelqu'un est parti

Cette différence se reflète clairement dans la notation logique en terme de différence dans la liaison des variables par les quantificateurs ; dans :

∃x (Vx ∧ Px)

les différentes occurrences de « x » sont liées par le même quantificateur, alors que ce n'est pas le cas dans la traduction correcte du deuxième énoncé :

∃x Vx ∧ ∃x Px

Le retour de la même lettre « x » dans les deux composants de la conjonction ne signifie nullement (bien que cela ne soit pas exclu des conditions de vérité de l'énoncé !) qu'il s'agit de la même personne, parce que les deuxième et quatrième occurrences de « x » sont liées par deux quantificateurs différents.

On voit, d'ores et déjà, qu'il nous faudra des règles de formation précises pour distinguer :

∃x (Vx ∧ Px)

où la *portée* de « ∃ », i.e. la partie de l'énoncé où les occurrences de variables sont liées par « ∃ », est le

fragment entre parenthèses, de :

$$\exists x\ Vx \wedge Px$$

où la portée de « ∃ » est seulement le fragment « Vx » ; dans la partie « Px » au contraire, l'occurrence de « x » est *libre*, i.e. non liée, comparable en cela à un pronom dont la référence serait laissée en suspens. A la différence de l'expression « ∃x Vx », qui peut être tenu pour l'équivalent d'un énoncé, i.e. soit vrai, soit faux, la partie « Px » à elle seule n'est pas un énoncé (pas plus que « il est parti », tant que la référence de « il » n'est pas autrement précisée). On parle à propos de ce type d'expression d'*énoncé ouvert* (au prix d'un certain abus de langage), moins souvent mais plus correctement de *forme d'énoncé*, parce qu'une telle expression est susceptible de donner lieu à un énoncé (par remplacement de « x » par une constante, ou en préfixant un quantificateur). L'appellation russellienne de *fonction propositionnelle*, qui, au moins dans un de ses usages, correspondait à cette notion d'énoncé ouvert, n'est plus guère usitée (sans doute en raison des ambiguïtés dont elle était porteuse sous la plume de Russell).

Nous en venons à présent à la justification de l'usage des *conditionnels généralisés* (ou *implications formelles*) comme traduction des énoncés traditionnellement identifiés comme énoncés *universels* : par exemple les énoncés du type A, ou universels affirmatifs, comme : « Tous les hommes sont mortels », ou : « Tout homme est mortel ». L'un ou l'autre de ces énoncés signifie clairement la même chose que :

(1) Il n'y a pas d'homme qui ne soit pas mortel

L'énoncé (1) quant à lui est la négation de :

(2) Il y a des hommes qui ne sont pas mortels

que nous savons déjà traduire en :

(2′) $$\exists x\ (Hx \wedge \neg Mx)$$

Puisque (1) est la négation de (2), la négation de (2′) peut être tenue pour une traduction correcte de (1), soit :

(1′) $$\neg\ \exists x\ (Hx \wedge \neg Mx)$$

Manifestement, « ce n'est pas le cas qu'il y ait un x tel que... » a même sens que : « quel que soit x, ce n'est pas le cas que... » (cette synonymie peut s'exprimer sous forme d'une *règle de passage* de la négation de part et d'autre d'un quantificateur). (1′) peut donc se réécrire de manière équivalente :

(3) $$\forall x\ \neg(Hx \wedge \neg Mx)$$

Mais si nous pensons à présent au calcul des énoncés, et admettons les énoncés ouverts « Hx », « Mx », etc., à titre de quasi-énoncés, comme composants possibles de formules (en un sens élargi) à côté de p, q, etc., le fragment :

$$\neg(Hx \wedge \neg Mx)$$

est lui-même équivalent à :

$$(Hx \rightarrow Mx)$$

si bien que (3) peut être réécrit en :

(4) $$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$$

Les formules de ce type, ou implications formelles, sont les traductions canoniques des énoncés universels de la forme : « Tous les A sont B. »

REMARQUE

Admettre la succession des paraphrases qu'on vient de proposer revient à considérer que l'énoncé : « Tous les hommes sont mortels » est faux dans l'*unique cas* où (2) est vrai, i.e. dans le cas où il existe au moins un objet qui est homme et n'est pas mortel. En particulier, s'il n'existe pas d'homme du tout, (2) est faux, donc (1) est vrai, ce qui correspond bien aux

conditions de vérité de (4) ; de même « tous les hommes sont mortels » doit être réputé vrai au cas où il n'y a pas d'homme du tout. De même, l'énoncé : « tous les habitants de la lune sont verts » est vrai ; de même encore, on montre dans un manuel élémentaire de Théorie des ensembles que l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble, i.e. que : $\emptyset \subset X$, pour tout X, en faisant remarquer que l'implication formelle qu'il faut démontrer : $\forall x\ (x \in \emptyset \rightarrow x \in X)$, est « trivialement » vraie. Cette analyse des énoncés universels peut paraître paradoxale, et ne pas tenir compte d'une intention de présupposition d'existence qui accompagnerait l'émission en parler normal de tels énoncés ; mais elle l'est certainement moins qu'une analyse qui reviendrait à refuser les équivalences proposées ci-dessus.

Nous pouvons à présent nous attaquer à la traduction d'énoncés comportant des quantificateurs emboîtés, en suivant une maxime d'analyse progressive en constituants, des grandes structures externes vers l'intérieur. Reprenons l'énoncé :

Un instant précède tout instant.

Une première étape dans la paraphrase va donner :

Il existe un (objet) x tel que x est un instant
et x précède tout instant.

Dans un deuxième temps, nous pouvons paraphraser l'énoncé ouvert : « x précède tout instant » :

pour tout y, si y est un instant, x précède y

et moyennant des conventions sur le choix des lettres de prédicat qui seront évidentes pour le lecteur, nous obtenons la traduction :

$$\exists x\ (Mx \wedge \forall y\ (My \rightarrow Pxy))$$

A la réflexion, cette formule peut paraître inutilement lourde, dans la mesure où nous faisons figurer chaque fois la clause : « x (ou y) est un instant », qui peut-être est sans incidence sur la tâche engagée (par

exemple, s'il s'agit de tester la validité d'une inférence où tous les énoncés concernent les moments du temps, si bien que cette propriété d'être un instant n'intervient pas dans le raisonnement : elle fixe plutôt l'*univers du discours*). Dans ce cas, nous conviendrons de supprimer cette clause, en stipulant par ailleurs que les variables « x », « y », etc., doivent être comprises comme « prenant leurs valeurs dans l'univers ou le *domaine* » des instants du temps ; et les quantificateurs seront compris comme signifiant, respectivement : « il existe un instant x », « pour tout instant y », i.e. comme renvoyant, non pas à la totalité de toutes les choses absolument parlant (à supposer qu'une telle totalité existe !), mais précisément à ce domaine des valeurs possibles des variables. Cette relativisation des quantificateurs, liée au choix de différents domaines, sera ultérieurement incorporée à la sémantique que nous introduirons pour nos langages.

Ainsi allégée, notre formule devient :

$$\exists x\ \forall y\ Pxy$$

où le domaine des quantificateurs est l'ensemble des instants du temps. Le lecteur qui douterait encore de l'utilité des variables remarquera, sur cette formule ou mieux sur la précédente, à quel point elles permettent de visualiser aisément les renvois de référence !

Exercice

Paraphraser, puis traduire, les énoncés :

1) Quiconque trace un cercle trace une figure.
(On admettra que l'usage de « quiconque » revient à stipuler que le domaine des quantificateurs est l'ensemble des hommes ; on introduira la lettre « T^2 » pour le prédicat : « ... trace ... ».)

2) Si pour tout nombre il existe un nombre supé-

rieur ou égal, alors il existe un nombre supérieur ou égal à tout nombre (en prenant N, par exemple, comme univers ou domaine).

3) La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
(On introduira la lettre de prédicat « S^3 » pour le prédicat à trois places : « ... est (la) somme de ... et de ... ».)

Si nous revenons à présent à la formule concernant l'existence d'un premier instant du temps, nous pouvons au contraire trouver qu'elle ne rend pas raison de l'original français qui voulait clairement dire : « Un instant précède tout *autre* instant », i.e. tout instant différent de lui. Nous pouvons alors utiliser un prédicat binaire : « ... est identique à ... », qu'on a de bonnes raisons de considérer comme exprimant une notion logique : pour cette raison, au lieu de le représenter par une lettre de prédicat arbitrairement choisie, il est usuel de le représenter par le symbole « = » (de plus, la négation de « x = y », « $\neg$(x = y) », sera abrégée en : « x $\neq$ y »).

L'énoncé initial sera dès lors traduit par :

$$\exists x \, \forall y \, (y \neq x \rightarrow Pxy)$$

L'introduction du signe logique d'identité marque un réel enrichissement du langage : un langage du premier ordre où figure ce signe est dit langage du premier ordre *avec identité*. Voici un exemple d'enrichissement des capacités expressives de tels langages ; alors que nous savons depuis la p. 145 traduire :

Il y au moins un Dieu

i.e. :

$$\exists x \, Dx$$

c'est seulement dans un langage avec identité que nous pouvons traduire :

Il y a au plus un Dieu

énoncé qui, malgré les apparences, n'est pas une affirmation d'existence ; une paraphrase correcte en serait :

pour tout x et tout y, si x et y sont des Dieux, x et y sont identiques.

i.e. :

$$\forall x \, \forall y \, ((Dx \wedge Dy) \rightarrow x = y)$$

Finalement, l'affirmation de l'unicité divine peut alors être exprimée :

$$\exists x \, (Dx \wedge \forall y \, (Dy \rightarrow y = x))$$

Exercices

Traduire les énoncés suivants dans un langage avec identité :

1) Il y a un unique nombre premier pair et c'est le nombre 2.

2) Il y a au moins deux nombres premiers.

3) Il y a au plus deux diviseurs de 2.

4) Il y a exactement deux diviseurs de 2.

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici d'expressions (les descriptions définies) qu'on peut analyser comme composées d'un nom propre : « Alexandre », « 2 », etc., auquel est appliqué un *nom de fonction* : « le père de ... », « le carré de ... », pour former un nom complexe qui désigne un certain objet : par exemple, le père d'Alexandre = Philippe, le carré de 2 = 4, etc. ; si besoin est, nous pouvons utiliser des lettres de fonction, à 1, 2, n places vides, pour représenter des noms de fonction ayant un nombre correspondant de places vides d'argument. Par exemple, avec la lettre minuscule « f » pour « le carré de ... », l'énoncé :

4 est le carré de 2

se traduira par :

$$4 = f2$$

Avec la lettre de fonction à deux places vides « s » pour le nom de fonction : « la somme de .. et de .. » (« .. + .. »), traduire :

1) La somme de 2 et de 3 est 5

2) La somme de 0 et d'un nombre quelconque est égale à ce nombre.

(le lecteur remarquera à quel point la formule obtenue est proche de la formulation arithmétique usuelle : « 0+n = n »).

Retraduire avec la même lettre de fonction l'énoncé :

La somme de deux nombres impairs
est un nombre pair.

(On remarquera à ce propos qu'il y a du sens à introduire un nom complexe ou *terme* comme « sxy » à une place d'argument d'une lettre de prédicat).

Avec la lettre de fonction à 1 place « g », et dans un langage avec identité, traduire les énoncés suivants (qui correspondent aux quatre premiers « Axiomes de Peano » pour l'arithmétique des entiers) :

1) 0 est un nombre.

2) Si x est un nombre, le successeur de x est toujours un nombre.

3) Si x est un nombre, le successeur de x est toujours différent de 0.

4) Si x et y sont des nombres et si le successeur de x est égal au successeur de y, alors x = y.

(On considérera que l'univers est assez vaste pour contenir au moins les nombres naturels, et on introduira la lettre de prédicat « N », pour l'analyse de ces quatre énoncés.)

On explique parfois l'introduction des variables dans la notation canonique en arguant du fait que dans l'usage mathématique habituel, les variables expriment la généralité ; pour exprimer par exemple en arithmétique la commutativité de la somme, on écrit simplement :

$$m+n = n+m$$

et pour exprimer l'associativité de l'opération de groupe $*$, on écrit de même :

$$x*(y*z) = (x*y)*z$$

avec l'intention d'indiquer par là que ces lois valent pour des nombres ou des éléments quelconques d'un groupe. Et l'introduction du quantificateur universel pour expliciter l'indication de généralité ne serait liée qu'à la nécessité technique de disposer d'un moyen commode de distinguer, par exemple, l'universalité d'une négation, de la négation de l'universalité ; sans quantificateur, en effet, nous ne pourrions savoir si « $\neg$ Px », par exemple, doit être compris comme signifiant : « pour tout x, $\neg$ Px est le cas » (universalité de la négation), ou comme signifiant : « ce n'est pas le cas que Px est vrai de tout x » (négation de l'universalité). Dans la notation canonique au contraire, les deux significations sont représentées respectivement par :

$$\forall x \neg Px$$

et par :

$$\neg \forall x\ Px$$

Cette idée que les variables expriment la généralité n'est pas entièrement fausse, mais sa formulation est imprécise ; d'abord il faut faire remarquer que ce n'est pas toujours le cas : dans une équation comme « $x^2 = 4$ », la lettre « x » n'indique pas la généralité, i.e. cette dernière expression n'est pas une manière de dire :

$$\text{pour tout nombre x, } x^2 = 4$$

c'est une expression dont le rôle est plutôt analogue à

celui d'un énoncé ouvert, ou forme d'énoncé, où « x » est une variable libre : comme une équation est satisfaite par certaines valeurs de « x », qui sont dites ses racines, un énoncé ouvert peut être dit satisfait par certaines valeurs de sa variable libre : « x est satellite de la Terre », par exemple, par l'objet qu'est la Lune.

Ce point montre qu'au contraire une expression comme :

$$m+n = n+m$$

doit être tenue pour une expression abrégée de :

pour tous nombres m, n, $m+n = n+m$

i.e. comme contenant une quantification cachée ou implicite.

Il serait donc préférable de dire que les variables usuelles, au moins dans de nombreux cas, contribuent à, ou facilitent, l'expression de la généralité : la généralité elle-même est signifiée par une quantification (implicite ou explicite), et le rôle propre des variables est de faciliter cette expression dans des contextes où sans elles il serait difficile et lourd d'indiquer clairement les renvois de référence : si l'on voulait exprimer sans user de variables la dernière égalité mentionnée, on obtiendrait quelque chose comme :

> Soient deux nombres, non nécessairement distincts, la somme du premier avec le second dans cet ordre est égale à la somme du second avec le premier.

Et l'on pourrait multiplier les exemples (que le lecteur essaie d'exprimer l'associativité de la loi* sans utiliser de variables). Quine a fortement insisté sur la nature essentiellement *pronominale* des variables (cf. Quine, 1953 et Quine, 1960).

L'expression « renvois de référence » sera peut-être jugée malheureuse comme équivalent de l'anglais "cross-reference", mais elle a au moins pour titre de s'autoriser d'une suggestion de Quine lui-même dans un texte qui mérite d'être cité en entier :

« Dans le contexte d'une discussion logique ou sémantique, l'expression "cross-reference" est malheureuse alors que son équivalent français *renvoi* ne l'est pas. Car un pronom ou un autre terme singulier peut-être également dit référer, de manière permanente ou passagère, à une personne ou un objet. La référence en ce dernier sens est une authentique relation de signe à objet, alors que la "cross-reference" n'est qu'une relation de signe à signe, le renvoi d'un pronom à l'antécédent grammatical. » (Quine, 1960, § 28)

La réapparition d'une même variable en diverses occurrences indique clairement les renvois pronominaux, de même que différentes variables permettent de manier sans confusion ces renvois ; on pourrait au reste, en lieu et place des variables, utiliser des « liens » (« bonds ») pour représenter graphiquement ces renvois ; à partir de :

$$\forall x \forall y\ ((Cy \wedge Rxy) \rightarrow \exists z\ (Fz \wedge Rxz))$$

par omission des variables (d'individu) et marquage des renvois ou liaisons, on obtient :

$$\forall\forall\ ((C \wedge R) \rightarrow \exists\ (F \wedge R))$$

ce qu'on obtiendrait aussi bien à partir de l'énoncé :

$$\forall z \forall x\ ((Cx \wedge Rzx) \rightarrow \exists y\ (Fy \wedge Rzy))$$

De tels énoncés, qui sont identiques aux lettres près utilisées comme variables et qui deviennent identiques après omission des variables et indication des renvois par des liens (des indices souscrits feraient aussi bien l'affaire), on dit parfois qu'ils sont congrus ; intuitivement, ils « disent la même chose » (ce fait deviendra l'objet d'un théorème, dit théorème de changement des variables liées).

Exercice

On peut formuler ainsi les axiomes d'un groupe additif (commutatif) :

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

2) $x+y = y+x$

3) pour tout x et z, il y a au moins un y tel que $x+y = z$

4) pour tout y et z, il y a au moins un x tel que $x+y = z$.

Traduire ces axiomes en utilisant la lettre de fonction à deux places « s » pour désigner l'opération de groupe (associative et commutative) $+$.

En introduisant une lettre de prédicat à trois places « P » définie par :

$$Pxyz \leftrightarrow sxy = z$$

exprimer autrement les mêmes axiomes sans utiliser la lettre de fonction « s » (il faudra ajouter aux axiomes les formules exprimant que P est de la nature d'une fonction [partout définie]).

V.2 LANGAGES DU PREMIER ORDRE, MORPHOLOGIE

Nous commençons ici à décrire un langage quelconque du premier ordre en suivant un développement analogue à celui de la I^re^ partie ; nous définissons d'abord la notion de langage du premier ordre, puis au chapitre suivant nous introduirons les notions sémantiques de base pour de tels langages, pour déterminer une version précise et naturelle de la notion de conséquence logique.

Un langage $\mathscr{L}$ du premier ordre est constitué à partir de l'alphabet, ou ensemble des symboles primitifs, suivant :

(I) *Symboles logiques* :

– Variables d'individu : $v_0, v_1, ..., v_n, ...$;

L'ensemble $\mathscr{V}$ des variables d'individu est dénombrable ; l'indice en bas indique le rang d'une variable dans l'ordre d'énumération, de sorte qu'on puisse parler de la $k+1$–ième variable (éventuellement en utilisant l'abréviation « v_k »).

– Connecteurs : $\neg$, $\rightarrow$;

Le choix d'un système primitif (complet) de connecteurs est dans une large mesure arbitraire, mais il est commode de n'introduire que deux connecteurs primitifs, les autres connecteurs usuels pouvant être introduits par des définitions abréviatives (par exemple, « $(\varphi \wedge \psi)$ » abrégera l'expression : « $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ », etc.)

– Quantificateur : $\forall$;

Le quantificateur « $\exists$ » sera considéré comme introduit par une définition abréviative :

$$\exists v_k \ldots, \text{ pour : } \neg\, \forall v_k \,\neg \ldots$$

– Signes de ponctuation : (,) ;

Ces symboles logiques sont communs à tous les langages du premier ordre ; dans un langage avec identité figurera en outre le symbole : $\approx$;

On ne confondra pas le signe « $\approx$ » écrit en caractère gras (parfois dit « signe d'égalité formel »), qui est un symbole du langage-objet, et le signe « = » éventuellement utilisé dans le méta-langage avec le sens habituel de l'identité.

Un langage particulier est déterminé par la présence, dans son alphabet, de symboles qui lui sont propres, ou symboles non-logiques de $\mathscr{L}$.

(II) *Symboles non-logiques* (ou : paramètres)

– Symboles de prédicat : pour chaque entier $n > 0$, un ensemble, possiblement vide, de symboles de prédicat n-aires, i.e. à n places vides convenant à des variables, ou, le cas échéant, à des constantes ; les lettres romaines majuscules, éventuellement avec indice en haut pour indiquer l'arité du symbole de prédicat, seront utilisées à cette fin.

Dans un langage avec identité, pour tout $n > 0$,

l'ensemble des symboles de prédicat n-aire peut être vide ; dans un langage sans identité, il doit y avoir au moins pour un certain n un ensemble non vide.

– Constantes d'individu : un ensemble, éventuellement vide, de lettres romaines minuscules du début de l'alphabet avec éventuellement des indices souscrits : a, b, c, a_1, ...

– Symboles de fonction : pour chaque entier $n > 0$, un ensemble, éventuellement vide, de symboles de fonction à n places (les lettres « f », « g », par exemple, etc.).

En ce qui concerne les variables syntaxiques utilisées pour parler de $\mathscr{L}$, les conventions suivantes seront respectées :

– les lettres rondes x, y, ..., seront utilisées pour des variables d'individu indéterminées, non nécessairement distinctes, de $\mathscr{L}$.

– **P** pour un symbole de prédicat quelconque ;
– **f** pour un symbole de fonction quelconque ;
– **c** pour une constante d'individu quelconque ;
– t pour un *terme* (cf. *infra* la définition de « terme ») quelconques ;
– φ, ψ, ..., pour des expressions quelconques ; cependant dès que nous aurons la définition des *formules* de $\mathscr{L}$, ces lettres indiqueront (de manière indéterminée) seulement des formules quelconques.

Si l'ensemble des symboles non-logiques d'un langage $\mathscr{L}$ est fini, on présentera $\mathscr{L}$ de la manière suivante :

$$\mathscr{L} = \{\mathbf{P}_0, ..., \mathbf{P}_n ; \mathbf{f}_0, ..., \mathbf{f}_m ; \mathbf{c}_0, ..., \mathbf{c}_q\}$$

où chaque symbole de prédicat **P** a une arité déterminée, et de même pour chaque symbole de fonction. Si les symboles du langage considéré sont familiers, on écrira simplement, par exemple :

$$\mathscr{L} = \{\leqslant\}, \qquad \mathscr{L} = \{+, ., 0, 1\}$$

On ne confondra pas, cependant, le symbole (par exemple) « 0 » de $\mathscr{L}$, ou comme on dit parfois le « 0 formel », et le même signe muni de son interprétation ordinaire (le « 0 » de l'arithmétique), même si, bien évidemment, le choix éventuel de ce symbole comme symbole d'un langage $\mathscr{L}$ est motivé par l'interprétation arithmétique qu'on a en vue !

Nous aurons plus tard besoin de passer d'un langage $\mathscr{L}$ à un autre langage $\mathscr{L}'$ formé à partir de $\mathscr{L}$ en rajoutant de nouveaux symboles : nous dirons que $\mathscr{L}'$ est une *expansion* de $\mathscr{L}$; en particulier nous dirons que $\overline{\mathscr{L}}$ est une *expansion simple* de $\mathscr{L}$ si $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \mathbf{C}$, où **C** est un ensemble de constantes d'individu qui ne figurent pas dans $\mathscr{L}$.

Une expression est une suite finie quelconque de symboles de l'alphabet. Certaines suites (qui intuitivement correspondent à des noms, simples ou complexes, ou à des pronoms, i.e. qui dans une interprétation permettront de désigner un objet) sont appelées *termes*. L'ensemble des termes de $\mathscr{L}$, Term($\mathscr{L}$), est défini de la manière suivante :

(I) une variable est un terme ;

Si $\mathscr{L}$ ne comporte ni constante d'individu, ni symbole de fonction, Term($\mathscr{L}$) = $\mathscr{V}$; si $\mathscr{L}$ comporte des constantes d'individu, il faut ajouter la clause :

(II) une constante d'individu est un terme ;

Enfin, si $\mathscr{L}$ possède, outre les variables et des constantes, des symboles de fonction, Term($\mathscr{L}$) doit être défini inductivement : outre les clauses (I) et (II), on a :

(III) si **f** est un symbole de fonction à m places, et t_1, ..., $t_m \in$ Term($\mathscr{L}$), alors :

$$\mathbf{f}t_1 \ldots t_m \in \text{Term}(\mathscr{L})$$

Seules les expressions définies par (I), (I)-(II), (I)-(II)-(III) selon les cas sont des termes.

