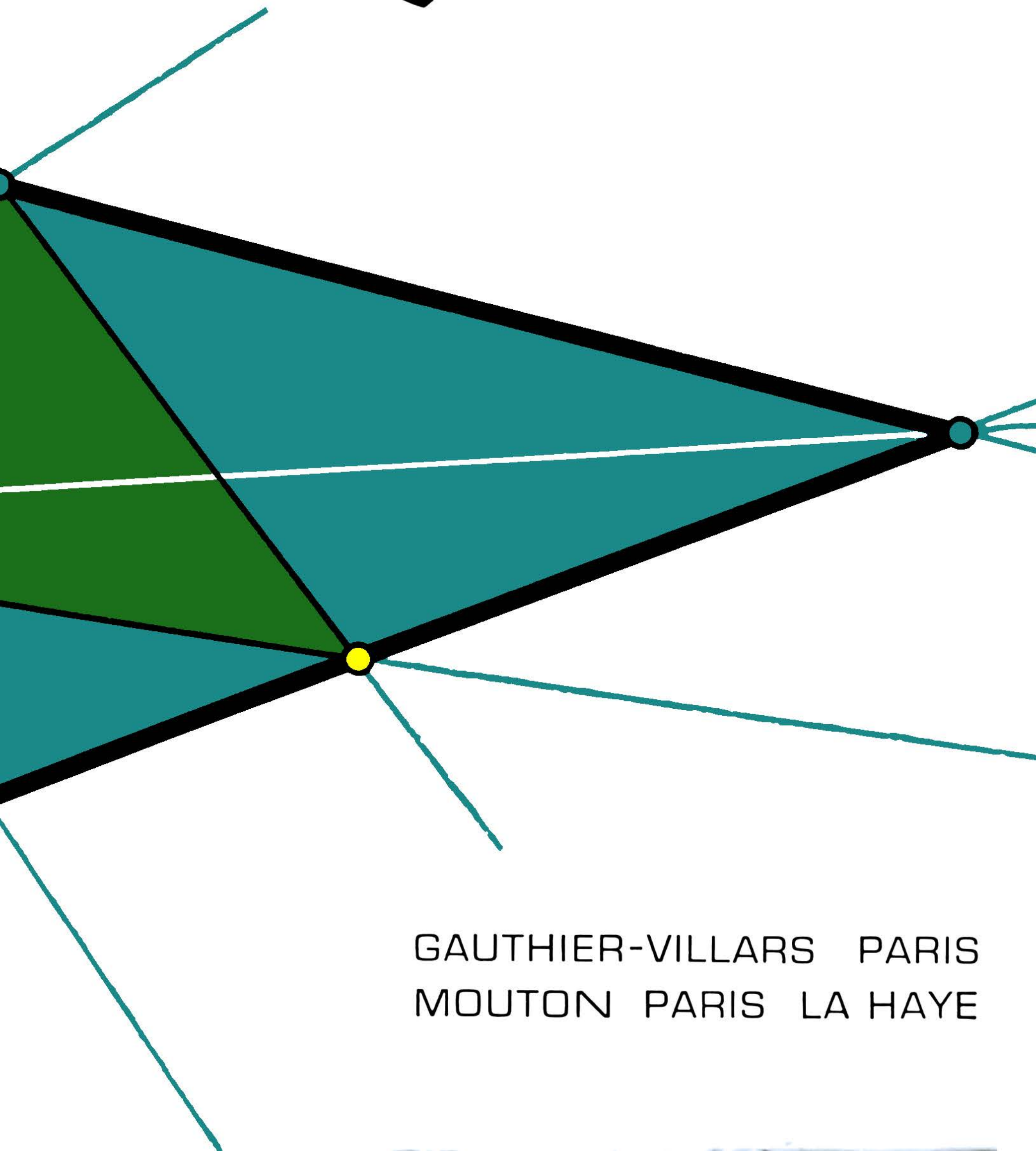
MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

JEAN-BLAISE GRIZE

LOGIQUE MODERNE



GAUTHIER-VILLARS PARIS
MOUTON PARIS LA HAYE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule I

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE

SIXIÈME SECTION: SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

X

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule I

LOGIQUE DES PROPOSITIONS
ET DES PRÉDICATS
DÉDUCTION NATURELLE

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Deuxième édition 1972

Diffusion en France:
Dunod, 92, rue Bonaparte - Paris 6

Printed in the Netherlands

INTRODUCTION

Nous utilisons fréquemment le mot « logique », aussi est-il légitime de nous demander quelles notions y sont liées. Il est facile d'en dégager plusieurs.

1. La première idée qui vient à l'esprit est que la logique a quelque chose à voir avec la *démonstration.* Nous avons tous gardé le souvenir des théorèmes de notre enfance qui se terminaient par c.q.f.d. et Aristote dit de la logique que « son sujet, c'est la démonstration » (*Prem. Anal.*, 24a10).

2. Reste à savoir ce qu'est au juste la démonstration et c'est un des objets de ce cours que de le préciser. Il est cependant déjà possible d'affirmer qu'une démonstration consiste en un enchaînement, disons d'idées ou de concepts, par opposition à des images, par exemple, et qu'elle renvoie à la *raison* plutôt qu'à l'intuition, à la perception sensible ou à d'autres « facultés ». La logique, disait St. Thomas d'Aquin, est « l'art qui dirige l'acte même de la raison, c'est-à-dire l'acte par lequel l'homme procède dans l'acte même de la raison par ordre, facilement et sans erreur » (*Sec. Anal.* I, 1).

Il est important de noter qu'il s'agit d'un « art », c'est-à-dire d'un savoir-faire, que cet art permet de « procéder », donc de passer d'une idée à une autre et que le passage se fait « par ordre » et « facilement ». Cela signifie que les lois logiques ont un caractère systématique d'une part, et qu'elles sont l'expression de certaines formes ou habitudes de pensée d'autre part.

3. Mais le texte cité précise encore que la logique permet d'avancer « sans erreur » et ici une distinction s'impose. Considérons les deux raisonnements suivants:

Raisonnement 1: Si les souris sont des hommes et si les hommes ont des plumes, alors les souris ont des plumes.

Raisonnement 2: Si les souris sont des vertébrés et si les mammifères sont des vertébrés, alors les souris sont des mammifères.

La conclusion du premier raisonnement est une proposition fausse, en ce sens que la zoologie contredit l'affirmation que les souris (non chauves!) ont des plumes. En revanche, la conclusion du second raisonnement est vraie, les souris sont, en effet, des mammifères. Toutefois le raisonnement 1 est correct et le raisonnement 2 ne l'est pas. Si tous les A sont B et si tous les B sont C, on peut toujours affirmer que tous les A sont C. Mais, si tous les A sont C et si tous les B sont C, on ne peut garantir, en général que tous les A sont B.

Ainsi, faut-il distinguer la vérité d'une proposition, dont on s'assure dans ces exemples par des constatations d'ordre zoologique et la *validité* ou la correction d'un raisonnement, qui est une question de pure logique et n'a pas à recourir à l'observation ou à l'expérience. C'est pourquoi, dans son *Vocabulaire de la philosophie*, A. Lalande définit la logique comme « la science ayant pour objet de déterminer, parmi toutes les opérations intellectuelles tendant à la connaissance du vrai, lesquelles sont valides, et lesquelles ne le sont pas » (Art. *Logique*).

4. La distinction faite plus haut, entre la vérité d'une proposition et la validité d'un raisonnement, nous a implicitement conduit à celle entre *contenu* et *forme*. Le contenu de la proposition « les souris ont des plumes » se se rapporte à certains animaux et à leur pelage, sa forme est celle d'une affirmation valable pour tous les membres d'une classe.

Ce n'est d'ailleurs pas tout. Deux des définitions proposées, celles de St. Thomas et de A. Lalande, se réfèrent explicitement à l'activité même de la pensée. Il y a deux objections à cette manière de faire. L'une est que l'étude des processus intellectuels est du ressort de la psychologie: il y a là une question de faits que l'expérience peut seule examiner. L'autre est que cette activité intellectuelle ne s'observe jamais directement et qu'il faut la saisir dans ses productions. Celles-ci, certes, sont nombreuses, mais il en est une qui joue un rôle privilégié et c'est celle qui se présente sous la forme de discours. Comme un discours est une suite de *propositions* (ou d'énoncés), nous en arrivons à la définition que propose A. Church: « La logique (formelle) s'occupe de l'analyse des phrases [sentences] ou des propositions et de celle des preuves, l'attention portant sur la forme par abstraction du contenu » (*Introduction to mathematical logic*, I, p. 1).

Soit alors le discours suivant: « Il n'y a pas d'amour heureux, mais c'est notre amour à tous deux » (Aragon).

Pour l'examiner d'un point de vue logique, il faut donc 1) faire abstraction de son contenu et 2) analyser ses propositions. Il est évident qu'une telle analyse peut être plus ou moins poussée. Nous distinguerons deux niveaux.

1er niveau: Le texte est décomposé en propositions indépendamment de leur forme.

C'est ainsi que nous avons ici deux propositions « il n'y a pas d'amour heureux » et « c'est notre amour à tous deux », reliées par la conjonction « mais ». La partie de la logique qui arrête l'analyse à ce niveau est dite *logique des propositions* (inanalysées). Elle fait l'objet de la première partie de ce fascicule.

2e niveau: Chaque proposition est analysée en éléments qui correspondent classiquement aux sujets, prédicats, relations.

Ainsi, la première proposition serait paraphrasée de la façon suivante: « Il n'y a pas d'objet de pensée qui soit un amour et qui jouisse de la propriété d'être heureux ». La partie de la logique qui traite aussi de cet aspect des choses est appelée la *logique des prédicats* (du 1er ordre). Elle fait l'objet de la deuxième partie de ce fascicule.

PREMIÈRE PARTIE

LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS INANALYSÉES
L'IDÉE NAÏVE DE DÉDUCTION

1.1 Un exemple de déduction

Nous allons chercher, dans ce premier chapitre, à dégager un certain nombre de règles de déduction et à les exprimer de façon précise et commode. Partons pour cela d'une déduction simple, telle qu'elle se présente dans le discours quotidien.

« Si le ciel se couvre, il ne gèlera pas et s'il ne gèle pas, le chien peut rester dehors pour la nuit. Le ciel se couvre. Donc le chien pourra rester dehors ».

Il faut tout d'abord remarquer que, d'un point de vue tout extérieur, nous avons affaire à une suite de propositions. Cherchons donc à les énumérer. Nous nous heurtons immédiatement à une difficulté: certaines sont au présent, d'autres au futur. Faut-il compter « il ne gèlera pas » comme une proposition et « il ne gèle pas » comme une autre ou, au contraire, puisque toutes deux ont trait au même fait, faut-il n'en compter qu'une? D'autre part, « le chien peut rester dehors pour la nuit » contient deux verbes, « peut » et « rester ». S'agit-il d'une ou de deux propositions?

Ces quelques remarques montrent que, aussitôt que l'on s'efforce de tirer au clair des procédures pourtant familières, on se met dans l'obligation d'effectuer certains choix plus ou moins arbitraires et d'effectuer un certain nombre de simplifications. Le fait est d'importance, en ce sens qu'il manifeste l'autonomie du système que l'on a l'intention de construire. En droit, en effet, nous sommes entièrement libres de nous donner les règles de déduction que nous voulons. De même que le géomètre, qui crée des êtres abstraits à l'aide de ses lignes sans épaisseur et de ses points sans dimension, peut les doter des propriétés qui lui plaisent, de même nous pouvons, si nous le voulons, attribuer aux objets abstraits que nous allons appeler des propositions n'importe quelles propriétés. Toutefois ce n'est encore qu'un aspect de la situation. Le géomètre souhaite que les objets qu'il crée puissent admettre certains modèles concrets (des figures dessinées à l'encre, par exemple). Quant à nous, nous désirons que ce que nous nommerons « propositions » ait quelque chose à voir avec les propositions que nous énonçons en parlant chaque jour.

C'est la raison pour laquelle notre démarche, dans ce premier chapitre, sera la suivante:

1. Examiner certains emplois attestés.
2. En retenir quelques-uns, soit que nous les supposions particulièrement importants en pratique, soit qu'ils conviennent à notre construction pour des raisons propres au logicien.
3. Oublier l'origine pratique de notre choix et nous en tenir strictement à ce que nous aurons posé.
4. Interpréter le système obtenu dans les termes concrets qui lui auront servi d'origine.

Dans la construction de la géométrie, le point 1 correspond à l'examen quasi-physique des propriétés des objets, plus ou moins bien dessinés; le point 2 au choix des axiomes et des postulats; le point 3 au déroulement du système de la géométrie et le point 4, enfin, à l'application de la géométrie à la réalité concrète.

Ceci dit, nous allons prendre notre première décision en postulant que nous ne tiendrons pas compte des diverses formes des verbes, non plus d'ailleurs que d'autres différences stylistiques qui pourraient se présenter. En fait, notre décompte sera sensiblement celui des « phrases-noyaux » de Chomsky.

Reste la question de savoir comment découper les propositions. Puisque, à ce stade, nous procédons intuitivement, donnons-nous un critère, lui aussi intuitif. Sera réputée proposition unique, celle qui est susceptible d'être dite vraie ou fausse. Ainsi, il n'y a aucun sens à dire que « le chien peut » est vraie ou fausse, tandis qu'il y en a un à le dire de « le chien peut rester dehors pour la nuit ». Cette dernière expression sera donc comptée comme une seule proposition.

Finalement nous aurons donc affaire à trois propositions, que nous allons abréger par les lettres p, q et m:

p : le ciel se couvre
q : il ne gèle pas
m: le chien peut rester dehors pour la nuit.

La déduction prend alors la forme abrégée suivante:

« Si p alors q et si q alors m. p. Donc $\underline{m}$. »

Nous voyons maintenant qu'il est possible de partager nos propositions en deux espèces. Les unes sont simples: p, m. Les autres sont composées: si p alors q et si q alors m. Nous appellerons les premières des *propositions* *atomiques* et les secondes des *propositions composées* ou *moléculaires.* Mais composées comment? On le voit: à l'aide de propositions atomiques (p, q et m) et des mots « si ... alors » et « et ».

Remarque

Le caractère atomique d'une proposition est relatif et dépend largement des décisions que l'on prend. Ainsi, nous avons décidé de considérer « il ne gèle pas » comme un atome. Mais rien ne nous aurait empêché de choisir « il gèle » pour atome et de faire de « il ne gèle pas », donc de « non il gèle » une proposition moléculaire, composée de la négation « non » et de l'atome « il gèle ».

Reste à nous occuper du caractère déductif de l'exemple. Pour mieux le faire ressortir, écrivons les choses comme suit:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \text{Si } p \text{ alors } q \text{ et si } q \text{ alors } m \\ 2 & p \\ & \overline{} \\ 3 & m \end{array}$$

Les propositions 1 et 2, séparées de la proposition 3 par une petite barre horizontale, constituent les *hypothèses* de la déduction. La proposition 3 en est la *conclusion.* La ponctuation, qui séparait « si p alors q et si q alors m » de « p » et « p » de « Donc m » n'est ici plus nécessaire, puisque les propositions sont écrites individuellement les unes au-dessous des autres. Quant au mot « Donc », il est représenté par la petite barre horizontale.

Remarque

On dit aussi que m est déduite de la classe d'hypothèses {si p alors q et si q alors m, p}.

1.2 Règles générales

Les règles de déduction doivent pouvoir s'appliquer à n'importe quelles propositions, atomiques ou composées. Nous n'allons donc pas les formuler en utilisant des propositions particulières comme « le ciel est couvert » ou « il ne gèle pas », même si celles-ci sont abrégées par des lettres p et q. De même qu'en algèbre on utilise des variables, x, y, etc., pour désigner des nombres et que celles-ci ne sont pas des nombres, de même nous allons introduire des variables pour désigner des propositions. Nous utiliserons des majuscules: P, Q, M et ces mêmes lettres affectées d'accents: P', Q', etc. Ces lettres prennent leurs valeurs sur l'ensemble des propositions, ce qui signifie qu'elles désignent des propositions, atomiques ou composées, sans être elles-mêmes des propositions. On les nomme *variables syntaxiques* ou *métavariables*.

Exemple: Dans la déduction du paragraphe précédent, P pourrait prendre la valeur « si p alors q et si q alors m », Q la valeur p et M la valeur m.

Remarque
Si une même métavariable figure plusieurs fois dans un contexte donné, il est entendu qu'elle désigne chaque fois la même proposition. En revanche, deux métavariables différentes peuvent désigner soit deux propositions différentes, soit la même proposition.

Règle hyp

Toute déduction part d'une classe de prémisses et on ne voit pas ce qui limiterait la liberté qu'a l'esprit de considérer n'importe quelles propositions pour en examiner les conséquences. Nous allons donc nous donner le droit de poser, sans restrictions, des hypothèses quelconques. Toutefois, il faut savoir exactement de quelles hypothèses dépend la déduction. On peut imaginer toutes sortes de procédés pour ne pas l'oublier. Celui adopté ici, un trait vertical qui court tout au long de la déduction et une petite barre horizontale sous la dernière hypothèse, est emprunté à F.B. Fitch et il se révèle particulièrement commode. Aussi allons-nous poser la règle suivante:

Règle hyp : On peut, à toute étape d'une déduction, introduire une ou plusieurs hypothèses, à condition de les accompagner d'un trait vertical à gauche et de faire suivre la dernière d'une petite barre horizontale.

Exemple:

$$\begin{array}{r|llll}
1 & P & & & \text{hyp} \\
2 & Q & & & \text{hyp} \\
\cline{2-2}
k & \multicolumn{1}{|l}{M} & & & \text{hyp} \\
\cline{2-2}
l & \multicolumn{1}{|l}{} & \multicolumn{1}{|l}{P'} & & \text{hyp} \\
\cline{3-3}
 & \multicolumn{1}{|l}{} & \multicolumn{1}{|l}{} & &
\end{array}$$

Les nombres 1, 2, ..., k, l qui figurent à gauche servent à numéroter les lignes de la déduction. Pas plus que l'abréviation « hyp », qui indique au nom de quelle règle la proposition est posée, ils n'appartiennent à la déduction. Ce sont des indications à soi-même ou au lecteur.

Règle rep

Toute déduction exige d'écrire des propositions les unes à la suite des autres et se déroule donc dans le temps. Il s'agit toutefois là d'un aspect matériel et contingent. En fait, la déduction elle-même a un caractère atemporel, ce qui fait que toute proposition, une fois posée, le reste tout au long de la déduction.

Nous tiendrons compte de ce double fait — une proposition vraie le reste, mais nous sommes obligés de procéder dans le temps — en nous accordant le droit de répéter, n'importe où dans la déduction toute proposition qui la précède. Et nous noterons:

Règle rep (règle de répétition):

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ & \text{- - -} & \\ & P & n, \text{rep} \end{array}$$

Dans le langage quotidien, cette règle correspond à des locutions telles que « comme on l'a vu plus haut », « mais on sait que », etc.

Règle reit

Nous ne voulons pas, ici, limiter le droit à la répétition. Toutefois d'un point de vue formel, nous pouvons nous trouver en présence de deux situations distinctes. Soit la déduction suivante:

$$\begin{array}{r|lll} 1 & \underline{P} & & \text{hyp} \\ 2 & P & & \\ 3 & & \mid \underline{Q} & \text{hyp} \\ 4 & & \mid P & \\ 5 & & \mid \quad \mid \underline{M} & \text{hyp} \\ 6 & & \mid \quad \mid P & \end{array}$$

La proposition P a été « répétée » trois fois: lignes 2, 4 et 6. Aux lignes 4 et 6, elle est « répétée » à l'intérieur d'une *sous-déduction* de la déduction principale, mais à la ligne 2 elle est « répétée » dans la déduction principale elle-même. On peut dire aussi que pour écrire P aux lignes 4 et 6, il a fallu franchir une (ou plus d'une) barre verticale, ce qui n'est pas le cas pour la ligne 2. Pour des raisons qui apparaîtront dans la deuxième partie de ce fascicule, il est utile de distinguer les deux cas. Nous parlerons de *répétition* (règle rep) à la ligne 2 et de *réitération* aux lignes 4 et 6 (règle reit).

Règle reit :

$$
\begin{array}{r|l}
n & P \\
 & \text{- - -} \\
 & \quad \begin{array}{|l} P \end{array} \qquad\qquad n, \text{ reit}
\end{array}
$$

Règle repdf

Il est très souvent commode, et même pratiquement indispensable, d'abréger certaines expressions. Ainsi, au lieu de « lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe » est-il usuel de dire « circonférence ». Le mot « circonférence » abrège l'expression « lieu géométrique ... », il a la même signification. « Circonférence » est le *défini* et « lieu géométrique ... » est le *définissant*. Nous désignerons par le signe complexe, mais qui doit être considéré comme un tout, =df la relation qui unit le défini et le définissant.

Exemples :

ONU =df Organisation des Nations Unies

p =df le ciel se couvre

Nous nous donnerons alors la règle de répétition par définition sous les deux formes suivantes:

Règle repdf

Si Q =df P:

$$
\begin{array}{r|l}
n & P \\
 & \text{- - -} \\
 & Q \qquad\qquad n, \text{ repdf}
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
n & Q \\
 & \text{- - -} \\
 & P \qquad\qquad n, \text{ repdf}
\end{array}
$$

Remarque

Cette règle correspond aux expressions courantes « en d'autres termes », « plus simplement », etc.

Nous avons dit qu'à ce niveau d'analyse, nous aurions affaire à des propositions considérées comme des touts et reliées entre elles par des conjonctions ou des locutions conjonctives. Ainsi nous nous trouverons en présence d'expressions de la forme: *P, Q, P et Q, P ou Q, si P alors Q,* pour prendre quelques exemples.

Toute proposition de ce genre peut nous servir d'hypothèse (règle hyp) et être répétée de diverses façons (règles rep, reit, repdf). Ceci est toutefois bien insuffisant pour obtenir des déductions qui pourront s'interpréter de façon utile. Nous devons encore apprendre à composer les propositions entre elles et, lorsqu'elles sont complexes (ou moléculaires) à les décomposer. Nous allons donc chercher deux catégories de règles:

1. Des *règles d'introduction* qui permettront d'introduire dans les conclusions certains signes de liaison qui ne figuraient pas dans les prémisses.

Exemple: Une de nos règles posera (§ 1.4) qu'à partir des deux prémisses *P, Q,* nous avons le droit de poser la conclusion: *P et Q.* La règle aura introduit la conjonction « et ».

2. Des *règles d'élimination* qui permettront d'éliminer certaines liaisons qui figuraient dans les prémisses.

Exemple: Une de nos règles posera (§ 1.3) qu'à partir des deux prémisses *P* et *si P alors Q,* nous sommes en droit d'écrire la conclusion *Q.* La règle aura éliminé la locution « si ... alors ».

1.3 La proposition conditionnelle

Nous appellerons (proposition) *conditionnelle* toute proposition de la forme

si *P* alors *Q*,

étant entendu que *P* et *Q* désignent des propositions soit atomiques, soit moléculaires.

Exemples

[1] Si le nombre *n* est divisible par 6, alors il est pair.
[2] S'il pleut dimanche, le match n'aura pas lieu.
[3] « Il les condamne dans Jansénius, si elles y sont » (Pascal).
[4] S'il est vraiment courageux, alors si le fantôme apparaît, il s'en moquera.
[5] Si j'avais su, je ne serais pas venu!
[6] S'il réussit ses examens, je mange mon chapeau.

Les exemples [2] et [3] fournissent des variations linguistiques de « si ... alors ». Mais il convient toujours de distinguer deux propositions:
celle qui suit le mot « si », qui constitue l'*antécédent* de la conditionnelle, l'autre, qui en est le *conséquent.*

Au lieu d'écrire une proposition conditionnelle sous la forme: « si proposition antécédente, alors proposition conséquente », nous introduirons le signe « $\supset$ ». Ainsi, en posant:

p =df il pleut dimanche
q =df le match n'aura pas lieu,
on aura pour l'exemple [2]: $p \supset q$.

Remarque

Certains auteurs écrivent $p \rightarrow q$ ou $p \Rightarrow q$, là où nous écrivons $p \supset q$. Peu importe d'ailleurs, ces signes sont tous des *foncteurs propositionnels.* Ils désignent une opération, celle qui, appliquée à deux propositions, fournit une troisième proposition, une conditionnelle.

Le quatrième exemple pose un problème. Si nous ne prêtons pas trop d'attention à la ponctuation, nous sommes enclins à l'écrire:

$p \supset q \supset m,$

les lettres p, q et m ayant une signification évidente. Sous cette forme cependant, la proposition est ambiguë. Il est en effet possible de l'analyser de deux façons:

(a) $p \supset Q$ où Q désigne $q \supset m$
(b) $P \supset m$ où P désigne $p \supset q$.

Ces deux analyses correspondent aux arbres suivants:

(a) $p \supset q \supset m$
/\
p $q \supset m$
/\
q m

(b) $p \supset q \supset m$
/\
$p \supset q$ m
/\
p q

Pour lever de telles ambiguïtés, nous userons de parenthèses, sans d'ailleurs prendre ici la peine d'en fixer précisément le maniement (voir le Fascicule 3). Nous interpréterons l'exemple [4] de la façon suivante:

$$p \supset (q \supset m),$$

ce qui correspond donc à la forme (a).

Enfin, les exemples [5] et [6] apparaissent rapidement transmettre un tout autre genre d'information que les quatre premiers. Ceux-ci correspondent, très sommairement, à la situation suivante. On sait (ou on décide) que dans le cas où les circonstances décrites par l'antécédent P se réaliseront, alors les circonstances décrites par le conséquent Q se réaliseront aussi. En revanche, on ne sait pas actuellement ce qu'il en est de P et c'est même la raison pour laquelle on dit « *si P alors Q* ».

Il en va tout autrement pour l'exemple [5] où celui qui parle ne sait que trop que l'antécédent P n'a pas été réalisé et dans l'exemple [6] où le locuteur s'attend si peu à ce que l'antécédent P se vérifie qu'il est disposé à promettre n'importe quoi.

Les règles que nous allons poser s'inspireront du premier usage de « si ... alors» (exemples [1] à [4] (et nullement des deux autres. C'est ainsi que nous poserons, pour éliminer le signe « $\supset$ », la règle d'élimination suivante:

Règle $\supset$ e

$$\begin{array}{r|ll} n & P \supset Q & \\ m & P & \\ \hdashline & Q & n, m, \supset \mathrm{e} \end{array}$$

Le trait pointillé indique que les propositions numéros n et m ne sont pas nécessairement des hypothèses (au sens de la règle hyp), mais servent de *prémisses* à la règle $\supset$ e. Cette règle est aussi classiquement nommée règle du *modus ponens.*

Exemples

[1]
$$\begin{array}{r|ll} 1 & p \supset q & \text{hyp} \\ 2 & q \supset m & \text{hyp} \\ 3 & p & \text{hyp} \\ \hline 4 & q & 1, 3, \supset \mathrm{e} \\ 5 & m & 2, 4, \supset \mathrm{e} \end{array}$$

[2]
$$\begin{array}{r|ll} 1 & p & \text{hyp} \\ 2 & p \supset (p \supset q) & \text{hyp} \\ \hline 3 & p \supset q & 2, 1, \supset \mathrm{e} \\ 4 & q & 3, 1, \supset \mathrm{e} \end{array}$$

Dans les deux cas nous avons, en utilisant exclusivement les règles que nous nous sommes données, déduit une conclusion d'une classe d'hypothèses. Nous savons déjà que nous pouvons noter:

Ex. 1 m est déduite de la classe d'hypothèses $\{ p \supset q, q \supset m, p\}$

Ex. 2 q est déduite de la classe d'hypothèses $\{p, p \supset (p \supset q)\}$

Il sera commode de noter les mêmes faits sous la forme abrégée suivante:

Ex. 1 $p \supset q, q \supset m, p \vdash m$

Ex. 2 $p, p \supset (p \supset q) \vdash q$

Examinons maintenant la façon d'introduire un signe $\supset$ et pour cela reprenons l'exemple [1]. Si quelqu'un cherche à établir la proposition conditionnelle « si le nombre n est divisible par 6, alors il est pair », il pourra procéder approximativement de la manière suivante:

1. Le nombre n est divisible par 6	hypothèse
2. $6 = 3.2$	arithmétique
3. Le nombre n est divisible par 3.2	1, 2, raisonnement
4. Le nombre n est divisible par 3 et par 2	3, arithmétique
5. Le nombre n est divisible par 2	4, raisonnement
6. Le nombre n est pair	5, définition

Introduisant alors l'hypothèse faite et la conclusion obtenue *dans une même proposition*, il dira: « *Si* le nombre *n* est divisible par 6, alors il est pair ».

Nous allons, quant à nous, accepter ce genre de procédure et poser, pour introduire un signe $\supset$, la règle suivante:

Règle $\supset$ i

$$
\begin{array}{r|l|ll}
n & & P & \text{hyp} \\
\cline{3-3}
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
m & & Q & \cdot \\
\cline{2-2}
 & \multicolumn{2}{l}{P \supset Q} & n\text{–}m,\ \supset \text{i}
\end{array}
$$

Le trait vertical de gauche indique que la règle est utilisable au cours d'une déduction quelconque. Le second trait vertical découle de l'application de la règle hyp, puisque pour introduire un « $\supset$ », *il faut* partir d'une hypothèse. Les petits points doivent être pensés comme indiquant les références. Mais, contrairement à ce qu'il se passait dans l'exemple, les références ne peuvent ici se faire qu'aux règles déjà posées ou à celles que nous poserons explicitement plus loin. Il faut enfin noter que la justification de la règle $\supset$ i ne fait pas mention seulement du point de départ (ligne *n*) et du point d'arrivée (ligne *m*), mais *à toute la sous-déduction* qui va de *n* à *m*. D'où la notation: *n—m*.

Remarque

| On appelle *sous-déduction* d'une déduction toute suite de propositions, accompagnées d'un trait vertical à droite d'un autre.

Exemples

[1] $p \vdash q \supset p$

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & \multicolumn{2}{l}{p} & \text{hyp (unique élément de la classe d'hyp.)} \\
\cline{2-2}
2 & & q & \text{hyp (pour introduire un « $\supset$ »)} \\
\cline{3-3}
3 & & p & \text{1, reit} \\
4 & \multicolumn{2}{l}{q \supset p} & \text{2–3, $\supset$ i}
\end{array}
$$

Remarque

| Considérons la proposition *p* de la ligne 3. Nos écritures nous rendent attentifs à ce que *p* est placée sous deux hypothèses: l'hypothèse *p* (ligne 1)

et l'hypothèse q (ligne 2). En revanche, la même proposition p, atome de la proposition moléculaire $q \supset p$ de la ligne 4, ne dépend plus que de l'hypothèse de la ligne 1. Nous constatons ainsi qu'un des effets de la règle $\supset$ i est de *nous libérer d'une hypothèse.*

On peut alors se demander s'il ne serait pas possible, dans certains cas, de se libérer de toute hypothèse Voyons, pour cela, l'exemple suivant.

[2] $\vdash p \supset (q \supset p)$

1	$\vert\ \vert\ p$	hyp
2	$\vert\ \vert\ \ \vert\ q$	hyp
3	$\vert\ \vert\ \ \vert\ p$	1, reit
4	$\vert\ \vert\ q \supset p$	2–3, $\supset$ i (libération de l'hyp. 2)
5	$\vert\ p \supset (q \supset p)$	1–4, $\supset$ i (libération de l'hyp. 1).

Remarques

1. Le trait de déduction qui est tout à gauche n'est marqué d'aucune petite barre horizontale. Donc la proposition 5 ne dépend d'aucune hypothèse. Il est vrai que, pour l'établir, nous avons dû recourir à des sous-déductions qui, elles, usaient d'hypothèses. Mais peu importe: la proposition 5 ne dépend directement d'aucune hypothèse, elle est déduite de la classe d'hypothèses vide. Nous écrirons:
soit $\varnothing \vdash p \supset (q \supset p)$ soit plus simplement $\vdash p \supset (q \supset p)$ et nous dirons, de toute proposition déductible de la classe d'hypothèses vide, qu'elle est un *théorème logique*. Sa déduction porte alors le nom de *démonstration*.
2. Le premier trait vertical est indispensable: il indique que l'on effectue une déduction à partir de la classe d'hypothèses vide. On pourrait donc écrire aussi:

1	$\vert\ \varnothing$	hyp (classe vide)
2	$\vert\ \ \vert\ p$	hyp (pour $\supset$ i)
3	$\vert\ \ \vert\ \ \vert\ q$	hyp (pour $\supset$ i)
4	$\vert\ \ \vert\ \ \vert\ p$	2, reit
5	$\vert\ \ \vert\ q \supset p$	3–4, $\supset$ i
6	$\vert\ p \supset (q \supset p)$	2–5, $\supset$ i

$\varnothing \vdash p \supset (q \supset p)$

[3] $\vdash p \supset p$

1	$\mid\ \mid p$	hyp
	$\mid\ \mid$—	
2	$\mid\ \mid p$	1, rep
3	$\mid p \supset p$	1–2, $\supset$ i

[4] $\vdash (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$

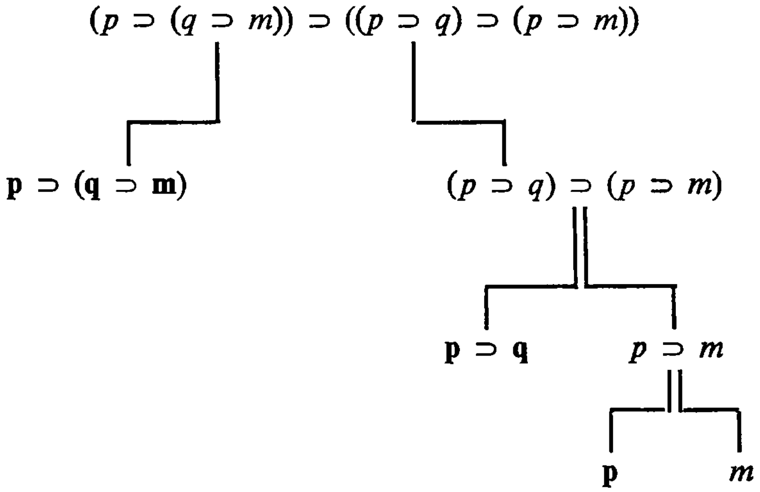
Pour trouver une démonstration de ce théorème, qui est déjà un peu compliqué, il suffit de procéder méthodiquement.

1. Comme tout théorème, il ne dépend d'aucune hypothèse, d'où le fait que le trait vertical numéro 0 n'a aucune barre horizontale.
2. Le théorème est de la forme $P \supset_1 Q$, où P a la valeur $p \supset (q \supset m)$ et il nous faudra introduire ce premier signe $\supset$. Pour cela, la règle $\supset$ i indique qu'il faut poser $p \supset (q \supset m)$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 1).
3. Q a la valeur $(p \supset q) \supset (p \supset m)$, expression qui est encore de la forme $P' \supset_2 Q'$ si on donne à P' la valeur $p \supset q$. Il nous faudra donc introduire ce second signe $\supset$ et poser, pour cela, $p \supset q$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 2).
4. Enfin Q' a la valeur $p \supset_3 m$. Il ne reste plus qu'à nous mettre en situation pour introduire ce troisième signe « $\supset$ ». Pour cela on pose p en hypothèse en l'accompagnant du trait vertical numéro 3.
5. Notre problème est maintenant d'utiliser les règles (et plus spécialement la règle d'élimination) pour obtenir la proposition m (ligne 8).
6. Il suffit maintenant d'appliquer trois fois de suite la règle $\supset$ i pour reconstruire le théorème de proche en proche.

	0 1	
1	$\mid\ \mid p \supset (q \supset m)$	hyp
	$\mid\ \mid$—2	
2	$\mid\ \mid\ \mid p \supset q$	hyp
	$\mid\ \mid\ \mid$—3	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid p$	hyp
	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid$—	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid p \supset q$	2, reit
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid q$	4, 3, $\supset$ e
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid p \supset (q \supset m)$	1, reit
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid q \supset m$	6, 3, $\supset$ e
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid m$	7, 5, $\supset$ e
9	$\mid\ \mid\ \mid p \supset m$	3–8, $\supset$ i
10	$\mid\ \mid (p \supset q) \supset (p \supset m)$	2–9, $\supset$ i
11	$\mid (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$	1–10, $\supset$ i

Remarques

1. Il serait aussi possible d'analyser la proposition à démontrer sous forme d'arbre. On obtiendrait:



La procédure consiste à introduire successivement, sous forme d'hypothèses, toutes les propositions qui sont les plus à gauche (ici en caractères gras), puis à chercher à obtenir (par les règles) les propositions qui ne sont pas en caractères gras.

2. Le lecteur aura intérêt à examiner attentivement cet exemple, qui est paradigmatique.

3. Cet exemple montre déjà que l'usage des parenthèses devient assez vite encombrant. Il existe une notation, dite polonaise (elle est due, en effet, à Lukasiewicz) qui dispense de toute parenthèse (voir le Fascicule 3). Quant à nous, nous nous contenterons ici, pour alléger les écritures, de remplacer parfois certaines paires de parenthèses par un simple point.

Exemple: Au lieu de $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$ nous écrirons, par exemple: $p \supset (q \supset m) \cdot \supset \cdot (p \supset q) \supset (p \supset m)$.

4. On remarquera que, si une proposition contient plusieurs signes $\supset$, l'un d'entre eux est « principal ». Dans le cas où la proposition est un théorème, il est lié au signe $\vdash$.

Exemple: $\vdash p \supset (q \supset p)$

C'est le premier signe $\supset$ qui est principal. Le théorème affirme donc un éconcé de la forme

$$\vdash P \supset Q$$

où P a la valeur p et Q la valeur $q \supset p$. (Cf. § 1.7).

1.4 La proposition conjonctive

Une proposition conjonctive est de la forme: *P et Q*. Nous écrirons $P \wedge Q$, ce que certains auteurs notent: P & Q, $P.Q$ ou même simplement PQ.

Supposons qu'une telle proposition, par exemple « il fait grand froid et j'ai tué six loups » soit vraie. L'usage habituel de la conjonction « et » est tel que nous entendons que « il fait grand froid » et « j'ai tué six loups » sont également deux propositions vraies. Ceci conduit à poser les deux règles d'élimination suivantes, que nous désignerons par le même sigle: $\wedge$ e.

Règles $\wedge$ e

$$\begin{array}{r|ll} n & P \wedge Q & \\ & \text{—} & \\ & P & n, \wedge \text{ e} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{r|ll} n & P \wedge Q & \\ & \text{—} & \\ & Q & n, \wedge \text{ e.} \end{array}$$

Inversement d'ailleurs, dans le cas où l'on sait que les deux propositions P et Q sont vraies séparément, nous sommes disposés à affirmer que la proposition conjonctive $P \wedge Q$ est aussi vraie. D'où la règle $\wedge$ i:

Règle $\wedge$ i

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ m & Q & \\ & \text{- - -} & \\ & P \wedge Q & n, m, \wedge \text{ i.} \end{array}$$

Remarque

Ici encore les petites barres en traitillé indiquent que les propositions qui sont au-dessus sont les prémisses de la règle et que la proposition qui est au-dessous en est la conclusion.

L'emploi de ces règles est extrêmement facile. En voici quelques exemples.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (p \wedge p)$

$$\begin{array}{r|l|ll} 1 & & p & \text{hyp} \\ & & \text{—} & \\ 2 & & p & 1, \text{rep} \\ 3 & & p \wedge p & 1, 2, \wedge \text{ i} \\ 4 & \multicolumn{2}{l}{p \supset (p \wedge p)} & 1\text{–}3, \supset \text{ i} \end{array}$$

[2] $\vdash (p \wedge p) \supset p$

$$\begin{array}{r|l|ll} 1 & & p \wedge p & \text{hyp} \\ & & \text{—} & \\ 2 & & p & 1, \wedge \text{ e} \\ 3 & \multicolumn{2}{l}{(p \wedge p) \supset p} & 1\text{–}2, \supset \text{ i} \end{array}$$

[3] $\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge p)$

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & & \underline{p \wedge q} & \text{hyp} \\
2 & & p & 1,\ \wedge\ \text{e} \\
3 & & q & 1,\ \wedge\ \text{e} \\
4 & & q \wedge p & 3{,}2,\ \wedge\ \text{i} \\
5 & \multicolumn{2}{l}{(p \wedge q) \supset (q \wedge p)} & 1\text{–}4,\ \supset\ \text{i}
\end{array}$$

Remarque : Aucune hypothèse n'a été faite, dans l'énoncé des règles, sur la relation entre n et m. Il s'ensuit qu'elles sont applicables aussi bien lorsque $n < m$ que lorsque $m < n$.

[4] $\vdash ((p \wedge q) \wedge m) \supset (p \wedge (q \wedge m))$

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & & \underline{(p \wedge q) \wedge m} & \text{hyp} \\
2 & & p \wedge q & 1,\ \wedge\ \text{e} \\
3 & & m & 1,\ \wedge\ \text{e} \\
4 & & p & 2,\ \wedge\ \text{e} \\
5 & & q & 2,\ \wedge\ \text{e} \\
6 & & q \wedge m & 5,\ 3,\ \wedge\ \text{i} \\
7 & & p \wedge (q \wedge m) & 4,\ 6,\ \wedge\ \text{i} \\
8 & \multicolumn{2}{l}{\text{Th.}} &
\end{array}$$

Remarque : Au lieu de répéter la donnée à la dernière ligne d'une démonstration, nous écrirons souvent « Th. », abréviation pour « le théorème à démontrer ».

[5] $(p \supset q) \wedge (q \supset m) \quad \vdash p \supset m$

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & \multicolumn{2}{l}{\underline{(p \supset q) \wedge (q \supset m)}} & \text{hyp} \\
2 & & \underline{p} & \text{hyp} \\
3 & & (p \supset q) \wedge (q \supset m) & 1,\ \text{reit} \\
4 & & p \supset q & 3,\ \wedge\ \text{e} \\
5 & & q \supset m & 3,\ \wedge\ \text{e} \\
6 & & q & 4,\ 2,\ \supset\ \text{e} \\
7 & & m & 5,\ 6,\ \supset\ \text{e} \\
8 & \multicolumn{2}{l}{p \supset m} & 2\text{–}7,\ \supset\ \text{i}
\end{array}$$

Comme on le voit sur cet exemple, la procédure heuristique décrite à la fin du paragraphe 1.3, reste applicable ici. Après avoir pris comme hypothèses tous les antécédents possibles, on décompose entièrement les propositions pour « reconstruire » ensuite le tout.

1.5 La proposition biconditionnelle

On rencontre souvent, dans les textes scientifiques, la locution « si et seulement si » que d'aucuns abrègent en « ssi ».

Exemple : Un triangle a ses trois côtés égaux si il a ses trois angles égaux.

Un tel énoncé signifie deux choses:

1) Si un triangle a ses trois côtés égaux, il a ses trois angles égaux.
2) Si un triangle a ses trois angles égaux, il a ses trois côtés égaux.

La proposition qui contient « si et seulement si » équivaut donc à deux propositions conditionnelles. Nous la nommerons une proposition *biconditionnelle* et nous poserons la définition (notre première définition):

$$\text{Df} \equiv\ :\ P \equiv Q = \text{df}\ (P \supset Q) \wedge (Q \supset P).$$

Remarques

1. Au lieu du foncteur abréviatif $\equiv$, certains auteurs notent $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.
2. Il arrive fréquemment que, au vu du contexte, le langage courant se contente de « si...alors », là où nous disons « ssi ».
Exemple: Ouvrant son porte-feuille quelqu'un dit: « Si j'ai 100 francs sur moi, je vous les prête ». Il va ici de soi que « Si je vous prête 100 francs, alors je les ai sur moi ».
Il s'ensuit que chaque fois que l'on cherche à « traduire » un texte dans le formalisme logique, il faut être attentif, non seulement à l'expression adoptée, mais à sa signification. Certains raisonnements peuvent parfaitement être corrects avec $\equiv$ et n'être pas valides avec $\supset$.

La règle repdf rend superflue l'introduction de règles spécifiques pour le foncteur $\equiv$.

Exemples

[1] Soit à démontrer le théorème $\vdash p \equiv \cdot p \wedge p$. Cela signifie qu'il faut démontrer $\vdash (p \supset \cdot p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$:

1	$\mid\ \mid p$	hyp
2	$\mid\ \mid p$	1, rep
3	$\mid\ \mid p \wedge p$	1, 2, $\wedge$ i
4	$\mid p \supset \cdot p \wedge p$	1–3, $\supset$ i
5	$\mid\ \mid p \wedge p$	hyp
6	$\mid\ \mid p$	5, $\wedge$ e
7	$\mid p \wedge p \cdot \supset p$	5–6, $\supset$ i
8	$\mid (p \supset \cdot p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$	4, 7, $\wedge$ i
9	$\mid p \equiv \cdot p \wedge p$	8, repdf $\equiv$

[2] $\vdash p \equiv p$

1	$\quad\quad p$	hyp
2	$\quad\quad p$	1, rep
3	$p \supset p$	1–2, $\supset$ i
4	$p \supset p$	3, rep
5	$(p \supset p) \wedge (p \supset p)$	3, 4, $\wedge$ i
6	$p \equiv p$	5, repdf $\equiv$

Pour des références ultérieures, notons encore:

[3] $\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$

[4] $\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$

[5] $\vdash (p \supset q \cdot \wedge \cdot q \supset p) \supset (p \equiv q)$

1.6 Théorèmes, métathéorèmes, règles dérivées

Avant d'aller plus loin, faisons le point de ce qui est déjà acquis. Nous sommes partis de *propositions* atomiques, en ce sens que, pour l'instant, nous renonçons à les analyser plus avant. Ces propositions sont vraies ou fausses et nous les désignons par des minuscules: p, q, m, etc.

Nous nous sommes aussi donnés des *foncteurs propositionnels:* $\supset$, $\wedge$ et $\equiv$, qui désignent des opérations. Cela signifie que, placés entre deux propositions (pas nécessairement atomiques d'ailleurs), ils engendrent une nouvelle proposition complexe ou, comme nous l'avons dit aussi, moléculaire.

Exemples. Si nous partons des propositions atomiques p et q, nous pourrons engendrer successivement, par exemple:

(1) $p \wedge q$
(2) $(p \wedge q) \supset p$
(3) $p \supset (p \wedge q)$.

« Se donner » des foncteurs revenait, dans le présent contexte, à poser des *règles* pour les introduire et pour les éliminer dans le cours d'une déduction. Il se trouve que, en appliquant les règles, il est parfois possible de déduire une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres.

Exemple: La proposition q peut se déduire des deux propositions p et $p \supset q$. Nous disons aussi que q peut se déduire de la *classe d'hypothèses* $\{p, p \supset q\}$ et nous notons: $p, p \supset q \vdash q$.

Les propositions, qui sont déductibles à partir de la classe d'hypothèses vide, forment un ensemble particulier, celui des *théorèmes* du système.

Ainsi la proposition (2) ci-dessus est un théorème et nous écrivons: $\vdash (p \wedge q) \supset p$.

D'autre part, nous avons aussi introduit des majuscules P, Q, M, etc. que nous avons appelées des *variables syntaxiques* ou encore *métavariables*. Elles prennent des propositions (quelconques) comme valeurs. Comment en faire usage? Pour voir la chose clairement, prenons un exemple.

Soit la proposition (qui d'ailleurs est un théorème) « $(p \wedge q) \supset p$ ». Rien n'empêche de l'appeler P, donc de donner à la variable P la valeur $(p \wedge q) \supset p$. Mais on peut aussi remarquer que la proposition en question est une conditionnelle. Pour souligner la chose, nous pourrions l'écrire sous la forme $P \supset Q$. Dans ce cas nous attribuons à P la valeur $p \wedge q$ et à Q la valeur p. Nous pourrions aussi songer à souligner le fait que l'antécédent de cette conditionnelle est une conjonction et écrire que la proposition est de la forme $(P \wedge Q) \supset M$. Dans ce cas, P aurait la valeur p, Q la valeur q et M la valeur p. Enfin, nous pourrions vouloir marquer que le proposition p se retrouve deux fois. Cela nous conduirait à écrire: $(P \wedge Q) \supset P$.

On constate alors que la proposition $(p \wedge q) \supset p$ et l'expression $(P \wedge Q) \supset P$ ne diffèrent qu'en ce que la première s'écrit avec des minuscules (c'est une proposition du système) et la seconde avec des majuscules. Mais, comme P et Q ne sont pas des propositions, mais des variables, il serait abusif de l'appeler une proposition. Nous dirons qu'il s'agit d'une *forme propositionnelle*.

Faisons un pas de plus. Dans le cas qui nous occupe, $(p \wedge q) \supset p$ est un théorème. Nous dirons alors que la forme propositionnelle, que l'on obtient en remplaçant les minuscules par des majuscules, sous les deux conditions suivantes:

1) à une même minuscule correspond une même majuscule,

2) à deux minuscules différentes correspondent deux majuscules différentes,

est un *métathéorème*.

Il est ainsi clair que, à chacun des théorèmes que nous avons démontré, on peut faire correspondre un métathéorème.

Exemples

Théorèmes	*Métathéorèmes*
$\vdash p \supset p$	(1) $\vdash P \supset P$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset m) \cdot \supset (p \supset m)$	(2) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \equiv q)$	(3) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset P) \cdot \supset (P \equiv Q)$
$\vdash p \equiv p$	(4) $\vdash P \equiv P$
$\vdash p \equiv q \cdot \supset \cdot q \equiv p$	(5) $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$

$\vdash (p \equiv q) \wedge (q \equiv m) \cdot \supset (p \equiv m)$	(6) $\vdash (P \equiv Q) \wedge (Q \equiv M) \cdot \supset (P \equiv M)$
$\vdash p \equiv \cdot p \wedge p$	(7) $\vdash P \equiv \cdot P \wedge P$
$\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$	(8) $\vdash P \wedge Q \cdot \equiv \cdot Q \wedge P$
$\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$	(9) $\vdash (P \wedge Q) \wedge M \cdot \equiv \cdot P \wedge (Q \wedge M)$.

Un métathéorème offre l'avantage de « condenser » en lui un nombre indéfini de théorèmes. Il suffit, pour les écrire, de donner à ses variables des valeurs arbitraires en respectant la condition: *à une même variable, attribuer la même valeur.*

Exemple: le métathéorème $\vdash (P \wedge Q) \supset P$.

Variables	*Valeurs attribuées*	*Théorèmes*
P et Q	p et q	$\vdash (p \wedge q) \supset p$
P et Q	q et p	$\vdash (q \wedge p) \supset q$
P et Q	p et p	$\vdash (p \wedge p) \supset p$
P et Q	$(p \wedge q)$ et $(q \supset p)$	$\vdash (p \wedge q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \wedge q)$

Passons maintenant aux règles. La première chose à laquelle on peut songer, est de les combiner entre elles pour en obtenir de nouvelles, que nous appellerons des *règles dérivées*. Il est ainsi particulièrement commode de chercher des règles dérivées pour le foncteur $\equiv$.

$$\begin{array}{r|ll}
1 & P \supset Q & \multirow{2}{*}{$\Big\}$ hyp} \\
2 & Q \supset P & \\
 & \text{---} & \\
3 & (P \supset Q) \wedge (Q \supset P) & 1, 2, \wedge\mathrm{i} \\
4 & P \equiv Q & 3, \text{repdf} \equiv
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ll}
1 & P \equiv Q & \multirow{2}{*}{$\Big\}$ hyp} \\
2 & P & \\
 & \text{---} & \\
3 & (P \supset Q) \wedge (Q \supset P) & 1, \text{repdf} \\
4 & P \supset Q & 3, \wedge\ \mathrm{e} \\
5 & Q & 2, 3, \supset\ \mathrm{e}
\end{array}$$

D'où les règles:

Règle $\equiv$ **i**

$$\begin{array}{r|ll}
n & P \supset Q & \\
m & Q \supset P & \\
 & \text{- - -} & \\
 & P \equiv Q & n, m, \equiv \mathrm{i}
\end{array}$$

Règle $\equiv$ **e**

$$\begin{array}{r|ll}
n & P \equiv Q & \\
m & P & \\
 & \text{- - -} & \\
 & Q & n, m, \equiv \mathrm{e}
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{r|ll}
n & P \equiv Q & \\
m & Q & \\
 & \text{- - -} & \\
 & P & n, m, \equiv \mathrm{e}
\end{array}$$

Remarque

La seconde règle d'élimination s'obtient de façon analogue à la première. Mais on peut faire encore plus. Nos règles ont certaines propriétés que l'on peut étudier, ou mieux, dont on peut étudier les effets. Expliquons-nous sur un exemple.

Supposons qu'on ait pu démontrer deux métathéorèmes, disons $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q'$. Cela signifie que nos règles nous ont permis de déduire, à partir de la classe d'hypothèses vide deux expressions de la forme P' et $P' \supset Q'$. Dans ces conditions, elles nous permettraient aussi de déduire l'expression Q' de la classe d'hypothèses vide. Pour s'en assurer, il suffit de raisonner de la façon suivante:

1. Puisque $\vdash P'$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de P', disons en m étapes.
2. De même, puisque $\vdash P' \supset Q'$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de $P' \supset Q'$, disons en n étapes.
3. Mettons ces deux démonstrations bout à bout et poursuivons comme il est indiqué:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \cdot & \\
 & \cdot & \text{Démonstration de } P' \\
 & \cdot & \\
m & P' & \\
m+1 & \cdot & \\
 & \cdot & \text{Démonstration de } P' \supset Q' \\
 & \cdot & \\
m+n & P' \supset Q' & \\
 & Q' & m, m+n, \supset \mathrm{e}
\end{array}$$

On a donc bien, sous les deux conditions $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q'$, que Q' est un métathéorème, donc que $\vdash Q'$.

Cette constatation porte sur une propriété de notre système. On peut l'énoncer en disant:
Si P' est un théorème dans le système et si $P' \supset Q'$ en est aussi un, alors Q' est un théorème dans le système.

Nous appellerons *épithéorèmes* des énoncés de ce genre, qui portent *sur* la logique que nous construisons. Et nous écrirons:

Épithéorème 1: $\vdash P'$ et $\vdash P' \supset Q' \Rightarrow \vdash Q'$

Remarque
Le signe $\Rightarrow$ n'appartient pas au système, pas plus que « et » ou que $\vdash$. Il abrège un discours sur le système et est donc un métasigne.

Exemple d'application
Prenons pour P' l'expression $P \equiv Q$ et pour Q' l'expression $Q \equiv P$. Nous savons que $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ (métathéorème (5) de tout à l'heure). Nous pouvons donc dire:
(*) Si $\vdash P \equiv Q$ alors $\vdash Q \equiv P$.

En effet, l'épithéorème 1 suppose deux conditions:

1) $\vdash P'$, donc ici que $P \equiv Q$ soit un métathéorème.
2) $\vdash P' \supset Q'$, donc ici que $P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ soit aussi un métathéorème.

Mais cette seconde condition est établie. Il ne reste donc plus que la condition (1). D'où l'énoncé (*) que nous pouvons écrire en abrégé:

$$\vdash P \equiv Q \Rightarrow \vdash Q \equiv P.$$

Remarque

Il est très important de noter que, si les raisonnements qui permettent d'établir et d'utiliser un épithéorème se font « logiquement », il ne saurait être question de les faire *dans* notre système. Nous sommes obligés de faire appel aux pratiques non formelles de la pensée naturelle.

Donnons encore un second exemple, qui sera utile plus loin.

Épithéorème 2: $\vdash P'$, $\vdash Q'$ et $\vdash (P' \wedge Q') \supset M' \Rightarrow \vdash M'$

Le raisonnement est analogue au précédent et nous nous bornons à l'indiquer:

1	.	
	.	Démonstration de P'
	.	
m	P'	
$m+1$	.	
	.	Démonstration de Q'
	.	
$m+n$	Q'	
$m+n+1$	.	
	.	Dém. de $(P' \wedge Q') \supset M'$
	.	
$m+n+k$	$(P' \wedge Q') \supset M'$	
$m+n+k+1$	$P' \wedge Q'$	m, $m+n$, $\wedge$ i
$m+n+k+2$	M'	$m+n+k$, $m+n+k+1$, $\supset$e

Exemple d'application

Remplaçons P' par $P \supset Q$, Q' par $Q \supset M$ et M' par $P \supset M$. Nous aurons pour $(P' \wedge Q') \supset M'$ l'expression:

$$(P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$$

que nous savons être un métathéorème (exemple (2)). Nous pouvons donc conclure de l'épithéorème 2:

$$\vdash P \supset Q \text{ et } \vdash Q \supset M \Rightarrow \vdash P \supset M.$$

1.7 La relation d'implication et celle d'équivalence

Partons de la notion de proposition conditionnelle. Une telle proposition peut être vraie ou fausse comme n'importe quelle autre. Ainsi la proposition « Si X est marié, il a une seule femme légitime » est vraie en Europe, fausse dans certaines civilisations. D'autre part, une proposition peut être vraie pour diverses raisons: juridiques, physiques, logiques, etc.

Considérons alors une proposition conditionnelle qui est vraie pour des raisons logiques. Cela signifie qu'elle est un théorème, donc de la forme $\vdash P \supset Q$. Tel est, par exemple, le cas de la proposition « $p \supset (q \supset p)$ », si on pose $P =\text{df}\, p$ et $Q =\text{df}\, q \supset p$. Il est clair que, dans ces conditions, l'antécédent P et le conséquent Q de la conditionnelle ne sont pas quelconques. En d'autres termes, si la proposition conditionnelle $P \supset Q$ est un théorème logique, c'est qu'il existe une certaine relation entre P et Q. Nous dirons alors (et seulement alors) que P *implique* Q (certains disent: P implique matériellement Q) et nous noterons: $P \rightarrow Q$. Ceci conduit à poser:

Df $\rightarrow$: $P \rightarrow Q = \text{df} \vdash P \supset Q$

soit: « P implique Q » veut dire que la proposition conditionnelle « si P alors Q » est un théorème logique.

Remarques

1. Il est très important de ne pas confondre les signes « $\rightarrow$ » et « $\supset$ ». Le premier est un signe de relation (un relateur), le second est un signe d'opération (un opérateur ou, comme nous disons, un foncteur).
L'analogie arithmétique suivante permettra de comprendre pourquoi la confusion est malheureusement facile en logique. Le signe « $<$ » est un relateur en arithmétique. On écrit, par exemple: $3 < 10$. A ceci correspond la proposition « 3 est plus petit que 10 ». Par ailleurs, on écrit aussi en arithmétique: $3 + 10$. Le signe « $+$ » est un opérateur et l'expression ne correspond pas à une proposition, mais elle désigne le nombre 13.
En logique toutefois $P \rightarrow Q$ se traduit par une proposition: « P implique Q » et $P \supset Q$ se traduit *aussi* par une proposition: « si P alors Q ». Cela n'empêche pas la distinction conceptuelle, mais elle est évidemment moins claire. On pourrait parler, comme le faisait Georges Boole (1815-1864), d'une proposition primaire pour $P \supset Q$ et d'une proposition secondaire pour $P \rightarrow Q$. La difficulté tient, en partie, à ce que les langues naturelles ne possèdent pas de moyens systématiques propres à assurer la distinction entre ces deux espèces de propositions.

Donnons à P la valeur p et à Q la valeur $q \supset p$. On a alors $\vdash P \supset Q$, soit par définition $P \rightarrow Q$. Dès lors:

1) $P \supset Q$, soit « si p alors $q \supset p$ » est une proposition qui appartient à notre système.
2) $P \rightarrow Q$, soit « p implique $q \supset p$ » est un énoncé qui appartient à la métalangue.
Et l'on voit que nous avons un moyen systématique de distinguer les propositions primaires (du système) des propositions secondaires (qui portent sur le système).

Etudions maintenant quelques unes des propriétés de cette relation d'implication.

1) *Elle est réflexive :* $P \rightarrow P$
En effet, par définition, $P \rightarrow P$ signifie $\vdash P \supset P$, ce qui est le métathéorème (1) du § 1.6.

2) *Elle est transitive:* $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow M \Rightarrow P \rightarrow M$
Il faut donc montrer que si $\vdash P \supset Q$ et si $\vdash Q \supset M$, alors on a $\vdash P \supset M$. C'est l'exemple d'application que nous avons donné de l'épithéorème 2.

Puisque (c'est une définition reçue en algèbre) toute relation qui est à la fois réflexive et transitive est une relation de préordre, nous pouvons affirmer que l'implication est une *relation de préordre.*

D'une façon analogue, nous allons partir de la proposition biconditionnelle. Elle est de la forme $P \equiv Q$, soit P ssi Q. Si maintenant les propositions désignées par P et Q sont telles que la proposition désignée par $P \equiv Q$ est un théorème, donc si $\vdash P \equiv Q$, c'est qu'il existe entre elles une certaine relation que nous noterons $\leftrightarrow$.
Df $\leftrightarrow$: $P \leftrightarrow Q =\text{df} \vdash P \equiv Q$.
Étudions aussi cette relation.

a) *Elle est réflexive :* $P \leftrightarrow P$
Par le métathéorème (4) du § 1.6.

b) *Elle est symétrique :* $P \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \leftrightarrow P$
Par le métathéorème (5) du § 1.6 et l'exemple d'application de l'épithéorème 1.

c) *Elle est transitive :* $P \leftrightarrow Q$ et $Q \leftrightarrow M \Rightarrow P \leftrightarrow M$
Par le métathéorème (6) du § 1.6 et l'épithéorème 1.

Il s'ensuit que, par définition, la relation est une relation d'équivalence. Les logiciens ont l'habitude de l'appeler simplement *la relation d'équivalence.* C'est donc un abus de langage, mais il est reçu.

Ceci nous permet de revenir à la relation d'implication. Nous savons déjà qu'il s'agit d'une relation de préordre. Mais elle jouit encore d'une troisième propriété.

3) *Elle est antisymétrique*: $P \to Q$ et $Q \to P \Rightarrow P \leftrightarrow Q$
Par le métathéorème (3) du § 1.6.
On convient de dire que la relation d'implication, qui est donc réflexive, transitive et antisymétrique est une *relation d'ordre.*

Notons enfin que les métathéorèmes (7), (8) et (9) du § 1.6 peuvent s'écrire:

$P \leftrightarrow P \wedge P$: P est équivalente à $P \wedge P$,

$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$: $P \wedge Q$ est équivalente à $Q \wedge P$,

$(P \wedge Q) \wedge M \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge M)$: $(P \wedge Q) \wedge M$ est équivalente à $P \wedge (Q \wedge M)$.