A la différence des termes, certaines expressions pourront être comprises, dans le cadre d'une interprétation, comme des assertions : des énoncés au sujet d'objets, ou des quasi-énoncés comportant des variables libres auxquelles des valeurs peuvent être assignées. L'ensemble des *formules*, Form($\mathscr{L}$), est défini inductivement à partir des *formules atomiques* qui, elles, sont explicitement spécifiées.

RÈGLES DE FORMATION :

Formules atomiques :

Si **P** est un symbole de prédicat à n places, et $t_1, ..., t_n \in$ Term($\mathscr{L}$), alors :

$\mathbf{P}t_1 \ldots t_n$ est une formule atomique.

Si de plus $\mathscr{L}$ est un langage avec identité, une expression de la forme :

$$t_1 \approx t_2$$

sera également une expression atomique.

Définition de Form ($\mathscr{L}$) :

(I) une formule atomique est une formule ;

(II) si φ, ψ, sont des formules, $\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ sont des formules ;

(III) si φ est une formule et x une variable quelconque, $\forall x\varphi$ est une formule (parfois dite : la généralisation en x de φ).

(IV) seules sont des formules les expressions obtenues par (I)-(II)-(III).

Quelques exemples seront peut-être bienvenus ; soit $\mathscr{L} = \{R^2\}$; les expressions suivantes seront des formules de $\mathscr{L}$:

$Rv_1\ v_2$,
$Rv_4\ v_0$,
qui sont des formules atomiques ;

$\forall v_1\ Rv_1\ v_2$,
$(Rv_1\ v_2 \rightarrow \forall v_0\ Rv_4\ v_0)$,
$\neg\ \forall v_0\ \neg\ Rv_0\ v_1$,
etc.

Soit $\mathscr{L} = \{P^1, R^2, f^1, 0, 1\}$ un langage avec identité : les expressions suivantes seront des termes de $\mathscr{L}$:

$$0,\ 1,\ v_0,\ v_1,\ \ldots,\ f0,\ ff0,\ f1,\ fv_0,\ \ldots$$

et des formules seront :

P0,
Pff0,
$f0 \approx 1$, (form. atomiques)
$\forall v_0\ Rv_0\ fv_0$,
$\forall v_1\ fv_1 \approx 0$,
$\neg$ Pf0,
etc.

REMARQUE

On admettra ici, sans le démontrer, que Term($\mathscr{L}$), comme Form($\mathscr{L}$) sont décidables ; on admettra également un théorème de « lecture unique » (d'unicité de décomposition) pour les termes et les formules analogue au théorème de non-ambiguïté en calcul des énoncés ; le lecteur qui voudrait approfondir ces points est invité à consulter Hermes 1973, II, § 2, « questions élémentaires de décidabilité »).

Au lieu d'écrire explicitement telle formule qu'on sera amené à considérer, on utilisera volontiers les abréviations usuelles, comme la suppression des parenthèses extérieures, etc. ; on utilisera également volontiers les lettres « x », « y », etc., pour les variables du langage-objet. Bien sûr, ces conventions ne modifient nullement la définition des formules !

Enfin, l'usage autonyme des symboles et expressions sera systématique (cf. chap. I) ; dans : $\forall x\varphi$, par exemple, l'usage autonyme de « $\forall$ » a l'avantage de nous dispenser

d'introduire un nom du quantificateur pour représenter la généralisation de φ en x.

Exercice

Soit $\mathscr{L} = \{F^1, R^2\}$; les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathscr{L}$:

Fv_{36} , Rxy

Fa , $\exists v_1\ Fv_1$

$\forall v_2\ \forall v_0\ Rv_0\ v_2$, $\forall v_0\ Rv_2\ v_3$

$\forall v_0\ (Pv_0 \rightarrow Pv_0)$,

$\forall v_1\ Pv_1 \rightarrow Pv_1$?

V.3 VARIABLES LIBRES ET LIÉES, SUBSTITUTION

Nous pouvons à présent distinguer aisément (cf. p. 147-148) les deux formules :

$$\forall v_1\ (Pv_1 \wedge Fv_1)$$

qui est la généralisation de $(Pv_1 \wedge Fv_1)$ en v_1, et :

$$\forall v_1\ Pv_1 \wedge Fv_1$$

qui est une conjonction ; dans la première, les deuxième et troisième occurrences de v_1 sont liées par le quantificateur alors que dans la seconde formule, la dernière occurrence de v_1 n'est pas liée, mais *libre* (bien que la deuxième occurrence de la même variable soit liée, ce qui montre qu'une même variable peut être à la fois libre et liée dans une même formule). Cette notion importante d'occurrence libre d'une

variable dans une formule doit être à présent définie (par induction).

DÉFINITION de : *occurrence libre de* x dans φ :

(I) si φ est atomique, x a une occurrence libre dans φ *ssi* x a une occurrence dans φ ;

(II) x a une occurrence libre dans $\neg\varphi$ *ssi* x a une occurrence libre dans φ ; x a une occurrence libre dans $(\varphi \rightarrow \psi)$ *ssi* x a une occurrence libre dans φ ou dans ψ ;

(III) x a une occurrence libre dans $\forall y\varphi$ *ssi* x a une occurrence libre dans φ et $x \neq y$.

Une occurrence de x qui n'est pas libre est liée. Si $\varphi = \forall x\psi$, la *portée* de $\forall x$ dans φ est la formule ψ. Les occurrences de x dans la portée de $\forall x$ sont liées par cette occurrence du quantificateur à moins qu'elles ne soient dans la portée d'une occurrence de $\forall x$ à l'intérieur de ψ. Enfin une variable est libre dans φ si elle a au moins une occurrence libre dans φ, et liée dans φ si elle a au moins une occurrence liée (une même variable peut être à la fois libre et liée dans φ).

Si une formule ne contient aucune occurrence libre de variable (aucune variable libre), on parle d'un « énoncé ») (parfois : « énoncé clos »). La lettre « σ » sera utilisée comme variable syntaxique pour un énoncé quelconque, et on notera « S » l'ensemble des énoncés de $\mathscr{L}$. On peut remarquer à ce propos le fait suivant, dont l'importance apparaîtra au chapitre suivant : alors que l'ensemble Form($\mathscr{L}$) est défini inductivement, comme le plus petit ensemble obtenu à partir des formules atomiques par application itérée des opérations de construction décrites par les règles de formation (II) et (III), il n'y a pas et il ne peut y avoir de définition inductive de S ; en effet, des énoncés complexes ne sont pas obtenus seulement à partir d'énoncés plus simples, mais aussi à partir de formules

qui ne sont pas des énoncés, parce qu'elles contiennent des variables libres.

REMARQUE

Le lecteur aura de lui-même remarqué que nous n'avons parlé de variables libres ou de variables liées qu'en relation avec les variables d'individu. Il n'est certes pas étonnant qu'on se confine aux variables d'individu quand on parle de variables *liées*, puisque les symboles de prédicat ne sont pas accessibles à des contextes de quantification, i.e. des expressions de la forme :

$$\forall F \ldots \qquad \forall R \ldots, \qquad \text{etc.}$$

ne sont pas des formules de nos langages : c'est au reste ce trait syntaxique qui les caractérise comme langage du premier ordre, par opposition aux langages pour le calcul du *second ordre*, où de telles expressions sont admises au titre de formules.

Mais le lecteur peut s'étonner que les symboles de prédicat ne soient pas considérés comme des variables (libres, et non quantifiables), d'autant plus qu'au chapitre suivant ces symboles seront considérés comme susceptibles de diverses interprétations. Il aura de plus noté le changement de terminologie par rapport au § précédent (V. 1) : les lettres « F », « G », « R », etc., y étaient dites *lettres de prédicat*, et non *symboles de prédicat* comme les majuscules des langages formalisés ; cela afin de souligner une différence importante dans l'usage de ces lettres (même si la typographie est identique). Au § précédent, ces lettres étaient des abréviations de prédicats du langage ordinaire, i.e. d'expressions munies d'un sens (quel qu'il soit) ; et lors de la traduction, ces lettres étaient comprises comme porteuses de ce sens, ou munies d'une *interprétation*. Dans le langage formalisé au contraire, qui est pour l'instant considéré comme un langage formel, ces lettres n'ont pas de signification (d'où l'appellation de « symboles de prédicat ») ; rétrospectivement, nous pouvons

au reste considérer les écritures du § précédent comme des formules d'un langage du premier ordre, comportant les symboles de prédicats appropriés, auxquels une interprétation (qui était implicite quand nous choisissions, par exemple, le symbole (formel) « P » pour traduire le prédicat « est pair », mais que nous pouvons à présent expliciter) a été associée. Et désormais, quand nous « traduirons » un énoncé français dans un langage approprié, nous devrons dire que telle formule est une traduction de tel énoncé *sous* telle et telle interprétation de ses symboles de prédicats.

La question est donc parfaitement légitime : pourquoi ne pas accorder à ces symboles de prédicat le statut de variables, et parler tout simplement de *variables de prédicat* ? Mais la réponse renvoie à des analyses philosophiques qui dépassent le cadre d'un manuel de logique élémentaire ; d'où le choix (peu satisfaisant) du terme le plus neutre possible, « paramètres », pour laisser le lecteur libre de choisir son camp après mûre réflexion ! On se bornera ici à quelques remarques (et quelques suggestions de lecture).

Si l'on considère les symboles de prédicat comme des variables, les langages du premier ordre ne comportent pas, à proprement parler, d'énoncés (i.e. de formules sans variables libres), mais toutes les formules sont des énoncés ouverts, ou *formes* d'énoncés. La décision de ne pas quantifier ces variables peut sembler une limitation dont les motifs ne sont pas clairs, par rapport à des systèmes d'ordre supérieur.

De fait, le choix de la notion de variables de prédicats est souvent liée à la présentation de la logique du premier ordre comme un *fragment* d'une logique d'ordre supérieur, formulée dans une version ou une autre de la théorie des types : le nom de « calcul des prédicats *restreint* » (Hilbert-Ackermann, 1928, par exemple), pour désigner le premier ordre, par opposition au « calcul étendu », jusqu'au « calcul d'ordre ω », semble témoigner de cette conception, selon laquelle la théorie de la quantification n'est qu'une partie limitée de la logique dans son universalité (comprise, il est vrai,

comme une théorie des classes). Quant aux motifs pour étudier à part un système ainsi limité, ils touchent à la beaucoup plus grande simplicité d'un tel système, ainsi qu'à des propriétés qui lui sont propres (complétude relativement à la validité au sens usuel, cf. *infra*). Bien qu'il y ait un théorème faible de complétude pour le calcul du second ordre, par exemple (dû à Henkin, 1949), « en fait il est impossible d'étendre le calcul fonctionnel pur du second ordre par adjonction de règles et d'axiomes de telle sorte que les théorèmes coïncident avec les formules qui ont la valeur V pour tous les systèmes de valeurs de leurs variables libres » (Church, 1956 ; l'expression « calcul fonctionnel » est utilisée par Church pour désigner ce qu'on appelle à présent le calcul des prédicats).

Historiquement, le calcul du premier ordre n'est pas premier, mais résulte d'une « séparation » (Church, 1956) à l'intérieur de calculs d'ordre supérieur ; on attribue ordinairement à Löwenheim la considération initiale du premier ordre pour lui-même : sous le nom de « Zählausdruck », Löwenheim considère des expressions où les quantificateurs renvoient seulement aux individus d'un domaine (et non aux relations sur ce domaine ; cf. Löwenheim, 1915). Mais la première formulation explicite du calcul des prédicats du premier ordre remonte à Hilbert-Ackermann (1928).

Quine, au contraire, a vigoureusement plaidé contre l'assimilation des symboles « F », « G », etc., à des variables, prenant leurs valeurs dans un univers d'attributs ou de classes (cf. Quine, 1953[b], en particulier l'article « Logic and the Reification of Universals »). Ces arguments sont essentiellement :

1) que dans la mesure où ces lettres ne peuvent être liées (quantifiées), il n'est pas nécessaire de les comprendre comme des variables : « Des lettres sont qualifiées à être d'authentiques variables, demandant un royaume d'objets comme leurs valeurs, seulement s'il est permis de les lier pour former de véritables énoncés concernant ces objets » *(loc. cit.)*. Ce point renvoie au critère d'engagement ontologique d'une

théorie : « Une entité est présupposée par une théorie *ssi* elle doit figurer parmi les valeurs des variables liées » *(ibid)* ; ainsi le calcul des prédicats du premier ordre ne présuppose pas une ontologie d'attributs (ou de classes), et il n'est pas besoin de concevoir les symboles de prédicat comme des variables prenant leurs valeurs dans cet univers. Ces symboles ont plutôt le statut de lettres « schématiques » permettant d'écrire des *schémas* qui représentent la forme d'énoncés valides.

2) que puisque ce n'est pas nécessaire, il est préférable de l'éviter : « Le plus gros du raisonnement logique prend place à un niveau qui ne présuppose pas d'entités abstraites. Ce type de raisonnement procède essentiellement selon la théorie de la quantification, dont les lois peuvent être représentées par des schémas où ne figure pas de quantification sur des variables de classes (...). Je considère que c'est un défaut de toute formulation de la théorie de la référence que de faire comme si nous référions à des entités abstraites depuis le début, au lieu d'attendre le moment où une telle référence correspond à un réel motif » (*ibid.*). Finalement, le souci de Quine est de clarifier les engagements ontologiques réellement exigés par une théorie, et de préserver la distinction entre la logique (théorie de la quantification) et la théorie des ensembles. A ce genre de considérations, est liée la préférence de Quine pour l'appellation de « théorie de la quantification », plutôt que « calcul du premier ordre », qui met justement l'accent sur l'idée qu'il ne s'agit là que d'un fragment d'une logique d'ordre supérieur. (Quine, 1963).

Nous verrons cependant au chapitre suivant que la formulation de la théorie de la validité en premier ordre, et la sémantique qui la rend possible, présupposent un fragment de théorie des ensembles.

L'opération de substitution d'un *terme* à toutes les occurrences *libres* d'une variable dans une formule va jouer un rôle important par la suite, en particulier dans le développement d'un système déductif (chap. VII).

Nous noterons :

$$(\varphi)x/t$$

la formule qui résulte de la substitution de t à toutes les occurrences libres de x dans φ ; $(\varphi)x/t$ est définie par induction de la manière suivante :

(I) si φ est une formule atomique, $(\varphi)x/t$ est l'expression qui résulte du remplacement de toutes les occurrences de x par t dans φ ;

(II) $(\neg\varphi)x/t = \neg(\varphi)x/t$;

(III) $(\varphi \rightarrow \psi)x/t = (\varphi)x/t \rightarrow (\psi)x/t$;

(IV) $(\forall y\varphi)x/t = \begin{cases} \forall y\varphi \text{ , si } x = y \text{ ,} \\ \forall y(\varphi)x/t \text{ si } x \neq y \text{ ;} \end{cases}$

Quelques exemples :

$$(Pv_0)v_0/v_3 = Pv_3$$

$(Pv_1)v_1/v_1 = Pv_1$, et en général : $(\varphi)x/x = \varphi$;

$$(Pv_1 \rightarrow \forall v_1\ Pv_1)v_1/v_4 = (Pv_4 \rightarrow \forall v_1\ Pv_1)$$

$$(\forall v_0\ Rv_2\ v_0)v_2/fv_3 = \forall v_0\ Rfv_3\ v_0$$

$$(Rv_0\ v_1)v_3/v_4 = Rv_0\ v_1$$

L'exemple suivant sera également instructif (nous allons l'écrire avec les lettres plus familières « x », « y », afin qu'il soit plus facilement compréhensible) :

$$(\forall x\ \exists y\ Rxy \rightarrow \exists y\ Rxy)\ x/y$$
$$= \quad \forall x\ \exists y\ Rxy \rightarrow \exists y\ Ryy$$

Interprétons (de manière intuitive) cette dernière formule, en donnant à $\forall$ le sens de : « pour tout nombre », et en associant au symbole de prédicat à 2 places « R » la relation binaire d'ordre strict (notée ordinairement « < »). En opérant la substitution indiquée, nous sommes passés d'un énoncé manifestement vrai, et qui plus est logiquement vrai (si tout nombre est dépassé par un nombre, alors c'est vrai de n'importe quel nombre donné comme valeur à la variable libre

« x » dans le conséquent), à un énoncé faux ; car le conséquent de la dernière formule dit, sous cette interprétation, qu'il y a un nombre strictement inférieur à lui-même, ce qui est bien sûr faux, alors que l'antécédent est vrai. Or, d'un point de vue sémantique, l'intérêt de la substitution est de nous faire passer du Vrai au Vrai, ou de « préserver la validité ».

Cependant, le phénomène regrettable qui a accompagné la substitution peut être décrit en termes purement syntaxiques : dans le résultat de la substitution, la variable « y » est *liée* par le quantificateur « $\exists$y » du conséquent, parce que « x » (la variable remplacée) avait une occurrence libre dans la portée de ce quantificateur.

Pour éviter ce genre de déboire, il est nécessaire de définir la notion de *substitution libre* d'une variable, et plus généralement d'un terme, à une variable dans une formule.

DÉFINITION 1 : y est *librement substituable* à x dans φ *ssi* x n'a pas d'occurrence libre dans φ à l'intérieur de la portée d'un quantificateur $\forall y$.

Cette définition suffit pour des langages sans symboles de fonction (où les seuls termes sont les variables, et possiblement des constantes d'individu). Cependant, pour des langages où figurent des termes complexes, construits à partir de symboles de fonction, des considérations analogues justifient la définition plus générale :

DÉFINITION 2 : t est *librement substituable* à x dans φ *ssi* x n'a pas d'occurrence libre dans φ à l'intérieur de la portée d'un quantificateur $\forall y$, où y est une variable ayant une occurrence dans t.

Exercices

Écrire explicitement :

$$(\forall v_0\ Rv_1\ v_0)v_0/v_2$$

Est-il vrai que la formule obtenue est identique à :

$$\forall v_0\ (Rv_1\ v_0)v_0/v_2$$? Sinon, pourquoi ?

Les termes : v_0, a, $gv_1\ v_2$, $gv_1\ v_0$, sont-ils librement substituables à v_1 dans :

$$\forall v_0\ Rv_1\ v_0$$?

(« g » étant un symbole de fonction a deux places)

CHAPITRE VI

Vérité et modèles : la notion de conséquence logique, la validité

VI.1 SATISFACTION ET VÉRITÉ

La sémantique pour le calcul des énoncés permet de définir la notion de vérité (ou de satisfaction) d'une formule de ce calcul pour une distribution de valeurs de vérité ; ce paragraphe est consacré à une notion analogue dans le cadre de la logique du premier ordre : celle de vérité d'un énoncé dans une *structure d'interprétation*. Auparavant, il nous faudra définir une notion plus générale, définition qui est la véritable "cornerstone" (Chang & Keisler) de la logique édifiée dans l'esprit de la « théorie des modèles » : la notion de *satisfaction* d'une formule par une assignation dans une structure d'interprétation. Comme Tarski (1936) l'a montré, le concept de vérité est définissable à partir de la notion de satisfaction.

En lui-même, un énoncé σ d'un langage $\mathscr{L}$ n'est ni vrai, ni faux, faute de signification. Pour lui donner un sens, il faut associer aux symboles non logiques de $\mathscr{L}$ une *interprétation*. Donnons un exemple simple :

$$\text{Soit : } \mathscr{L} = \{R^2\}$$

et soit l'énoncé : $\sigma = \exists v_1\ \forall v_2\ \neg Rv_2\ v_1$.

Une interprétation appropriée à $\mathscr{L}$ consiste à associer

au symbole de prédicat R^2 une relation binaire définie sur un certain ensemble d'objets, dit *domaine* (ou : univers) de l'interprétation : par exemple, la relation d'ordre strict sur l'ensemble **N** des entiers naturels. Sous cette interprétation, σ peut être compris comme affirmant :

> Il existe un nombre tel qu'aucun nombre n'est plus petit.

qui est vrai dans la *structure* : (**N**, <) associée à $\mathscr{L}$ par l'interprétation en question. Mais une autre interprétation peut consister à associer à R^2 la relation d'ordre strict sur l'ensemble des relatifs : et à présent σ est faux dans la structure (**Z**, <) associée à $\mathscr{L}$ par la nouvelle interprétation. Dans le premier cas on dira que la structure d'interprétation est un *modèle* de σ, ou que σ est *vrai* dans cette interprétation.

Il faut donc définir de manière générale ce qu'est une interprétation appropriée à $\mathscr{L}$, qui associe d'une certaine manière aux symboles non logiques de $\mathscr{L}$ une structure relationnelle au sens usuel en mathématiques.

REMARQUE

On peut considérer que les symboles dits « logiques » de $\mathscr{L}$ sont une fois pour toutes munis de leur signification attendue, au moins pour ce qui concerne les « constantes logiques » : ¬ (non), → (si ..., alors), ∀ (pour tout ...), et éventuellement : ≈ (l'identité). En ce sens, $\mathscr{L}$ est moins un langage *formel* qu'un langage formalisé, i.e. dont les règles de construction sont exactement spécifiées. La notion d' « interprétation » utilisée ici est donc légèrement différente de celle d' « interprétation » principale ou attendue développée en I^re^ partie (cf. I.1) : elle est plus exactement comparable, quant à son rôle, à celle de distribution de valeurs de vérité.

Une interprétation $\mathfrak{U}$ pour un langage $\mathscr{L}$:

(I) fixe un ensemble *non-vide* A d'objets, ou domaine de l'interprétation, où les variables de $\mathscr{L}$ prennent leurs valeurs ; le quantificateur ∀ est donc compris comme : « pour tout élément de A ».

(II) associe à chaque symbole de prédicat **P** à n places une relation $\overline{\mathbf{P}}$ n-aire sur A, i.e. un ensemble de n-uplets d'éléments de A ; $\overline{\mathbf{P}} \subset A^n$.

(III) associe à chaque constante d'individu **c** un élément $\overline{\mathbf{c}}$ du domaine A.

(IV) associe à chaque symbole de fonction **f** à n places une opération n-aire sur A, i.e. une fonction (partout définie) $\mathbf{f} : A^n \to A$.

En d'autres termes, une interprétation est une fonction qui fait correspondre aux symboles propres à $\mathscr{L}$ les relations, fonctions, et éléments appropriés dans un univers A. Nous utiliserons des lettres gothiques majuscules : $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, ..., pour des interprétations, et la majuscule romaine correspondante pour le domaine d'une interprétation.