Ces trois équivalences expriment des propriétés importantes du foncteur $\wedge$, à savoir que l'opération de conjonction est *idempotente*, *commutative* et *associative.*

Remarque

Il faut prendre garde de ne pas confondre les termes:
1) Réflexif, symétrique et transitif, qui désignent des propriétés de certaines *relations* et
2) Idempotent, commutatif et associatif, qui désignent des propriétés de certaines *opérations.*

1.8 Proposition disjonctive

Une proposition disjonctive est de la forme *P ou Q* et nous noterons: $P \vee Q$. Il est d'autant plus remarquable de constater que la quasi-totalité des logiciens est d'accord aujourd'hui pour utiliser le signe $\vee$ que la conjonction (grammaticale) *ou* peut avoir deux sens. Elle peut indiquer la disjonction exclusive ou le disjonction non exclusive.

1) *Disjonction exclusive.* On entend que l'une seulement des propositions est vérifiée.

Exemple: « Tu mangeras ta soupe ou tu seras privé de dessert. »

Le contexte familial et normal laisse entendre que si l'enfant mange sa soupe, il aura du dessert. C'est l'usage qui correspond au latin *aut.*

2) *Disjonction non exclusive.* Ici on admet que les deux propositions peuvent être satisfaites. Ceci correspond au latin *vel* et, en anglais scientifique, on écrit parfois *and/or.*

Exemple: « Le roi, l'âne ou moi nous mourrons », proposition qui peut se paraphraser:

« Le roi mourra ou l'âne mourra ou je mourrai », sans qu'il soit exclu que plus d'un malheur se produise.

Pour des raisons purement internes au système que nous élaborons, et sur lesquelles nous reviendrons plus loin (Fascicule 2), nous allons nous donner des règles qui conduisent à l'interprétation non exclusive.

Supposons donc que quelqu'un ait pu établir la proposition P et donc que, en un sens naïf, P soit vraie. Dans ces conditions, $P \vee Q$ sera aussi vraie. En effet deux cas sont possibles:

1. Q est une proposition fausse. Mais le sens de *ou* est précisément d'exprimer qu'il suffit que l'une des deux propositions soit vérifiée.
2. Q est une proposition vraie. Dans ce cas les deux propositions sont vraies, ce qui est admissible dans l'interprétation non exclusive que nous avons choisie.

Nous poserons alors:

Règle $\vee$ **i**

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ & \text{---} & \\ & P \vee Q & n, \vee \mathrm{i} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|ll} n & Q & \\ & \text{---} & \\ & P \vee Q & n, \vee \mathrm{i} \end{array}$$

Comme on le voit, la règle se présente sous deux formes. La première permet d'introduire une proposition à droite de celle donnée à la ligne n, la seconde d'introduire une proposition à gauche de celle donnée à la ligne n. Il ne semble pas plus nécessaire ici que dans le cas de la règle $\wedge$e d'introduire deux sigles distincts.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (p \vee p)$

$$\begin{array}{r|l|ll} 1 & & p & \text{hyp} \\ & & \text{—} & \\ 2 & & p \vee p & 1, \vee \mathrm{i} \\ 3 & \multicolumn{2}{l}{p \supset (p \vee p)} & 1\text{–}2, \supset \mathrm{i} \end{array}$$

[2] $\vdash p \supset (p \vee q)$

$$\begin{array}{r|l|ll} 1 & & p & \text{hyp} \\ & & \text{—} & \\ 2 & & p \vee q & 1, \vee \mathrm{i} \\ 3 & \multicolumn{2}{l}{p \supset (p \vee q)} & 1\text{–}2, \supset \mathrm{i} \end{array}$$

Remarque

L'exemple [1] permet d'écrire $p \rightarrow p \vee p$, soit de dire que p implique $p \vee p$. Ceci n'a rien de particulièrement choquant. En revanche, l'exemple [2] conduit à affirmer que p implique (logiquement) p ou q, soit p ou n'importe quelle proposition. Et ce fait peut paraître plus gênant. Nous ne saurions recommander à un candidat bachelier de répondre que « toute équation du deuxième degré a deux solutions ou qu'elle en a vingt et une ». Néanmoins, la règle $\vee$i et l'algèbre (une équation du deuxième degré a deux solutions, réelles ou pas) s'accordent pour faire de la proposition disjonctive ci-dessus une proposition vraie. Cet exemple laisse entendre que notre façon de traiter le foncteur « ou » (et d'ailleurs les autres foncteurs logiques) ne tient aucun compte de l'information transmise par les propositions (Voir au Fascicule 2 la notion de tautologie).

Pour éliminer $\vee$, nous poserons en règle une pratique assez fréquente et qu'illustre l'exemple suivant.

Supposons qu'on sache d'un triangle qu'il est isocèle ou équilatéral. Nous pourrons alors raisonner ainsi:

1ère hypothèse: 1) Le triangle est isocèle
2) Il a deux angles égaux 1, raison. géom.

2e hypothèse: 3) Le triangle est équilatéral
4) Il a deux angles égaux 3, raison. géom.

Donc, puisque nous savons que le triangle en question est « isocèle ou équilatéral » et que chacun des termes de l'alternative conduit à la même conclusion, nous pouvons affirmer que ce triangle a deux angles égaux (au moins).

Nous poserons alors:

Règle $\vee$ e

$$\begin{array}{r|l l}
n & P \vee Q & \\
\cdots & & \\
m & \quad | \; P & \text{hyp} \\
 & \quad | \; \cdot & \\
 & \quad | \; \cdot & \\
 & \quad | \; \cdot & \\
m' & \quad | \; M & \\
 & & \\
l & \quad | \; Q & \text{hyp} \\
 & \quad | \; \cdot & \\
 & \quad | \; \cdot & \\
 & \quad | \; \cdot & \\
l' & \quad | \; M & \\
 & M & n, m - m', l - l', \vee\text{e}
\end{array}$$

Cette règle exige donc de poser successivement comme hypothèse chacun des termes de la proposition disjonctive $P \vee Q$. Elle conduit donc à faire deux sous-déductions et à tenter de déduire (par les règles du système) une même proposition M. Si on y parvient, la règle $\vee$e autorise à écrire M dans la même déduction que $P \vee Q$. Il faut noter encore que les deux sous-déductions sont indépendantes l'une de l'autre. En particulier, ni la règle rep, ni la règle reit ne permet de répéter une proposition de l'une dans l'autre.

[3] $\vdash p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$

1	$p \vee q$	hyp (pour introduire le $\supset$)
2	p	hyp (pour éliminer le $\vee$)
3	$q \vee p$	2, $\vee$i (deuxième forme)
4	q	hyp (second terme de l'alternative)
5	$q \vee p$	4, $\vee$i (première forme)
6	$q \vee p$	1, 2–3, 4–5, $\vee$e
7	Th.	1–6, $\supset$i

Remarque

Comme on peut démontrer, de façon analogue, la réciproque de ce théorème, on peut conclure que l'opération de disjonction est commutative.

[4] $\vdash p \vee p \cdot \supset p$

1	$p \vee p$	hyp
2	p	hyp
3	p	2, rep
4	p	hyp
5	p	4, rep
6	p	1, 2–3, 4–5, $\vee$e
7	Th.	1–6, $\supset$ i

Remarques

1. Cet exemple, dont la démonstration pourrait en pratique être abrégée puisque les lignes 4 et 5 ne sont que la répétition des lignes 2 et 3, souligne assez bien l'aspect ludique du système.

2. Les exemples (1) et (4) permettent de dire que l'opération $\vee$ est idempotente.
3. On établira, en exercice, qu'elle est aussi associative.

La manipulation de la disjonction étant un peu moins facile que celle des autres opérations, nous allons encore en donner deux exemples.

[5] $\vdash p \vee (q \wedge m) \cdot \supset \cdot (p \vee q) \wedge (p \vee m)$

1	$\vert\;\vert\; p \vee (q \wedge m)$	hyp
2	$\vert\;\vert\;\vert\; p$	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1)
3	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee q$	2, $\vee$ i
4	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee m$	2, $\vee$ i
5	$\vert\;\vert\;\vert\; (p \vee q) \wedge (p \vee m)$	3, 4 $\wedge$ i
6	$\vert\;\vert\;\vert\; q \wedge m$	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1)
7	$\vert\;\vert\;\vert\; q$	6, $\wedge$ e
8	$\vert\;\vert\;\vert\; m$	6, $\wedge$ e
9	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee q$	7, $\vee$ i
10	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee m$	8, $\vee$ i
11	$\vert\;\vert\;\vert\; (p \vee q) \wedge (p \vee m)$	9, 10, $\wedge$ i
12	$\vert\;\vert\; (p \vee q) \wedge (p \vee m)$	1, 2–5, 6–11, $\vee$ e
13	$\vert$ Th.	1–12, $\supset$ i

[6] $\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee m) \cdot \supset \cdot p \vee (q \wedge m)$

1	$\vert\;\vert\; (p \vee q) \wedge (p \vee m)$	hyp
2	$\vert\;\vert\; p \vee q$	1, $\wedge$ e
3	$\vert\;\vert\; p \vee m$	1, $\wedge$ e
4	$\vert\;\vert\;\vert\; p$	hyp (pour éliminer $\vee$ de 2)
5	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee (q \wedge m)$	4, $\vee$ i
6	$\vert\;\vert\;\vert\; q$	hyp (pour éliminer $\vee$ de 2)
7	$\vert\;\vert\;\vert\; p \vee m$	3, reit
8	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; p$	hyp (pour éliminer $\vee$ de 7)
9	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; p \vee (q \wedge m)$	8, $\vee$ i
10	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; m$	hyp (pour éliminer $\vee$ de 7)
11	$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; q$	6, reit

12	$q \wedge m$	10, 11, $\wedge$ i
13	$p \vee (q \wedge m)$	12, $\vee$ i
14	$p \vee (q \wedge m)$	7, 8–9, 10–13, $\vee$ e
15	$p \vee (q \wedge m)$	2, 4–5, 6-14, $\vee$ e
16	Th.	1--15, $\supset$ i

Remarque

L'équivalence $p \vee (q \wedge m) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$ exprime la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$. On verra en exercice que la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$ peut aussi être établie.

1.9 La négation

Jusqu'ici, nous avons admis que, dans les applications, nous traiterions comme atomiques aussi bien les propositions affirmatives que les propositions négatives. Il est toutefois clair que toute proposition négative, disons Q, peut se comprendre comme la négation d'une proposition affirmative: *non-P*.

Exemples

[1] « 6 n'est pas un nombre premier », soit Q peut se comprendre comme: « non: 6 est un nombre premier », soit *non-P*.

[2] « Il n'y a pas de roses sans épines » peut se comprendre comme: « non: il y a des roses sans épines ».

Le mot « non » joue encore le rôle d'un foncteur propositionnel, mais c'est un *foncteur unaire*, en ce sens qu'il s'applique à une seule proposition. Il désigne l'opération qui transforme une proposition P en sa négation *non-P*. Nous noterons $\sim P$, ce que d'autres écrivent aussi $\neg P$ ou $\overline{P}$ ou P'.

Il est facile de voir que la négation joue un rôle privilégié en logique. On peut tout d'abord s'assurer sur soi-même qu'il n'est pas immédiat que la négation de « il est bête et méchant » soit « il n'est pas bête *ou* il n'est pas méchant ». On peut aussi constater que des logiques, comme la logique intuitionniste ou la logique minimale, diffèrent avant tout de la logique classique par l'usage qu'elles font de la négation. Ceci suffit déjà à expliquer pourquoi nous allons procéder en plusieurs étapes et examiner chaque fois la portée des règles introduites.

Règle $\sim$ i

Commençons par poser que, si une proposition P, prise comme hypothèse, conduit à une contradiction — c'est-à-dire qu'il est possible d'en déduire une proposition Q et la négation de Q — alors c'est $\sim P$ qu'il faut affirmer. Cela nous donne:

Règle $\sim$ i

$$\begin{array}{r|l|l l}
n & & \underline{P} & \text{hyp} \\
. & & . & \\
. & & . & \\
. & & . & \\
m & & Q & \\
k & & \sim Q & \\
 & \sim P & & n, m, k, \sim \text{i}
\end{array}$$

Remarques

1. Il s'agit ici d'une règle qui codifie, dans notre système, le raisonnement par l'absurde: toute proposition qui conduit à une contradiction doit être niée.
2. Cette règle est très proche de la règle $\supset$ i, en ce sens qu'elle permet de se libérer d'une hypothèse. Toutefois la référence se fait aux seules propositions n, m et k et non à toute la sous-déduction.
3. Cette règle se propose d'introduire un signe « $\sim$ », de même que la règle $\supset$ i, par exemple, servait à introduire un signe « $\supset$ ». Il y a cependant ici un élément qui peut paraître paradoxal. Si l'on convient de considérer que toute la sous-déduction n–k constitue la prémisse de la règle, on constate que la prémisse contient nécessairement une mention du signe « $\sim$ » que la règle a pour but d'introduire!

Il est clair que le « $\sim$ » qui précède la proposition de la ligne k ne saurait, sans cercle vicieux, être introduit par la règle. Il faut donc en conclure qu'il ne peut y figurer que s'il est préalablement contenu dans l'hypothèse P. En conséquence, notre système ne permet de traiter de la négation que dans la mesure où nous prenons nous-mêmes en considération (pour en examiner les conséquences) des propositions elles-mêmes négatives. Cette sorte de restriction est liée à l'adage que, en logique, le vrai ne peut conduire au faux.

Exemples

[1] $\vdash (p \supset q) \wedge (p \supset \sim q) \cdot \supset \sim p$

$$\begin{array}{r|l|l l}
1 & \underline{(p \supset q) \wedge (p \supset \sim q)} & & \text{hyp (pour } \supset \text{i)} \\
2 & & \underline{p} & \text{hyp (pour } \sim \text{i)}
\end{array}$$

3	$\vert\ \vert\ \vert\ (p \supset q) \wedge (p \supset \sim q)$	1, reit
4	$\vert\ \vert\ \vert\ p \supset q$	3, $\wedge$ e
5	$\vert\ \vert\ \vert\ p \supset \sim q$	3, $\wedge$ e
6	$\vert\ \vert\ \vert\ q$	2, 4, $\supset$ e
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim q$	2, 5, $\supset$ e
8	$\vert\ \vert\ \sim p$	2, 6, 7, $\sim$ i
9	$\vert$ Théorème	1–8, $\supset$ i

[2] $\vdash p \supset \sim\sim p$

1	$\vert\ \vert\ p$	hyp (pour $\supset$ i)
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim p$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\vert\ \vert\ \vert\ p$	1, reit
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim p$	2, rep
5	$\vert\ \vert\ \sim \sim p$	2, 3, 4, $\sim$ i
6	$\vert$ Théorème	1–5, $\supset$ i

Remarques

1. Il faut se garder de conclure que, puisque l'hypothèse $\sim p$ conduit à une contradiction, c'est p qui est la proposition correcte. Nous n'avons, pour le moment, aucune règle qui nous permette d'éliminer une négation.
2. L'exemple [2] permet d'écrire le métathéorème: $\vdash P \supset \sim \sim P$. On aura donc l'implication $P \rightarrow \sim \sim P$, qui est une partie du principe classique de la double négation.
3. Rien n'empêche aussi de s'en tenir (avec P à la place de p) aux cinq première lignes de l'exemple [2] et de conclure à la règle dérivée suivante que nous désignerons par neg $\sim$ i (introduction « négative » de $\sim$):

Règle neg $\sim$ i

n	$\vert\ P$	
	$\vert$ - - -	
	$\vert\ \sim \sim P$	n, neg $\sim$ i

[3] $p, \sim p \vdash \sim q$

1	$\vert\ p$	hyp (les éléments de la classe d'hypothèses.)
2	$\vert\ \sim p$	
3	$\vert\ \vert\ q$	hyp (pour $\sim$ i)
4	$\vert\ \vert\ p$	1, reit

5	$\mid\ \mid \sim p$	2, reit
6	$\mid \sim q$	3, 4, 5, $\sim$ i

Remarques

1. Nous pouvons tirer de l'exemple [3] la règle (provisoire) suivante:

Règle N

n	$\mid P$	
m	$\mid \sim P$	
	$\mid$ - - -	
	$\mid \sim Q$	n, m, N

2. On entend volontiers dire qu'« une contradiction conduit à n'importe quoi ». Ce que nous pouvons toutefois établir pour l'instant, c'est que: $P \wedge \sim P \cdot \rightarrow \sim Q$. En effet, cette implication signifie que $\vdash P \wedge \sim P \cdot \supset \sim Q$, métathéorème qui découle immédiatement de la règle N. Nous pouvons donc, quant à nous, dire: « une contradiction conduit à la négation de n'importe quelle proposition ».

Dérivons maintenant directement trois nouvelles règles:

Règle neg $\wedge$ **i** (pour introduire une conjonction précédée d'une négation)

1	$\mid \sim P \vee \sim Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid\ \mid P \wedge Q$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\mid\ \mid P$	2, $\wedge$ e
4	$\mid\ \mid Q$	2, $\wedge$ e
5	$\mid\ \mid \sim P \vee \sim Q$	1, reit
6	$\mid\ \mid\ \mid \sim P$	hyp (pour $\vee$ e)
7	$\mid\ \mid\ \mid P$	3, reit
8	$\mid\ \mid\ \mid Q$	4, reit
9	$\mid\ \mid\ \mid \sim Q$	6, 7, N
10	$\mid\ \mid\ \mid Q \wedge \sim Q$	8, 9, $\wedge$ i
11	$\mid\ \mid\ \mid \sim Q$	hyp (pour $\vee$ e)
12	$\mid\ \mid\ \mid Q$	4, reit
13	$\mid\ \mid\ \mid Q \wedge \sim Q$	11, 12, $\wedge$ i
14	$\mid\ \mid Q \wedge \sim Q$	5, 6–10, 11–13, $\vee$ e
15	$\mid\ \mid Q$	14, $\wedge$ e
16	$\mid\ \mid \sim Q$	14, $\wedge$ e
17	$\mid \sim (P \wedge Q)$	2, 15, 16, $\sim$ i

Règle neg $\vee$ **i** (pour introduire une disjonction précédée d'une négation)

1	$\mid \sim P \wedge \sim Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid \; \mid P \vee Q$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\mid \; \mid \sim P \wedge \sim Q$	1, reit
4	$\mid \; \mid \sim P$	3, $\wedge$ e
5	$\mid \; \mid \sim Q$	3, $\wedge$ e
6	$\mid \; \mid \; \mid P$	hyp (pour $\vee$ e)
7	$\mid \; \mid \; \mid \sim P$	4, reit
8	$\mid \; \mid \; \mid \sim (P \vee Q)$	6, 7, N (on choisit $P \vee Q$ comme propo-
9	$\mid \; \mid \; \mid Q$	hyp sition quelconque que l'on nie)
10	$\mid \; \mid \; \mid \sim Q$	5, reit
11	$\mid \; \mid \; \mid \sim (P \vee Q)$	9, 10, N
12	$\mid \; \mid \sim (P \vee Q)$	2, 6–8, 9–11, $\vee$ e
13	$\mid \; \mid P \vee Q$	2, rep
14	$\mid \sim (P \vee Q)$	2, 12, 13, $\sim$ i

Règle neg $\vee$ **e** (pour éliminer une disjonction prédédée d'une négation)

1	$\mid \sim (P \vee Q)$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid \; \mid P$	hyp
3	$\mid \; \mid P \vee Q$	2, $\vee$ i
4	$\mid \; \mid \sim (P \vee Q)$	1, reit
5	$\mid \sim P$	2, 3, 4, $\sim$ i
6	$\mid \; \mid Q$	hyp
7	$\mid \; \mid P \vee Q$	6, $\vee$ i
8	$\mid \; \mid \sim (P \vee Q)$	1, reit
9	$\mid \sim Q$	6, 7, 8, $\sim$ i
10	$\mid \sim P \wedge \sim Q$	5, 9, $\wedge$ i

Faisons maintenant le point de la situation. Si nous ajoutons aux règles générales et aux règles pour les foncteurs $\supset$, $\wedge$ et $\vee$ la règle $\sim$ i, nous pouvons dériver les règles suivantes:

Règle N

$$\begin{array}{|l} P \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$$

Règle neg $\sim$ *i*

$$\begin{array}{|l} P \\ \hline \sim\sim P \end{array}$$

Règle neg $\wedge$ *i*

$$\begin{array}{|l} \sim P \vee \sim Q \\ \hline \sim (P \wedge Q) \end{array}$$

Règle neg $\vee$ *i*

$$\begin{array}{|l} \sim P \wedge \sim Q \\ \hline \sim (P \vee Q) \end{array}$$

Règle neg $\vee$ *e*

$$\begin{array}{|l} \sim (P \vee Q) \\ \hline \sim P \wedge \sim Q \end{array}$$

Les deux règles neg $\vee$ i et neg $\vee$ e constituent l'une des lois de Morgan. Il est tentant de se demander si l'on ne pourrait pas encore dériver la règle neg $\wedge$ e (avec neg $\wedge$ i, nous obtiendrions l'autre loi de Morgan) et la règle neg $\sim$ e (avec neg $\sim$ i nous aurions la loi de double négation). En fait on peut montrer, par des considérations métathéoriques que nous ne rapporterons pas, que la chose n'est pas possible. Cela signifie que nous ne disposons, pour le moment, que d'une forme faible de la négation. On l'appelle parfois la *réfutabilité* et la logique obtenue équivaut à *la logique* dite *minimale* de Johansson (1936). (On trouvera des compléments d'information dans le Fascicule 3).

Comme la limitation fondamentale réside en ce que la règle N ne nous permet que d'arriver à une proposition négative $\sim Q$, nous allons renforcer notre négation en introduisant l'équivalent du principe fameux: *ex falso quodlibet sequitur*. Nous poserons donc la nouvelle règle suivante:

Règle $\sim$ e

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ m & \sim P & \\ \hline & Q & \quad n, m, \sim \mathrm{e} \end{array}$$

Remarques

1. Il est évidemment un peu abusif de considérer cette règle comme une règle d'élimination. La proposition Q de la conclusion peut fort bien désigner une proposition qui commence par une négation. Il est cependant commode d'adopter cette terminologie pour des raisons de symétrie.
2. Cette règle dispense de la règle N, en ce sens que toute déduction qui faisait usage de la règle N peut être refaite en utilisant la règle $\sim$ e.
3. Cette nouvelle règle est cependant plus forte que la règle N, ce qui signifie qu'elle permet de démontrer de nouveaux théorèmes.

Exemple $\vdash \sim p \vee q \cdot \supset \cdot p \supset q$

1	$\sim p \vee q$	hyp
2	p	hyp
3	$\sim p \vee q$	1, reit
4	$\sim p$	hyp
5	p	2, reit
6	q	4, 5, $\sim$ e (La règle N permettrait seulement d'ècrire $\sim q$)
7	q	hyp
8	q	7, rep
9	q	3, 4–6, 7–8, $\vee$ e
10	$p \supset q$	2–9, $\supset$ i
11	Théorème	1–10, $\supset$ i

4. Il est toutefois remarquable que nous ne puissions encore ni déduire les règles neg $\sim$ e, neg $\wedge$ e, ni la réciproque du théorème ci-dessus. Examinons, par exemple, ce que donnerait une tentative de démontrer: $p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q.$

1	$p \supset q$	hyp
2	$\sim(\sim p \vee q)$	hyp (pour $\sim$ i)
3	$\sim\sim p \wedge \sim q$	2, neg $\vee$ e
4	$\sim\sim p$	3, $\wedge$ e
5	$\sim q$	3, $\wedge$ e
6	$p \supset q$	1, reit

On voit que, si l'on pouvait passer de $\sim\sim p$ à p, il serait possible d'éliminer $\supset$ grâce à la ligne 6. Cela conduirait à q et, en présence de $\sim q$ (ligne 5), nous aurions la contradiction souhaitée. En fait nous pourrions écrire alors $\sim\sim(\sim p \vee q)$ et il faudrait, une nouvelle fois, éliminer une double négation.

Il s'ensuit que nous disposons maintenant d'un nouveau type de négation, plus fort que la réfutabilité mais pas encore « complet » au sens classique. Cette négation se nomme volontiers l'*absurdité* et le système obtenu en ajoutant aux règles de la logique minimale la règle $\sim$ e équivaut à la *logique intuitionniste* de Heyting (1930).

Pour terminer, donnons-nous la règle neg $\sim$ e:

Règle neg $\sim$ e

$$\begin{array}{r|ll}
n & \sim\sim P & \\
\hline
 & P & n, \text{neg} \sim \text{e}
\end{array}$$

Nous venons d'esquisser la preuve qu'il est maintenant possible de démontrer $\vdash p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q$, ce qui permet d'affirmer que $\sim p \vee q$ est équivalent à $p \supset q$. Il est aussi facile de déduire la règle neg $\wedge$ e qui manquait:

Règle neg $\wedge$ e

$$\begin{array}{r|ll}
n & \sim(P \wedge Q) & \\
\hline
 & \sim P \vee \sim Q & n, \text{neg} \wedge \text{e}
\end{array}$$

En effet:

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \sim(P \wedge Q) & \text{hyp} \\
\hline
2 & \quad \mid \sim(\sim P \vee \sim Q) & \text{hyp} \\
3 & \quad \mid \sim\sim P \wedge \sim\sim Q & 2, \text{neg} \vee \text{e} \\
4 & \quad \mid \sim\sim P & 3, \wedge \text{e} \\
5 & \quad \mid P & 4, \text{neg} \sim \text{e} \\
6 & \quad \mid \sim\sim Q & 3, \wedge \text{e} \\
7 & \quad \mid Q & 6, \text{neg} \sim \text{e} \\
8 & \quad \mid P \wedge Q & 5, 7, \wedge \text{i} \\
9 & \quad \mid \sim(P \wedge Q) & 1, \text{reit} \\
10 & \sim\sim(\sim P \vee \sim Q) & 2, 8, 9, \sim \text{i} \\
11 & \sim P \vee \sim Q & 10, \text{neg} \sim \text{e}
\end{array}$$

Le système engendré par les règles suivantes: règles générales, règles pour $\supset$, $\vee$, $\wedge$, règles $\sim$ i, $\sim$ e et neg $\sim$ e conduit à la *logique classique des propositions.* Le métathéorème suivant, dit principe du tiers exclu, en est caractéristique:

$$\vdash P \vee \sim P.$$

Preuve

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \mid \sim(P \vee \sim P) & \text{hyp (pour} \sim \text{i)} \\
2 & \quad \mid \sim P \wedge \sim\sim P & 1, \text{neg} \vee \text{e} \\
3 & \quad \mid \sim P & 2, \wedge \text{e} \\
4 & \quad \mid \sim\sim P & 2, \wedge \text{e} \\
5 & \sim\sim(P \vee \sim P) & 1, 3, 4, \sim \text{i} \\
6 & P \vee \sim P & 5, \text{neg} \sim \text{e}
\end{array}$$

Remarques

1. Ainsi qu'on peut le constater, la ligne 5 s'obtient à l'aide de règles qui sont déjà disponibles en logique minimale. C'est donc bien l'élimination de la double négation qui est caractéristique de la logique classique.

2. Glivenko (1929), comparant la logique intuitionniste I et la logique classique C, a pu établir l'épithéorème suivant:

Si $\vdash_C P$ alors $\vdash_I \sim\sim P$ et réciproquement.

3. En résumé, nous avons la suite de systèmes logiques suivante, suite dans laquelle tout théorème d'un système à gauche d'une flèche est aussi théorème des systèmes à droite, sans que la réciproque soit vraie:

Règles générales Règles $\supset$ i, $\supset$ e, $\wedge$ i, $\wedge$ e, $\vee$ i, $\vee$ e	+ Règle $\sim$ i	+ Règle $\sim$ e	+ Règle neg $\sim$ e
L. positive $\rightarrow$	L. minimale $\rightarrow$	L. intui- $\rightarrow$ tionniste	L. classique
Pas de nég.	Réfutabilité	Absurdité	Négation

4. Le lecteur vérifiera qu'en logique classique il est possible de dériver les deux règles suivantes, qui sont très commodes à l'usage:

Règle neg $\supset$ i

$$\begin{array}{l|ll} n & P \wedge \sim Q & \\ & \text{- - -} & \\ & \sim(P \supset Q) & n, \text{neg} \supset \text{i} \end{array}$$

Règle neg $\supset$ e

$$\begin{array}{l|ll} n & \sim(P \supset Q) & \\ & \text{- - -} & \\ & P \wedge \sim Q & n, \text{neg} \supset \text{e} \end{array}$$

DEUXIÈME PARTIE

LA LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

L'USAGE NAÏF DES QUANTIFICATEURS

2.1 L'analyse des propositions

Il convient maintenant de procéder à l'analyse des propositions, considérées jusqu'à maintenant comme des atomes. Partons pour cela d'un exemple:

(1) Jules est hercule et Cyprien est musicien

Le calcul des propositions (inanalysées) nous permettait de poser, en guise d'abréviation:

$p =$ df Jules est hercule $\quad q =$ df Cyprien est musicien

et d'écrire pour rendre compte de (1):

(2) $p \wedge q$.

Mais la proposition p comporte un *sujet* (Jules) et un *prédicat* (être hercule). De même la proposition q peut être conçue comme comportant un sujet (Cyprien) et un prédicat (être musicien).

Dans le cirque en question, nous sommes en présence d'un certain nombre d'individus et d'un certain nombre de prédicats. Il est bien évident que notre intention n'est pas de construire une logique à l'usage exclusif des gens du voyage. Toutefois, quel que soit le domaine de réalité que nous voudrons considérer, nous nous trouverons toujours devant *un ensemble d'objets ou d'individus* Ω et devant *un ensemble de prédicats* Π.

Les éléments de Ω pourraient être, dans les cas finis, désignés explicitement: $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Les x_i seraient des constantes d'objets (d'individus). Certains systèmes logiques introduisent de telles constantes, d'autres ne le font pas. Mais, dans les deux types de systèmes, il est indispensable de disposer de variables qui prennent leurs valeurs sur Ω. Nous utiliserons, quant à nous, les lettres x, y, z, ... et nous les nommerons des *variables d'objets ou d'individus.*

La situation pour les prédicats est analogue et nous avons besoin de variables qui prennent leurs valeurs sur Π. Nous n'introduirons pas de constantes de prédicats et nous nous contenterons, dans les exemples, de spécifier quelle valeur prend telle ou telle variable. Ainsi nous pourrons dire que a prend la valeur « être hercule » et b la valeur « être musicien ».

Remarque

Le lecteur aura vu que ce qu'on nomme traditionnellement *la copule*, et qui s'exprime par le verbe « être », a été intégré ici dans le prédicat. Il s'ensuit que l'exemple (1) pourra s'écrire avec nos conventions et en posant $x_1 = \text{df}$ Jules, $x_2 = \text{df}$ Cyprien:

(3) $ax_1 \wedge bx_2$.

On écrit d'abord le prédicat puis le sujet: « est hercule Jules *et* est musicien Cyprien ». Toutefois la formule (3) se lit dans l'ordre de l'écriture.

Il est pratique, quoique nullement nécessaire, de distinguer deux sortes de prédicats. Prenons l'exemple suivant:

(4) Jules est moins bien payé que Cyprien.

Nous avons ici deux constantes d'individus x_1 et x_2 et un prédicat qui les met en relation l'une avec l'autre: « être moins bien payé que ». Convenons alors d'introduire deux espèces de variables de prédicats:

Variables de prédicats qui portent sur une seule variable d'individu: $a, b, c, \ldots$

Variables de prédicats qui portent sur deux, ou plus de deux, variables d'individus: $r, s, t, \ldots$

Ces dernières seront dites, pour faire bref, des *variables de relations.*

Remarque

Si r prend la valeur « être moins bien payé que », il serait naturel de traduire (4) par:

(5) $x_1\, rx_2$.

Toutefois, par analogie avec l'écriture ax_1 et pour tenir compte aussi des relations entre plus de deux termes, nous conviendrons de toujours écrire *d'abord la variable de prédicat* puis la ou les variables (éventuellement constantes) d'individus. Nous aurons donc:

(6) $rx_1\, x_2$.

Considérons, pour terminer, un exemple complet. Soit la proposition:

« x_1 et x_2 et x_3 sont trois points de la droite x_4 et x_2 est entre x_1 et x_3 ».

Prenons pour domaine d'objets Ω l'ensemble des êtres géométriques et posons:

a: être un point	b: être une droite
r: être situé sur	s: être entre ... et ...

Il vient:

$ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3 \wedge bx_4 \wedge rx_1x_4 \wedge rx_2x_4 \wedge rx_3x_4 \wedge sx_2x_1x_3$.

2.2 Fonctions propositionnelles et quantificateurs

Supposons que Ω soit l'ensemble des nombres naturels. Si a désigne le prédicat « être un nombre premier », l'écriture $a3$ correspondra à la proposition vraie « 3 est un nombre premier ». Qu'en est-il alors de l'expression ax?

x est une variable qui prend ses valeurs sur Ω, mais l'expression « x est un nombre premier » ne saurait pour autant être considérée comme une proposition. On ne peut en effet décider si elle est vraie ou si elle est fausse, puisque tout va dépendre de la valeur que prendra x. Si x prend la valeur 3, l'expression est vraie et nous retrouvons notre proposition $a3$. Si x prend la valeur 6, nous aurons l'expression $a6$ qui est fausse, mais qui est une proposition.

D'une façon générale, une expression, construite à l'aide de variables de prédicats (ou de relations) et qui contient au moins une variable d'individus, est dite une *fonction propositionnelle.*

Exemples

$$ax \vee by;\ rxy \supset ryx;\ ax \wedge bx \cdot \supset \cdot bx$$

Remarque

Comme nous allons le voir, il faudrait pour être correct et complet, dire qu'une fonction propositionnelle se reconnaît à ceci qu'elle contient au moins une variable d'individu *libre.*

Nous connaissons déjà une façon de transformer une fonction propositionnelle en proposition: remplacer les variables d'individus (libres) qu'elle contient par des constantes d'individus. Il existe cependant deux autres procédés.

I. Partons de la fonction propositionnelle « x est un nombre premier » et considérons l'expression:

tout x est un nombre premier.

« Tout x » signifie ici, en vertu du choix de Ω, « tout nombre naturel » ou « tous les nombres naturels ». L'énoncé en question est manifestement faux, mais ceci suffit à faire voir que « tout x est un nombre premier » est une proposition. On pourrait dire aussi:

pour tout x, x est un nombre premier

et écrire:

pour tout x, ax.

Convenons de poser $\forall x$ au lieu de « pour tout x ». On aura:

$\forall x$, ax.

Mais, comme les virgules ne font pas partie des signes de notre système, nous utiliserons les parenthèses dont nous disposons déjà et écrirons finalement:

$(\forall x)\ ax.$

II. Reprenons la fonction propositionnelle « x est un nombre premier ». Il est clair que l'expression:

quelque x (au moins) est un nombre premier

est vraie et que, en conséquence, c'est une proposition. Nous pourrons dire aussi:

il y a un x (au moins), tel que x est un nombre premier

et écrire:

il y a un x (au moins), tel que ax.

Convenons de poser $\exists x$ pour « il y a un x (au moins) » et nous obtenons finalement:

$(\exists x)\ ax.$

Nous venons d'enrichir nos notations de deux signes nouveaux: $\forall$ et $\exists$. Ce sont des quantificateurs: le premier est dit *quantificateur universel* et le second *quantificateur particulier ou existentiel.*

Remarque

Les quantificateurs ne portent que sur des variables d'individus et c'est ce qui caractérise la logique des prédicats *du premier ordre.* Une logique dans laquelle les variables de prédicats peuvent aussi être quantifiées, est une logique du deuxième ordre.

Ainsi, si $=$ désigne la constante de prédicat « être identique à », il est possible d'écrire dans la logique du 1[er] ordre:

quelle que soit la variable a:

$(\forall x)\ (\forall y)\ (x{=}y \cdot \supset \cdot ax \supset ay).$

Dans une logique du 2[e] ordre on pourrait écrire:

$(\forall a)\ (\forall x)\ (\forall y)\ (x{=}y \cdot \supset \cdot ax \supset ay).$

2.3 Variables libres et variables liées

Remarquons d'abord que, grâce au jeu des parenthèses, la *portée* ou le *champ* d'un quantificateur peut toujours être exactement déteiminé.

Exemples

[1] Il existe des livres savants et ennuyeux.

Posons: $\Omega = \{\text{écrits}\}$ $\quad a =$ être un livre $\quad b =$ être savant
$\quad c =$ être ennuyeux

Il vient: $(\exists x)\ (ax \wedge bx \wedge cx).$

[2] Il existe des livres savants et il en existe d'ennuyeux.
Avec les mêmes conventions, il vient:

$$(\exists x)\,(ax \wedge bx) \wedge (\exists x)\,(ax \wedge cx).$$

[3] Tout effet a une cause.
Posons: $\Omega = \{\text{phénomènes}\}$ $\quad a =$ être un effet $\quad r =$ être cause de
Il vient: $(\forall x)\,(ax \supset (\exists y)\,ryx)$

[4] Il existe un nombre naturel plus petit ou égal à tout autre.
Posons: $\Omega = \{\text{nombres}\}$ $\quad a =$ être un nombre naturel
$\quad r =$ être plus petit ou égal à
Il vient: $(\exists x)\,(\forall y)\,(ax \wedge ay \cdot \supset rxy)$.

De plus, à côté des propositions nous aurons aussi affaire à des formes propositionnelles, c'est-à-dire à des expressions du genre:

[5] $(\exists x)\,ax \wedge by$

[6] $(\forall x)\,(rxy \supset (\exists y)\,rxy)$

[7] $(\forall x)\,rxy \supset (\exists y)\,rxy$

Il convient alors de distinguer les variables qui sont dans le champ d'un quantificateur et les autres. Toute variable, qui est dans le champ d'un quantificateur en son nom, est dite *liée*. Les autres sont *libres*.

Remarque:

Toutes les variables d'une proposition sont liées (Exemples [1] à [4]). Dans l'exemple [5], x est liée par $(\exists x)$ et y est libre. Dans l'exemple [6], les deux mentions de x sont liées par $(\forall x)$, la première mention de y est libre et la seconde est liée par $(\exists y)$. Dans l'exemple [7] enfin, la première mention de x est liée par $(\forall x)$, la seconde est libre, la première mention de y est libre et la seconde est liée par $(\exists y)$.

Reprenons maintenant l'exemple [3]. Nous avions:

$$(\forall x)\,(ax \supset (\exists y)\,ryx)$$

Toutes les mentions des variables x et y sont liées, mais il est clair que nous aurions obtenu une formulation équivalente de la proposition « Tout effet a une cause » en écrivant:

$$(\forall z)\,(az \supset (\exists t)\,rtz)$$

ou $\quad (\forall y)\,(ay \supset (\exists x)\,rxy)$

ou même $(\forall \;\;)\,(a \;\; \supset (\exists \;\;)\,r \;\;\;\;)$.

Il en va de même dans l'écriture algébrique. Ainsi peut-on écrire la même loi fameuse:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ou même (de préférence en l'absence des mathématiciens!): $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Tout ceci montre que le nom d'une variable liée n'importe pas, qu'il s'agit comme on disait autrefois, d'*une variable apparente*. Nous en tirerons profit pour considérer parfois qu'une expression qui ne contient *que* des variables liées est une expression sans variable. Et elle est, en effet, sans véritable variable.

2.4 Les matériaux du système

Nous allons élaborer notre système à l'aide d'un certain nombre de signes et de lettres.

Les signes
Ce seront les signes $\supset$, $\wedge$, $\equiv$, $\vee$, $\sim$ que nous avons introduits dès le chapitre I et pour lesquels nous avons des règles d'introduction et d'élimination.

De plus, nous aurons les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$, pour la manipulation desquels il va s'agir de nous donner des règles.

Enfin nous avons des parenthèses et éventuellement des points que nous traiterons de nouveau de façon non formelle.

Les lettres
Nous en aurons de plusieurs espèces:
$x, y, z, \ldots$ variables d'individus ou d'objets

$$\left.\begin{array}{l} a, b, c, \ldots \\ r, s, t, \ldots \end{array}\right\} \text{variables de prédicats} \left\langle \begin{array}{l} \text{à proprement parler:} \\ \text{de relations} \end{array}\right.$$

On peut se demander ce que deviennent les lettres p, q, m, ... qui nous servaient à abréger les propositions. Deux attitudes sont ici possibles:

1. N'en plus faire usage, puisque nous sommes à même maintenant d'analyser les propositions.
2. Les conserver comme abréviations pour les cas où nous n'aurons pas envie de tout expliciter.

Il sera commode d'adopter la seconde attitude.

Variables syntaxiques ou métavariables
Commençons par examiner quelles sont les expressions que nous pouvons former dans le système. Il y en a de deux sortes:

1. *Expressions atomiques*, par exemple: ax, by, rxy, $sxyz$, ...
2. *Expressions moléculaires*, qui sont celles que l'on peut former à partir des expressions atomiques à l'aide des foncteurs propositionnels et des quantificateurs. Par exemple: $\sim ax$, $ax \wedge by$, $rxy \supset \sim ax$, $(\forall x)\, ax$, $(\exists y)\, rxy$, $(\forall x)\, (\exists y)\, (ax \vee by)$, ...

Nous avons besoin de métavariables qui prendront leurs valeurs sur cet ensemble d'expressions atomiques et moléculaires. Nous utiliserons pour cela les lettres: A, B, C, ... et éventuellement P, Q, M, ... lorsque nous voudrons insister sur le fait que l'expression considérée est une proposition (ne contient pas de variable libre).

Exemple: L'expression du système $(\forall x)\ (\exists y)\ (ax \supset by)$ pourra être désignée par A (ou par P, puisque c'est une proposition).

On voit cependant que l'information transmise est assez faible. Elargissons donc nos conventions métalinguistiques.

Il peut être souhaitable de noter que l'expression considérée commence par un quantificateur, au nom d'une certaine variable, qu'elle se continue par un second quantificateur, au nom d'une autre variable, etc... Nous utiliserons les lettres X, Y, Z pour désigner les variables d'objets. Ce sont donc des métavariables et nous noterons par exemple:

$(\forall X)\ (\exists Y)\ A$ pour $(\forall x)\ (\exists y)\ (ax \supset by)$ et pour toute expression de la même forme: $(\forall y)\ (\exists x)\ (ax \wedge by)$, $(\forall z)\ (\exists u)\ (az \wedge bu \cdot \supset au)$, etc...

Si nous voulons encore indiquer que l'expression qui est quantifiée contient les variables appelées X *et* Y, nous noterons:

$$(\forall X)\ (\exists Y)\ A\ (X, Y)$$

On a donc:

$(\forall X)\ (\exists Y)\ A\ (X, Y)$ peut désigner par exemple:

$(\forall x)\ (\exists y)\ (ax \supset by)$	ici X est x, Y est y et $A\ (X, Y)$ est $ax \supset by$
$(\forall y)\ (\exists x)\ (ax \wedge by)$	X est y, Y est x et $A\ (X, Y)$ est $ax \wedge by$
$(\forall z)\ (\exists u)\ (az \wedge by \cdot \supset au)$	X est z, Y est u et $A\ (X, Y)$ est $az \wedge by \cdot \supset au$

Remarques

1. Nous avions déjà exploité au Ch. I la possibilité d'exprimer de plusieurs façons différentes dans la métalangue une même expression de la langue. Ainsi « $p \wedge q \cdot \supset p$ » peut se représenter par:

P: on indique seulement qu'il s'agit d'une proposition;

$P \supset Q$: on indique qu'on a une conditionnelle;

$P \wedge Q \cdot \supset M$: on précise que l'antécédent est une conjonction;

$P \wedge Q \cdot \supset P$: on indique que la première proposition de la conjonction est la même que le conséquent.

On aura maintenant, par exemple, pour $(\forall x)\ (\exists y)\ (ax \supset \cdot\ by \wedge cy)$:

A ou P: on indique qu'il s'agit d'une proposition;

$(\forall X)\ A$: on précise que l'expression commence par un quantificateur universel;

$(\forall X)\ (\exists Y)\ A$: on ajoute encore qu'elle continue par un quantificateur existentiel;

$(\forall X)\,(\exists Y)\,A\,(X, Y)$: on indique enfin quelles variables figurent dans l'expression quantifiée.

2. Les majuscules désignent des minuscules, mais cela n'implique pas qu'elles soient de même nom. Ainsi X peut désigner x, y, z, u, etc.

3. Dans une même expression une même majuscule ne peut pas désigner deux minuscules différentes.

2.5 Le quantificateur universel

Notre problème est maintenant de poser les règles, $\forall$i et $\forall$e, pour introduire et pour éliminer un quantificateur universel, de telle sorte que l'interprétation qu'on en pourra donner corresponde, aussi bien que possible, avec l'idée habituelle de « tous ».

Pour cela, plaçons-nous dans le cas où le domaine d'individus Ω est fini. Supposons par exemple que $\Omega = \text{df}\ \{x_1, x_2, x_3\}$.

Si a est un prédicat et que ce prédicat soit satisfait par x_1, x_2 et x_3, on pourra dire « pour tout x (de Ω), ax ». Donc on aurait:

$$(\forall x)\,ax = \text{df}\ ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$$

Dans ce cas on pourra faire les trois déductions suivantes:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3 & \\ & \text{—} & \\ & ax_1 & 1, \wedge\,\text{e} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 1 & ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3 & \\ & \text{—} & \\ & ax_2 & 1, \wedge\,\text{e} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} 1 & ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3 & \\ & \text{—} & \\ & ax_3 & 1, \wedge\,\text{e} \end{array}$$

ou encore écrire:

$$\begin{array}{r|l} 1 & (\forall x)\,ax \\ & \text{—} \\ & ax_i \end{array}$$

où ax_i signifie *l'un quelconque* des éléments de Ω. Mais, pour représenter un élément quelconque de Ω, nous avons nos variables d'objets x, y, z. Si y prend ses valeurs sur Ω, il est clair que y peut prendre l'une des valeurs x_1, x_2 et x_3. Nous pourrons donc écrire:

$$\begin{array}{r|l} 1 & (\forall x)\,ax \\ & \text{—} \\ & ay \end{array}$$

ou même, puisque la variable x est liée (et donc apparente):

$$\begin{array}{r|l} 1 & (\forall x)\,ax \\ & \text{—} \\ & ax \end{array}$$

Procédons maintenant à deux généralisations.

1. Ω est un ensemble quelconque, pas nécessairement fini. Nous allons poser que la règle reste valable et donc écrire:

$$\begin{array}{|l} (\forall x)\ ax \\ \text{—} \\ ay \end{array}$$

2. L'expression quantifiée n'est pas nécessairement atomique.
   Par exemple: $A\ (x) = \text{df}\ ax \wedge bx \cdot \supset ax.$
   Posons que la règle est valable. Cela nous donne:

$$\begin{array}{|l} (\forall X)\ A(X) \\ \text{- - -} \\ A(Y) \end{array}$$

Mais ici deux questions surgissent:

1) Que veut dire $A(Y)$? Évidemment qu'on a changé le nom de la variable. Mais, dans l'exemple, $A(X)$ contenait trois mentions de X. Faut-il les changer toutes les trois ou pouvons-nous n'en changer que quelques-unes?

Pour prendre une décision qui soit conforme avec l'usage que nous avons l'intention de faire de notre système, prenons un exemple. Supposons que, dans le domaine des nombres naturels, nous ayons l'expression $(\forall x)\ (x{=}x)$. Nous pouvons certes affirmer que $x{=}x$, $y{=}y$, etc. Mais écrire $x{=}y$, c'est-à-dire changer le nom d'une seule des mentions de x, conduit manifestement à une absurdité: x n'est égal à y que si y est le même nombre que x.

Nous déciderons donc, dans ce contexte, que le changement de variable (si changement il y a) se fera sur toutes les mentions et nous parlerons alors de *substitution*. Posons la convention suivante:
Si $A(X)$ désigne une expression qui contient la variable X, $A(Y)$ désigne la même expression à ceci près qu'à *chaque* mention de X on a substitué une mention de Y.

Exemple $A(X)$	$ax \vee \sim ax$	$ay \supset by$	$ax \wedge bx \cdot \supset ax$
$A(Y)$	$ay \vee \sim ay$	$az \supset bz$	$ax \wedge bx \cdot \supset ax$

Le troisième exemple n'est paradoxal qu'en apparence. X désigne une variable quelconque (x dans le 1er ex., y dans le 2ème, x dans le 3ème). Y de même. Rien n'empêche que X et Y désignent la même variable.

2) Sommes-nous véritablement libres d'utiliser n'importe quelle variable d'objets pour Y? Essayons.
Soit l'expression: $A(X) = \text{df}\ (\exists y)\ (x \neq y)\quad x, y \in \mathrm{N}$. Alors l'expression

$(\forall X)\, A(X)$ désigne $(\forall x)\,(\exists y)\,(x \neq y)$. Utilisons notre règle: $(\exists y)\,(y \neq y)$. On voit qu'ici on n'a pas le droit de donner la valeur y à Y. En revanche, $(\exists y)\,(x \neq y)$ ou $(\exists y)\,(z \neq y)$ n'offrent aucune difficulté. Nous dirons que y n'est pas libre pour x. Cela signifie que l'expression $A(X)$ est de telle nature que y s'y trouve déjà liée et que, en conséquence, si on substitue y à x, on serait en présence d'une confusion de lecture.

D'une façon générale, nous dirons que *Y est libre pour X dans A*, si après qu'on a écrit Y au lieu de X, aucune mention qui devrait être libre ne se trouve liée.

Nous poserons alors:

Règle $\forall$ **e**

n	$(\forall X)\, A(X)$		

	$A(Y)$	n, $\forall$e	à condition que Y soit libre pour X.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (\forall x)\, ax \cdot \supset \cdot p \supset ay$

1	$p \supset (\forall x)\, ax$	hyp
2	p	hyp
3	$p \supset (\forall x)\, ax$	1, reit
4	$(\forall x)\, ax$	2, 3, $\supset$ e
5	ay	4, $\forall$e, x/y
6	$p \supset ay$	2–5, $\supset$ i
7	Th.	1–6, $\supset$ i

Remarque:

La notation x/y signifie que « à la place de x on a substitué y ». *Substare* (= mettre sous): y est *sous* la barre oblique.

[2] $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \wedge ryx) \supset rxx$

1	$(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \wedge ryx)$	hyp
2	$(\forall y)\,(rxy \wedge ryx)$	1, $\forall$ e x/x
3	$rxx \wedge rxx$	2, $\forall$ e y/x
4	rxx	3, $\wedge$ e
5	Th.	1–4, $\supset$ i

Remarque :

Il n'aurait pas été possible de prouver le théorème $(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \wedge ryx) \supset ryy$. A la ligne 2, en effet, il aurait fallu substituer y à x et y n'était pas libre pour x.

La règle d'introduction est un peu plus délicate. Pour prouver en effet qu'une propriété, disons a, est valable pour tous les objets d'un domaine, donc pour établir $(\forall x)\, ax$, on pourrait, à la rigueur et dans les cas où Ω est fini, s'en assurer pour chaque élément successivement. Mais non seulement un tel procédé serait souvent pratiquement inutilisable, il n'aurait aucun sens dans les cas où Ω est infini.

On sait que la technique consiste à prendre un *élément quelconque* (et on le désigne naturellement par une variable libre qui prend ses valeurs sur Ω) et à raisonner sur lui. La question est alors de savoir à quelles conditions on a bien affaire à un élément quelconque. La réponse théorique est simple : on ne doit faire sur lui aucune hypothèse autre que son appartenance à Ω.

Formellement le problème consiste à arriver, en fin de déduction, à écrire $(\forall x)\, ax$:

$$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \\ (\forall x)\, ax \end{array}$$

Il est tout d'abord évident que la sous-déduction qui doit conduire à dire « donc $(\forall\ x)\ ax$ » ne saurait commencer par aucune hypothèse qui contienne x. Toute hypothèse ferait de x un représentant particulier des éléments de Ω. Nous déciderons en conséquence que la sous-déduction en question se fera *sans hypothèse.*

Mais on voit aussi facilement que cette restriction ne suffit pas. L'hypothèse pourrait avoir été faite avant la sous-déduction et réitérée. Nous poserons donc en plus l'interdiction de réitérer toute expression qui contiendrait x libre. Et par prudence, nous écrirons à la gauche du trait vertical le nom de la variable qui n'ose le franchir. Nous parlerons dans ce cas d'une *sous-déduction catégorique*. On a alors :

Règle $\forall$ **i**

$$\begin{array}{r|l|l}
n & X & \cdot \\
 & & \cdot \\
 & & \cdot \\
m & & A\,(X) \\
 & \multicolumn{2}{l}{(\forall\ X)\, A\,(X) \qquad\qquad n\text{–}m,\ \forall\,\mathrm{i}}
\end{array}$$

Exemples

[1] $\vdash (\forall x)\,(ax \wedge bx) \supset \cdot (\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$

1		$(\forall x)\,(ax \wedge bx)$	hyp
2	x	$(\forall x)\,(ax \wedge bx)$	1, reit. La variable est *liée*, on peut
3		$ax \wedge bx$	2, $\forall$ e donc réitérer.
4		ax	3, $\wedge$ e
5		$(\forall x)\, ax$	2–4, $\forall$ i
6	x	$(\forall x)\,(ax \wedge bx)$	1, reit
7		$ax \wedge bx$	6, $\forall$ e
8		bx	7, $\wedge$ e
9		$(\forall x)\, bx$	6–8, $\forall$ i
10		$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	5, 9, $\wedge$ i
11		Th	1–10, $\supset$ i

[2] $\vdash (\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx \cdot \supset (\forall x)\,(ax \wedge bx)$

1		$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	hyp
2	x	$(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$	1, reit
3		$(\forall x)\, ax$	2, $\wedge$ e
4		$(\forall x)\, bx$	2, $\wedge$ e
5		ax	3, $\forall$ e
6		bx	4, $\forall$ e
7		$ax \wedge bx$	5, 6, $\wedge$ i
8		$(\forall x)\,(ax \wedge bx)$	2–7, $\forall$ i
9		Th	1–8, $\supset$ i

Remarque

$(\forall x)\,(ax \wedge bx)$ est équivalent à $(\forall x)\, ax \wedge (\forall x)\, bx$. Si Ω est l'ensemble des Académiciens, il est donc logiquement équivalent de dire qu'« ils sont tous célèbres et immortels » ou qu'« ils sont tous célèbres et qu'ils sont tous immortels ».

Soit maintenant Ω une assemblée dont on sait qu'elle n'est pas mixte. On peut donc dire que tous sont des hommes ou que tous sont des femmes. Ceci implique que tous sont des hommes ou des femmes.

[3] $\vdash (\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx \cdot \supset (\forall x)\,(ax \vee bx)$

1		$(\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx$	hyp
2	x	$(\forall x)\, ax \vee (\forall x)\, bx$	1, reit

3	$\vert\ \vert\ \vert\ (\forall x)\ ax$	hyp ($\vee$ e)
4	$\vert\ \vert\ \vert\ ax$	3, $\forall$ e
5	$\vert\ \vert\ \vert\ ax \vee bx$	4, $\vee$ i
6	$\vert\ \vert\ \vert\ (\forall x)\ bx$	hyp ($\vee$ e)
7	$\vert\ \vert\ \vert\ bx$	6, $\forall$ e
8	$\vert\ \vert\ \vert\ ax \vee bx$	7, $\vee$ i
9	$\vert\ \vert\ ax \vee bx$	2, 3–5, 6–8, $\vee$ e
10	$\vert\ (\forall x)\ (ax \vee bx)$	2–9, $\forall$ i
11	Th	1–10, $\supset$ i

En revanche, si on sait qu'une assemblée ne contient que des hommes et des femmes (ce qui exclut par exemple les enfants) on ne peut conclure qu'elle n'est pas mixte. Il est intéressant de tenter de démontrer l'expression $(\forall x)\ (ax \vee bx) \supset \cdot\ (\forall x)\ ax \vee (\forall x)\ bx$ pour voir comment le formalisme utilisé empêche la preuve.

1	$\vert\ (\forall x)\ (ax \vee bx)$	hyp
2	$\vert\ x \vert\ (\forall x)\ (ax \vee bx)$	1, reit
3	$\vert\ \ \ \vert\ ax \vee bx$	2, $\forall$ e
4	$\vert\ \ \ \vert\ x \vert\ .$	
	$\vert\ \ \ \vert\ \ \ \vert\ .$	
	$\vert\ \ \ \vert\ \ \ \vert\ .$	

Pour pouvoir écrire à une ligne $n > 4$ $(\forall x)\ ax$, il faudrait inaugurer à la ligne 4 une sous-déduction marquée x et on ne peut donc réitérer 3.

2.6 Le quantificateur existentiel

Il est tout d'abord clair que si l'on a pu établir qu'une propriété a convenait à un élément quelconque du domaine Ω, si donc on a pu établir ax, on peut assurer qu'il existe au moins un individu qui a la propriété a:

ax		ax		ax	
---	ou	---	ou	---	etc.
$(\exists x)\ ax$		$(\exists y)\ ay$		$(\exists z)\ az$	

Il n'y a pas de difficulté à ériger ceci en règle générale, à condition que la variable liée qui sert à indiquer qu'il existe (au moins) un élément de Ω tel que cet élément jouit de la propriété ne prête pas à confusion.

Exemple

Supposons que l'on ait pu établir (Ω = df N) que $y \neq x$. Il est sans autre possible de poser: $(\exists y)\ (y \neq x)$ ou $(\exists z)\ (z \neq x)$ ou même $(\exists \ )\ (\ \neq x)$. Mais on ne saurait écrire $(\exists x)\ (x \neq x)$.

Nous stipulerons donc de nouveau que la variable choisie doit être *libre pour* x. On voit donc la ressemblance entre les conditions imposées par les variables dans la règle $\forall$ e et dans la règle $\exists$ i que nous cherchons. Il existe cependant une différence essentielle que nous allons mettre en évidence par un exemple intuitif.

Supposons qu'on ait l'expression $(\forall x)\ (x \leqslant x)$, donc une expression de la forme $(\forall X)\ A\ (X)$. La règle $\forall$ e permet d'écrire $x \leqslant x$ ou $y \leqslant y$, etc. Si nous sommes dans le domaine des nombres naturels, nous pouvons même écrire $3 \leqslant 3$, $6 \leqslant 6$, etc. L'expression $A\ (Y)$ que la règle permet d'écrire signifie que la propriété considérée est vraie pour un élément quelconque du domaine. Mais nous avions aussi souligné que l'expression $A\ (Y)$ exigeait que *chaque* mention de X soit transformée en une mention de Y et nous avions parlé pour cela de *substitution*. De ce qu'on a toujours $y \leqslant y$ ne suit pas, en effet, qu'on ait toujours $y \leqslant x$ ou $x \leqslant y$. La chose se voit sans peine si on introduit des constantes d'individus: $6 \leqslant 6$ mais on ne peut poser $6 \leqslant x$ quel que soit x.

Mais supposons qu'on ait pu établir que $6 \leqslant 6$. Alors on peut certes écrire: $(\exists x)\ (x \leqslant x)$. Rien n'empêche toutefois de se contenter de $(\exists x)\ (6 \leqslant x)$ ou $(\exists x)\ (x \leqslant 6)$. D'une façon générale, si on a une expression $A\ (Y)$ on pourra écrire $(\exists X) A\ [X]$ en remplaçant un nombre quelconque de mentions Y par une mention de X. Nous parlerons d'un *remplacement* et nous utiliserons des crochets pour rappeler la chose.

Finalement nous poserons:

Règle $\exists$ i

n	$A\ (Y)$	
	- - -	
	$(\exists X)\ A\ [X]$	n, $\exists$ i à condition que X soit libre pour Y

Exemples

[1] $\vdash (\forall x)\ (ax \wedge bx) \supset \cdot\ (\exists x)\ ax \wedge (\exists y)\ by$

1	$(\forall x)\ (ax \wedge bx)$	hyp
	—	
2	$ax \wedge bx$	1, $\forall$ e x/x
3	ax	2, $\wedge$ e
4	$(\exists x)\ ax$	3, $\exists$ i x/x
5	bx	2, $\wedge$ e

6	$\vert\ \vert\ (\exists y)\ by$	5, $\exists$ i x/y
7	$\vert\ \vert\ (\exists x)\ ax \wedge (\exists y)\ by$	4, 6, $\wedge$ i
8	$\vert$ Th	1–7, $\supset$ i

Remarque

La notation x/y signifie ici qu'on a *remplacé* x par y.

[2] $\vdash (\forall x)\ rxx \supset (\exists x)\ (\exists y)\ rxy$

1	$\vert\ \vert\ (\forall x)\ rxx$	hyp	
	$\vert\ \vert$ —		
2	$\vert\ \vert\ rzz$	1, $\forall$ e, x/z	
3	$\vert\ \vert\ (\exists y)\ rzy$	2, $\exists$ i, z/y	on a remplacé le deuxième
4	$\vert\ \vert\ (\exists x)\ (\exists y)\ rxy$	3, $\exists$ i, z/x	z seulement par y
5	$\vert$ Th	1–4, $\supset$ i	

Voyons maintenant comment se débarrasser d'un quantificateur existentiel. Considérons pour cela une expression de la forme $(\exists X)\ A\ (X)$, par exemple $(\exists x)\ ax$. Cela signifie qu'il existe au moins un élément du domaine considéré qui jouit de la propriété a. Nous ne savons malheureusement pas duquel (ou desquels) il s'agit. Nous allons donc l'appeler x, nous y tenir, et examiner les conséquences de l'hypothèse que *ce* x jouit de la propriété a:

1	$\vert\ (\exists x)\ ax$	
2	$\vert\ \vert\ ax$	hyp
	$\vert\ \vert$ —	
	$\vert\ \vert\ .$	
	$\vert\ \vert\ .$	
	$\vert\ \vert\ .$	

Aussi longtemps que les conséquences de l'hypothèse de la ligne 2 font appel à x, nous ne pouvons rien conclure, puisque nous ne savons pas de quel élément (de quels éléments) il est possible d'affirmer a. En revanche, si nous arrivons, disons à la ligne n, à une expression qui ne mentionne plus x (nous la noterons p) nous pourrons raisonner ainsi:

Le seul fait que $(\exists x)\ ax$ permet de déduire p. Donc p peut s'affirmer sur la seule base de $(\exists x)\ ax$. Et nous aurons:

1	$\vert\ (\exists x)\ ax$	
2	$\vert\ \vert\ ax$	
	$\vert\ \vert$ —	
	$\vert\ \vert\ .$	
	$\vert\ \vert\ .$	
	$\vert\ \vert\ .$	
	$\vert\ \vert\ .$	
n	$\vert\ \vert\ p$	
$n+1$	$\vert\ p$	1, 2–n, $\exists$ e

Remarque

Cette écriture montre bien que p (à la ligne $n + 1$) dépend encore de $(\exists x)\ ax$, mais pas du x particulier qui jouit de la propriété.

Il y a cependant encore une précaution à prendre qui tient précisément à ce qu'une règle de cette espèce prétend passer à p sur la seule foi de $(\exists x)\ ax$. Et c'est de ne pas prêter à ce x d'autres propriétés que celle d'être a. Pour cela nous nous interdirons toute réitération d'une expression qui contiendrait x libre dans la sous-déduction.

Cela conduit à poser la règle:

Règle ∃ e

$$
\begin{array}{r|l|l}
n & (\exists X)\ A\ (X) & \\
\hline
m & X \mid A\ (X) & \\
 & \quad\ \vdots & \\
l & \quad\ P & \\
 & P & n,\ m\text{–}l,\ \exists\ \mathrm{e}
\end{array}
$$

Remarques

1. L'hypothèse m doit se faire au nom de la variable X (celle qui est quantifiée à la ligne n).
2. Selon nos conventions, P désigne une proposition (expression sans aucune variable libre). On pourrait tolérer une expression qui contiendrait une variable libre, *à condition que ce ne soit pas X.*
3. Le X, à gauche de la barre verticale, rappelle qu'aucune expression contenant X (libre) ne peut être réitérée.

Exemples

[1] $\vdash (\exists x)\ (ax \vee bx) \equiv \cdot\ (\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad (\exists x)\ (ax \vee bx) & \text{hyp} \\
2 & \quad x \mid ax \vee bx & \text{hyp (pour } \exists\ \mathrm{e)} \\
3 & \quad\quad\quad \mid ax & \text{hyp (pour } \vee\ \mathrm{e)} \\
4 & \quad\quad\quad \mid (\exists x)\ ax & 3,\ \exists\ \mathrm{i},\ x/x
\end{array}
$$

5 | | | | $(\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$ 4, $\vee$ i
6 | | | | bx hyp (pour $\vee$ e)
| | | |—
7 | | | | $(\exists x)\ bx$ 6, $\exists$ i, x/x
8 | | | | $(\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$ 7, $\vee$ i
9 | | | $(\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$ 2, 3–5, 6–8, $\vee$ e
10 | | $(\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$ 1, 2–9, $\exists$ e (l'expression 9 ne contient pas x libre)
11 | $(\exists x)(ax \vee bx) \supset \cdot (\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx$ 1–10, $\supset$ i

1 | | $(\exists x)\ ax \vee (\exists x)\ bx$ hyp
| |—
2 | | | $(\exists x)\ ax$ hyp (pour $\vee$ e)
| | |—
3 | | | x | ax hyp (pour $\exists$ e)
| | | |—
4 | | | | $ax \vee bx$ 3, $\vee$ i
5 | | | | $(\exists x)\ (ax \vee bx)$ 4, $\exists$ i, x/x
6 | | | $(\exists x)\ (ax \vee bx)$ 2, 3–5, $\exists$ e
7 | | | $(\exists x)\ bx$ hyp (pour $\vee$ e)
| | |—
8 | | | x | bx hyp (pour $\exists$ e)
| | | |—
9 | | | | $ax \vee bx$ 8, $\vee$ i
10 | | | | $(\exists x)\ (ax \vee bx)$ 9, $\exists$ i, x/x
11 | | | $(\exists x)\ (ax \vee bx)$ 7, 8–10, $\exists$ e
12 | | $(\exists x)\ (ax \vee bx)$ 1, 2–6, 7–11, $\vee$ e
13 | $(\exists x)\, ax \vee (\exists x)\, bx \cdot \supset (\exists x)(ax \vee bx)$ 1–12, $\supset$ i

Ces deux démonstrations prouvent l'équivalence posée par [1]. Si Ω est l'ensemble des ouvrages d'une bibliothèque, on a en effet que « la bibliothèque possède un traité de géométrie ou de physique » équivaut à « la bibliothèque possède un traité de géométrie ou elle possède un traité de physique ».

[2] $\vdash (\exists x)\ (ax \wedge bx) \supset \cdot (\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$
1 | | $(\exists x)\ (ax \wedge bx)$ hyp
| |—
2 | | x | $ax \wedge bx$ hyp (pour $\exists$ e)
| | |—
3 | | | ax 2, $\wedge$ e
4 | | | $(\exists x)\ ax$ 3, $\exists$ i, x/x

5	bx	2, $\wedge$ e
6	$(\exists x)\ bx$	5, $\exists$ i, x/x
7	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	4, 6, $\wedge$ i
8	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	1, 2–7, $\exists$ e
9	Th.	1–8, $\supset$ i

Il est intéressant d'examiner l'implication réciproque:

$$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx \cdot \supset (\exists x)\ (ax \wedge bx).$$

Intuitivement, on ne doit pas pouvoir déduire de ce qu'il existe un individu qui est a et un individu qui est b qu'il existe un individu qui est a et b. Formellement on a:

1	$(\exists x)\ ax \wedge (\exists x)\ bx$	hyp
2	$(\exists x)\ ax$	1, $\wedge$ e
3	$(\exists x)\ bx$	1, $\wedge$ e
4	x | ax	hyp (pour $\exists$ e)
5	$(\exists x)\ bx$	3, reit (l'expression 3 ne contient pas x libre)
6	x | bx	hyp (pour $\exists$ e)

Mais on voit que, pour avoir $ax \wedge bx$, il faudrait réitérer ax qui contient x libre.

Remarque

La comparaison des exemples donnés pour illustrer la règle $\forall$ i avec ceux-ci met en évidence une dualité à laquelle participent $\forall$, $\exists$, $\wedge$ et $\vee$.

2.7 Règles dérivées

Les quantificateurs sont d'un usage si fréquent qu'il sera commode d'établir les quatre règles suivantes qui permettent de les introduire et de les éliminer dans un contexte négatif.

Règle neg $\forall$ i

n	$(\exists X) \sim A\ (X)$	
	$\sim (\forall X)\ A\ (X)$	n, neg $\forall$ i

Règle neg $\forall$ e

n	$\sim (\forall X)\ A\ (X)$	
	$(\exists X) \sim A\ (X)$	n, neg $\forall$ e

Règle neg ∃ i

n	$(\forall X) \sim A\,(X)$	
	$\sim (\exists X)\, A\,(X)$	n, neg ∃ i

Règle neg ∃ e

n	$\sim (\exists X)\, A\,(X)$	
	$(\forall X) \sim A\,(X)$	n, neg ∃ e

Dérivations

neg ∀ e

1	$\sim (\forall X)\, A\,(X)$	hyp
2	$\mid\ \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	hyp (abs)
3	$\mid\ X \mid\ \mid\ \sim A\,(X)$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \mid\ (\exists X) \sim A\,(X)$	3, ∃ i
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	2, reit
6	$\mid\ \mid\ \sim\, \sim A\,(X)$	3, 4, 5, ∼ i
7	$\mid\ \mid\ A\,(X)$	6, neg ∼ e
8	$\mid\ (\forall X)\, A\,(X)$	3–7, ∀ i
9	$\mid\ \sim (\forall X)\, A\,(X)$	1, reit
10	$\sim\, \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	2, 8, 9, ∼ i
11	$(\exists X) \sim A\,(X)$	10, neg ∼ e

Remarque

La sous-déduction 3–7 est bien catégorique: elle-même ne commence pas par une hypothèse!

neg ∀ i

1	$(\exists X) \sim A\,(X)$	hyp
2	$\mid\ (\forall X)\, A\,(X)$	hyp (abs.)
3	$\mid\ (\exists X) \sim A\,(X)$	1, reit
4	$\mid\ X \mid\ \sim A\,(X)$	hyp (pour ∃ e)
5	$\mid\ \mid\ (\forall X)\, A\,(X)$	2, reit
6	$\mid\ \mid\ A\,(X)$	5, ∀ e
7	$\mid\ \mid\ \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	4, 6, ∼ e
8	$\mid\ \sim (\exists X) \sim A\,(X)$	3, 4–7, ∃ e
9	$\sim (\forall X)\, A\,(X)$	2, 3, 8, ∼ i

Remarque

La ligne 7 résulte de ce que la règle $\sim$e nous permet d'introduire n'importe quelle proposition. Il est habile de choisir celle-ci.

neg $\exists$ *i*

1	$(\forall X) \sim A(X)$			hyp
2		$(\exists X) A(X)$		hyp (abs)
3		X	$A(X)$	hyp (pour $\exists$ e)
4			$(\forall X) \sim A(X)$	1, reit
5			$\sim A(X)$	4, $\forall$ e
6			$P \wedge \sim P$	3, 5, $\sim$ e
7		$P \wedge \sim P$		2, 3–6, $\exists$ e
8		P		7, $\wedge$ e
9		$\sim P$		7, $\wedge$ e
10	$\sim (\exists X) A(X)$			2, 8, 9, $\sim$ i

neg $\exists$ *e*

1	$\sim (\exists X) A(X)$			hyp
2		$\sim (\forall X) \sim A(X)$		hyp (abs)
3		$(\exists X) \sim \sim A(X)$		2, neg $\forall$ e
4		X	$\sim \sim A(X)$	hyp (pour $\exists$ e)
5			$A(X)$	4, neg $\sim$ e
6			$(\exists X) A(X)$	5, $\exists$ i
7		$(\exists X) A(X)$		3, 4–6, $\exists$ e
8		$\sim (\exists X) A(X)$		1, reit
9	$\sim \sim (\forall X) \sim A(X)$			2, 7, 8, $\sim$ i
10	$(\forall X) \sim A(X)$			9, neg $\sim$ e

Remarque

A la ligne 6 de la dérivation de la règle neg $\exists$ i, nous avons choisi d'écrire la contradiction $P \wedge \sim P$ pour illustrer la liberté dont nous disposions. Il aurait aussi été possible de procéder comme dans la dérivation de la règle neg $\forall$ i et d'écrire $\sim (\exists X) A(X)$ au lieu de la contradiction $P \wedge \sim P$.

Remarque

Il est maintenant facile de prouver que $(\forall x)\ ax \leftrightarrow \sim (\exists x) \sim ax$ et que $(\exists x)\ ax \leftrightarrow \sim (\forall x) \sim ax$. Cette dernière équivalence fait voir que l'on pourrait en logique (classique) des prédicats n'introduire que le quantificateur $\forall$ et poser la définition.

$$(\exists X)\, AX = \mathrm{df} \sim (\forall X) \sim A(X)$$

2.8 Notes sur les syllogismes

La théorie classique du syllogisme prend appui sur une double classification des propositions en (1) universelles et particulières (2) affirmatives et négatives. Les quatre types ainsi engendrés sont désignés par les lettres conventionnelles suivantes:

Qualité

Quantité	Affirmatives	Négatives
Universelles	A	E
Particulières	I	O

Exemples

(A) Tout artiste est bienveillant
(E) Aucun artiste n'est bienveillant
(I) Quelque artiste est bienveillant
(O) Quelque artiste n'est pas bienveillant
Nous obtenons dans notre symbolisme:
(A) $(\forall x)\,(ax \supset bx)$
(E) $\sim (\exists x)\,(ax \wedge bx) \equiv (\forall x) \sim (ax \wedge bx) \equiv (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$
(I) $(\exists x)\,(ax \wedge bx)$
(O) $(\exists x)\,(ax \wedge \sim bx)$

Un *syllogisme* est alors un raisonnement qui part de deux prémisses, d'une des formes ci-dessus, et qui conduit à une conclusion d'une même forme. Seules, d'ailleurs, certaines combinaisons sont concluantes.

Exemples empruntés à Lewis Carroll

[1] Tout homme prudent évite les hyènes.
Aucun banquier n'est imprudent.
Aucun banquier ne manque jamais d'éviter les hyènes.

Posons:

a = df être prudent
b = df éviter les hyènes
c = df être banquier

Il vient:

1	$(\forall x)\,(ax \supset bx)$	hyp
2	$\sim (\exists x)\,(cx \wedge \sim ax)$	hyp
3	$(\forall x) \sim (cx \wedge \sim ax)$	2, neg $\exists$e
4	x cx	hyp
5	$(\forall x) \sim (cx \wedge \sim ax)$	3, reit
6	$\sim (cx \wedge \sim ax)$	5, $\forall$e
7	$\sim cx \vee \sim \sim ax$	6, neg $\wedge$ e
8	$\sim cx$	hyp
9	cx	4, reit
10	bx	8, 9, $\sim$ e
11	$\sim \sim ax$	hyp
12	ax	11, neg $\sim$ e
13	$(\forall x)\,(ax \supset bx)$	1, reit (x est liée)
14	$ax \supset bx$	13, $\forall$e
15	bx	12, 14, $\supset$ e
16	bx	7, 8–10, 11–15, $\vee$ e
17	$cx \supset bx$	4–16, $\supset$ i
18	$(\forall x)\,(cx \supset bx)$	4–17, $\forall$i

Soit « tout banquier évite les hyènes » ce qui est bien une variante de la conclusion proposée.

[2] Aucune grenouille n'est poète
Quelques canards ne sont pas poètes
Quelques canards ne sont pas des grenouilles

Posons:

a = df être grenouille
b = df être poète   Il faudrait déduire que $(\exists x)\,(cx \wedge \sim ax)$
c = df être canard

Il vient:

1	$\sim (\exists x)(ax \wedge bx)$	hyp	Prémisses
2	$(\exists x)(cx \wedge \sim bx)$	hyp	
3	$(\forall x) \sim (ax \wedge bx)$	1, neg $\exists$e	
4	$x \mid cx \wedge \sim bx$	hyp (pr éliminer $\exists$ dans 2)	
5	$\quad (\forall x) \sim (ax \wedge bx)$	3, reit	
6	$\quad \sim (ax \wedge bx)$	5, $\forall$e	
7	$\quad \sim ax \vee \sim bx$	6, neg $\wedge$ e	
8	$\quad cx$	4, $\wedge$ e	
9	$\qquad \sim ax$	hyp (pr éliminer $\vee$ dans 7)	
10	$\qquad cx$	8, reit	
11	$\qquad cx \wedge \sim ax$	10, 9, $\wedge$ i	
12	$\qquad (\exists x)(cx \wedge \sim ax)$	11, $\exists$i	
13	$\qquad \sim bx$	hyp (pr $\forall$e)	

La proposition 12 qui peut se lire « Quelques canards ne sont pas des grenouilles » ne peut s'obtenir lorsque le second terme de la disjonction est pris comme hypothèse. Comme le signale Carroll, le raisonnement proposé est un sophisme.

Considérons maintenant d'une façon générale trois propositions de l'une des formes A, E, I, O que nous désignerons respectivement par: M, m et C. Supposons

(1) que M contient les prédicats a et b
(2) que m contient les prédicats b et c
(3) que C contient les prédicats c et a.

Exemple

M: $(\forall x)(bx \supset ax)$
m: $(\exists x)(cx \wedge bx)$
C: $(\exists x)(cx \wedge ax)$

Il peut arriver, comme dans cet exemple, que $M, m \vdash C$. Dans ce cas les trois propositions constituent un *syllogisme*. Les propositions M et m en sont les *prémisses*, la proposition C la *conclusion*. De plus le prédicat b qui figure une fois dans chaque prémisse (et qui est éliminé dans la conclusion), est appelé le *moyen terme*. Le prédicat a, qui figure dans la première prémisse et qui vient en seconde place dans la conclusion, s'appelle le *grand terme*. Le prédicat c s'appelle le *petit terme*. Disons enfin que la proposition qui contient le grand terme est la *majeure*, celle qui contient le petit terme est la *mineure*.

Remarque

Il y a quelque arbitraire à distinguer le grand et le petit terme dans l'exemple donné puisque la conclusion pourrait tout aussi bien s'écrire $(\exists x)(ax \wedge cx)$: la conjonction est une opération commutative. Toutefois, si la conclusion est de la forme A ou E, le grand terme est bien déterminé: c'est le conséquent de la conditionnelle.

Pour prouver que trois propositions constituent un syllogisme, il suffit d'établir par les règles de notre calcul qu'il existe une déduction de la conclusion à partir des prémisses.

Toutefois la syllogistique remonte à Aristote (384-322) et a été développée par les logiciens médiévaux. Ceux-ci ont établi des règles pour décider quels triples de propositions constituaient des syllogismes. En effet, chacune des propositions M, m et C peut avoir une des formes A, E, I, O. Il y a dans $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ combinaisons possibles. Il saute aux yeux qu'une combinaison de la forme, disons IIA, ne saurait constituer un syllogisme valide. On ne peut conclure sur tous les objets du domaine alors que les prémisses ne parlent que de quelques-uns.

Nous n'allons pas faire ici la théorie des syllogismes. Le calcul des prédicats la rend superflue. Toutefois, il est intéressant de connaître certains éléments de la terminologie dont usaient les Anciens et de soulever un problème fondamental.

Pour établir leurs règles, les logiciens anciens avaient trouvé commode de partager les syllogismes en quatre *figures*. Étant entendu que les propositions sont toujours écrites dans l'ordre M, m et C, le moyen terme (t) peut figurer de quatre façons différentes (p est le petit terme et g le grand terme).

	1ère figure	*2ème figure*	*3ème figure*	*4ème figure*
Majeure M	$t - g$	$g - t$	$t - g$	$g - t$
Mineure m	$p - t$	$p - t$	$t - p$	$t - p$
Conclusion C	$p - g$	$p - g$	$p - g$	$p - g$

Dans chaque figure certaines formes sont valides, d'autres pas. Les formes s'appellent les *modes*. Nous donnons le tableau des modes valides. Le lecteur pourra sans peine s'en assurer.

1ère figure	*2ème figure*	*3ème figure*	*4ème figure*
AAA	EAE	IAI	AEE
EAE	AEE	AII	IAI
AII	EIO	OAO	EIO
EIO	AOO	EIO	

Sur les 64 modes possibles, il en existe donc 15 qui sont valides.

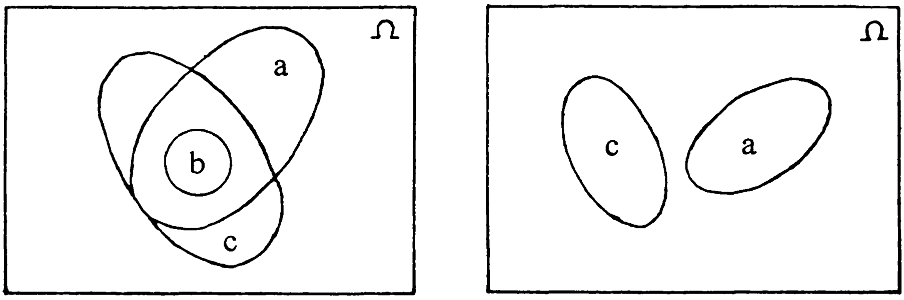
Toutefois, la tradition en a encore considéré quatre:

3ème figure: AAI et EAO
4ème figure: AAI et EAO

Examinons, par exemple, le mode AAI de la 3ème figure (*a:* grand terme, *c:* petit terme, *b:* moyen terme).

$M\ (\forall x)\,(bx \supset ax)$
$m\ (\forall x)\,(bx \supset cx)$
$C\ (\exists x)\,(cx \wedge ax)$

Raisonnons intuitivement sur un diagramme:



On voit que ce qui « empêche » que *a* et *c* soient disjointes, c'est la présence de *b*. S'il n'existait aucun élément de Ω qui jouisse de la propriété *b*, il se pourrait qu'il n'existe non plus aucun élément qui jouisse à la fois de la propriété *a* et de la propriété *c* (2ème figure).

Il s'ensuit que les 4 modes ci-dessus ne peuvent être démontrés dans notre système que si l'on ajoute explicitement des prémisses d'existence:

3ème figure: AAI exige $(\exists x)\,bx$
EAO exige $(\exists x)\,bx$
4ème figure: AAI exige $(\exists x)\,cx$
EAO exige $(\exists x)\,bx$

Il existe certaines relations très importantes entre les propositions A, E, I et O que nous allons mettre en évidence. Commençons, pour cela, par poser quelques définitions.

Deux propositions P et Q sont dites *contradictoires* si $\vdash (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$, ce que nous noterons $\vdash P \mathrm{W} Q$ ou encore $P\,(\mathrm{W})\,Q$.

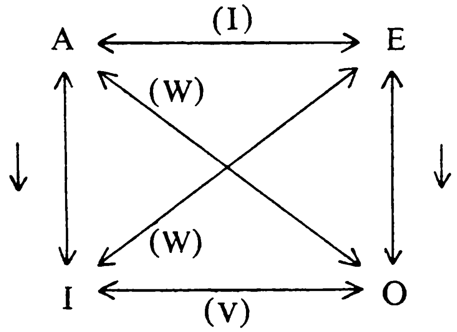
Deux propositions P et Q sont dites *contraires* si $\vdash \sim (P \wedge Q)$, ce que nous noterons $\vdash P \mid Q$ ou encore $P\,(\mid)\,Q$.

Une proposition Q est dite *subalterne* d'une proposition P si $\vdash P \supset Q$, ce que nous avons aussi noté $P \rightarrow Q$.

Remarques

1. A l'exception de la relation d'implication qui a un signe spécial, nous avons noté (*) la relation engendrée par l'opération *, lorsque la proposition composée $P * Q$ est un théorème.
2. Nous retrouverons les opérateurs W et I au cours du Fascicule 2.

Les logiciens médiévaux avaient alors remarqué que les propositions A, E, I et O étaient liées entre elles comme l'indique le schéma suivant, appelé *carré des oppositions.*



Il n'y a aucune difficulté particulière à prouver que A et O d'une part, E et I de l'autre sont contradictoires. En revanche, l'établissement des quatre autres relations pose un problème. Prenons l'exemple de la relation de contrariété. Il faudrait prouver que $\vdash$ A | E soit que $\vdash \sim$ (A $\wedge$ E).

Il est facile de montrer qu'on a

$$\vdash \sim (\mathrm{A} \wedge \mathrm{E}) \equiv (\mathrm{A} \supset \sim \mathrm{E})$$

en utilisant, entre autres, les règles neg $\supset$ e et neg $\supset$ i. Nous sommes donc ramenés à nous demander si A $\supset \sim$ E, donc si $(\forall x)\,(ax \supset bx) \supset \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$ est un théorème. Tentons-en la preuve:

1	$(\forall x)\,(ax \supset bx)$	hyp
2	$\quad(\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	hyp (abs.)
3	$\quad ax \supset \sim bx$	2, $\forall$e
4	$\quad(\forall x)\,(ax \supset bx)$	1, reit
5	$\quad ax \supset bx$	4, $\forall$e

Nous voyons qu'il ne nous est pas possible de poursuivre.

Faisons donc une hypothèse supplémentaire et posons qu'il existe quelque x qui est a, donc tentons d'effectuer la déduction

$$(\exists x)\, ax \vdash (\forall x)\,(ax \supset bx) \supset \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx).$$

Il vient:

1	$(\exists x)\, ax$	hyp (supplémentaire)
2	$\quad (\forall x)\,(ax \supset bx)$	hyp
3	$\quad\quad (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	hyp (abs.)
4	$\quad\quad (\exists x)\, ax$	1, reit
5	$\quad\quad\quad ax$	hyp (pour $\exists$e)
6	$\quad\quad\quad (\forall x)\,(ax \supset bx)$	2, reit
7	$\quad\quad\quad (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	3, reit
8	$\quad\quad\quad ax \supset bx$	6, $\forall$e
9	$\quad\quad\quad ax \supset \sim bx$	7, $\forall$e
10	$\quad\quad\quad bx$	5, 8, $\supset$ e
11	$\quad\quad\quad \sim bx$	5, 9, $\supset$ e
12	$\quad\quad\quad p \wedge \sim p$	10, 11, $\sim$ e
13	$\quad\quad p \wedge \sim p$	4, 5–12, $\exists$e
14	$\quad\quad p$	13, $\wedge$ e
15	$\quad\quad \sim p$	13, $\wedge$ e
16	$\quad \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	3, 14, 15, $\sim$ i
17	$(\forall x)\,(ax \supset bx) \supset \sim (\forall x)\,(ax \supset \sim bx)$	1–16, $\supset$ i

Nous pouvons donc conclure que, *sous l'hypothèse* $(\exists x)\, ax$, les propositions A et E sont des contraires.

On peut s'assurer qu'il en va de même pour les relations $(\vee)$ et $\rightarrow$, de sorte que, en conclusion, nous aurons:

1) $\vdash$ A W O et $\vdash$ E W I
2) $(\exists x)\, ax \vdash$ A I E
3) $(\exists x)\, ax \vdash$ I $\vee$ O
4) $(\exists x)\, ax \vdash$ A $\supset$ I et $(\exists x)\, ax \vdash$ E $\supset$ O.

Remarque

Il ne faudrait pas se hâter de conclure que nos prédécesseurs se sont trompés. Il n'acceptaient simplement pas de dire « tous les *a* sont *b* » dans le cas où aucun *x* n'était *a*. Si nous avons élargi notre façon de parler, c'est sous l'influence de l'algèbre des classes. Dire « tous les *a* sont *b* », c'est dire que la classe des *a* est contenue dans celle des *b*. Si $\sim (\exists x)\, ax$, c'est que la classe des *a* est la classe vide et l'on sait qu'il est indispensable en algèbre d'introduire la classe vide et de reconnaître qu'elle est contenue dans toute autre classe.

2.9 Quelques propriétés des relations

Les relations binaires de la forme rxy jouent, dans tous les domaines d'application, un rôle important. C'est la raison pour laquelle nous allons consacrer un paragraphe à en étudier certains aspects. Nous laisserons la plupart des démonstrations aux soins du lecteur.

1. *Permutation des quantificateurs*

Soit rxy la relation « x est cause de y ». Dans le domaine Ω des phénomènes, la formule $(\forall y)\,(\exists x)\,rxy$ pourra se lire « pour tout phénomène y, il y en a un x qui est cause de y ». La formule $(\exists x)\,(\forall y)\,rxy$ se lirait : « il y a un phénomène x qui est cause de tout phénomène y ». D'une part, on exprime que tout phénomène a une cause, éventuellement chacun la sienne, d'autre part on postule qu'il existe une cause commune à tous les phénomènes (Dieu par exemple, pour certains philosophes.)

Intuitivement, on a évidemment $(\exists x)\,(\forall y)\,rxy \rightarrow (\forall y)\,(\exists x)\,rxy$ mais l'implication inverse ne saurait être valable sans autre. Nos règles correspondent à cet usage, comme le montre le théorème suivant :

$\vdash (\exists x)\,(\forall y)\,rxy \supset (\forall y)\,(\exists x)\,rxy$

1	$\mid\ \mid (\exists x)\,(\forall y)\,rxy$	hyp (pour $\supset$ i)
	$\mid\ \mid$ —	
2	$\mid\ \mid y \mid (\exists x)\,(\forall y)\,rxy$	1, reit
	$\mid\ \mid\ \ \mid x \mid (\forall y)\,rxy$	hyp (pour $\exists$e)
3	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid$ —	
4	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid rxy$	3, $\forall$e
5	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid (\exists x)\,rxy$	4, $\exists$i
6	$\mid\ \mid\ \ \mid (\exists x)\,rxy$	2, 3–5, $\exists$e (x n'est plus libre)
7	$\mid\ \mid (\forall y)\,(\exists x)\,rxy$	2–6, $\forall$i
8	$\mid$ Th.	1–7, $\supset$ i

En revanche l'expression $(\forall y)\,(\exists x)\,rxy \supset (\exists x)\,(\forall y)\,rxy$ n'est pas démontrable. On aurait en effet :

1	$\mid\ \mid (\forall y)\,(\exists x)\,rxy$	hyp (pour $\supset$ i)
	$\mid\ \mid$ —	
2	$\mid\ \mid y \mid (\forall y)\,(\exists x)\,rxy$	1, reit
3	$\mid\ \mid\ \ \mid (\exists x)\,rxy$	2, $\forall$e
4	$\mid\ \mid\ \ \mid x \mid rxy$	hyp (pour $\exists$e)
	$\mid\ \mid\ \ \mid\ \ \mid$ —	

Il est impossible de « ressortir » l'expression rxy de la sous-déduction stricte x, pour utiliser la règle $\forall$i qui devait permettre d'écrire $(\forall y)\, rxy$, *avant* d'avoir lié x.

Toutefois, on verra sans peine que deux quantificateurs de même nom (deux $\forall$ ou deux $\exists$) peuvent être permutés à volonté.

Résumé mnémotechnique

$$(\forall X)(\forall Y) \leftrightarrow (\forall Y)(\forall X)$$
$$(\exists X)(\exists Y) \leftrightarrow (\exists Y)(\exists X)$$
$$(\exists X)(\forall Y) \rightarrow (\forall Y)(\exists X)$$

2. *Relations symétriques*

Certaines relations sont telles que, si elles existent entre x et y, elles existent aussi entre y et x.

Exemples

« être de même taille »	pour deux individus
« être égal »	pour deux nombres
« se ressembler »	pour deux situations
« être frère »	pour deux *garçons*

Nous poserons alors la définition suivante pour exprimer qu'une relation est *symétrique :*

$$\text{Sym}\,(r) \;=\; \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx)$$

Remarquons maintenant que, parmi les relations qui ne sont pas symétriques, il en existe de deux espèces. Pour les unes (être père de, être plus petit que), il est incompatible d'avoir à la fois rxy et ryx. Nous les appellerons *asymétriques* et nous écrirons:

$$\text{Asym}\,(r) \;=\; \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset \sim ryx)$$

Pour les autres (frère de, dans une famille qui compte des garçons et des filles), il existe seulement des cas où la symétrie n'a pas lieu. Nous les appellerons *non symétriques* et poserons:

$$\text{Non Sym}\,(r) \;=\; \text{df}\,(\exists x)\,(\exists y)\,(rxy \wedge \sim ryx)$$

Remarque

La terminologie « non symétrique » se justifie en établissant le théorème:
$\vdash\; \sim (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset ryx) \equiv (\exists x)\,(\exists y)\,(rxy \wedge \sim ryx)$

3. *Relation inverse*

Quelle que soit la relation r, qu'elle soit symétrique ou qu'elle ne le soit pas, on peut considérer sa relation inverse.

Exemples

« fils de » et « père de »
« plus petit » et « plus grand »
« se ressembler » et « se ressembler »

Notons r^{-1} *la relation inverse de r*. Nous poserons la définition:

$$r^{-1}xy \equiv \text{df } ryx$$

Les théorèmes suivants sont faciles à établir:

(1) $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,[(r^{-1})^{-1}xy \equiv rxy]$
(2) $\vdash \text{Sym } r \equiv \text{Sym } (r^{-1})$
(3) $\vdash \text{Sym } r \equiv (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \supset r^{-1}xy)$

Ils signifient:

(1) L'inverse de l'inverse d'une relation est cette relation elle-mème ou encore l'opération inverse est idempotente.
(2) Si une relation est symétrique, son inverse l'est aussi et réciproquement.
(3) Une relation est symétrique si elle est contenue dans son inverse.

Remarque

Cette façon de parler (« est contenue dans ») se justifie par la manière dont l'algèbre traite les relations en classes de couples.

4. *Relations réflexives*

Partons d'un exemple et considérons la relation r = df avoir la même couleur que. Si x est un objet coloré, une tulipe par exemple, on pourra dire rxx. Le problème est de savoir s'il est légitime d'écrire: $(\forall x)\, rxx$, si, comme on dit, la relation « avoir même couleur que » est *totalement réflexive*. L'expression rxx est vraie pour une fleur, pour un fromage ou pour tout autre objet dont il y a un sens à dire qu'il a une couleur.

Mais, en dehors des métaphores, il n'y a aucun sens à dire que « 7 a même couleur que 7 » ou que « le quantificateur universel a même couleur que le quantificateur universel ».

C'est pourquoi, nous définirons la *réflexivité* sous l'hypothèse qu'il existe quelque objet y pour lequel soit rxy soit ryx :

$$\text{Refl } (r) = \text{df } (\forall x)\,[(\exists y)\,(rxy \vee ryx) \supset rxx]$$

En d'autres termes, nous ne définirons la propriété de réflexivité que dans le *domaine de la relation*, c'est-à-dire là où elle est définie.

Une relation qui n'est jamais réflexive, comme « père de », sera dite *irréflexive* et nous poserons:

$$\text{Irr } (r) = \text{df } (\forall x)\,[(\exists y)\,(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$$

Remarques

1. Il va de soi — c'est en pratique et en algèbre ce qu'on fait souvent — que lorsque le domaine Ω est tout juste choisi comme celui où la relation r a un sens, c'est-à-dire où Ω est formé des objets pour lesquels on a rxy ou ryx, on peut se contenter d'écrire:

$$\text{Refl}\,(r) \leftrightarrow (\forall x) rxx$$

Mais il faut veiller à ne pas élargir Ω sans rétablir la condition.

2. On peut se demander pourquoi nous n'avons pas pris des précautions analogues pour définir la propriété de symétrie. Il est aussi contestable de chercher à définir la symétrie d'une relation r entre des termes pour lesquels elle n'a pas de sens, que sa réflexivité. Toutefois, il existe une différence essentielle: la définition de Sym (r) contient déjà la restriction voulue puisqu'elle est de la forme: *si* la relation a lieu entre x et y, alors...

Théorème

Asym $(r) \rightarrow$ Irr (r) soit toute relation asymétrique est irréflexive.

Il faut prouver le théorème:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx) \supset (\forall x)[(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$$

Effectuons la démonstration en guise d'exemple « concret » de l'application de nos règles.

1	$(\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	hyp (pour $\supset$ i)
2	x | $(\exists y)(rxy \vee ryx)$	hyp (pour $\supset$ i)
3	y | $rxy \vee ryx$	hyp (pour $\exists$e)
4	rxx	hyp (pour $\sim$ i)
5	$(\forall x)(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	1, reit (x et y ne sont pas libres)
6	$(\forall y)(rxy \supset \sim ryx)$	5, $\forall$e (x est libre pour x)
7	$rxx \supset \sim rxx$	6, $\forall$e y/x (x est libre pour y)
8	$\sim rxx$	4, 7, $\supset$ e
9	rxx	4, rep
10	$\sim rxx$	4, 8, 9, $\sim$ i
11	$\sim rxx$	2, 3–10, $\exists$e (rxx ne contient pas y)
12	$(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx$	2–11, $\supset$ i
13	$(\forall x)[(\exists y)(rxy \vee ryx) \supset \sim rxx]$	2–12, $\forall i$
14	Th.	1–13, $\supset$ i

Remarques

1. On constate que l'hypothèse $(\exists y)(rxy \vee ryx)$ n'a pas été utilisée. Voici intuitivement pourquoi. Nous voulions montrer que si r est asymétrique, il n'existe aucun objet x pour lequel on ait rxx. Or ceci peut se produire pour deux raisons:

1) Il existe y et x, on a rxy mais la nature de r empêche d'avoir rxx.

2) L'objet x que l'on choisit n'est en relation r avec aucun autre. La relation r n'est ainsi pas définie pour x et, en particulier, on ne saurait dire que rxx.

2. La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Exemple: soit $rxy = \text{df}\ x$ est le cousin de y. On n'a jamais rxx mais si x et y sont deux garçons et si rxy on a ryx.

5. *Relations transitives*

Considérons les trois relations suivantes:

1. plus petit de taille que : r_1
2. père de : r_2
3. ami de : r_3

Quels que soient x, y et z on a r_1xy et r_1yz alors r_1xz. La relation est *transitive*. D'autre part si r_2xy et r_2yz alors x est le grand père de z et jamais son père. La relation est *intransitive*. Enfin, si r_3xy et r_3yz, il se peut que x et z soient liés d'amitié, mais (sauf dans certaines leçons contestables d'algèbre!), ce n'est pas là une nécessité. La relation r_3 est *non transitive*.

Posons donc:

$$\text{Trans}\,(r) = \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(rxy \wedge ryz \cdot \supset rxz)$$
$$\text{Intrans}\,(r) = \text{df}\,(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(rxy \wedge ryz \cdot \supset \sim rxz)$$
$$\text{Non trans}\,(r) = \text{df}\,(\exists x)\,(\exists y)\,(\exists z)\,(rxy \wedge ryz \wedge \sim rxz)$$

Remarque

La terminologie utilisée se justifie comme dans le cas de la symétrie. On a les deux propriétés importantes suivantes:

$$(1) \vdash \text{Trans}\,(r) \wedge \text{Sym}\,(r) \cdot \supset \text{Refl}\,(r)$$
$$(2) \vdash \text{Trans}\,(r) \wedge \text{Asym}\,(r) \equiv \text{Trans}\,(r) \wedge \text{Irr}\,(r)$$

Remarque

Il faut prendre les définitions que nous avons données à la lettre. Cela signifie que la réflexivité (et l'irréflexivité) sont définies sous *condition*. En d'autres termes, comme le montrerait la preuve du premier théorème, on ne peut pas remplacer la réflexivité par la réflexivité totale.

La preuve complète est un peu longue. Comme elle n'offre aucune difficulté particulière, nous allons nous contenter d'expliquer pourquoi la condition qu'il existe un y pour lequel on a la relation rxy (ou ryx) est indispensable.

Les hypothèses seront:

(1) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (rxy \wedge ryz \cdot \supset rxz)$ transitivité

et (2) $(\forall x)\ (\forall y)\ (rxy \supset ryx)$ symétrie

En utilisant $\forall$e trois fois de suite, (1) donnera:

$rxy \wedge ryx \cdot \supset rxx$ (on a fait la substitution z/x)

Pour obtenir rxx, il faudra se procurer rxy et ryx. La règle $\wedge$i fournira l'antécédent de la conditionnelle et $\supset$e conduira à rxx.

Si on ne sait rien de plus, il est impossible d'avoir rxy. En revanche, si on sait qu'il existe y pour lequel on a rxy, alors (2) nous donnera aussi ryx et la déduction est possible.

6. *Relation d'équivalence*

Imaginons une classe C d'objets de différentes couleurs. Par exemple: b_1, b_2 et b_3 sont bleus, v_1 et v_2 sont verts, j_1 est jaune et n_1, n_2, n_3, n_4 sont noirs.

On a: C = df la classe de ces objets. On écrira:

$C = \text{df}\ \{b_1\ b_2\ b_3\ v_1\ v_2\ j_1\ n_1\ n_2\ n_3\ n_4\}$.

Considérons la relation rxy = df « x a même couleur que y » étant entendu que x et y sont des variables limitées à C.

Intuitivement, la relation r jouit des propriétés suivantes:

(1) Réfl (r)
(2) Sym (r)
(3) Trans (r)

Exemples

(1) rb_1b_1: b_1 a même couleur que b_1
(2) rb_1b_2 alors rb_2b_1
(3) rb_1b_2 et rb_2b_3 alors rb_1b_3

La propriété de réflexivité qui n'exige qu'un seul objet se vérifie sans autre pour les objets bleus, verts, jaunes et noirs. On voit aussi que la propriété de symétrie se vérifie sans autre pour les objets bleus, verts et noirs. Mais qu'en est-il pour l'unique objet jaune?

La définition de la symétrie qui est $(\forall x)\ (\forall y)\ (rxy \supset ryx)$ semble exiger que r existe entre deux objets. Toutefois, il faut se souvenir que x et y ne désignent pas nécessairement des éléments distincts. On peut donc avoir, en particulier: $rjj \supset rjj$. La proposition « Si l'objet jaune a même couleur que l'objet jaune alors l'objet jaune a même couleur que l'objet jaune » est trivialement vraie, mais elle est vraie et cela nous suffit.

On pourra faire une remarque analogue pour la transitivité appliquée, disons aux objets verts. Là aussi la propriété est trivialement satisfaite, mais elle l'est.

Définition: Toute relation réflexive, symétrique et transitive est dite une *relation d'équivalence.*

L'exemple donné permet de comprendre l'importance des relations de cette espèce: elles permettent de répartir les éléments d'une classe donnée en un certain nombre de classes, dites *classes d'équivalence.* Cette répartition, appelée une *partition*, est telle que

1) Tous les éléments de C appartiennent à une classe d'équivalence (quitte à ce que certaines d'entre elles, comme celle des objets jaunes dans l'exemple, ne comptent qu'un seul élément).

2) Les classes d'équivalence sont disjointes ce qui signifie qu'un objet de C ne peut figurer comme élément que dans une seule classe.

On écrit souvent $b_1b_2b_3 \cdot v_1v_2 \cdot j_1 \cdot n_1n_2n_3n_4$ pour représenter la partition de l'ensemble C donné en exemple, partition engendrée par la relation r: être de même couleur que.

Remarque

Ce que nous avons dit de la réflexivité distincte de la réflexivité totale, explique pourquoi il faut trois conditions pour définir une relation d'équivalence. Ce n'est que dans le cas où on a tout justement limité la classe C aux objets où la relation r est définie, qu'on a le droit d'appliquer le théorème:

$$\vdash \text{Trans}\,(r) \wedge \text{Sym}\,(r) \cdot \supset \text{Refl}\,(r).$$

7. *La relation d'identité*

Les lettres r, s, t utilisées jusqu'ici sont des variables. Cela signifie que nous nous sommes réservé le droit de les interpréter de telle ou telle façon selon le contexte. Il est très utile d'introduire encore une relation constante, bien déterminée, la *relation d'identité* que nous désignerons par $=$.

Contrairement à notre pratique et pour tenir compte de l'usage habituel, nous écrirons $x = y$ au lieu de $= xy$.

Conformément à la méthode utilisée dans ce chapitre, nous allons nous donner des règles pour introduire et éliminer la relation $=$.

Règle $=$ i

$$n \mid X = X \qquad = \text{i}$$

Règle $=$ e

$$\begin{array}{r|ll} n & A\,(X) & \\ m & X = Y & \\ & \overline{} & \\ & A\,[Y] & n, m, = \text{e} \end{array}$$

Remarques

1. La règle = i, stipule qu'on a le droit d'introduire n'importe où dans une déduction la forme propositionnelle $X = X$. Cette expression est généralement appelée un *schéma d'axiome*.
2. La règle = e pose que, si $X = Y$, on a le droit de *remplacer* X par Y dans toute expression qui mentionne X.

Théorème

[1] $\vdash (\forall x)\,(x = x)$

1	$\mid x \mid x = x$	= i
2	$\mid (\forall x)\,(x = x)$	1 – 1, ∀i

La relation d'identité est totalement réflexive, c'est-à-dire qu'elle est définie par tous les domaines d'objets que l'on pourra considérer.

[2] $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,(x = y \supset y = x)$

1	$\mid\ \mid y \mid\ \mid x = y$	hyp
2	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid x = x$	= i
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid y = x$	1, 2, = e
4	$\mid\ \mid\ \mid x = y \supset y = x$	1–3, ⊃ i
5	$\mid\ \mid (\forall y)\,(x = y \supset y = x)$	1–4 ∀i
6	$\mid (\forall x)\,(\forall y)\,(x = y \supset y = x)$	1–5 ∀i

Remarque

A la ligne 2, $x = x$ est considéré comme une expression qui contient $x : A(x)$. La 1ère mention de x dans la ligne 2 (dans l'expression $A(x)$) a été remplacée par y, en vertu de la ligne 1.

La relation d'identité est symétrique.

[3] $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z)$

1	$\mid x \mid y \mid z \mid\ \mid x = y \wedge y = z$	hyp
2	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid x = y$	1, ∧ e
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid y = z$	1, ∧ e. Expression de la forme $A(y)$
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid x = z$	2, 3, = e
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z$	1–4, ⊃ i
6	$\mid\ \mid\ \mid (\forall z)\,(x = y \wedge y = z \cdot \supset x = z)$	1–5, ∀i

7	$\mid (\forall y)(\forall z)(\ldots)$	1–6, $\forall$i
8	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\ldots)$	1–7, $\forall$i

La relation d'identité est transitive.

Il s'ensuit que la relation d'identité est une relation d'équivalence. Elle engendre sur toute classe la partition la plus fine possible, celle où chaque classe d'équivalence ne comporte qu'un seul élément.

8. *Relation antisymétrique*

Partons de l'exemple de la relation $\leqslant$ entre nombres. Son inverse est la relation $\geqslant$. Supposons qu'il existe deux nombres n et m, pour lesquels on ait simultanément $n \leqslant m$ et $m \geqslant n$. Ces deux propriétés impliquent que n et m désignent le même nombre.

D'une façon générale, on dit qu'une relation est antisymétrique si:

$$\text{Antisym}(r) = \text{df}\ (\forall x)(\forall y)(rxy \wedge r^{-1}xy \cdot \supset x = y)$$

« = » désigne naturellement la relation d'identité introduite plus haut.

9. *Relation connexe*

Considérons la relation d'implication entre propositions. On peut trouver deux sortes de couples de propositions distinctes (P, Q).

1ère espèce: P et Q sont telles que soit $P \rightarrow Q$, soit $Q \rightarrow P$.
Exemple: $(P, Q) = \text{df}\,(p \wedge q, p)$ on a $\vdash p \wedge q \supset p$ donc $p \wedge q \rightarrow p, P \rightarrow Q$
$(P, Q) = \text{df}\,(p \vee q, p)$ on a $\vdash p \supset \cdot p \vee q$, donc $p \rightarrow p \vee q, Q \rightarrow P$

2ème espèce: P et Q sont telles que ni la relation ni son inverse n'existent entre P et Q.
Exemple: $(P, Q) = \text{df}\,(p,\ p \supset q)$

Par opposition, considérons la relation $\leqslant$ entre nombres. On voit que, quels que soient les nombres n et m distincts, on aura toujours soit $n \leqslant m$, soit $m \leqslant n$. Nous caractériserons les relations qui jouissent de cette propriété en disant qu'elles sont *connexes*.

$$\text{Conn}(r) = \text{df}\ (\forall x)(\forall y)(x \neq y \supset \cdot rxy \vee r^{-1}xy).$$

Remarque
La notation $x \neq y$ est une abréviation pour $\sim (x = y)$.

10. *Les relations d'ordre*

Le tableau suivant définit un certain nombre de relations, qui sont diverses espèces d'un même genre: celui des relations d'ordre.

	Trans	Asym	Refl	Antisym	Conn
Ordre partiel strict	×	×			
Ordre strict	×	×			×
Préordre	×		×		
Ordre partiel	×		×	×	
Ordre complet	×		×	×	×

Remarque
La terminologie des relations d'ordre est encore assez variable, surtout d'une langue à l'autre. Il faut s'assurer chaque fois de prendre la relation avec les propriétés que lui donne son auteur.

BIBLIOGRAPHIE

3.1 Déduction naturelle

La méthode de la déduction naturelle est due à G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, trad. et commentaires de R. Feys et J. Ladrière (Paris, P.U.F., 1955). L'original allemand date de 1934.

La présentation adoptée dans ce fascicule est celle de F. B. Fitch, *Symbolic Logic* (New York, The Ronald Press Co, 1952). Il faut noter que la logique présentée dans cet ouvrage n'est pas la logique classique.

L'ouvrage de J. Dickoff et P. James, *Symbolic Logic and Language. A Programmed Text* (New York, McGraw-Hill, 1965) utilise aussi cette présentation, sous forme d'un cours programmé.

On trouve une présentation analogue, pour la logique des prédicats seulement, dans W.V.O. Quine, *Methods of Logic*, rev. ed. (New York, Holt, Rinehart and Winston, 1961).

3.2 Manuels

Voici quelques manuels qui utilisent d'autres formes de présentation (voir les Fascicules 2 et 4).

I. M. Bochenski, *Précis de logique mathématique*. Bussum, Kroonder, 1948.
J. Dopp, *Notions de logique formelle*. Paris, Ed. Béatrice-Nauwelaerts, 1965.
A. N. Prior, *Formal Logic*. Oxford, Clarendon Press, 2e éd. rev., 1962.
P. Suppes, *Introduction to Logic*. Princeton, Van Nostrand Co, 1957.

Sans être à proprement parler un manuel, l'ouvrage de R. Blanché, *Introduction à la logique contemporaine* (Paris, A. Colin, 1957) est une excellente introduction.

3.3 Quelques ouvrages plus approfondis

A Church, *Introduction to Mathematical Logic I.* Princeton Univ. Press, 1956.

H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic.* Londres, McGraw Hill Co, 1963.

S. C. Kleene, *Mathematical Logic.* London, John Wiley & Son, 1967.

R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation.* Paris, P.U.F., 1964.

P. S. Novikov, *Introduction à la logique mathématique.* Paris, Dunod, 1964.

3.4 Logiques non classiques

H. B. Curry, *Leçons de logique algébrique.* Paris et Louvain, Gauthier-Villars et E. Nauwelaerts, 1952.

J. Dopp, *Logiques construites par une méthode de déduction naturelle.* Louvain et Paris, E. Nauwelaerts et Gauthier-Villars, 1962.

3.5 Sources bibliographiques

On en trouve d'importantes en particulier dans Curry, 1963 et Kleene, 1967.

LISTE DES SYMBOLES

La page est celle où le symbole est introduit pour la première fois.

4.1 Symboles logiques

Symbole	*explication*	*Page*
a, b, c	variables de prédicats à une place	48
p, q, m	variables de propositions	6
r, s, t	variables de prédicats à plus d'une places ou variables de relations	48
x, y, z	variables d'objets	48
$\supset$	opérateur *si...alors*	11
$\wedge$	opérateur *et*	17
$\equiv$	opérateur *si et seulement si*	20
$\vee$	opérateur *ou*	28
$\sim$	opérateur *non*	33
W et I	abréviations	67
$\forall$	quantificateur universel	46
$\exists$	quantificateur existentiel	46
$=$	signe de la relation d'identité	76
$\neq$	négation du signe précédent	78

4.2 Symboles métalogiques

A, B, C	métavariables prenant des expressions prédicatives comme valeurs	49
P, Q, M	métavariables prenant des expressions propositionnelles comme valeurs	7
X, Y, Z	métavariables prenant des variables d'objets comme valeurs	49

$\vdash$	abrège: permet de déduire ou ce qui suit est un théorème	13
$\rightarrow$	désigne la relation d'implication	26
$\leftrightarrow$	désigne la relation d'équivalence logique	27
$\Rightarrow$	abrège: si ... alors	24
$=$ df	abrège: égale par définition	10

4.3 Symboles mathématiques

$\varnothing$	classe vide	15
$\{\ \}$	désigne une classe	7
Ω	ensemble des objets	43
Π	ensemble des prédicats	43

LISTE DES RÈGLES

Une petite barre horizontale indique que la proposition qui la surmonte est nécessairement posée comme hypothèse. Des traitillés horizontaux signifient que ce qui précède sert de prémisse à l'application de la règle.

5.1 Règles générales

Règle hyp

$$\begin{array}{|l} P \\ \hline \\ \\ \end{array}$$

Règle rep

$$\begin{array}{|l} P \\ \text{- - -} \\ P \\ \\ \end{array}$$

Règle reit

$$\begin{array}{|l} P \\ \text{- - -} \\ \quad \begin{array}{|l} P \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Règle repdf

Si $Q = \text{df } P$

$$\begin{array}{|l} P \\ \text{- - -} \\ Q \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|l} Q \\ \text{- - -} \\ P \end{array}$$

5.2 Règles pour les opérateurs propositionnels

Règle ⊃ i

$$\begin{array}{|l} \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \text{- - -} \\ P \supset Q \end{array}$$

Règle ⊃ e

$$\begin{array}{|l} P \supset Q \\ P \\ \text{- - -} \\ Q \\ \\ \end{array}$$

Règle ∧ i

$$\begin{array}{|l} P \\ Q \\ \text{- - -} \\ P \wedge Q \end{array}$$

Règle ∧ e

$$\begin{array}{|l} P \wedge Q \\ \text{- - -} \\ P \\ \\ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|l} P \wedge Q \\ \text{- - -} \\ Q \\ \\ \end{array}$$

Règle $\equiv$ i

$$\begin{array}{|l} P \supset Q \\ Q \supset P \\ \text{- - -} \\ P \equiv Q \end{array}$$

Règle $\equiv$ e

$$\begin{array}{|l} P \equiv Q \\ P \\ \text{- - -} \\ Q \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|l} P \equiv Q \\ Q \\ \text{- - -} \\ P \end{array}$$

Règle $\vee$ i

$$\begin{array}{|l} P \\ \text{- - -} \\ P \vee Q \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|l} Q \\ \text{- - -} \\ P \vee Q \end{array}$$

Règle $\vee$ e

$$\begin{array}{|l} P \vee Q \\ \text{- - -} \\ \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline M \end{array} \\ \\ \quad \begin{array}{|l} Q \\ \hline M \end{array} \\ M \end{array}$$

Règle $\sim$ i

$$\begin{array}{|l} \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline Q \\ \sim Q \end{array} \\ \text{- - -} \\ \sim P \end{array}$$

Règle $\sim$ e

$$\begin{array}{|l} P \\ \sim P \\ \text{- - -} \\ Q \end{array}$$

5.3 Règles négatives

Règle neg $\sim$ i

$$\begin{array}{|l} P \\ \text{- - -} \\ \sim \sim P \end{array}$$

Règle neg $\sim$ e

$$\begin{array}{|l} \sim \sim P \\ \text{- - -} \\ P \end{array}$$

Règle neg $\wedge$ i

$$\begin{array}{|l} \sim P \vee \sim Q \\ \text{- - -} \\ \sim (P \wedge Q) \end{array}$$

Règle neg $\wedge$ e

$$\begin{array}{|l} \sim (P \wedge Q) \\ \text{- - -} \\ \sim P \vee \sim Q \end{array}$$

Règle neg $\vee$ i

$$\begin{array}{|l} \sim P \wedge \sim Q \\ \text{- - -} \\ \sim (P \vee Q) \end{array}$$

Règle neg $\vee$ e

$$\begin{array}{|l} \sim (P \vee Q) \\ \text{- - -} \\ \sim P \wedge \sim Q \end{array}$$

Règle neg $\supset$ i

$$\begin{array}{|l} P \wedge \sim Q \\ \text{- - -} \\ \sim (P \supset Q) \end{array}$$

Règle neg $\supset$ e

$$\begin{array}{|l} \sim (P \supset Q) \\ \text{- - -} \\ P \wedge \sim Q \end{array}$$

5.4 Règles pour les quantificateurs

Règle ∀ i

$$\begin{array}{|l} \begin{array}{l|l} X & \\ & \\ & A\,(X) \end{array} \\ (\forall X)\; A\,(X) \end{array}$$

Règle ∀ e

$$\begin{array}{|l} (\forall X)\; A\,(X) \\ \text{- - -} \\ A\,(Y) \end{array}$$

A condition que Y soit libre pour X et de *substituer* Y à X.

Règle ∃ i

$$\begin{array}{|l} A\,(X) \\ \text{- - -} \\ (\exists Y)\; A\,[Y] \end{array}$$

A condition que Y soit libre pour X, on peut *remplacer* X par Y.

Règl ∃ e

$$\begin{array}{|l} (\exists X)\; A\,(X) \\ \begin{array}{l|l} X & A\,(X) \\ & \text{—} \\ & P \end{array} \\ P \end{array}$$

Règle neg ∀ i

$$\begin{array}{|l} (\exists X) \sim A\,(X) \\ \text{- - -} \\ \sim (\forall X)\; A\,(X) \end{array}$$

Règle neg ∀ e

$$\begin{array}{|l} \sim (\forall X)\; A\,(X) \\ \text{- - -} \\ (\exists X) \sim A\,(X) \end{array}$$

Règle neg ∃ i

$$\begin{array}{|l} (\forall X) \sim A\,(X) \\ \text{- - -} \\ \sim (\exists X)\; A\,(X) \end{array}$$

Règle neg ∃ e

$$\begin{array}{|l} \sim (\exists X)\; A\,(X) \\ \text{- - -} \\ (\forall X) \sim A\,(X) \end{array}$$

5.5 Règles pour l'identité

Règle = i

$$\begin{array}{|l} X = X \\ \\ \end{array}$$

Règle = e

$$\begin{array}{|l} A\,(X) \\ X = Y \\ \text{- - -} \\ A\,[Y] \end{array}$$

On peut se contenter de *remplacer* X par Y

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE I

BIBLIOGRAPHIE

LISTE DES SYMBOLES

LISTE DES RÈGLES

LOGIQUE MODERNE

Fascicule II

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE

SIXIÈME SECTION : SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

XIV

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule II

LOGIQUE DES PROPOSITIONS
ET DES PRÉDICATS
TABLES DE VÉRITÉ
ET AXIOMATISATION

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

École Pratique des Hautes Études
Mouton Éditeur
7, rue Dupuytren - Paris 6
5, Herderstraat - La Haye
Éditions Gauthier-Villars
55, quai des Grands-Agustins - Paris 6

Diffusion en France:
Dunod, 92, rue Bonaparte - Paris 6

Printed in Belgium

INTRODUCTION

La logique élémentaire comporte deux parties principales. La première traite de la composition des propositions les unes avec les autres sans les analyser. La seconde, tout en conservant les résultats acquis, analyse les propositions en sujets et prédicats.

Tant la logique des propositions inanalysées que celle des prédicats peut donner lieu à diverses présentations. Nous en signalerons trois.

1. *Par des règles de déduction.* L'idée repose sur ce que raisonner logiquement, c'est partir de certaines prémisses et les enchaîner selon certaines règles. La théorie du syllogisme est la première forme d'une logique construite par la donnée d'un ensemble de règles. On a toutefois remarqué, d'une part que la syllogistique ne recouvrait pas toute la logique et, d'autre part, que ses règles paraissaient fort artificielles. G. Gentzen (1909-1945) a imaginé un système de règles qui ont donné lieu à ce qu'on a appelé la « déduction naturelle ». Sans entrer dans des considérations de nature psychologiques, on peut toutefois remarquer que ces règles ont, tout spécialement sous la forme que leur a donnée F.B. Fitch (né en 1908), un caractère qui en rend l'utilisation très aisée. C'est cette présentation que nous avons adoptée dans le premier fascicule de cet ouvrage.

2. *Par des tables de vérité.* Dans la mesure où l'on est disposé à ne prendre en considération que les propositions qui peuvent être vraies ou fausses et à négliger celles qui seraient probables, possibles, nécessaires, etc., il est possible de construire une algèbre à deux valeurs: le vrai ou 1 et le faux ou 0. C'est, en particulier ce qu'a fait G. Boole (1815-1864), fournissant par là une première réalisation de la structure algébrique qui porte aujourd'hui son nom. Cette présentation conduit pour la logique des propositions à des calculs d'une très grande facilité. Elle se heurte cependant à une difficulté considérable, si on veut l'appliquer à la logique des prédicats.

Il est bien encore possible d'y considérer les deux valeurs 1 et 0, mais les calculs, s'ils peuvent être conçus, ne peuvent être effectués : ils exigeraient une infinité d'opérations.

3. *Par des systèmes axiomatiques*. Cette méthode revient à présenter la logique comme on présente, depuis Euclide, la géométrie. La première construction complète de ce genre pour la logique des propositions et des prédicats est due à G. Frege (1848-1896). C'est certes là la façon la plus élégante de procéder et la réflexion sur la logique y trouve des commodités particulières. Son usage toutefois demande beaucoup de pratique et réclame souvent une grande ingéniosité.

Le présent fascicule expose aussi bien la méthode des tables de vérité que la méthode axiomatique. Cependant comme nous pensons que celui qui voudra appliquer la logique à des problèmes concrets le fera beaucoup plus commodément par la déduction naturelle, nous avons choisi d'insister ici davantage sur la structure de la logique que sur les techniques de calcul.

Par ailleurs, l'un des buts que nous nous sommes aussi fixé, a été de fournir au lecteur les moyens propres à lui permettre de lire soit des ouvrages de logique plus poussés, soit des textes qui font usage du formalisme logique et qui se multiplient dans les sciences humaines. C'est pourquoi nous avons introduit un certain nombre de concepts tirés de la logique des classes et des relations. Certains d'entre eux exigeraient, pour être tout à fait rigoureux, des développements assez considérables. Nous y avons renoncé, en nous attachant cependant à fournir des indications aussi précises que possible.

Ce Fascicule II forme un tout indépendant du Fascicule I. Néanmoins certaines notions qui avaient été introduites de façon détaillée à l'occasion de la présentation par les règles, n'ont été ici que reprises sommairement. De plus, nous avons, à la fin de la seconde partie, donné quelques démonstrations en déduction naturelle.

Pour faciliter la lecture, nous avons renvoyé chaque fois que la chose était nécessaire au premier fascicule. Les renvois sont notés (I, numéro du paragraphe) ou (I, p. *n*). Les renvois qui ne sont pas précédés du chiffre romain I sont internes au Fascicule II. Nous avons aussi établi un index qui regroupe les principales notions des deux fascicules. Enfin nous avons donné une liste de tous les symboles utilisés avec leur signification.

La bibliographie en revanche n'est que complémentaire à celle parue en (I, 3).

PREMIÈRE PARTIE

LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS INANALYSÉES

1.1 Les tables de vérité

Partons des trois phrases suivantes:
1) *Les vers luisants émettent de la lumière.*
2) 9 *est un nombre premier.*
3) *Les petits bateaux ont-ils des jambes?*
La première est vraie, la deuxième est fausse, quant à la troisième elle pose une question et elle n'est ni vraie, ni fausse. La logique dont nous allons traiter concerne les seules propositions dont il y a un sens à dire qu'elles sont vraies ou fausses.

D'une façon plus précise, nous appellerons *proposition* toute expression susceptible de prendre une et seulement une des deux valeurs de vérité suivantes: le vrai que nous noterons 1, le faux que nous noterons 0. Ainsi si p représente la phrase (1) ci-dessus et q la phrase (2), on pourra écrire:

$val(p) = 1$ soit: « la valeur (de vérité) de la proposition p est 1 » ou encore « p est vraie ».

$val(q) = 0$ soit: « la valeur (de vérité) de la proposition q est 0 » ou encore « q est fausse ».

Remarque
La détermination de la valeur actuelle d'une proposition n'est pas une question de logique. Ainsi c'est une affaire de biologie que de vérifier si $val\ (p) = 1$ et c'est à l'arithmétique de montrer que $val\ (q) = 0$. Cela signifie que la logique se contente de savoir que les objets dont elle s'occupe sous le nom de proposition ont l'une ou l'autre des valeurs 1 ou 0.

Soit alors $V = \text{df}\ \{1, 0\}$ l'ensemble des *valeurs de vérité* et soit Π l'ensemble des propositions au sens ci-dessus. Dire que si P est un élément quelconque de Π, P a une valeur de vérité, c'est dire qu'il existe une application, notée *val*, de Π vers V. On a donc: $val : \Pi \to V$.