Si $\mathscr{L} = \{\mathbf{P}_0, ..., \mathbf{P}_n ; \mathbf{f}_0, ..., \mathbf{f}_m ; \mathbf{c}_0, ..., \mathbf{c}_q\}$,

on désigne une interprétation en exhibant simplement la structure correspondante, la correspondance des indices (ou simplement le rang de gauche à droite) indiquant que, par exemple, la j-ième relation, $0 \leqslant j \leqslant n$, est l'image du j-ème symbole de prédicat pour l'interprétation considérée. On écrira donc :

$$\mathfrak{U} = (A, \overline{\mathbf{P}}_0, ..., \overline{\mathbf{P}}_n ; \overline{\mathbf{f}}_0, ..., \overline{\mathbf{f}}_m, \overline{\mathbf{c}}_0, ..., \overline{\mathbf{c}}_q)$$

Enfin, si les symboles de $\mathscr{L}$ sont familiers, on utilisera l'écriture (par exemple) :

$$\mathfrak{U} = (A, \leqslant, +, .)$$

malgré les risques de confusion entre les symboles du langage et leurs images par l'interprétation ; en cas

de doute, le mieux est de revenir à l'écriture explicite :

$$\mathfrak{A} = (A, \overline{\leqslant}, \overline{+}, \dot{\cdot})$$

Une interprétation étant donnée, il y a du sens à se demander à quelles conditions un énoncé est vrai. On dira par exemple que :

$\exists v_1 \, \forall v_2 \, \neg R v_2 \, v_1$ est vrai dans $\mathfrak{A} = (\mathbf{N}, <)$ *ssi*

il existe un nombre n tel que pour tout m, $m \not< n$.

mais cette explication évidente de la tournure : « σ est vrai dans $\mathfrak{A}$ » n'est pas encore une définition *générale* de la notion de vérité d'un énoncé dans une interprétation.

L'idée d'une définition inductive s'impose d'elle même. Mais ici surgit la difficulté notée en V.3 qu'il n'y a pas de définition inductive de S, parce qu'un énoncé peut être construit à partir d'une formule contenant une variable libre. Si $\sigma = \forall x \varphi$ (il est admis qu'en général φ contient x libre), il n'y a pas de sens à chercher à définir les conditions de vérité de σ à partir de celles de φ, parce qu'il est dénué de sens de se demander si φ est vrai ou faux dans $\mathfrak{A}$. En revanche, il y a du sens à demander, à propos de chaque élément d de l'ensemble A, si oui ou non :

la formule φ est vraie dans $\mathfrak{A}$
« pour autant que φ parle de d »

ou, comme nous dirons désormais, si oui ou non :

la formule φ est *satisfaite* par d dans $\mathfrak{A}$.

Et il est clair que si pour tout $d \in A$, φ est satisfaite par d, alors $\sigma = \forall x \varphi$ est vrai dans A ; si par contre il existe un élément d tel que φ n'est pas satisfaite par d, σ est faux.

On voit que la définition de la vérité doit passer par la notion plus générale (parce qu'appropriée à des formules contenant des variables libres) de satisfaction. Cependant, même la notion de satisfaction d'une formule par un élément manque de généralité ; si φ est à son tour $\exists y \psi$, ψ est (éventuellement) vrai dans $\mathfrak{A}$ « pour autant que ψ parle de deux éléments d et $d' \in A$ », autrement dit, ψ est (éventuellement) satisfait par une *paire ordonnée* d'éléments de A.

Introduisons la notation utile :

$$\varphi \, (v_0 \ldots v_n)$$

pour indiquer une formule φ dont les variables libres forment un sous-ensemble de $\{v_0, \ldots, v_n\}$ (φ contient *au plus* les n+1 premières variables, dans l'ordre d'énumération, comme variables libres ; et il n'est pas requis que toutes ces variables figurent libres dans φ, ni bien sûr qu'elles y figurent dans cet ordre !). La question cruciale, au vu des remarques précédentes, est de définir en général, pour une formule $\varphi(v_0 \ldots v_n)$, la notion d'être satisfait par une suite $(d_0, \ldots, d_n)$ d'éléments de A, étant entendu que cette suite assigne des valeurs aux variables libres de φ : plus précisément, le i-ème élément de la suite étant assigné comme valeur de la i-ème variable dans l'ordre alphabétique.

Mairie de Médiathèque PARIS PEREIRE

REMARQUE

Un exemple simple éclaircira peut-être la réelle complexité de la chose (et motivera en même temps la présentation un peu différente que nous introduirons ultérieurement, et qui nous évitera d'utiliser les suites dans la définition de la satisfaction). Soit la formule :

$$R v_1 \, v_0$$

et une interprétation $\mathfrak{A} = (A, \overline{R})$; soient enfin deux éléments d et d' de A tels que : $(d, d') \in \overline{R}$, et $(d', d) \notin \overline{R}$.

La réponse naturelle à la question des conditions de satisfaction est la suivante : une suite satisfait la formule *ssi* le couple d'éléments de A dont la suite attribue les première et deuxième coordonnées comme

valeurs aux variables (libres) de la formule prises dans l'ordre d'énumération, si ce couple, donc, appartient à la relation $\overline{R}$.

Notons : v_0 |d' d| la valeur assignée à la variable v_0 par la suite (d', d) ; et v_1 |d' d| la valeur assignée à la variable v_1 par la même suite ; d'après ce que nous venons de dire :

$$Rv_1\ v_0 \text{ est satisfaite par (d', d) } ssi$$
$$(v_1\ |d'\ d|,\ v_0\ |d'\ d|) \in \overline{R}$$

et le i-ème élément de la suite étant affecté comme valeur à la i-ème variable selon l'ordre alphabétique :

$$ssi\ (d, d') \in \overline{R}$$

puisque :

$$v_1\ |d'\ d| = d$$

et :

$$v_0\ |d'\ d| = d'$$

ce qui est le cas dans notre exemple ; donc la suite (d', d) satisfait la formule, ce qui n'est pas le cas de la suite (d, d'), comme le lecteur peut le vérifier.

Dernière complication dans la réalisation de notre programme : puisqu'on définit par induction la notion de satisfaction, il faut tenir compte de *toutes* les variables, libres et liées, d'une formule : car il peut y avoir *plus* de variables libres dans une sous-formule de φ que dans φ (pensons au cas où $\varphi = \forall x\psi$!). Une solution est de considérer des suites infinies d'éléments du domaine (Tarski, 1936). La solution que nous adopterons ici est de considérer des *assignations* qui affectent un élément du domaine comme valeur à *chaque* variable du langage (comme en I^re^ partie, nous considérions des distributions, et non des systèmes de valeurs pour les atomes présents dans telle ou telle formule).

Une assignation $s : \mathscr{V} \to A$ est donc une application (quelconque) de l'ensemble des variables de $\mathscr{L}$ dans l'univers d'une structure d'interprétation. Nous pouvons à présent définir de manière formelle :

l'assignation s satisfait φ dans $\mathfrak{A}$.

ou en abrégé :

$$\mathfrak{A} \models \varphi\ |s|$$

REMARQUE

Pour simplifier, nous allons nous situer dans le cas où $\mathscr{L}$ ne comporte ni constantes d'individu, ni symboles de fonction, cas où $\text{Term}(\mathscr{L}) = \mathscr{V}$; de même, dans les démonstrations ultérieures de ce chapitre, nous nous limiterons à ce cas (pour ne pas augmenter les difficultés de compréhension). Cependant, en vue des chap. VII et VIII, le lecteur doit avoir un aperçu de ce que doit être la définition de la satisfaction en relation avec des langages comportant (au moins) des constantes d'individu. Dans le cas général, il faut d'abord définir une extension de s :

$$\bar{s} : \text{Term}(\mathscr{L}) \to A$$

l'idée étant que $\bar{s}(t)$ soit l'élément de A nommé par t ; la définition procède ainsi :

(I) $\bar{s}(x) = s(x)$, pour chaque variable x ;

(II) $\bar{s}(\mathbf{c}) = \overline{\mathbf{c}}$, pour chaque constante d'individu ;

(III) $\bar{s}(\mathbf{f}t_1 \ldots t_m) = \overline{\mathbf{f}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_m))$, où **f** est un symbole de fonction à m places.

Le lecteur studieux est invité à réécrire pour lui-même la définition de la satisfaction dans le cas général où il faut considérer $\bar{s}$ et non plus seulement s, en raison de la présence dans $\mathscr{L}$ de constantes d'individu et de symboles de fonction.

(I) φ est atomique et de la forme : $\mathbf{P}x_1 \ldots x_n$

$$\mathfrak{A} \models \varphi\ |s|\ ssi\ (s(x_1), \ldots, s(x_n)) \in \mathbf{P}$$

φ est atomique et de la forme : $x \approx y$
(dans un langage avec identité) ; dans ce cas :

$$\mathfrak{A} \models x \approx y\ |s|\ ssi\ s(x) = s(y)$$

(II) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi\ |s|$ *ssi* $\mathfrak{A} \models \varphi\ |s|$,

où « $\not\models$ » abrège : « ne satisfait pas » ;

$\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)\ |s|$ *ssi*, si $\mathfrak{A} \models \varphi\ |s|$, alors $\mathfrak{A} \models \psi\ |s|$;

(III) $\varphi = \forall x\psi$; évidemment une assignation qui satisfait ψ ne satisfait pas pour autant φ : il faut encore que *toute* assignation identique à s sauf au plus sur la variable x satisfasse également ψ. On peut exprimer cette condition ainsi :

$\mathfrak{A} \models \forall x\psi\ |s|$ *ssi* pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi\ |s\frac{x}{d}|$

où l'assignation $s\frac{x}{d}$ est définie par :

$$s\frac{x}{d}(y) = \begin{cases} s(y) & \text{si } x \neq y \\ d & \text{si } x = y \end{cases}$$

(Noter que $s\frac{x}{d}$ a bien la propriété désirée : elle est identique à s en tout point sauf éventuellement en x : à x elle donne la valeur d.)

La première moitié de la tâche est achevée ; il reste à définir la notion de vérité dans le cas où φ est un énoncé. Pour cela, nous allons montrer qu'une assignation nous donne trop d'informations, i.e. que la relation de satisfaction ne dépend que des valeurs que donne une assignation aux variables libres d'une formule. C'est l'objet du prochain théorème.

Exercice

Montrer, en revenant à sa définition, que « $\exists$ » a bien sa signification attendue, i.e. que :
$\mathfrak{A} \models \exists x\psi\ |s|$ *ssi* pour au moins un élément $d \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \psi\ \left|s\frac{x}{d}\right|$$

THÉORÈME VI.1 (Théorème de coïncidence) :

Soit φ $(v_0 \ldots v_n)$ une formule et $\mathfrak{A}$ une structure d'interprétation ; soient s_1 et s_2 deux assignations telles que : $s_1(v_i) = s_2(v_i)$ si v_i est une variable libre de φ : alors :

$$\mathfrak{A} \models \varphi\ |s_1|\ \textit{ssi}\ \mathfrak{A} \models \varphi\ |s_2|$$

Preuve

(I) φ est atomique, de la forme $Px_1 \ldots x_n$:

$\mathfrak{A} \models \varphi\ |s_1|$ *ssi* $(s_1(x_1), \ldots, s_1(x_n)) \in \overline{P}$

ssi $(s_2(x_1), \ldots, s_2(x_n)) \in \overline{P}$

ssi $\mathfrak{A} \models \varphi\ |s_2|$

φ est atomique, de la forme $x \approx y$:

$\mathfrak{A} \models x \approx y\ |s_1|$ *ssi* $s_1(x) = s_1(y)$

ssi $s_2(x) = s_2(y)$

ssi $\mathfrak{A} \models x \approx y\ |s_2|$

puisque par hypothèse les deux assignations coïncident sur toutes les variables de φ.

(II) φ est $\neg\psi$, ou $(\psi \to \chi)$: immédiat d'après l'hypothèse de récurrence ;

(III) $\varphi = \forall x\psi$: par hypothèse, s_1 et s_2 coïncident sur les variables libres de φ, qui sont les variables libres de ψ à l'exception de x ; il suffit de remarquer qu'alors, pour tout $d \in A$, $s_1\frac{x}{d}$ et $s_2\frac{x}{d}$ coïncident sur *toutes* les variables libres de ψ (cf. définition de $s\frac{x}{d}$), et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ψ ;

$\mathfrak{A} \models \forall x\psi\ |s_1|$ *ssi* pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi\ \left|s_1\frac{x}{d}\right|$

ssi pour tout d ∈ A, $\mathfrak{U} \models \psi \left|s_2 \frac{x}{d}\right|$

(par hypothèse de récurrence)

ssi $\models \forall x \psi \, |s_2|$

COROLLAIRE VI.2

$\mathfrak{U} \models \varphi \, |s|$ *ssi* φ est satisfaite dans $\mathfrak{U}$ par une (ou de façon équivalente : toute) assignation identique à s sur les variables libres dans φ.

COROLLAIRE VI.3 cas particulier où $\varphi = \sigma$:

$\mathfrak{U} \models \sigma \, |s|$ *ssi* σ est satisfait dans $\mathfrak{U}$ par une (ou toute) assignation.

Les deux corollaires sont immédiats : de même que les assignations sont indifférentes sauf en ce qui concerne les variables libres d'une formule, de même elles sont indifférentes (tout court) pour un énoncé. Autrement dit, soit un énoncé est satisfait par toute assignation dans $\mathfrak{U}$, soit il n'est satisfait par aucune. Dans le premier cas, l'énoncé est vrai ou *valide* dans $\mathfrak{U}$, dans le second il est faux dans $\mathfrak{U}$. Nous pouvons enfin définir :

σ est vrai dans $\mathfrak{U}$,

ou en abrégé :

$$\mathfrak{U} \models \sigma ;$$

DÉFINITION

$\mathfrak{U} \models \sigma$ *ssi* pour tout s, $\mathfrak{U} \models \sigma \, |s|$,

(ou de manière équivalente,

ssi il existe s tel que $\mathfrak{U} \models \sigma \, |s|$).

Exercice

– Soit : $\mathscr{L} = \{R^2, f^1, a\}$ un langage avec identité ; soit la structure d'interprétation :

$$\mathfrak{U} = (\mathbf{N}, \bar{R} = \{(m, n) ; m \leqslant n\},$$

$\bar{f}$ définie par : $\bar{f}(n) = n+1$, $\bar{a} = 0$)

On considère une assignation $s : \mathscr{V} \to \mathbf{N}$ définie par : $s(v_k) = k$; (i.e. $s(v_0) = 0$, $s(v_1) = 1$, etc.).

Est-il vrai que :

$$\mathfrak{U} \models ffa \approx ffv_0 \, |s|, \quad \mathfrak{U} \models Rafv_1 \, |s|,$$

$$\mathfrak{U} \models (fv_1 \approx ffv_0 \to \forall v_0 \, Rv_0 \, fv_0) \, |s| \, ?$$

– En utilisant les clauses (I)-(II)-(III) de la définition de la satisfaction, expliciter, relativement à une interprétation $\mathfrak{U}$ et une assignation s quelconques, les conditions de satisfaction des formules suivantes :

$Px \to \forall x Px$, $\quad \forall x (Px \to Qx)$,

$Px \to Px$, $\quad \forall x (Px \to Px)$,

$\exists x \, Px \to \forall x \, Px$, $\quad \forall x \, Px \to Py$,

$\forall x \forall y \, Rxy \to \forall x \, Rxx$, $\quad \forall x \exists y \, Rxy \to \exists y \forall x \, Rxy$.

Le lecteur vérifiera sur ces exemples que dans le cas des énoncés, l'assignation considérée n'intervient pas dans la description explicite des conditions de vérité.

– Caractériser les modèles possibles des formules suivantes :

$$\forall x \forall y \; x \approx y$$

$$\forall x \forall y \; Rxy$$

$$\forall x \forall y \; \neg Rxy$$

$\forall x \, Px \; V \; \forall x \, \neg Px$ $\qquad$ $\exists x \, \exists y \; x \approx y$

(On entendra par « caractériser un modèle » : énoncer la propriété que doit avoir une interprétation pour être un modèle d'une formule : par exemple, est un modèle de $\exists x \, \neg Px$ toute interpré-

tation où $\bar{P}$ est distinct de la partie pleine [du domaine].)

VI.2 VALIDITÉ ET CONSÉQUENCE LOGIQUE

DÉFINITIONS

– Une formule φ est *satisfiable ssi* il existe une interprétation $\mathfrak{A}$ et une assignation s telles que s satisfait φ dans $\mathfrak{A}$;

– Un ensemble Γ de formules est *satisfiable ssi* les formules de Γ sont simultanément satisfiables ;

– Une formule φ est *valide dans* $\mathfrak{A}$ *ssi* elle est satisfaite dans $\mathfrak{A}$ par toute assignation ;

– Une formule φ est *valide* (et on écrit : « $\models \varphi$ ») *ssi* elle est satisfaite dans toute interprétation par toute assignation ; par exemple, comme le lecteur l'aura remarqué, la formule : $\forall x\ Px \rightarrow Py$ (cf. l'exercice précédent) est valide.

– Une formule φ est *réfutable ssi* φ n'est pas valide (i.e., $\neg\varphi$ est satisfiable) ;

– Un ensemble Σ d'énoncés admet $\mathfrak{A}$ pour *modèle ssi* $\mathfrak{A}$ est un modèle de chaque énoncé $\sigma \in \Sigma$ (ou : chaque élément σ de Σ est vrai dans $\mathfrak{A}$).

Une preuve mathématique (de théorèmes à partir d'axiomes d'une théorie, ou de théorèmes déjà démontrés) peut être considérée comme une méthode permettant d'établir l'existence de la relation de *conséquence logique* qui a lieu entre les axiomes et les théorèmes de la théorie. Cette relation est caractérisable en termes de modèles ; considérons par exemple un groupe, i.e. un domaine G d'éléments muni d'une opération binaire (ou loi de composition interne) qui

est un modèle des axiomes de la théorie des groupes, i.e. où ces axiomes sont vrais (cf. les énoncés 1), 3), 4) de la p. 157, V.1). Lorsqu'on affirme qu'un certain énoncé A est conséquence logique (s'ensuit de, est dérivable de, etc.) des axiomes de la théorie des groupes, on veut dire par là qu'on s'attend à ce que A soit vrai dans tout groupe, c'est-à-dire dans tout modèle des axiomes en question. Cette considération motive les définitions suivantes :

– Une formule φ est *conséquence loqique* d'un ensemble Γ de formules (en abrégé : « $\Gamma \models \varphi$ ») *ssi* dans toute interprétation, toute assignation qui satisfait simultanément les formules de Γ satisfait φ ;

– Un énoncé σ est *conséquence logique* d'un ensemble Σ d'énoncés (en abrégé : « $\Sigma \models \sigma$ ») *ssi* tout modèle de Σ est modèle de σ.

Exercice

On dit parfois que $\mathfrak{A}$ est un modèle d'une formule φ *ssi* φ est valide dans $\mathfrak{A}$; montrer qu'alors on ne peut cependant définir : « $\Gamma \models \varphi$ », par la clause : « *ssi* tout modèle de Γ est modèle de φ », où Γ est un ensemble de formules (suggestion : considérer $\Gamma = \{Px\}$, et remarquer que : $\{Px\} \not\models \forall x\ Px$, par exemple...).

Comme en calcul des énoncés, (cf. Lemme II.9) il y a une connexion importante entre la relation de conséquence logique et la notion de satisfiabilité :

LEMME VI.4 $\Gamma \models \varphi$ *ssi* Γ ; $\neg\varphi$ n'est pas satisfiable.
La preuve est laissée en exercice.

LEMME VI.5 Γ ; $\varphi \models \psi$ *ssi* $\Gamma \models (\varphi \rightarrow \psi)$.
(cf. Th. II.10.)

Nous poursuivons en établissant la validité de quelques *schémas* de formules du calcul des prédicats. Outre l'intérêt intrinsèque de ces démonstrations, nous utiliserons certains de ces résultats ultérieurement, quand nous construirons au chapitre suivant un système formel qui comportera certains de ces schémas comme *schémas d'axiomes.*

REMARQUE 7.4

Ici se pose la question des méthodes disponibles pour établir la validité de ces schémas. Il pourrait sembler séduisant, suivant l'exemple du Calcul des énoncés, d'adopter la démarche suivante : prouver la validité d'un certain nombre de formules, puis *via* un résultat analogue au théorème de substitution (cf. Th. II.3), conclure que toutes les formules obtenues par « substitution » (moyennant une définition raisonnable de la substitution) à partir de ces formules primitives, sont elles aussi valides ; et finalement représenter cet état de chose par un usage systématique de schémas de formules.

Pour ce qui est de la première étape, il doit être possible de montrer sans trop de peine, du moins dans les cas relativement simples, que les conditions de satisfaction sont nécessairement réalisées dans toute interprétation et pour toute assignation : ceci en s'appuyant sur la définition de la satisfaction. Imaginons qu'on veuille prouver :

$$\models \forall v_1\ Pv_1 \rightarrow Pv_3$$

On pourrait procéder ainsi :

Preuve

Soit $\mathfrak{A}$ une structure d'interprétation telle que :

$$\mathfrak{A} \models \forall v_1\ Pv_1$$

pour une assignation s quelconque, on a :

$$\mathfrak{A} \models \forall v_1\ Pv_1\ |s|$$

i.e. pour tout $d \in A$:

$$\mathfrak{A} \models Pv_1\ \left|s\ \frac{v_1}{d}\right|$$

donc en particulier pour l'élément $d = s(v_3)$:

$$\mathfrak{A} \models Pv_1\ \left|s\ \frac{v_1}{s(v_3)}\right|$$

i.e. :

$$s(v_3) \in \overline{P}$$

i.e. :

$$\mathfrak{A} \models Pv_3\ |s|$$

Par le Th. VI.5 :

$$\models \forall v_1\ Pv_1 \rightarrow Pv_3$$

L'ennui provient plutôt de la substitution : d'une part, comme nous opérons les substitutions dans le cadre de langages chaque fois déterminés, la notion de formule substituable dans des formules est relative à chacun de ces langages, et notre notion de substitution risque de manquer de généralité. D'autre part et surtout, un Théorème de substitution doit faire appel ici à une notion passablement compliquée de « substitution » pour être formulé correctement. Reprenons l'exemple traité à l'instant : si cela a du sens de substituer au symbole « P » la formule (disons) : $\exists v_0\ Rv_0\ v_4$, ce qui donne :

$$\forall v_1\ \exists v_0\ Rv_0\ v_1 \rightarrow \exists v_0\ Rv_0\ v_3$$

cela n'en a aucun d'y substituer, disons :

$$\exists v_4\ Fv_4$$

autrement dit, il faut que les formules substituées au symbole « P » contiennent au moins autant de variables *libres* que les énoncés ouverts « Pv_1 », « Pv_3 ».

De plus, si la formule substituée contient *plus* de

variables libres, il faut spécifier de quelles variables de cette formule les variables « v_1 », « v_3 », vont prendre la place, pour savoir si le résultat de la substitution de (disons) : $Rv_0\ v_4$ dans notre formule doit être compris comme :

$$\forall v_1\ Rv_0\ v_1 \rightarrow Rv_0\ v_3$$

ou bien plutôt comme :

$$\forall v_1\ Rv_1\ v_4 \rightarrow Rv_3\ v_4$$

Mais même ainsi définie, la substitution doit être soumise à des clauses restrictives supplémentaires pour que la validité soit préservée à coup sûr lors de la substitution (le lecteur français peut consulter sur ce point Quine 1950). Cette démarche est donc très onéreuse ; comme le note Henkin : « L'établissement complet et correct en termes syntaxiques des conditions sous lesquelles ce type de substitution est permis s'est révélé si ardu (...) qu'il est souhaitable de chercher des formulations alternatives du calcul fonctionnel (i.e. des prédicats) où ce type de substitution n'est pas mentionné » (Henkin, " Banishing the Rule of Substitution for Functionnal Variables", *J.S.L.*, 1953).