La notion mathématique d'application entraîne les deux conséquences suivantes:
1) Tout élément de Π, donc toute proposition, a une valeur dans V.
2) Un élément de Π, donc une proposition, n'a qu'une seule valeur.
Les éléments de Π peuvent être aussi bien des propositions atomiques que des propositions moléculaires (I, p. 7).
Le problème qui va nous occuper est alors le suivant: Si P est une proposition moléculaire composée des atomes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, déterminer la valeur de vérité de P. Résoudre ce problème, c'est *évaluer* P ou encore calculer l'*évaluation* de P.

Pour évaluer P, il faut se souvenir que P est composée de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ à l'aide des *foncteurs* propositionnels, que nous appellerons aussi indifféremment des *opérateurs*. Ainsi la proposition moléculaire $P = \text{df} \sim p \supset (p \vee q)$ est composée des atomes p et q par les opérateurs de négation ($\sim$), de la conditionnelle ($\supset$) et de la disjonction non exclusive ($\vee$). Nous savons que chacun des atomes a l'une des valeurs 1 ou 0. Il sera donc possible d'évaluer P si les deux conditions suivantes sont satisfaites:
1) La valeur de P ne dépend que des valeurs de ses atomes.
2) On connaît la façon dont les foncteurs opèrent sur les valeurs de leurs arguments.
La première condition est tout simplement postulée. Quant à la seconde, elle revient à donner une définition de chacun des opérateurs ou foncteurs propositionnels.

Remarque
Postuler que la valeur d'une proposition moléculaire ne dépend que de celles de ses atomes, revient à adopter le point de vue qu'on appelle *extensionnel*. Il s'agit là d'une décision limitative. Supposons en effet que P contienne, en particulier, l'atome p. Si l'on trouve un autre atome q qui ait la valeur 1 en même temps que p et la valeur 0 en même temps que p, on devrait pouvoir substituer q à p dans P sans modifier la valeur de P. Or ceci n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant:
Soit p = df l'eau de mer contient du chlorure de sodium
q = df l'eau de mer contient du sel
P = df Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du chlorure de sodium.
La substitution de q à p conduit à « Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du sel ». On voit que la valeur de vérité de cette proposition P

ne dépend pas uniquement de celle de p. La logique classique des propositions est incapable d'en traiter.

Commençons par définir l'*opérateur de négation.* Il est naturel de poser ce qui suit:

Si $val(p) = 1$ alors $val(\sim p) = 0$

Si $val(p) = 0$ alors $val(\sim p) = 1$.

Il est commode de présenter les choses sous la forme d'une tabelle:

$val(p)$	$val(\sim p)$
1	0
0	1

ou plus simplement encore:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Une telle tabelle, dite aussi *table de vérité,* définit l'opération de négation et permet de calculer les valeurs des propositions niées.

Exemple: calcul de la valeur de $\sim\ \sim p$.

Présentation verticale des calculs

$\sim$	$\sim$	p
1	0	1
0	1	0

Présentation horizontale des calculs

p	1	0
$\sim p$	0	1
$\sim\ \sim p$	1	0

$\sim\ \sim p$ et p ont donc toujours mêmes valeurs de vérité.

Passons maintenant aux opérateurs binaires dont nous avons étudié la manipulation dans le Fascicule I. Nous allons, comme nous l'avons déjà fait, nous appuyer sur l'usage. Il faut toutefois souligner deux faits méthodologiquement importants.

1) L'usage est une notion peu précise en ce sens qu'une même expression, comme *ou* par exemple, s'utilise en fait de plusieurs façons. Cela revient à dire que nous serons conduits à choisir certains aspects et à en négliger d'autres.

2) Cet appel à l'usage n'est qu'un procédé heuristique. Cela veut dire que, une fois une table de vérité posée, l'opérateur doit être considéré comme entièrement défini par elle et qu'il ne dépend plus en rien de son sens naïf.

Les foncteurs dont nous allons traiter opèrent donc sur deux arguments. Cela revient à dire que, appliqués à deux propositions, ils engendrent une nouvelle proposition. Chacun des atomes peut être vrai ou faux indépendamment de l'autre. Nous aurons donc quatre possibilités à envisager et nous les considérerons toujours dans l'*ordre canonique* suivant:

(1) $val(p) = val(q) = 1$ (2) $val(p) = 1,\ val(q) = 0$

(3) $val(p) = 0,\ val(q) = 1$ (4) $val(p) = val(q) = 0$.

Opérateur de conjonction $\wedge$ (I.1.4)

Nous admettrons que $p \wedge q$ n'est vraie que si p et q sont toutes deux vraies. On est conduit ainsi à la table suivante, que nous présentons de deux façons différentes. La première offre une lecture plus rapide, mais la seconde est plus commode lorsqu'on a affaire à plus de deux valeurs de vérité (V. Fascicule IV).

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

	$\wedge$	q: 1	0
p	1	1	0
	0	0	0

Il est facile de s'assurer que les propositions $p \wedge q$ et $q \wedge p$ ont mêmes valeurs de vérité.

Opérateur de disjonction non-exclusive $\vee$ (I.1.8)

Nous poserons: $p \vee q$ n'est fausse que si p et q sont fausses, ce qui conduit à la table suivante:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

	$\vee$	q: 1	0
p	1	1	1
	0	1	0

Les propositions: $p \vee q$ et $q \vee p$ ont mêmes valeurs de vérité. De plus, ainsi qu'on peut le constater, il existe une transformation simple qui permet de passer de $\vee$ à $\wedge$ et inversement. Il suffit de lire chaque table de bas en haut (1ère présentation), de remplacer les 1 par des 0 et les 0 par des 1. Cette transformation que nous retrouverons plus loin (1.5) s'appelle la *transformation duale.*

Opérateur de disjonction exclusive $\vee\!\!\vee$

Si, comme c'est le plus souvent le cas, la conjonction *ou* veut donner le choix entre les deux propositions qu'elle relie, il convient de ne pas considérer comme vraie la combinaison $val(p) = val(q) = 1$.
On obtient donc la table:

p	$\vee\!\!\vee$	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

	$\vee\!\!\vee$	q: 1	q: 0
p	1	0	1
	0	1	0

On a encore $val\,(p \vee\!\!\vee q) = val\,(q \vee\!\!\vee p)$.

Opérateur conditionnel $\supset$ (I.1.3)

Nous allons partir de l'exemple suivant:
« Si n est divisible par 6, n est pair ». On a donc une proposition de la forme $p \supset q$ avec $p =$ df n est divisible par 6 et $q =$ df n est pair.

Il est clair que si $val\,(p) = val\,(q) = 1$ alors $val\,(p \supset q) = 1$. C'est là une partie de l'information que communique la proposition conditionnelle. L'autre partie est qu'il ne se peut pas que n soit divisible par 6 sans être pair. On a donc que: si $val\,(p) = 1$ et $val\,(q) = 0$ alors $val\,(p \supset q) = 0$. Mais que se passe-t-il dans le cas où n n'est pas divisible par 6 ? On voit qu'il peut également arriver que n soit pair, $val\,(q) = 1$ ou impair, $val\,(q) = 0$. La conditionnelle $p \supset q$ ne se prononce pas sur ces éventualités. Nous poserons en conséquence la table suivante:

p	$\supset$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

		q: 1	q: 0
p	1	1	0
	0	1	1

Il importe de noter que cette façon de traiter l'opérateur conditionnel constitue un modèle souvent inadéquat de *si... alors*. Sans même revenir sur les usages du genre « si j'avais su, je ne serais pas venu », il arrive très souvent que la signification des propositions en jeu exclut la possibilité d'avoir $p \supset q$ vraie lorsque p est fausse et q vraie. Ainsi la proposition « si vous passez me voir, nous boirons une bouteille *ensemble* » ne peut pas être vraie lorsque « vous passez me voir » est fausse. Il s'agit-là d'une autre façon de mettre en évidence l'aspect extensionnel de la logique, qui ne traite que de la valeur de vérité des propositions, à l'exclusion de leur signification.

Opérateur biconditionnel $\equiv$ (I.1.5)

C'est cet opérateur qui constituerait un meilleur modèle de l'exemple qui précède. Il traduit donc les situations dans lesquelles si on a p on a q et si on n'a pas p, on n'a pas q. Il est défini par la table suivante:

p	$\equiv$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

	$\equiv$	q: 1	q: 0
p	1	1	0
	0	0	1

On remarquera qu'il est très simple de passer de la table de $\vee\!\!\vee$ à celle de $\equiv$ et inversement: il suffit d'y remplacer les 1 par des 0 et les 0 par des 1. Cette transformation est celle de *négation*. Il est enfin facile de voir que $val\,(p \equiv q) = val\,(q \equiv p)$.

1.2 Les tautologies

Les tables précédentes permettent d'évaluer n'importe quelle proposition moléculaire P dont les atomes sont composés par les opérateurs $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\vee\!\!\vee$, $\supset$ et $\equiv$ que nous venons de définir. Si P contient deux atomes, il y aura $2^2 = 4$ éventualités à examiner.

Exemple
$P = \text{df} \sim p \supset (p \vee q)$

On a, en disposant les calculs en ligne:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1	0
$\sim p \supset (p \vee q)$	1	1	1	0

Si P contient trois atomes, on aura $2^3 = 8$ éventualités à étudier, ce que nous ferons en adoptant l'ordre canonique qui figure dans l'exemple suivant:

Exemple

$(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
m	1	0	1	0	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	1	1	1	0	0
$q \wedge m$	1	0	0	0	1	0	0	0
$\sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1
$(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1

D'une façon générale, si P contient les n atomes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il faudra envisager 2^n éventualités. Nous adopterons l'ordre canonique suivant. Les atomes étant ordonnés une fois pour toutes (pratiquement, on choisit l'ordre alphabétique), on écrit les suites:

p_1: $\dfrac{2^n}{2}$ valeurs 1, suivies de $\dfrac{2^n}{2}$ valeurs 0

p_2: $\dfrac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\dfrac{2^n}{4}$ valeurs 0, suivies de $\dfrac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\dfrac{2^n}{4}$ valeurs 0

p_3: $\dfrac{2^n}{8}$ valeurs 1, suivies de $\dfrac{2^n}{8}$ valeurs 0, etc.

p_n : une suite alternée de 1 et de 0.

Les calculs deviennent assez rapidement fastidieux, mais ils n'offrent jamais de difficultés de principe et, à toute proposition composée de n atomes, on sait faire correspondre une suite ordonnée de 2^n valeurs 1 et 0.

Exemples

A p correspond la suite (1 0)
à $\sim p$ la suite (0 1)
à $p \wedge q$ la suite (1 0 0 0)
à $(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$ la suite (0 1 1 1 0 1 1 1)

Remarque

L'introduction d'un ordre canonique permet de donner l'évaluation d'une proposition P sans préciser chaque fois à quelles valeurs des atomes correspondent les 1 et les 0 de P. Ainsi, pour $p \wedge q$ par exemple, on peut se contenter de donner le quadruple (1 0 0 0).

Répartissons les évaluations en trois catégories, selon (1) qu'il y figure des 1 et des 0 (2) qu'il n'y figure que des 1 et (3) qu'il n'y figure que des 0. Il existe des propositions qui correspondent à chacune de ces catégories. Toutes celles que nous venons de voir sont des exemples de la première. Comme le montrent les calculs suivants $p \vee \sim p$, $p \supset (q \supset p)$ sont des exemples de la deuxième et $p \wedge \sim p$, $p \wedge \sim (p \vee q)$ des exemples de la troisième.

Calculs

$p \vee \sim p$

p	1	0
$\sim p$	0	1
$p \vee \sim p$	1	1

$p \supset (q \supset p)$

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$q \supset p$	1	1	0	1
$p \supset (q \supset p)$	1	1	1	1

$p \wedge \sim p$

p	1	0
$\sim p$	0	1
$p \wedge \sim p$	0	0

$p \wedge \sim (p \vee q)$

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0
$\sim (p \vee q)$	0	0	0	1
$p \wedge \sim (p \vee q)$	0	0	0	0

Toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 1 est une *tautologie* et toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 0 est une *contradiction.* Il est clair que si P est une tautologie, $\sim P$ sera une contradiction et réciproquement. D'autre part, puisque une proposition atomique p prend soit la valeur 1 soit la valeur 0, seules des propositions moléculaires peuvent être des tautologies ou des contradictions. Si P est une tautologie, nous écrirons $\vdash P$.

Remarques

1. Affirmer, comme nous venons de le faire, qu'une proposition atomique, ne peut être ni une tautologie, ni une contradiction, c'est s'appuyer sur une décision propre au système logique construit et non pas constater un fait d'expérience. La proposition « les célibataires sont des gens mariés » est atomique, en ce sens qu'elle ne contient aucun des opérateurs précédents et elle exprime cependant une contradiction. Toutefois, on sait que, analysée dans la logique des prédicats, elle s'écrira:
$(\forall x)\ (\sim ax \supset ax)$ où $ax = \text{df}\ x$ est marié et où être célibataire $=$ df être non marié.

Cette divergence repose sur le fait que « être une expression atomique » n'a pas le même sens dans la logique des propositions et dans celle des prédicats.

2. Nous avons utilisé le même signe $\vdash$ pour dire qu'une proposition était une tautologie et pour dire qu'elle était un théorème (I, p. 21). Il est possible, en prenant des exemples, de s'assurer que si P est un théorème alors P est une tautologie et réciproquement. Toutefois la pratique qui consiste à écrire dans les deux cas $\vdash P$ exigerait la démonstration d'un épithéorème. Une telle démonstration, si elle se voulait rigoureuse, sortirait du propos de cet ouvrage, mais nous y reviendrons cependant en 1.7.

3. Puisqu'une tautologie est vraie, quelles que soient les valeurs de ses atomes, on peut de nouveau dire qu'elle est « vraie dans tous les mondes possibles ». Elle ne fournit ainsi aucune information sur le monde lui-même.

Exemple

« Il y a des hommes sur la planète Mars ou il n'y a pas d'hommes sur la planète Mars », soit $p \vee \sim p$, ne nous renseigne absolument pas sur la planète en question.

On dit volontiers pour cela que les tautologies sont vides de sens. En fait, elles expriment des lois logiques en explicitant la façon dont les opérateurs sont utilisés.

Il est de nouveau possible de définir les relations d'implication et d'équivalence entre propositions. Nous poserons encore:

P implique $Q = \text{df } P \rightarrow Q = \text{df} \vdash P \supset Q$ (V. I, p. 26).
P est équivalente à $Q = \text{df } P \leftrightarrow Q = \text{df} \vdash P \equiv Q$ (V. I, p. 27).

La relation d'équivalence permet d'énoncer les principales propriétés des opérateurs que nous avons introduits jusqu'ici. Pour les vérifier, il suffit de remplacer toute expression de la forme $P \leftrightarrow Q$ par $\vdash P \equiv Q$ et de s'assurer par le calcul que cette dernière proposition est bien une tautologie. Nous avons:

(0) $\sim\sim p \leftrightarrow p$, *principe de la double négation.*

(1) Les opérations $\wedge$, $\vee$, $\vee\!\!\vee$ et $\equiv$ sont *commutatives*:

$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p,\ p \vee q \leftrightarrow q \vee p,\ p \vee\!\!\vee q \leftrightarrow q \vee\!\!\vee p,\ p \equiv q \leftrightarrow q \equiv p.$

(2) Elles sont *associatives*,

$(p \wedge q) \wedge m \leftrightarrow p \wedge (q \wedge m),\ (p \vee q) \vee m \leftrightarrow p \vee (q \vee m),$
$(p \vee\!\!\vee q) \vee\!\!\vee m \leftrightarrow p \vee\!\!\vee (q \vee\!\!\vee m),\ (p \equiv q) \equiv m \leftrightarrow p \equiv (q \equiv m).$

(3) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *idempotentes*:

$p \wedge p \leftrightarrow p,\ p \vee p \leftrightarrow p.$

(4) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *distributives* l'une par rapport à l'autre:

$p \wedge (q \vee m) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge m)$
$p \vee (q \wedge m) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m).$

L'opération $\supset$ ne jouit d'aucune des trois premières propriétés et l'opération $\equiv$ n'est pas idempotente: $p \equiv p$ est une tautologie.

Remarque
Une expression comme $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ n'est pas homogène. En effet les signes p, q et $\wedge$ font partie du système que nous étudions. Mais le signe $\leftrightarrow$ est une abréviation de la langue de communication. Il sert à dire « est équivalente à ». Ce fait nous a permis d'économiser les parenthèses. Là où, pour éviter des confusions, il faudrait écrire $\vdash (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, puisque $\equiv$ est aussi un signe du calcul, nous avons pu nous contenter d'écrire $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$. Nous utiliserons systématiquement cette pratique dans ce qui suit.

La relation d'équivalence permet aussi de montrer que les opérateurs définis par les tables qui précèdent ne sont pas indépendants les uns des autres. Ainsi on aura:

$\vdash (p \wedge q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$ soit $p \wedge q \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$
$\vdash (p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ soit $p \vee q \leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
$\vdash (p \veebar q) \equiv ((p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q))$ soit $p \veebar q \leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q).$

Les deux premières équivalences correspondent aux lois de Morgan (I, p. 38). Assurons-nous de la troisième:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \veebar q$	0	1	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim(p \wedge q)$	0	1	1	1
$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$	0	1	1	0
Proposition	1	1	1	1

On aura encore: $p \supset q \leftrightarrow \sim p \vee q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
et $p \equiv q \leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$.

Introduisons enfin un nouvel opérateur $|$ tel que $p \mid q$ s'interprète comme « pas à la fois p et q ».

Cela conduit à poser la table:

p	$\mid$	q
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	1	0

Il est facile de s'assurer que l'on a alors les équivalences suivantes:

$\sim p \leftrightarrow p \mid p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$

$p \wedge q \leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$.

Remarque

L'opérateur $\downarrow$ dont l'évaluation est (0 0 0 1) conduit aux équivalences:

$\sim p \leftrightarrow p \downarrow p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$p \wedge q \leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

On voit ainsi qu'un seul opérateur, soit $\mid$, soit $\downarrow$, permet de définir tous les autres par des équivalences.

Bien que représentant des lois logiques, les tautologies ne permettent pas d'effectuer des déductions. Toutefois, si une déduction est effectuée, elles permettent de s'assurer de sa correction.

Exemple

« Ceux qui veulent la paix préparent la guerre. Vous ne préparez pas la guerre, donc vous ne voulez pas la paix ».

Nous poserons:

$p =$ df vouloir la paix

$q =$ df préparer la guerre.

Le raisonnement part des deux prémisses $p \supset q$ et $\sim q$ et il conclut $\sim p$. Il suffit de voir si la conjonction des prémisses implique la conclusion, donc si $(p \supset q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ ou encore si $\vdash ((p \supset q) \wedge \sim q) \supset \sim p$. C'est bien le cas, ce qui montre tout à la fois que le raisonnement est correct et qu'il ne suffit pas d'être logique pour faire le bonheur des peuples.

1.3 Les seize opérateurs binaires

Au lieu de partir de l'usage et de s'interroger sur la façon de représenter au mieux un opérateur comme *et*, *ou*, etc, il est possible de procéder de façon formelle. Un opérateur binaire quelconque, disons $\circ$, est tel que, appliqué à deux propositions p et q, il engendre une proposition $p \circ q$. Si l'on adopte l'ordre canonique pour les valeurs de p et de q, l'évaluation de $p \circ q$ est fournie par un quadruple $(a\ b\ c\ d)$ où a, b, c et d ont soit la valeur 1 soit la valeur 0 et ce quadruple détermine entièrement l'opérateur $\circ$.

Laissons pour l'instant la question de l'interprétation possible des opérateurs et cherchons simplement à les dénombrer exhaustivement. On aura cinq cas à étudier.

I. *$(a\ b\ c\ d)$ ne contient que des 0.*
1 façon: (0 0 0 0)

II. *$(a\ b\ c\ d)$ contient un 1 et trois 0.*
4 façons: (1 0 0 0) (0 1 0 0) (0 0 1 0) (0 0 0 1)

III. *$(a\ b\ c\ d)$ contient deux 1 et deux 0.*
6 façons: (1 1 0 0) (1 0 1 0) (0 1 1 0) (1 0 0 1) (0 1 0 1) (0 0 1 1)

IV. *$(a\ b\ c\ d)$ contient trois 1 et un 0.*
4 façons: (1 1 1 0) (1 1 0 1) (1 0 1 1) (0 1 1 1)

V. *$(a\ b\ c\ d)$ ne contient que des 1.*
1 façon: (1 1 1 1).

Il existe donc 16 et seulement 16 opérateurs binaires possibles.

Remarque

On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon encore. Un opérateur binaire peut se concevoir comme une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des couples (ordonnés):
$\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ et dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble $\{1,0\}$. Si $V = \{1,0\}$, un opérateur binaire est donc une application $f : V \times V \rightarrow V$ ou $V \times V$ représente l'ensemble produit V par V. Il suffit de dénombrer les applications f, ce que fait le tableau suivant, pour retrouver (cette fois-ci en colonne) les 16 quadruples.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

Il est possible de tirer davantage encore de ce qui précède. Soit P une proposition quelconque qui contient les deux atomes p et q. Ceux-ci peuvent figurer un nombre quelconque de fois dans P et les compositions peuvent se faire à l'aide d'un ou de plusieurs des seize opérateurs.

Exemple

$P = \mathrm{df} \sim p \supset (p \vee q)$

Dans tous les cas, l'évaluation de P conduira à l'un des seize quadruples ci-dessus. Ce sera (1 1 1 0) pour cet exemple (V. p. 8), qui est aussi l'évaluation de $p \vee q$.

Cela signifie que $\sim p \supset (p \vee q)$ est équivalente à $p \vee q$, donc que $\vdash (\sim p \supset (p \vee q)) \equiv (p \vee q)$ ou encore
$\sim p \supset (p \vee q) \leftrightarrow p \vee q$.

L'ensemble Π_2 de toutes les propositions qui contiennent deux atomes est infini, puisque chaque atome peut être répété un nombre quelconque de fois et la relation d'équivalence $\leftrightarrow$ engendre une partition de Π_2 en 16 *classes d'équivalence.* Nous noterons $[a\ b\ c\ d]$ la classe de toutes les propositions dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$.

Exemples

1) Comme nous venons de le voir $\sim p \supset (p \vee q) \in [1\ 1\ 1\ 0]$, $p \vee q \in [1\ 1\ 1\ 0]$.
2) On s'assurera que $p \supset q \in [1\ 0\ 1\ 1]$, $\sim p \vee q \in [1\ 0\ 1\ 1]$, $\sim (p \wedge \sim q) \in [1\ 0\ 1\ 1]$.

Il est aussi possible de désigner la classe $[a\ b\ c\ d]$ en choisissant l'un quelconque de ses éléments et en le plaçant entre crochets. Ainsi, par exemple, $[p \vee q]$ désignera la classe $[1\ 1\ 1\ 0]$, $[p \supset q]$ désignera $[1\ 0\ 1\ 1]$, etc.

Ordonnons maintenant les 16 classes. Nous dirons que la classe $[a_1\ b_1\ c_1\ d_1]$ *précède* la classe $[a_2\ b_2\ c_2\ d_2]$, et nous noterons $[a_1\ b_1\ c_1\ d_1] \leqslant [a_2\ b_2\ c_2\ d_2]$, si un représentant quelconque de $[a_1\ b_1\ c_1\ d_1]$ implique, au sens de la relation $\rightarrow$, un représentant quelconque de la classe $[a_2\ b_2\ c_2\ d_2]$.

Exemple

Soit les trois classes $[1\ 0\ 0\ 0]$, $[1\ 0\ 1\ 0]$ et $[1\ 1\ 1\ 0]$. On s'assure sans peine que: $p \wedge q \in [1\ 0\ 0\ 0]$, $q \wedge (p \vee \sim p) \in [1\ 0\ 1\ 0]$ et $p \vee q \in [1\ 1\ 1\ 0]$.

D'autre part, le calcul montre que:

$\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge (p \vee \sim p))$, $\vdash (q \wedge (p \vee \sim p)) \supset (p \vee q)$,
$\vdash (p \wedge q) \supset (p \vee q)$.

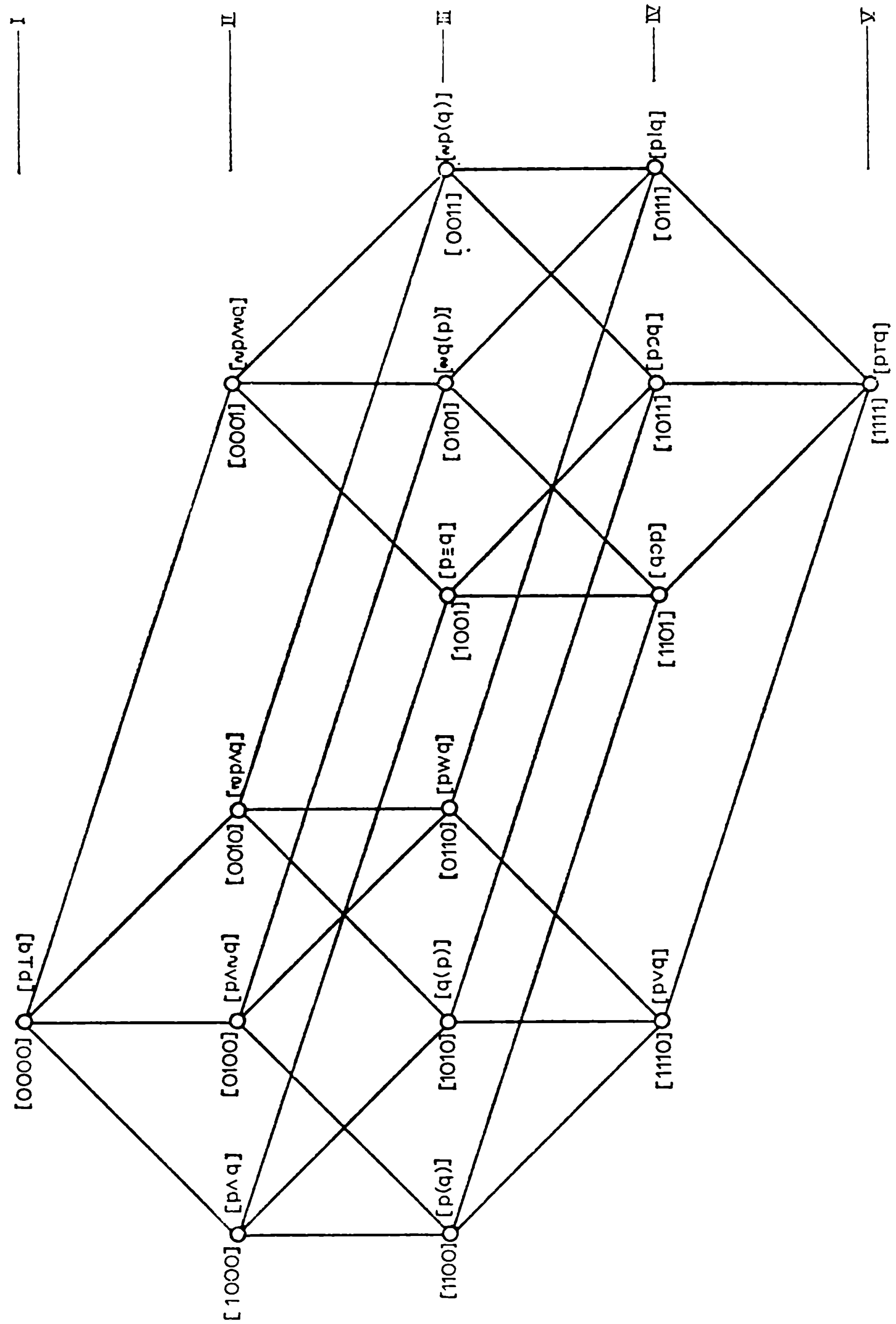


Figure 1

On aura donc les implications:
$p \wedge q \rightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$, $q \wedge (p \vee \sim p) \rightarrow p \vee q$ et $p \wedge q \rightarrow p \vee q$.
Et il s'ensuit que:
[1 0 0 0] $\leqslant$ [1 0 1 0], [1 0 1 0] $\leqslant$ [1 1 1 0] et [1 0 0 0] $\leqslant$ [1 1 1 0]. La troisième relation découle des deux premières par la transitivité de la relation « précède », qui est une relation d'ordre.

Remarques
1) $q \leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$. En effet, cela revient à dire que $q \equiv (q \wedge (p \vee \sim p))$ est une tautologie, ce que montre le calcul suivant:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee \sim p$	1	1	1	1
$q \wedge (p \vee \sim p)$	1	0	1	0
Proposition	1	1	1	1

Il aurait donc été possible de choisir q comme représentant de la classe [1 0 1 0]. Cela exige toutefois de se souvenir que q n'est pas ici une proposition isolée, mais bien la seconde de deux atomes. Pour garder la chose en mémoire, nous écrirons $[q(p)]$ pour représenter la classe qui contient, en particulier la proposition q, mais qui contient aussi des propositions où l'atome p figure explicitement.

2) D'une façon toute semblable, nous écrirons $[p(q)]$ pour la classe [1 1 0 0], $[\sim p(q)]$ pour la classe [0 0 1 1] et $[\sim q(p)]$ pour la classe [0 1 0 1].

Ceci dit, il est possible d'ordonner les 16 classes d'équivalence comme le montre le diagramme précédent. On s'assurera par le calcul que les propositions choisies appartiennent bien aux classes correspondantes. Enfin nous avons écrit $\top$ pour désigner l'opérateur tel que $p \top q \in$ [1 1 1 1] et $\perp$ pour représenter celui tel que $p \perp q \in$ [0 0 0 0].

Ce schéma a cinq niveaux et il est disposé de telle façon que si une classe de niveau n est reliée à une classe de niveau $n + k$, elle la précède. Ainsi [0 1 0 0] $\leqslant$ [0 1 1 1]. Toutefois deux classes quelconques ne sont pas toujours reliées: on a affaire à un ordre partiel. Les classes d'un même niveau ne sont pas ordonnées entre elles, et il n'est pas non plus possible de comparer [1 0 0 1] par exemple à [0 1 1 1].

Si l'on revient à la définition que nous avons donnée de la relation $\leqslant$, le même schéma permet de lire les implications entre les propositions, donc les tautologies.

Exemples

$\vdash (p \wedge q) \supset p$; $\vdash p \supset (p \vee q)$; $\vdash (p \wedge q) \supset (p \supset q)$.

Enfin la proposition notée $p \perp q$ implique toutes les autres. Elle correspond à la contradiction et ce fait traduit partiellement l'adage *ex falso quodlibet sequitur*. Réciproquement, toute proposition implique celle notée $p \top q$. La chose se comprend facilement puisque $p \top q$ correspond à la notion de tautologie. Soit P une proposition dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$. Formons la conditionnelle $P \supset (p \top q)$. On aura:

P	a	b	c	d
$p \top q$	1	1	1	1
$P \supset (p \top q)$	1	1	1	1

En effet, si a est 1, on a bien *val* $(1 \supset 1) = 1$ et si a est 0 on a aussi *val* $(0 \supset 1) = 1$. De même avec b, c et d.

Remarques

1) Soit P, Q et M trois propositions qui ont entre elles les relations de la figure 2. Alors M est $P \wedge Q$. De même si P, Q et M ont entre elles les relations de la figure 3, M est $P \vee Q$.

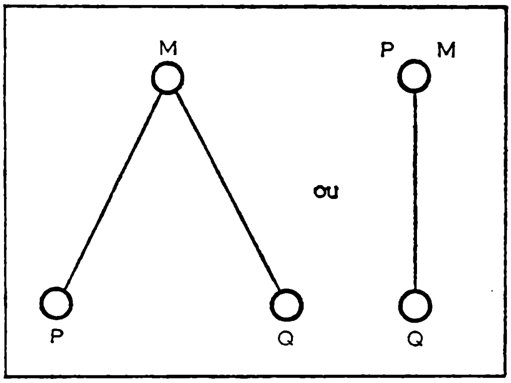


Figure 2

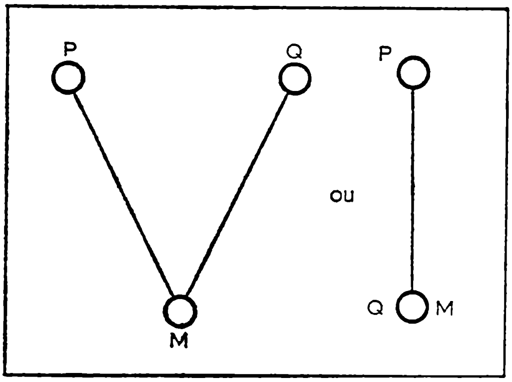


Figure 3

Exemples

$(p \equiv q) \wedge (\sim p(q)) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$; $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow q(p)$

$(q \supset p) \wedge (p \equiv q) \leftrightarrow p \equiv q$; $(p \mathbin{\vee\!\!\vee} q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow p \mathbin{\vee\!\!\vee} q$

2) La structure représentée à la figure 1 est isomorphe à celle de l'ensemble des parties d'un ensemble E à 4 éléments. Elle constitue de plus un exemple d'algèbre de Boole (V. Fascicule III).

1.4 Les formes normales

Commençons par résoudre le problème suivant. Soit P et Q deux propositions éléments de Π_2. Nous savons que chacune a pour évaluation l'un des 16 quadruples de la forme $(a\ b\ c\ d)$. Comment calculer, à partir d'eux, l'évaluation de $P \vee Q$?

Exemple

Nous savons que l'évaluation de $p \equiv q$ est (1 0 0 1) et que celle de $\sim p(q)$ est (0 0 1 1). Il s'agit donc de trouver l'évaluation de $(p \equiv q) \vee \sim p(q)$. On a les calculs suivants

$p \equiv q$	1	0	0	1
$\sim p(q)$	0	0	1	1
$(p \equiv q) \vee (\sim p(q))$	1	0	1	1

On constate que, si à l'une des places a, b, c, d de l'un des quadruples au moins il y a 1, il y aussi 1 dans le quadruple résultant. C'est tout simplement une autre façon de décrire la table de vérité de $\vee$.

Ceci permet de résoudre le problème inverse. Connaissant l'évaluation d'une proposition M, disons (1 0 1 1), trouver deux propositions P et Q telles que $P \vee Q$ soit équivalente à M. Un tel problème admet généralement plusieurs solutions.

Exemples

(1 0 0 1)	soit $p \equiv q$
(0 0 1 1)	soit $\sim p(q)$
(1 0 1 1)	soit M

(0 0 1 0)	soit $\sim p \wedge q$
(1 0 1 1)	soit $p \supset q$
(1 0 1 1)	soit M

(1 0 1 0)	soit $q(p)$
(1 0 0 1)	soit $p \equiv q$
(1 0 1 1)	soit M

Allons plus loin. On remarquera d'une part que rien n'empêche de chercher une proposition équivalente à M qui contienne plus d'un opérateur $\vee$ et que d'autre part quatre propositions jouissent de la propriété de n'avoir qu'un seul 1 dans leur évaluation. Ce sont $p \wedge q$ soit (1 0 0 0), $p \wedge \sim q$ soit (0 1 0 0), $\sim p \wedge q$ soit (0 0 1 0) et $\sim p \wedge \sim q$ soit (0 0 0 1).

Nous les appellerons les *conjonctions élémentaires.* Ces conjonctions élémentaires vont toujours suffire à écrire par disjonction, une proposition équivalente à tout élément de Π_2 donné.

Exemple

Si nous reprenons $M = \text{df}\ p \supset q$ dont l'évaluation est (1 0 1 1), on aura: $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow p \supset q$.

En effet, la disjonction $\vee$ est associative et il vient:

$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim p \wedge q$	0	0	1	0
$\sim p \wedge \sim q$	0	0	0	1
$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	1	0	1	1

D'une façon plus générale, si P est une proposition dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$, on obtiendra une proposition qui lui est équivalente, en écrivant la disjonction suivante:

$p \wedge q$	si $a = 1$,	rien si $a = 0$
$p \wedge \sim q$	si $b = 1$,	rien si $b = 0$
$\sim p \wedge q$	si $c = 1$,	rien si $c = 0$
$\sim p \wedge \sim q$	si $d = 1$,	rien si $d = 0$

Exemples

$p \equiv q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ Evaluation (1 0 0 1)

$p \vee q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ Evaluation (1 1 1 0)

On appelle *forme normale disjonctive complète* (FNDC) d'une proposition donnée P la disjonction de conjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques

1) La FNDC d'une proposition est univoquement déterminée à l'ordre des termes près. On pourra donc parler de *la* FNDC d'une proposition P.

2) La FNDC d'une conjonction élémentaire est cette conjonction elle-même. Il s'agit d'un cas dégénéré de disjonction.

3) Seules les propositions contradictoires de la forme $p \perp q$ n'ont pas de FNDC.

4) Les tautologies sont caractérisées par le fait que leur FNDC contient les quatre conjonctions élémentaires.

La définition de la notion de FNDC ne spécifie pas que P contient deux atomes. En effet, quel que soit le nombre des atomes, il sera toujours possible de définir les conjonctions élémentaires et de refaire les raisonnements ci-dessus. La définition est donc générale.

Exemple

Nous allons chercher la FNDC de la proposition $p \equiv (q \wedge m)$. Celle-ci contient les trois atomes p, q et m. Nous aurons donc affaire à $2^3 = 8$ conjonctions élémentaires que nous écrirons dans l'ordre canonique.

(1)	$p \wedge q \wedge m$	soit (1 0 0 0 0 0 0 0)
(2)	$p \wedge q \wedge \sim m$	soit (0 1 0 0 0 0 0 0)
(3)	$p \wedge \sim q \wedge m$	soit (0 0 1 0 0 0 0 0)
(4)	$p \wedge \sim q \wedge \sim m$	soit (0 0 0 1 0 0 0 0)
(5)	$\sim p \wedge q \wedge m$	soit (0 0 0 0 1 0 0 0)
(6)	$\sim p \wedge q \wedge \sim m$	soit (0 0 0 0 0 1 0 0)
(7)	$\sim p \wedge \sim q \wedge m$	soit (0 0 0 0 0 0 1 0)
(8)	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m$	soit (0 0 0 0 0 0 0 1)

Il suffit maintenant de calculer l'évaluation de $p \equiv (q \wedge m)$ pour être à même d'écrire sa FNDC.

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
m	1	0	1	0	1	0	1	0
$q \wedge m$	1	0	0	0	1	0	0	0
Proposition	1	0	0	0	0	1	1	1

La FNDC contiendra donc les conjonctions élémentaires numéros (1), (6), (7) et (8):

$(p \wedge q \wedge m) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m)$.

Il existe une seconde forme normale dite conjonctive. Pour le voir, revenons aux éléments de Π_2 et partons des quatre propositions suivantes, que nous appellerons les *disjonctions élémentaires* :

$p \vee q$ soit (1 1 1 0) $\quad$ $p \vee \sim q$ soit (1 1 0 1)

$\sim p \vee q$ soit (1 0 1 1) $\quad$ $\sim p \vee \sim q$ soit (0 1 1 1).

La table de la conjonction $\wedge$ montre qu'il est possible d'obtenir une proposition quelconque d'évaluation $(a\ b\ c\ d)$ en écrivant la conjonction suivante :

$p \vee q$	si $d = 0$,	rien si $d = 1$
$p \vee \sim q$	si $c = 0$,	rien si $c = 1$
$\sim p \vee q$	si $b = 0$,	rien si $b = 1$
$\sim p \vee \sim q$	si $a = 0$,	rien si $a = 1$.

Exemple
Soit $P = \text{df } p \equiv q$, proposition dont l'évaluation est (1 0 0 1). Il vient $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$, proposition équivalente à P. En effet:

$p \vee \sim q$	1	1	0	1
$\sim p \vee q$	1	0	1	1
$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	1	0	0	1

On appelle *forme normale conjonctive complète* (FNCC) d'une proposition P la conjonction de disjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques
1) On notera que la FNCC d'une proposition est univoquement déterminée, qu'il existe des conjonctions dégénérées, qu'une contradiction est caractérisée par la présence des quatre disjonctions élémentaires, que les tautologies n'ont pas de FNCC et que la définition ci-dessus est valable pour un nombre quelconque d'atomes.

2) Il existe une relation intéressante entre la FNDC d'une proposition et sa FNCC. Voyons-le sur un exemple.

Soit $P = \text{df } p \equiv q$ proposition dont l'évaluation est (1 0 0 1). Nous avons vu d'autre part que:

la FNDC de P est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
la FNCC de P est $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Considérons maintenant $\sim P$. Son évaluation découle de celle de P, par l'application de la transformation de négation. C'est (0 1 1 0). Or, la FNDC de $\sim P$ est $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$. Elle est donc composée des conjonctions élémentaires qui manquent dans la FNDC de P. Dès lors, si dans la FNDC de $\sim P$, on permute les signes $\wedge$ et $\vee$, on obtient tout justement la FNDC de P.

Il en découle la *règle de dualité* suivante: Soit P une proposition mise en FNDC. On obtient la FNCC de $\sim P$ en remplaçant chaque atome par sa négation et en échangeant les signes $\vee$ et $\wedge$. Si P est mise en FNCC, on obtiendra la FNDC de $\sim P$ par les mêmes opérations.

Exemple
Soit la proposition $p \supset q$ dont la FNDC est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$. La FNCC de $\sim (p \supset q)$ sera $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$. Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ étant commutatifs, l'ordre est sans impor-

tance. De plus nous avons fait tacitement usage du principe de la double négation.

Vérification

L'évaluation de $p \supset q$ est (1 0 1 1). Donc celle de $\sim (p \supset q)$ est (0 1 0 0). Et on a:

$p \wedge q$	1 0 0 0
$\sim p \wedge q$	0 0 1 0
$\sim p \wedge \sim q$	0 0 0 1
Disjonction	1 0 1 1

$\sim p \vee \sim q$	0 1 1 1
$p \vee \sim q$	1 1 0 1
$p \vee q$	1 1 1 0
Conjonction	0 1 0 0

Cette remarquable propriété de dualité explique qu'il y ait eu intérêt à considérer la disjonction non exclusive $\vee$ comme plus fondamentale que la disjonction exclusive w (V. I. p. 29).

S'il est sans grand inconvénient que la FNDC d'une contradiction n'existe pas, il peut être très gênant que la FNCC d'une tautologie ne puisse s'écrire. Nous allons pour cela introduire une autre espèce de forme normale conjonctive, qui ne sera plus complète et que nous nommerons simplement FNC.

Soit une proposition quelconque, disons $\sim (p \supset q) \equiv p$. Il est possible de transformer une telle expression par des substitutions d'équivalences que nous avons examinées plus haut. Nous ferons usage:

1) Du fait que $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre (p. 11 et 12).
2) Que le principe de la double négation est valide (p. 11).
3) Que l'on dispose des lois de Morgan (p. 12).
4) Que l'on peut exprimer $\supset$ et $\equiv$ à l'aide de $\sim$, $\vee$ et $\wedge$ (p. 12).

Appliquons ceci à la proposition donnée. Nous indiquons à côté de chaque ligne à quel groupe d'équivalences il faut faire appel pour passer à la ligne suivante:

1. $\sim (p \supset q) \equiv p$	(4)
2. $\sim (\sim p \vee q) \equiv p$	(3) et (2)
3. $(p \wedge \sim q) \equiv p$	(4)
4. $((p \wedge \sim q) \supset p) \wedge (p \supset (p \wedge \sim q))$	(4)
5. $(\sim (p \wedge \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	(3) et (2)
6. $((\sim p \vee q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	(1)
7. $(\sim p \vee q \vee p) \wedge (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	

On constate que, au moment où aucune des règles (1) à (4) n'est plus applicable,

1) l'expression obtenue a la forme d'une conjonction,
2) chaque facteur est une disjonction qui n'est pas nécessairement une disjonction élémentaire, en ce sens que tous les atomes n'y figurent pas toujours,
3) les signes de négation ne portent que sur les atomes.

Toute proposition qui jouit de ces trois propriétés est une *forme normale conjonctive*. On dira, dans l'exemple précédent, que $\sim (p \supset q) \equiv p$ a été mise sous FNC.

Considérons maintenant le cas d'une tautologie, disons $(p \wedge (p \supset q)) \supset q$. Mettons-la sous FNC:

1. $(p \wedge (p \supset q)) \supset q$	(4)
2. $\sim (p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q$	(3)
3. $(\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)) \vee q$	(3) et (2)
4. $(\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$	(1)
5. $((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	(1)
6. $(\sim p \vee p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q)$	(1)

On constate que la FNC existe, ce qui sera toujours le cas, puisque aucune des règles qui l'engendrent ne permet de faire disparaître un atome. De plus chacune des disjonctions contient un atome et sa négation. Cela fait que chaque disjonction a la valeur 1 et que la FNC, qui est une conjonction, a aussi la valeur 1.

1.5 Le groupe I, N, R, D

La règle de dualité ci-dessus met en jeu trois transformations:

1) passer d'une proposition à sa négation
2) remplacer les atomes p par $\sim p$ et réciproquement
3) remplacer $\vee$ par $\wedge$ et réciproquement.

Celles-ci ne sont pas sans liens entre elles et c'est même ce que la règle exprime. Toutefois il est intéressant d'étudier la chose d'une façon encore un peu différente. Pour simplifier les écritures, nous nous en tiendrons aux éléments de Π_2, mais les considérations qui suivent sont tout à fait générales.

Commençons par convenir que les lettres a', b', c', d' représenteront toujours les valeurs opposées aux lettres a, b, c, d. Donc si $a = 1$, $a' = 0$, si $a = 0$, $a' = 1$, et de même pour b', c', d'. Définissons alors la *transforma-*

tion de négation, notée **N**, et qui fait passer la classe d'équivalence $[a\ b\ c\ d]$ à la classe $[a'\ b'\ c'\ d']$:

$\mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = [a'\ b'\ c'\ d']$.

Il est clair que $\mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d]$, c'est-à-dire que, si l'on applique deux fois de suite la transformation, on retrouve la classe dont on était parti. Il est commode, pour formuler la chose, d'introduire la *transformation identique* **I**, définie de la façon suivante:

$\mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d] = [a\ b\ c\ d]$.

On pourra donc écrire:

$\mathbf{N}\,\mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$, ou encore: $\mathbf{N}\,\mathbf{N} = \mathbf{I}$.

Convenons d'un abus de langage et d'écriture et disons que nos transformations font passer d'une proposition (élément de la classe initiale) à une proposition (élément de la classe finale).

Ainsi nous écrirons par exemple:

$\mathrm{N}\ (1\ 0\ 0\ 0) = (0\ 1\ 1\ 1)$

et même $\mathrm{N}\ (p \wedge q) = p \mid q$.

Mais on voit par le calcul que $p \mid q \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ et l'on peut donc écrire :

$\mathrm{N}\ (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.

On aura de même:

$\mathrm{N}\ (1\ 1\ 1\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1)$

soit encore $\mathbf{N}\ (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.

Si l'on applique **N** aux trois autres conjonctions élémentaires et aux trois autres disjonctions élémentaires, on constate que la transformation consiste:

1) à remplacer les atomes p et q par $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement,
2) à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

Remarque

C'est ce qu'exprimaient les règles **neg** $\wedge$ et **neg** $\vee$ (V. I, 1.9).

Définissons maintenant la transformation **R** de la façon suivante:

$\mathbf{R}\ [a\ b\ c\ d] = [d\ c\ b\ a]$.

Il est clair que l'on a de nouveau $\mathbf{R}\,\mathbf{R} = \mathbf{I}$. En effet:

$\mathbf{R}\,\mathbf{R}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{R}\ [d\ c\ b\ a] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$.

Nous aurons ainsi, par le même abus que tout à l'heure:

$\mathbf{R}\ (1\ 0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1)$ ou $\mathbf{R}\ (p \wedge q) = \sim p \wedge \sim q$ et

$\mathbf{R}\ (1\ 1\ 1\ 0) = (0\ 1\ 1\ 1)$ ou $\mathbf{R}\ (p \vee q) = \sim p \vee \sim q$.

Et l'on peut constater que, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **R**, consiste à remplacer les atomes p et q par $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement.

Remarque
Appliquée à une évaluation donnée, **R** consiste donc à la lire de droite à gauche. Ceci explique que, en décrivant la façon de construire une FNCC (V. p. 21) nous ayons dû procéder dans l'ordre d, c, b, a.

Appliquée à la classe [1 0 1 1], **R** conduit à [1 1 0 1]. Donc, on a en particulier :
$\mathbf{R}\,(p \supset q) = q \supset p$.
C'est la raison pour laquelle nous appellerons **R** la *transformation réciproque*.

Définissons enfin, avec ces notations, la *transformation duale* (V. p. 6), que nous noterons **D**:
$\mathbf{D}\,[a\,b\,c\,d] = [d'\,c'\,b'\,a']$.
On a encore $\mathbf{D\,D} = \mathbf{I}$ puisque :
$\mathbf{D\,D}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{D}\,[d'\,c'\,b'\,a'] = [a\,b\,c\,d] = \mathbf{I}\,[a\,b\,c\,d]$.
Et en particulier:
$\mathbf{D}\,(1\;0\;0\;0) = (1\;1\;1\;0)$ ou $\mathbf{D}\,(p \wedge q) = p \vee q$
$\mathbf{D}\,(1\;1\;1\;0) = (1\;0\;0\;0)$ ou $\mathbf{D}\,(p \vee q) = p \wedge q$.
D'une façon générale, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **D** consiste à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

On constate, pour ainsi dire, que **R** et **D** accomplissent chacune une part de ce qu'effectue la transformation **N**:
1) **R** agit sur la valeur des atomes
2) **D** agit sur l'opérateur.
Ceci s'exprime rigoureusement en montrant que
$\mathbf{R\,D} = \mathbf{D\,R} = \mathbf{N}$
$\mathbf{RD}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{R}\,[d'\,c'\,b'\,a'] = [a'\,b'\,c'\,d'] = \mathbf{N}\,[a\,b\,c\,d]$
$\mathbf{DR}\,[a\,b\,c\,d] = \mathbf{D}\,[d\,c\,b\,a] = [a'\,b'\,c'\,d'] = \mathbf{N}\,[a\,b\,c\,d]$.

Remarques
1. Il arrive assez souvent que dans la pensée spontanée, la transformation **R** soit utilisée comme négation. Ainsi peut-on observer des dialogues de la forme suivante:
— C'est un journal bête et méchant.
— C'est faux: il n'est ni bête, ni méchant.
La transformation **N** aurait conduit à: « Il n'est pas bête *ou* pas méchant ».

2. L'étude des transformations ci-dessus a été faite pour la première fois par Jean Piaget qui appelait **D** la corrélative et la notait en conséquence **C** (V. la bibliographie à la fin du fascicule).

Il nous reste à montrer que les quatre transformations **I**, **N**, **R**, **D** forment un système, au sens fort du terme. Posons pour cela, $T = \text{df}\ \{\mathbf{I}, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{D}\}$. Calculons l'effet de l'application successive à une classe de deux quelconques des éléments de T, c'est-à-dire calculons toutes les transformations $X\ Y$, où X et Y sont éléments de T. Le résultat est fourni par la table ci-contre. Les calculs n'offrent aucune difficulté. Ils se font sur le modèle de **R D** et **D R** qui précède.

	I	N	R	D
I	I	N	R	D
N	N	I	D	R
R	R	D	I	N
D	D	R	N	I

Il est alors possible de faire les cinq remarques suivantes:

1) Si X, $Y \in T$, $XY \in T$. La composition de deux transformations de T ne fait pas sortir de l'ensemble T.

2) Si X, Y, $Z \in T$, $(XY)Z = X(YZ)$. La composition est associative.

Il est un peu long de s'assurer complètement de la chose, mais la façon de procéder est élémentaire. Faisons-le pour **NRD**.

Calcul de (**NR**)**D** :

D $[a\ b\ c\ d] = [d'\ c'\ b'\ a']$

NR $[d'\ c'\ b'\ a'] =$ **N** $[a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] =$ **I** $[a\ b\ c\ d]$

Donc (**NR**)**D** = **I**.

Calcul de **N**(**RD**) :

RD $[a\ b\ c\ d] =$ **R** $[d'\ c'\ b'\ a'] = [a'\ b'\ c'\ d']$

N $[a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] =$ **I** $[a\ b\ c\ d]$.

Donc N(**RD**) = **I** et on a bien (**NR**)**D** = N(**RD**).

3) Il existe une transformation identique **I**.

4) Si $X \in T$, il existe $Y \in T$ telle que $XY = YX =$ **I**.

Y est l'*inverse* de X et ici chaque transformation est sa propre inverse.

5) X, $Y \in T$, $XY = YX$. La composition est commutative ce qui se voit sur la table ci-dessus: elle est symétrique par rapport à la diagonale **I** - **I**.

Ces cinq faits permettent d'affirmer que l'on a affaire à un *groupe abélien* et l'on peut montrer qu'il est isomorphe au fameux groupe de Klein (mathématicien allemand: 1849-1925).

Remarque

Il existe naturellement d'autres transformations entre les 16 classes d'équivalence dont certaines forment aussi des groupes (V. Fascicule III).

1.6 Une axiomatisation

Nous allons construire un système formel pour la logique des propositions. Le « jeu » consiste à faire comme si l'on ne savait pas de quoi il s'agit, comme si les signes utilisés n'avaient pas de signification. Ce n'est que dans une seconde étape que l'on interprète les signes et l'on est alors en droit de dire que l'on a formalisé la logique des propositions, ou autre chose. Cela dépend de l'interprétation.

La première chose à faire est de se donner un *alphabet*. Le nôtre contiendra trois catégories de signes :

1) Les lettres p_1, p_2, ... p_n, ... Nous les appellerons des *variables de propositions*.

Remarque
Cette appellation anticipe sur l'interprétation standard que nous avons en vue. Nous pourrions nous contenter de les appeler des variables, ou même des lettres.

2) Les signes $\sim$ et $\supset$ que nous appellerons des *foncteurs*.

3) Les signes (et) que nous appellerons, comme tout le monde, des *parenthèses*.

Nous allons définir maintenant une classe qu'on nomme celle des *expressions bien formées ou* ebf.

1) Une variable est une ebf.
2) Si P est une ebf, $\sim P$ est une ebf.
3) Si P et Q sont des ebf, $(P \supset Q)$ est une ebf.
4) Rien n'est une ebf, sinon par (1) à (3).

Une définition du genre ci-dessus est une *définition inductive*. Elle comporte trois sortes de clauses :
une ou plusieurs clause(s) initiale(s), ici (1) ;
une ou plusieurs clause(s) inductive(s), ici (2) et (3) ;
une clause terminale, ici (4).

Une telle définition permet d'engendrer de proche en proche autant d'éléments que l'on veut de la classe qu'elle définit. Pour éviter l'usage des indices nous poserons $p = \text{df}\, p_1$, $q = \text{df}\, p_2$ et $m = \text{df}\, p_3$.

Exemples
p, q, $\sim p$, $(\sim p \supset q)$, $(q \supset (\sim p \supset q))$, $(p \supset (q \supset p))$ sont des ebf.

La clause finale a l'air pédant. En fait, elle est d'une importance essentielle. Considérons en effet, la suite de signes $\sim (\supset p\, q)$. Elle est exclusivement constituée de signes de notre alphabet. On ne peut toutefois pas l'obtenir en appliquant les clauses (1) à (3). C'est la clause terminale (4) qui nous assure que, en conséquence, il ne s'agit pas d'une ebf.

Remarque
Ceci est général. Quelle que soit la suite donnée de signes de l'alphabet, nous sommes à même de décider, en un nombre fini d'essais, si cette suite est une ebf ou non. On dit que la classe des ebf est une *classe décidable*.

L'écriture des ebf devient rapidement encombrante. Aussi allons-nous convenir de certaines abréviations. Soit l'ebf suivante:

$\sim (\sim \sim ((\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)) \supset \sim ((\sim q \supset p) \supset (\sim p \supset q)))$

Posons: $P \vee Q = \text{df} \sim P \supset Q$.

Il vient:

$\sim (\sim \sim ((p \vee q) \supset (q \vee p)) \supset \sim ((q \vee p) \supset (p \vee q)))$

Posons: $P \wedge Q = \text{df} \sim (\sim P \vee \sim Q)$ donc $\sim (\sim \sim P \supset \sim Q)$.

Il vient:

$((p \vee q) \supset (q \vee p)) \wedge ((q \vee p) \supset (p \vee q))$

Posons: $P \equiv Q = \text{df}\,(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$.

Il vient:

$((p \vee q) \equiv (q \vee p))$

Convenons enfin de ne pas toujours écrire la paire extérieure de parenthèses; l'ebf initiale peut s'écrire:

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$.

Remarque
Ces jeux d'écriture formels ne réclament aucune réflexion, mais ils exigent beaucoup d'attention. Le lecteur aura intérêt à refaire lui-même les diverses transformations, ne serait-ce que pour s'assurer que le texte ne contient pas de coquilles!

Soit P, Q, M des ebf quelconques. Introduisons les trois expressions suivantes, que nous appellerons des *schémas d'axiomes*.

(A1) $P \supset (Q \supset P)$

(A2) $(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset M))$

(A3) $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$

On obtiendra des *axiomes* en spécifiant quelles ebf désignent les lettres P, Q et M. A ce propos il faut noter deux choses:

1) Dans un même schéma, la même majuscule doit désigner la même ebf.
2) Mais dans un même schéma, deux majuscules différentes peuvent désigner la même ebf.

Remarque

Ces deux pratiques sont conformes à l'usage algébrique. Soit ainsi l'expression $x + y + x$. Si l'on attribue une valeur à x, disons 3, il faut écrire $3 + y + 3$. Mais rien n'empêche d'attribuer aussi la valeur 3 à y.

Voici quelques axiomes. Nous indiquons par la notation (**A** n) : P/ebf que dans le schéma (**A** n), la variable P désigne l'ebf qui suit la barre oblique.

$p \supset (q \supset p)$ (**A1**): $P/p,\ Q/q$

$q \supset (q \supset q)$ (**A1**): $P/q,\ Q/q$

$((p \supset q) \supset (m \supset p)) \supset (((p \supset q) \supset m) \supset ((p \supset q) \supset p))$

(**A2**): $P/(p \supset q),\ Q/m,\ M/p$

$(\sim m \supset \sim\sim p) \supset (\sim p \supset m)$ (**A3**): $P/m,\ Q/\sim p$

Il reste enfin à se donner au moins une *règle d'inférence*. Nous poserons:

(**R1**) De P et de $P \supset Q$, il est loisible d'inférer Q.

Ceci dit, la notion de *théorème* se définit comme suit:

1) Un axiome est un théorème.

2) Toute ebf qui résulte de deux théorèmes par l'application de la règle (**R1**) est un théorème.

3) Rien n'est un théorème, sinon par (1) et (2).

Exemples

Chacune des cinq ebf suivantes est un théorème.

1. $p \supset ((q \supset p) \supset p)$ — (**A1**): $P/p,\ Q/(q \supset p)$
2. $p \supset (q \supset p)$ — (**A1**): $P/p,\ Q/q$
3. $(p \supset ((q \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$ — (**A2**): $P/p,\ Q/(q \supset p),\ M/p$
4. $(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$ — 1,3,**R1**
5. $p \supset p$ — 2,4,**R1**

Remarques

1. Si P est un théorème, nous écrirons encore $\vdash P$.

2. La classe des théorèmes est introduite par une définition inductive, comme celle des ebf. Nous verrons (1.7) qu'elle est aussi décidable. Toutefois ceci exige une démonstration.

3. Au lieu de se donner les schémas d'axiomes (**A1** - **A3**), il serait possible de se donner directement des axiomes. Par exemple:

(**a1**) $p \supset (q \supset p)$

(**a2**) $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (q \supset m))$

(**a3**) $(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$.

Mais pour obtenir le même ensemble de théorèmes, il faudrait se donner une règle supplémentaire:

Si P est une ebf qui contient la variable p et si Q est une ebf, on peut inférer l'ebf que l'on obtient en substituant Q à chaque mention de p dans P.

Cette façon de procéder est assez compliquée et elle exige de grandes précautions dans la logique des prédicats. C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas adoptée.

Il est aussi possible de déduire des *règles dérivées*, ce qui est très commode pour la pratique. Convenons que si, à partir des prémisses P_1, P_2, ..., P_n il est possible d'inférer Q, nous écrirons:

$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$.

Nous pourrions ainsi reformuler la règle (**R**1) de la façon suivante:

$P, P \supset Q \vdash Q$.

Voici alors une règle dérivée:

$\sim P \supset \sim Q, Q \vdash P$.

On a en effet:

1. $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$	(A3)
2. $\sim P \supset \sim Q$	Première prémisse
3. $Q \supset P$	1,2,(**R**1)
4. Q	Seconde prémisse
5. P	3,4,(**R**1)

Un tel calcul n'offre d'intérêt réel qu'une fois interprété. Son interprétation standard est évidente:

aux variables P_1, P_2, ..., P_n, on fait correspondre des propositions: aux signes $\sim$ et $\supset$, on fait correspondre respectivement l'opérateur de négation et celui de conditionnel;

les parenthèses jouent le rôle de ponctuation.

Dès lors, si les schémas d'axiomes et la règle d'inférence sont bien choisis, aux théorèmes correspondront des tautologies (V. 1.7).

D'autres interprétations sont toutefois possibles. Nous allons en esquisser une, en interprétant les signes $\wedge$, $\vee$ et $\sim$. Supposons que p, q, m, ... représentent des interrupteurs électriques. Si p est fermé, laisse donc passer le courant, nous écrivons p. Dans ce cas, à $p \wedge q$ correspond un montage en série (Fig. 4) et à $p \vee q$ correspond un montage en parallèle (Fig. 5).

Figure 4

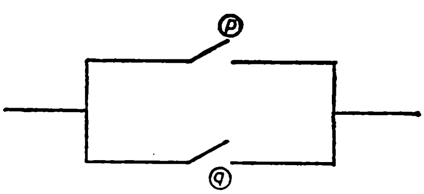


Figure 5

Nous avons noté q et p les interrupteurs et non leur état.

L'ebf suivante est un théorème du calcul:

$\vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge m)) \equiv (p \wedge (q \vee m))$

Cela signifie que le montage de la figure 6 peut être remplacé par le montage de la figure 7.