Nous préférons donc choisir une autre méthode : démontrer directement la validité de schémas de formules (en sachant que la question de savoir quelles sont les formules représentées par les schémas dépend du langage relativement auquel nous travaillons). Les preuves de validité qui suivent sont des démonstrations « informelles », qui font appel à l'intuition et à la compréhension du lecteur, par opposition aux preuves « formelles » et aux procédures mécaniques ou algorithmiques qui seront introduites au chapitre suivant.

THÉORÈME VI.6 Si φ est une instance de tautologie, alors $\models \varphi$.

DÉFINITION

Une formule φ est une *instance de tautologie* de $\mathscr{L}$ (en abrégé : Taut.) *ssi* il existe une tautologie φ'

comportant les atomes $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$, et φ est obtenue à partir de φ' par substitution aux $\mathbf{a}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ des formules ψ_1, ..., ψ_n de $\mathscr{L}$.

Exercice

Les formules suivantes sont-elles des instances de tautologie (relativement à un langage $\mathscr{L}$) :

$Pv_2 \rightarrow Pv_2$, $\quad \forall v_1\ (Pv_1 \rightarrow Pv_1)$
$Qv_0 \rightarrow \exists v\ Qv_0$, $\quad \exists v_1\ \forall v_4\ Rv_1\ v_4\ \mathrm{V} \neg\ \exists v_1\ \forall v_4\ Rv_1\ v_4$?

Preuve de VI.6 :

Soient $\mathfrak{U}$ et s une interprétation et une assignation quelconques, pour lesquelles chacune des formules ψ_i est, ou n'est pas, satisfaite. On définit une distribution de valeur de vérité δ par :

$$\delta(\mathbf{a}_i) = \text{Vrai } ssi\ \mathfrak{U} \models \psi_i\ |s|$$

Puisque les sous-formules χ de φ construites à partir des ψ_i le sont uniquement par application des connecteurs propositionnels, on a (point qu'en toute rigueur il faut établir par récurrence) :

$$\mathfrak{U} \models \chi\ |s|\ ssi\ \overline{\delta}(\chi') = \text{Vrai}$$

où χ' est la formule correspondant à χ dans φ'. Puisque φ' est une tautologie, $\overline{\delta}(\varphi') = \text{Vrai}$, et donc :

$$\mathfrak{U} \models \varphi\ |s|$$

pour toute interprétation et toute assignation.

THÉORÈME VI.7 $\models \forall x\varphi \rightarrow (\varphi)x/t$, si le terme t est librement substituable à x dans φ.

La démonstration de ce théorème en toute généralité, pour un langage comportant éventuellement des constantes d'individu et des symboles de fonction, est quelque peu lourde ; nous allons en présenter, conformément au plan annoncé p. 180, une forme simplifiée pour le cas où $\mathrm{Term}(\mathscr{L}) = \mathscr{V}$.

Si nous regardons la démonstration donnée p. 186, qui concerne une instance de ce schéma, nous voyons que dans le cas où φ n'est pas atomique, il nous faut un moyen de passer de la ligne (1) à la dernière ligne ; il nous faut savoir que :

LEMME VI.8 (lemme de substitution) :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left| s \frac{x}{s(y)} \right| \textit{ ssi } \mathfrak{A} \models (\varphi)x/y \,|s|$$

si y est librement substituable à x dans φ.

Autrement dit, il revient au même de donner à x la valeur s(y), c'est-à-dire d'opérer un changement d'assignation, ou de substituer à x la variable y. (Nous limitons la formulation du lemme au cas où $\mathrm{Term}(\mathscr{L}) = \mathscr{V}$, bien qu'il y ait un lemme analogue correspondant au cas général.)

Preuve

(I) φ est atomique, par exemple de la forme Px :

$$\mathfrak{A} \models Px \left| s \frac{x}{s(y)} \right| \textit{ ssi } s\frac{x}{s(y)}(x) \in \overline{P}$$

$$\textit{ssi } s(y) \in \overline{P}$$

$$\textit{ssi } \mathfrak{A} \models (Px)x/y \,|s|$$

dans le cas où φ est : $x \approx z$, il est évident que :

$$\mathfrak{A} \models x \approx z \left| s \frac{x}{s(y)} \right| \textit{ ssi } s(y) = s(z)$$

$$\textit{ssi } \mathfrak{A} \models (x \approx z)x/y \,|s|$$

(II) φ est $\neg\psi, (\psi \rightarrow \chi)$: immédiat d'après l'hypothèse de récurrence ;

(III) $\varphi = \forall z\psi$; x est libre dans φ, i.e. $x \neq z$, et y est librement substituable dans φ, donc en particulier $y \neq z$;

$$\mathfrak{A} \models \forall z\psi \left| s \frac{x}{s(y)} \right|$$

ssi pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi \left| s \frac{x}{s(y)} \frac{z}{d} \right|$

ssi pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi \left| s \frac{z}{d} \frac{x}{s(y)} \right|$

(puisque $x \neq z$, il s'agit de la même assignation)

ssi pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models (\psi)x/y \left| s \frac{z}{d} \right|$

(par hypothèse de récurrence, et compte tenu du fait que $y \neq z$, et donc que : $s \frac{z}{d}(y) = s(y)$; le fait qu'il s'agisse de l'assignation $s \frac{z}{d}$ à la dernière ligne, et non de s, ne change rien à la valeur de y, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ψ sans tenir compte de la valeur de z)

$$\textit{ssi } \mathfrak{A} \models (\forall z\psi)x/y \,|s|$$

THÉORÈME VI.9 (cas particulier de VI.7) :

$$\models \forall x\varphi \rightarrow (\varphi)x/y,$$

si y est librement substituable à x dans φ.

Preuve

Soient $\mathfrak{A}$ et s une interprétation et une assignation telles que :

$$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi \ |s| \ ;$$

pour tout $d \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{d}\right|$$

en particulier pour $d = s(y)$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{s(y)}\right|$$

et par le lemme de substitution :

$$\mathfrak{A} \models (\varphi)x/y \ |s|$$

On a donc montré :

$$\forall x\varphi \models (\varphi)x/y$$

et par le Th. VI.5 :

$$\models \forall x\varphi \rightarrow (\varphi)x/y$$

THÉORÈME VI.10 $\models \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$, si x n'est pas libre dans φ.

Preuve

Soient $\mathfrak{A}$ et s telles que :

$$\mathfrak{A} \models \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) \ |s|$$

i.e. pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi) \left|s \frac{x}{d}\right|$

i.e. pour tout $d \in A$:

si $\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{d}\right|$, alors $\mathfrak{A} \models \psi \left|s \frac{x}{d}\right|$;

par le Corollaire VI.2, x n'étant pas libre dans φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{d}\right| \textit{ ssi } \mathfrak{A} \models \varphi \ |s|$$

et donc :

si $\mathfrak{A} \models \varphi \ |s|$, alors

pour tout $d \in A$, $\mathfrak{A} \models \psi \left|s \frac{x}{d}\right|$

i.e. $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \ |s|$

(intuitivement : tout élément d qui, assigné comme valeur à x, satisfait φ, satisfait ψ ; mais le choix de cet élément n'affecte pas la question de la satisfaction de φ : si φ est satisfait, il l'est par tout d assigné comme valeur à x, et en vertu de la première implication, ψ est satisfait par tout élément assigné comme valeur à x).

Exercice

Afin de clarifier l'importance de la restriction « si x n'est pas libre dans φ », trouver une instance de ce schéma qui ne respecte pas la restriction et montrer qu'une telle formule n'est pas valide (pour cela, trouver un « contre-exemple », i.e. une interprétation et une assignation où la formule n'est pas satisfaite).

THÉORÈME VI.12 (Changement des variables liées) :

$$\models \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y(\varphi)x/y,$$

si y n'est pas libre dans $\forall x\varphi$ et est librement substituable à x dans φ.

Exercice

Montrer directement (à partir de la définition de la satisfaction) que :

$$\models \forall v_0\, Pv_0 \leftrightarrow \forall v_3\, Pv_3$$

Afin de clarifier l'importance des deux restrictions mentionnées dans l'énoncé du Th. VI.12, trouver une paire de formules telles que :

1) l'une résulte de l'autre par changement d'une variable liée ;

2) les deux restrictions ne sont pas respectées ;

3) les deux formules ne sont pas logiquement équivalentes.

Nous prouvons d'abord : $\models \forall x\varphi \rightarrow \forall y(\varphi)x/y$, sous les deux restrictions ; l'autre moitié de la preuve (correspondant au « si... ») suppose un résultat intermédiaire, ou Lemme de congruence, que nous établirons dans un instant.

Preuve

Soient $\mathfrak{A}$ et s une interprétation et une assignation telles que :

$$\mathfrak{A} \models \forall x\varphi \ |s|$$

i.e. pour tout d $\in$ A, $\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{d}\right|$;

par le Corollaire VI.2, puisque y n'est pas libre dans $\forall x\varphi$:

pour tout d, d' $\in$ A, $\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{x}{d} \frac{y}{d'}\right|$

i.e. pour tout d, d' $\in$ A, $\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{y}{d'} \frac{x}{d}\right|$

(les deux assignations étant la même dans le cas où $x \neq y$, qui est le seul cas à considérer : si $x = y$ cf. Th. VI.6)

en particulier pour d = d' = $s \frac{y}{d'}(y)$:

pour tout d' $\in$ A, $\mathfrak{A} \models \varphi \left|s \frac{y}{d'} \frac{x}{s \frac{y}{d'}(y)}\right|$

par le Lemme de substitution (VI.8) :

pour tout d' $\in$ A, $\mathfrak{A} \models (\varphi)x/y \left|s \frac{y}{d'}\right|$

i.e. $\mathfrak{A} \models \forall y(\varphi)x/y \ |s|$

LEMME VI.11 (Lemme de congruence) : si les deux restrictions sont respectées :

$$\varphi = ((\varphi)x/y)\ y/x$$

Autrement dit :

a) toutes les occurrences de y dans $(\varphi)x/y$ qui sont

libres occupent la place d'occurrences libres de x dans φ ;

b) toutes les occurrences de x libres dans φ sont remplacées par des occurrences de y libres dans $(\varphi)x/y$;

Si bien que pour finir : $\forall x\varphi$ est congru à $\forall y(\varphi)x/y$: lors de la substitution, les « renvois de référence » n'ont pas été bouleversés.

Preuve

(I) φ est atomique, par exemple de la forme Px :

$$((Px)x/y)y/x$$
$$= (Py)y/x$$
$$= Px$$

La situation est analogue si $\varphi = x \approx z$; de manière générale, les seules occurrences de y viennent de la première substitution, puisque y n'a pas d'occurrence dans φ.

(II) φ est $\neg\psi$, ou $(\psi \to \chi)$: immédiat d'après l'hypothèse de récurrence ;

(III) $\varphi = \forall z\psi$: il faut d'abord noter que le seul cas intéressant est celui où x est libre dans φ, et donc $x \neq z$; dès lors :

$$(\forall z\psi)x/y = \forall z(\psi)x/y$$

de plus, comme il n'y a pas d'occurrence libre de y dans φ (première restriction), il n'y en a pas non plus dans ψ ; et comme y est librement substituable à x dans $\forall z\psi$ (seconde restriction), on est sûr que $y \neq z$; donc :

$$(\forall z(\psi)x/y)y/x = \forall z((\psi)x/y)y/x$$

si bien que finalement :

$$((\forall z\psi)x/y)\ y/x$$

$$= \forall z\ ((\psi)x/y)\ y/x$$
$$= \forall z\psi$$ (par hypothèse de récurrence) ce qui achève la démonstration du lemme.

Il reste à prouver la seconde moitié du Th. VI.12, i.e. :

$\models \forall y(\varphi)x/y \to \forall x\varphi$ (sous les mêmes conditions)

Preuve

Soient $\mathfrak{U}$ et s telles que $\mathfrak{U} \models \forall y(\varphi)x/y\ |s|$: d'après la première moitié du Théorème VI.12 :

$$\mathfrak{U} \models \forall x((\varphi)x/y)\ y/x\ |s|$$

puisque x n'a pas d'occurrence libre dans $(\varphi)x/y$, et est librement substituable à y dans $(\varphi)x/y$ (le lecteur est invité à vérifier cette dernière affirmation) ; d'après le Lemme de congruence (Lemme VI.11) :

$$((\varphi)x/y)y/x = \varphi$$

et donc :

$$\mathfrak{U} \models \forall x\varphi\ |s|$$

ce qui achève la démonstration du Théorème VI.12.

THÉORÈME VI.13 (Théorème de remplacement) :

Soient φ une formule et ψ une sous-formule de φ ; soit ψ' une formule *logiquement équivalente* à ψ ; si φ' est obtenue à partir de φ par remplacement d'une ou plusieurs occurrences de ψ par ψ', alors :

$$\models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$$

(Le lecteur aura compris que deux formules sont logiquement équivalentes *ssi* dans toute interprétation toute assignation qui satisfait l'une satisfait l'autre, et réciproquement.) La démonstration, par récurrence sur la construction de φ, est laissée en exercice.

En appliquant de façon itérée le théorème de changement des variables liées (qui permet d'obtenir une formule équivalente à une formule donnée) aux sous-formules d'une formule φ, et en appliquant le théorème de remplacement, on peut obtenir à partir de φ une formule φ' telle que :
1) chaque occurrence de quantificateur y lie une variable différente ; 2) aucune variable n'y apparaît à la fois libre et liée ; 3) φ' soit équivalente à φ.

Exercice

A partir de la formule :

$$\forall v_0\ (\exists v_0\ Rv_0\ v_1 \rightarrow \forall v_1\ Sv_1\ v_0)$$

obtenir une formule qui satisfasse les trois conditions mentionnées ; prouver directement (en utilisant la définition de la satisfaction) qu'elle est logiquement équivalente à la formule donnée.

THÉORÈME VI.14 (Théorème des clôtures universelles et existentielles) :

VI.14.1 : $\varphi(v_0 \ldots v_n)$ est satisfiable ssi $\exists v_0 \ldots \exists v_n\ \varphi$ (la clôture existentielle de φ) est satisfiable.

Preuve

D'après la définition de la satisfaction, $\exists v_n\ \varphi$ est satisfiable *ssi* φ est satisfiable ; même raisonnement jusqu'à la n+1-ième étape.

VI.14.2 : $\varphi(v_0 \ldots v_n)$ est valide *ssi* $\forall v_0 \ldots \forall v_n\ \varphi$ (la clôture universelle de φ) est valide.

Preuve

Même raisonnement.

Exercice

Montrer, en donnant une interprétation appropriée (un exemple et un « contre-exemple ») que les formules suivantes sont satisfiables, mais non valides :

$Px \leftrightarrow \forall x\ Px$, $\quad \forall x\ \exists y\ Rxy \rightarrow \exists y \forall x\ Rxy$

$\exists x\ Px \rightarrow Px$, $\quad (\exists x\ Px \wedge \exists y\ Qy) \rightarrow \exists x\ (Px \wedge Qx)$

CHAPITRE VII

Un système formel pour le calcul de la déduction

VII.1 LA NOTION DE PREUVE FORMELLE

Les preuves de validité données au chapitre précédent, comme dans les raisonnements mathématiques en général, consistent en des suites finies (que serait une « preuve » de longueur infinie ?) d'énoncés tels que le lecteur est censé comprendre, avec un peu de bonne volonté et éventuellement l'aide d'indications complémentaires, que chacun de ces énoncés s'ensuit logiquement des énoncés précédents dans la suite. Malheureusement, la question de savoir dans quelle mesure une telle suite constitue bien une preuve du dernier énoncé qui y figure n'admet pas de réponse déterminée, parce que les étapes qui peuvent paraître obvies à l'un peuvent paraître défectueuses à l'autre, parce que finalement nous manquons d'un critère précis pour décider si oui ou non telle suite donnée d'énoncés constitue bien une preuve au sens strict de tel ou tel énoncé. L'objet de ce chapitre est de donner une solution précise à ce problème, en déterminant un concept précis, ou effectif, de preuve. Nous caractériserons de façon formelle, ou syntaxique, les axiomes que nous admettrons à titre de formules primitives, et

par des règles d'inférence les transformations formelles que nous nous autorisons sur ces formules afin d'engendrer de nouvelles formules. Ainsi nous disposerons d'une procédure mécanique de preuve, au sens où nous pourrons décider si oui ou non telle suite donnée de formules constitue bien une preuve, ou encore engendrer par application mécanique des règles de nouvelles preuves ; le terme « calcul », dans l'expression « calcul de la déduction », est donc à prendre dans son sens littéral : un tel système a pour but de réaliser le « *Calculemus* ! » Leibnizien : remplacer le raisonnement par un calcul sur les signes.

A cette fin, nous allons construire un *système formel* (axiomes et règles d'inférences) qui nous permettra de *dériver*, à partir d'un ensemble Γ de formules, de nouvelles formules. Quand une *dérivation formelle* (ou preuve) d'une formule φ à partir de Γ aura été construite, nous dirons que φ est un *théorème* de Γ, en abrégé :

(1) $$\Gamma \vdash \varphi$$

Bien sûr ce fait à lui seul ne nous permet pas d'affirmer ce que nous voulons savoir, i.e. que φ est conséquence logique de Γ, ou :

(2) $$\Gamma \models \varphi$$

Pour conclure de (1) à (2), il nous faut savoir que le système formel est *correct* (ou fiable : "sound"), i.e. que si nous avons une dérivation formelle de φ à partir de Γ, alors φ est conséquence logique de Γ ; c'est l'objet du Théorème de fiabilité ("Soundness Theorem"), qui montre que (1) implique (2). Inversement, sommes-nous assurés de trouver une dérivation formelle de φ à partir de Γ toutes les fois où, en fait, il est vrai que φ est conséquence logique de Γ ? Évidemment, si ce point n'est pas établi, notre projet d'utiliser notre système formel comme procédure de preuve est sans espoir : il se pourrait que certaines formules soient en

fait conséquences logiques d'autres formules sans que nous puissions jamais établir ce point. Heureusement, le Théorème de complétude établit que réciproquement :

si $\Gamma \models \varphi$, alors $\Gamma \vdash \varphi$,

i.e. que notre système formel est *complet*, au sens où toute conséquence d'un ensemble de formules peut être obtenue par une preuve dans le système.

REMARQUE

Que la notion de preuve formelle soit effective, au sens où devant une suite donnée de formules il est toujours possible de décider si oui ou non cette suite constitue une preuve formelle, n'entraîne nullement que la notion de théorème soit elle-même décidable, au sens où il serait toujours possible, devant une formule donnée, de décider si oui ou non il s'agit d'un théorème relativement à un ensemble de formules. Que le système soit complet ne fournit pas une réponse au problème de la décision (par rapport à la validité ou à la relation de conséquence logique) ; certes si une formule φ est effectivement conséquence de Γ, l'application systématique des règles du système permettra en un temps fini (éventuellement fort long, mais que notre ingéniosité peut abréger !) de construire une preuve de φ à partir de Γ. Mais si inversement φ *n'est pas* conséquence logique de Γ, nous ne serons pas capables d'établir ce point par application des règles du système (le fait qu'au bout d'un temps donné une preuve ne soit pas construite ne signifie évidemment pas que la réponse est non).

On caractérise parfois la situation en disant que l'ensemble des conséquences logiques de Γ (ou l'ensemble des formules valides : cas où $\Gamma = \emptyset$) est *effectivement énumérable*, au sens où nous disposons d'une procédure effective qui répond oui ! (i.e. produit une preuve) *ssi* la relation de conséquence a bien lieu ;

mais elle peut ne pas répondre (plutôt que répondre : non !) si ce n'est pas le cas.

Le système formel que nous introduisons à présent (d'autres sont possibles !) comporte un nombre infini d'axiomes, en particulier, mais pas seulement (cf. le premier groupe), parce qu'il est présenté à travers des *schémas* d'axiomes : toutes les instances de ces schémas sont donc des axiomes du système.

(I) *Axiomes du premier groupe* :
– toutes les instances de tautologies (Taut.) sont des axiomes ;

(II) *Axiomes de la quantification* :
Ax_1 : $\forall x\varphi \rightarrow (\varphi)x/t$, si t est librement substituable à x dans φ ;
Ax_2 : $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$, si x n'est pas libre dans φ.

On note Λ l'ensemble des axiomes : bien qu'il soit infini, Λ est décidable : en ce qui concerne le premier groupe, nous utilisons le fait (cf. I^re^ partie) que l'ensemble des tautologies est décidable ; pour le groupe (II), il est toujours possible de décider, devant une formule donnée, si oui ou non, il s'agit d'une instance d'un des deux schémas.

Notre système ne comporte pas d'axiomes pour l'identité (les motifs de cette limitation ont été invoqués en Introduction). Il est donc approprié à des langages du premier ordre sans identité ; en relation avec cette limitation, nous admettrons dans ce qui suit que nos langages ne comportent pas de symbole de fonction (i.e. les seuls termes sont les variables et éventuellement des constantes d'individu).

Règles (primitives) d'inférence : une règle d'inférence permet, à partir d'axiomes ou de formules déjà données, d'obtenir de nouvelles formules :

(I) Modus Ponens, ou Règle de détachement (M.P.) :
de φ et de $(\varphi \rightarrow \psi)$, inférer ψ ;
(II) Règle de généralisation (G) :
de φ, inférer $\forall x\varphi$.

Dérivation formelle

Soit Γ un ensemble de formules ; une dérivation formelle de φ à partir de Γ est une suite finie $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de formules telle que : $\varphi_n = \varphi$, et telle que, pour chaque $i \leqslant n$, ou bien :

(1) $\varphi_i \in \Lambda \cup \Gamma$ (i.e. φ_i est un axiome ou une formule de Γ),

(2) φ_i provient de formules φ_j, $\varphi_k = (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$, où j, $k < i$, par Modus Ponens,

(3) φ_i provient de φ_j ($j < i$) par application de la règle G, si x n'est pas libre dans les formules de Γ (i.e. $\varphi_i = \forall x\varphi_j$).

Une formule φ est un *théorème* de Γ *ssi* il existe une dérivation de φ à partir de Γ ; on note le fait que φ est un théorème de Γ en écrivant :

$$\Gamma \vdash \varphi$$

si $\Gamma = \emptyset$, on écrira simplement : $\vdash \varphi$, et on dira que φ est un *théorème du Calcul des prédicats*.

REMARQUES

(1) Si $\Gamma \vdash \varphi$, et si $\Gamma \subseteq \Gamma'$, alors $\Gamma' \vdash \varphi$;
(on peut rajouter des hypothèses). Ceci découle immédiatement de la définition de $\vdash$; en particulier les théorèmes du Calcul des prédicats sont dérivables de n'importe quel ensemble de formules.

(2) Si $\Gamma \vdash \varphi$, alors il existe un sous-ensemble fini $\Gamma_0 \subset \Gamma$ minimal tel que la suite $(\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi)$ est une dérivation de φ à partir de Γ_0 : précisément, appartiennent à Γ_0 les formules φ_i de la dérivation qui ne sont ni des axiomes, ni des conséquences de

formules antérieures par application d'une des règles.

(3) Si (I) $\Gamma \vdash \varphi$; et si (II) $\Gamma ; \varphi \vdash \psi$, alors : $\Gamma \vdash \psi$.
(note : « $\Gamma ; \varphi \vdash \psi$ » abrège : « $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ »)
Preuve : par (I) il existe une dérivation $(\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi)$ à partir de Γ ; et par (II) une dérivation $(\psi_1, ..., \psi_m = \psi)$ à partir de $\Gamma ; \varphi$; dans cette dérivation, si pour un certain $i < m$, $\psi_i = \varphi$, il suffit d'insérer la dérivation $(\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi)$ et l'on a une dérivation de ψ à partir de Γ.