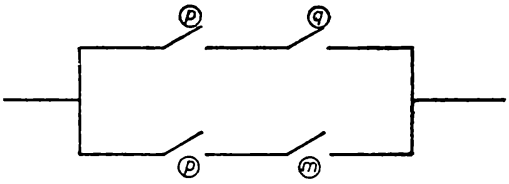


Figure 6

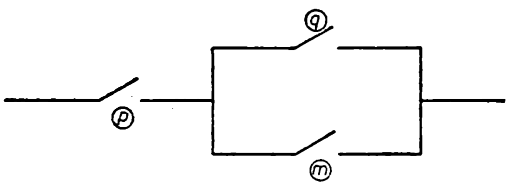


Figure 7

Il est clair que les ordinateurs ne travaillent pas avec des interrupteurs mécaniques. Leurs principes logiques reposent bien toutefois sur une interprétation électrique du système précédent.

Remarque

L'axiomatisation que nous avons proposée est empruntée à ŁUKASIEWICZ. Elle n'est pas la seule possible. Ainsi dans leurs *Principia Mathematica,* WHITEHEAD et RUSSELL sont partis des opérateurs $\sim$ et $\vee$ et NICOD du seul opérateur $|$.

1.7 Quelques propriétés de la logique des propositions

Après qu'on a construit une logique, et plus généralement un système formel quelconque, il convient d'en dégager les principales propriétés. Celles-ci doivent naturellement être démontrées. Elles font alors l'objet de théorèmes qui portent *sur* le système: nous les appellerons des *épithéorèmes.* Démontrer un épithéorème exige de disposer de certains moyens logiques. S'ils se veulent rigoureux, ceux-ci ne sont pas élémentaires et dépassent le cadre de cet ouvrage. Nous allons cependant énoncer un certain nombre d'épithéorèmes relatifs à la logique des propositions et en esquisser des preuves simples.

Remarquons d'abord que nous avons affaire à deux notions de théorèmes. Au fascicule I, nous avons dit qu'un théorème était une expression qui pouvait se déduire, par les règles du système, de la classe d'hypothèses vide. Si P est un théorème en ce sens, nous noterons provisoirement $\vdash_1 P$. Par ailleurs, nous venons de donner une autre définition de la notion de théorème. Si P est un théorème en ce second sens, nous écrirons $\vdash_2 P$. La question qui se pose est de savoir, non pas si les deux notions sont les mêmes (en fait, elles sont formulées différemment), mais si la classe des théorèmes au sens 1 est la même que celle des théorèmes au sens 2. Comme, par définition, deux classes sont égales si elles contiennent les mêmes éléments, il suffit de se demander si, chaque fois que l'on a $\vdash_1 P$ on a aussi $\vdash_2 P$ et réciproquement. La réponse à cette question est affirmative.

Epithéorème 1: $\vdash_1 P$ si et seulement si $\vdash_2 P$.

La preuve doit être double. Il faut montrer:

I. Si $\vdash_1 P$ alors $\vdash_2 P$.

II. Si $\vdash_2 P$ alors $\vdash_1 P$.

Commençons par esquisser la preuve de II. Dire que $\vdash_2 P$, c'est dire que l'on a pu obtenir P à partir d'axiomes en appliquant la règle (**R**1). Or il est facile de montrer que les trois schémas d'axiomes sont des métathéorèmes au sens 1 (V. I, p. 22). Il suffit, par exemple, d'écrire avec des majuscules la déduction de l'exemple 2 de la page 15 (Fascicule I), pour obtenir (A1). D'autre part, la règle (R1) n'est rien d'autre que la règle $\supset$ **e**. Donc, tout ce qui sera théorème au sens 2, le sera au sens 1.

Esquissons maintenant la preuve de I. Nous avons vu qu'il était possible, dans le cadre de l'axiomatique précédente, de déduire des règles à partir des schémas d'axiomes. Il est clair que l'on peut procéder de même à partir de schémas de théorèmes ou métathéorèmes. Supposons, ce qui est le cas mais que nous ne démontrerons pas, que l'on ait:

$\vdash_2 P \supset (Q \supset (P \wedge Q))$.

On aura immédiatement, par une double application de ($\mathbf{R}_1$): $P, Q \vdash_2 P \wedge Q$, ce qui n'est qu'une autre écriture pour la règle $\wedge$ **i**.

En conséquence de ce premier épithéorème, nous écrirons dès maintenant $\vdash P$ pour dire que P est un théorème, aussi bien au sens 1 qu'au sens 2.

Examinons les relations entre la classe des théorèmes et celle des tautologies et, pour cela, notons provisoirement par $\vdash_t P$, le fait que P est une tautologie. Nous avons tout d'abord:

Epithéorème 2: Si $\vdash P$, alors $\vdash_t P$.

Dire que $\vdash P$, c'est dire que P a son origine dans un ou plusieurs axiomes. Mais, il est aisé de s'assurer que tous les axiomes du système sont des tautologies. En effet, quelles que soient les propositions P, Q et M, elles seront dans notre interprétation, vraies ou fausses. On aura donc pour (A1) par exemple:

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$Q \supset P$	1	1	0	1
$P \supset (Q \supset P)$	1	1	1	1

De plus, si $\vdash P$, il est engendré à partir d'axiomes qui sont des tautologies, par la seule règle (R1). Or celle-ci conserve, si l'on peut dire, la vérité. En effet, ses deux prémisses P et $P \supset Q$ sont des tautologies. Considérons alors la table de $\supset$:

P	$\supset$	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Sa deuxième ligne est exclue par la condition *val* $(P \supset Q) = 1$. Ses lignes 3 et 4 sont exclues par la condition *val* $(P) = 1$. Il ne reste donc que la première ligne et l'on voit que *val* $(Q) = 1$.

L'épithéorème 2 a deux corollaires importants.

Définition. Un système formel, dont un signe, disons $\sim$, est interprété comme la négation est *non contradictoire*, s'il est impossible d'y démontrer à la fois P et $\sim P$.

Corollaire 1. La logique des propositions est non contradictoire.

Supposons, en effet, que $\vdash P$. Alors, par l'épithéorème 2, on $\vdash_t P$. Il s'ensuit que $\sim P$ n'a que que des 0 dans son évaluation et que $\sim \vdash_t \sim P$, c'est-à-dire que $\sim P$ n'est pas une tautologie. Par contraposition, l'épithéorème 2, montre que $\sim\vdash \sim P$, donc que $\sim P$ n'est pas un théorème.

Remarque

La *contraposée* d'un théorème de la forme « si P alors Q » est l'expression « si $\sim Q$ alors $\sim P$ ». Les deux formes sont logiquement équivalentes.

La définition de la non-contradiction exige que le système soit interprété. Qu'en est-il des systèmes purement formels? Pour faire face à ce problème, on pose:

Définition. Un système est *consistant*, s'il possède au moins une ebf qui n'est pas un théorème.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est consistant.

En effet, nous avons vu que $\vdash p \supset p$. Par l'épithéorème 2, on $\vdash_t p \supset d$. En conséquence $\sim \vdash_t \sim (p \supset p)$ et par la contraposée de l'épithéorème, $\sim (p \supset p)$ est un exemple d'ebf qui n'est pas un théorème.

Remarque
On peut prouver que si un système est non contradictoire, il est toujours consistant, mais que la réciproque n'est pas vraie. La condition de non-contradiction est donc « plus forte » que celle de consistance.

Epithéorème 3: Si $\vdash_t P$ alors $\vdash P$.

La marche de la preuve, qui est assez longue, est la suivante:

1) Démontrer que si P^* est la FNC de P, on a le métathéorème $\vdash P \equiv P^*$.

2) Si $\vdash_t P^*$ alors chacune de ses disjonctions est aussi une tautologie. Si l'une d'elles ne l'était pas, il se pourrait en effet que la conjonction ne soit pas toujours vraie.

3) Démontrer $\vdash p \vee \sim p$. Comme on a la règle dérivée $P \vdash P \vee Q$, toute disjonction élémentaire sera un théorème. Mais comme on a aussi la règle dérivée $P, Q \vdash P \wedge Q$, toute FNC tautologique sera un théorème. Donc $\vdash P^*$.

4) Démontrer que $P \equiv P^* \vdash P^* \supset P$. Alors, par les points (1), (3) et (R1), il vient $\vdash P$.

Cet épithéorème a aussi deux corollaires importants.

Définition. Un système interprété est *complet au sens faible,* si l'on peut y démontrer toutes les ebf qui correspondent à des vérités dans l'interprétation choisie.

Corollaire 1. Si l'on considère que toute tautologie est une vérité logique, le calcul des propositions est complet au sens faible.

L'épithéorème 3 dit, en effet, que toute tautologie est un théorème.

Mais il est de nouveau possible d'introduire une notion de complétude qui n'exige pas d'interpréter le système.

Définition. Un système est *complet au sens fort,* si l'adjonction à ses schémas d'axiomes d'un schéma d'ebf qui n'y est pas démontrable, le rend inconsistant.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est complet au sens fort.

Soit en effet, un schéma d'ebf P qui n'est pas démontrable. Posons (A4) P. Soit de nouveau P^* la FNC de P. Nous aurons $\vdash P \equiv P^*$ et par (A4) et (**R**1), il viendra $\vdash P^*$ et par l'épithéorème 3, P^* est une tautologie. Par ailleuis, puisque par hypothèse $\sim \vdash P$, P^* doit contenir au moins une disjonction qui ne contient pas un atome et sa négation, disons qui ne contient pas p et $\sim p$. Soit $D = \text{df}\, Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ cette disjonction.

Comme on a la règle dérivée $P \wedge Q \vdash Q$ on aura en particulier $P^* \vdash D$ (P^* est une conjonction qui, entre autres facteurs, contient D). Et comme on a P^*, par ($\mathbf{R}_1$) on a $\vdash D$, soit $\vdash Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$. Les Q_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) sont soit des atomes, soit la négation d'un atome.

Si Q_i est un atome qui n'est pas précédé d'une négation, substituons-lui p. Si Q_i est un atome précédé d'une négation, substituons-lui $\sim p$. En éliminant les doubles négations, on aura $\vdash p \vee \ldots \vee p$ et donc $\vdash p$.

Un raisonnement analogue montre qu'on peut aussi obtenir $\vdash \sim p$. En conséquence le système est contradictoire. Mais il est aussi inconsistant, par la règle: $P, \sim P \vdash Q$.

Remarque
La terminologie utilisée laisse entendre, ce qu'on peut démontrer, qu'un système peut être complet au sens faible sans l'être au sens fort (V. 2.4).

Si l'on réunit les épithéorèmes 2 et 3, on est conduit à:

Epithéorème 4: $\vdash P$ si et seulement si $\vdash_t P$.

Il en découle aussi un corollaire intéressant.

Définition. Un système est *décidable* si, étant donné une de ses ebf quelconque, il existe un algorithme qui permet de décider si cette ebf est un théorème du système ou non.

Corollaire. Le système de la logique des propositions est décidable.

L'algorithme est le suivant. Soit P l'ebf donnée, on calcule son évaluation. Si elle ne contient que des 1, alors $\vdash_t P$ et $\vdash P$. Sinon $\sim \vdash_t P$ et $\sim \vdash P$.

Remarques
1. Nous avons donné trois présentations de la logique des propositions: par les règles de déduction, par les tables de vérité et par une axiomatisation. Les tables de vérité fournissent les manipulations les plus aisées. Malheureusement, elles ne peuvent s'étendre à la logique des prédicats. C'est la présentation axiomatique qui conduit aux manipulations les plus difficiles. Il y faut souvent beaucoup de pratique et d'imagination. C'est toutefois elle

qui se prête le mieux à la réflexion sur la logique. Enfin la méthode de la déduction naturelle est celle qui est généralisable et qui semble la plus commode à utiliser.

2. Les raisonnements de ce paragraphe manquent de rigueur. Il ne faut les tenir que pour des indications, propres tout au plus à faire pressentir le genre de démarches auxquelles conduit ce qu'on appelle la métalogique (V. la bibliographie).

DEUXIÈME PARTIE

LA LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

2.1 Le cadre de la logique des prédicats

Comme nous l'avons vu (Fascicule I, 2.1), la logique des prédicats contient celle des propositions inanalysées, mais elle la déborde en ceci qu'elle peut décomposer les propositions en sujets et prédicats. Pour ce faire elle introduit essentiellement deux nouvelles espèces de variables: les variables d'objets et les variables de prédicats.

Commençons par nous interroger plus avant sur les *variables d'objets* dites aussi *variables d'individus*: x, y, z, etc. Dans une proposition comme « Pierre aide Jean » ne figure aucune variable, mais le nom de deux objets, qui sont ici des individus: « Pierre » et « Jean ». On peut se demander si une langue comme le français est capable d'exprimer la notion de variable d'objet. Peut-être est-ce le cas dans des phrases comme « Quelqu'un aide Jean ». « Quelqu'un » semble bien renvoyer à une classe d'individus, un peu comme x y renvoie dans « x aide Jean ». Quoi qu'il en soit, nous n'allons pas nous donner, pour le moment, les instruments formels qui permettraient de nommer des objets particuliers (V. 2.7). Tout au plus allons-nous, en guise d'exemples et seulement pour concrétiser nos explications, introduire passagèrement des noms d'objets x_1, x_2, etc.

En revanche, il n'y aurait aucun sens à parler de variables, si l'on ne précisait pas sur quel ensemble elles prennent leurs valeurs. Cela signifie que nous introduirons toujours des ensembles d'objets Ω, que nous appellerons aussi simplement des *domaines*. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de spécifier quels sont les éléments de ces domaines. Il suffit de savoir que x, y, z, etc. prennent leurs valeurs sur eux et nous verrons plus loin que le seul aspect important d'un domaine est le nombre de ses éléments s'il est fini et, en général, son cardinal que nous noterons $|\Omega|$.

Passons maintenant aux *variables de prédicats*. Rappelons que, pour des raisons de commodité, nous utiliserons les lettres a, b, c pour désigner les prédicats à une place, c'est-à-dire les *propriétés* et les lettres r, s, t pour désigner les prédicats à plus d'une place, c'est-à-dire les *relations*. Nous avions encore convenu d'un ordre d'écriture: « x est rouge » s'écrit « rouge x » et « x aide y » s'écrit « aide x y ».

Ce qu'il faut bien noter c'est qu'un prédicat a nécessairement un nombre de places déterminé. Ainsi « rouge » a une place et « aider » en a deux. Une variable de prédicat prend une constante de prédicat comme valeur. Aussi pourrait-on écrire par exemple: a①, b①, r①②, s①②③ pour préciser que les variables a et b vont prendre comme valeurs des propriétés et que les variables r et s vont prendre comme valeurs des relations, la première binaires et la seconde ternaires. Cette façon de procéder est toutefois un peu encombrante et nous préférons écrire ax, bx, rxy et $sxyz$, expressions que nous avons appelées des *fonctions propositionnelles*. Nous avions dit, que si les variables d'objets d'une fonction propositionnelle prenaient des valeurs déterminées, on obtenait alors des propositions. Ainsi si r signifie aider, si x prend la valeur « Pierre » et y la valeur « Jean », la fonction propositionnelle rxy devient la proposition (vraie ou fausse) « Pierre aide Jean ».

Remarque

La même proposition peut résulter de fonctions propositionnelles différentes. La proposition ci-dessus peut résulter de « x aide y », de « x aide Jean » et de « Pierre aide y », Il est vrai que, si au niveau de la langue il n'y a pas trop de difficultés à concevoir que « aide Jean » est un prédicat, il est moins clair que « Pierre aide » en soit un. Ceci n'a toutefois aucune conséquence sur l'analyse qui précède: elle est de nature logique et non pas linguistique.

Peut-être a-t-on remarqué que nous ne nous sommes pas exprimés de la même façon à propos des variables de prédicats et des variables d'objets. Ainsi avons-nous dit, dans l'exemple ci-dessus, que r signifiait « aider » et que x et y *prenaient* certaines valeurs. La distinction repose sur ceci que nous nous sommes donné un ensemble Ω dont les éléments sont les valeurs des variables x, y, ..., tandis que nous ne nous sommes pas donné un ensemble correspondant pour les variables a, b, ..., r, s, ...

Dans le Fascicule I, nous nous étions contenté de supposer que l'on disposait aussi d'un ensemble de prédicats. Nous allons maintenant préciser la chose et montrer qu'il est toujours possible de construire cet ensemble à l'aide de Ω seulement. Pour traiter la question, donnons-nous un domaine particulier $\Omega = \text{df } \{x_1, x_2\}$. Supposons encore, pour être plus concret, que x_1 soit un nom pour KANT et x_2 pour DESCARTES. Soit alors les quatre constantes de prédicats suivantes:

$a_1\, x$ = df x est un philosophe
$a_2\, x$ = df x est Allemand
$a_3\, x$ = df x est Français
$a_4\, x$ = df x est un plaisantin.
Nous obtenons sans difficulté la table suivante:

x	$a_1 x$	$a_2 x$	$a_3 x$	$a_4 x$
x_1	1	1	0	0
x_2	1	0	1	0

Chaque expression de la forme $a_i x_j$ ($i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2$) est en effet une proposition dont un minimum de lectures permet de déterminer la valeur.

Deux faits fondamentaux doivent être signalés.

1) Tous les prédicats que l'on peut imaginer, à condition qu'il y ait un sens à les appliquer à x_1 et à x_2, rentrent nécessairement dans l'une de ces quatre catégories. Quant à la restriction sur le sens qu'il y a ou non à appliquer n'importe quel prédicat à n'importe quel objet, c'est un problème que nous n'avons pas plus à traiter que celui de savoir si une proposition donnée est « réellement » vraie ou si elle est fausse. En fait, nous construisons un certain modèle qui a ses lois propres. Une fois encore nous nous plaçons au point de vue de l'extension et c'est une question extralogique que d'estimer la valeur épistémologique de nos modèles.

Nous poserons donc que la donnée de Ω détermine entièrement les valeurs que peuvent prendre les variables de prédicats à une place. En fait celles-ci ne sont rien d'autre que toutes les applications $f: \Omega \to V$. Et si $|\Omega| = n$, alors une variable du type a ① peut prendre 2^n valeurs différentes.

2) On voit aussi que, comme nous l'avons annoncé, la nature des éléments de Ω n'importe pas. Nous aurions obtenu les mêmes résultats en partant de Ω = df $\{y_1, y_2\}$. Seul joue un rôle le nombre des éléments de Ω, son cardinal.

Il est facile d'étendre le raisonnement précédent aux variables de prédicats à plus d'une place. Ainsi pour rxy, par exemple, et avec $\Omega = \{x_1, x_2\}$, on aura:

$x\ y$	r_1xy	r_2xy	r_3xy	r_4xy	r_5xy	r_6xy	r_7xy	r_8xy	r_9xy...	...$r_{15}xy$	$r_{16}xy$
$x_1\ x_1$	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
$x_1\ x_2$	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
$x_2\ x_1$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
$x_2\ x_2$	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0

Les valeurs des variables du type $r①②$ correspondent donc à l'ensemble des applications $f: \Omega \times \Omega \to V$. Si $|\Omega| = n$, l'ensemble produit $\Omega \times \Omega$ a n^2 éléments. Le nombre des valeurs que peut prendre une variable de relations binaires est donc 2^{n^2}.

Enfin, le nombre des valeurs que peut prendre une variable de relations à k éléments sera 2^{n^k}.

Rappelons enfin que, en plus des foncteurs propositionnels, la logique des prédicats contient deux opérateurs qui lui sont propres: le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$.

Remarque
Au lieu de $(\forall x)$, on trouve encore dans la littérature: (x), $\bigwedge x$, Πx. Et, au lieu de $(\exists x)$, on trouve aussi: $(\mathrm{E}\, x)$, $\bigvee x$, Σx.

Lorsque Ω est fini, le quantificateur universel se comporte comme une conjonction de n facteurs et le quantificateur existentiel comme une disjonction entre n termes.

Exemple
Si $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$, alors:
$(\forall x)\, ax \leftrightarrow ax_1 \wedge ax_2 \wedge ax_3$ et
$(\exists x)\, ax \leftrightarrow ax_1 \vee ax_2 \vee ax_3$.

2.2 Notion de validité

Nous savons que la logique des prédicats contient deux types d'expressions:
1) celles qui n'ont aucune variable d'objets libre, que nous appellerons des expressions *fermées* et
2) celles qui ont au moins une variable d'objets libre et que nous pourrions appeler des expressions *ouvertes*.

Les expressions fermées, avons-nous dit, représentent des propositions et, en conséquence, elles sont soit vraies soit fausses. Voyons donc comment les évaluer, dans le cas où le domaine choisi Ω est fini. Nous allons poser $\Omega = \mathrm{df}\, \{x_1, x_2\}$ et traiter quelques exemples.

Exemple 1
$(\forall x)\, ax \supset p$

Cette expression peut d'abord s'écrire: $(ax_1 \wedge ax_2) \supset p$. D'autre part nous savons que p peut prendre les valeurs 1 et 0 et nous avons vu que a

peut prendre les valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4. Nous avons donc à étudier $2 \times 4 = 8$ éventualités.

p	1	1	1	1	0	0	0	0
a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
ax_1	1	1	0	0	1	1	0	0
ax_2	1	0	1	0	1	0	1	0
$ax_1 \wedge ax_2$	1	0	0	0	1	0	0	0
Proposition	1	1	1	1	0	1	1	1

Les lignes ax_1 et ax_2 ont été lues sur la table de la page 41. La dernière ligne de ce tableau montre que la proposition $(\forall x)ax \supset p$ est vraie sur un domaine à deux éléments, sauf si l'on a: $val\ (p) = 0$, et $val\ (a) = a_1$.

Exemple 2
$(\forall x)\ (ax \supset p)$

Cette expression peut s'écrire:
$(ax_1 \supset p) \wedge (ax_2 \supset p)$ et l'on aura:

p	1	1	1	1	0	0	0	0
a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_1	a_2	a_3	a_4
ax_1	1	1	0	0	1	1	0	0
$ax_1 \supset p$	1	1	1	1	0	0	1	1
ax_2	1	0	1	0	1	0	1	0
$ax_2 \supset p$	1	1	1	1	0	1	0	1
Proposition	1	1	1	1	0	0	0	1

Sur un domaine à deux éléments, cette proposition est vraie sauf si $val\ (p) = 0$ en même temps que $val\ (a) = a_1$ ou $val\ (a) = a_2$ ou $val\ (a) = a_3$.

Remarque
La comparaison des exemples 1 et 2 montre qu'il importe de bien marquer le *champ* des quantificateurs, même si certaines des expressions de ce champ ne contiennent pas de variable d'objets, ce qui est le cas de p.

Exemple 3
$(\exists x)\ (\forall y) rxy$

Cette expression est de la forme $(\exists x)\ A(x)$ où $A(x)$ désigne $(\forall y) rxy$. On pourra donc écrire déjà:

$A(x_1) \vee A(x_2)$, soit $(\forall y) rx_1y \vee (\forall y) rx_2y$. Ensuite, puisque y est aussi une variable sur Ω, on aura:

$(\forall y) rx_1y \leftrightarrow rx_1x_1 \wedge rx_1x_2$ et $(\forall y) rx_2y \leftrightarrow rx_2x_1 \wedge rx_2x_2$.
L'expression donnée devient donc finalement:

$(rx_1x_1 \wedge rx_1x_2) \vee (rx_2x_1 \wedge rx_2x_2)$.
Comme nous savons que la variable r peut prendre 16 valeurs et que pour chacune d'elles nous connaissons la valeur de la proposition rx_iy_j (V. p. 41,) il est facile d'évaluer la proposition donnée $(\exists x)\ (\forall y) rxy$. Contentons-nous de deux exemples:
$val\,(r) = r_1$, alors $val\,(rx_1x_1) = val\,(rx_1x_2) =$
$val\,(rx_2x_1) = val\,(rx_2x_2) = 1$ et la proposition est vraie.
$val\,(r) = r_8$, alors $val\,(rx_1x_1) = val\,(rx_2x_2) = 0$
$val\,(rx_1x_2) = val\,(rx_2x_1) = 1$. On a donc:
$val\,(rx_1x_1 \wedge rx_1x_2) = val\,(rx_2\,x_1 \wedge rx_2x_2) = 0$
et la disjonction, qui est équivalente à la proposition donnée est fausse.

Passons maintenant aux expressions ouvertes qui sont des fonctions propositionnelles et ne sont donc ni vraies ni fausses. Notons cependant qu'elles deviennent des propositions si leurs variables libres prennent des valeurs dans Ω, ce qui permet de raisonner comme suit.

Exemple 4
$ax \supset p$

Nous savons déjà que p peut prendre les deux valeurs 1 et 0 et a les quatre valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4. Quant à x, c'est une variable sur Ω et elle peut prendre en conséquence les deux valeurs x_1 et x_2. Nous aurons donc finalement à considérer $2 \times 4 \times 2 = 16$ éventualités.

p	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4
x	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
ax	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
$ax \supset p$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1

Rien n'empêche évidemment que, sur un domaine donné, une expression ait toujours la valeur 1.

Exemple 5
$(\forall x)ax \supset ay$

Ici a peut prendre les quatre valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4 et y les deux valeurs x_1 et x_2.

Comme l'expression peut s'écrire $(ax_1 \wedge ax_2) \supset ay$, on aura:

a	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4
y	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
ax_1	1	1	1	1	0	0	0	0
ax_2	1	1	0	0	1	1	0	0
$ax_1 \wedge ax_2$	1	1	0	0	0	0	0	0
ay	1	1	1	0	0	1	0	0
Expression	1	1	1	1	1	1	1	1

On dit qu'une telle expression est *valide dans* Ω.

Remarque
On peut toujours écrire la *fermeture universelle* d'une expression ouverte, c'est-à-dire la faire précéder de quantificateurs universels au nom des variables libres qu'elle contient. Comme nous le savons (I, p. 71) l'ordre dans lequel procéder est indifférent. Le fait à signaler est alors le suivant: Si une expression ouverte est valide dans Ω, sa fermeture universelle l'est aussi et réciproquement.

Nous voulons toutefois construire une logique qui ne conduise pas à spécifier les domaines choisis, de telle sorte que ses lois soient valables en toutes circonstances. Nous poserons pour cela:

Définition. Une expression de la logique des prédicats est *valide* si son évaluation ne contient que des 1 *pour tout domaine* Ω *non vide.*

Il est malheureusement bien clair qu'une telle définition reste « théorique », en ce sens que parmi tous les domaines, il peut s'en trouver qui ne sont pas finis. Il est donc pratiquement impossible de s'assurer par le calcul de tables de la validité d'une expression. Toutefois, cette définition peut au moins servir parfois négativement.

Exemple

L'expression $(\exists x)ax \supset (\ \ x)ax$ n'est pas valide.

Il suffit en effet de trouver un domaine dans lequel elle ne soit pas valide et, pour cela, une attribution de valeurs aux variables qui rend l'expression fausse. Essayons $\Omega = \text{df}\ \{x_1, x_2\}$.
L'expression devient:
$(ax_1 \vee ax_2) \supset (ax_1 \wedge ax_2)$.
Si l'on choisit $val\ (a) = a_2$, on aura:
$val\ (ax_1) = 1$ et $val\ (ax_2) = 0$. Donc:
$val\ (ax_1 \vee ax_2) = 1$, $val\ (ax_1 \wedge ax_2) = 0$ et la conditionnelle est fausse.

Remarque

Une expression qui n'est pas valide (dans tout domaine) peut parfaitement être valide dans certains domaines particuliers. Ainsi l'expression ci-dessus est valide dans $\Omega = \text{df}\ \{x_1\}$.

La variable a peut en effet prendre les deux valeurs a_1 et a_2:

x	a_1x	a_2x
x_1	1	0

Quant à l'expression $(\exists x)ax \supset (\forall x)ax$, elle peut s'écrire: $ax_1 \supset ax_1$ et elle est vraie aussi bien si $val\ (a) = a_1$ que si $val\ (a) = a_2$.

Si les tables qui permettraient de s'assurer de la validité d'une expression sont incalculables, il est parfois possible de recourir au raisonnement pour s'assurer de la validité (générale) d'une expression.

Exemple 1

Nous allons montrer que $(\forall x)ax \supset ay$ est valide, non seulement sur un domaine à deux éléments, mais sur tout domaine.

Soit Ω un domaine non vide *quelconque* et soit a_i une *quelconque* des valeurs que peut prendre a. L'expression $(\forall x)a_ix \supset a_iy$ est une proposition conditionnelle.

1^{er} *cas*: $(\forall x)a_ix$ est une proposition vraie. Cela signifie que tous les éléments de Ω ont la propriété a_i. Il s'ensuit que, quelle que soit la valeur que prendra y, a_iy sera vraie. La conditionnelle sera aussi vraie.

2^e *cas*: $(\forall x)a_i x$ est une proposition fausse. On sait alors que la conditionnelle est vraie, indépendamment de la valeur de son conséquent.

Exemple 2

Montrons que $(\forall x)(p \supset ax) \supset (p \supset (\forall x)ax))$. Nous allons raisonner de nouveau sur un domaine non vide quelconque et avec une des valeurs quelconques a_i.

1^{er} *cas*: $(\forall x)(p \supset a_i x)$ est vraie.

1^{er} sous-cas: p est vraie. Comme $p \supset a_i x$ doit être vraie, cela signifie que $a_i x$ est vraie quelle que soit la valeur que prend x. En d'autres termes $(\forall x)ax$ est vraie. Alors $p \supset (\forall x)ax$ est vraie et la proposition donnée l'est aussi.

2^e sous-cas: p est fausse. Dans ces conditions, $p \supset (\forall x)ax$ est vraie, indépendamment de la valeur de $(\forall x)ax$ et la proposition donnée est encore vraie.

2^e *cas*: $(\forall x)(p \supset a_i x)$ est fausse.

La proposition donnée a son antécédent faux et elle est donc vraie indépendamment de la valeur de son conséquent.

Il est même possible de raisonner sur des schémas d'expressions. Montrons, par exemple, que si A est un schéma valide, alors $(\forall X)A$ est aussi un schéma valide.

1^{er} cas: A ne contient pas X libre.

$(\forall X)$ n'a alors aucun effet sur A et le théorème est trivial.

Exemple

$A = \mathrm{df}\, p \supset p$ et $X = \mathrm{df}\, x$

$(\forall X)A = \mathrm{df}\, (\forall x)(p \supset p)$

2^e cas: A contient X libre.

Dire que A est valide, c'est dire que pour tout choix de Ω, pour tout choix des valeurs de ses variables de prédicats, pour tout choix de ses variables d'objets et pour tout choix de ses variables de propositions (1 ou 0), A est vraie. En particulier donc, A est vraie quel que soit l'élément de Ω attribué à la variable X. On a donc bien que $(\forall X)A$ est valide.

2.3 Une axiomatisation de la logique des prédicats

Nous avons insisté plus haut sur le fait qu'un système formel était indépendant de ses interprétations. Il est toutefois évident que, si l'on posait arbitrairement n'importe quels ensembles de signes et de règles, on n'aurait que bien peu de chances de pouvoir ensuite interpréter le système de façon intéressante. En d'autres termes, il convient d'user de la liberté dont on dispose en la matière pour ne choisir que ce qui pourra être utile au propos envisagé. En particulier ici, il faudra tenir compte de ce que la logique des prédicats doit contenir celle des propositions.

Cela conduit à se donner l'*alphabet* suivant:

1) Les lettres p_1, p_2, ..., p_n, ..., que nous appellerons des *variables de propositions.*
2) Les lettres x_1, x_2, ..., x_n, ..., que nous appellerons des *variables d'objets.*
3) Les lettres a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1, ...; a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2, ...; a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k; ... Nous appellerons *variables de prédicats* à k places les lettres a_i^k.
4) Les signes $\sim$ et $\supset$, que nous appellerons des *foncteurs.*
5) Le signe $\forall$ que nous appellerons le *quantificateur universel.*
6) Les signes (et) ou *parenthèses.*

Les *expressions bien formées* ou ebf sont alors données par la définition inductive suivante:

1) Une variable de propositions est une ebf.
2) Si A est une variable de prédicats à k places et si X_1, X_2, ... X_k sont k variables d'objets, $AX_1X_2 \dots X_k$ est une ebf.
3) - 4) Si A et B sont des ebf, alors $\sim A$ et $(A \supset B)$ sont des ebf.
5) Si A est une ebf, et si X est une variable d'objet, alors $(\forall X)A$ est une ebf.
6) Rien n'est une ebf, sinon par (1) - (5).

Voici quelques exemples d'ebf, dans lesquelles pour éviter les indices, nous avons posé :

$p = \text{df } p_1$, $x = \text{df } x_1$, $y = \text{df } x_2$, $z = \text{df } x_3$, $a = \text{df } a_1^1$
$b = \text{df } a_2^1$, $r = \text{df } a_1^2$, $s = \text{df } a_2^2$, et $t = \text{df } a_1^3$.
p, $(\forall y)p$, ax, bx, $\sim bx$, $(p \supset \sim bx)$, $(\forall x)(p \supset \sim bx)$,
rxy, $(ax \supset rxy)$, $(\forall x)(ax \supset rxy)$, $txyz$,
$(\forall z)txyz$, $(\forall y)(\forall z)txyz$, $\sim (\forall y)(\forall z)txyz$,
$(\forall x) \sim (\forall y)(\forall z)txyz$, $\sim (\forall x) \sim bx$, etc.

Remarques

1. La signification de A n'est pas la même dans la clause (2) et dans les clauses (3) et (4). Cela est sans inconvénients, puisqu'elle y est chaque fois explicitée.

2. Les lettres x_2 et a_2^k ne représentent plus ici des constantes mais des variables. Ceci est aussi sans inconvénient. Nous avions bien spécifié, en effet, que notre système ne contiendrait pas de constantes (V. cependant 2.5) et que celles-ci ne nous serviraient qu'à concrétiser nos explications.

3. On notera que l'ebf $(\forall y)p$ s'interprétera comme p (V. p. 47). On n'aura donc guère l'occasion de faire usage de telles expressions. Toutefois, la définition des ebf se compliquerait abusivement, si l'on voulait éviter de les obtenir.

4. La classe des ebf est encore une *classe décidable.*

Nous poserons les mêmes définitions que dans l'axiomatisation de la logique des propositions, mais ici A et B désigneront des ebf quelconques de la logique des prédicats.

$A \vee B = \text{df} \sim A \supset B$

$A \wedge B = \text{df} \sim (\sim A \vee \sim B)$

$A \equiv B = \text{df} \quad (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

De plus:

$(\exists X)A = \text{df} \sim (\forall X) \sim A.$

Enfin nous conviendrons encore de supprimer éventuellement la paire extérieure de parenthèses.

Schémas d'axiomes

Si A, B et C sont des ebf, les cinq expressions suivantes sont des schémas d'axiomes:

(A1) $A \supset (B \supset A)$

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(A3) $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

(A4) Si dans A, X n'est pas dans le champ d'un quantificateur $(\forall Y)$:
$(\forall X)A(X) \supset A(Y)$

(A5) Si A ne contient pas X libre:
$(\forall X)(A \supset B) \supset (A \supset (\forall X)B)$

On constate que (A1) à (A3) correspondent aux schémas de la logique des propositions, à ceci près que la classe des ebf est ici élargie. (A4) comporte une notation que nous avons introduite au Fascicule I (p. 49 et 51): l'écriture $A(X)$ signifie que l'ebf A contient la variable X libre et $A(Y)$ représente l'expression A, à ceci près qu'on a substitué partout Y à X.

On obtiendra de nouveau des *axiomes* en spécifiant quelles ebf désignent les majuscules A, B, C et quelles variables désignent les majuscules X et Y.

Exemples

Les expressions suivantes sont des axiomes:

1) $p \supset (q \supset p)$	(A1): A/p, B/q
2) $(\forall x)ax \supset ay$	(A4): X/x, Y/y, $A(X)/ax$
3) $(\forall x)(p \supset ax) \supset (p \supset (\forall x)ax)$	(A5): X/x, A/p, B/ax

On voit que l'axiome 1) est une tautologie et que les axiomes 2) et 3) sont justement des expressions dont nous avons pu nous assurer qu'elles étaient valides. La notion de validité apparaît ainsi comme une extension de celle de tautologie.

Remarque
La restriction sur X dans le schéma (A5) correspond à la condition que Y soit libre pour X dans la règle $\forall$ **e** et la restriction sur A dans le schéma (A5) correspond aux précautions prises en formulant la règle $\forall$ **i** (V. I. p. 53).

Il reste enfin à poser les *règles d'inférence*. Nous en introduirons deux, dont la première sera l'analogue de celle de la logique des propositions.

(**R**1) De A et de $A \supset B$, il est loisible d'inférer B.

(**R**2) De A, il est loisible d'inférer $(\forall X)A$.

De là la définition inductive de la classe des *théorèmes*.

1) Un axiome est un théorème.
2) Toute ebf qui résulte de deux théorèmes par la règle (**R**1) est un théorème.
3) Toute ebf qui résulte d'un théorème par la règle (**R**2) est un théorème.
4) Rien n'est un théorème, sinon par (1) - (3).

Remarques
1. Si A est un théorème, nous noterons encore $\vdash A$.
2. La classe des théorèmes, bien qu'introduite par une définition inductive, n'est pas décidable (V. 2.4).

Si l'on compare les ebf, les schémas d'axiomes et les règles de la logique des prédicats et des propositions, on voit immédiatement que tout théorème de la logique des propositions est aussi un théorème de la logique des prédicats. Ceci permet d'abréger considérablement les démonstrations, d'autant plus qu'il est facile de s'assurer qu'une expression est un théorème de la logique des propositions en examinant si c'est une tautologie (Epithéorème 4, 1.7).

Exemple 1
$\vdash (\forall x)(ax \vee \sim ax)$

1. $\sim ax \supset \sim ax$	Log. des prop.
2. $ax \vee \sim ax$	1, df $\vee$
3. $(\forall x)(ax \vee \sim ax)$	2, (**R**2)

Remarque
Cet exemple permet de revenir sur un aspect un peu troublant de la règle (**R**2). Elle pose qu'il est possible de passer de A à $(\forall X)A$ et l'on pourrait

avoir l'impression que si A désigne, par exemple, l'expression naïve « le nombre x est pair », la règle permet d'inférer « tous les nombres sont pairs ». Mais ce serait oublier le cadre dans lequel la règle est placée. Elle figure dans la clause (3) de la définition des théorèmes et son usage est en conséquence limité aux seules expressions dont on sait déjà qu'elles sont des théorèmes. Elle revient à dire que la fermeture d'une expression valide est valide (V. p. 45).

Exemple 2
$\vdash ay \supset (\exists x)ax$

1. $(\forall x) \sim ax \supset \sim ay$	(A4): X/x, Y/y, $A(X)/\sim ax$
2. $((\forall x) \sim ax \supset \sim ay) \supset (ay \supset \sim (\forall x) \sim ax)$	Log. des prop.
3. $ay \supset \sim (\forall x) \sim ax$	1, 2, (**R**1)
4. $ay \supset (\exists x)ax$	3, df $\exists$

Les relations d'*implication* ($\rightarrow$) et d'*équivalence* ($\leftrightarrow$) sont toujours définies formellement comme plus haut (V. p. 11). Le signe $\vdash$ a simplement une portée plus large.

Exemple 3
$\vdash (\forall x)ax \supset (\exists x)ax$

On a: $\vdash (\forall x)ax \supset ay$	(A1): X/x, Y/y, $A(X)/ax$
donc $(\forall x)ax \rightarrow ay$.	L'exemple 2 donne $ay \rightarrow (\exists x)ax$

et, par la transitivité de $\rightarrow$, il vient $(\forall x)ax \rightarrow (\exists x)ax$
donc $\vdash (\forall x)ax \supset (\exists x)ax$.

2.4 Quelques propriétés de la logique des prédicats

Nous avons de nouveau affaire à deux notions de théorème, selon qu'on l'entend au sens du premier fascicule $\vdash_1 A$ ou au sens qui précède de $\vdash_2 A$. Ces deux notions toutefois se recouvrent, c'est-à-dire qu'on a:

Epithéorème 1: $\vdash_1 A$ si et seulement si $\vdash_2 A$.

Il est facile de s'assurer que si $\vdash_2 A$, alors $\vdash_1 A$. En effet, tous les schémas d'axiomes sont déductibles par les règles d'introduction et d'élimination. De plus, comme nous l'avons vu, (**R**1) n'est rien d'autre que la règle $\supset$ e. Reste (**R**2), qui s'établit comme suit,

1	X | A	A est censée établie
2	$(\forall X)A$	1-1, $\forall$ **i**.

Quant à la réciproque, elle se prouve en montrant qu'il est possible d'obtenir, dans le système actuel, des règles dérivées qui, à la notation près, correspondent aux règles d'introduction et d'élimination. Montrons-le pour la règle $\forall$ **e**. Il est possible de l'écrire: $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$ à condition que Y soit libre pour X. Mais nous avons ici le schéma (A4) $(\forall X)A(X) \supset A(Y)$. Puisque tout axiome est un théorème, tout schéma d'axiomes sera un schéma de théorèmes. Donc on peut poser: $\vdash (\forall X)A(X) \supset A(Y)$ et, si on introduit la prémisse $(\forall X)A(X)$, on peut écrire $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$. Quant à la restriction « X ne doit pas figurer dans le champ d'un quantificateur $(\forall Y)$ », elle équivaut tout justement à réclamer que Y soit libre pour X.

Remarque

Le passage de $\vdash (\forall X)A(X) \supset A(Y)$ à $(\forall X)A(X) \vdash A(Y)$, intuitivement acceptable, fait en toute rigueur l'objet d'un épithéorème fondamental, connu sous le nom de « théorème de la déduction ». Nous renonçons à en esquisser la preuve.

Pour étudier la consistance et la non-contradiction du système, nous allons recourir à un domaine Ω particulier, celui qui ne contient qu'un élément. Si l'on peut montrer alors que, sur ce domaine, il est exclu que toute ebf soit un théorème, nous aurons aussi montré qu'il est impossible que cette ebf soit un théorème dans *tout* domaine.

Si Ω n'a qu'un seul élément x_1, on peut, sans perte d'information remplacer toutes les expressions de la forme ay et $(\forall x)ax$ par a. En effet ay ne peut, comme $(\forall x)ax$, que donner l'expression ax_1, expression qui, pour les deux valeurs que peut prendre a (V. p. 46) sera soit vraie, soit fausse. Introduisons donc la transformation t suivante:

Si A est une ebf, alors:

Si A ne contient que des variables de propositions, $t(A) = \text{df}\ A$,
sinon $t(A)$ est l'expression obtenue, à partir de A, en supprimant les variables d'objets, les quantificateurs et les parenthèses qui les entourent.

Exemples

$t(ax) = a,\ t(bx) = b,$
$t((\forall x)ax) = a;\ t(\sim (\forall x)ax) = \ \sim a$
$t(ax \supset by) = a \supset b;\ t((\forall x) \sim rxy) = \ \sim r.$

On constate que: $t(\sim A) = \ \sim t(A)$
et que: $t(A \supset B) = t(A) \supset t(B).$

Dans ces conditions, on peut établir l'épithéorème suivant:

Epithéorème 2. Si $\vdash A$ alors $t(A)$ est une tautologie.

Si l'on applique, en effet, la transformation t aux schémas d'axiomes, on obtiendra des schémas de tautologies.

Exemples

1) $t(A \supset (B \supset A)) = t(A) \supset t(B \supset A) = t(A) \supset (t(B) \supset t(A))$.

Mais, par définition de t, $t(A)$ et $t(B)$ conduisent à des expressions vraies ou fausses. Et on aura:

$t(A)$	1	1	0	0
$t(B)$	1	0	1	0
$t(B) \supset t(A)$	1	1	0	1
Expression	1	1	1	1

2) $t((\forall X)A(X) \supset A(Y)) = t((\forall X)A(X)) \supset t(A(Y))$

$= t(A) \supset t(A)$ qui est aussi un schéma de tautologie.

Quant aux règles, appliquées à des tautologies, elles redonnent des tautologies. Nous le savons déjà pour (**R**1). Quant à (**R**2), on a:

Si $t(A)$ est une tautologie, alors $t((\forall X)A)$ est une tautologie, puisque $t((\forall X)A) = t(A)$.

Corollaire 1. La logique des prédicats est consistante. En effet, l'expression $(\forall x) \sim (ax \supset ax)$ n'est pas un théorème. On a: $t((\forall x) \sim (ax \supset ax)) = \sim (a \supset a)$ qui n'est pas une tautologie. Le corollaire est établi par contraposition de l'épithéorème 2.

Corollaire 2. La logique des prédicats est non contradictoire.

Si on a, en effet $\vdash A$, alors $t(A)$ est une tautologie par l'épithéorème et $\sim t(A)$ n'en est pas une. Or $\sim t(A) = t(\sim A)$ et, par la contraposée de l'épithéorème $\sim\vdash \sim A$.

Le problème de la complétude est plus complexe.

Epithéorème 3a. La logique des prédicats n'est pas complète au sens fort.

Il faut montrer qu'il est possible de trouver un schéma d'ebf qui n'est pas un schéma de théorème et qui, ajouté à (**A**1) - (**A**5) ne rend pas le système inconsistant.

$(\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)$ est un tel schéma.

Nous avons vu plus haut que, si l'expression, $(\exists x)ax \supset (\forall x)ax$ était valide dans $\Omega = \text{df } \{x_1\}$, elle ne l'était pas dans $\Omega = \text{df } \{x_1, x_2\}$ (v.p. 46). On peut s'assurer par ailleurs que, dans un domaine à deux éléments, les schémas d'axiomes (A1) - (A5) engendrent des tautologies et que les règles (R1) - (R2) conservent cette propriété. Il s'ensuit que $(\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)$ n'est pas démontrable dans $\Omega = \{x_1, x_2\}$. Si maintenant on ajoute ce schéma à (A1) - (A5), on ne rendra pas le système inconsistant, puisque $t((\exists X)A(X) \supset (\forall X)A(X)) = A \supset A$ et que nous avons ici une tautologie.

Remarque
Ce genre de raisonnement peut, à première vue, donner l'impression d'être vicieux. En fait, il repose sur ce que Ω est toujours indéterminé et que, ajouter ce nouveau schéma d'axiomes, revient finalement à choisir un domaine à un seul individu. Une telle logique des prédicats n'aurait plus aucun intérêt: elle se confondrait avec celle des propositions, mais elle serait consistante, ce qui est tout ce qui nous intéresse ici.

Epithéorème 3b. La logique des prédicats est complète au sens faible.

Il s'agit de montrer que si A est valide, alors $\vdash A$. La preuve dépasse le cadre de cet ouvrage. Sa démarche cependant est la suivante:

1. On introduit, pour les expressions de la logique des prédicats, une forme normale dite de SKOLEM (FNS).
2. On montre que, quelle que soit l'ebf A, il existe une FNS, disons A^* et telle que $\vdash A$ si et seulement si $\vdash A^*$.
3. On prouve ensuite que si A^* est valide, alors on sait démontrer A^*, donc que $\vdash A^*$.
4. Il découle alors de 2 et 3 que $\vdash A$.

Remarque
Les épithéorèmes 3a et 3b justifient les expressions « complet au sens fort » et « complet au sens faible ».

Le problème de la décidabilité est résolu par l'épithéorème suivant, dont la démonstration requiert des moyens assez complexes.

Epithéorème 4. La logique des prédicats n'est pas décidable.

Cela signifie donc que, si l'on se donne une ebf *quelconque* A, on ne peut pas être certain de trouver un algorithme qui permette de décider si A est ou n'est pas un théorème. Cela ne veut toutefois pas dire qu'il n'existe pas certaines classes d'ebf pour lesquelles il soit possible de décrire un algorithme de décision. La plus intéressante est celle des ebf qui ne contiennent que des variables de propositions et des variables de prédicats à une seule place.

Remarque
Il ne faut pas se faire trop d'illusions sur le caractère pratique de l'algorithme de décision dont il vient d'être question. Entre un nombre fini d'opérations à effectuer et un nombre commode à manipuler — et même manipulable — il y a souvent une différence non négligeable! La preuve de l'existence d'un algorithme a davantage un intérêt théorique qu'utilitaire. Elle montre, en effet, une différence essentielle entre la logique des prédicats à une mention d'objet (la logique des propriétés), et celle des prédicats à plus d'une mention d'objet (la logique des relations).

2.5 La relation d'identité

Comme nous l'avons déjà fait au fascicule I, nous allons introduire la *relation d'identité* $=$. Il faut remarquer que, ce faisant, nous modifions de deux façons la logique des prédicats. D'une part nous l'élargissons en y introduisant de nouvelles ebf et d'autre part nous en changeons le caractère, puisque nous acceptons d'y faire figurer une constante de relation. Nous la définirons comme suit:

$val\,(x = y) = 1$ si $val\,(x) = val\,(y)$
$val\,(x = y) = 0$ sinon.

Ceci permet d'étendre la notion de validité dans un domaine et, par là, celle de validité en général. Montrons, par exemple, que $(x = y \wedge ax) \supset ay$ est valide dans $\Omega = \text{df}\,\{x_1, x_2\}$. On se souvient que la variable de prédicat a peut prendre quatre valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 et que les valeurs des propositions $a_i x$, sont connues (v. p. 41). On aura alors:

a	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3	a_3	a_4	a_4	a_4	a_4
x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2
y	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
$x = y$	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
ax	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$x = y \wedge ax$	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ay	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Expression	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Une fois convenablement élargis l'alphabet et la classe des ebf — ce dans le détail de quoi nous n'entrerons pas — il faut encore poser des schémas d'axiomes nouveaux. Il est évidemment possible d'obtenir des théorèmes qui contiennent l'identité en n'utilisant que les schémas (A1) - (A5).

Exemple

1. $(\forall x)(\forall y)(x = y) \supset (\forall y)(u = y)$
   (A4): X/x, Y/u, $A(X)/(\forall y)(x = y)$
2. $(\forall y)(u = y) \supset (u = v)$ (A4): X/y, Y/v, $A(X)/u = y$
3. $(\forall x)(\forall y)(x = y) \supset (u = v)$ 1,2, transitivité de $\rightarrow$.

Mais un tel théorème ne fait appel à aucune propriété spécifique de $=$ et l'on pourrait sans autre l'établir avec une variable de relations r.

Le rôle pratique de la relation d'identité est de permettre de remplacer y par x et x par y dès que $x = y$. Si nous convenons de nouveau d'écrire $A[Y]$ pour désigner le résultat du remplacement de X par Y dans l'expression $A(X)$ qui contient X (v. I, p. 56), on pourra poser à cet effet le schéma d'axiomes:

(I1) $((X = Y) \wedge A(X)) \supset A[Y]$

Remarque

La différence entre *substituer* et *remplacer* est donc que dans la substitution il faut changer toutes les mentions de la variable (si changement il y a), tandis que dans le remplacement, on peut changer une ou plusieurs mentions, à choix. Ces deux opérations sont néanmoins liées entre elles, comme le fait voir l'exemple suivant:

Soit $A(x) = \text{df } (x = x) \vee (x = z)$. $A(y)$ va représenter la substitution de y à x dans A, donc:

$A(y) = \text{df } (y = y) \vee (y = z)$.

Quant au remplacement, noté donc $A[y]$, ce sera l'une des expressions:

$(y = x) \vee (x = z)$, $(x = y) \vee (x = z)$, $(x = x) \vee (y = z)$,
$(y = y) \vee (x = z)$, $(y = x) \vee (y = z)$, $(x = y) \vee (y = z)$,
$(y = y) \vee (y = z)$.

On constate déjà qu'un remplacement peut être une substitution. Mais il y a davantage: la substitution de x à y dans $A[y]$ redonne toujours $A(x)$.

Comme on veut aussi que la relation d'identité soit une relation d'équivalence, on posera encore:

(I2) $X = X$.

Exemple de théorème $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$

Posons $A(X) = \text{df } x = x$ et décidons que Y désigne y.

(I1) donne: 1. $(x = y \wedge x = x) \supset (y = x)$.
Nous avons remplacé par y la première mention de x seulement dans $A(X) = \mathrm{df}\ x = x$.

La logique des propositions permet de passer de 1 à:
2. $(x = x) \supset (x = y \supset y = x)$

(I2) donne:
3. $x = x$
et (R1) appliquée à 3 et 2 donne:
4. $x = y \supset y = x$
Une double application de (R2) conduit à:
5. $(\forall y)(x = y \supset y = x)$ et
6. $(\forall x)(\forall y)(x = y \supset y = x)$.

L'un des intérêts de la relation = est qu'elle permet de formaliser des notions comme *un et un seul*, *au plus un*, *au moins deux*, *au plus deux*, *deux et seulement deux*, etc. En effet, l'interprétation de $(\exists x)ax$ est « il y a au moins un x tel que a ». Dire dès lors qu'il y a un et un seul x tel que a, c'est dire que

1) il existe au moins un x tel que a,
2) quel que soit y, si y a la propriété a alors $y = x$.

D'où en notant $\exists_1$ l'existence d'un unique objet,
$(\exists_1 x)ax = \mathrm{df}\ (\exists x)(ax \wedge (\forall y)(ay \supset y = x))$
Considérons l'expression: $(\forall x)(\forall y)((ax \wedge ay) \supset x = y)$.
Elle est vraie dans deux cas:

1) S'il existe un seul x tel que a.
2) S'il n'existe aucun x qui est a. Dans ce cas, en effet, l'antécédent $ax \wedge ay$ est faux et la conditionnelle est vraie. L'expression signifie donc: « il y a au plus un x tel que a ».

Tout ceci se généralise sans peine. Nous écrirons $x \neq y$ pour $\sim (x = y)$ et $\exists_2$, $\exists_3$, etc. pour « exactement deux », « exactement trois », etc. On a alors:

$$(\exists_2 x)ax = \mathrm{df}(\exists x)(\exists y)(ax \wedge ay \wedge x \neq y \wedge (\forall z)(az \supset (z = x \vee z = y)))$$

$$(\exists_3 x)ax = \mathrm{df}(\exists x)(\exists y)(\exists z)(ax \wedge ay \wedge az \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge (\forall u)(au \supset (u = x \vee u = y \vee u = z)))$$

Un peu de réflexion montre que $(\exists x)(\exists y)(ax \wedge ay \wedge x \neq y)$ signifie « il y a au moins deux objets qui sont a » et que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((ax \wedge ay \wedge az) \supset (x = y \vee x = z \vee y = z))$ signifie « il y a au plus deux objets qui sont a ».

2.6 Aperçu sur les classes et les relations

Sans chercher à axiomatiser la logique des classes et celle des relations, nous allons toutefois examiner un certain nombre des notions que l'on y rencontre.

Partons du domaine $\Omega = \text{df}\ \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et considérons le prédicat $a_1 = \text{df}$ être pair, prédicat que nous écrirons simplement a pour ne pas nous encombrer d'indices. On a:
$val\,(a2) = val\,(a4) = 1$ et $val\,(a1) = val\,(a3) = val\,(a5) = 0$.
Le prédicat effectue donc une partition des éléments de Ω en deux classes:
1) celle des éléments x qui rendent la fonction propositionnelle ax vraie,
2) celle des autres éléments.
Conformément à l'usage mathématique, nous désignons par $\{x\,|ax\}$ la première classe, ce qu'on peut lire « les x, tels que x est pair » et, plus généralement « les x, tels que ax ».

Remarques

1. La variable x qui figure dans l'expression $\{x\,|ax\}$ est une variable liée. Cela signifie que les notations $\{x\,|ax\}$, $\{y\,|ay\}$, $\{z\,|az\}$, etc. désignent la même classe, qui n'est rien d'autre que l'extension du prédicat a.

2. Les accolades et la barre verticale constituent ici un symbole unique et il ne faut donc pas les traiter séparément. Certains auteurs écrivent d'ailleurs $\hat{x}\,ax$ pour $\{x\,|ax\}$.

Soit x_1 un élément de Ω. Il est donc équivalent de dire que x_1 est a et de dire que x_1 est élément de la classe des éléments tels que a. On peut alors écrire:

$ax_1 \leftrightarrow x_1 \in \{y|ay\}$.

D'une façon générale nous poserons:

(c1) $\vdash (\forall\, x)\,(ax \equiv x \in \{y\,|ay\})$

Désignons par α, β, γ, ... les classes ainsi associées à des prédicats à une place. Il est possible de constituer un calcul de ces classes de la façon suivante. Définissons d'abord deux relations entre classes:

inclusion: $\alpha \subseteq \beta = \text{df}\quad (\forall\, x)\,(x \in \alpha \supset x \in \beta)$

égalité: $\alpha = \beta = \text{df}\quad (\forall\, x)\,(x \in \alpha \equiv x \in \beta)$

Remarques

1. Le signe $=$, placé entre deux classes ne doit pas être confondu avec celui que l'on place entre deux variables d'objets ni avec celui utilisé à

propos des applications *val* et des transformations. Tous représentent des relations d'équivalence, mais celles-ci n'en sont pas moins distinctes.

2. A un prédicat donné a correspond une classe et une seule, mais à deux prédicats distincts peut correspondre la même classe (la même extension). Soit par exemple $ax = \text{df } x$ est un triangle équilatéral et $bx = \text{df } x$ est un triangle équiangle. C'est un théorème de géométrie élémentaire que:

$(\forall x)\,(ax = bx)$

Il s'ensuit que si $\alpha = \text{df } \{x \,|\, ax\}$ et $\beta = \text{df } \{x \,|\, bx\}$, on aura:

$(\forall x)\,(x \in \alpha \equiv x \in \beta)$

et, par la définition de l'égalité entre classes: $\alpha = \beta$.

Soit $\alpha = \text{df } \{x \,|\, ax\}$ et $\beta = \text{df } \{x \,|\, bx\}$. Nous pouvons introduire les opérations usuelles de la façon suivante:

union: $\alpha \cup \beta = \text{df } \{x \,|\, ax \vee bx\}$
intersection: $\alpha \cap \beta = \text{df } \{x \,|\, ax \wedge bx\}$
complément relatif: $C_{\beta}\alpha = \text{df } \{x \,|\, bx \wedge \sim ax\}$
complément (absolu): $\bar{\alpha} = \text{df } \{x \,|\, \sim ax\}$

Comme on le voit, (c1) permet de ramener le calcul sur les classes à la logique des prédicats. Montrons-le sur un exemple, en utilisant les règles de déduction du Fascicule I, plus commodes que les schémas d'axiomes.

Exemple

$\vdash (\alpha \cap \beta = \alpha) \equiv (\alpha \subseteq \beta)$

Par définitions de $=$ et de $\subseteq$, il faut prouver:

$\vdash (\forall x)\,(x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha) \equiv (\forall x)\,(x \in \alpha \supset x \in \beta)$

On a d'abord de gauche à droite:

1		$(\forall x)\,(x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	**hyp**
2	x	$x \in \alpha$	**hyp**
3		$(\forall x)\,(x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	1, **reit** (x est liée)
4		$x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha$	3, $\forall$ **e**
5		$x \in \alpha \supset x \in \alpha \cap \beta$	4, rep **df** $\equiv$, $\wedge$ **e**
6		$x \in \alpha \cap \beta$	2, 5, $\supset$ **e**
7		$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	6, **rep** df $\cap$
8		$x \in \beta$	7, $\wedge$ **e**
9		$x \in \alpha \supset x \in \beta$	2 - 8, $\supset$**i**
10		$(\forall x)\,(x \in \alpha \supset x \in \beta)$	2 - 9, $\forall$**i**

On a ensuite de droite à gauche:

1	$(\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$	**hyp**
2	x | $x \in \alpha \cap \beta$	**hyp** ($\equiv$ de gauche à droite)
3	$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	2, **rep df** $\cap$
4	$x \in \alpha$	3, $\wedge$ **e**
5	$x \in \alpha \cap \beta \supset x \in \alpha$	2 - 4, $\supset$**i**
6	$x \in \alpha$	**hyp** ($\equiv$ de droite à gauche)
7	$(\forall x)\ (x \in \alpha \supset x \in \beta)$	1, **reit** (x est liée)
8	$x \in \alpha \supset x \in \beta$	7, $\forall$ **e**
9	$x \in \beta$	6, 8, $\supset$**e**
10	$x \in \alpha \wedge x \in \beta$	6, 9, $\wedge$**i**
11	$x \in \alpha \cap \beta$	10, **rep df** $\cap$
12	$x \in \alpha \supset x \in \alpha \cap \beta$	6 - 11, $\supset$**i**
13	$x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha$	5, 12, $\wedge$**i**, **rep df** $\equiv$
14	$(\forall x)\ (x \in \alpha \cap \beta \equiv x \in \alpha)$	2 - 13, $\forall$**i**

Introduisons les trois classes suivantes:
classe vide: $\Lambda =$ df $\{x \mid x \neq x\}$
classe totale: $\mathrm{V} =$ df $\overline{\Lambda}$
classe singulière: $\{x\} =$ df $\{y \mid y = x\}$

La classe Λ est bien la classe vide, en ce sens que l'on a $\vdash\ \sim (\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$, c'est-à-dire que la classe Λ n'a pas d'élément. Pour le montrer, notons d'abord que l'on peut écrire $\Lambda =$ df $\{y \mid y \neq y\}$ et que, au lieu de $x \in \Lambda$, on aura $x \in \{y \mid y \neq y\}$.
Or, par (**c**1), ceci équivaut à $x \neq x$ (Le prédicat a de (**c**1) est en effet ici « être non identique à »). Dès lors:

1	$(\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$	**hyp** (raisonnement par l'absurde)
2	$(\exists\, x)\ (x \neq x)$	1, **rep df** Λ et (**c**1)
3	x | $x \neq x$	**hyp** (pour la règle $\exists$ e)
4	$x = x$	$=$ **i**
5	$\sim (\exists\, x)\ (x \neq x)$	3, 4, $\sim$ **e**
6	$\sim (\exists\, x)\ (x \neq x)$	2, 3 - 5, $\exists$ **e**
7	$(\exists\, x)\ (x \neq x)$	2, **rep**
8	$\sim (\exists\, x)\ (x \in \Lambda)$	1, 6, 7, $\sim$**i**

Ceci permet d'établir le théorème fondamental que la classe vide est incluse dans toute classe:

$\vdash \Lambda \subseteq \alpha$

Il faut prouver, selon la définition de $\subseteq$ que:

$\vdash (\forall x)\,(x \in \Lambda \supset x \in \alpha)$

On aura:

1	x | | $x \in \Lambda$	**hyp**
2	| | $(\exists x)\,(x \in \Lambda)$	1, $\exists$ **i**
3	| | $\sim (\exists x)\,(x \in \Lambda)$	théorème précédent
4	| | $x \in \alpha$	2, 3, $\sim$**e**
5	| $x \in \Lambda \supset x \in \alpha$	1 - 4, $\supset$**i**
6	$(\forall x)\,(x \in \Lambda \supset x \in \alpha)$	1 - 5, $\forall$ **i**

Quant à la classe singulière, elle permet de bien distinguer les signes $\in$ et $\subseteq$. On a en effet:

$\vdash x \in \alpha \equiv \{x\} \subseteq \alpha,$

soit: si x est élément de α, alors la classe qui ne contient que l'élément x est incluse dans α.

Montrons d'abord que $\vdash x \in \alpha \supset \{x\} \subseteq \alpha$ soit encore que $\vdash x \in \alpha \supset (\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$:

1	$x \in \alpha$	**hyp**
2	z | | $z \in \{x\}$	**hyp**
	| | $z \in \{y \mid y = x\}$	2, **rep df** $\{x\}$
4	| | $z = x$	3, **(c1)**
5	| | $x \in \alpha$	1, **reit** (ne contient pas z libre)
6	| | $z \in \alpha$	4, 5, $=$ **e**
7	| $z \in \{x\} \supset z \in \alpha$	2 - 6, $\supset$**i**
8	$(\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$	2 - 7, $\forall$**i**

Montrons ensuite la réciproque $\vdash \{x\} \subseteq \alpha \supset x \in \alpha$, soit $\vdash (\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$. Pour cela remarquons que **(c1)** peut être utilisé non seulement pour éliminer l'écriture $\{.\ |a.\}$, mais aussi pour l'introduire, puisque c'est une biconditionnelle. On aura en particulier en considérant que a est le prédicat « être identique à x »: $(x = x) \equiv (x \in \{y \mid y = x\})$.

Il vient alors:

1	$(\forall z)\,(z \in \{x\} \supset z \in \alpha)$	**hyp**
2	$x \in \{x\} \supset x \in \alpha$	1, $\forall$ **e** : z/x
3	$x = x$	$=$ **i**
4	$x \in \{y \mid y = x\}$	3, **(c1)**
5	$x \in \{x\}$	4, **rep df** $\{x\}$
6	$x \in \alpha$	2, 5, $\supset$ **e**

Il est tentant de généraliser (**c1**) — ce que nous avons d'ailleurs déjà fait tacitement — en s'autorisant à écrire à la place de la variable de prédicat *a*, une ebf quelconque A, donc en posant:

(C2) $\vdash (\forall X)\,(A(X) \equiv X \in \{Y \mid A(Y)\})$

Une telle libéralité exige toutefois de grandes précautions, comme le fait voir l'exemple suivant.

Posons $A(Y) = \text{df} \sim (y \in y)$ et $\alpha = \text{df}\, \{y \mid \sim (y \in y)\}$

(C2) donnera:

$\vdash (\forall x)\,(\sim (x \in x) \equiv x \in \{y \mid \sim (y \in y)\})$

soit $\vdash (\forall x)\,(\sim (x \in x) \equiv x \in \alpha)$.

Appliquons la règle $\forall$ **e**, en substituant α à la place de x:

On a: $\vdash \sim (\alpha \in \alpha) \equiv \alpha \in \alpha$.

Mais la logique des propositions donne:

$\vdash (\sim P \equiv P) \supset (Q \wedge \sim Q)$

donc: $\vdash (\sim (\alpha \in \alpha) \equiv \alpha \in \alpha) \supset (Q \wedge \sim Q)$

et par (**R1**): $\vdash Q \wedge \sim Q$.

En d'autres termes, si à la fonction propositionnelle $\sim (y \in y)$ correspond une classe, le système est contradictoire. Il s'agit de la fameuse *antinomie de Russell* et c'est pour l'éviter qu'il a introduit la théorie des types. Intuitivement cette théorie stipule que le signe $\in$ ne peut se placer qu'entre des « objets » de types différents, entre une variable d'objets et une variable de classes par exemple, mais pas entre deux variables d'objets. Ainsi $y \in y$, $\sim (y \in y)$ ne seraient tout simplement pas des ebf.

Ce qui précède peut s'étendre aux relations. Reprenons notre domaine $\Omega = \text{df}\, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et considérons sur lui la relation $<$. Si l'on forme le produit cartésien $\Omega \times \Omega$, on obtient les 25 couples de la table ci-contre. Le sous-ensemble des couples marqués d'une croix correspond à ceux dont le premier est plus petit que le second. Ainsi la classe

	1	2	3	4	5
1		×	×	×	×
2			×	×	×
3				×	×
4					×
5					

$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$
correspond à la relation $<$: elle est son *extension.*

On est alors conduit à poser:

(c3) $\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,(rxy \equiv (x, y) \in \{uv\,|ruv\})$.

Remarque

Pour être rigoureux, ceci exigerait de définir la notion de *couple ordonné*, notée ici (x, y). Cela peut se faire de différentes façons. En particulier, si l'on pose $\{x, y\} = \text{df}\ \{z\,|(z = x) \vee (z = y)\}$, on pourra écrire: $(x, y) = \text{df}\ \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Puisque les relations sont ramenées à des classes de couples — donc à des classes —, il est possible de définir les relations d'*inclusion* et d'*égalité*, de même que les opérations d'*union*, d'*intersection* et de *complément*. Soit R et S, des variables de relations, on aura:

$$R \subseteq S = \text{df}\quad (\forall x)\,(\forall y)\,((x, y) \in R \supset (x, y) \in S)$$
$$R = S = \text{df}\quad (\forall x)\,(\forall y)\,((x, y) \in R \equiv (x, y) \in S)$$
$$R \cup S = \text{df}\quad \{xy\,|(x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}$$
$$R \cap S = \text{df}\quad \{xy\,|(x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$$
$$\bar{R} = \text{df}\quad \{xy\,|\sim (x, y) \in R\}$$

Remarque

Au lieu de l'écriture $(x, y) \in R$, on pourrait faire usage de la notation plus familière rxy. En effet (c3) exprime que rxy est équivalent à $(x, y) \in \{uv\,|ruv\}$ ou, si l'on pose $R = \text{df}\ \{uv\,|ruv\}$, à $(x, y) \in R$. Dans ce qui suit, nous nous en tiendrons à la notation habituelle.

Il existe aussi des opérations propres aux relations, dont les deux suivantes. Appelons r la relation de parents à enfants, c'est-à-dire que rxy signifiera « x est parent (père ou mère) de y ». On peut alors concevoir la *relation inverse*, c'est-à-dire celle d'enfants à parents. Nous la noterons r^{-1} et nous poserons:

$r^{-1} = \text{df}\ \{xy|ryx\}$.

On aura donc par (c3):

$\vdash (\forall x)(\forall y)(r^{-1}xy \equiv ryx)$

Remarques

1. Au lieu de relation inverse, certains parlent de relation converse et au lieu de la notation r^{-1} on rencontre souvent r.

2. Soit la phrase « Roméo aime Juliette ». Représentons « Roméo » par x_1, « Juliette » par x_2 et « aimer » par r et considérons les quatre expressions rx_1x_2, $\bar{r}x_1x_2$, $r^{-1}x_1\,x_2$, $\bar{r}^{-1}\,x_1\,x_2$. On a:

rx_1x_2 : Roméo aime Juliette
$\bar{r}x_1x_2$: Roméo n'aime pas Juliette
$r^{-1}x_1x_2$: Juliette aime Roméo, puisque $r^{-1}x_1x_2 \leftrightarrow rx_2x_1$
$\bar{r}^{-1}x_1x_2$: Juliette n'aime pas Roméo
Posons: $\mathbf{N}(rxy) = \bar{r}xy \quad \mathbf{R}(rxy) = r^{-1}xy$
$\mathbf{D} = \mathbf{NR}$ et $\mathbf{I}(rxy) = rxy$.

On voit sans peine que les quatre transformations ainsi introduites forment un groupe isomorphe au groupe **INRD** du paragraphe 1.5.

3. On notera enfin que ce formalisme ne permet pas de distinguer l'actif « Roméo aime Juliette » du passif « Juliette est aimée par Roméo ».

Une seconde opération importante est celle du *produit de relations*. Soient trois individus x_1, x_2 et x_3 qui ont entre eux les relations indiquées ci-contre.

$$\begin{tikzcd} x_2 \arrow[d, "\text{père}"'] & x_1 \arrow[l, "\text{frère}"'] \\ x_3 & \end{tikzcd}$$

Notons:
$rx_1x_2 = \text{df} \quad x_1$ est frère de x_2
$sx_2x_3 = \text{df} \quad x_2$ est père de x_3.

Il s'ensuit qu'il existe une relation entre x_1 et x_3, à savoir « x_1 est oncle (paternel) de x_3 ». La relation « être oncle (paternel) de » est ainsi composée des deux relations « être frère de » et « être père de ». Nous noterons $r|s$ cette composition, dite produit et nous poserons:
$r|s = \text{df } \{xy|(\exists z)\,(rxz \wedge szy)$
On aura donc par (c3):
$\vdash (\forall x)\,(\forall y)\,((r|s)xy \equiv (\exists z)\,(rxz \wedge szy))$.

Il faut prendre garde que, en général, le produit de deux relations n'est pas commutatif. Ainsi dans l'exemple ci-dessus « $s|r$ signifie « être père du frère », ce qui est « être père ».

Il est aussi possible de faire le produit d'une relation par elle-même: $s|s$ ce que nous noterons s^2. Par exemple, si $sxz = \text{df } x$ est père de z, s^2xy qui équivaut par définition à $(\exists z)\,(sxz \wedge szy)$ signifiera que x est le grand-père de y.

Remarque
Si r est une relation transitive, si par exemple r est la relation « plus petit que » sur les nombres naturels, on aura quels que soient x, y et z :
$(rxy \wedge ryz) \supset rxz$. Puisque l'antécédent de cette conditionnelle est vrai pour tout y, on aura aussi $(\exists y)\,(rxy \wedge ryz)$. En d'autres termes, on a: $r^2xz \supset rxz$. Et l'on voit que la transitivité, que nous avions définie par la condition:

$\mathrm{Trans}(r) = \mathrm{df}\ (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((rxy \wedge ryz) \supset rxz)$ (v. I, p. 74)
peut maintenant se mettre sous la forme plus simple:

$\mathrm{Trans}(r) = \mathrm{df}\ r^2 \subseteq r.$

L'opération produit de relation est associative, de sorte que l'on peut définir s^3, s^4, etc., sans prendre de précautions de parenthésage.

Notons enfin la loi suivante:

$\vdash (\forall x)(\forall y)\ ((r|s)^{-1}\ xy \equiv (s^{-1}|r^{-1})xy).$

Preuve

Pour tout x et pour tout y, on a:

$(r\|s)^{-1}xy \equiv (r\|s)yx$	par définition de l'inverse
$\equiv (\exists z)(ryz \wedge szx)$	par définition du produit

D'autre part:

$(s^{-1}\|r^{-1})xy \equiv (\exists z)(s^{-1}xz \wedge r^{-1}zy)$	par définition du produit
$\equiv (\exists z)(szx \wedge ryz)$	par définition de l'inverse
$\equiv (\exists z)(ryz \wedge szx)$	par la commutativité de $\wedge$

2.7 Quelques notions liées aux classes et aux relations

Nous terminerons ce Fascicule en définissant quelques notions liées aux classes et aux relations. Nous ne prétendons pas en faire la théorie. Nous voulons simplement fournir des éléments qui permettent de lire les textes qui se servent de la logique formelle.

Descriptions

Nous avons vu que l'axiomatisation de la logique des prédicats ne contenait pas de constantes d'objets. Il peut cependant arriver qu'il soit nécessaire de nommer un objet bien déterminé. On utilise pour cela la théorie des descriptions. Supposons que nous voulions introduire la phrase « la lune est brillante ». Si x_1 désignait la lune et si bx signifiait « x est brillant », il suffirait d'écrire bx_1. Le problème est de remplacer x_1 par une description. Mais « la lune » n'est rien d'autre que « le satellite naturel de la Terre ». Posons donc $ax = \mathrm{df}$ x est satellite naturel de la Terre. Si l'on parvient à formaliser la notion « le x, tel que ax », en donnant un sens à une notation du genre $(\iota x)ax$, on écrira simplement $b\,((\iota x)ax)$ soit « le x, tel que x est satellite naturel de la Terre, brille ».

L'usage du mot *le* dans un tel contexte, et partant du symbole ι, exige que deux conditions soient satisfaites:

1) Il existe un objet x tel que ax.
2) Il n'en existe qu'un seul.

En conséquence, l'introduction du symbolisme $(\iota x)ax$ exige que l'on ait $(\exists_1 x)ax$. En d'autres termes, l'écriture $b((\iota x)ax)$ peut se comprendre comme une abrévation:

$b((\iota x)ax) = \text{df } (\exists x)\ (ax \wedge (\forall y)\ (ay \supset x = y) \wedge bx)$.

L'opérateur ι lie la variable à laquelle il est appliqué, ce qu'on voit en remarquant que, dans le membre de droite, x est une variable liée. On pourra donc écrire plus simplement $b(\iota a)$. D'autre part, on peut chercher d'autres expressions plus simples que celle du membre de droite mais équivalentes. On choisit généralement $(\exists x)\ ((\forall y)\ (ay \equiv x = y) \wedge bx)$. Nous poserons donc finalement:

$b(\iota a) = \text{df } (\exists x)\ (\forall y)\ (ay \equiv x = y) \wedge bx)$.

Partons maintenant d'une relation et posons, par exemple, $rxy = \text{df } x$ est père de y. Dans ce cas, aussi bien biologiquement que légalement, $(\forall y)(\exists_1 x)rxy$, autrement dit, tout individu (sauf Adam et Eve!) a un père et un seul. Il y a donc un sens à écrire ici $(\iota x)rxy$ soit « le x, tel que x est père de y.

Sous ces conditions d'existence et d'unicité, on pose généralement:

$r`y = \text{df } (\iota x)rxy = \text{df le } r \text{ de } y$.

Domaine, codomaine, champ

Une relation, disons « manger » n'existe pas entre tout couple d'objets. Dans cet exemple, elle n'existe qu'entre des mangeurs et des mangeables. En général, les objets qui peuvent être mis, comme premiers termes, en relation r avec d'autres objets, constituent le *domaine* de la relation:

$\text{Dom}\ (r) = \text{df } \{x \mid (\exists y)rxy\}$

Les objets qui peuvent être mis, comme seconds termes, en relation r avec d'autres objets, constituent le codomaine de la relation:

$\text{Cod}\ (r) = \text{df } \{y \mid (\exists x)rxy\}$

Enfin, l'union du domaine et du codomaine constitue le *champ* de la relation:

$\text{Ch}\ (r) = \text{df Dom}\ (r) \cup \text{Cod}\ (r)$

Supposons que $x \in \text{Ch}\ (r)$. Cela équivaut, par définition, à $x \in \text{Dom}\ (r) \vee x \in \text{Cod}\ (r)$. On a, par (c1):

$x \in \text{Dom}\ (r) \equiv (\exists y)rxy$. D'autre part, si dans la définition de $\text{Cod}\ (r)$, on substitue x à y et y à x, il vient $\text{Cod}\ (r) = \text{df } \{x \mid (\exists y)ryx\}$. Appliquant alors (c1), on a: $x \in \text{Cod}\ (r) \equiv (\exists y)ryx$. Donc enfin:

$x \in \text{Ch}\ (r) \equiv ((\exists y)rxy \vee (\exists y)ryx)$.

Ceci est bien conforme à l'intuition. Si x est élément du champ d'une relation r, il est en liaison r avec quelque objet, soit comme premier terme, soit comme second terme.

Remarque

Nous avions défini (I, p. 72) la réflexivité par:
Refl (r) = df $(\forall x)\,((\exists y)\,(rxy \vee ryx) \supset rxx)$.
On peut maintenant écrire plus simplement:
Refl (r) = df $(\forall x)\,(x \in \mathrm{Ch}\,(r) \supset rxx)$.

Les ... de

Nous avons vu que si $(\exists_1 x)rxy$, il était possible d'introduire « le r de y » soit $r\text{‘}y$. Dans le cas où il y a plusieurs x qui sont en relation r avec y, par exemple si rxy = df x est enfant de y, on pourra considérer la classe des x tels que rxy, soit « les enfants de y ». Nous poserons alors:
$\vec{r}\text{‘}\,y$ = df $\{x|rxy\}$ = df les r de y.

Remarques

1. Si pour un y donné, il n'y a pas de x tel que rxy, la classe $\vec{r}\text{‘}\,y$ est vide, mais elle reste bien définie.

2. Si pour un y donné, il n'y a qu'un seul x tel que rxy, on ne lira évidemment plus $\vec{r}\text{‘}\,y$ « les r de y », mais « le r de y ». Ceci pourrait laisser croire que l'on a alors affaire à $r\text{‘}\,y$, ce qui n'est pas le cas. Soit x_1 cet x unique. Alors $r\text{‘}\,y = x$, tandis que $\vec{r}\text{‘}\,y = \{x_1\}$: $r\text{‘}\,y$ est un objet, $\vec{r}\text{‘}\,y$ est une classe.

Il y a une certaine parenté entre $\vec{r}\text{‘}\,y$ et Dom(r), mais les deux notions sont bien distinctes. Intuitivement, $\vec{r}\text{‘}\,y$ est la classe des antécédents par r d'un y, tandis que Dom(r) est la classe de tous les objets qui peuvent être antécédents. Formellement, dans $\vec{r}\text{‘}\,y$ la variable y est libre et dans Dom(r) elle est liée, c'est-à-dire seulement apparente. On a d'ailleurs:

$\vdash \vec{r}\text{‘}\,y \subseteq \mathrm{Dom}(r)$

Cela revient, par la définition de l'inclusion des classes, à montrer que

$\vdash (\forall z)(z \in \vec{r}\text{‘}\,y \supset z \in \mathrm{Dom}(r))$.

Or on a pour z quelconque:

1	$z \in \vec{r}\text{‘}\,y$	**hyp**
2	$z \in \{x\|rxy\}$	1, **rep df** $\vec{r}\text{‘}\,y$
3	rzy	2, $(\mathbf{c}_1)$
4	$(\exists y)rzy$	3, $\exists$**i**
5	$z \in \{x\|(\exists y)rxy\}$	4, $(\mathbf{c}_1)$
6	$z \in \mathrm{Dom}(r)$	5, **rep df** Dom

L'introduction du quantificateur existentiel à la ligne 4 paraît faire difficulté, puisque il se peut que $\vec{r}`\, y$ soit vide. Toutefois tout cela reste cohérent puisque, comme nous l'avons vu, la classe vide est toujours incluse en toute classe.

Il est aussi possible d'introduire la classe des conséquents par r d'un x donné.

Nous poserons:

$\overleftarrow{r}`\, x = \mathrm{df}\ \{y|rxy\}$.

On peut faire pour cette classe des remarques analogues à celles faites pour $\vec{r}`\, y$.

Les ... des

Soit l'expression « les chiens des logiciens ». Elle peut être analysée en une relation et en une classe:

$rxy = \mathrm{df}$ x est chien de y

$\alpha = \mathrm{df}$ les logiciens

Dire alors qu'un certain x appartient à la classe des chiens des logiciens, c'est dire qu'il existe un y logicien et que x est son chien, donc que:

$(\exists\, y)\ (rxy \wedge y \in \alpha)$.

Nous poserons:

$r``\alpha = \mathrm{df}\ \{x\,|(\exists\, y)\ (rxy \wedge y \in \alpha) = \mathrm{df}$ les r des α.

Cette définition n'exige pas de savoir si, pour un y donné, il y a plusieurs x tels que rxy ou s'il n'y en a qu'un seul. D'autre part $r``\Lambda = \Lambda$ puisque $\sim (\exists\, y)\ (y \in \Lambda)$. Enfin $r``\alpha$ peut encore être vide si $\sim (\exists\, y) rxy$. Telle serait par exemple « les diviseurs propres des nombres premiers » où un diviseur propre est un diviseur différent de 1 et du nombre lui-même.

BIBLIOGRAPHIE

Cette bibliographie sert de complément à celle du Fascicule I

3.1 Axiomatisations de la logique

Frege, G., *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle, 1879. (Il s'agit là de la première formalisation complète. Le texte est reproduit dans J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967).

Hilbert, D.; Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*. 3e éd. Berlin, Springer Verlag, 1949. (On trouve de cet ouvrage classique une version anglaise: *Principles of mathematical logic*. New York, Chelsea Pub. Co. 1950).

Whitehead, A. N.; Russell, B., *Principia Mathematica*. 3 vol., 2e éd. Cambridge Univ. Press, 1925-1927.

3.2 Sur le groupe INRC

Piaget, J., *Essai de logique opératoire*. Paris, Dunod (à paraître). (Il s'agit d'une édition revue par J. B. Grize du *Traité de logique*, Paris, A. Colin, 1949).

3.3 Interprétation électrique de la logique des propositions

Shannon, C., «A symbolic analysis of relay and switching circuits». *Trans. Amer. Inst. Elec. Eng.*, 1938, **57**, 713-723. (Il s'agit du premier article qui a traité ce problème).

LISTE DES SYMBOLES

Certains symboles sont utilisés en deux sens différents. Nous les signalons toujours immédiatement l'un après l'autre.

Les mots soulignés dans les explications renvoient à l'index et permettent de retrouver les définitions plus complètes.

Symbole

4.1 Lettres	*Explication*
a, b, c	*Variables de prédicats* à une place, donc variables de *propriétés*
a, b, c, d / a', b', c', d'	Représentent des 1 ou des 0 (v. 4.2)
$\mathrm{a}_1^k, \mathrm{a}_2^k, \mathrm{a}_3^k, \ldots$	*Variables de prédicats* à k places. Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
f	Représente une *application*
p, q, m	*Variables de propositions.* Prennent comme valeurs le vrai (1) ou le faux (0).
$p_1, p_2, p_3, \ldots$	*Variables de propositions.* Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
r, s, t	*Variables de prédicats* à plus d'une place, donc variables de *relations*
x, y, z, u, v	*Variables d'objets.* Prennent leurs valeurs sur un *domaine d'objets*
$x_1, x_2, x_3, \ldots$	Constantes d'objets, sauf dans l'axiomatisation

$x_1, x_2, x_3, \ldots$	*Variables d'objets.* Ne sont utilisées que dans l'axiomatisation.
A, B, C	*Variables syntaxiques* qui désignent des expressions de la logique des prédicats.
P, Q, M	*Variables syntaxiques* qui désignent des *propositions atomiques* ou *composées*
R, S	Variables de relations. Elles désignent des classes de couples *ordonnés*
V	Ensemble des deux valeurs de vérité 1 et 0
X, Y, Z	*Variables syntaxiques* qui désignent des *variables d'objets*
I	*Transformation identique*
N	*Transformation de négation*
R	*Transformation de réciprocité*
D	*Transformation duale*
α, β, γ	Variables de classes. Elles désignent l'*extension* d'un prédicat.
Π	Ensemble des *propositions atomiques* ou *composées*
Π_2	Ensemble des propositions à deux atomes
Ω	*Domaine d'objets*

4.2 Quelques classes particulières

Λ	La *classe vide*
V	La *classe totale*
Dom	Dom(r) désigne le *domaine* de la relation r
Cod	Cod(r) désigne le *codomaine* de la relation r
Ch	Ch(r) désigne le *champ* de la relation r
$\vec{r}\text{`}\, y$	*Les r de y*
$\overleftarrow{r}\text{`}\, x$	*Les r de x*
$r\text{``}\, \alpha$	*Les r des α*

4.3 Descriptions

$(\iota x)ax$	Le x tel que ax	v. *description*
ιa	Le a	

4.4 Parenthèses

$(a\ b\ c\ d)$	L'*évaluation* d'une proposition composée de deux atomes
$(a'\ b'\ c'\ d')$	L'*évaluation* de la transformée par N de $(a\ b\ c\ d)$
$[a\ b\ c\ d]$	La *classe d'équivalence* des propositions d'évaluation $(a\ b\ c\ d)$
$p\ (q)$	La proposition p élément de la classe [1 1 0 0] soit p quelque soit q
(x, y)	Le *couple ordonné* de premier terme x et de second terme y
$\{x \mid ax\}$	La classe des x tels que ax
$\{x\}$	La *classe singulière* qui contient x
$\{x, y\}$	La classe qui contient x et y
$A\ (X)$	Une expression de la logique des prédicats qui contient la *variable libre* X ou le résultat de la *substitution* dans A de X à la place d'une *variable libre.*
$A\ [X]$	Le résultat du *remplacement* dans A de X à la place d'une *variable libre*
$[P]$	La *classe d'équivalence* qui contient la proposition P

4.5 Signes de relations

$\in$	$x \in \alpha$: x est élément de la classe α
$\notin$	$x \notin \alpha$: x n'est pas élément de la classe α
$\subseteq$	$\alpha \subseteq \beta$: la classe α est contenue dans la classe β (v. *inclusion*)
$\subseteq$	$R \subseteq S$: la relation R est contenue dans la relation S (v. *inclusion*)
$\leqq$	Relation d'*ordre* « précéder » entre *classes d'équivalence* de propositions
$=$	$x = y$: x est identique à y (v. *identité*)
$=$	$\alpha = \beta$: la classe α est égale à la classe β (v. *égalité*)
$=$	$R = S$: la relation R est égale à la relation S (v. *égalité*)
$=$ df	Egale par définition
$\rightarrow$	Relation d'*implication*
$\leftrightarrow$	Relation d'*équivalence*

4.6 Signes d'opérations

$\sim$	*Négation.* $\sim p$: non-p
$\wedge$	*Conjonction.* $p \wedge q$: p et q.
$\vee$	*Disjonction non exclusive.* $p \vee q$: p ou q
w	*Disjonction exclusive.* p w q: soit p soit q
$\supset$	*Conditionnelle.* $p \supset q$: si p, alors q
$\equiv$	*Biconditionnelle.* $p \equiv q$: p si et seulement si q
$\mid$	$p \mid q$: pas à la fois p et q (v. 1.2).
$\mid$	$r \mid s$: relation *produit* de r et s
$\downarrow$	$p \downarrow q$: non-p et non-q (v. 1.2)
$\top$	$p \top q$ désigne la classe d'équivalence [1 1 1 1] (v. 1.3)
$\perp$	$p \perp q$ désigne la classe d'équivalence [0 0 0 0] (v. 1.3)
$\circ$	Désigne un *opérateur* binaire quelconque
$\times$	Signe de la multiplication arithmétique
$\times$	$\alpha \times \beta$: *produit cartésien* des classes α et β
$\forall$	*Quantificateur universel.* $(\forall x)$: pour tout x
$\exists$	*Quantificateur existentiel.* $(\exists x)$: il y au moins un x
$\exists_1$, $\exists_2$	$(\exists_1 x)$, $(\exists_2 x)$: il y exactement un, deux x
$\cup$	$\alpha \cup \beta$: *union* des classes α et β
$\cup$	$R \cup S$: *union* des relations R et S.
$\cap$	$\alpha \cap \beta$: *intersection* des classes α et β
$\cap$	$R \cap S$: *intersection* des relations R et S.
$\complement$	$\complement_\beta \alpha$: *complément* de la classe α par rapport à la classe β
—	$\overline{\alpha}$: le complément de la classe α
—	$\overline{R}$: le complément de la relation R
r^{-1}	L'*inverse* de la relation r
r^2	Le *produit* de la relation r par elle-même

4.7 Autres signes

$\vdash$	Indique que ce qui suit est une *tautologie* ou un *théorème*
$\sim \vdash$	Indique que ce qui suit n'est pas une tautologie ou n'est pas un théorème
$\vdash_1$	Indique que ce qui suit est un *théorème* au sens de la déduction naturelle
$\vdash_2$	Indique que ce qui suit est un *théorème* au sens d'un système axiomatique
$\vdash_t$	Précise que ce qui suit est une *tautologie*

INDEX DES FASCICULES I ET II*

* Les chiffres romains renvoient aux fascicules et les chiffres arabes aux pages.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE II

LISTE DES SYMBOLES

LOGIQUE MODERNE

Fascicule III

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES — SORBONNE
SIXIÈME SECTION: SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME
XXII

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule III

IMPLICATIONS-MODALITÉS
LOGIQUES POLYVALENTES
LOGIQUE COMBINATOIRE
ONTOLOGIE ET MÉRÉOLOGIE DE LEŚNIEWSKI

MOUTON/GAUTHIER-VILLARS

Printed in the Netherlands

INTRODUCTION

Toute une partie de la logique moderne, celle que l'on convient généralement de faire débuter avec *The mathematical analysis of logic* de George Boole (1847), a été conduite à se préoccuper essentiellement des fondements des mathématiques. Faite le plus souvent par des mathématiciens et pour eux, elle a donné lieu à des considérations de plus en plus rigoureuses et abstraites. Certaines de ses parties ne se distinguent guère de la mathématique elle-même. Toutefois, et comme en marge de ce qui est devenu sa vocation principale, la logique n'a jamais cessé de se poser d'autres problèmes: ceux de décrire, d'expliquer, parfois de régler tous les raisonnements et non seulement ceux qui relèvent exclusivement de l'esprit de géométrie. Cette « logique parallèle » a moins de prestige que l'autre. Elle est plus timide, parfois un peu naïve, elle est moins connue, elle s'enseigne peu souvent. Ce n'est pas que ceux qui s'en sont occupé aient eu moins de talent: leurs problèmes étaient plus complexes et leurs lecteurs plus rares. Ceux-ci ne pouvaient guère se recruter, en effet, que parmi les philosophes, les psychologues, les linguistes, *gens* fort longtemps allergique à tout ce qui avait quelque odeur du soufre mathématique. Frege (1848-1925) lui-même, qui n'a d'ailleurs pas encore trouvé place dans le « Grand Larousse Encyclopédique », l'a durement vécu de son temps et J. Vuillemin dans son ouvrage récent[1] doit encore penser au lecteur que rebute le symbolisme de la logique formelle. Les choses toutefois sont en train de changer. Les sciences humaines se servent de plus en plus souvent de l'instrument logique et il n'est nullement déraisonnable de penser que, sous leur

1. J. Vuillemin, *Le Dieu d'Anselme et les apparences de la raison*. Paris, Aubier, 1971. Voir, par exemple, la note 1, p. 53.

pression, bien des thèmes sont à la veille de connaître de nouveaux développements.

C'est dans cette perspective que nous présentons ici quelques systèmes logiques dont nous pensons qu'ils offrent de riches possibilités en dehors des mathématiques (même si l'un d'entre eux est fondamental en logique mathématique au sens strict du terme). Nous en avons choisi cinq.

Première partie: On s'aperçoit facilement que la relation d'implication engendrée par l'opérateur classique de conditionnelle ($\supset$) reflète assez mal l'idée naïve de «si ... alors». Ce problème n'est pas nouveau et les Stoïciens y avaient déjà consacré de nombreuses réflexions. Il semblait donc intéressant de montrer comment les modernes l'ont abordé et par quel biais ils l'ont traité.

Deuxième partie: Les considérations sur l'implication font le plus souvent appel à la nécessité ou à la possibilité. Comme par ailleurs les logiques modales ont connu depuis les travaux de Lewis et Langford un grand développement, nous décrivons quelques-uns des systèmes les plus connus.

Troisième partie: Sitôt que l'on introduit des modalités, on quitte la logique bivalente du vrai et du faux. Cela ne signifie pas qu'il soit possible pour autant de remplacer l'ensemble $\{0,1\}$ par un autre $\{0,1,2,...m\}$. En revanche, si l'on part d'un ensemble de vérité à plus de deux valeurs, il est possible d'interpréter certains opérateurs comme des modalités. Ces logiques, dites polyvalentes, offrent des perspectives nombreuses. Assez peu utilisées actuellement, elles doivent permettre de construire des modèles facilement adaptables aux comportements observés. Il paraissait d'autant plus utile d'en présenter le principe que la longueur assez rebutante des calculs ne fait plus obstacle depuis que tout chercheur peut avoir accès à un ordinateur.

Quatrième partie: Elle constitue l'exception signalée plus haut. La logique combinatoire dont elle présente quelques-unes des notions, a été créée pour éclairer les fondements des mathématiques. Toutefois, elle apoussé l'analyse assez loin pour rejoindre ce qui constitue apparemment quelques-unes des opérations les plus fondamentales de l'intelligence rationnelle. Quelques applications en ont déjà été faites en psychologie et en linguistique et nous avons jugé utile d'en esquisser les aspects les plus simples.

Cinquième partie: L'ontologie et la méréologie de Leśniewski, sommairement exposées ici, ont répondu d'abord à des problèmes relatifs à la théorie des ensembles. Cependant, la façon dont ces systèmes cherchent à rendre compte du verbe ÊTRE, la formalisation de la relation de partie à tout (distincte naturellement de l'inclusion), la notion de classe collective qui contraste avec celle usuelle de classe distributive, l'attitude épistémologique même de Leśniewski en face des systèmes formels – tout cela nous a paru fondamental pour les sciences humaines.

Nous avons ainsi visé à introduire le lecteur dans quelques domaines que nous espérons utiles à ses propres travaux, mais à l'introduire seulement. Cela signifie que ce *Fascicule III* ne se présente pas exactement comme les deux premiers. Nous avons cherché à faire connaître l'existence de certaines logiques, à présenter la façon d'aborder les questions sans prétendre écrire un « manuel » au sens courant du terme. Il s'en suit plusieurs conséquences.

1. Nous n'avons pas toujours suivi le mode de présentation des auteurs dont nous traitons, non plus que toutes leurs techniques. Mais, dans les cas où notre formulation d'un système logique s'écarte de la formulation originale, elle peut être démontrée équivalente.

2. Les cinq parties, si elles ne sont pas conceptuellement toutes indépendantes, peuvent néanmoins se lire indépendamment les unes des autres.

3. Comme certains problèmes ont connu peu de développements depuis qu'ils ont été formulés, il nous est arrivé de faire usage de textes déjà anciens – ce qui ne signifie donc pas dépassés.

4. La bibliographie, placée à la fin de chacune des parties, n'est évidemment qu'indicative et n'est pas homogène. Cela signifie qu'il nous arrive de citer aussi bien un mémoire original qu'un traité. Ceci découle de ce que nous voulions à la fois citer nos sources et permettre au lecteur de compléter son information. Notons encore que dans chaque chapitre nous avons signalé par un astérique un ouvrage qui contient une riche bibliographie.

5. Selon les cas, nous avons fait usage aussi bien de la déduction naturelle, que des tables de vérité et de la méthode axiomatique. Nous avons simplement visé à utiliser la présentation la plus éclairante et la plus commode.

Ajoutons enfin que la lecture de ce fascicule présuppose une certaine familiarité avec les deux premiers auxquels nous renvoyons par les indications (*I*, p. *n*), (*II*, p. *n*). Les autres renvois sont internes.

PREMIÈRE PARTIE

L'IMPLICATION

1.1 Le problème de l'implication

Le calcul des propositions contient un opérateur que nous avons noté $\supset$, lu «si ... alors», qui peut être défini par la table de vérité ci-contre (II, p. 7) ou introduit et éliminé par les règles $\supset i$ et $\supset e$ (I, p. 53 et 52).

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \supset Q$	1	0	1	1

A partir de cet opérateur nous avons introduit une relation, notée $\rightarrow$ et dite relation d'implication logique, en posant (I, p. 26; II, p. 11):

$$P \rightarrow Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \vdash P \supset Q$$

En d'autres termes, nous avons posé que « P implique Q » si et seulement si la proposition «si P alors Q» est une tautologie ou, ce qui revient au même (II, p. 35 et 36), un théorème. Le problème qui se pose maintenant est de savoir si cette notion d'implication est suffisante pour recouvrir un usage normal.

Notons tout de suite qu'il s'agit-là d'une question nécessairement peu précise, dans la mesure où la notion d'usage normal est très mal déterminée. Il semble cependant que l'on puisse se donner au moins une exigence minimale. Si P implique Q, il doit être possible de déduire Q de P. Dans ces conditions, la définition de $\rightarrow$ paraît convenable. En effet, $P \rightarrow Q$ signifie $\vdash P \supset Q$, expression qui résulte de $P \vdash Q$ par $\supset i$. Or, la notation $P \vdash Q$ signifie tout justement que Q est déductible de P par les règles de la logique des propositions. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut écrire:

$$p \wedge q \cdot \rightarrow \cdot q \wedge p \text{ ou } \vdash p \wedge q \cdot \supset \cdot q \wedge p \text{ ou } p \wedge q \vdash q \wedge p \text{ (I, p. 19).}$$

Ceci n'empêche pas que certains théorèmes, une fois interprétés, peuvent être ressentis comme paradoxaux, c'est-à-dire comme s'accordant assez mal avec l'idée intuitive que l'on se fait de l'implication. Tel est en particulier le cas des théorèmes formés à partir des schémas:
(1) $\vdash P \supset (Q \supset P)$
(2) $\vdash \sim P \supset (P \supset Q)$
Illustrons la chose par l'exemple fameux de Lewis-Langford (1959, p. 242 *sq*). Posons:
P = df le vinaigre est acide
Q = df certains hommes portent la barbe
En substituant dans (1) on a: «le vinaigre est acide» implique «si certains hommes portent la barbe alors le vinaigre est acide».

Comme il se trouve que P est une proposition vraie, la règle $\supset e$ conduit à considérer comme vraie la proposition $Q \supset P$: «si certains hommes portent la barbe, alors le vinaigre est acide». Certes, la proposition $Q \supset P$ n'est pas une implication au sens de $\rightarrow$, puisqu'elle n'est pas un théorème logique. Mais, parce que vraie, elle marque bien aussi une certains relation du genre implication entre Q et P, relation qui s'exprime précisément par «si...alors». Appelons cette relation I et posons en conséquence:
$PIQ \cdot = \text{df} \cdot \text{val}\,(P \supset Q) = 1$
Pour éviter toute confusion, appelons I l'*implication de fait*. On voit alors facilement que l'aspect paradoxal résulte de l'absence de liaison sémantique entre les barbus et l'acidité du vinaigre. En effet, si nous avions posé par exemple:
Q' = df le vinaigre fait virer au rouge la teinture de tournesol
le même raisonnement appliqué à (1) aurait donné: «faire virer au rouge» implique de fait «être acide». Sans être chimiste, on peut penser qu'il est en effet possible de déduire l'acidité à partir du changement de couleur de la teinture en question et le sentiment de paradoxe disparaît.

Remarque. Des considérations analogues s'appliquent aux formes paradoxales (2).

L'implication de fait I paraît offrir ainsi des difficultés dues à l'absence possible de liens entre l'antécédent et le conséquent, difficultés que n'offrirait pas l'implication $\rightarrow$. Comment expliquer la chose?

Considérons d'une façon générale la proposition $P \supset Q$. Le signe $\supset$ est un opérateur – nous venons d'en rappeler la table – et la proposition conditionnelle est tantôt vraie, tantôt fausse. Toutefois, sitôt que dans un discours on énonce la proposition « si P alors Q », on l'assume comme vraie (à tort ou à raison, peu importe). Cela signifie que l'on énonce la relation $P\ I\ Q$. Si, à ce moment là, on ne sait rien de plus sur la valeur de P, il est impossible de déduire Q de P. Il peut se faire en effet, que Q soit vraie (1^{re} et 3^e colonnes) ou que Q soit fausse (4^e colonne). Donc, en présence d'une implication de fait I, la déduction *n'est possible qu'à l'aide de la prémisse supplémentaire:* val $(P) = 1$, au contraire de ce qui se passe pour l'implication $\rightarrow$. La chose tient à ce que $P \rightarrow Q$, soit $\vdash P \supset Q$ exprime une tautologie et que, en conséquence, soit P est une contradiction, soit Q est une tautologie, soit l'antécédent P et le conséquent Q contiennent au moins une proposition atomique commune.

Exemples

$p \rightarrow p,\ p \wedge q \cdot \rightarrow q,\ \sim p \vee q \cdot \rightarrow \cdot p \supset q,\ p \rightarrow \cdot q \supset p,\ \sim p \rightarrow \cdot p \supset q$

Il s'ensuit deux conséquences. L'une c'est que $P \rightarrow Q$ entraîne $P\ I\ Q$, donc que $\rightarrow$ est plus exigeante ou plus stricte que I et l'autre que $\rightarrow$ sera moins sujette à des cas paradoxaux que I.

1.2 L'implication stricte de Lewis et Langford

Tout ce que nous avons dit de $\rightarrow$ l'a été dans la métalangue du calcul classique des propositions, que nous désignerons désormais par la lettre $\mathscr{C}$. Dans les expressions suivantes les signes $\rightarrow$ et $\vdash$ n'appartiennent, en effet, pas à $\mathscr{C}$:

$P \rightarrow Q$	P implique Q
$\vdash p \vee \sim p$	« $p \vee \sim p$ » est une tautologie

Mais rien n'empêche de construire un calcul plus riche (nommons-le $\mathscr{L}$) qui permette d'exprimer de tels faits. C'est en particulier ce qu'on trouve dans Lewis (1918) et dans Lewis-Langford (1932). Il est possible de raisonner de la façon suivante.[1]

Tout calcul logique des propositions se construit à l'aide de variables propositionnelles et de certains opérateurs. Nous avons ici besoin d'au moins un nouvel opérateur qui ne saurait donc être l'un des 16 de $\mathscr{C}$ (II, p. 14). Comme ceux-ci épuisent la combinatoire des valeurs de vérité

1. Je ne suis pas la présentation des auteurs et même je présente un calcul plus fort que le système original qui était S_1 (*cf.* Deuxième partie).

1 et 0, le système $\mathscr{L}$ ne pourra être extensionnel au sens où nous l'avons dit de $\mathscr{C}$ (II, p. 4, 7 et 41).

Nous cherchons à rendre compte de l'idée de tautologie. Or, si une proposition est tautologique, c'est qu'elle épuise tous les cas possibles, c'est en d'autres termes, qu'elle est *nécessaire*. Introduisons donc un opérateur noté $\square$, et tel que

$\square P$ puisse se lire P est nécessaire, P est une tautologie, P est un théorème de $\mathscr{C}$.

Dans ces conditions, si on avait *à propos de* $\mathscr{C}$ $P \rightarrow Q$ ou $\vdash P \supset Q$, on aura *dans* $\mathscr{L}$: $\square(P \supset Q)$. Posons enfin:

$Df \prec \qquad P \prec Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \square(P \supset Q)$

Si l'on adopte le point de vue de la déduction naturelle (Fascicule I), le problème revient à se donner une règle convenable pour éliminer $\square$ et une pour l'introduire.

L'élimination de $\square$ ne fait aucune difficulté. Si, en effet, on a $\square P$, cela signifie que P est nécessaire parce que tautologique. Or si P est « toujours vraie », elle est vraie et nous poserons sans plus:

Règle $\square$e

$$
\begin{array}{r|ll}
n & \square P & \\
\hline
 & P & n, \square e
\end{array}
$$

On aura déjà les schémas de théorèmes suivants:

$T_1 \vdash_{\mathscr{L}} (P \prec Q) \supset (P \supset Q)$

En effet:

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & & P \prec Q & hyp \\
\cline{3-3}
2 & & \square(P \supset Q) & 1, rep\ df \prec \\
3 & & P \supset Q & 2, \square e \\
4 & \multicolumn{2}{l}{(P \prec Q) \supset (P \supset Q)} & 1\text{-}3, \supset e
\end{array}
$$

Ceci correspond au fait que $P \rightarrow Q$ entraîne $P\ I\ Q$.

Pour introduire $\square$, nous allons raisonner d'une façon assez semblable à celle que nous avons utilisée pour introduire $\forall$ (I, p. 53). Pour être autorisé à écrire $\square P$ au bas d'une preuve, donc pour que P soit une tautologie, P ne doit dépendre d'aucune hypothèse. On procédera donc à l'intérieur d'une sous-déduction sans hypothèse. Reste la question des réitérations. Réitérer une proposition quelconque pourrait introduire subrepticement une hypothèse dans le raisonnement. Nous poserons donc qu'une proposition Q ne peut être réitérée que si elle est de la forme $\square Q$, donc seulement si elle est tautologique. D'où:

Règle □i

$$\begin{array}{r|llll}
n & \Box & \vline & & \\
 & & \vline & \vdots & \\
m & & \vline & P & \\
 & \Box P & & & n - m, \Box i
\end{array}$$

La référence se fait à toute la sous-déduction $n - m$, dite *sous-déduction stricte*. Le carré en exergue rappelle qu'une proposition ne peut « franchir la barre verticale » (être réitérée) que si elle est nécessaire, mais *le signe* □ *de sa nécessité n'est pas réitéré*.

Epithéorème. Si $P \supset Q$ est un théorème de $\mathscr{C}$ (une tautologie), $P \prec Q$ est un théorème de $\mathscr{L}$, soit en symboles: $\vdash_{\mathscr{C}} P \supset Q$ alors $\vdash_{\mathscr{L}} P \prec Q$.

En effet, supposer que $\vdash_{\mathscr{C}} P \supset Q$, c'est supposer qu'on a une preuve (α) de $P \supset Q$. Il suffit alors de procéder comme en (β).

(α)

$$\begin{array}{r|lll}
1 & \vline & \underline{P} & hyp \\
 & \vline & \vdots & \\
n & \vline & Q & \\
n+1 & P \supset Q & & 1 - n, \supset i
\end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{r|lllll}
1 & \Box & \vline & \vline & P & hyp \\
 & & \vline & \vline & \vdots & \text{Preuve } (\alpha) \\
n & & \vline & \vline & Q & \\
n+1 & & \vline & P \supset Q & & 1 - n, \supset i \\
n+2 & \Box(P \supset Q) & & & & 1 - (n+1), \Box i \\
n+3 & P \prec Q & & & & n + 2, \textit{rep df} \prec
\end{array}$$

Remarque. Pas plus que le signe $\vdash_{\mathscr{C}}$ (ou $\vdash$) n'appartenait à $\mathscr{C}$, le signe $\vdash_{\mathscr{L}}$ n'appartient à $\mathscr{L}$: une métalangue reste toujours nécessaire.

L'épithéorème fournit en particulier les théorèmes suivants de $\mathscr{L}$:

(*B1*) $\vdash_{\mathscr{L}} (p \wedge q) \prec (q \wedge p)$

(*B2*) $\vdash_{\mathscr{L}} (p \wedge q) \prec p$

(*B3*) $\vdash_{\mathscr{L}} p \prec (p \wedge p)$

(*B4*) $\vdash_{\mathscr{L}} (p \wedge q) \wedge m \cdot \prec \cdot p \wedge (q \wedge m)$

(*B5*) $\vdash_{\mathscr{L}} p \prec \sim\sim p$

Notons que la nécessité dont il est ici question est bien celle d'une tautologie ou d'un théorème de $\mathscr{C}$. Un théorème de $\mathscr{L}$ est certes nécessaire, mais pas de la même façon. Cela signifie qu'on ne saurait déduire en $\mathscr{L}$ la loi $(P \prec Q) \supset \Box(P \prec Q)$. En effet:

1	$\vert\ \vert\ P \prec Q$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \Box(P \supset Q)$	1, *rep df* $\prec$
3	$\vert\ \vert\ \Box \mid P \supset Q$	2, *reit* selon convention
4	$\vert\ \vert\ \Box(P \supset Q)$	3-3, $\Box i$
5	$\vert\ \vert\ P \prec Q$	4, *rep df* $\prec$
6	$\vert\ (P \prec Q) \supset (P \prec Q)$	1-5, $\supset i$

L'application de l'épithéorème donne seulement:

$\vdash_{\mathscr{L}} (P \prec Q) \prec (P \prec Q)$

En revanche, si $P \supset Q$ est un théorème de $\mathscr{C}$, donc si $\vdash_{\mathscr{C}} P \supset Q$, on aura non seulement $\vdash_{\mathscr{L}} P \prec Q$, mais encore $\vdash_{\mathscr{L}} \Box(P \prec Q)$.[2] En effet:

1	$\vert\ \Box \mid \Box \mid\ \vert\ P$	*hyp*	Théorème de $\mathscr{C}$
$\vdots$	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \vert\ \vdots$		
n	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \vert\ Q$		
$n+1$	$\vert\quad \vert\quad \vert\ P \supset Q$	$1-n, \supset i$	
$n+2$	$\vert\quad \vert\ \Box(P \supset Q)$	$1-(n+1), \Box i$	
$n+3$	$\vert\quad \vert\ P \prec Q$	$n+2$, *rep df* $\prec$	
$n+4$	$\vert\ \Box(P \prec Q)$	$1-(n+3), \Box i$	

On aura cependant des théorèmes qui comportent plus d'un signe $\prec$. Ainsi:

(*B6*) $\vdash_{\mathscr{L}} (p \prec q) \wedge (q \prec m) \cdot \prec (p \prec m)$

En effet:

1	$\vert\ \vert\ (p \prec q) \wedge (q \prec m)$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ p \prec q$	1, $\wedge e$
3	$\vert\ \vert\ q \prec m$	1, $\wedge e$
4	$\vert\ \vert\ \Box(p \supset q)$	2, *rep df* $\prec$
5	$\vert\ \vert\ \Box(q \supset m)$	3, *rep df* $\prec$
6	$\vert\ \vert\ \Box \mid\ \vert\ p$	*hyp*
7	$\vert\ \vert\quad \vert\ \vert\ p \supset q$	4, *reit*
8	$\vert\ \vert\quad \vert\ \vert\ q$	6, 7, $\supset e$
9	$\vert\ \vert\quad \vert\ \vert\ q \supset m$	5, *reit*
10	$\vert\ \vert\quad \vert\ \vert\ m$	8, 9, $\supset e$
11	$\vert\ \vert\quad \vert\ p \supset m$	6–10, $\supset i$
12	$\vert\ \vert\ \Box(p \supset m)$	6–11, $\Box i$
13	$\vert\ \vert\ p \prec m$	12, *rep df* $\prec$
14	$\vert\ (p \prec q) \wedge (q \prec m) \cdot \supset (p \prec m)$	1–13, $\supset i$

2. Cette loi n'est pas valable dans S_2.

($B6$) s'obtient de 14 par l'épithéorème.
On aura donc de manière analogue:
($B7$) $\vdash_{\mathscr{L}} p \wedge (p \prec q) \cdot \prec q$

Les paradoxes de l'implication ne se retrouvent pas. On a, en effet:

$T2 \vdash_{\mathscr{L}} P \prec (Q \supset P)$ et $T3 \vdash_{\mathscr{L}} \sim P \prec (P \supset Q)$

tout comme on avait:

$P \rightarrow (Q \supset P)$ et $\sim P \rightarrow (P \supset Q)$

mais on n'a

ni $P \prec (Q \prec P)$ ni $\sim P \prec (P \prec Q)$.

En revanche, on prouve facilement:

$T4 \vdash_{\mathscr{L}} \Box P \prec (Q \prec P)$

$T5 \vdash_{\mathscr{L}} \Box \sim P \prec (P \prec Q)$ et

$T6 \vdash_{\mathscr{L}} \Box P \wedge \Box Q \cdot \prec \cdot (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$

T4 et *T5* peuvent être considérés comme des *paradoxes de l'implication stricte*. Ils sont, en effet, le décalque au niveau de $\mathscr{L}$ des schémas (1) et (2) de $\mathscr{C}$. *T6* exprime que deux propositions nécessaires quelconques sont strictement équivalentes (s'impliquent mutuellement) et oblige à revenir encore une fois sur le problème du contenu. Admettons, en effet, que les propositions mathématiques aient le caractère de nécessité logique, ce que les constructions du genre de celles de Frege ou de Russell rendent plausible. En conclusion de *T6* deux théorèmes quelconques seraient donc équivalents!

En fait, le scandale n'est qu'apparent mais il aide à mieux saisir le rôle de la logique dans la déduction. Posons, par exemple ce qui suit:
P = df conjonction des axiomes de la géométrie d'Euclide
P' = df conjonction des axiomes de la géométrie de Riemann
p = df la somme des angles d'un triangle est égale à 180°
p' = df la somme des angles d'un triangle est plus grande que 180°.

Alors dire que $P \prec p$ et que $P' \prec p'$ c'est dire que $\Box(P \supset p)$ et que $\Box(P' \supset p')$. Ce n'est donc aucunement formuler l'équivalence des deux géométries. L'équivalence ne porte que sur les liens déductifs qui vont de P à p d'une part et de P' à p' d'autre part. Elle ne fait qu'exprimer le fait que les deux déductions sont également correctes, c'est-à-dire conformes aux règles logiques que l'on s'est données. En revanche, le *T6* montre que le système $\mathscr{L}$, pas plus que $\mathscr{C}$, ne tient compte du «contenu» ou de la «signification» des propositions.

Remarque. Démontrons encore le schéma suivant:

T7 $\vdash_{\mathscr{L}} \sim\Box\sim(P \wedge Q) \prec \sim\Box\sim P$

1	$\mid\ \mid\ \Box\sim P$	*hyp*
2	$\mid\ \mid\ \Box \mid \sim P$	1, *reit*
3	$\mid\ \mid\ \quad \mid \sim P \vee \sim Q$	2, $\vee i$
4	$\mid\ \mid\ \quad \mid \sim(P \wedge Q)$	3, *neg* $\wedge i$
5	$\mid\ \mid\ \Box\sim(P \wedge Q)$	2–4, $\Box i$
6	$\mid\ \Box\sim P \supset \Box\sim(P \wedge Q)$	1–5, $\supset i$
7	$\mid\ \sim\Box\sim(P \wedge Q) \supset \sim\Box\sim P$	6, par contraposition

et enfin *T7* par l'épithéorème.

Si l'on convient d'abréger $\sim\Box\sim$ en $\Diamond$, le théorème suivant sera une instance de *T7*:

($B8$) $\vdash_{\mathscr{L}} \Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$

Il se trouve alors que la base axiomatique qui a servi à Lewis-Langford pour établir leur système de l'implication stricte est constituée par les expressions ($B1$) à ($B8$)[3]. Ce système est un peu plus faible que celui utilisé ici pour des raisons de simplicité. Toutefois tous les théorèmes signalés appartiennent au système original.

1.3 Quelques autres implications

L'idée de base de l'implication stricte consiste donc à exiger que la relation entre l'antécédent et le conséquent soit non seulement vraie, mais nécessaire. Comme il est possible de donner à l'opérateur de nécessité des propriétés plus ou moins fortes (Deuxième partie), on aura autant d'implications strictes que de systèmes modaux.

Toutefois, comme nous l'avons vu, on peut objecter à certains théorèmes de $\mathscr{L}$ un manque de lien effectif entre l'antécédent et le conséquent. C'est ainsi qu'on aura, par exemple (cas particulier de *T6*):

$\vdash_{\mathscr{L}} (p \prec p) \prec (q \prec q)$

1	$\mid\ \mid\ p \prec p$	*hyp*
2	$\mid\ \mid\ \Box \mid\ \mid\ q$	*hyp*
3	$\mid\ \mid\ \quad \mid\ \mid\ q$	2, *rep*

3. Systéme S_2.

4	$\quad\quad q \supset q$	2–3, $\supset i$
5	$\quad \Box(q \supset q)$	2–4, $\Box i$
6	$\quad q \prec q$	5, *rep df* $\prec$
7	$(p \prec p) \supset (q \prec q)$	1–6, $\supset i$

et l'épithéorème.

L'hypothèse de la ligne 1 est inutilisée dans la preuve. Cela signifie que $p \prec p$ n'est pas pertinent à l'établissement de $q \prec q$, qu'il y a manque de *relevance*, comme disent les auteurs en anglais. De là l'idée de chercher un type d'implication qui requiert de faire usage de toutes les hypothèses posées. Anderson-Belnap (1962) ont proposé une implication faible que nous désignerons par $<$. Le procédé formel consiste à accompagner chaque hypothèse d'un indice constitué par une classe unaire $\{k\}$: la première est indicée $\{1\}$, la deuxième $\{2\}$, et ainsi de suite. Les règles d'élimination et d'introduction de $<$, prennent alors la forme suivante:

Règle $<$e

Si α est l'indice de P et β celui de $P < Q$:

n	P_α	
m	$(P < Q)_\beta$	
	$Q_{\alpha \cup \beta}$	$n, m, <e$

Règle $<$i

Si α est l'indice de Q et $\{k\}$ celui de l'hypothèse P:

n	$\quad P_{\{k\}}$	*hyp*
	$\quad \vdots$	
m	$\quad Q_\alpha$	
	$(P < Q)_{\alpha - \{k\}}$	$n - m, <i$

Une expression M ne sera considérée comme un théorème du système (que nous appellerons $\mathscr{F}$) que si son indice est $\varnothing$.

Exemple 1

$\vdash_{\mathscr{F}} p < \cdot (p < q) < q$

1	$\quad p_{\{1\}}$	*hyp*
2	$\quad\quad (p < q)_{\{2\}}$	*hyp*
3	$\quad\quad p_{\{1\}}$	1, *reit*

4	$q_{\{1,2\}}$	2, 3, $<e$
5	$[(p < q) < q]_{\{1\}}$	2–4, $<i$
6	$[p < \cdot\, (p < q) < q]\varnothing$	

Exemple 2

$\vdash_{\mathcal{F}} (p < q) \cdot < (q < m) < (p < m)$

1	$(p < q)_{\{1\}}$	*hyp*
2	$(q < m)_{\{2\}}$	*hyp*
3	$p_{\{3\}}$	*hyp*
4	$(p < q)_{\{1\}}$	1, *reit*
5	$q_{\{1,3\}}$	3, 4, $<e$
6	$(q < m)_{\{2\}}$	2, *reit*
7	$m_{\{1,2,3\}}$	5, 6, $<e$
8	$(p < m)_{\{1,2\}}$	3–7, $<i$
9	$[(q < m) < (p < m)]_{\{1\}}$	2–8, $<i$
10	$[(p < q) \cdot < (q < m) < (p < m)]\varnothing$	1–9, $<i$

Cette façon de faire garantit que chaque hypothèse a pu être utilisée dans la déduction. Mais si l'exemple 2 paraît à l'abri de toute critique, il n'en va pas de même pour l'exemple 1. L'hypothèse 1 a bien été utilisée, mais nous n'avons aucune garantie sur sa nécessité. C'est pourquoi, à la suite d'Ackermann (1956), Anderson et Belnap construisent un calcul (*the pure calculus of entailment*), qu'ils désignent par E_I^* et qui combine la double exigence de la nécessité et de la pertinence. Pour y parvenir, ils évitent l'introduction explicite d'un opérateur de nécessité en s'appuyant sur la remarque suivante. S'il est possible de déduire Q de l'hypothèse P, si donc on a $P \vdash Q$, que P soit ou non une proposition nécessaire, l'expression $P \supset Q$ sera un théorème ($\supset i$). On aura donc $\vdash P \supset Q$ et l'aspect de nécessité est sauf. Ils sont ainsi conduits à ajouter aux règles $<e$ et $<i$, la règle de répétition restreinte:

Reit. res: On ne peut réitérer que des expressions de la forme $(P < Q)\alpha$.

Ceci rend la preuve de l'exemple 1 caduque, mais conserve la validité de celle de l'exemple 2.

Il semble que, dans l'état actuel des recherches, la conception d'Ackermann-Anderson-Belnap soit la plus satisfaisante.

1.4 Note bibliographique

Ackermann, W., Begründung einer strengen Implikation. *Journal of Symbolic Logic*, 1956, 21.2, 113-128.

*Anderson, A. R. et Belnap, N. D., The pure calculus of entailment. *Journal of Symbolic Logic*, 1962, *27.1*, 19-52.

Fitch, F. B., *Symbolic logic*. New York, The Ronald Press Company, 1952. Chap. 3, en particulier 11.9, 11.10.

Lewis, C. I., *A Survey of Symbolic logic*. Berkeley, Univ. of California Press, 1918.

Lewis, C. I. et Langford, C. H., *Symbolic logic*. New York, Dover Books, 1re éd. 1932, 2e éd. 1959.

DEUXIÈME PARTIE

LOGIQUES MODALES

2.1 Les modalités

La logique classique permet de formaliser des propositions du genre « l'objet x_1 a la propriété a », « l'objet x_1 n'a pas la propriété a ». Or, il arrive souvent que le locuteur souhaite exprimer non seulement que x_1 est (ou n'est pas) a, mais qu'il l'est d'une certaine façon. On est ainsi conduit à envisager un certain nombre de modalités, comme le *nécessaire*, le *possible*, le *non-nécessaire*, l'*impossible* (modalités aléthiques), l'obligatoire, le permis, le non-obligatoire, le défendu (modalités déontiques), etc.

Remarquons qu'une langue comme le français dispose d'un assez grand nombre de moyens pour marquer les modalités, affirmation et négation comprises. Retenons-en deux.

1ère façon

(1.1) Il est faux que x_1 possède la propriété a.

(1.2) Il est nécessaire que x_1 possède la propriété a.

« Il est faux » et « il est nécessaire » portent sur la proposition « x_1 possède la propriété a » toute entière et expriment quelque chose à son propos. On a, en quelque sorte deux niveaux:

Il est faux (nécessaire, . . .)

QUE — Proposition

Si l'on pose, pour abréger:

p = df x_1 possède la propriété a

on aura:

(1.1) valeur (p) = le faux

(1.2) valeur (p) = le nécessaire.
Les scolastiques parlaient de modalités *de dicto.*

2^e façon
(2.1) x_1 ne possède pas la propriété a
(2.2) x_1 possède nécessairement la propriété a.
Ici « pas » et « nécessairement » sont des opérateurs qui portent sur la copule « possède » et expriment la façon dont x_1 possède la propriété a. Le discours reste à un seul niveau et les anciens parlaient de modalités *de re.*

On rencontre ici un petit problème d'écriture qu'il faut tirer au clair. La notation usuelle de (2.1) est: $\sim ax_1$. D'une part la copule n'est pas marquée, d'autre part l'ordre sujet-prédicat est inversé et enfin l'opérateur de négation est écrit en tête. Il donne ainsi l'impression de porter sur la proposition toute entière à la manière du *de dicto.* En fait, $\sim$ est bien un opérateur propositionnel et on l'a tout justement défini de sorte que si val(ax_1) = le faux alors val($\sim ax_1$) = le vrai. Mais comme on convient d'écrire alors simplement $\sim ax_1$, *on est en présence d'un seul niveau.*

La quasi-totalité des logiques modales traitent le problème de la 2^e façon et c'est ce que nous allons faire. Introduisons donc, en plus de la négation $\sim$, les deux opérateurs $\Box$ et $\Diamond$, tels que
$\Box ax_1$ se lise « x_1 est nécessairement a »
$\Diamond ax_1$ se lise « x_1 est possiblement a ».[1]
D'autre part, $\Box$ et $\Diamond$ peuvent se combiner avec $\sim$, de sorte qu'on aura, en général;

$\Box P$ nécessairement P
$\Diamond P$ possiblement P
$\sim\Box P$ non nécessairement P
$\sim\Diamond P$ impossiblement P

Ceci dit, pour construire une logique modale dont les théorèmes, une fois interprétés, reflèteront certains aspects intuitifs des modalités, il faut commencer par fixer quelques propriétés. Il semble raisonnable d'accepter au moins les conditions suivantes:

$C1$ Une logique modale contient la logique classique $\mathscr{C}$.