EXEMPLE DE DÉRIVATION

On veut prouver que :

$$\{Px\} \vdash \forall y\ (Fy \rightarrow Px)$$

On écrit l'une au-dessous de l'autre les formules de la dérivation et la règle utilisée à chaque étape est indiquée à droite de la formule obtenue par une application de cette règle :

1.	Px	hyp.
2.	$Px \rightarrow (Fy \rightarrow Px)$	Taut.
3.	$Fy \rightarrow Px$	MP 1/2
4.	$\forall y\ (Fy \rightarrow Px)$	Règle G sur 3

REMARQUE

A propos de la restriction sur la règle G dans la définition de $\Gamma \vdash \varphi$:

La restriction est motivée par des considérations sémantiques, au sens où nous voulons que si φ est dérivable, φ soit conséquence logique de Γ. Si nous élargissions notre définition de « dérivation » en omettant la restriction sur x, il deviendrait vrai que :

$$Px \vdash \forall x\ Px$$

(la dérivation prend deux lignes !), alors que bien évidemment :

$$Px \not\models \forall x\ Px$$

Cependant la règle doit être présentée sans restriction : pensons au cas où $\Gamma = \emptyset$, et où l'on veut « généraliser » sur un axiome ou sur un théorème du Calcul des prédicats qui peut éventuellement comporter x libre : regardons la dérivation :

1.	$Px \rightarrow Px$	Taut
2.	$\forall x\ (Px \rightarrow Px)$	règle G sur 1.

Du point de vue sémantique, 1. étant valide, sa clôture universelle l'est aussi.

EXEMPLE 2

Dérivation d'un schéma de théorème du Calcul des prédicats.

On veut montrer que :

$\vdash \varphi x/t \rightarrow \exists x\varphi$, si t est libre pour x. |TH 1|

(Le signe « |TH ...| » sera dorénavant utilisé pour les théorèmes formels du système, qu'on ne confondra pas avec les théorèmes « sur » le système.)
c'est-à-dire que : $\vdash \varphi x/t \rightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$

1.	$\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi x/t$	Ax_1
2.	$(\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \neg\ \varphi x/t) \rightarrow (\varphi x/t \rightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi)$	Taut.
3.	$\varphi x/t \rightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$	MP 1.2.

EXEMPLE 3 :

On veut montrer : $\vdash \forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$ |TH 2|

1.	$\forall x\varphi \rightarrow \varphi$	Ax_1
2.	$(\forall x\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi))$	Taut.
3.	$(\varphi \rightarrow \exists x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$	MP 1.2.

On peut imaginer que la dérivation de $(\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$ est réinsérée ici ; d'où :

4.	$(\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$	MP 3. et TH 1

note : au sens strict, la suite de formules 1.2.3.4. ne constitue pas une dérivation formelle de TH 2, mais

revient à l'affirmation que, puisqu'il y a une dérivation de $(\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$, alors il existe une dérivation de $(\forall x\varphi \rightarrow \exists x\varphi)$, qu'on pourrait écrire *in extenso*. On a là un cas particulier de la Remarque 3 (où $\Gamma = \emptyset$), qu'on utilisera désormais comme « règle dérivée » (cf. *infra*). Au prix d'un léger abus, nous conviendrons d'utiliser dorénavant les théorèmes déjà démontrés dans les dérivations en application tacite de la Remarque 3.

Nous prouvons maintenant un théorème (non pas un théorème du système, mais un « méta »-théorème au sujet de notre système) qui permet de conclure, de l'existence d'une dérivation donnée, à l'existence d'une autre dérivation qui, pour cette raison, n'a pas besoin d'être effectivement construite. Cependant, la démonstration même du théorème, comme de toutes les *règles dérivées* qui seront ultérieurement introduites, doit être effective, au sens où elle doit nous indiquer comment, à partir de la dérivation donnée, il est possible de construire effectivement la dérivation dont l'existence est prouvée : afin de ne pas perdre le bénéfice d'une procédure effective de preuve, il est essentiel que nous puissions exhiber à la demande la preuve dont l'existence est affirmée.

THÉORÈME VII.1 (Théorème de la déduction) :

$$\Gamma ; \varphi \vdash \psi \textit{ ssi } \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

Preuve

a) Si $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, alors $\Gamma ; \varphi \vdash \psi$:
si $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, il y a une dérivation de $(\varphi \rightarrow \psi)$ à partir de $\Gamma ; \varphi$ (Remarque 1). Par une application du MP sur φ et sur $(\varphi \rightarrow \psi)$, on a une dérivation de ψ à partir de $\Gamma ; \varphi$.

b) Si $\Gamma ; \varphi \vdash \psi$, alors $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$:
puisque $\Gamma ; \varphi \vdash \psi$, il existe une dérivation $(\psi_1, ..., \psi_n = \psi)$. On montre par récurrence sur la longueur de la dérivation que pour chaque formule ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_i)$$

(1) $i = 1$: ou bien $\psi_1 = \varphi$ et dans ce cas ; $(\varphi \rightarrow \varphi)$ étant une instance de tautologie :

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_1) ;$$

ou bien $\psi_1 \in \Lambda \cup \Gamma$ et dans ce cas :

$\Gamma \vdash \psi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1)$ Taut.

$\Gamma \vdash \psi_1$

d'où :

$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_1)$ MP

(2) Supposons que $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_m)$ pour tout $m < i$:
plusieurs cas sont encore possibles :

(I) soit $\psi_i = \varphi$, soit $\psi_i \in \Lambda \cup \Gamma$; dans ces deux cas, on a comme en (1) : $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_i)$

(II) soit ψ_i provient de ψ_j, $\psi_k = (\psi_j \rightarrow \psi_i)$, $j, k < i$, par MP ; par hypothèse de récurrence :

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_j)$$

et :

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)$$

comme :

$\vdash \varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i))$ Taut.

$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_i)$ MP 2 fois

(III) soit $\psi_i = \forall x \psi_j$, par la règle G et x n'est donc pas libre dans $\Gamma ; \varphi$;
par hypothèse de récurrence :

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi_j)$$

d'où : $\Gamma \vdash \forall x\, (\varphi \rightarrow \psi_j)$ règle G

d'où : $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \forall x\, \psi_j)$ Ax_2

note : il se pourrait à vrai dire qu'on ait appliqué

la règle G dans la dérivation initiale bien que φ comporte x libre ; mais c'est qu'alors φ n'intervient pas réellement dans la dérivation, i.e. ne figure pas dans l'ensemble minimal Γ_0 (Remarque 2) ; donc on a $\Gamma \vdash \psi_i$ et le résultat que $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi_i)$ est trivial.

La démontration est achevée pour i = n.

Voici un exemple d'application du Théorème de la déduction comme règle dérivée (de manière générale, une règle dérivée permet d'inférer, d'une preuve donnée, l'existence d'une autre preuve). Nous voulons prouver que :

$$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi) \qquad |\text{TH } 3|$$

On montre d'abord que :

$$\{\forall x\,(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \forall x\psi$$

en construisant une dérivation :

1. $\forall x\,(\varphi \to \psi)$	hyp.
2. $\forall x\varphi$	hyp.
3. $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	Ax_1
4. $\varphi \to \psi$	MP 1.3.
5. $\forall x\varphi \to \varphi$	Ax_1
6. φ	MP 2.5.
7. ψ	MP 4.6.
8. $\forall x\psi$	Règle G

D'après le Théorème de la déduction :

$$\{\forall x\,(\varphi \to \psi)\} \vdash \forall x\varphi \to \forall x\psi$$

et par une seconde application du théorème :

$$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

Exercice

Afin de se convaincre que la preuve du Théorème de la déduction est effective au sens défini plus haut, le lecteur est invité, à partir de la dérivation donnée ci-dessus, et en utilisant les indications fournies par la preuve du théorème, à construire *in extenso* la preuve du |TH 3|.

L'avantage pratique considérable qu'il y a à utiliser le Théorème de la déduction apparaîtra clairement !

Il est agréable de pouvoir faire l'économie, chaque fois que cela est possible, de l'écriture intégrale des dérivations recherchées : à cette fin, nous introduisons (et nous justifions) d'autres règles dérivées, qui se révéleront utiles par la suite.

(1) MODUS PONENS comme règle dérivée :
Si $\Gamma \vdash \varphi$ et $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$, alors $\Gamma \vdash \psi$.

(La preuve est évidente : à partir des deux premières dérivations, une application de M.P. permet de détacher ψ, ce qui constitue une dérivation de ψ à partir de Γ.)

En utilisant cette preuve et en omettant de rappeler que : $\Gamma \vdash \varphi$ quand φ est une des hypothèses de Γ, en omettant de même de rappeler que : $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$ quand la formule : $(\varphi \to \psi)$ est un axiome ou un théorème du Calcul des prédicats dèjà démontré, on peut aboutir à un style « concis » de preuves dont chaque ligne correspond à l'affirmation de l'existence d'une dérivation formelle : on écrit simplement à droite de la ligne la justification de cette affirmation (justification qui consistera éventuellement à mentionner la règle dérivée qui est utilisée) ; cette justification

indique comment on pourrait, le cas échéant, écrire explicitement la dérivation. Si l'on reprend l'exemple précédent en adoptant ce style abrégé, on obtiendra, à la place de la dérivation donnée, la suite d'affirmations suivantes :

$\{\forall x\ (\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi)$ $\quad Ax_1$, M.P.
$\{\forall x\ (\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \varphi$ $\quad Ax_1$, M.P.
$\{\forall x\ (\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \psi$ $\quad$ M.P.
$\{\forall x\ (\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \vdash \forall x\psi$ $\quad$ Règle G

(2) RÈGLE $\leftrightarrow$:

Si $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$ et $\Gamma \vdash (\psi \to \varphi)$,
alors $\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Preuve

Il est vrai que :
$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi))$ Taut.
sous les deux hypothèses, par deux applications de M.P. :

$$\Gamma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Exercice

En appliquant la Règle $\leftrightarrow$ et en adoptant le style concis de preuve proposé, montrer que :

$\vdash \forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ |TH 4|
$\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y(\varphi)x/y,$ |TH 5|

sous les deux restrictions habituelles (cf. Th. VI.12).

(3) RÈGLE DE CONTRAPOSITION (Règle C) :

$\Gamma ; \varphi \vdash \neg\psi$ *ssi* $\Gamma ; \psi \vdash \neg\varphi$

Preuve

Si $\Gamma ; \varphi \vdash \neg\psi$,
alors : $\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\psi)$ Th. VII.1
d'où : $\Gamma \vdash (\psi \to \neg\varphi)$ Taut., M.P.
et : $\Gamma ; \psi \vdash \neg\varphi$ Th. VII.1
La démonstration est la même dans l'autre sens.

Exercice

En utilisant la Règle C (et les autres règles disponibles), prouver que :

$\vdash \forall x\ \neg\varphi \to \neg\ \exists x\varphi$ |TH 6|
$\vdash \forall x\ \neg\varphi \leftrightarrow \neg\ \exists x\varphi$ |TH 7|
$\vdash \exists x\ \neg\varphi \leftrightarrow \neg\ \forall x\varphi$ |TH 8|

(4) RÈGLE DE REDUCTIO AD ABSURDUM (Règle R.A.) :

$\Gamma \vdash \varphi$ *ssi* $\Gamma ; \neg\varphi$ est inconsistant.

DÉFINITION

Un ensemble Γ de formules est *inconsistant ssi* il existe une formule ψ telle que à la fois :

$$\Gamma \vdash \psi \quad \text{et} \quad \Gamma \vdash \neg\psi.$$

Preuve de (4) :

(I) si $\Gamma \vdash \varphi$, alors : $\Gamma ; \neg\varphi \vdash \varphi$; (cf. Remarque 1 de la p. 205) ; et comme :

$$\Gamma ; \neg\varphi \vdash \neg\varphi,$$

L'ensemble $\Gamma ; \neg\varphi$ est clairement inconsistant.

(II) si $\Gamma ; \neg\varphi$ est inconsistant, alors il existe une formule ψ telle que à la fois :

$$\Gamma ; \neg\varphi \vdash \psi \text{ et } \Gamma ; \neg\varphi \vdash \neg\psi ;$$

par le Th. VII.1, on a à la fois :

$$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \psi)$$

et : $$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi)$$

comme :

$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$ Taut.

il en résulte que :

$\Gamma \vdash \varphi$ M.P. 2 fois

Exercice

On veut montrer que :

$$\vdash \exists x\, \forall y \varphi \to \forall y\, \exists x \varphi \quad |\text{TH 9}|$$

montrer d'abord que l'ensemble : $\{\forall x\, \neg\varphi, \forall y\varphi\}$ est inconsistant ; utiliser alors la Règle R.A., puis les autres règles disponibles pour montrer que :

$$\{\exists x\, \forall y\varphi\} \vdash \forall y\, \exists x\varphi,$$

et appliquer le Th. VII.1.

(5) RÈGLE DE GÉNÉRALISATION SUR CONSTANTE : Si $\Gamma \vdash \varphi$, et **c** est une constante d'individu sans

occurrence dans les formules de Γ ; si de plus x est une variable qui n'a pas d'occurrence libre dans φ, alors $\Gamma \vdash \forall x(\varphi)\ \mathbf{c}/x$, et il y a une dérivation qui ne fait pas intervenir **c**.

Preuve

Soit une dérivation $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi)$ et soit y la première variable qui n'apparaît dans aucune des φ_i ; on montre que $((\varphi_1)c/y, \ldots, (\varphi_n)\ c/y)$ est une dérivation à partir de Γ.

cas 1 : $\varphi_i \in \Lambda$: alors $(\varphi)_i\ c/y \in \Lambda$;

cas 2 : $\varphi_i \in \Gamma$: alors $(\varphi_i)\ c/y = \varphi_i$, puisque **c** n'a pas d'occurrence dans les formules de Γ ;

cas 3 : φ_i provient par M.P. de φ_j, $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$ où j, k < i ;

$$(\varphi_k)\ c/y = ((\varphi_j)\ c/y \to (\varphi_i)\ c/y)$$

et $(\varphi_i)\ c/y$ est obtenu par M.P. à partir de $(\varphi_j)\ c/y$, $(\varphi_k)\ c/y$;

cas 4 : $\varphi_i = \forall x\varphi_j$, et φ_i est obtenu par la Règle G à partir de φ_j, j < i

$(\varphi_i)\ c/y = (\forall x\varphi_j)\ c/y = \forall x(\varphi_j)c/y$, et donc $(\varphi_i)\ c/y$ est obtenu par la Règle G à partir de $(\varphi_j)\ c/y$; donc : $\Gamma \vdash (\varphi)\ c/y$;

comme y a été choisi de sorte qu'il n'ait pas d'occurrence libre dans les formules de l'ensemble minimal $\Gamma_0 \subset \Gamma$, on peut appliquer la règle G, d'où :

$$\Gamma \vdash \forall y\ (\varphi)\ c/y$$

Considérons à présent une variable x sans occurrence libre dans φ ; on a :

$$((\varphi)\ c/y)\ y/x = (\varphi)\ c/x$$

Comme par ailleurs :

$\{\forall y\ (\varphi)\ c/y\} \vdash ((\varphi)\ c/y)\ y/x$ $\quad Ax_1$

on a finalement :

$$\{\forall y(\varphi)\ c/y\} \vdash (\varphi)\ c/x$$

comme x n'a pas d'occurrence libre dans φ :

$$\{\forall y(\varphi)\ c/y\} \vdash \forall x(\varphi)\ c/x \qquad \text{Règle G.}$$

et en vertu de la Remarque 3 de la p. 206 :

$$\Gamma \vdash \forall x(\varphi)\ c/x.$$

Exercice

Prouver que :

$$\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx),\ \forall y\ Py\} \vdash Qa\ ;$$

en utilisant les indications de la démonstration de (5), construire à partir de la dérivation obtenue une dérivation où ne figure pas a et qui prouve que :

$$\{\forall x\ (Px \rightarrow Qx),\ \forall y\ Py\} \vdash \forall x\ Qx$$

En utilisant (5), montrer que :

$$\vdash \forall x\ \forall y\ Rxy \rightarrow \forall y\ Ryy$$

et en général que :

$$\vdash \forall x\ \forall y\varphi \rightarrow \forall y(\varphi)\ x/y \qquad |\text{TH 10}|$$

Nous abordons à présent la réalisation du programme annoncé : pour commencer, nous montrons que le système formel est correct, ou « consistant avec la notion de conséquence logique » (on dit aussi : « sémantiquement consistant »). C'est l'objet du :

THÉORÈME VII.2 (Théorème de fiabilité) :

Si $\Gamma \vdash \varphi$, alors : $\Gamma \models \varphi$.

Preuve

On prouve par récurrence sur la longueur de la dérivation $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi)$ de φ à partir de Γ que pour tout φ_i, on a :

$$\Gamma \models \varphi_i$$

Bien évidemment, on a choisi comme axiomes du système des formules valides (cf. Th. VI.6, VI.7, et VI.10) ; mais il faut s'assurer que les règles d'inférence « préservent la validité », i.e. qu'à partir de formules vraies elles ne permettent d'obtenir que des formules vraies (cf. ci-dessous (II) et (III).

a) $i = 1$, et $\varphi_1 \in \Lambda \cup \Gamma$;
dans ce cas : $\Gamma \models \varphi_1$;
b) supposons que : $\Gamma \models \varphi_m$, pour tout $m < i$;
trois cas sont possibles ;

(I) $\varphi_i \in \Lambda \cup \Gamma$, et en ce cas à nouveau : $\Gamma \models \varphi_i$;

soit (II) φ_i provient de φ_j, $\varphi_k = (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$, $j, k < i$, par M.P. ;
Par hypothèse de récurrence :

$$\Gamma \models \varphi_j$$

et :
$$\Gamma \models (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$$

supposons que : $\Gamma \models \varphi_i$; alors il existe une interprétation $\mathfrak{A}$ et une assignation s qui satisfont Γ et telles que :

$$\mathfrak{A} \models \varphi_j\ |s|$$
$$\mathfrak{A} \models (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)\ |s|$$

et :
$$\mathfrak{A} \models \varphi_i\ |s|$$

ce qui est contradictoire (cf. déf. de la satisfaction).

soit (III) $\varphi_i = \forall x\varphi_j$, et provient d'une application de la règle de généralisation ; x n'est donc pas libre dans Γ. Dans toute interprétation $\mathfrak{A}$, et pour toute assignation s qui satisfait les formules

de Γ, s $\frac{x}{d}$, pour tout d $\in$ A, satisfait les formules de Γ (cf. Corollaire VI.2) ; par hypothèse de récurrence :

$$\Gamma \models \varphi_j$$

et donc, pour tout d $\in$ A :

$$\mathfrak{A} \models \varphi_j \left| s \frac{x}{d} \right|$$

i.e. : $\mathfrak{A} \models \forall x \varphi_j \, |s|$

d'où : $\Gamma \models \forall x \varphi_j$

DÉFINITION

Un ensemble de formules est *consistant ssi* il n'est pas inconsistant (cf. Règle 4).

COROLLAIRE VII.3 Ø est *consistant.*

(Autrement dit, on ne peut dériver une formule et sa négation à partir des axiomes !)

REMARQUE

Selon la définition de la notion de consistance adoptée ici, dire qu'un ensemble est consistant, c'est dire qu'il n'existe pas de formule ψ telle qu'on puisse dériver ψ et $\neg\psi$ à partir des formules de l'ensemble. On parle parfois plus précisément à propos de cette notion de consistance relativement à la transformation de ψ en $\neg\psi$; (Church, 1956). Une notion voisine est celle de *consistance absolue* : il y a au moins une formule qui n'est pas un théorème (*ibid.*). A titre d'exercice, le lecteur peut chercher à s'assurer que les deux définitions sont équivalentes.

Preuve de VII.3 :

Supposons qu'il existe une formule ψ telle que à la fois : $\vdash \psi$, et $\vdash \neg\psi$;

par VII.2 : $\models \psi$, et $\models \neg\psi$, i.e. ψ et sa négation seraient toutes deux valides, ce qui est impossible.

L'introduction de la notion (syntaxique) de consistance permet d'exprimer d'une autre manière le caractère correct (la fiabilité) du système formel : comme une relation entre la propriété de consistance et la notion sémantique de satisfiabilité. L'intérêt de cette autre formulation apparaîtra tout à l'heure, en relation avec le problème de la complétude du système.

COROLLAIRE VII.4 Si Γ est *satisfiable*, Γ est *consistant.*

Preuve

C'est là une conséquence immédiate de VII.2 : supposons qu'un ensemble Γ satisfiable soit inconsistant : alors pour une formule ψ :

$$\Gamma \vdash \psi \text{ et } \Gamma \vdash \neg\psi$$

par Th. VII.2 :

$$\Gamma \models \psi \text{ et } \Gamma \models \neg\psi$$

i.e. Γ n'est pas satisfiable, car une interprétation et une assignation ne peuvent satisfaire à la fois une formule et sa négation.

En fait, le Corollaire VII.4 est équivalent au Théorème VII.2 ; nous venons de montrer la moitié de cette équivalence, en concluant de VII.2 à VII.4 : réciproquement, la fiabilité découle de l'implication établie par le corollaire.

Exercice

Montrer que tel est bien le cas, i.e. que : sous l'hypothèse de VII.4. :

si $\Gamma \vdash \varphi$, alors $\Gamma \models \varphi$.

Cette équivalence entre la fiabilité et l'implication du Corollaire VII.4 conduit à se demander si la propriété de complétude sémantique ne pourrait pas elle aussi s'exprimer en termes de relation entre consistance et satisfiabilité.

Or c'est bien le cas ;

Supposons pour l'instant que nous ayons prouvé la complétude du système, i.e. que :

si $\Gamma \models \varphi$, alors $\Gamma \vdash \varphi$ **(A)**

alors on peut prouver la réciproque de VII.4 :

si Γ est consistant, Γ est satisfiable. **(B)**

Preuve

Supposons que Γ ne soit pas satisfiable ; alors pour toute formule φ :

$\Gamma \models \varphi$ et $\Gamma \models \neg\varphi$

par **(A)** : $\Gamma \vdash \varphi$ et $\Gamma \vdash \neg\varphi$

i.e. Γ est inconsistant.

Mais inversement, supposons que nous ayons montré **(B)** ; alors la complétude en découle.

La preuve est laissée en exercice (suggestion : utiliser le Lemme VI.4 et la Règle R.A.).

Finalement, de même que VII.2 et VII.4 sont équivalents, de même **(A)** et **(B)** sont équivalents.

La démonstration de la complétude sémantique en termes de relation entre consistance et satisfiabilité est due à Henkin (1949) : le prochain paragraphe sera consacré à une version légèrement modifiée de cette démonstration (la traduction française de la version originale se trouve dans *Logique mathématique : Textes*). L'intention de Henkin était, en particulier, de retrouver par cette voie le résultat de Gödel (1930) : toute formule valide est un Théorème formel du Calcul des prédicats.

Exercice

En utilisant toutes les règles d'inférence disponibles et le Th. VII.2, prouver que :

$\models (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$,

si x n'est pas libre dans φ.

$\models (\exists x\psi \to \varphi) \to \forall x(\psi \to \varphi)$,

sous la même restriction.

$\models \forall x(\psi \to \varphi) \to (\exists x\psi \to \varphi)$,

sous la même restriction.

$\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x\ (\psi \to \varphi)$,

sous la même restriction.

Montrer que :

$\forall x(Px \to Qx), \forall xPx, \neg Qa \vdash \forall yFy$.

VII.2 LE THÉORÈME DE COMPLÉTUDE

Nous prouvons dans ce paragraphe que tout ensemble consistant d'énoncés a un modèle, i.e. est satisfiable. Nous ne considérerons ici que des ensembles d'*énoncés*, en vue d'un léger gain de simplification de la preuve (la démonstration originale de Henkin concerne également des ensembles de formules sans variable libre). Pour cela nous allons montrer successivement :

1) Que tout ensemble consistant Σ peut être étendu en un ensemble *maximal consistant* Σ'.

2) Que tout ensemble consistant Σ dans un langage $\mathscr{L}$ peut être étendu en un ensemble consistant Σ^*, ayant certaines propriétés, dans un langage $\mathscr{L}$ qui est une expansion de $\mathscr{L}$.

3) Que tout ensemble maximal consistant et possédant ces propriétés a un modèle.

DÉFINITION

Un ensemble Σ est *maximal consistant ssi* il est consistant et si tout ensemble Σ' tel que $\Sigma \subseteq \Sigma'$ est inconsistant ; en d'autres termes, on ne peut ajouter d'énoncés à Σ sans le rendre inconsistant.

Exercice

Le lecteur vérifiera aisément que si Σ est maximal consistant :

(I) $\Sigma \vdash \sigma$ *ssi* $\sigma \in \Sigma$;

(II) $\sigma \notin \Sigma$ *ssi* $\neg\sigma \in \Sigma$.

LEMME VII.5 (Théorème de Lindenbaum) :
Tout ensemble consistant Σ peut être étendu en un ensemble Σ' maximal consistant.

Preuve

Puisque l'alphabet de $\mathscr{L}$ est dénombrable, l'ensemble des suites finies sur cet alphabet (l'ensemble des expressions), et donc l'ensemble des énoncés de $\mathscr{L}$ est dénombrable.

Soit $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n, ...$ une énumération déterminée des énoncés de $\mathscr{L}$; on construit une suite d'ensembles consistants :

$$\Sigma = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset ... \subset \Sigma_n \subset ...$$

définie par :

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\sigma_n\} & \text{si cet ensemble est consistant,} \\ \Sigma_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère : $\Sigma' = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Sigma_n$; on vérifie aisément :

1) que Σ' est consistant ;

Supposons en effet que Σ' soit inconsistant : il existe alors un énoncé τ et un sous-ensemble fini (cf. VII.1 Remarque (2)) $\mathbf{T} \subset \Sigma'$ tel que :

$$\mathbf{T} \vdash \tau,$$

et de même un sous-ensemble fini $\mathbf{T}' \subset \Sigma'$ tel que :

$$\mathbf{T}' \vdash \neg\tau$$

Il existe alors un entier m tel que :
$\mathbf{T} \cup \mathbf{T}' \subset \Sigma_m$, i.e. Σ_m est inconsistant, ce qui contredit la construction des ensembles Σ_n ;

2) que Σ' est maximal consistant ;

Soit en effet $\mathbf{T}$ un ensemble consistant tel que $\Sigma' \subset \mathbf{T}$, et soit τ un énoncé de $\mathbf{T}$, disons τ_p ; puisque $\mathbf{T}$ est consistant, $\Sigma_p \cup \{\tau_p\}$ est consistant et donc :

$$\Sigma_{p+1} = \Sigma_p \cup \{\tau_p\}$$

ainsi $\tau_p \in \Sigma'$, et donc : $\mathbf{T} = \Sigma'$.

DÉFINITION

Soit Σ un ensemble d'énoncés dans un langage $\mathscr{L}$ et C un ensemble de constantes d'individu de $\mathscr{L}$. On dit que C est un *ensemble témoin* pour Σ dans $\mathscr{L}$ *ssi* pour toute formule φ de $\mathscr{L}$ comportant au plus une variable libre, disons x, il existe $\mathbf{c} \in C$ telle que :

$$\Sigma \vdash \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi(\mathbf{c}),$$

où la notation (utile dans ce paragraphe) : « $\varphi(\mathbf{c})$ » abrège : « $(\varphi)x/\mathbf{c}$ » : i.e., $\varphi(\mathbf{c})$ est le résultat du remplacement de toutes les occurrences libres de x par c dans φ.

L'idée d'ensemble témoin est intuitivement claire : un ensemble témoin permet à Σ de nommer l'éventuel « contre-exemple », i.e. l'élément qui ne satisfait pas φ. (Il est clair par ailleurs que si φ est sans variable libre, la condition est remplie.)

LEMME VII.6 Soit Σ un ensemble consistant d'énoncés de $\mathscr{L}$; soit C un ensemble dénombrable de nouvelles constantes d'individu (i.e. : $\mathscr{L} \cap C = \emptyset$), et soit $\overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup C$ l'expansion simple de $\mathscr{L}$ formée en ajoutant C à $\mathscr{L}$. Alors il existe une extension consistante Σ^* de Σ dans $\overline{\mathscr{L}}$ qui possède C comme ensemble témoin dans $\overline{\mathscr{L}}$.

Preuve

C comme $\overline{\mathscr{L}}$ étant dénombrables, on peut énumérer les constantes de C, et les formules de $\overline{\mathscr{L}}$ comportant au plus une variable libre.

Soit $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ une énumération déterminée des formules de $\overline{\mathscr{L}}$ comportant au plus une variable libre. On construit une suite d'ensembles

d'énoncés de $\overline{\mathscr{L}}$:

$$\Sigma = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset ... \subset \Sigma_n \subset ...$$

et une énumération $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n, ...$ des constantes de C telles que :

1) $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg\forall x_n\varphi_n \rightarrow \neg\varphi_n(\mathbf{c}_n)\}$

où x_n est la variable libre dans φ_n, s'il en existe une, et sinon (par convention) $x_n = v_0$;

2) $\mathbf{c}_n$ est la première constante de C sans occurrence dans les formules de Σ_n.

Nous montrons que si Σ_n est consistant, alors Σ_{n+1} est consistant. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas ; alors par la Règle R.A. :

$$\Sigma_n \vdash \neg(\neg\forall x_n\varphi_n \rightarrow \neg\varphi_n(\mathbf{c}_n))$$

d'où :

$$\Sigma_n \vdash \neg\forall x_n\varphi_n \qquad \text{Taut. et M.P.}$$

et :

$$\Sigma_n \vdash \varphi_n(\mathbf{c}_n) \qquad \text{Taut. et M.P.}$$

d'où, $\mathbf{c}_n$ n'ayant pas d'occurrence dans Σ_n, par la Règle de *généralisation sur constante* :

$$\Sigma_n \vdash \forall x_n\varphi_n$$

i.e. Σ_n est inconsistant, contrairement à l'hypothèse.

Soit maintenant $\Sigma^* = \bigcup_{n \in N} \Sigma_n$

Σ^* est une extension de Σ, et Σ^* est clairement consistant. Il reste à vérifier que C est un ensemble témoin pour Σ^* dans $\overline{\mathscr{L}}$.

Soit φ une formule de $\overline{\mathscr{L}}$ comportant au plus une variable libre, disons la formule φ_k ; alors la formule :

$$\neg\forall x_k\varphi_k \rightarrow \neg\varphi_k(\mathbf{c}_k)$$

appartient à Σ_{k+1}, et donc :

$$\Sigma^* \vdash \neg\forall x_k\varphi_k \rightarrow \neg\varphi_k(\mathbf{c}_k)$$

LEMME VII.7 Soit Σ un ensemble maximal consistant possédant un ensemble témoin C dans un langage $\mathscr{L}$; alors Σ a un modèle $\mathfrak{A}$ tel que tout élément du domaine de $\mathfrak{A}$ est l'interprétation d'une constante $\mathbf{c}$ de $\mathscr{L}$.

Preuve

Nous construisons d'abord à partir de l'ensemble Σ une interprétation pour le langage $\mathscr{L}$, puis nous montrerons que cette interprétation est un modèle de Σ. Pour des langages sans identité et sans symbole de fonction, la construction de l'interprétation est assez simple. Nous spécifions le domaine A de l'interprétation en prenant l'ensemble des constantes d'individu de $\mathscr{L}$ comme domaine ; puis nous définissons :

1) pour toute constante d'individu de $\mathscr{L}$,

$$\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c} ;$$

2) pour chaque symbole de prédicat n-aire $\mathbf{P}$ de $\mathscr{L}$, la relation $\overline{\mathbf{P}}$ par :

$(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \overline{\mathbf{P}}$ *ssi* la formule $\mathbf{Pc}_1 ... \mathbf{c}_n \in \Sigma$.

Nous prouvons maintenant que $\mathfrak{A}$ ainsi définie est un modèle de Σ, et en fait que pour chaque énoncé de $\mathscr{L}$:

$$\mathfrak{A} \models \sigma \textit{ ssi } \sigma \in \Sigma.$$

(I) pour chaque énoncé atomique $\mathbf{Pc}_1 ... \mathbf{c}_n$:

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{Pc}_1 ... \mathbf{c}_n$$

ssi

$$(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n) \in \overline{\mathbf{P}}$$

en vertu de la Remarque p. 179, et par construction de $\mathfrak{A}$,

ssi

$$\mathbf{Pc}_1 ... \mathbf{c}_n \in \Sigma$$

(II) si $\sigma = \neg\tau$, ou $\sigma = (\tau \rightarrow \rho)$,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \textit{ ssi } \sigma \in \Sigma ;$$

La preuve est laissée en exercice au lecteur (suggestion : utiliser la maximalité de Σ, et les deux résultats de l'exercice p. 222).

(III) $\sigma = \forall x\varphi$; certes nous ne pouvons procéder comme d'ordinaire en appliquant l'hypothèse de récurrence à φ, qui n'est pas (en général) un énoncé, mais comporte des occurrences libres de x. Cependant la maximalité de Σ et l'existence d'un ensemble témoin permettent de façon inhabituelle de continuer à cette étape de raisonner par récurrence sur la construction des énoncés de $\mathscr{L}$. On prouve d'abord dans un sens :

1) si $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$, alors $\forall x\varphi \in \Sigma$;

Supposons que : $\forall x\varphi \notin \Sigma$,

alors : $\neg\forall x\varphi \in \Sigma$, via la maximalité de Σ,

d'où : $\Sigma \vdash \neg\varphi(\mathbf{c})$, C étant un ensemble témoin et par M.P.,

par hypothèse de récurrence sur l'énoncé $\varphi(\mathbf{c})$ (et par la maximalité de Σ) :

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\mathbf{c})$$

ce qui contredit l'hypothèse que : $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$.

2) on prouve ensuite dans l'autre sens :

si $\forall x\varphi \in \Sigma$, alors $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$;

Supposons en effet que : $\mathfrak{A} \not\models \forall x\varphi$;

alors il existe un élément $\mathbf{c} \in A$ tel que :

$\mathfrak{A} \not\models \varphi \,|s\, \frac{x}{\mathbf{c}}|$, pour n'importe quelle assignation s, x étant la seule variable libre de φ ; par le lemme de substitution (cf. Lemme VI.8 modifié pour un langage comportant des constantes d'individu) :

$$\mathfrak{A} \not\models \varphi(\mathbf{c}) \,|s|$$

(cf. ici les remarques finales sur la preuve), d'où par hypothèse de récurrence :

$$\varphi(\mathbf{c}) \notin \Sigma,$$

ce qui contredit l'hypothèse que : $\forall x\varphi \in \Sigma$, qui entraîne : $\Sigma \vdash \varphi(\mathbf{c})$, d'où : $\varphi(\mathbf{c}) \in \Sigma$.

La preuve par récurrence sur la construction des énoncés de $\mathscr{L}$ est ainsi complète.

Quelques remarques sur l'étape (III) de la preuve :

– dans le sens 1), c'est l'existence d'un ensemble témoin et la maximalité de Σ qui sont les éléments cruciaux : s'ils faisaient défaut, il se pourrait que Σ « affirme », pour toute constante $\mathbf{c}$, $\varphi(\mathbf{c})$, sans nécessairement affirmer $\forall x\varphi$;

– dans le sens 2), l'existence d'un ensemble témoin n'intervient pas ; par contre la preuve s'appuie sur le fait suivant : de ce que, pour toute constante $\mathbf{c}$, $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{c})$, on peut conclure que : $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi$ (i.e. que tout élément du domaine satisfait φ). Cela provient de ce que tout élément du domaine est « nommé » dans le langage ; sinon, il se pourrait que pour toute constante $\mathbf{c}$ du langage, la formule $\varphi(\mathbf{c})$ soit vraie, sans que pour autant $\forall x\varphi$ soit vrai (ou, ce qui revient au même, qu'il y ait un élément d du domaine qui ne satisfasse pas φ, sans que pour autant il y ait une constante $\mathbf{c}$ du langage telle que $\varphi(\mathbf{c})$ « dise » cet état de chose).

Exercice

Reformuler le Lemme VI.8 (Lemme de substitution) pour un langage comportant des constantes d'individu (outre les variables) comme termes ;

Le démontrer sous cette forme plus générale : la démonstration suit celle de la page 190, mais opère avec l'extension $\bar{s}$ d'une assignation s (cf. Remarque p. 179).

THÉORÈME VII.8 (Complétude) : Si Σ est un ensemble consistant d'énoncés dans un langage $\mathscr{L}$, Σ a un modèle.

Preuve

Soit Σ un ensemble consistant dans $\mathscr{L}$; par le Lemme VII.6, on considère une extension Σ^* consistante de Σ dans $\mathscr{L}$, qui possède un ensemble dénombrable C comme ensemble témoin dans $\mathscr{L}$; par le Lemme VII.5, on considère une extension maximale consistante $\Sigma^{*\prime}$ de Σ^* ;

Remarquons que si un ensemble possède C comme ensemble témoin, toute extension de cet ensemble possède également C comme ensemble témoin ; par conséquent, selon le Lemme VII.7, $\Sigma^{*\prime}$ a un modèle $\mathfrak{A}$.

Le modèle $\mathfrak{A}$ de $\Sigma^{*\prime}$ est une interprétation relative au langage $\mathscr{L}$. Soit $\mathfrak{B}$ l'interprétation relative au langage $\mathscr{L}$ qui est la *réduction* de $\mathfrak{A}$ à $\mathscr{L}$: on forme la réduction $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ en conservant le même domaine d'interprétation A, et en considérant la restriction de $\mathfrak{A}$ aux symboles de $\mathscr{L}$ qui appartiennent à $\mathscr{L}$ (souvenons-nous que $\mathscr{L} = \mathscr{L} \cup \mathrm{C}$).

Puisque les énoncés de Σ ne contiennent pas les constantes de $\mathscr{L}$ qui ne sont pas dans $\mathscr{L}$, l'interprétation $\mathfrak{B}$ est un modèle de Σ.

COROLLAIRE VII.9 Tout ensemble consistant d'énoncés a un modèle dénombrable.

Preuve

Il suffit de remarquer que B = A (cf. ci-dessus) et que A a été construit en prenant l'ensemble des constantes d'individu de $\mathscr{L}$, qui est dénombrable (l'ensemble des constantes d'individu de $\mathscr{L}$ est au plus dénombrable, mais peut être vide, et C est dénombrable, cf. VII.6).

COROLLAIRE VII.10 (Gödel, 1930) : Pour toute formule φ,

$$\text{si } \models \varphi, \text{ alors } \vdash \varphi.$$

Preuve

Considérons d'abord le cas où φ est un énoncé σ ;
Supposons que : $\nvdash \sigma$; alors par R.A. :

$\{\neg\sigma\}$ est consistant ;

par le Théorème VII.8 :

$\{\neg\sigma\}$ a un modèle,

i.e. σ n'est pas valide.

Le cas d'une formule φ comportant des variables libres se laisse ramener au cas précédent : si φ est valide, sa clôture universelle est valide ; par la première moitié de la preuve, c'est un théorème du Calcul des prédicats ; des applications itérées de Ax_1 et M.P. font que : $\vdash \varphi$.

Il semble que le premier texte publié où la question de la complétude sémantique du calcul des prédicats est explicitement posée soit Hilbert-Ackermann 1928 : « La question de savoir si le système d'axiomes est complet au sens où toutes les formules logiques qui sont correctes ("richtig") dans chaque domaine d'individus (note : la deuxième édition de 1938 remplace cette expression peu claire par : « les formules universellement valides ("allgemeingültige Formeln") du calcul des prédicats ») peuvent en être dérivées, est à ce jour une question non résolue. On sait seulement, de manière purement empirique, que ce système axiomatique suffit pour toutes les applications. »

La dissertation de doctorat de Gödel, *Über die vollständigkeit des logikkalküls* (1929), montra que la réponse était affirmative. Nous donnons ici la traduction d'un abstract de Gödel datant de 1930.

« La fondation axiomatique de la logique, à la manière par exemple des *Principia Mathematica*, soulève la question de la "complétude" des axiomes initialement adoptés, i.e. la question de savoir s'ils suffisent pour la déduction de tous les énoncés corrects ("richtig") de la logique. Ce problème n'a été jusqu'ici résolu que pour les énoncés logiques les plus simples, ceux du calcul des énoncés. La réponse est positive : chaque forme propositionnelle correcte (valide) est dérivable des axiomes de *Principia Mathematica* (...). [On montre ici] comment ce théorème peut être étendu aux formules du calcul fonctionnel restreint (formules sans variables fonctionnelles liées). »

Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. I, p. 125.

Cependant, la preuve fournie par Gödel, sous la forme d'une preuve de la formulation équivalente : toute formule est ou bien réfutable (i.e. sa négation est démontrable), ou bien satisfiable dans un domaine dénombrable, procède de manière assez différente de celle apportée ici (la traduction française du texte

original de Gödel se trouve dans *Logique mathématique : Textes*).

Nous nous contentons d'indiquer ici deux résultats purement sémantiques, qui peuvent être prouvés par d'autres voies, mais qui découlent à titre de corollaires du fait que les notions de dérivabilité et de conséquence logique coïncident.

THÉORÈME VII.11 (Löwenheim-Skolem) .
Si un ensemble d'énoncés a un modèle, il a un modèle dénombrable.

Preuve

Soit Σ un ensemble d'énoncés qui a un modèle. Σ est satisfiable, donc par le Corollaire VII.4, Σ est consistant. Par le Corollaire VII.9, Σ a un modèle dénombrable.

(VII.11 est la généralisation prouvée par Skolem en 1920 du Théorème de Löwenheim [1915] concernant des ensembles finis de formules : si une formule [ou un ensemble fini de formules] est satisfiable, alors elle est satisfiable dans un domaine dénombrable.)

A propos du Th. de Löwenheim-Skolem, présenté comme résultat de l'adéquation du système formel, Henkin écrit dans l'article de 1949 : « Ce que ce cas offre de remarquable, c'est que l'assertion d'un ensemble de formules closes (i.e. d'énoncés) ne peut pas contraindre un domaine à être fini ni à être infini non-dénombrable : il existe toujours un domaine infini dénombrable qui le satisfait. »

C'est là la philosophie de la chose : on ne peut, dans les langages considérés, formuler une théorie (i.e. trouver un ensemble d'énoncés) caractérisant la cardinalité de ses modèles : en particulier, on ne peut caractériser l'infini non-dénombrable.

THÉORÈME VII.12 (Compacité) : Soit Σ un ensemble d'énoncés. Si tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle, alors Σ a un modèle.
(La réciproque est également vraie, mais est triviale.)

Preuve

Si tout sous-ensemble fini de Σ est satisfiable, par le Corollaire VII.4, tout sous-ensemble fini de Σ est consistant ; par suite Σ lui-même est consistant, puisque toute dérivation est finie (cf. Remarque 2 p. 205) ; par le Théorème VII.8, Σ a un modèle.

La discussion de l'intérêt du Théorème de compacité dépasse le cadre de cet ouvrage : une conséquence immédiate en est que même dans des langages avec identité, bien qu'on puisse caractériser telle cardinalité finie déterminée, on ne peut caractériser le fini en tant que tel : si un ensemble d'énoncés a des modèles de cardinalité finie mais arbitrairement grande, il a un modèle infini.

CHAPITRE VIII

La méthode des tableaux analytiques (ou : arbres de vérité)

Nous introduisons dans ce chapitre une nouvelle procédure de preuve pour la validité. En un sens, ce chapitre est un luxe, puisque cette procédure fait double emploi avec celle, plus traditionnelle (système d'axiomes de type Hilbertien), qui a été construite au chapitre précédent. Cependant, tant pour « son élégance et son efficacité » (Smullyan, 1968), que pour les réflexions que suggère une comparaison des deux méthodes, elle mérite considération ; à la différence de la méthode du chap. VII, celle-ci obéit au « principe de la sous-formule » : la procédure « analyse » successivement la formule traitée en ses composants. En outre, comme on le verra dans les dernières lignes, l'étude de cette méthode fournit un point de vue intéressant sur les rapports entre procédure de preuve et procédure de décision pour la validité.

Les idées fondatrices de la méthode des tableaux remontent (entre autres) à Beth, 1955 (la traduction française de l'article original est disponible dans *Logique mathématique : Textes*). Pour l'essentiel, la présentation donnée ici s'inspire de Smullyan, 1968, à quelques modifications près. Roger Martin est à l'origine de l'emploi de cette méthode en France (il a

également montré qu'elle pouvait s'étendre aux langages avec identité et symboles de fonctions).

(Pour une compréhension intuitive de la méthode, le lecteur se reportera à l'Annexe du chapitre IV.)

VIII.1 PRÉLIMINAIRES SUR LES ARBRES

Les tableaux que nous construirons sont des arbres : quelques définitions concernant les arbres s'imposent :

Un arbre (non ordonné) $\mathscr{A}$ est un triplet : (**S**, υ, R) où :

S est un ensemble d'éléments appelés points ;

υ est une fonction de **S** dans **N** qui assigne à chaque point x de **S** un entier dit le *niveau* de x.

R est une relation sur **S** satisfaisant les conditions suivantes :

(I) il existe un unique élément noté x_0 tel que :

$$\forall y \in \mathbf{S}, \neg yRx_0, \text{ et } \upsilon(x_0) = 1 ;$$

x_0 est dit l'origine de l'arbre.

(II) pour tout point x différent de l'origine, il existe un unique y tel que yRx.

(III) pour tous points x, y, si xRy, $\upsilon(y) = \upsilon(x)+1$;

(« xRy » peut être lu : « x précède y », ou ; « y est successeur de x ».)

Un point est dit *terminal ssi* il n'a pas de successeur.

Un *chemin* est une suite (finie ou dénombrable) de points telle que chaque item de la suite (sauf éventuellement le dernier) est le prédécesseur du suivant, et dont le premier est l'origine x_0.

Une *branche* est soit un chemin dont le dernier élément est un point terminal, soit un chemin infini.

REMARQUE

Il découle des propriétés de R que pour tout point x, il existe un unique chemin, noté C_x, dont le dernier terme est x.

Un arbre *dyadique* est un arbre où tout élément a au plus deux successeurs (nous ne considérerons ici que de tels arbres). Un arbre est dit *fini* si **S** a un nombre fini d'éléments, infini sinon. Un arbre est *finitaire* si chaque point a seulement un nombre fini de successeurs, *infinitaire* sinon ; manifestement tout arbre fini est finitaire, mais la réciproque n'est pas vraie : un arbre finitaire peut être infini.