1. Cette locution n'est peut-être pas très usuelle. Toutefois Littré signale l'adverbe *possiblement*, ainsi que Robert dans son supplément. Elle offre l'avantage de bien marquer que $\Diamond$ est un opérateur, mais nous ne nous y tiendrons pas systématiquement.

*C*2 $\Diamond P$ équivaut à $\sim\Box\sim P$: si *P* est possible, non-*P* n'est pas nécessaire et réciproquement.

*C*3 $\Box P$ équivaut à $\sim\Diamond\sim P$: si *P* est nécessaire, non-*P* est impossible et réciproquement.

*C*4 $\Box P$ implique *P*: si *P* est nécessaire, *P* est vraie.

*C*5 *P* implique $\Diamond P$: si *P* est vraie, *P* est possible.

*C*6 $\Box P$ et $\Box(P \supset Q)$ impliquent $\Box Q$: si *P* est nécessaire et si *P* alors *Q* l'est aussi, *Q* est nécessaire.

Ces conditions sont assez générales pour qu'il soit possible de construire de nombreux systèmes qui y satisfont. Nous nous contenterons d'en présenter six:

le système *T* de Feys (1937), qui s'est révélé être équivalent au système *M* de von Wright (1951) et que nous avons tacitement utilisé pour présenter l'implication stricte sous le nom de $\mathscr{L}$;

les systèmes *S*1 à *S*5 de Lewis-Langford (1959).

Ce choix résulte de ce que *T* et *S*1–*S*5 peuvent être considérés comme standard et servent de systèmes de référence aux autres.

2.2 Le système T

Il se recommande par son caractère «naturel» et, comme nous le verrons, par sa position centrale. Nous le présenterons en déduction naturelle mais, à des fins de généralisation, nous modifierons légèrement la façon de noter les règles que nous avons utilisées pour $\mathscr{L}$.[2]

Nous acceptons toutes les règles de $\mathscr{C}$ (Fascicule I) et posons ensuite:

Règle □e

$$\begin{array}{r|l l}
n & \Box P & \\
\hline
 & P & n, \Box e
\end{array}$$

Règle □i

$$\begin{array}{r|l|l l}
n & \Box & & \\
 & & P & \\
m & \Box P & & n - m, \Box i
\end{array}$$

Règle reit T

$$\begin{array}{r|l|l l}
n & \Box Q & & \\
 & \Box & & \\
 & & Q & n, \textit{reit } T
\end{array}$$

Une sous-déduction sans hypothèse et marquée d'un signe □ est appelée une *sous-déduction stricte.*

La règle $\Box i$ indique que, pour écrire $\Box P$, il faut disposer d'une sous-déduction stricte. La règle *reit T* qu'on ne peut réitérer dans une sous-

2. Les notations utilisées dans ce chapitre sont celles de Hughes-Cresswell (1968).

déduction stricte que des propositions nécessaires et cela en supprimant l'opérateur de nécessité (ou le premier d'entre eux, s'il y en a plus d'un).

Posons aussi la définition:

$Df\Diamond \qquad \Diamond P \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim\Box\sim P \cdot$

Cette façon de faire dispense de se donner des règles pour introduire et pour éliminer $\Diamond$. Toutefois, comme l'a montré Wisdom (1964), les choses ne sont pas aussi simples qu'en $\mathscr{C}$. Nous disposons de la règle *rep df* qui permet, lorsque $Q = \mathrm{df}\, P$ de remplacer P par Q (et réciproquement), mais à la condition que P soit une expression « isolée ».

Exemple

$$\begin{array}{r|ll} n & \sim\Box\sim M & \\ n+1 & \Diamond M & n,\ rep\ df\Diamond \end{array}$$

Contre-exemple

$$\begin{array}{r|l} n & \sim\sim\Box\sim M \\ & \end{array}$$

La règle *rep df* $\Diamond$ n'est pas applicable au groupe $\sim\Box\sim$.

Nous allons remédier à cette lacune en complétant T par la règle de remplacement suivante:

Règle remp

Si $Q = \mathrm{df}\, P$ ou si $Q \equiv P$ alors:

Si $f(P)$ représente une expression qui contient P, on peut remplacer une ou plusieurs mentions de P par Q dans f et

si $f(Q)$ représente une expression qui contient Q, on peut remplacer une ou plusieurs mentions de Q par P dans f.

Ainsi, aura-t-on, par exemple:

$$\begin{array}{r|ll} n & \sim\sim\Box\sim M & \\ & \sim\Diamond M & n,\ remp\ df\Diamond \end{array}$$

et si on a le théorème $(k) \vdash \sim M \equiv N$, on pourra écrire:

$$\begin{array}{r|ll} n & \sim\sim\Box\sim M & \\ & \sim\sim\Box N & n,\ remp\ \mathrm{th}(k) \end{array}$$

Montrons alors que T satisfait les six conditions $C1$–$C6$.

Il est d'abord évident, de par la façon dont T est construit, que T contient $\mathscr{C}$ (condition $C1$). Ensuite, on a:

T-1 $\qquad \vdash_T \Diamond P \equiv \sim\Box\sim P$[3]

3. Comme nous aurons à comparer plusieurs systèmes, nous adoptons les conventions suivantes: X-k désigne le théorème k du système X et $\vdash_X P$ signifie que P est un théorème dans le système X.

Immédiat par *rep df*$\Diamond$.

T-2 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Box P \equiv \sim\Diamond\sim P$

1	$\vert\ \vert\ \Box P$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \Diamond\sim P$	*hyp*
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Box\sim\sim P$	2, *remp df*$\Diamond$
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\ \vert\ P$	1, *reit T*
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \quad \vert\ \sim\sim P$	4, *neg* $\sim i$
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\sim\sim P$	4–5, $\Box i$
7	$\vert\ \vert\ \sim\Diamond\sim P$	2, 3, 6, $\sim i$
8	$\vert\ \Box P \supset \sim\Diamond\sim P$	1–7, $\supset i$

1	$\vert\ \vert\ \sim\Diamond\sim P$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Box P$	*hyp*
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\sim\Diamond\sim P$	2, *remp df*$\Diamond$
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \Diamond\sim P$	3, *neg* $\sim e$
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Diamond\sim P$	1, *reit*
6	$\vert\ \vert\ \sim\sim\Box P$	2, 4, 5, $\sim i$
7	$\vert\ \vert\ \Box P$	6, *neg* $\sim e$
8	$\vert\ \sim\Diamond\sim P \supset \Box P$	1–7, $\supset i$

Remarque. La règle *reit* reste valable lorsqu'il s'agit de réitérer dans des sous-déductions non strictes.

T-3 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Box P \supset P$ $\quad$ par $\Box e$

T-4 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} P \supset \Diamond P$

1	$\vert\ \vert\ P$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\sim P$	*hyp*
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim P$	2, $\Box e$
4	$\vert\ \vert\ \vert\ P$	1, *reit*
5	$\vert\ \vert\ \sim\Box\sim P$	2, 3, 4, $\sim i$
6	$\vert\ \vert\ \Diamond P$	5, *rep df*$\Diamond$
7	$\vert\ P \supset \Diamond P$	1–6, $\supset i$

Remarque

La règle *rep df* suffit à la ligne 6.

T-5 $\quad \Box P, \Box(P \supset Q) \vdash_{\mathrm{T}} \Box Q$

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \Box P & & hyp \\
2 & \Box(P \supset Q) & & \\
\hline
3 & \Box & \multicolumn{1}{|l}{P} & 1, reit\ T \\
4 & & \multicolumn{1}{|l}{P \supset Q} & 2, reit\ T \\
5 & & \multicolumn{1}{|l}{Q} & 3, 4 \supset e \\
6 & \Box Q & & 3\text{–}5, \Box i
\end{array}
$$

Remarque
T-5 exprime une règle et non un théorème, mais nous avons continué la numérotation.

Les théorèmes *T*-1 à *T*-5 ne sont rien d'autre que les conditions *C*2 à *C*6.
Citons encore:

T-6 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Box(P \supset Q) \supset (\Box P \supset \Box Q)$
T-7 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \sim\Box P \equiv \Diamond\sim P$
T-8 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \sim\Diamond P \equiv \Box\sim P$
T-9 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Diamond(P \wedge Q) \supset \Diamond P$
T-10 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Box(P \supset Q) \equiv \sim\Diamond(P \wedge \sim Q)$
T-11 $\quad \vdash_{\mathrm{T}} \Box(P \equiv Q) \equiv \cdot \Box(P \supset Q) \wedge \Box(Q \supset P)$
qui se démontrent sans difficulté.

Le système *T* jouit d'un certain nombre de propriétés. Elles donnent lieu à des épithéorèmes qu'il est commode d'énoncer sous forme de règles.

Règle N
Si $\quad \vdash_{\mathrm{T}} P$ alors $\vdash_{\mathrm{T}} \Box P$.

En effet, la prémisse de la règle permet de faire l'hypothèse que l'on dispose d'une déduction de P à partir de la classe d'hypothèses vide (I, p. 15). On écrit alors:

$$
\begin{array}{r|lll}
 & \Box & \multicolumn{1}{|l}{} & \left.\right\} \text{Preuve de } P \\
n & & \multicolumn{1}{|l}{P} & \\
n+1 & \Box P & & n, \Box i
\end{array}
$$

En particulier, si l'on pose:
Df $\prec \quad P \prec Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \Box(P \supset Q)$
on a:

Règle $\prec$i
Si $\vdash_T P \supset Q$, alors $\vdash_T P \prec Q$
Même raisonnement que pour la règle **N**.
Enfin, si l'on pose:
Df$\asymp$ $\quad P \asymp Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$
on a:

Règle $\asymp$ i
Si $\vdash_T P \equiv Q$ alors $\vdash_T P \asymp Q$
En effet:

1	$P \equiv Q$	Prémisse de la règle
2	$(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	1, *rep df* $\equiv$
3	$P \supset Q$	2, $\wedge e$
4	$Q \supset P$	2, $\wedge e$
5	$P \prec Q$	3, $\prec i$ (3 est un théorème)
6	$Q \prec P$	4, $\prec i$ (4 est un théorème)
7	$(P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$	5, 6, $\wedge i$
8	$P \asymp Q$	7, *rep df* $\asymp$

Notons qu'on aurait aussi pu poser la définition:
$P \asymp Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \Box(P \equiv Q)$. On a en effet:
T-12 $\quad \vdash_T (P \prec Q) \wedge (Q \prec P) \equiv \Box(P \equiv Q)$.

1	$(P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$	*hyp*
2	$P \prec Q$	1, $\wedge e$
3	$Q \prec P$	1, $\wedge e$
4	$\Box(P \supset Q)$	2, *rep df* $\prec$
5	$\Box(Q \supset P)$	3, *rep df* $\prec$
6	$\Box \quad P \supset Q$	4, *reit T*
7	$\quad Q \supset P$	5, *reit T*
8	$\quad (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	6, 7, $\wedge i$
9	$\quad P \equiv Q$	8, *rep df* $\equiv$
10	$\Box(P \equiv Q)$	6–9, $\Box i$
11	$(P \prec Q) \wedge (Q \prec P) \cdot \supset \Box(P \equiv Q)$	1–10, $\supset i$

et

1	$\Box(P \equiv Q)$	*hyp*
2	$\Box \quad P \equiv Q$	1, *reit T*
3	$\quad (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	2, *rep df* $\equiv$

4	$\quad\mid P \supset Q$	3, $\wedge e$
5	$\Box(P \supset Q)$	2–4, $\Box i$
6	$P \prec Q$	5, *rep df* $\prec$
7	$Q \prec P$	Même procédure
8	$(P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$	6, 7, $\wedge i$
9	$\Box(P \equiv Q) \supset \cdot (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$	1–8, $\supset i$

Ces règles seront utiles pour établir des comparaisons avec les systèmes suivants.

Remarque
Il est naturellement possible de construire T de façon axiomatique. Feys (1965) le fait comme suit:

Notions primitives: les variables de propositions, les deux opérateurs unaires $\sim$ et $\Box$, l'opérateur binaire $\vee$.
Expressions bien formées (ebf)
(1) Une variable de proposition est une ebf:
Si P est une ebf.
(2) $\sim P$ est une ebf.
(3) $\Box P$ est une ebf.
Si P et Q sont des ebf:
(4) $(P \vee Q)$ est une ebf.
(5) Rien n'est une ebf, sinon par (1)–(4).

Définitions
$P \wedge Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim(\sim P \vee \sim Q)$
$P \supset Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim P \vee Q$
$P \equiv Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$
$\Diamond P \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim \Box \sim P$
$P \prec Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \Box(P \supset Q)$
$P \asymp Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \Box(P \equiv Q)$

Axiomes
Pour le calcul $\mathscr{C}$:
(A1) $\vdash_T (p \vee p) \supset p$
(A2) $\vdash_T p \supset (p \vee q)$
(A3) $\vdash_T (p \vee q) \supset (q \vee p)$
(A4) $\vdash_T (p \supset q) \cdot \supset \cdot (m \vee p) \supset (m \vee q)$

Pour $\Box$:

(*A*5) $\vdash_T \Box p \supset p$

(*A*6) $\vdash_T \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

Règles

Substitution (**S**). Une proposition reste valide si on substitue une ebf à chaque mention d'une de ses variables de proposition.

Détachement (**D**). Si $\vdash_T P$ et $\vdash_T P \supset Q$, alors $\vdash_T Q$

Nécessité (**N**). Si $\vdash_T P$ alors $\vdash_T \Box P$.

Il est facile de montrer que le système déterminé par la déduction naturelle inclut celui déterminé axiomatiquement. En effet, la différence des deux définitions de $\asymp$ est sans portée (*T*-12). D'autre part:

(*A*1) à (*A*4) se démontrent par les règles de $\mathscr{C}$.

(*A*5) est *T*-3

(*A*6) est *T*-6

La règle (**S**) est rendue superflue par l'emploi des variables syntaxiques (majuscules), la règle (**D**) est $\supset e$ et la règle (**N**) a été déduite.

La réciproque est plus complexe à établir, mais elle est vraie (Hughes-Cresswell 1968, p. 334). Dans la suite nous parlerons donc de *T* sans distinguer son mode de présentation et nous ferons usage de toutes ses règles, théorèmes et propriétés.

2.3 Deux systèmes contenus en T: S1 et S2

Les systèmes *Si* ($i = 1, \ldots, 5$) de Lewis et Langford peuvent être présentés de plusieurs façons. Nous donnerons (à une variante près pour *S*3) les définitions originales. Ils reposent sur une base commune qui est la suivante:

Notions primitives: les variables de proposition, les opérateurs unaires $\sim$ et $\Diamond$ et l'opérateur binaire $\wedge$.

Expressions bien formées: elles sont déterminées, comme de coutume, par une définition inductive.

Définitions

$P \supset Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim(P \wedge \sim Q)$

$P \equiv Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$

$\Box P \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim\Diamond\sim P$

$P \prec Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim\Diamond(P \wedge \sim Q)$

$P \asymp Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$

Règles
Substitution (**S**). Comme en T
Remplacement (**R**). Si $\vdash_{Si} P \asymp Q$, alors une expression valide qui contient P le reste, si on y remplace une ou plusieurs mentions de P par Q.
Adjonction (**A**). Si $\vdash_{Si} P$ et $\vdash_{Si} Q$, alors $\vdash_{Si} P \wedge Q$.
Détachement (**D**′). Si $\vdash_{Si} P$ et $\vdash_{Si} P \prec Q$, alors $\vdash_{Si} Q$.

Les systèmes ne diffèrent alors que par leurs axiomes.

Le système S1

Il peut être considéré comme la base des autres systèmes S.
Axiomes ($B1$) à ($B7$) (*cf.* 1, pp. 9-11)

Signalons, sans démonstration, quelques-unes de ses propriétés et quelques théorèmes.

Epithéorème 1. Si $\vdash_{\mathscr{C}} P$, alors $\vdash_{S1} P$. En d'autres termes, $S1$ contient $\mathscr{C}$ et la condition ($C1$) est satisfaite.

On a les théorèmes suivants:

$S1$–1 $\quad \vdash_{S1} \Diamond p \asymp \sim\Box\sim p$
$S1$–2 $\quad \vdash_{S1} \Box p \asymp \sim\Diamond\sim p$
$S1$–3 $\quad \vdash_{S1} \Box p \prec p$
$S1$–4 $\quad \vdash_{S1} \Box p \wedge (p \prec q) \cdot \prec \Box q$

$S1$–1 à $S1$–3 et ($B7$) permettent de dire que les conditions ($C2$) à ($C5$) sont satisfaites, dans la mesure où l'on interprète le signe $\asymp$ par « équivaut » et le signe $\prec$ par « implique ». D'autre part, comme on a encore:

$S1$–5 $\quad \vdash_{S1} \Box(p \supset q) \asymp (p \prec q)$

le théorème $S1$–4 permet d'énoncer la règle qui correspond à la condition ($C6$). Donc:

Epithéorème 2. Le système $S1$ satisfait les conditions ($C1$) à ($C6$).
On a encore:

$S1$–6 $\quad \vdash_{S1} p \prec (q \supset p)$ mais pas $p \prec (q \prec p)$
$S1$–7 $\quad \vdash_{S1} \sim p \prec (p \supset q)$ mais pas $\sim p \prec (p \prec q)$
$S1$–8 $\quad \vdash_{S1} (p \prec q) \prec (p \supset q)$

d'où:

Epithéorème 3. L'opérateur $\prec$ de $S1$ est distinct de l'opérateur $\supset$ et il est « plus strict » que lui.

Remarque. $S1$ ne contient pas les théorèmes paradoxaux de l'implication stricte.
Enfin:

Epithéorème 4. Si $\vdash_{\mathscr{C}} P$, alors $\vdash_{S1} \Box P$, mais si $\vdash_{S1} P$ il peut se faire qu'on ait $\vdash_{S1} \Box P$ ou non.

Ainsi, par exemple, on a: $\vdash_{S1} p \supset \Diamond p$ et aussi $\vdash_{S1} \Box(p \supset \Diamond q)$, ce qui est ($B7$) en tenant compte de $S1$–5. En revanche, on n'aura pas $\Box(p \prec q)$. La règle de nécessité **N** n'est donc pas universellement valide.

Il est intéressant de constater qu'il est possible d'introduire un opérateur de compatibilité. On pourra dire que P est compatible avec Q, si P n'implique pas non-Q. Si l'on voulait exprimer ceci en $\mathscr{C}$, on aurait:
P compatible avec $Q \cdot = \text{df} \sim(P \supset \sim Q)$.
Or comme on sait que $\vdash_{\mathscr{C}} \sim(P \supset \sim Q) \equiv (P \wedge Q)$, la compatibilité ne se distinguerait pas de la conjonction. Mais en $S1$, on peut poser:
P compatible avec $Q \cdot = \text{df} \cdot P \circ Q \cdot = \text{df} \sim(P \prec \sim Q)$
et l'on a alors seulement:
$S1$–9 $\quad \vdash_{S1} (p \wedge q) \prec (p \circ q)$
D'autre part
$S1$–10 $\quad \vdash_{S1} \Diamond p \asymp (p \circ p)$, la possibilité équivaut à l'autocompatibilité.
$S1$–11 $\quad \vdash_{S1} \sim\Diamond p \asymp \sim(p \circ p)$, une proposition impossible est incompatible avec elle-même.
$S1$–12 $\quad \vdash_{S1} \sim(p \circ \sim p)$, aucune proposition n'est compatible avec sa négation.

Le système S2

C'est comme nous le savons, le système original de l'implication stricte. Rappelons que nous avions: ($B8$) $\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$.
Dès lors, on peut poser:
$S2 \cdot = \text{df} \cdot S1 + (B8)$
Il est tout d'abord évident que $S2$ contient $S1$. D'autre part, on démontre:
$S2$–1 $\quad \vdash_{S2} \Box p \prec (q \prec p)$
$S2$–2 $\quad \vdash_{S2} \sim\Diamond p \prec (p \prec q)$
ce qui signifie que $S2$ contient les « paradoxes de l'implication stricte », que ne connaît pas $S1$.

On montre enfin qu'on a, pour $S2$ l'équivalent de l'épithéorème 4: la règle de nécessité n'est pas non plus universellement valide. Il ne faudrait cependant pas en conclure que l'axiome ($B8$) ne modifie pas profondément le « sens » des opérateurs de modalité. Ils acquièrent au contraire des propriétés qui les rapprochent formellement des quantificateurs, ainsi qu'en témoignent les théorèmes suivants :

Lois des modalités en $S2$	Lois des quantificateurs
$S2\text{–}3 \ \vdash_{S2} \Box(p \wedge q) \asymp \cdot \Box p \wedge \Box q$	$\vdash (\forall x)(ax \wedge bx) \equiv \cdot (\forall x)ax \wedge (\forall x)bx$
$S2\text{–}4 \ \vdash_{S2} \Diamond(p \vee q) \asymp \cdot \Diamond p \vee \Diamond q$	$\vdash (\exists x)(ax \vee bx) \equiv \cdot (\exists x)ax \vee (\exists x)bx$
$S2\text{–}5 \ \vdash_{S2} \Box p \vee \Box q \cdot \prec \Box(p \vee q)$	$\vdash (\forall x)ax \vee (\forall x)bx \cdot \supset (\forall x)(ax \vee bx)$
$S2\text{–}6 \ \vdash_{S2} \Diamond(p \wedge q) \prec \cdot \Diamond p \wedge \Diamond q$	$\vdash (\exists x)(ax \wedge bx) \supset \cdot (\exists x)ax \wedge (\exists x)bx$

Ceci n'est pas dépourvu d'intérêt, eu égard à ce que l'on sait de la genèse des modalités et des rapports entre « tous », « toujours », « partout », « il est nécessaire », etc. (Le Bonniec, 1973).

Reste à montrer que T contient $S1$ et $S2$ comme l'annonce le titre de ce paragraphe. D'abord, puisque $S1$ est contenu en $S2$, il suffira de comparer T et $S2$. Comme la base de ces deux systèmes n'est pas identique, il y faut quelques précautions. On a, en effet,

Systèmes S	Système T
$P \prec Q \cdot = \text{df} \sim\Diamond(P \wedge \sim Q)$	$P \prec Q \cdot = \text{df} \cdot \Box(P \supset Q)$
$P \asymp Q \cdot = \text{df} (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$	$P \asymp Q \cdot = \text{df} \cdot \Box(P \equiv Q)$
$\Box P \cdot = \text{df} \sim\Diamond\sim P$	$\Diamond Q \cdot = \text{df} \prec \Box \sim P$

Or, nous avons vu que :

T-10 $\quad \vdash_T \Box(P \supset Q) \equiv \sim\Diamond(P \wedge \sim Q)$

T-11 $\quad \vdash_T \Box(P \equiv Q) \equiv \cdot \Box(P \supset Q) \wedge \Box(Q \supset P)$

et que :

T-1 $\quad \vdash_T \Diamond P \equiv \sim\Box\sim P$ $\quad$ et $\quad$ T-2 $\quad \vdash_T \Box P \equiv \sim\Diamond\sim P$

La règle **N** (de T) et la définition de $\asymp$ autorisent à faire usage des notations de $S2$. Il ne reste plus alors qu'à montrer que les règles et les axiomes de $S2$ sont valides en T. Or, on a :

Règle (**S**) : la même en $S2$ et en T.

Règle (**R**) : on la prouve par induction sur la forme des ebf.

Règle (**A**) : c'est $\wedge i$

Règle (**D**′):

1	P	Prémisses
2	$P \prec Q$	
3	$\Box(P \supset Q)$	2, *rep df* $\prec$
4	$P \supset Q$	3, $\Box e$
5	Q	1, 4, $\supset e$

Quant aux expressions ($B1$) à ($B8$), il faut distinguer: ($B1$) à ($B5$). On les prouve dans T avec $\supset$ à la place de $\prec$ et on applique la règle $\prec i$.

($B6$) revient à $\Box[\Box(p \supset q) \supset \Box(q \supset m) \cdot \supset \Box(p \supset m)]$ qui se prouve sans peine

($B7$) découle de T-5

($B8$) est T-9.

En revanche, $S2$ ne contient pas T, dans la mesure où $S2$ ne dispose pas de la règle de nécessité **N** sous sa forme générale. On aura donc, si $X \mapsto Y$ signifie « le système X est strictement contenu[4] dans le système Y »:

$\mathscr{C} \mapsto S1 \mapsto S2 \mapsto T.$

2.4 Le système S3

La définition des ebf de la logique des prédicats (II, p. 48) empêche d'introduire des expressions de la forme $(\forall x)(\forall x)ax$, $(\forall x)(\exists x)ax$, etc. En revanche la définition des ebf de T et celle (que nous n'avons pas explicitée) des ebf de $S1$ et de $S2$ permettent de réitérer aussi souvent que l'on veut les opérateurs $\Box, \Diamond$. Ainsi a-t-on par exemple: $\Box p$, $\Box\Box p$, $\Box\Box\Box p$, etc. dans T et $\Diamond p$, $\Diamond\Diamond p$, $\Diamond\Diamond\Diamond p$, etc. dans S_i.

Comme les systèmes en question ne comportent aucun théorème de réduction, c'est-à-dire aucun théorème du genre $\Box\Box\Box p \equiv \Box\Box p$ par exemple, on en conclut qu'ils contiennent une infinité de modalités distinctes. C'est manifestement là un inconvénient du point de vue des applications. On ne voit guère de circonstances, en effet, où l'on serait amené à distinguer des propositions nécessaires, nécessairement nécessaires, nécessairement nécessairement nécessaires et ainsi de suite. Le système $S3$ va remédier à ce « défaut » en ne comportant qu'un nombre fini de modalités.

4. « Strictement contenu » s'oppose ici à « contenu au sens large ». L'expression signifie donc qu'il existe au moins un théorème de Y qui n'est pas un théorème de X.

Considérons l'expression:

(*B*7.1) $(p \prec q) \prec (\Diamond p \prec \Diamond q)$[5]

On peut poser alors:

$S3 \cdot = \mathrm{df} \cdot S1 + (B7 \cdot 1)$

Epithéorème 1. *S*3 contient *S*2.

En effet:

1.	$(p \wedge q) \prec p$	(*B*2)
2.	$(p \wedge q) \prec p \cdot \prec \cdot \Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$	(*B*7.1), $p/p \wedge q$, q/p
3.	$\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$	1, 2, règle **D**′

On démontre aussi les théorèmes suivants:

*S*3–1 $\vdash_{S3} \Box\Box p \asymp \Box\Box\Box p$ abrégé $\vdash_{S3} \Box^2 p \asymp \Box^3 p$

*S*3–2 $\vdash_{S3} \Diamond^2 p \asymp \Diamond^3 p$

*S*3–3 $\vdash_{S3} (\Box\Diamond)^2 p \asymp \Box\Diamond p$

*S*3–4 $\vdash_{S3} \Box^2\Diamond^2 p \asymp \Box^2\Diamond p$

*S*3–5 $\vdash_{S3} \Diamond^2\Box^2 p \asymp \Diamond^2\Box p$

*S*3–6 $\vdash_{S3} \Box^2\Diamond\Box^2 p \asymp \Box^2\Diamond\Box p$

*S*3–7 $\vdash_{S3} \Box\Diamond^2\Box\Diamond p \asymp \Box\Diamond^2 p$

*S*3–8 $\vdash_{S3} \Diamond\Box^2\Diamond\Box p \asymp \Diamond\Box^2 p$

Ces théorèmes suffisent à montrer que *S*3 ne contient qu'un nombre fini de modalités distinctes.

Appelons *modalité propre* toute chaîne de signes $\Box$, $\Diamond$, $\sim$ qui contient au moins un $\Box$ ou un $\Diamond$. Ainsi, par exemple:

(1) $\Box\sim\Diamond\Diamond\sim$ et (2) $\sim\sim\sim\Diamond\sim\sim\Diamond$

sont des modalités propres.

La règle de remplacement **R** et les équivalences suivantes, valables déjà dans *S*1:

$\vdash_{S3} \sim\Box p \asymp \Diamond\sim p$, $\vdash_{S3} \sim\Diamond p \asymp \Box\sim p$, $\vdash_{S3} \sim\Diamond\sim p \asymp \Diamond p$,
$\vdash_{S3} \sim\Diamond\sim p \asymp \Box p$, $\vdash_{S3} p \asymp \sim\sim p$

permettent de mettre toute modalité sous une forme simplifiée. Sera dite *modalité simplifiée*, toute modalité qui comporte au plus un signe $\sim$, immédiatement avant la proposition qu'elle modalise.

Exemples

(1) $\Box\sim\Diamond\Diamond\sim p \asymp \Box\Box\sim\Diamond\sim p \asymp \Box\Box\Box p$

(2) $\sim\sim\sim\Diamond\sim\sim\Diamond p \asymp \sim\Diamond\sim\sim\Diamond p \asymp \Box\sim\Diamond p \asymp \Box\Box\sim p$

5. C'est ici que nous nous écartons de Lewis-Langford 1959, pour suivre Feys 1965.

Il existe alors quatre types de modalités propres simplifiées:

A. $\Box \ldots (p)$ C. $\Box \ldots \sim(p)$

B. $\Diamond \ldots (p)$ D. $\Diamond \ldots \sim(p)$

Etudions le type A en fonction du nombre n des opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ ($n \geqslant 1$, puisqu'il s'agit de modalités propres).

n	Formes[6]
1	$\Box p$
2	$\Box\Box p$ $\Box\Diamond p$
3	$\Box\Box\Box p \asymp \Box\Box p$ par $S3$–1 $\Box\Box\Diamond p$ $\Box\Diamond\Box p$ $\Box\Diamond\Diamond p$
4	$\Box\Box\Diamond\Box p$ $(\Box\Box)(\Diamond\Diamond)p \asymp \Box\Box\Diamond p$ par $S3$–4 $\Box\Diamond\Box\Box p$ $(\Box\Diamond)(\Box\Diamond)p \asymp \Box\Diamond p$ par $S3$–3 $\Box\Diamond\Diamond\Box p$ $\Box(\Diamond\Diamond\Diamond)p \asymp \Box\Diamond\Diamond p$ par $S3$–2
5	$(\Box\Box)\Diamond(\Box\Box)p \asymp \Box\Box\Diamond\Box p$ par $S3$–6 $\Box(\Box\Diamond)(\Box\Diamond)p \asymp \Box\Box\Diamond p$ par $S3$–3 $\Box\Diamond(\Box\Box\Box)p \asymp \Box\Diamond\Box\Box p$ par $S3$–1 $\Box\Diamond\Box\Box\Diamond p$ $\Box(\Diamond\Diamond)(\Box\Box)p \asymp \Box\Diamond\Diamond\Box p$ par $S3$–5 $\Box(\Diamond\Diamond)\Box\Diamond p \asymp \Box\Diamond\Diamond p$ par $S3$–7
6	$\Box\Diamond(\Box\Box)\Diamond\Box p \asymp \Box\Diamond\Box\Box p$ par $S3$–8 $\Box\Diamond(\Box\Box)(\Diamond\Diamond)p \asymp \Box\Diamond\Box\Box\Diamond p$ par $S3$–5

6. Nous avons entouré certains grouprs de parenthèses pour faciliter l'application des théorèmes.

Le type A comporte donc 10 modalités distinctes. Il suffit alors de remarquer que le type B s'obtient de A en remplaçant partout les $\Box$ par des $\Diamond$, et réciproquement, pour obtenir 10 nouvelles modalités. Le type C en fournit 10 autres (celles de A suivies de $\sim$) et celles de D encore 10 (celles de B suivies de $\sim$).

De là:

Epithéorème 2. $S3$ comporte 42 modalités distinctes: 40 modalités propres et les deux modalités dites impropres, l'affirmation et la négation.

Enfin, on a:

Epithéorème 3. T ne contient pas $S3$ et $S3$ ne contient pas T.

T ne contient pas $S3$ puisqu'il ne comporte aucun des théorèmes de réduction. La nature particulière de la règle *reit T*, en effet, empêche de démontrer par exemple $\Box\Box p \supset \Box\Box\Box p$. Pour s'assurer que $S3$ ne contient pas T, on montre que la règle de nécessité **N** n'est pas universellement valide en $S3$.

2.5 Le système S4

Si l'on s'intéresse aux interprétations des modalités, disposer d'un système qui n'en comporte qu'un nombre fini est un avantage. De ce point de vue, et bien qu'il paraisse fort difficile de distinguer, par exemple, l'interprétation de $\Box\Box\Diamond\Box$ de celle de $\Box\Diamond\Box\Box$, $S3$ a des qualités que ne possède pas T. Mais, par ailleurs, T offre l'avantage de contenir la règle **N**. Au sens usuel de la nécessité logique, en effet, on ne voit guère pourquoi certains théorèmes d'un système seraient nécessaires et d'autres pas, ainsi que les choses se passent en $S1$, $S2$ et en $S3$.

Pour « perfectionner » encore $S3$, si l'on peut dire, Lewis et Langford ont considéré l'axiome

$(C10) \quad \Box p \prec \Box\Box p$

et posé la définition suivante:

$S4 \cdot = \mathrm{df} \cdot S1 + (C10)$.

L'idée contenue dans $(C10)$ consiste à disposer d'un théorème qui permette d'identifier le nécessaire au nécessairement nécessaire. Reprenons la présentation de T en déduction naturelle et introduisons cette idée. Il suffira, pour cela, de remplacer la règle *reit T* par la règle *reit S4* suivante:

Règle reit S4

$$\begin{array}{r|l|ll}
n & \Box Q & & \\
 & \Box & & \\
 & & \Box Q & \quad n, \textit{reit } S4.
\end{array}$$

Dans une sous-déduction stricte, seule la réitération d'une proposition nécessaire est autorisée, mais il faut récrire la proposition sans lui apporter aucune modification.

On a immédiatement:

Epithéorème 1. La présentation de $S4$ en déduction naturelle contient T. En effet:

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & \Box Q & & \text{Prémisse de } \textit{reit } T \\
2 & \Box & \Box Q & 1, \textit{reit } S4 \\
3 & & Q & 2, \Box e
\end{array}$$

On aura dès lors:

$S4$–1 $\quad \vdash_{S4} \Box p \asymp \Box\Box p$

$$\begin{array}{r|l|l|ll}
1 & & \Box p & & \textit{hyp} \\
\cline{3-3}
2 & & \Box & \Box p & 1, \textit{reit } S4 \\
3 & & \Box\Box p & & 2\text{–}2, \Box i \\
4 & \Box p \supset \Box\Box p & & & 1\text{–}3, \supset i
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|ll}
1 & & \Box\Box p & \textit{hyp} \\
\cline{3-3}
2 & & \Box p & 1, \Box e \\
3 & \Box\Box p \supset \Box p & & 1\text{–}2, \supset i
\end{array}$$

donc $\vdash_{S4} \Box p \equiv \Box\Box p$ et $S4$–1 par la règle $\asymp i$.

Epithéorème 2. La présentation de $S4$ en déduction naturelle est équivalente à la présentation axiomatique.

Les raisonnements qui ont montré que T contenait $S2$ et le théorème $S4$–1 en prouvent la première partie, mais la réciproque est aussi vraie (Hughes-Cresswell, 1968, p. 334). Nous parlerons donc désormais de $S4$ sans préciser le mode de présentation.

Epithéorème 3. $S4$ contient $S3$ et $S3$ ne contient pas $S4$.

Il suffit, pour établir la première partie, de démontrer:

$S4$–2 $\quad \vdash_{S4} (p \prec q) \prec (\Diamond p \prec \Diamond q)$

ce qui peut se faire comme suit:

$$\begin{array}{r|l|l|ll}
1 & & p \prec q & & \textit{hyp} \\
\cline{3-3}
2 & & \Box(p \supset q) & & 1, \textit{rep df} \prec \\
3 & & \Box & \Box(p \supset q) & 2, \textit{reit } S4
\end{array}$$

4	$\sim\Box\sim p$	*hyp*
5	$\Box\sim q$	*hyp*
6	$\Box \mid \Box\sim q$	5, *reit S*4
7	$\Box(p \supset q)$	3, *reit S*4
8	$\sim q$	6, $\Box e$
9	$p \supset q$	7, $\Box e$
10	$\sim q \supset \sim p$	9, th. de $\mathscr{C}$
11	$\sim p$	8, 10, $\supset e$
12	$\Box\sim p$	6–11, $\Box i$
13	$\sim\Box\sim p$	4, *reit*
14	$\sim\Box\sim q$	5, 12, 13, $\sim i$
15	$\sim\Box\sim p \supset \sim\Box\sim q$	4–14, $\supset i$
16	$\Diamond p \supset \Diamond q$	15, *remp df* $\Diamond$
17	$\Box(\Diamond p \supset \Diamond q)$	3–16, $\Box i$
18	$\Diamond p \prec \Diamond q$	17, *rep df* $\prec$
19	$(p \prec q) \supset (\Diamond p \prec \Diamond q)$	1–18, $\supset i$
20	Théorème	19, $\prec i$

La preuve que *S*3 ne contient pas *S*4 se fait en utilisant des matrices et en montrant que (*C*10) n'est pas déductible des axiomes de *S*3.

Le trait le plus saillant de *S*4 est de ne contenir que 12 modalités propres distinctes. Etablissons pour le montrer les deux théorèmes suivants:

*S*4–3 $\quad \vdash_{S4} \Diamond p \equiv \Diamond\Diamond p$

L'implication de gauche à droite est donnée par *T*-4, en posant $P/\Diamond p$. De plus:

1	$\Box\sim p$	*hyp*
2	$\Box \mid \Box\sim p$	1, *reit S*4
3	$\sim\sim\Box\sim p$	2, *neg* $\sim i$
4	$\Box\sim\sim\Box\sim p$	2–3, $\Box i$
5	$\Box\sim p \supset \Box\sim\sim\Box\sim p$	1–4, $\supset i$
6	$\sim\Box\sim\sim\Box\sim p \supset \sim\Box\sim p$	5, th. de $\mathscr{C}$
7	$\Diamond\Diamond p \supset \Diamond p$	6, *remp df* $\Diamond$

*S*4–4 $\quad \vdash_{S4} \Box\Diamond\Box\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$

Pour des raisons de clarté, déduisons d'abord deux règles:

Règle α:

n	P	

	$\Diamond P$	n, α

en effet:

1	P	Prémisse
2	$\mid\ \Box \sim P$	*hyp*
3	$\mid\ \sim P$	$2, \Box e$
4	$\mid\ P$	1, *reit*
5	$\sim \Box \sim P$	$2, 3, 4 \sim i$
6	$\Diamond P$	5, *rep df*

Règle β:

n	$\Diamond P$	
m	$\Box(P \supset Q)$	

	$\Diamond Q,$	n, m, β

en effet:

1	$\Diamond P$	Prémisses
2	$\Box(P \supset Q)$	
3	$\sim \Box \sim P$	1, *rep df* $\Diamond$
4	$\mid\ \Box \sim Q$	*hyp*
5	$\mid\ \Box \mid\ \Box \sim Q$	4, *reit S4*
6	$\mid\ \ \mid\ \Box(P \supset Q)$	2, *reit S4*
7	$\mid\ \ \mid\ \sim Q$	$5, \Box e$
8	$\mid\ \ \mid\ P \supset Q$	$6, \Box e$
9	$\mid\ \ \mid\ \sim Q \supset \sim P$	8, th. de $\mathscr{C}$
10	$\mid\ \ \mid\ \sim P$	$9, 7, \supset e$
11	$\mid\ \Box \sim P$	$5\text{–}10, \Box i$
12	$\mid\ \sim \Box \sim P$	3, *reit*
13	$\sim \Box \sim Q$	$4, 11, 12, \sim i$
14	$\Diamond Q$	13, *rep df* $\Diamond$

On aura alors:

1	$\mid\ \Box \Diamond p$	*hyp*
2	$\mid\ \Box \mid\ \Box \Diamond p$	1, *reit S4*
3	$\mid\ \ \mid\ \Diamond \Box \Diamond p$	$2, \alpha$
4	$\mid\ \Box \Diamond \Box \Diamond p$	$2\text{–}3, \Box i$
5	$\Box \Diamond p \supset \Box \Diamond \Box \Diamond p$	$1\text{–}4, \supset i$

et

1	$\mid\ \Box \Diamond \Box \Diamond p$	*hyp*
2	$\mid\ \Box \mid\ \Box \Diamond \Box \Diamond p$	1, *reit S4*
3	$\mid\ \ \mid\ \Diamond \Box \Diamond p$	$2, \Box e$

4	$\mid\ \mid\ \mid \Box \mid\ \mid \Box\Diamond p$	*hyp*
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \ \mid\ \mid \Diamond p$	4, $\Box e$
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \ \mid \Box\Diamond p \supset \Diamond p$	4–5, $\supset i$
7	$\mid\ \mid\ \mid \Box(\Box\Diamond p \supset \Diamond p)$	4–6, $\Box i$
8	$\mid\ \mid\ \mid \Diamond\Diamond p$	3, 7, β
9	$\mid\ \mid\ \mid \Diamond p$	8, $S4$–3
10	$\mid\ \mid \Box\Diamond p$	2–9, $\Box i$
11	$\mid \Box\Diamond\Box\Diamond p \supset \Box\Diamond p$	1–10, $\supset i$

Reprenons alors les 10 modalités propres de type A de $S3$. On a:

$S3$	Se réduit à		$S4$
$\Box$			$\Box$
$\Box\Box$	$\Box$	par $S4$–1	—
$\Box\Diamond$			$\Box\Diamond$
$\Box\Box\Diamond$	$\Box\Diamond$	par $S4$–1	—
$\Box\Diamond\Box$			$\Box\Diamond\Box$
$\Box\Diamond\Diamond$	$\Box\Diamond$	par $S4$–3	—
$\Box\Box\Diamond\Box$	$\Box\Diamond\Box$	par $S4$–1	—
$\Box\Diamond\Box\Box$	$\Box\Diamond\Box$	par $S4$–1	—
$\Box\Diamond\Diamond\Box$	$\Box\Diamond\Box$	par $S4$–3	—
$\Box\Diamond\Box\Box\Box$	$\Box\Diamond\Box\Diamond$	par $S4$–1 et	—
	$\Box\Diamond$	par $S4$–4	

Remarque. Les réductions exigent l'emploi de la règle *remp.*

On aura donc 3 modalités propres pour chacun des quatre types et il vient:

Epithéorème 4. $S4$ contient 14 modalités distinctes: 12 modalités propres et les deux modalités impropres. Dressons-en la liste complète:

	Type		Type
p		$\sim p$	
$\Box p$	A	$\Box \sim p$	C
$\Diamond p$	B	$\Diamond \sim p$	D
$\Box\Diamond p$	B	$\Box\Diamond \sim p$	C
$\Diamond\Box p$	A	$\Diamond\Box \sim p$	D
$\Box\Diamond\Box p$	A	$\Box\Diamond\Box \sim p$	D
$\Diamond\Box\Diamond p$	B	$\Diamond\Box\Diamond \sim p$	C

On remarquera que les 14 propositions ci-dessus ne sont pas indépendantes. C'est ainsi qu'on a, par exemple:

$\vdash_{S4} \Box p \supset p, \qquad \vdash_{S4} p \supset \Diamond p, \qquad \vdash_{S4} \Box p \supset \Box\Diamond\Box p \qquad$ etc.

Si l'on note par une flèche $\rightarrow$ les implications, on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \Diamond p & & \Diamond\Box\Diamond p \arrow[ll] & \\
p \arrow[ur] & & \Box\Diamond p \arrow[ur] & & \Diamond\Box p \arrow[ul] \\
 & & & \Box\Diamond\Box p \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \Box p \arrow[uul] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

Il existe une interprétation particulièrement intéressante de $S4$ qui est de nature topologique.

Supposons que les variables $p, q, \ldots$ représentent des ensembles et posons:

$p \wedge q$	intersection de p et q
$p \vee q$	union de p et q
$\sim p$	complément de q
$\Diamond p$	fermeture de p
$\Box p$	intérieur de p

On obtient alors l'algèbre de Kuratowski. En interprétant la flèche par l'inclusion, le diagramme ci-dessus permet de lire des lois comme:

$p \rightarrow \Diamond p$: un ensemble est inclus dans sa fermeture

$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$: l'intérieur de la fermeture d'un ensemble est inclus dans la fermeture de l'intérieur de sa fermeture, etc.

(Voir, par exemple, Eytan 1965, Barbut 1965).

2.6 Le système S5

Pour rejoindre enfin le système traditionnel depuis Théophraste, Lewis et Langford ont construit *S*5. Soit l'axiome

$(C11) \qquad \Diamond p \prec \Box\Diamond p$

On pose:

$S5\cdot = \mathrm{df}\cdot S1 + (C11)$

Pour présenter *S*5 en déduction naturelle, nous allons une nouvelle fois modifier la règle de réitération et nous donner la règle suivante:

Règle reit S5

$$
\begin{array}{lll}
n & \mid\ \sim\Box Q & \\
 & \mid\ \Box \mid\ \sim\Box Q & n,\ reit\ S5
\end{array}
$$

Il est donc permis de réitérer dans une sous-déduction stricte toute proposition de la forme $\sim\Box Q$ et ceci sans lui apporter de modification.

Epithéorème 1. La présentation de *S*5 en déduction naturelle est équivalente à la présentation axiomatique.

Nous nous contenterons, une fois encore, de vérifier que l'on a par les règles:

*S*5–1 $\quad \vdash_{S5} \Diamond p \prec \Box\Diamond p$

En effet:

$$
\begin{array}{lll}
1 & \mid \Box \mid\ \mid\ \mid \Diamond p & hyp\\
 & \mid\quad \mid\ \mid\ \mid\overline{} & \\
2 & \mid\quad \mid\ \mid\ \mid \sim\Box\sim p & 1,\ rep\ df\ \Diamond\\
3 & \mid\quad \mid\ \mid\ \mid \Box \mid \sim\Box\sim p & 2,\ reit\ S5\\
4 & \mid\quad \mid\ \mid\ \mid\quad \mid \Diamond p & 3,\ rep\ df\ \Diamond\\
5 & \mid\quad \mid\ \mid\ \mid \Box\Diamond p & 3\text{–}4,\ \Box i\\
6 & \mid\quad \mid\ \Diamond p \supset \Box\Diamond p & 1\text{–}5,\ \supset i\\
7 & \mid \Box(\Diamond p \supset \Box\Diamond p) & 1\text{–}6,\ \Box i\\
8 & \mid \Diamond p \prec \Box\Diamond p & 7,\ rep\ df\ \prec
\end{array}
$$

Remarque. Nous n'avons pas pu faire usage de la règle $\prec i$, puisque nous ne savons pas encore si *S*5 contient *T*.

En fait, on a:

Epithéorème 2. $S5$ contient $S4$ et $S4$ ne contient pas $S5$.

Pour le voir, prouvons d'abord:

$S5$–2 $\quad \vdash_{S5} \Box P \equiv \Diamond\Box P$

1	$\vert\ \vert\ \Box P$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\sim\Box P$	*hyp*
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Box P$	2, $\Box e$
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box P$	1, *reit*
5	$\vert\ \vert\ \sim\Box\sim\Box P$	2, 3, 4, $\sim i$
6	$\vert\ \vert\ \Diamond\Box P$	5, *remp df* $\Diamond$
7	$\vert\ \Box P \supset \Diamond\Box P$	1–6, $\supset i$

1	$\vert\ \vert\ \Diamond\Box P$	*hyp*
2	$\vert\ \vert\ \sim\Box\sim\Box P$	1, *remp df* $\Diamond$
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Box P$	*hyp*
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box \mid \sim\Box P$	3, *reit S5*
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\sim\Box P$	4–4, $\Box i$
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \sim\Box\sim\Box P$	2, *reit*
7	$\vert\ \vert\ \sim\sim\Box P$	3, 5, 6, $\sim i$
8	$\vert\ \vert\ \Box P$	7, *neg* $\sim e$
9	$\vert\ \Diamond\Box P \supset \Box P$	1–8, $\supset i$

Dès lors:

1	$\vert\ \Box Q$	Prémisse de *reit S4*
2	$\vert\ \Diamond\Box Q$	1, $S5$–2
3	$\vert\ \sim\Box\sim\Box Q$	2, *remp df* $\Diamond$
4	$\vert\ \Box \mid \sim\Box\sim\Box Q$	3, *reit S5*
5	$\vert\ \quad \mid \Diamond\Box Q$	4, *remp df* $\Diamond$
6	$\vert\ \quad \mid \Box Q$	5, $S5$–2

La règle *reit* $S4$ est ainsi dérivable dans $S5$ et comme $S4$ contient T, nous pouvons désormais faire usage aussi bien des règles et théorèmes de $S4$ que de T. Ici encore, pour montrer que $S4$ ne contient pas ($C11$), donc pas $S5$, il faut utiliser des matrices.

Démontrons encore les trois théorèmes suivants:

$S5$–3 $\quad \vdash_{S5} \Box\Diamond p \equiv \Diamond p$

L'implication de gauche à droite résulte immédiatement de la règle $\Box e$ et l'on a de plus:

1	$\mid\ \mid \Diamond p$	*hyp*
2	$\mid\ \mid \sim\Box\sim p$	1, *rep df* $\Diamond$
3	$\mid\ \mid \Box \mid \sim\Box\sim p$	2, *reit S5*
4	$\mid\ \mid\quad \mid \Diamond p$	3, *rep df* $\Diamond$
5	$\mid\ \mid \Box\Diamond p$	3–4, $\Box i$
6	$\mid \Diamond p \supset \Box\Diamond p$	1–5, $\supset i$

$S5$–4 $\quad \vdash_{S5} \Box\Diamond\Box p \equiv \Diamond\Box p$

On applique de nouveau la règle $\Box e$ pour l'implication de gauche à droite et on a ensuite:

1	$\mid\ \mid \Diamond\Box p$	*hyp*
2	$\mid\ \mid \sim\Box\sim\Box p$	1, *remp df* $\Diamond$
3	$\mid\ \mid \Box \mid \sim\Box\sim\Box p$	2, *reit S5*
4	$\mid\ \mid\quad \mid \Diamond\Box p$	3, *remp df* $\Diamond$
5	$\mid\ \mid \Box\Diamond\Box p$	3–4, $\Box i$
6	$\mid \Diamond\Box p \supset \Box\Diamond\Box p$	1–5, $\supset i$

$S5$–5 $\quad \vdash_{S5} \Diamond\Box\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$

L'implication de gauche à droite s'obtient par $S5$–2 et la règle *remp*; celle de droite à gauche par la règle α.

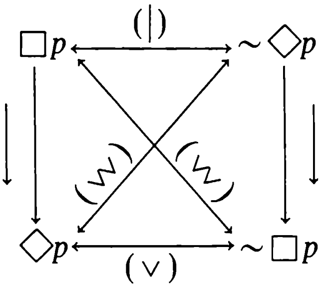
Reprenons alors les modalités de $S4$. On aura le tableau suivant:

$S4$	Equivaut à	$S5$	$S4$	Equivaut à	$S5$
$\Box p$		$\Box p$	$\Box\sim p$	$\sim\Diamond p$ par T-8	$\sim\Diamond p$
$\Diamond p$		$\Diamond p$	$\Diamond\sim p$	$\sim\Box p$ par T-7	$\sim\Box p$
$\Box\Diamond p$	$\Diamond p$ par $S5$–3		$\Box\Diamond\sim p$	$\Diamond\sim p$ par $S5$–3	
$\Diamond\Box p$	$\Box p$ par $S5$–2		$\Diamond\Box\sim p$	$\Box\sim p$ par $S5$–2	
$\Box\Diamond\Box p$	$\Diamond\Box p$ par $S5$–4		$\Box\Diamond\Box\sim p$	$\Diamond\Box\sim p$ par $S5$–4	
$\Diamond\Box\Diamond p$	$\Box\Diamond p$ par $S5$–5		$\Diamond\Box\Diamond\sim p$	$\Box\Diamond\sim p$ par $S5$–5	

D'où:

Epithéorème 3. $S5$ contient quatre modalités propres: le nécessaire, le possible, l'impossible et le non-nécessaire.

Les propositions modales correspondantes sont reliées entre elles de telle sorte que se constitue le carré des oppositions suivant:



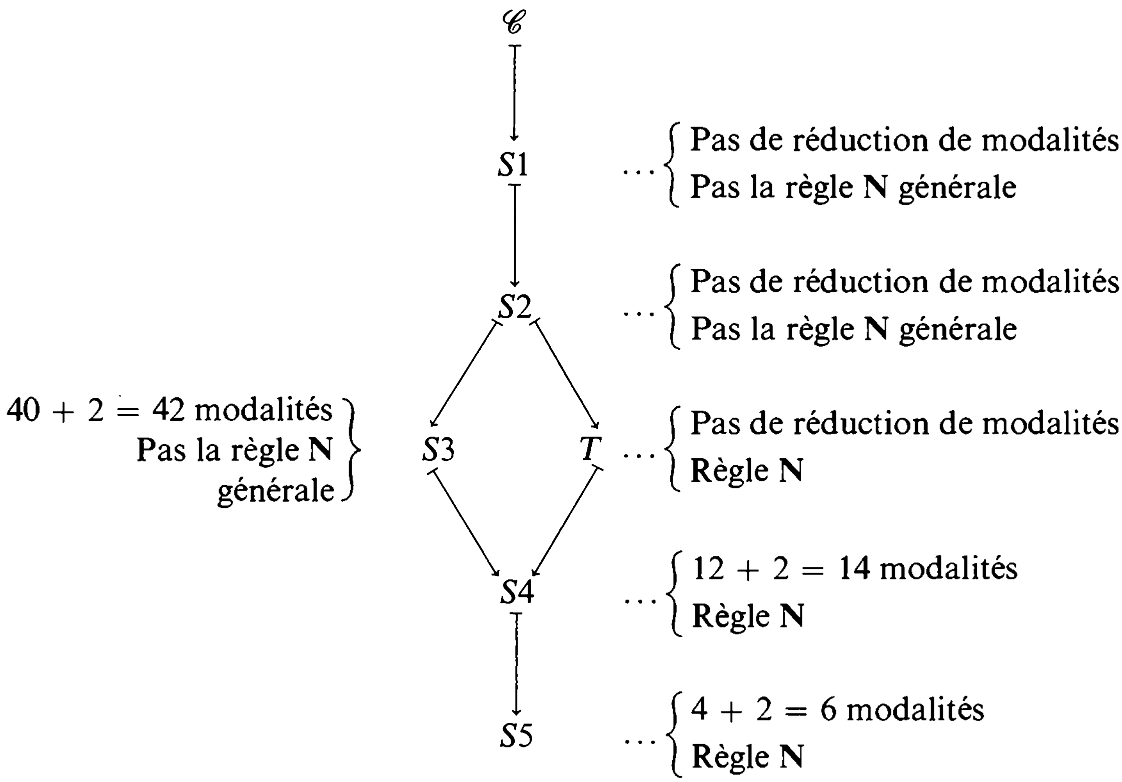
$\to$ désigne la relation d'implication, (|) celle de contraire, (∨) celle de subcontraire et (⩔) celle de contradiction (I, p. 67–68).

Remarque. On peut lire $\sim\Box p : p$ est contingente. Une autre façon d'interpréter l'idée de contingence serait de poser:

P est contingente $\cdot = \mathrm{df} \cdot \Diamond P \wedge \Diamond\sim P$.

Cela ne va toutefois pas sans soulever un certain nombre de difficultés qui avaient déjà retenu l'attention d'Aristote (*Premiers Analytiques*, I, 13: *De l'interprétation*, 12, 13).

2.7 Comparaison des systèmes étudiés



2.8 Orientation sur les logiques déontiques

On pourrait tenter une interprétation déontique des systèmes précédents. On poserait pour cela:

$\Box p$ p est obligatoire soit $\mathbf{O}p$

$\Diamond p$ p est permise soit $\mathbf{P}p$

Certains théorèmes ne feraient aucune difficulté, ainsi par exemple:

T-7 qui donnerait $\vdash \sim \mathbf{O}p \equiv \mathbf{P} \sim p$ soit: si p n'est pas obligatoire (est facultatif) $\sim p$ est permise et réciproquement.

D'autre part, certaines modalités complexes pourraient trouver des interprétations. Soit par exemple les deux propositions:

(a) $\mathbf{OP}p$ et (b) $\mathbf{PO}p$

On aurait éventuellement des choses du genre:

(a) Il est obligatoire (par la Constitution) qu'il soit permis (par le code) que p.

(b) Il est permis (par la Constitution) qu'il soit obligatoire (par le Code) que p.

Cependant d'assez sérieux obstacles se présentent. En voici deux.

1. Un théorème comme $\vdash \mathbf{O}p \supset p$, qui découle de *T*-3 signifierait que si une proposition est obligatoire, elle est le cas. Dans un tel monde logique, il n'y aurait plus ni crimes ni délits, ce qui est manifestement, comme on dit, trop beau pour être vrai.

Il est évident qu'en modifiant convenablement les axiomes, de tels théorèmes peuvent être évités et la chose a été faite (Voir Kalinowski, 1972b). Mais il y a davantage.

2. Dire qu'une *proposition* est obligatoire, permise, etc. offre quelque chose de bien peu satisfaisant. Ce qui peut être obligatoire, permis, etc. c'est, pour un certain individu, de faire (ou de ne pas faire) une certaine action. Cela signifie qu'un traitement convenable de la logique déontique devra être lié à la considération d'un système d'actions. C'est bien dans cette direction que se sont engagés en autres Kalinowski (1972a) et von Wright (1963).

La logique des normes de Kalinowski (1972a) est actuellement l'une des plus satisfaisantes quant aux applications possibles. Nous allons en conséquence en esquisser la nature.

Considérons deux ensembles d'objets, au sens logique du terme.

Un ensemble E d'individus. Variables: $x, y, z, \ldots,$

variables syntaxiques: $X, Y, Z, \ldots,$

Un ensemble F d'actions. Variables: $\alpha\ \beta\ \gamma, \ldots,$

variables syntaxiques: $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \ldots$

Soit P un opérateur binaire, tel que $Px\alpha$ soit une fonction propositionnelle (I, p. 45) que l'on interprétera :

l'individu x a droit de faire α.

On voit que $Px\alpha$ peut être nié de deux façons :
ou la négation porte sur l'opérateur : x n'a pas droit de faire α et nous noterons $\sim Px\alpha$;
ou la négation porte sur l'action : x a droit de ne pas faire α et nous noterons $Px\bar{\alpha}$.

L'opérateur $\sim$ désigne la négation propositionnelle et l'opérateur $-$ désigne la négation d'action : la permission demeure, mais c'est celle de faire « l'action opposée », ainsi que dit Kalinowski.

Posons ensuite les définitions suivantes :

DfW	$WX\mathrm{A} \cdot = \mathrm{df} \cdot PX\bar{\mathrm{A}}$	X a droit de ne pas pas faire A
DfS	$SX\mathrm{A} \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim PX\bar{\mathrm{A}}$	X doit faire A
DfL	$LX\mathrm{A} \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim PX\mathrm{A}$	X doit ne pas faire A
DfM	$MX\mathrm{A} \cdot = \mathrm{df} \cdot PX\mathrm{A} \wedge PX\bar{\mathrm{A}}$	X peut faire A

Remarque. « Pouvoir » signifie ici « avoir droit de faire et de ne pas faire ». Il s'agit de la « permission bilatérale ».

Pour calculer dans ce système, donnons-nous l'ensemble des règles de $\mathscr{C}$, y compris celle de remplacement et ajoutons deux règles pour $-$.

Règle $-$i

$$\begin{array}{l|ll} n & \sim PX\mathrm{A} & \\ \hline & PX\bar{\mathrm{A}} & n, -i \end{array}$$

Règle $-$e

$$\begin{array}{l|ll} n & PX\bar{\mathrm{A}} & \\ \hline & \sim PX\mathrm{A} & n, -e \end{array}$$

On a :

Lemme : $\quad \vdash_{\mathrm{k}} Px\bar{\bar{\alpha}} \equiv Px\alpha$

En effet :

$$\begin{array}{l|ll} 1 & Px\bar{\bar{\alpha}} & hyp \\ \hline 2 & \sim Px\bar{\alpha} & 1, -e \\ 3 & \sim\sim Px\alpha & 2, -e \\ 4 & Px\alpha & 3, neg \sim e \\ 5 & Px\bar{\bar{\alpha}} \supset Px\alpha & 1\text{–}4, \supset i \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} 1 & Px\alpha & hyp \\ \hline 2 & \sim\sim Px\alpha & 1, neg \sim i \\ 3 & \sim Px\bar{\alpha} & 2, -i \\ 4 & Px\bar{\bar{\alpha}} & 3, -i \\ 5 & Px\alpha \supset Px\bar{\bar{\alpha}} & 1\text{–}4, \supset i \end{array}$$

On démontre alors sans peine toute une série de théorèmes dont les suivants[7] :

7. Les numéros sont ceux de Kalinowski 1972 b, p. 118.

*T*5 $\vdash_k Sx\alpha \supset Px\alpha$

1	$Sx\alpha$	*hyp*
2	$\sim Px\bar{\alpha}$	1, *rep df S*
3	$Px\bar{\bar{\alpha}}$	2, $-i$
4	$Px\alpha$	3, *remp lemme*
5	$Sx\alpha \supset Px\alpha$	1–4, $\supset i$

*T*25 $\vdash_k Lx\alpha \equiv \sim Px\alpha$ immédiat par df *L*

*T*47 $\vdash_k Mx\alpha \equiv Mx\bar{\alpha}$

1	$Mx\alpha$	*hyp*
2	$Px\alpha \wedge Px\bar{\alpha}$	1, *rep df M*
3	$Px\alpha$	2, $\wedge e$
4	$Px\bar{\alpha}$	2, $\wedge e$
5	$Px\bar{\bar{\alpha}}$	3, *remp* lemme
6	$Px\bar{\alpha} \wedge Px\bar{\bar{\alpha}}$	4, 5 $\wedge i$
7	$Mx\bar{\alpha}$	6, *rep df M*
8	$Mx\alpha \supset Mx\bar{\alpha}$	

et de façon analogue pour l'implicationdedroite à gauche.

*T*55 $\vdash_k Mx\alpha \equiv \cdot \sim Lx\alpha \wedge \sim Sx\alpha$ immédiat par les définitions et la règle *neg* $\sim e$.