LEMME VIII.1 (Lemme de König) :

Un arbre finitaire infini a au moins une branche infinie.

Preuve

Un point y est dit *dominer* x si y est sur le chemin C_x ;

Soit $\mathscr{A}$ un arbre infini et x_0 l'origine de $\mathscr{A}$: x_0 domine une infinité de points ; par hypothèse, les successeurs de x_0 sont en nombre fini : il doit donc y avoir parmi eux un point qui domine une infinité de points : soit x_1 l'un de ces points ; et de façon générale, tout point qui domine une infinité de points doit avoir au moins un successeur qui en domine également une infinité.

A chaque niveau à partir de l'origine, nous pouvons donc choisir un de ces points, ce qui génère une branche infinie (x_0, x_1, ..., x_n, ...).

EXTENSION D'UN ARBRE DYADIQUE

Soit $\mathscr{A}$ un arbre : une *extension immédiate* $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ est un arbre obtenu à partir de $\mathscr{A}$:

(I) soit en ajoutant un élément y extérieur à $\mathscr{A}$ comme unique successeur d'un élément terminal x de $\mathscr{A}$, i.e. : nous ajoutons y à **S**, la paire ordonnée (x, y) à R, et nous étendons la fonction υ de sorte que $\upsilon(y) = \upsilon(x)+1$.

(II) soit en ajoutant simultanément deux éléments y_1 et y_2 distincts extérieurs à $\mathscr{A}$ comme successeurs d'un élément terminal x de $\mathscr{A}$ (x sera dit un point de jonction), i.e. : nous ajoutons y_1 et y_2 à **S**, les paires ordonnées (x, y_1) et (x, y_2) à R, et nous étendons la fonction υ de sorte que :

$$\upsilon(y_1) = \upsilon(y_2) = \upsilon(x)+1.$$

(En relation avec la représentation graphique usuelle des arbres, y_1 sera dit le successeur à gauche, y_2 le successeur à droite de x.)

Soit $\mathscr{A}$ un arbre : $\mathscr{A}'$ est une extension de $\mathscr{A}$ *ssi* il existe une suite finie $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, ..., \mathscr{A}_n = \mathscr{A}')$, où $\mathscr{A}_1$ est une extension immédiate de $\mathscr{A}$, et chaque $\mathscr{A}_{i+1}$ est une extension immédiate de $\mathscr{A}_i$, i = 1, ..., n.

VIII.2 UN EXEMPLE DE TABLEAU ANALYTIQUE

(Le lecteur est supposé avoir quelque connaissance de la « méthode des arbres » en calcul des énoncés.)

Nous voulons « prouver » l'énoncé σ :

$$\forall v_0 (Pv_0 \rightarrow Qv_0) \rightarrow (\forall v_0 Pv_0 \rightarrow \forall v_0 Qv_0)$$

Nous construisons un « tableau pour $\neg\sigma$ » ainsi :

(1) $\neg\sigma$

(2) $\forall v_0 (Pv_0 \rightarrow Qv_0)$

(3) $\neg(\forall v_0 Pv_0 \rightarrow \forall v_0 Qv_0)$ — Règle P

(4) $\forall v_0 Pv_0$

(5) $\neg\forall v_0 Qv_0$ — Règle P sur (3)

(6) $\neg Qa$ — Règle ? sur (5)

(7) Pa — Règle ? sur (4)

(8) $Pa \rightarrow Qa$ — Règle ? sur (2)

(9) $\neg Pa$ | Qa — Règle P

* | *

Note : Par « Règle P », nous entendons l'une des règles familières utilisées pour la méthode des arbres en calcul des énoncés ; la lettre « a » est supposée être l'une des constantes d'individu disponibles dans le langage de σ.

Guidés par l'analogie avec la procédure connue en calcul des énoncés, pour prouver la validité de σ, nous considérons $\neg\sigma$ et cherchons à en dériver une contradiction. A chaque étape, nous inférons soit les conséquences directes de la formule inscrite à l'étape précédente (ligne 4 et 5 par exemple), soit la possibilité de l'une ou l'autre formule qu'indique la règle invoquée (ligne 9). Évidemment, le traitement des énoncés de la forme $\forall x\varphi$ ou $\neg\forall x\varphi$ exige l'introduction de nouvelles règles : on voit que les règles tacitement utilisées ici permettent d'*instancier* les énoncés de ce type (introduire des constantes d'individu en place de la variable quantifiée).

La description d'une procédure de construction de tableaux analytiques en 1er ordre doit donc comporter, outre les règles déjà connues, des règles d'instanciation. Bien sûr la preuve devra être fournie que la construction d'un tel tableau conformément à la méthode décrite est bien une procédure de preuve pour la validité.

VIII.3 MÉTHODE DES TABLEAUX SYSTÉMATIQUES

Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des énoncés et des ensembles d'énoncés : pour tester la validité d'une formule comportant des variables libres, nous formons sa clôture universelle (et dans la mesure [partielle] où la méthode des tableaux peut constituer une procédure de preuve pour la satisfiabilité, nous formons la clôture existentielle de la formule dont nous essayons de vérifier la satisfiabilité).

Dans les pages suivantes, les lettres φ, ψ, utilisées par commodité, doivent donc être comprises comme indiquant des énoncés quelconques.

RÈGLES POUR LA CONSTRUCTION DE TABLEAUX

Chacune de ces règles nous dit comment opérer une extension d'un tableau : la notation _____ signifie que nous « inférons » la ou les formules en dessous du trait de la formule supérieure, au sens où nous ajoutons cette ou ces formules à toutes les branches passant par la formule traitée.

1) $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$

2) $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi \quad \psi}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \quad \neg\psi}$

3) $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\varphi \quad | \quad \psi}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \quad \neg\psi}$

4) $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi \quad | \quad \psi}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi \quad \neg\psi}$

5) Règle I.U. (Instanciation Universelle) :

$$\frac{\forall x\varphi}{\varphi x/c} \qquad \frac{\neg\exists x\varphi}{\neg\varphi x/c}$$

où c est une constante d'individu quelconque *.

6) Règle I.E. (Instanciation Existentielle) :

$$\frac{\exists x\varphi}{\varphi x/c} \qquad \frac{\neg\forall x\varphi}{\neg\varphi x/c}$$

où c est à chaque application de I.E. une nouvelle constante*. Comme on le voit à la lecture des règles, les formules susceptibles d'être traitées sont de deux types : les formules en dessous desquelles on inscrit des conséquences directes, les formules qui « branchent », i.e. qui engendrent un point de jonction. Soit α une formule quelconque du 1er type (type conjonctif), β une formule quelconque du second type (type disjonctif) : les règles de construction peuvent être résumées ainsi :

Règle A : $\dfrac{\alpha}{\alpha_1 \\ \alpha_2}$ $\qquad$ Règle B : $\dfrac{\beta}{\beta_1 \quad \beta_2}$

où α_1, α_2, β_1, β_2 sont les formules spécifiées par les règles (1) à (4) suivant la forme de α, β.

Règle I.U. : $\dfrac{\gamma}{\gamma(\mathbf{c})}$ $\qquad$ Règle I.E. : $\dfrac{\delta}{\delta(\mathbf{c})}$ (où **c** est une nouvelle constante)

où $\gamma(\mathbf{c})$, $\delta(\mathbf{c})$ sont les formules spécifiées par les règles (5) et (6) suivant la forme de γ, δ.

* Le choix des constantes sera soumis à des clauses plus précises quand nous décrirons une procédure de construction de tableaux « *systématiques* ».

(1) si le langage $\mathscr{L}$ relativement auquel nous travaillons n'est pas assez riche (il peut n'avoir qu'un nombre trop petit de constantes, voire aucune) nous réalisons une expansion simple $\mathscr{L}$ de sorte que les formules inférées par I.U. et I.E. soient des formules de $\mathscr{L}$.

(2) on peut libéraliser I.E. en exigeant seulement que la constante **c** soit nouvelle à ceci près qu'elle peut avoir déjà été introduite par une application de I.U., néanmoins nous ne le ferons pas ici.

(3) il y a plusieurs manières d'étendre un tableau conformément aux règles décrites : la méthode présentée ci-dessous nous garantit que les tableaux construits auront certaines propriétés ; un tableau sera dit *systématique ssi* il est construit conformément à cette procédure.

DÉFINITIONS

Soit $\mathscr{L}$ un langage et C l'ensemble des constantes d'individu de $\mathscr{L}$:

1) une branche d'un tableau pour $\varphi \in \mathscr{L}$ est close *ssi* figure sur cette branche une formule et sa négation.

2) un tableau est clos *ssi* toutes ses branches sont closes.

3) une branche θ d'un tableau est complète *ssi* elle n'est pas close et si les conditions suivantes sont remplies :

- si α figure sur θ, α_1 et α_2 figurent sur θ.
- si β figure sur θ, β_1 ou β_2 figure sur θ.
- si δ figure sur θ, $\delta(\mathbf{c})$ figure sur θ, où **c** est une nouvelle constante.
- si γ figure sur θ, $\gamma(\mathbf{c})$ figure sur θ, *pour tout* **c** *appartenant à* C.

4) une formule est dite élémentaire *ssi* elle est atomique ou la négation d'une formule atomique.

Soit φ une formule appartenant à un langage $\mathscr{L}$ comportant un ensemble *dénombrable* C de constantes d'individu : $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_n$, ... ; un tableau systématique T pour φ est un arbre dyadique construit de la manière suivante :

Étape 1 : φ est l'origine de l'arbre

|

|

Étape n+1 : – si T est clos, STOP !

– sinon, si sur toutes les branches ouvertes, toutes les formules non élémentaires ont été traitées, STOP !

– sinon, s'il y a sur une branche ouverte une formule α ou δ non encore traitée, prendre la formule α (ou δ) de niveau minimal (i.e. la plus « haute » dans l'arbre) et étendre toute branche ouverte θ passant par α (ou δ) en (θ, α_1, α_2) ou (θ, $\delta(\mathbf{c})$) selon le cas, où **c** est la première constante sans occurrence dans l'arbre.

– sinon, s'il y a sur une branche ouverte au moins une formule β non encore traitée, prendre β de niveau minimal et étendre toute branche ouverte θ passant par β en deux branches (θ, β_1), (θ, β_2).

– sinon, s'il y a sur une branche ouverte au moins une formule γ non encore traitée, prendre la formule γ de niveau minimal, et étendre toute branche ouverte θ passant par γ en (θ, $\gamma(\mathbf{c})$, γ), où **c** est la première constante telle que $\gamma(\mathbf{c})$ ne figure pas sur θ (on rajoute $\gamma(\mathbf{c})$ comme point terminal, puis on réinscrit γ comme nouveau point terminal).

REMARQUES

1) Le libellé des règles assure qu'une branche close (i.e. où figure une formule et sa négation) est finie, puisque la procédure ne l'étend pas (nous la « fermons »).

2) On peut rendre la procédure complètement déterminée en décidant d'appliquer la règle adéquate à la formule non traitée la plus à gauche de niveau minimal ; si c'est le cas, toutes les réalisations de la procédure engendreront le même tableau.

3) Dans la pratique, on se dispensera de réinscrire γ après chaque traitement ; dans cette mesure, une formule γ reste toujours « à traiter », tant qu'elle n'a pas été instanciée pour toutes les constantes. Nous verrons (p. 251 sq) qu'on peut se limiter aux constantes figurant sur le chemin.

Trois cas, et trois cas seulement, peuvent se présenter :

1) Au bout d'un nombre fini d'étapes, le tableau pour φ est clos parce que toutes ses branches sont closes.

2) Au bout d'un nombre fini d'étapes, il y a au moins une branche ouverte, mais toute formule non atomique a été traitée, et le tableau ne peut être étendu. Ce sera le cas uniquement s'il n'y a pas de γ-formules sur les branches ouvertes :

EXEMPLE 1 :

(1)	$\neg(\exists v_0 P v_0 \rightarrow \forall v_0 P v_0)$	
(2)	$\exists v_0 P v_0$	Règle 4 A
(3)	$\neg\forall v_0 P v_0$	
(4)	Pa	I.E. sur (2)
(5)	$\neg Pb$	I.E. sur (3)

En ce cas, toute branche ouverte est complète.

3) La procédure « ne s'arrête pas » : le tableau est infini, et, via le lemme de König, comporte au moins une branche infinie ; la procédure systématique décrite ici nous assure que toute branche infinie est complète.

Finalement, un tableau systématique pour φ est soit *clos* soit *achevé* (auquel cas il peut être fini ou infini) au sens où toute branche ouverte est complète : nous allons voir l'importance de cette « complétion » des branches ouvertes, qui motive le choix particulier de cette procédure de construction.

DÉFINITION

φ est prouvable ($\vdash \varphi$) *ssi* le tableau* systématique pour $\neg\varphi$ est clos.

VIII.4 CONSISTANCE (OU FIABILITÉ) DE LA MÉTHODE DES TABLEAUX

Nous montrons maintenant que si φ est *prouvable*, φ est valide. Pour cela, nous prouvons que si la formule-origine d'un tableau est satisfiable, alors au moins une branche du tableau est satisfiable (i.e. l'ensemble des formules figurant sur la branche est satisfiable), donc ouverte.

LEMMES **VIII.2** (Lemmes de satisfiabilité) :

Soit Σ un ensemble d'énoncés dans un langage $\mathscr{L}$ comportant des constantes $\mathbf{c} \in C$:

(I) si Σ est satisfiable et $\alpha \in \Sigma$, alors $\{\Sigma, \alpha_1, \alpha_2\}$, est satisfiable (« $\{\Sigma, \alpha_1, \alpha_2\}$, » abrège : « $\Sigma \cup \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\}$ »).

(II) si Σ est satisfiable et $\beta \in \Sigma$, alors au moins un des deux ensembles $\{\Sigma, \beta_1\}$, $\{\Sigma, \beta_2\}$ est satisfiable.

* A la réserve près formulée Remarque 2, p. 244.

(III) si Σ est satisfiable et $\gamma \in \Sigma$, alors $\{\Sigma, \gamma(\mathbf{c})\}$ est satisfiable, pour tout $\mathbf{c} \in C$.

(La démonstration de ces lemmes, évidente, est laissée au lecteur.)

(IV) si Σ est satisfiable et $\delta \in \Sigma$, alors $\{\Sigma, \delta(\mathbf{c})\}$ est satisfiable (c'est là le point critique !), si $\mathbf{c}$ est une constante d'individu sans occurrence dans les formules de Σ.

Preuve

Soit $\mathfrak{A}$ un modèle de Σ, et $\delta = \exists x\varphi$ (par exemple) ;
donc :

$$\mathfrak{A} \models \exists x\varphi$$

i.e. pour au moins un élément $d \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left| s \frac{x}{d} \right|$$

pour une assignation s quelconque. Bien sûr ce fait à lui seul n'entraîne nullement que :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \left| s \frac{x}{\overline{c}} \right|$$

(imaginons le cas où : $\exists x\varphi$ est : $\exists v_0 P v_0$, et $\overline{c} \notin P$: il est clair que : $\exists v_0 P v_0$ peut être vrai alors que Pc est faux !)

Considérons cependant la structure d'interprétation $\mathfrak{A}'$ obtenue à partir de $\mathfrak{A}$ en modifiant l'interprétation de $\mathbf{c}$, où :

$$\overline{c}' = d_0$$

d_0 étant l'un des éléments de A qui satisfait φ.

$\mathfrak{A}'$ satisfait Σ, puisque $\mathbf{c}$ n'avait pas d'occurrence dans Σ (Σ ne « disait rien » de $\mathbf{c}$!), et donc :

$$\mathfrak{A}' \models \exists x\varphi$$

i.e.

$$\mathfrak{A}' \models \varphi \left| s \frac{x}{\overline{c}'} \right|$$

d'où via le lemme de substitution :

$$\mathfrak{A}' \models (\varphi)x/\mathbf{c}$$

i.e. $\mathfrak{A}'$ est un modèle de $\{\Sigma, \delta(\mathbf{c})\}$.

Bref, si Σ a un modèle $\mathfrak{A}$, $\{\Sigma, \delta(\mathbf{c})\}$ a un modèle parfois dit variante alphabétique de $\mathfrak{A}$.

THÉORÈME VIII.3 Si l'origine d'un tableau est satisfiable, le tableau est satisfiable, i.e. il y a au moins une branche satisfiable.

Preuve

(Par récurrence sur la construction des extensions.)

(I) la formule-origine est satisfiable : le tableau (réduit à un point) est satisfiable ;

(II) soit θ une branche satisfiable : une extension de θ par les règles A, IU, IE est satisfiable (lemmes I, III, IV de VIII. 2) et au moins une des deux extensions de θ par la règle B est satisfiable.

Donc, si l'origine d'un tableau est satisfiable, le tableau est satisfiable, et il y a au moins une branche ouverte.

THÉORÈME VIII.4 (fiabilité de la méthode des tableaux) :

$$\text{si } \vdash \varphi, \text{ alors } \models \varphi$$

Preuve

Supposons que $\not\models \varphi$; alors $\neg\varphi$ est satisfiable, et par le Théorème VIII.3 le tableau pour $\neg\varphi$ est satisfiable, en contradiction avec $\vdash \varphi$.

THÉORÈME VIII.5 (consistance) :
Il n'existe pas de formule φ telle que à la fois $\vdash \varphi$ et $\vdash \neg\varphi$.
(La preuve est évidente.)

VIII.5 LA COMPLÉTUDE DE LA MÉTHODE

Réciproquement, est-il vrai que si $\models \varphi$, alors $\vdash \varphi$, i.e. que le tableau systématique pour $\neg\varphi$ est clos ?

Ce qu'il nous faut montrer, c'est qu'une branche complète est nécessairement satisfiable : c'est ici qu'intervient de façon cruciale la propriété de complétion assurée par la méthode décrite : elle assure que toute branche ouverte d'un tableau systématique est une *suite de Hintikka, au sens où l'ensemble des formules ayant une occurrence sur la branche est un ensemble de Hintikka.*

DÉFINITION

Soit un langage $\mathscr{L}$ dont C est l'ensemble des constantes d'individu ; soit $\mathfrak{A}$ une structure d'interprétation pour $\mathscr{L}$ telle que tous les éléments de A soient l'interprétation d'une constante $\mathbf{c} \in C$: un ensemble de Hintikka (ou encore : « saturé en descendant ») pour A est un ensemble Σ d'énoncés satisfaisant les conditions suivantes :

(I) pour aucun énoncé atomique φ, on n'a à la fois $\varphi \in \Sigma$ et $\neg\varphi \in \Sigma$.

(II) si $\alpha \in \Sigma$, $\alpha_1 \in \Sigma$ et $\alpha_2 \in \Sigma$.

(III) si $\beta \in \Sigma$, ou $\beta_1 \in \Sigma$ ou $\beta_2 \in \Sigma$.

(IV) si $\gamma \in \Sigma$, $\gamma(\mathbf{c}) \in \Sigma$, pour tout $\mathbf{c} \in C$.

(V) si $\delta \in \Sigma$, $\delta(\mathbf{c}) \in \Sigma$, pour au moins un $\mathbf{c} \in C$.

LEMME VIII.6 (Lemme de Hintikka) Soit C l'ensemble des constantes d'individu d'un langage $\mathscr{L}$; soit Σ un ensemble de Hintikka (pour un domaine quelconque) : Σ a un modèle dont le domaine est C.

(Donc si C est dénombrable, Σ a un modèle dénombrable.)

Preuve

Nous construisons la structure d'interprétation $\mathfrak{C}$ de domaine C de la manière suivante :

(I) pour tout $\mathbf{c} \in C$, $\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$.

(II) pour tout symbole de prédicat $\mathbf{P}$ de $\mathfrak{C}$:

$$(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) \in \overline{\mathbf{P}}$$

ssi

$$\mathbf{Pc}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in \Sigma$$

Il est clair tout d'abord que Σ est un ensemble de Hintikka pour le domaine C (au sens où tout élément du domaine est l'interprétation d'une constante $\mathbf{c} \in C$.)

Puis nous montrons que pour tout énoncé φ, si $\varphi \in \Sigma$, alors $\mathfrak{C} \models \varphi$ (par récurrence sur la construction).

(I) φ est atomique : immédiat d'après la construction de ζ.

(II) $\varphi = \alpha$; α_1 et $\alpha_2 \in \Sigma$ et par hypothèse de récurrence :

$$\mathfrak{C} \models \alpha_1 \text{ et } \mathfrak{C} \models \alpha_2$$

d'où :

$$\mathfrak{C} \models \alpha$$

(III) $\varphi = \beta$: même raisonnement.

(IV) $\varphi = \gamma$, et $\gamma(\mathbf{c}) \in \Sigma$, pour tout $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$;

par hypothèse de récurrence :

pour tout $\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$, $\mathbb{C} \models \gamma(\mathbf{c})$

et donc : $\mathbb{C} \models \gamma$

(V) $\varphi = \delta$, par exemple : $\exists x\varphi$

pour un certain $\mathbf{c} \in C$, $\varphi x/\mathbf{c} \in \Sigma$

par hypothèse de récurrence, pour un $\mathbf{c} \in C$:

$$\mathbb{C} \models \varphi x/\mathbf{c}$$

d'où pour un $\mathbf{c} \in C$:

$$\mathbb{C} \models \varphi \left| s \frac{x}{\mathbf{c}} \right|,$$

où s est une assignation quelconque

i.e. $\mathbb{C} \models \exists x\varphi$

THÉORÈME VIII.7 Toute branche ouverte d'un tableau systématique est satisfiable.

Preuve

Il suffit de remarquer que toute branche complète est une suite de Hintikka pour le domaine C dénombrable des constantes d'individu.

THÉORÈME VIII.8 (Complétude) si $\models \varphi$, alors $\vdash \varphi$.

Preuve

Supposons $\nvdash \varphi$; alors il existe au moins une branche ouverte, qui par le Théorème VIII.7, est satisfiable ; donc en particulier $\neg\varphi$ est satisfiable, ce qui contredit l'hypothèse que φ est valide. Autrement dit, si φ est valide, le tableau pour $\neg\varphi$ doit être clos au bout d'un nombre fini d'étapes.

THÉORÈME VIII.9 (Löwenheim) Si φ est satisfiable, φ est satisfiable dans un domaine dénombrable.

Preuve

Soit T un tableau pour φ : puisque φ est satisfiable, le tableau systématique pour φ a au moins une branche ouverte qui, par le Théorème VIII.7 est satisfiable dans un domaine dénombrable ; φ est donc également satisfiable dans un domaine dénombrable.

VIII.6 LA SATISFIABILITÉ

Nous avons finalement montré qu'au sens de « $\vdash$ » défini dans ce chapitre, φ est valide *ssi* $\vdash \varphi$. Quelle est exactement la portée de ce résultat ?

Imaginons que nous testons un certain énoncé φ dont nous ne savons rien, et qui se trouve, en fait, n'être pas valide, i.e. $\neg\varphi$ en fait est satisfiable. Pouvons-nous reconnaître ce fait ? En d'autres termes, la méthode des arbres peut-elle constituer une procédure de preuve *pour la satisfiabilité* ? La réponse est NON

en général ; cependant, il y a des cas particuliers où la méthode des arbres prouve la satisfiabilité.

Ré-examinons l'exemple 1 de la p. 244 ; nous pouvons l'interpréter comme une tentative malheureuse de prouver la validité de :

$$\exists v_0 P v_0 \rightarrow \forall v_0 P v_0$$

qui en fait n'est pas valide (le tableau n'est pas clos !). L'unique branche ouverte est une suite de Hintikka, donc est satisfiable. Mais bien plus, c'est une suite de Hintikka pour le domaine des constantes d'individu qui figurent sur la branche : donc elle est satisfiable (cf. Lemme de Hintikka) dans un domaine fini.

Au reste, la branche ouverte du tableau nous « décrit » un tel modèle ; du moins pouvons-nous construire un tel modèle suivant les indications de la méthode générale de construction d'une interprétation fournie par le lemme.

Dans l'exemple en question :

$$\mathfrak{C} = (C = \{a, b\}, \overline{P} = \{\overline{a}\} = \{a\})$$

Le lecteur peut vérifier que cette interprétation satisfait toutes les formules de la branche, en particulier la formule initiale.

La particularité de l'exemple 1 était l'absence de γ-formule, qui permettait que le tableau soit à la fois achevé et fini. Cependant, même en présence de γ-formules à traiter, il peut arriver qu'un tableau ne soit pas clos, et qu'au bout d'un nombre fini d'étapes nous puissions le considérer comme « achevé » en un sens élargi mais acceptable, parce qu'au moins une branche est complète *pour l'ensemble fini des constantes figurant sur cette branche.* Dans ce cas, une telle branche est également une suite de Hintikka pour ce domaine fini de constantes, et donc est satisfiable dans le domaine fini de ces constantes. Il est donc *inutile* de poursuivre le tableau, et là encore nous pouvons « lire » un modèle sur une branche ouverte :

EXEMPLE 2 :

(1)	$\neg(\forall v_0 (Pv_0 \text{ V } Qv_0) \rightarrow (\forall v_0 Pv_0 \text{ V } \forall v_0 Qv_0))$	
(2)	$\forall v_0 (Pv_0 \text{ V } Qv_0)$	
(3)	$\neg(\forall v_0 Pv_0 \text{ V } \forall v_0 Qv_0)$	Règle A sur (1)
(4)	$\neg\forall v_0 Pv_0$	A sur (3)
(5)	$\neg\forall v_0 Qv_0$	A sur (3)
(6)	$\neg Pa$	IE sur (4)
(7)	$\neg Qb$	IE sur (5)
(8)	$(Pa \text{ V } Qa)$	IU sur (2)
(9)	Pa	B sur (8)
(10)	*	
(11)	$(Pb \text{ V } Qb)$	IU sur (2)
(12)	Pb	B sur (10)
	STOP ! *	

La branche ouverte est complète pour l'ensemble C = {a, b} des constantes apparues sur la branche, et la branche constitue une suite de Hintikka pour cet ensemble de constantes comme domaine. On peut « lire » un modèle de la suite et donc de la formule initiale sur la branche :

$$\mathfrak{C} = (C = \{a, b\}, \overline{P} = \{b\}, \overline{Q} = \{a\})$$

Nous voyons donc que les tableaux peuvent non seulement fournir des preuves de validité, mais parfois aussi des preuves de satisfiabilité pour des formules : et cela pourra être le cas quand ces formules sont *fini-satisfiables.*

La classe résistante, ce sont ces formules qui ne sont ni insatisfiables, ni fini-satisfiables, mais dont tous les modèles sont infinis (énoncés « sur l'infini »). Si nous construisons un tableau systématique pour ces formules, nous ne parviendrons jamais (au bout d'un

nombre fini d'étapes) à construire une preuve de satisfiabilité. Même l'élargissement de la notion de tableau achevé ne nous sera d'aucun secours, parce qu'à aucune étape nous n'obtiendrons une branche complète pour l'ensemble des constantes figurant sur la branche. Il est facile de voir que cela apparaîtra typiquement quand de nouvelles constantes surgissent à chaque étape, parce que des instanciations répétées de γ-formules font surgir de nouvelles δ-formules qui exigent chaque fois de nouvelles constantes, d'où de nouvelles γ-instanciations, etc.

EXEMPLE 3 :

(1)	$\forall v_0\ \exists v_1\ Rv_0v_1$	
(2)	$\exists v_1\ Rav_1$	Règle IU sur 1
(3)	Rab	IE sur 2
(4)	$\exists v_1\ Rbv_1$	IU sur 1
(5)	Rbc	IE sur 4
(6)	$\exists v_1\ Rcv_1$	IU sur 1

EXEMPLE 4 : (l'arbre est laissé au lecteur).

$$\forall v_0\ (\neg Rv_0v_0 \wedge \forall v_1\ \forall v_2\ ((Rv_0v_1 \wedge Rv_1v_2) \rightarrow Rv_0v_2) \wedge \exists v_3 Rv_0v_3)$$

Dans ce cas, la méthode ne nous délivre aucune réponse : la seule solution est d'exercer notre sagacité à rechercher, en faisant fond sur la chance ou sur notre intuition, une interprétation qui soit un modèle de la formule.

Note : Il ne faudrait pas conclure de ces remarques que chaque fois qu'une branche a l'allure décrite dans l'exemple 3, la formule n'admet pas de modèle fini ! (Justement la formule de cet exemple est fini-satisfiable !). Simplement la méthode des arbres ne nous le dit pas, parce que la branche n'est jamais complète au bout d'un nombre fini d'étapes.

On sait (Church, 1936) qu'il n'existe pas de procédure de *décision* pour la validité en 1er ordre. La remarque que la méthode des tableaux n'est pas une procédure de preuve pour la satisfiabilité n'est donc pas étonnante. Car dans la mesure où la méthode des tableaux est une procédure de preuve pour la validité, si elle était en même temps une procédure de preuve pour la satisfiabilité, les deux aspects réunis constitueraient une procédure de *décision* pour la validité au sens suivant : nous construirions le tableau systématique pour la négation de la formule testée, et de deux choses l'une : soit il est clos, et nous aurions la réponse « oui » à la validité de la formule ; soit il nous prouve la satisfiabilité de la formule initiale, i.e. nous aurions la réponse « non » ! Que le tableau puisse ne jamais se terminer montre les limites d'une procédure de preuve qui n'est pas en même temps une procédure de décision : elle peut ne pas répondre « oui », soit parce qu'elle répond « non », soit parce qu'elle ne répond pas du tout !

Ajoutons, bien que le lecteur l'ait sans doute déjà deviné, que le problème de la validité d'une déduction comportant un nombre fini de prémisses peut être traité (avec les mêmes limites) par la méthode des tableaux : on cherche alors à prouver que l'ensemble formé des prémisses et de la négation de la conclusion n'est pas satisfiable.

ANNEXE

Notions élémentaires sur les ensembles

Ces quelques rappels ne prétendent pas constituer un fragment, aussi limité soit-il, de théorie des ensembles. Nous n'indiquons que quelques faits que nous avons utilisés dans les pages précédentes, avec le souci d'expliquer la notation adoptée.

Un ensemble est une collection d'objets (ceci n'est pas une définition !), qui sont dits les éléments de l'ensemble.

On note :

$$x \in X$$

le fait que l'objet x soit un élément de X, ou appartienne à X, et comme il est usuel :

$$x \notin X$$

le fait que x ne soit pas un élément de X.

Un ensemble est déterminé de façon unique par ses éléments ; autrement dit, deux ensembles ayant les mêmes éléments sont identiques (principe d'extensionalité).

Il existe une relation étroite entre les ensembles et les énoncés « ouverts » comportant une variable libre ; un ensemble étant donné, ainsi qu'un énoncé à une variable libre qui peut être dit vrai de certains éléments de l'ensemble, et faux de certains autres, il existe un

ensemble dont les éléments sont exactement les objets qui satisfont la condition. Par exemple, étant donné l'ensemble **N** des entiers naturels, et l'énoncé ouvert :

x est pair

on peut former le sous-ensemble de **N** spécifié par l'énoncé ; on le note usuellement :

$$\{x \in \mathbf{N} ; x \text{ est pair}\}$$

Si, pour une raison ou une autre, il n'est pas besoin de mentionner explicitement l'ensemble de départ, on notera simplement l'ensemble des éléments qui satisfont un énoncé ouvert S(x) :

$$\{x ; S(x)\}$$

Par exemple, si nous considérons l'énoncé ouvert :

x n'est pas identique à x

il existe un ensemble, dit l'ensemble *vide*, et noté : Ø, tel que :

$$\emptyset = \{x ; x \text{ n'est pas identique à } x\}$$

Un ensemble étant déterminé de manière unique par ses éléments, il n'y a qu'un seul ensemble ne comprenant pas d'éléments, ce qui justifie l'appellation : l'ensemble vide.

Si nous considérons l'énoncé ouvert :

x est identique à Socrate

il existe un ensemble contenant l'unique objet qui satisfait cette condition, noté :

{Socrate}

i.e. l'ensemble dont l'unique élément est Socrate.

De même l'ensemble :

{3, 7}

par exemple, peut être compris comme l'ensemble spécifié par l'énoncé ouvert :

x est identique à 3, ou x est identique à 7

Cette dernière notation est cependant élargie au cas d'ensembles infinis ; ainsi l'ensemble :

{0, 1, 2, ...}

est l'ensemble **N** des entiers naturels.

Si tous les éléments d'un ensemble X sont éléments d'un ensemble Y, X est une *partie* ou un *sous-ensemble* de Y, ce qu'on note ;

$$X \subset Y$$

(remarquer que tout ensemble est sous-ensemble de lui-même) ; si, en outre, il y a au moins un élément de Y qui n'appartient pas à X, X est strictement inclus dans Y, ou est une partie *propre* de Y ; en abrégé :

$$X \subsetneq Y$$

Il est clair que Ø est un sous-ensemble de tout ensemble. Par ailleurs, si à la fois $X \subset Y$ et $Y \subset X$, les deux ensembles X et Y ont mêmes éléments, et par le principe d'extensionalité sont identiques.

A partir d'un ensemble A, il est possible de former un nouvel ensemble, l'ensemble $\mathscr{P}_A$ des parties de A ; ainsi :

$$\mathscr{P}_A = \{X ; X \subset A\}$$

Par exemple :

$$\mathscr{P}_\emptyset = \{\emptyset\}$$

et :

$$\mathscr{P}_{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

L'*union* de deux ensembles A et B, $A \cup B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent à A ou appartiennent à B (ou les deux) ; ainsi :

$$A \cup B = \{x ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'*intersection* de A et de B, $A \cap B$, est l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A et à B. Plus généralement, soit X une collection (un ensemble) dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles ; alors

l'union de la collection X, $\cup$ X, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à quelque élément de X, i.e. :

$$\cup X = \{x ; x \in A, \text{ pour quelque } A \in X\}$$

Par exemple, si :

$$X = \{\{0, 1, 5\}, \{1, 6\}, \{0, 6\}\}$$
$$\cup X = \{0, 1, 5, 6\}$$

On a :

$$A \cup B = \cup \{A, B\}$$

et :

$$\cup \mathscr{P}_A = A$$

De même, soit X une collection non-vide d'ensembles :

$$\cap X = \{x ; x \in A \text{ pour tout } A \in X\}$$

On a par exemple :

$$A \cap B = \cap \{A, B\}$$
$$= \{x ; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si nous avons, pour chaque entier n, un ensemble A_n, l'union de tous les A_n, $\cup \{A_n ; n \in \mathbf{N}\}$, est notée :

$$\cup A_n$$
$$n \in \mathbf{N}$$

La *paire ordonnée* (ou *couple*) des objets x et y est définie de telle sorte qu'il soit vrai que la paire (x, y) soit identique à la paire (u, v) *ssi* x = u et y = v ; noter qu'alors que :

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

quels que soient les objets x, y, il n'est pas vrai que :

$$(x, y) = (y, x)$$

à moins que x et y soient identiques. La définition usuelle d'une paire ordonnée, qui assure la propriété désirée, est :

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Un *triplet* (ordonné) peut être défini par :

$$(x, y, z) = ((x, y), z)$$

et plus généralement un n-uplet est défini inductivement par :

$$(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = ((x_1, ..., x_n), x_{n+1})$$

Le *produit cartésien* de deux ensembles X et Y, $X \times Y$, est l'ensemble des paires ordonnées (x, y) telles que $x \in X$ et $y \in Y$; on définit :

$$X^1 = X$$

et :

$$X^{n+1} = X^n \times X$$

X^n est ainsi l'ensemble des n-uplets d'éléments de X. Par exemple :

$$X^3 = (X \times X) \times X$$

Une *relation* (binaire) R est un ensemble de paires ordonnées. Le domaine de R, dom R, est l'ensemble des x tels que (x, y) $\in$ R pour quelque y, et le co-domaine de R est l'ensemble des y tels que, pour quelque x, (x, y) $\in$ R. On écrit volontiers : xRy pour (x, y) $\in$ R ; une relation d'équivalence sur un ensemble X est une relation binaire sur X qui est réflexive, i.e. :

$$xRx, \text{ pour tout } x \in X,$$

symétrique, i.e. :

$$\text{si } xRy \text{ alors } yRx, \text{ pour tous } x \text{ et } y \in X,$$

transitive i.e. :

$$\text{si } xRy \text{ et } yRz, \text{ alors } xRz, \text{ pour tous } x, y, z \in X ;$$

Une relation n-aire sur X est un sous-ensemble de X^n.

Si X et Y sont des ensembles, une *fonction* de X vers Y est une relation f telle que :

$$\text{dom } f = X$$

et telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$; autrement dit :

si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$

L'unique élément y tel que $(x, y) \in f$ est dit la *valeur* de f en x, et est noté :

$$f(x)$$

La notation :

$$f : X \rightarrow Y$$

dit que dom f = X, et que le co-domaine de f est inclu dans Y (i.e. que f est une fonction de X vers Y). Une correspondance bi-univoque entre X et Y est une fonction f de X vers Y telle que co-dom f = Y, et pour tout $y \in Y$ il existe un unique x tel que $(x, y) \in f$; deux ensembles A et B sont dits avoir même nombre d'éléments *ssi* il existe une correspondance bi-univoque entre A et B.

Une *opération* n-aire sur un ensemble X est une fonction de X^n vers X. Par exemple, l'addition est une opération binaire sur **N**, et l'opération successeur S telle que :

$$S(n) = n+1$$

une opération unaire sur **N**.

Il est des cas où étant donnés deux ensembles, I et X, et une fonction $f : I \rightarrow X$, il est utile de noter, pour tout $i \in I$, l'élément $x = f(i)$ par :

$$x_i$$

i est dit l'indice de x, I l'ensemble-index, la fonction elle-même, une *famille*, notée souvent (x_i).

Une suite finie d'éléments de X peut être considérée comme une famille (x_i) où l'ensemble-index est l'ensemble {0, 1, ..., n} muni de l'ordre naturel sur les entiers ; corrélativement les éléments x_i sont rangés par ordre de grandeur croissante de l'indice i et la suite est notée :

$$(x_0, x_1, ..., x_n)$$

Une suite infinie d'éléments de X est une famille (x_n) où l'ensemble-index est l'ensemble des entiers. Une *énumération* est une suite sans répétition (dans une suite, le même élément peut apparaître de manière répétée avec différents indices).

S'il existe une correspondance bi-univoque entre un ensemble A et l'ensemble des entiers, A est *dénombrable* et une suite sans répétition :

$$(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$$

constitue une énumération de A.

Mairie de Médiathèque PEREIRE PARIS

(avec le n° de la page où ils figurent pour la première fois)

$\mathscr{L}_p$ 38
$\neg$ 38
$\wedge$ 38
$\vee$ 38
$\rightarrow$ 38
$\leftrightarrow$ 35
$s \begin{smallmatrix} \mathbf{a} \\ \psi \end{smallmatrix} \varphi |$ 67
$\forall$ 63
F 63
δ 64
$\neg^*$ 64
c^* 65
$\bar{\delta}$ 65
$\models$ 70
eq 87
B_φ 98
| 105
$\downarrow$ 105
$\exists$ 145
$\forall$ 146
$=$ 152
$\not\checkmark$ 158
$(\varphi)x/t$ 170
σ 173
$\mathfrak{A}$ 175
s 178
$\mathfrak{A} \models \varphi\ |s|$ 179
$s \frac{x}{d}$ 180
$\vdash$ 202
|TH...| 207
$\varphi(\mathbf{c})$ 224

INDEX DES PRINCIPAUX OUVRAGES ET ARTICLES CITÉS

BETH 1955 (E. W. Beth) : « Semantic Entailment and Formal Derivability », trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

CARNAP 1934 (R. Carnap) : *Logische Syntax der Sprache* ; trad. angl. : *The Logical Syntax of Language*, 1936, Routledge & Kegan, Londres.

CARNAP 1958 : *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*, Dover Publications, New York.

CHANG & KEISLER 1973 (C. C. Chang & H. J. Keisler) : *Model Theory*, North-Holland P.C., Amsterdam, Londres.

CHURCH 1956 (A. Church) : *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton U.P.

ENDERTON 1972 (H. B. Enderton) : *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York.

FREGE 1879 (G. Frege) : *Begriffsschrift*, G. Olms, Hildesheim ; trad. angl. *in* : *From Frege to Gödel*, éd. J. van Heijenoort, Harvard U.P.

FREGE 1923 : « Logische Untersuchungen, Dritter Teil » ; trad. fr. *in* : *Écrits logiques et philosophiques*, Seuil, 1971.

GÖDEL 1930 (K. Gödel) : « Die Vollständigkeit der Axiome des Logischen Funktionenkalküls », *in* : *Col-*

lected Works, I, Oxford U.P., 1986 ; trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

HENKIN 1949 (L. Henkin) : « The Completeness of the First Order Functional Calculus », *Journal of Symbolic Logic*, n° 14 ; trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

HERMES 1973 (H. Hermes) : *Introduction to Mathematical Logic*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (cet ouvrage est la traduction anglaise de *Einführung in die Mathematische Logik*, 1963).

HILBERT-ACKERMANN 1928 (D. Hilbert & W. Ackermann) : *Grundzüge der Theoretischen Logik* ; trad. angl. de la 2e édition (1938) : *Principles of Mathematical Logic*, 1950, Chelsea P.C., New York.

JEFFREY 1967 (R. Jeffrey) : *Formal Logic : its Scope and Limits*, McGraw Hill Book Company.

KLEENE 1967 (S. Kleene) : *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, trad. fr. : *Kleene : Logique mathématique*, par J. LARGEAULT, Colin, 1971.

LARGEAULT 1972 (J. Largeault) : *Logique mathématique : Textes*, Colin ; on trouve en particulier dans ce recueil les traductions de BETH 1955, HENKIN 1949, GÖDEL 1930, LÖWENHEIM 1915, LUKASIEWICZ 1934, POST 1921.

LÖWENHEIM 1915 (L. Löwenheim) : « Über Möglichkeiten im Relativkalkül » ; trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

LUKASIEWICZ 1930 (J. Lukasiewicz) : « Philosophische Bemerkungen zu Mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls » ; trad. angl. *in* : *Polish Logic, 1920-1939*, éd. Mc Call, Clarendon Press, Oxford, 1967.

LUKASIEWICZ 1934 : « Zur Geschichte der Aussagenlogik » ; trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

MATES 1965 (B. Mates) : *Elementary Logic*, Oxford U.P.

POST 1921 (E. Post) : « Introduction to a General Theory of Elementary Propositions » ; trad. fr. *in* : LARGEAULT, 1972.

QUINE 1934 (W. V. Quine) : « Ontological Remarks on the Propositional Calculus », *in* : *The Ways of Paradox*, 1966-1976, Harvard U.P.

QUINE 1940 : *Mathematical Logic*, Harvard U.P.

QUINE 1941-1965 : *Elementary Logic*, Harper & Row, New York, trad. fr. : *Logique élémentaire*, par J. LARGEAULT, Colin, 1972.

QUINE 1950 : *Methods of Logic*, Holt, Rinehart & Winston ; trad. fr. : *Méthodes de logique*, par M. CLAVELIN, Colin, 1972.

QUINE 1953a : « Mr. Strawson on Logical Theory », *in* : *The Ways of Paradox*.

QUINE 1953b : « Logic and the Reification of Universals », *in* : *From a Logical Point of View*, Harper & Row, New York.

QUINE 1960 : *Word & Object*, M.I.T. Press ; trad. fr. : *Le mot et la chose*, par Dopp et Gochet, Flammarion, 1977.

RUSSELL 1918 : « The Philosophy of Logical Atomism » *in* : *Logic and Knowlegde*, éd. R. Marsh, Allen and Unwin, London, 1956.

SMULLYAN 1968 (R. Smullyan) : *First Order Logic*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

STRAWSON 1950 (P. F. Strawson) : « On Referring », *Mind*, n° 59.

STRAWSON 1952 : *Introduction to Logical Theory*, University Paperbacks, Londres.

TARSKI 1936 (A. Tarski) : « Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen » ; trad. fr. *in* : *Tarski : Logique, sémantique, métamathématique*, Colin, 1972.

WITTGENSTEIN 1921 (L. Wittgenstein) : *Tractatus Logico-Philosophicus* ; trad. fr. par Klossowski, Gallimard.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE de Jacques Bouveresse 11

INTRODUCTION 25

PREMIÈRE PARTIE : CALCUL DES ÉNONCÉS

Chapitre premier : Le langage pour le calcul des énoncés 31
I.1 Remarques introductives 31
I.2 Le langage $\mathscr{L}_p$ 38
I.3 Le Théorème de non-ambiguïté 46
I.4 Quelques compléments syntaxiques 54

Chapitre II : Tautologies, la relation de conséquence (tauto)logique 63
II.1 Une sémantique pour le langage $\mathscr{L}_p$ 63
II.2 Tautologies et schémas de tautologies 70
II.3 La notion de conséquence (tauto)logique 77

Chapitre III : L'équivalence (tauto)logique 87
III.1 Le Théorème de remplacement 87
III.2 La complétude fonctionnelle 97

Chapitre IV : Applications aux arguments en langage ordinaire 111
IV.1 Remarques préliminaires 111
IV.2 Analyse d'exemples 121
Annexe : La méthode des arbres de vérité (du point de vue sémantique) 129

DEUXIÈME PARTIE : LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Chapitre V : Langages du premier ordre 139
V.1 Traduction et paraphrase 139

V.2 Langages du premier ordre, morphologie 158
V.3 Variables libres et liées, substitution 164

Chapitre VI : Vérité et modèles : la notion de conséquence logique, la validité 173
VI.1 Satisfaction et vérité 173
VI.2 Validité et conséquence logique 184

Chapitre VII : Un système formel pour le calcul de la déduction 201
VII.1 La notion de preuve formelle 201
VII.2 Le Théorème de complétude 222

Chapitre VIII : La méthode des tableaux analytiques (ou : arbres de vérité) 235
VIII.1 Préliminaires sur les arbres 236
VIII.2 Un exemple de tableau analytique 238
VIII.3 Méthode des tableaux systématiques 240
VIII.4 Consistance (ou fiabilité) de la méthode des tableaux 245
VIII.5 La complétude de la méthode 248
VIII.6 La satisfiabilité 251

Annexe : Notions élémentaires sur les ensembles 257

Liste des principaux symboles 265

Index des principaux ouvrages et articles cités 267

Achevé d'imprimer le 22 septembre 1989
dans les ateliers de Normandie Impression S.A.
61000 Alençon

N° d'imprimeur : 891973
Dépôt légal : octobre 1989
ISBN 2-228-88204-6

Imprimé en France