*T*56 $\vdash_k \sim Sx\alpha \equiv \cdot Mx\alpha \vee Lx\alpha$

1	$\sim Sx\alpha$	*hyp*
2	$\sim \sim Px\bar{\alpha}$	1, *rep df S*
3	$Px\bar{\alpha}$	2, *neg* $\sim e$
4	$\sim Px\alpha$	3, $-e$
5	$Lx\alpha$	4, *rep df L*
6	$Mx\alpha \vee Lx\alpha$	5, $\vee i$
7	$\sim Sx\alpha \supset \cdot Mx\alpha \vee Lx\alpha$	1–6, $\supset i$

et dans l'autre sens:

1	$Mx\alpha \vee Lx\alpha$	*hyp*
2	$Sx\alpha$	*hyp*
3	$\sim Px\alpha$	2, *rep df S*
4	$Mx\alpha \vee Lx\alpha$	1, *reit*
5	$Mx\alpha$	*hyp*

6	$Px\alpha \wedge Px\bar{\alpha}$	5, *rep df M*
7	$Px\bar{\alpha}$	6, $\vee e$
8	$\sim Px\bar{\alpha}$	3, *reit*
9	$\sim Sx\alpha$	7, 8 $\sim e$, $Q/\sim Sx\alpha$
10	$Lx\alpha$	*hyp*
11	$\sim Px\alpha$	10, *rep df L*
12	$Px\bar{\alpha}$	11, $-i$
13	$\sim Px\bar{\alpha}$	3, *reit*
14	$\sim Sx\alpha$	12, 13, $\sim e$, $Q/\sim Sx\alpha$
15	$\sim Sx\alpha$	4, 5–9, 10–13, $\vee e$
16	$Sx\alpha$	2, *rep*
17	$\sim Sx\alpha$	2, 15, 16, $\sim i$
18	$Mx\alpha \vee Lx\alpha \cdot \supset \sim Sx\bar{\alpha}$	1–17, $\supset i$

*T*92 $\vdash_k Px\alpha \vee Px\bar{\alpha}$ conséquence immédiate de la règle $-i$.

Si l'on se donnait encore les règles pour les quantificateurs, on pourrait alors établir les syllogismes pratiques au sens aristotélicien *(Éthique à Nicomaque)*. Illustrons la chose sur un exemple donné par Kalinowski (1972 a):

Chaque homme doit marcher
Il est homme
Il doit marcher

Posons: ax = df x est homme
α = df marcher
x_1 = df il (l'individu considéré).

Dès lors:

1	$(\forall x)(ax \supset Sx\alpha)$	
2	ax_1	Prémisses
3	$ax_1 \supset Sx_1\alpha$	1, $\forall e$, x/x_1
4	$Sx_1\alpha$	2, 3, $\supset e$

Remarque. Ceci ne constitue pas une formulation des deux systèmes *K*1 et *K*2 (publiés pour la première fois en 1953) mais vise seulement à en dégager quelques traits caractéristiques.

2.9 Note bibliographique

Barbut, M., Topologie générale et algèbre de Kuratowski. *Mathématiques et Sciences humaines*, 1965, *12*, 11-27.

Eytan, M., Topologie et logique propositionnelle modale. *Mathématiques et Sciences humaines*, 1965, *12*, 29-30.

Feys, R., Les logiques nouvelles des modalités. *Rev. néoscolastique de Philosophie*, 1937, *40*, 517-553; 1938, *41*, 217-252.

Feys, R., *Modal logics*. Louvain et Paris, E. Nauwelaerts et Gauthier-Villars, 1965.

*Hughes, G. E. et Cresswell, M. J., *An introduction to modal logic*. Londres Methuen & Co, 1968.

Kalinowski, G., *Études de logique déontique*. Paris, Librairie Générale de Droit et de Jurisprudence, 1972 [a].

*Kalinowski, G., *La logique des normes*. Paris, P.U.F., 1972 [b].

Le Bonniec, G., *Étude génétique des aspects modaux du raisonnement*. Paris, Mouton, 1973.

Lewis, C. I. et Langford, C. H., *Symbolic logic*. 2e éd., New York, Dover Books, 1959.

Wisdom, W. A., Possibility-elimination in natural deduction. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1964, *V*, 295-298.

Wright, G. H. von, *An essay in modal logic*. Amsterdam, North-Holland Publ. Co, 1951.

Wright, G. H. von, *Norm and action*. Londres, Routledge & Kegan Paul, 1963.

TROISIÈME PARTIE

LES LOGIQUES POLYVALENTES

3.1 Généralisation des tables de vérité classiques

Nous avons vu (II, Première partie) qu'une façon de présenter la logique classique des propositions consite à postuler que toute proposition p prend une valeur dans l'ensemble $V \cdot = \mathrm{df} \cdot \{\text{le vrai, le faux}\}$. Dès lors un opérateur unaire est une application $f\colon V \to V$ et un opérateur binaire une application $f\colon V \times V \to V$. Le plus souvent on désigne le vrai par 1 et le faux par 0, et on a $V \cdot = \mathrm{df} \cdot \{0, 1\}$, le faux étant alors le plus petit des éléments de V.

D'un point de vue algèbrique, il est très facile de généraliser ceci. Partons d'un ensemble de nombres naturels.

$V \cdot = \mathrm{df} \cdot \{1, 2, \ldots, m\}$

et appelons *proposition* toute expression qui prend une valeur dans V. On aura donc, pour une proposition p quelconque: $\mathrm{val}(p) \in V$. Dans ces conditions, on voit qu'il est possible de définir m^m opérateurs unaires distincts. En effet, l'ensemble d'arrivée V a m éléments. L'image de 1 peut être choisie de m façons différentes, celle de 2 aussi. On a donc déjà $m \cdot m$ choix possibles. Comme on peut aussi choisir l'image de 3 de m façons, on aura $m \cdot m \cdot m$ choix et, puisque l'ensemble de départ (qui est aussi V) a m éléments, on a donc bien m^m choix possibles en tout. Par exemple, si on pose $m = 3$, donc si on se donne l'ensemble $V = \mathrm{df}\{1, 2, 3\}$, on aura $3^3 = 27$ opérateurs unaires distincts.

D'une manière analogue, on peut définir m^{m^2} opérateurs binaires, puisque l'ensemble de départ, qui est $V \times V$ a m^2 éléments. Ainsi avec $m = 3$, aura-t-on $3^{3^2} = 3^9 = 19683$ opérateurs binaires.

Tout ceci pose des problèmes d'interprétations intéressants. Admettons que les éléments de V représentent des *valeurs de vérité*. Leurs noms sont bien entendu indifférents mais puisque nous avons choisi d'utiliser des nombres, il est possible de se servir de leur ordre naturel. Convenons alors que les k premiers désignent des nuances du faux et les $(m-k)$ derniers des nuances du vrai. Soit D le sous-ensemble de ces $m-k$ valeurs, dites *valeurs désignées*. On pourra dire, dès lors, qu'une proposition composée P est une *tautologie*, si et seulement si $val(P) \in D$, lorsque les propositions atomiques de P prennent leurs valeurs dans V de toutes les façons possibles.

Remarque. Nous avons retenu de la logique bivalente le fait que le vrai était désigné par le plus grand des deux nombres généralement utilisé et non pas que le nombre 1 représentait le vrai. On est ici devant un exemple particulièrement clair de « l'arbitraire des signes ».

La croissance rapide avec m du nombre des opérateurs offre des possibilités d'interprétation très riche et très nuancée. Celles-ci sont assez peu exploitées, aussi allons-nous nous contenter de donner quelques indications qui devraient permettre au lecteur de construire lui-même les systèmes dont il pourrait avoir besoin.

3.2 Deux exemples

Partons, pour éviter des calculs trops longs, de $m = 3$ et posons donc $V = \mathrm{df}\{1, 2, 3\}$. Le choix de D reste libre, mais il est le plus souvent soumis à trois conditions qui facilitent les interprétations.

(1) D est un sous-ensemble strict de V. En d'autres termes, on dispose d'au moins une valeur de faux.

(2) D n'est pas vide et on dispose d'au moins une valeur de vrai.

(3) D contient un seul élément. En fait, cette condition n'est pas toujours acceptée et nous en verrons un exemple plus loin (3.4, seconde partie). Nous allons cependant la retenir pour le moment, afin de rendre compte de l'idée généralement reçue que la vérité est une.

Posons donc $D \cdot = \mathrm{df} \cdot \{3\}$ et disons que:

si $val(p) = 3$ alors p est une proposition vraie
$val(p) = 1$ p est une proposition fausse
$val(p) = 2$ p est une proposition ni vraie, ni fausse.

Qu'il existe des expressions ni vraies, ni fausses est bien évident. Les questions fermées du genre « 117 est-il un nombre premier? », certaines propositions au futur « Demain il y aura une bataille navale » (Aristote, *De l'interprétation*, 9) en sont des exemples.

Nous allons maintenant construire deux systèmes $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ à partir d'une base commune, proposée dès 1920 par Łukasiewicz.

Base commune
Un opérateur de négation $\sim$ et un opérateur de conditionnelle $\supset$ définis par les tables suivantes:

p	$\sim p$
3	1
2	2
1	3

	$\supset$	q: 3	2	1
p	3	3	2	1
	2	3	3	2
	1	3	3	3

La table de $\sim$ s'interprète naturellement, mais celle de $\supset$ paraît plus arbitraire. On peut cependant remarquer qu'elles constituent toutes deux des extensions plausibles des tables classiques (II, p. 5 et p.7) en ce sens que si pour éviter toute confusion, nous désignons le vrai classique par v et le faux classique par f, on aura:

p	$\sim p$
v	f
–	–
f	v

$\supset$	v	–	f
v	v	–	f
–	–	–	–
f	v	–	v

Le système $\mathbf{P}_1$
On sait que $\vdash_{\mathscr{C}} p \vee q \cdot \equiv \cdot \sim p \supset q$ et que $\vdash_{\mathscr{C}} p \wedge q \cdot \equiv \cdot \sim(p \supset \sim q)$. Ceci suggère d'introduire un opérateur de disjonction $\vee_1$ et un opérateur de conjonction $\wedge_1$ par les définitions:

Df $\vee_1$ $\quad P \vee_1 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim P \supset Q$
Df $\wedge_1$ $\quad P \wedge_1 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim(P \supset \sim Q)$.

On obtient les tables:

$\vee_1$	3	2	1
3	3	3	3
2	3	3	2
1	3	2	1

$\wedge_1$	3	2	1
3	3	2	1
2	2	1	1
1	1	1	1

Il est facile de voir que les deux opérateurs sont commutatifs (symétrie des tables par rapport à la diagonale gauche-droite) et de vérifier qu'ils sont associatifs (facile mais fastidieux: 27 cas à examiner). En revanche, ils diffèrent de la disjonction et de la conjonction usuelles en ce qu'ils ne sont pas idempotents. Si en effet, on a:

$\vdash p \supset (p \vee_1 p)$ et $\vdash (p \wedge_1 p) \supset p$

on n'a ni $(p \vee_1 p) \supset p$ ni $p \supset (p \wedge_1 p)$

Preuve: si $val(p) = 2$, alors $val(p \vee_1 p) = 3$ et $val(p \wedge_1 p) = 1$

Dès lors:

$val(p \vee_1 p \cdot \supset p) = 2 \notin D$ et $val(p \supset \cdot p \wedge_1 p) = 2 \notin D$

Posons cependant:

$Df \equiv_1 \qquad P \equiv_1 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \supset Q) \wedge_1 (Q \supset P)$

Il vient:

$\equiv_1$	3	2	1
3	3	2	1
2	2	3	2
1	1	2	3

et on vérifie que les lois de Morgan sont des tautologies.

$\vdash (p \wedge_1 q) \equiv_1 \sim(\sim p \vee_1 \sim q)$

$\vdash (p \vee_1 q) \equiv_1 \sim(\sim p \wedge_1 \sim q)$.

Notons enfin que le tiers exclu est aussi valide:

$\vdash p \vee_1 \sim p$

Ainsi, un certain nombre des lois fondamentales de $\mathscr{C}$ sont des tautologies dans $\mathbf{P}_1$. Toutefois, et bien qu'en supprimant la valeur intermédiaire 2 les tables des opérateurs de $\mathbf{P}_1$ se confondent avec celles des opérateurs de $\mathscr{C}$, on ne peut pas dire que $\mathbf{P}_1$ contient $\mathscr{C}$.

Le système **P2**

Comme on a aussi $\vdash_{\mathscr{C}} p \vee q \cdot \equiv \cdot (p \supset q) \supset q$, on est conduit à poser:

$Df \vee_2 \qquad P \vee_2 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \supset Q) \supset Q$

$Df \wedge_2 \qquad P \wedge_2 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim(\sim P \vee_2 \sim Q)$

$Df \equiv_2 \qquad P \equiv_2 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \supset Q) \wedge_2 (Q \supset P)$.

Il vient:

$\vee_2$	3	2	1
3	3	3	3
2	3	2	2
1	3	2	1

$\wedge_2$	3	2	1
3	3	2	1
2	2	2	1
1	1	1	1

$\equiv_2$	3	2	1
3	3	2	1
2	2	3	2
1	1	2	3

On peut s'assurer que les opérateurs $\vee_2$ et $\wedge_2$, qui sont encore commutatifs et associatifs, sont idempotents. On voit aussi que $\equiv_2$ a la même table que $\equiv_1$.

Remarque. Il est possible d'exprimer les tables de $\sim$, $\vee_2$, et de $\wedge_2$ à l'aide de formules qui permettent la généralisation à un m quelconque. Voici comment:

$$val(\sim p) = (m + 1) - val(p)$$
$$val(p \vee_2 q) = \max(val(p), val(q))$$
$$val(p \wedge_2 q) = \min(val(p), val(q)),$$

où $\max(val(p), val(q))$ signifie « la plus grande des valeurs de p et de q si elles sont différentes, sinon leur valeur commune ». L'interprétation de min est évidente.

Considérons $\sim$ et $\vee_2$ comme des opérateurs primitifs. Dans ces conditions, on pourra définir une conditionnelle $\supset_2$ par:

$Df \supset_2$ $\quad P \supset_2 Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim P \vee_2 Q$

On obtient la table:

	$\supset_2$	q: 3	2	1
p	3	3	2	1
	2	3	2	2
	1	3	3	3

différents de celle de $\supset_1$.

Hilbert-Ackermann (1949)[1] ont proposé pour $\mathscr{C}$ l'axiomatique suivante:

Notions primitives: $\sim$ et $\vee$

Définition : $P \supset Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim P \vee Q$

Schémas d'axiomes:

(*A*1) $\quad P \vee P \cdot \supset P$

(*A*2) $\quad P \supset \cdot P \vee Q$

(*A*3) $\quad P \vee Q \cdot \supset \cdot Q \vee P$

(*A*4) $\quad (P \supset Q) \supset (M \vee P \cdot \supset \cdot M \vee Q)$.

Règle de détachement pour $\supset$.

1. Voir la référence bibliographique dans le fascicule II. Nous utilisons ici des schémas d'axiomes au lieu d'axiomes.

On peut alors se demander si ces schémas d'axiomes deviennent des tautologies lorsqu'on part des tables de $\sim$ et $\vee_2$ et de la définition de $\supset_2$. La réponse est négative. On a, en effet, par exemple:
si $val(P) = val(Q) = 2$ alors $val(P \vee_2 P) = 2$ et $val(P \vee_2 P \cdot \supset_2 P) = 2 \notin D$.

En revanche, on peut s'assurer que les quatre schémas d'axiomes sont des tautologies dans le système $\langle \sim, \vee_2, \supset \rangle$ et que la règle de détachement est valable[2]. Ceci fait voir un phénomène important: dans les logiques polyvalentes, les opérateurs ne sont pas toujours définissables les uns par les autres.

3.3 Un système fonctionnellement complet

Ce qui précède conduit à poser le problème suivant: trouver un certain nombre d'opérateurs à partir desquels il soit possible de définir tous les autres. Un système qui répond à cette exigence est dit *fonctionnellement complet.*

Voici un tel système, emprunté à Post (1921), mais que nous exposerons pour $m = 3$. Posons donc:

$V = \text{df}\,\{1, 2, 3\} \qquad D\cdot = \text{df}\,\{3\}$

$\sim' p$	p
3	1
2	3
1	2

$\vee'$	3	2	1
3	3	3	3
2	3	2	2
1	3	2	1

Remarque. On peut généraliser ces définitions pour m quelconque de la façon suivante.
$val(\sim' p) = val(p) + 1$, en substituant à $val(p) + 1$, si elle dépasse m, le reste de sa division par m.

Exemple
$m = 4$

p	4	3	2	1
$\sim' p$	1	4	3	2

$val(p \vee' q) = \max(val(p), val(q))$.

2. Elle l'est aussi pour $\supset_2$.

On voit que si $m = 3$, l'opérateur $\vee'$ se confond avec $\vee_2$.

Revenons au cas où $m = 3$ et calculons les négations successives:

p	$\sim' p$	$\sim'\sim' p$	$\sim'\sim'\sim' p$
3	1	2	3
2	3	1	2
1	2	3	1

Deux observations sont intéressantes. D'abord l'application de l'opérateur $\sim'$ à une proposition «décale d'une ligne» les valeurs de vérité. Ensuite, par la table $\vee'$, on a:

$\vdash p \vee' \sim' p \vee' \sim'\sim' p$

ce que l'on pourrait appeler le principe du *quart exclu* (et en général, le principe du $(m + 1)^e$ exclu.

Définissons maintenant m opérations que nous appellerons τ_i, définissons donc ici les opérations τ_1, τ_2, τ_3, de la façon suivante:

$$\tau_i(p) = \begin{cases} i \text{ si } val(p) = 3 \quad \text{(en général } m) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

on a:

P	$\tau_1(p)$	$\tau_2(p)$	$\tau_3(p)$
3	1	2	3
2	1	1	1
1	1	1	1

On comprend intuitivement en regardant ce tableau et en se souvenant que $\sim'$ décale les valeurs de vérité qu'il soit possible d'obtenir l'une quelconque des valeurs de vérité où l'on veut. Faisons-en l'expérience:

p	$\sim' p$	$\sim'\sim' p$	$\tau_3(p)$	$\tau_3(\sim' p)$	$\tau_3(\sim'\sim' p)$	$\tau_2(p)$	$\tau_2(\sim' p)$	$\tau_2(\sim'\sim' p)$	$\tau_1(p)$	$\tau_1(\sim' p)$	$\tau_1(\sim'\sim' p)$
3	1	2	3	1	1	2	1	1	1	1	1
2	3	1	1	3	1	1	2	1	1	1	1
1	2	3	1	1	3	1	1	2	1	1	1

Supposons alors que l'on veuille définir un opérateur unaire donné, disons $-$ tel que:

p	$-p$
3	2
2	3
1	3

On cherche donc une fonction f telle que:

$f(3) = 2$ et on utilise $\tau_2(p)$,
$f(2) = 3$ et on utilise $\tau_3(\sim' p)$,
$f(1) = 3$ et on utilise $\tau_3(\sim'\sim' p)$

On a alors:

$\tau_2(p)$ ∨′	$\tau_3(\sim' p)$ ∨′	$\tau_3(\sim'\sim' p)$	$-p$
2	1	1	2
1	3	1	3
1	1	3	3

maximum des valeurs de chaque ligne

D'une façon générale, si v est la valeur à obtenir, on fait usage de τ_v. Si l'on veut l'obtenir pour $val(p) = k$, on utilise $(m-k)$ signes $\sim$.

Considérons maintenant un opérateur binaire quelconque, donc une application $f\colon\ V \times V \to V$. Prenons comme exemple l'opérateur $<$ tel que:

	$<$	q: 3	2	1
p	3	3	2	2
	2	3	3	3
	1	3	3	3

Nous allons construire neuf fonctions – une pour chaque «case» de la table – qui prennent la valeur voulue dans cette case et la valeur 1 partout ailleurs. En d'autres termes, si $val(p) = i$ et $val(q) = j$, nous construirons la fonction

$$g_{ij}(p, q) = \begin{cases} \text{valeur de la case si } val(p) = i \text{ et } val(q) = j \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple

$$g_{31}(p, q) = \begin{cases} 2 \text{ si } val(p) = 3 \text{ et } val(q) = 1 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Nous savons obtenir, à l'aide des opérations τ et $\sim'$,
une fonction qui vaut 2 lorsque $val(p) = 3$ et
une fonction qui vaut 2 lorsque $val(p) = 1$. Ce sont:
$\tau_2(p)$ et $\tau_2(\sim'\sim' q)$. Reste à en faire l'intersection. Pour cela nous poserons:

$val(p \wedge' q) = \min(val(p), val(q))$, d'où:

$g_{31}(p, q) \cdot = \mathrm{df} \cdot \tau_2(p) \wedge' \tau_2(\sim'\sim' q)$.

Contrôle:

p	3	3	3	2	2	2	1	1	1	
q	3	2	1	3	2	1	3	2	1	
$\sim'\sim'q$	2	1	3	2	1	3	2	1	3	
$\tau_2(p)$	2	2	2	1	1	1	1	1	1	
$\tau_2(\sim'\sim'q)$	1	1	2	1	1	2	1	1	2	
$\tau_2(p) \wedge' \tau_2(\sim'\sim'q)$	1	1	2	1	1	1	1	1	1	minimum

La fonction g_{31} a donc bien toujours la valeur 1, sauf si $val(p) = 3$ et $val(q) = 1$. Elle vaut alors 2.

On saisit sur cet exemple que la disjonction (maximum des valeurs des neuf fonctions g_{ij}) fournit l'opérateur $<$.

Remarque. Le système $<-$, $< >$ satisfait les schémas d'axiomes que nous avons proposé pour $\mathscr{C}$ (II, p. 29). La règle de détachement est valide: il contient donc $\mathscr{C}$.

3.4 Retour sur les modalités

Nous venons de voir qu'il est possible de considérer plusieurs espèces de négations, en particulier les trois suivantes:

p	$\sim p$	$\sim' p$	$-p$
3	1	1	2
2	2	3	3
1	3	2	3

On peut estimer que la plus « naturelle » est $\sim$, la conserver comme négation et chercher d'autres interprétations pour certains opérateurs unaires. Considérons les suivants:

p	Mp	Ip	Lp	Qp	Cp	Tp
3	3	1	3	1	1	2
2	3	1	1	3	3	2
1	1	3	1	3	1	2

Reprenons la conditionnelle de base $\supset$ et la biconditionnelle $\equiv$ (soit $\equiv_1$ ou $\equiv_2$). On a alors les tautologies suivantes:

$\vdash Ip \equiv \sim Mp \qquad \vdash Lp \equiv \sim Qp \qquad \vdash Mp \equiv \sim L \sim p$

$\vdash Mp \equiv \sim Ip \qquad \vdash Qp \equiv \sim Lp \qquad \vdash Lp \equiv \sim M \sim p$

Partons de Lp. C'est une proposition qui n'est vraie (n'a la valeur 3) que si p est vraie. Posons donc $Lp = \mathrm{df}\, p$ est nécessaire. Dès lors, on aura les interprétations:

$Mp = \mathrm{df}\, p$ est possible

$Ip \ = \mathrm{df}\, p$ est impossible

$Qp = \mathrm{df}\, p$ n'est pas nécessaire[3]

Voyons encore ce que donnent les réitérations de ces modalités:

p	Lp	LLp	Mp	MMp	LMp	MLp
3	3	3	3	3	3	3
2	1	1	3	3	3	1
1	1	1	1	1	1	1

On aura donc, comme en $S5$:

$\vdash Lp \equiv LLp \qquad\qquad \vdash LMp \equiv Mp$

$\vdash Mp \equiv MMp \qquad\qquad \vdash MLp \equiv Lp$[4]

L'opérateur C offre un intérêt supplémentaire. Il est facile de s'assurer que l'on a:

$\vdash Cp \equiv C \sim p \qquad \vdash Cp \supset Qp$ mais pas inversément. De plus, on aura:

$\vdash Cp \equiv Mp \wedge' M \sim p.$

Il semble donc que la meilleure façon d'interpréter Cp soit «p est contingente».

Reste l'opérateur T. Il a été introduit par Slupecki en 1936 et transforme toute proposition en une proposition ni vraie ni fausse. On aura en particulier:

$\vdash Tp \supset (p \vee' \sim p),$

ce qui suggère d'interpréter T soit comme un opérateur d'interrogation, soit comme un opérateur de mise au futur.

Il existe un autre usage, en rapport avec les modalités, de certaines logiques polyvalentes. Il s'agit de la méthode des matrices que nous avons signalée dans la deuxième partie et qui permet, en particulier, de prouver qu'une proposition ne se déduit pas d'un système d'axiomes donné.

3. On notera que Lp est $\tau_3(\mathrm{p})$ et que Ip est $\tau_3(\sim' \sim' p)$.
4. Ce qui signifie pas que ce système soit équivalent à $S5$.

Nous allons l'expliquer sur l'exemple d'une logique polyvalente proposée par Turquette (1954).[5] Posons $m = 4$, donc considérons l'ensemble $V = df\{1, 2, 3, 4\}$ et décidons que $D = \{3, 4\}$. Les opérateurs $\sim$, $\Diamond$ et $\wedge$ suivants seront traités comme primitifs:

p	$\sim p$	$\Diamond p$
4	1	4
3	2	3
2	3	4
1	4	2

$\wedge$	4	3	2	1
4	4	3	2	1
3	3	3	1	1
2	2	1	2	1
1	1	1	1	1

Si l'on pose ensuite la définition

$P \prec Q \cdot = \mathrm{df} \cdot \sim \Diamond(P \wedge \sim Q)$,

on obtient, pour la conditionnelle stricte $\prec$, la table:

	$\prec$	4	3	2	1
		q			
p	4	3	1	2	1
	3	3	3	2	2
	2	3	1	3	1
	1	3	3	3	3

Il est alors facile de s'assurer que les axiomes ($B1$) à ($B7$) de $S1$ (*cf.* 2.3) prennent leurs valeurs dans D.

Exemples

($B2$) $(p \wedge q) \prec p$

p	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1
q	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
$p \wedge q$	4	3	2	1	3	3	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1
$(p \wedge q) \prec p$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Puisque les axiomes prennent leurs valeurs dans D quelque soit la valeur des variables, la règle de substitution **S** est évidemment valable. En posant:

Df $\asymp$ $\quad P \asymp Q \cdot = \mathrm{df} \cdot (P \prec Q) \wedge (Q \prec P)$,

5. Nous modifions le nom des éléments de V.

on obtient:

$\asymp$	4	3	2	1
4	3	1	1	1
3	1	3	1	1
2	1	1	3	1
1	1	1	1	3

On voit alors que la règle de remplacement des équivalences **R** est valable. La validité de la règle d'adjonction **A** se vérifie sur la table $\wedge$ et celle de la règle de détachement **D**′ sur la table $\prec$.

Il s'ensuit que tout théorème de *S*1 prend sa valeur dans **D** et est donc une tautologie de ce système polyvalent.

Remarque. On aura remarqué sur l'exemple ci-dessus qu'en fait la proposition (*B*2) ne prenait que la valeur 3. La table de $\prec$ montre d'ailleurs que si une expression de la forme $P \prec Q$ prend sa valeur dans *D* celle-ci ne peut être que 3. On peut alors se demander pourquoi introduire aussi 4 dans *D*. L'explication repose sur le fait que *S*1 contient aussi des propositions non modales, par exemple la proposition $\sim(p \wedge \sim p)$ qui en est un théorème. Alors apparaît la valeur 4

p	4	3	2	1
$\sim p$	1	2	3	4
$p \wedge \sim p$	1	1	1	1
$\sim(p \wedge \sim p)$	4	4	4	4

Si maintenant, on considère l'axiome (*B*8), caractéristique de *S*2, soit

(*B*8) $\quad \Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p,$

on constate qu'il n'est pas une tautologie. En effet, si

$val(p) = 3,\ val(q) = 1,$

alors

$val(p \wedge q) = 1,\ val(\Diamond(p \wedge q)) = 2,\ val(\Diamond p) = 3$ et

$val(\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p) = 1 \notin D.$

Ceci prouve que (*B*8) est indépendant de (*B*1) à (*B*7) et que, en conséquence les systémes *S*1 et *S*2 sont distincts. On peut s'assurer, de manière semblable, que les axiomes caractéristiques de *S*3, *S*4, et *S*5 ne sont pas déductibles dans *S*1.

Remarque. Le même procédé permet de garantir que les paradoxes de l'implication stricte:

$\sim \Diamond \sim p \prec (q \prec p) \qquad$ et $\qquad \sim \Diamond p \prec (p \prec q)$

n'appartiennent pas à *S*1. En effet, la première expression prend la valeur $1 \notin D$ par exemple pour $val(p) = val(q) = 2$ et la seconde prend la valeur $1 \notin D$ par exemple pour $val(p) = val(q) = 3$.

Les tables des opérateurs $\sim$, $\Diamond$ et $\wedge$ ci-dessus constituent ainsi des *matrices* pour $S1$ et pour nul autre des systèmes Si.

Reste toutefois à signaler deux problèmes.

1) Ce qui précède montre que si $\vdash_{S1} P$ alors P est une tautologie dans la logique polyvalente de Turquette. Mais cela ne garantit pas que seuls les théorèmes de $S1$ y soient des tautologies. Si tel était le cas, on parlerait de *matrices caractéristiques* pour $S1$. En fait, ces matrices ne le sont pas et Dugundji 1940 a même pu prouver qu'il n'existait pas de matrice caractéristique finie pour $S1$, pas plus d'ailleurs que pour $S2$ à $S5$.

2) Ce qui est possible pour $S1$ l'est-il pour les autres Si? La réponse est affirmative et on trouvera des matrices convenables, quoique non caractéristiques au sens ci-dessus, dans l'Appendice II de Lewis-Langford (1959).

3.5 Note bibliographique

Ackermann, R., *Introduction to many-valued logics*. Londres, Routledge & Kegan, 1967.

Lewis, C. I. et Langford, C. H., *Symbolic logic*. 2e éd. New York, Dover Books, 1959.

Łukasiewicz, J., *Selected works*. Ed. by L. Borkow, Amsterdam, North-Holland Pub. Cy, 1970.

*Moisil, G-C., *Essais sur les logiques non chrysippiennes*. Bucarest, Éd. de l'Acad. de la Rép. Soc. de Roumanie, 1972.

Post, E. L., Introduction to a general theory of elementary propositions. *Am. J. of Math.*, 1921, *41*, 163-185.

Prior, A. N., *Formal logic*. Oxford, Clarendon Press, 1955.

Turquette, A. R., Many-valued logics and systems of strict implication. *The Philosophical Review*, 1954, *43*, 365-379.

QUATRIÈME PARTIE

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE COMBINATOIRE

4.1 Introduction

La logique combinatoire est née de deux sortes de difficultés: l'une a trait aux variables, l'autre à la formation de certaines expressions qui conduisent à des contradictions.

La présence de variables dans un système requiert de se donner des règles de substitution. Dans les cas simples – logique des propositions par exemple – l'énoncé des règles convenables se fait sans trop de peine. Il en va tout autrement dès la logique des prédicats, au point qu'il a fallu attendre les années 35–36 pour dominer la question. On peut alors se demander si les variables sont réellement indispensables à formuler la logique et, d'ailleurs les mathématiques. En effet, lorsqu'en trigonométrie on écrit, par exemple, que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, aucune information n'est fournie sur x. Ce qu'on dit, c'est que la somme des carrés de deux fonctions est toujours égale à 1. De la même manière, même si $(\exists x)ax$ se lit «il y a un x tel que a», l'information ne porte pas sur des objets, mais sur le prédicat a dont on apprend que son extension n'est pas vide. Le calcul de la λ-conversion de Church, comme la logique combinatoire de Curry permettent d'élucider ce genre de problèmes.

On sait d'autre part, depuis la mise en évidence par Russell – et simultanément par Zermelo – de l'antinomie de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas comme élément, que si $x \in \alpha \equiv {\sim}(x \in x)$ peut être considéré comme une proposition, l'expression $\alpha \in \alpha \equiv {\sim}(\alpha \in \alpha)$ ne le peut pas. La logique combinatoire permettra d'analyser rigoureusement les expressions et de savoir exactement à quelle catégorie elles appartiennent (*cf.* 4.6).

Ce n'est cependant pas en vue de résoudre ce genre de problèmes, à proprement parler logiques, que nous introduisons ici quelques éléments de logique combinatoire, mais pour fournir l'esquisse d'un outil propre à analyser certaines situations psychologiques et, éventuellement, linguistiques. Les combinateurs, en effet, représentent des opérations très élémentaires dont la composition permet de rendre compte d'opérations complexes. Une étude comme celle de Frey 1967 montre le parti que le psychologue peut en tirer, un travail comme celui de Bar-Hillel 1968 ou un essai comme celui de Grize 1971 laissent entendre que le linguiste peut aussi en tirer profit.

4.2 Les combinateurs élémentaires

Partons d'un ensemble dénombrable d'objets, sur la nature desquels il n'est pas nécessaire de se prononcer. Nous les désignerons par des lettres latines, minuscules ou majuscules. Si a et b sont deux de ces objets, nous nous donnons le droit d'écrire (ab) et nous parlerons de l'application de a à b. Si c est un autre objet, nous nous donnerons le droit d'appliquer (ab) à c et nous écrirons: $((ab)c)$.

On constate que le nombre des parenthèses va croître assez rapidement, aussi allons-nous immédiatement poser que:

ab	abrège	(ab)	
abc		$((ab)c)$	et ainsi de suite.

Exemples

(1) $((a(bc))d)$ s'abrègera $a(bc)d$

(2) $((((ab)(cd))e)f)$ s'abrègera $(ab)(cd)ef$ puis $ab(cd)ef$

(3) $((a((bc)d))e)$ s'abrègera $a(bcd)e$

Remarques

1) Seules peuvent être supprimées les parenthèses qui convergent sur la gauche. Ainsi l'exemple (1), ne peut pas s'abréger en $abcd$. Cette combinaison est l'abréviation de $(((ab)c)d)$.

2) Une expression non abrégée contient toujours une paire de parenthèses de moins que de lettres.

Nous appellerons combinateurs élémentaires, les lettres I, W, K, C et B qui, dans un premier temps ne se distinguent en rien des minuscules. Ainsi, on pourra écrire par exemple:

$Ka(Ka)$, $ab(KIab)$, $BWWab$, etc.

Dans un second temps, nous allons poser que certaines combinaisons peuvent se récrire d'une autre façon. Nous noterons la chose par une flèche.

Règle de récriture

L'identificateur I
Si x est un objet: $Ix \to x$.
On aura alors: $Ia \to a$, $IK \to K$, $I(ab) \to ab$. Mais il faut noter que la règle ne permet pas de récrire Iab. Nous dirons que I est un combinateur à un argument. Son «effet» est simplement de reproduire la lettre qui le suit.

Le répétiteur W
Si x et y sont des objets: $Wxy \to xyy$.
On aura donc: $Wab \to abb$, $WIa \to Iaa$, $Wa(Ia) \to a(Ia)(Ia)$.
W est un combinateur à deux arguments et son «effet» consiste à redoubler son second argument.

L'éliminateur K
Si x et y sont des objets: $Kxy \to x$.
K est un combinateur à deux arguments et il supprime (élimine) le second.

Exemples
$Kab \to a$, $KIa \to I$, $K(ab)c \to ab$.
Dans ce dernier exemple (ab) ne compte que pour un argument. Cela vient de ce que, dans l'expression donnée, soit $K(ab)c$, les parenthèses ne peuvent être supprimées. On notera encore que $Ka(bc) \to a$, mais que $Kabc$ ne peut se récrire.

Le permutateur C
Si x et y et z sont des objets: $Cxyz \to Cxzy$.
C, qui exige trois arguments, permute les deuxième et troisième.

Exemples
$Cabc \to acb$, $CaKb \to abK$, $Caab \to aba$, $Ca(bc)d \to ad(bc)$.

Le compositeur B
Si x, y et z sont des objets: $Bxyz \to x(yz)$.
B a trois arguments et il lie les deuxième et troisième.

Exemples: $Bfgx \to f(gx)$, $Babb \to a(bb)$, $B(ab)cd \to ab(cd)$.

Résumé

Combi-nateurs	Nom	Nb d'ar-guments	Règle	Effet
I	Identificateur	1	$Ix \to x$	Reproduit son argument
W	Répétiteur	2	$Wxy \to xyy$	Répète son $2^{ème}$ argument
K	Eliminateur	2	$Kxy \to x$	Supprime son $2^{ème}$ argument
C	Permutateur	3	$Cxyz \to xzy$	Permute ses 2^e et 3^e arguments
B	Compositeur	3	$Bxyz \to x(yz)$	Lie ses 2^e et 3^e arguments

Il peut arriver que plusieurs réductions puissent s'effectuer les unes à la suite des autres.

Exemples
(1) $CWab \to Wba \to baa$
(2) $CKab \to Kba \to b$
(3) $I(Kab) \to Kab \to a$
(4) $WKa \to Kaa \to a$.
Ce dernier exemple fait voir qu'un combinateur, ici WK, peut avoir le même «effet» qu'un autre, ici I puisque $Ia \to a$. Nous dirons que WK est égal à I. En général:

Deux combinateurs X et Y sont dits *égaux*, si, appliqués à une même suite, ils conduisent à la même récriture.

4.3 Deux extensions

Jusqu'ici un combinateur ne peut «agir» – on ne peut effectuer la récriture – que s'il est suivi d'un nombre déterminé d'arguments. Qu'un combinateur comme C, par exemple, ne puisse permuter ses $2^{ème}$ et $3^{ème}$ arguments, s'il n'en a pas au moins trois, est évident. En revanche, nous allons postuler qu'il continue à les permuter, si le troisième est suivi d'autres. Nous poserons donc:

$1^{ère}$ extension. Si α, β, γ sont des chaînes d'objets, telles que α commence par un combinateur, alors si $\alpha \to \beta$, on a aussi $\alpha\gamma \to \beta\gamma$.

Exemples

$Iabc \to abc$
$Wabcd \to abbcd$
$Kabcde \to acde$
$Cabcd \to acbd$
$Babcde \to a(bc)de$
$IWCab \to WCab \to Caab \to aba$
$BCabcd \to C(ab)cd \to abdc$

Dans les cas un peu plus compliqués, il est commode de numéroter les arguments. Ainsi:

$$W\underset{1}{B}\underset{2}{(ab)}\underset{3}{c}(de) \to B\underset{1}{(ab)}\underset{2}{(ab)}\underset{3}{c}(de) \to ab(abc)(de).$$

Rien n'empêche de considérer d'autres combinateurs. Introduisons, en particulier, le combinateur S tel que:
$Sabc \to ac(bc)$.
On aura:

(1) $S\underset{1}{K}\underset{2}{K}\underset{3}{a} \to K\underset{1}{a}\underset{2}{(Ka)} \to a.$

On pourra donc poser, en vertu de l'égalité des combinateurs:

$$\underline{SKK = I}$$

(2) $S\underset{1}{(KS)}\underset{2}{K}\underset{3}{a}bc \to K\underset{1}{S}\underset{2}{a}\underset{3}{(Ka)}bc \to S\underset{1}{(Ka)}\underset{2}{b}\underset{3}{c} \to K\underset{1}{a}\underset{2}{c}(bc) \to a(bc)$

Donc: $\underline{S(KS)K = B}$

2^ème^ extension. Combinée avec la 1^ère^ extension, elle va permettre à un combinateur de « fonctionner » à l'intérieur d'une chaîne. Si α, β, γ sont des chaînes, telles que α commence par un combinateur, alors si $\alpha \to \beta$, on aura aussi $\gamma\alpha \to \gamma\beta$.

Ainsi

(3) $S\underset{1}{S}\underset{2}{(KI)}\underset{3}{a}b \to S\underset{1}{a}\underset{2}{(KIa)}\underset{3}{b} \to ab(K\underset{1}{I}\underset{2}{a}b) \to abIb \to abb$

et l'on a: $\underline{SS(KI) = W}$

(4) $S\underset{1}{(BBS)}\underset{2}{(KK)}\underset{3}{a}bc \to B\underset{1}{B}\underset{2}{S}\underset{3}{a}(KKa)bc \to B\underset{1}{(Sa)}\underset{2}{(KKa)}\underset{3}{b}c \to S\underset{1}{a}\underset{2}{(KKab)}\underset{3}{c}$

$\to ac(K\underset{1}{K}\underset{2}{a}b) \to acKab \to acb$

donc: $\underline{S(BBS)(KK) = C.}$

Les exemples (1) à (4) ci-dessus montrent que les combinateurs S et K

permettent de définir les autres. Ils peuvent ainsi servir de base à la logique combinatoire. La chose se comprend d'ailleurs intuitivement dans la mesure où l'on note que S a trois effets: il permute, répète et compose.

Remarque. Soit le combinateur $T = \mathrm{df}\ CI$. On aura:
$Tab = CIab$ et $CIab \to Iba \to ba$. T est un exemple d'un combinateur qui ne laisse pas son premier argument invariant. Nous appellerons *combinateur normal* tout combinateur qui laisse invariant son premier argument.

4.4 Puissance des combinateurs

Supposons que l'on cherche à construire un combinateur X tel que $Xab \to abbb$. Le résultat visé, $abbb$, pourrait s'obtenir par W à partir de abb: $Wabb \to abbb$. Quant à abb, on peut l'obtenir par W aussi à partir de ab. Il semblerait donc, à première vue qu'il suffise d'écrire $WWab$. Mais appliquons les règles:

$WWab \to Waab \to aaab$

ce qui n'est pas la réduction cherchée.

En revanche, si l'on écrivait $W(Wa)b$, on aurait $W(Wa)b \to Wabb \to abbb$.

Ceci suggère de faire usage de B et d'écrire $BWWab$. On a en effet:

$BWWab \to W(Wa)b \to Wabb \to abbb$

Supposons que X et Y soient des combinateurs normaux et examinons l'effet du combinateur BXY. On aura par exemple:

$BXYx_1x_2 \ldots x_n \to X(Yx_1)x_2 \ldots x_n$

X étant supposé normal, il n'agira qu'à partir de x_2 et on aura:

$X(Yx_1)x_2 \ldots x_n \to Yx_1y_1 \ldots y_k \to x_1z_1 \ldots z_l$

Il s'ensuit que BXY a comme réduction, celle que l'on obtiendrait

(1) En appliquant X à la chaîne initiale

(2) En appliquant Y sur la réduction de X.

Exemples

1) $B\underset{1}{K}\underset{2}{W}\underset{3}{a}bc \to K\underset{1}{(Wa)}\underset{2}{b}c \to Wac \to acc$

Procédure: (1) $Kabc \to ac$

(2) $Wac \to acc$

2) $B\underset{1}{B}\underset{2}{B}\underset{3}{a}bcd \to B\underset{1}{(Ba)}\underset{2}{b}\underset{3}{c}d \to B\underset{1}{a}\underset{2}{(bc)}\underset{3}{d} \to a(bcd)$

Procédure: (1) $Babcd \to a(bc)d$
(2) $Ba(bc)d \to a(bcd)$

Remarque. La procédure n'est qu'en deux temps puisque le premier B, celui de la formule BXY, est celui qui l'autorise.

Il est alors commode d'introduire une opération produit, notée ici $\cdot$ et obligatoirement marquée, et définie comme suit:
Si X, Y, Z ... sont des combinateurs normaux
alors: $X \cdot Y = \mathrm{df}\, BXY$
$X \cdot Y \cdot Z = \mathrm{df}\,(X \cdot Y) \cdot Z = \mathrm{df}\,(BXY) \cdot Z = \mathrm{df}\, B(BXY)Z$, etc.

Exemple
$(K \cdot C \cdot W)abcd$
Procédure: (1) $Kabcd \to acd$
(2) $Cacd \to adc$
(3) $Wadc \to addc$
Contrôle: $(K \cdot C \cdot W)abcd = \mathrm{df}\, B(BKC)Wabcd$
Or: $B(B\underset{1}{K}C)\underset{2}{W}\underset{3}{a}bcd \to B\underset{1}{K}\underset{2}{C}(W\underset{3}{a})bcd \to K(C(W\underset{1}{a}))\underset{2}{b}\underset{3}{c}d \to C(W\underset{1}{a})\underset{2}{c}\underset{3}{d} \to$

$\to Wadc \to addc.$
Posons en particulier:
$X^1 = \mathrm{df}\, X$
$X^2 = \mathrm{df}\, X \cdot X$ etc.
On aura, par exemple:
1) $W^3ab \to abbbb$
En effet, $W^3 = \mathrm{df}\, W \cdot W \cdot W$ et la procédure donne:
(1) $Wab \to abb$
(2) $Wabb \to abbb$
(3) $Wabbb \to abbbb$
2) $B^2abcd \to a(bcd)$
En effet, $B^2 = \mathrm{df}\, B \cdot B$ et la procédure donne:
(1) $Babcd \to a(bc)d$
(2) $Ba(bc)d \to a(bcd)$
3) $K^4abcdefg \to afg$
En effet, $K^4 = \mathrm{df}\, K \cdot K \cdot K \cdot K$ et
(1) $Kabcdefg \to acdefg$
(2) $Kacdefg \to adefg$
(3) $Kadefg \to aefg$
(4) $Kaefg \to afg$

Règles générales
$I^n = I$
W^n fait figurer $(n + 1)$ fois le 2e argument
K^n supprime n arguments à partir du 2e et y compris lui

$$C^n = \left\langle \begin{array}{l} I \text{ si } n \text{ est pair} \\ C \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

B^n lie n arguments au 2e, donc en entoure $(n + 1)$ d'une paire de parenthèses.

Exemples
1) $WB^2abcd \rightarrow B^2aabcd \rightarrow a(abc)d$
2) $K^3BaIbcde \rightarrow Bcde \rightarrow ced$
3) $BW^3abcd \rightarrow W^3(ab)cd \rightarrow abccccd$
4) $B^2W^3abcd \rightarrow W^3(abc)d \rightarrow abcdddd$

4.5 Action à distance

Les deux derniers exemples montrent qu'il est possible d'utiliser les puissances de B pour « décaler » l'effet d'un combinateur. Soit, en effet, X un combinateur élémentaire différent de I ou une puissance d'un tel combinateur. X agit à partir de son deuxième argument:
$Xx_1x_2x_3x_4 \ldots x_n \rightarrow x_1y_1y_2 \ldots y_n$
Dès lors $BXx_1x_2x_3x_4 \ldots x_n \rightarrow X(x_1x_2)x_3x_4 \ldots x_n$ et X agit à partir de x_3. De même:
$B^2Xx_1x_2x_3x_4 \ldots x_n \rightarrow X(x_1x_2x_3)x_4 \ldots x_n$ et X agit à partir de x_4.
D'une façon générale: B^kX fait agir X à partir du $(k + 2)e$ argument.

Exemples
1) $B^2Cabcde \rightarrow abced.$ En effet:
$B^2abcde \rightarrow C(abc)de \rightarrow abced.$
2) $BK^2abcde \rightarrow abe.$ En effet:
$BK^2abcde \rightarrow K^2(ab)cde \rightarrow abe.$

L'utilisation combinée de ce qui précède permet de résoudre divers types de problèmes, dont les deux suivants:

Problème 1. Déterminer un combinateur qui, appliqué à une suite donnée, engendre une autre suite (qui ne contient pas de nouveaux objets).

Soit par exemple, à trouver un combinateur X égal à S, donc tel que $Xabc \rightarrow ac(bc)$. Il est possible de procéder comme suit:
(1) Identifier la suite donnée, ici $Iabc \rightarrow abc$
(2) Répéter c, ici en 3^e place: $BWabc \rightarrow abcc$.
(3) Permuter b et c, ici en 2^e et 3^e place: $Cabcc \rightarrow acbc$.
(4) Lier b et c, ici en 3^e et 4^e place: $BBacbc \rightarrow ac(bc)$.
Donc: $X = I \cdot (BW) \cdot C \cdot (BB)$.

Contrôle

$$I \cdot (BW) \cdot C \cdot (BB) = \text{df } B(I \cdot (BW) \cdot C)(BB) = \text{df } B(B(I \cdot (BW))C)(BB)$$
$$= \text{df } B(B(BI(BW))C)(BB)$$

Dès lors:

$$B(B(BI(\underset{1}{B}W))C)(B\underset{2}{B})a\underset{3}{b}c \rightarrow B(BI(B\underset{1}{W}))\underset{2}{C}(B\underset{3}{B}a)bc \rightarrow$$
$$\rightarrow B\underset{1}{I}(B\underset{2}{W})(C(B\underset{3}{B}a))bc \rightarrow I(BW(C(BBa)))bc$$
$$\rightarrow B\underset{1}{W}(C(B\underset{2}{B}a))\underset{3}{b}c \rightarrow W(C(B\underset{1}{B}a)b)\underset{2}{c}$$
$$\rightarrow C(B\underset{1}{B}a)\underset{2}{b}\underset{3}{c}c \rightarrow BB\underset{1}{a}\underset{2}{c}\underset{3}{b}c \rightarrow B(\underset{1}{a}c)\underset{2}{b}\underset{3}{c} \rightarrow ac(bc).$$

Remarque. S'il y a, dans la réduction souhaitée, des lettres de moins que dans la suite de départ, on commencera par les supprimer.

Exemple
Trouver X tel que $X\ merci \rightarrow mie$
(1) Identifier la suite donnée, ici $I\ merci \rightarrow merci$
(2) Supprimer r et c, ici en 3^e et 4^e place: $BK^2merci \rightarrow mei$
(3) Permuter e et i, ici en 2^e et 3^e place: $Cmei \rightarrow mie$
Donc $X = I \cdot (BK^2) \cdot C$

Contrôle

$$I \cdot (BK^2) \cdot C = \text{df } B(I \cdot (BK^2))C = \text{df } B(BI(BK^2))C$$

Dès lors:

$$B(BI(\underset{1}{B}K^2))\underset{2}{C}\underset{3}{m}erci \rightarrow B\underset{1}{I}(B\underset{2}{K}^2)(C\underset{3}{m})erci \rightarrow I(BK^2(Cm))erci$$
$$\rightarrow B\underset{1}{K}^2(C\underset{2}{m})\underset{3}{e}rci \rightarrow K^2(C\underset{1}{m}e)\underset{2}{r}ci \rightarrow Cmei \rightarrow mie$$

Problème 2. Rendre compte d'une substitution.

Partons de l'axiome $p \supset (q \supset p)$ du calcul des propositions. Substituer, par exemple $p \supset p$ à q, dans cet axiome, c'est écrire $p \supset ((p \supset p) \supset p)$. Convenons que, d'une façon générale, nous écrirons cPQ au lieu de $P \supset Q$.

L'axiome peut alors s'écrire *cpcqp* et le résultat de la substitution *cpccppp*. Le problème revient alors à trouver X tel que:

$Xcpcqp \rightarrow cpccppp$

Nous aurons:

(1) Identifier la suite donnée, ici $Icpcqp \rightarrow cpcqp$

(2) Supprimer q, ici en 4ᵉ position: $B^2Kcpcqp \rightarrow cpcp$

(3) Répéter c, ici en 3ᵉ position: $BWcpcp \rightarrow cpccp$

(4) Répéter deux fois p, ici en 5ᵉ position: $B^3W^2cpccp \rightarrow cpcppp$

On aura donc: $X = I \cdot (B^2K) \cdot (BW) \cdot (B^3W^2)$

Voici en guise d'exercice, le contrôle.

$I \cdot (B^2K) \cdot (BW) \cdot (B^3W^2) = \mathrm{df}\, B(B(BI(B^2K))(BW))(B^3W)$ et l'on a:

$B(B(BI(B^2K))(BW))(B^3W^2)cpcqp \rightarrow$
$B(BI(B^2K))(BW)(B^3W^2c)pcqp \rightarrow BI(B^2K)(BW(B^3W^2c))pcqp \rightarrow$
$I(B^2K)(BW(B^3W^2c))pcqp \rightarrow B^2K(BW(B^3W^2c))pcqp \rightarrow$
$K(BW(B^3W^2c)pc)qp \rightarrow BW(B^3W^2c)pcp \rightarrow W(B^3W^2c)cp \rightarrow$
$B^3W^2cpccp \rightarrow cpccppp.$

4.6 La fonctionnalité

Nous allons maintenant faire l'hypothèse que nos objets se répartissent en diverses *catégories*: α, β, γ, etc. Si un objet x appartient à la catégorie α, nous écrirons comme de coutume $x \in \alpha$.

Imaginons un opérateur F que nous nommerons *flèche* et tel que

(1) Si α et β sont des catégories, $F\alpha\beta$ est une catégorie.

(2) Si $ab \in \beta$ et $b \in \beta$, alors $a \in F\beta\alpha$.

Cette seconde condition peut se noter plus commodément.

(2) $ab \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in \beta \\ a \in F\beta\alpha \end{array} \right.$

Exemple

On sait que si x est un nombre réel, $\sin x$ est un nombre réel compris entre 0 et 1.

Notons $\mathbf{R}$ pour les réels, $\mathbf{I}$ pour l'intervalle fermé $[0,1]$.

L'opérateur F permet d'écrire:

$\sin x \in \mathbf{R} \left\langle \begin{array}{l} x \in \mathbf{I} \\ \sin \in F\mathbf{IR} \end{array} \right.$

Cela signifie que sin appartient à la catégorie « flèche de **I** à **R** », ce que l'on peut symboliser par: $\mathbf{I} \xrightarrow{[\sin]} \mathbf{R}$.

En général, l'écriture [x] désigne la catégorie à laquelle appartient, entre autres, x.

Ceci permet diverses analyses. En voici de trois sortes.

1. *Analyse des objets logiques*

Partons des deux catégories primitives d'*objets* ω et de *propositions* π.

Considérons alors un prédicat unaire a et un objet x_1, nous savons que ax_1 est une proposition. On aura alors:

$$ax_1 \in \pi \left\langle \begin{array}{l} x_1 \in \omega \\ a \in F\omega\pi \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \omega \xrightarrow{[a]} \pi$$

Tout prédicat unaire appartient à la catégorie $F\omega\pi$ et, en effet, appliqué à un objet, il engendre une proposition.

De même, si r est un prédicat binaire et si x_1 et x_2 sont deux objets, on aura:

$$rx_1x_2 \in \pi \left\langle \begin{array}{l} x_2 \in \omega \\ rx_1 \in F\omega\pi \end{array} \right. \left\langle \begin{array}{l} x_1 \in \omega \\ r \in F\omega F\omega\pi \end{array} \right.$$

soit:

$$\begin{tikzcd} & \omega \arrow[dd, "{[rx_1]}"] \\ \omega \arrow[r, "{[r]}"] & {} \\ & \pi \end{tikzcd}$$

Remarque. Il serait évidemment possible de n'écrire qu'une seule fois la catégorie ω. On aurait alors le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[rr, "{[rx_1]}"'] \arrow[r, bend left=60, "{[r]}"] & {} & \pi \end{tikzcd}$$

Mais, dès que les diagrammes se compliquent, il est plus clair d'écrire plusieurs fois le nom des catégories, comme cela se fait sur les schémas radio-électriques.

Un prédicat binaire r est donc tel que, appliqué à un objet x_1, il devient un prédicat unaire, à savoir rx_1 lequel appliqué à un objet x_2 engendre une proposition.

Considérons encore l'expression $p \wedge q$ et convenons de l'écrire $\wedge\, pq$. On aura alors:

$$\wedge\, pq \in \pi \left\langle \begin{array}{l} q \in \pi \\[2ex] \wedge\, p \in F\pi\pi \left\langle \begin{array}{l} p \in \pi \\[2ex] \wedge \in F\pi F\pi\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Un opérateur propositionnel binaire comme $\wedge$, est donc tel que, appliqué à une proposition p, il devient un opérateur unaire $\wedge\, p$ lequel, appliqué à une proposition q, engendre une proposition.

On devine ainsi que l'opérateur F permet d'attribuer à toute expression logique une catégorie et que le problème de l'analyse des êtres logiques est soluble.

2. *Analyse des objets linguistiques*

Elle peut se faire analogiquement à celle des objets logiques. Partons pour cela des deux catégories primitives de noms N et de phrases P. Alors «Roméo aime Juliette», que nous écrivons «aime Roméo Juliette» ou en abrégé «*aRJ*» est une proposition et l'on aura:

$$aRJ \in P \left\langle \begin{array}{l} J \in N \\[2ex] aR \in FNP \left\langle \begin{array}{l} R \in N \\[2ex] a \in FNFNP \end{array}\right. \end{array}\right.$$

La catégorie d'un verbe comme «aimer» peut donc se représenter comme suit:

$$\begin{tikzcd}
 & N \in \text{Juliette} \arrow[dd] & \\
\text{Roméo} \in N \arrow[r, "\text{[aime]}"] & {} & \text{[Roméo aime]} \\
 & P\ \text{[Roméo aime Juliette]} &
\end{tikzcd}$$

Autre exemple. Admettons que «la maison» est un nom, alors «la maison rouge» en sera aussi un. Pour déterminer la catégorie à laquelle appartient l'adjectif «rouge», nous écrirons «rouge la maison». Dès lors:

$$\text{rouge la maison} \in N \left\langle \begin{array}{l} \text{la maison} \in N \\ \\ \text{rouge} \in FNN \end{array} \right. \qquad \text{et}$$

« rouge » appartient à la catégorie adjectivale qui est une flèche de N à N.

On trouvera d'autres analyses dans Bar-Hillel déjà cité et dans Ajdukiewicz 1935.

3. *Analyse des combinateurs*

Il n'est pas ici nécessaire de se donner de catégories primitives. En revanche, nous postulerons qu'une expression et sa réduction appartiennent toujours à la même catégorie. Voici trois exemples.

Catégorie $[K]$

On a: $Kab \to a$

Hypothèses: $Kab, a \in \alpha$ et $b \in \beta$

On a dès lors:

$$Kab \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in \beta \\ \\ Ka \in F\beta\alpha \left\langle \begin{array}{l} a \in \alpha \\ \\ K \in F\alpha F\beta\alpha \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Donc:

$$\begin{tikzcd} & \beta \arrow[dd, "{[Ka]}"] \\ \alpha \arrow[r, "{[K]}"] & {} \\ & \alpha \end{tikzcd}$$

Catégorie $[W]$

On a: $Wab \to abb$

Hypothèses: $Wab, abb \in \alpha$ et $b \in \beta$

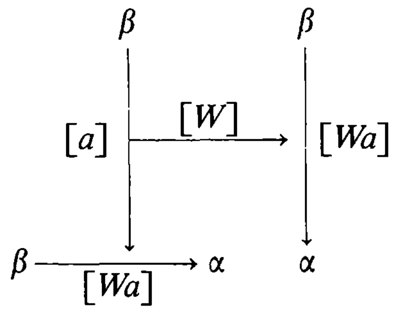
Commençons par déterminer la catégorie à laquelle appartient a:

$$abb \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in \beta \\ \\ ab \in F\beta\alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in \beta \\ \\ a \in F\beta F\beta\alpha. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dès lors:

$$Wab \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in \beta \\ \\ Wa \in F\beta\alpha \left\langle \begin{array}{l} a \in F\beta F\beta\alpha \\ \\ W \in F(F\beta F\beta\alpha)(F\beta\alpha)^{1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Donc:



Catégorie $[S]$

On a: $Sabc \to ac(bc)$

Hypothèses: $Sabc, ac(bc) \in \alpha, bc \in \beta$ et $c \in \gamma$

Cherchons d'abord la catégorie à laquelle appartient b:

$$bc \in \beta \left\langle \begin{array}{l} c \in \gamma \\ \\ b \in F\gamma\beta \end{array} \right.$$

Cherchons maintenant celle à laquelle appartient a:

$$ac(bc) \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} bc \in \beta \\ \\ ac \in F\beta\alpha \left\langle \begin{array}{l} c \in \gamma \\ \\ a \in F\gamma F\beta\alpha \end{array} \right. \end{array} \right.$$

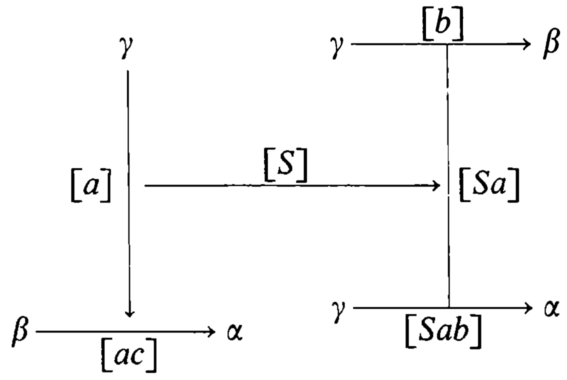
Dès lors:

$$Sabc \in \alpha \left\langle \begin{array}{l} c \in \gamma \\ \\ Sab \in F\gamma\alpha \left\langle \begin{array}{l} b \in F\gamma\beta \\ \\ Sa \in F(F\gamma\beta)(F\gamma\alpha) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\langle \begin{array}{l} a \in F\gamma F\beta\alpha \\ \\ S \in F(F\gamma F\beta\alpha)[F(F\gamma\beta)(F\gamma\alpha)] \end{array} \right.$$

1. Les parenthèses ne sont pas nécessaires: nous ne les plaçons que pour faciliter la lecture.

Donc:



Tout ceci peut sembler assez éloigné de la logique au sens courant. Ce n'est cependant pas le cas. Ecrivons les catégories $[K]$, $[W]$, et $[S]$:

$[K]$ $\quad F\alpha F\beta\alpha$
$[W]$ $\quad F(F\beta F\beta\alpha)(F\beta\alpha)$
$[S]$ $\quad F(F\gamma F\beta\alpha)[F(F\gamma\beta)(F\gamma\alpha)]$

Ecrivons p à la place de α, q à la place de β et m à la place de γ:

$[K]$ $\quad FpFqp$
$[W]$ $\quad F(FqFqp)(Fqp)$
$[S]$ $\quad F(FmFqp)[F(Fmq)(Fmp)]$

Posons enfin, d'une façon générale: $FPQ = \mathrm{df}\, P \supset Q$. On obtient:

$[K]$ $\quad p \supset (q \supset p)$
$[W]$ $\quad q \supset (q \supset p) \cdot \supset \cdot (q \supset p)$
$[S]$ $\quad m \supset (q \supset p) \cdot \supset \cdot (m \supset q) \supset (m \supset p)$

Non seulement nous avons-là des tautologies de $\mathscr{C}$, mais on montre que, de même que K et S peuvent servir à fonder la logique combinatoire, les expressions $[K]$ et $[S]$ peuvent servir d'axiomes pour la logique de l'implication absolue.

4.7 Note bibliographique

Ajdukiewicz, K., Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica*, 1935, *1*, 1-27.

Bar-Hillel, Y., Une notation quasi arithmétique destinée aux descripteurs syntaxiques. *Langages*, 1968, *9*, 9-22 (La version originale anglaise date de 1935).

*Curry, H. B. et Feys, R., *Combinatory logic I*. Amsterdam, North-Holland Publ. Cy, 1958 (2e éd. 1968).

Feys, R., La technique de la logique combinatoire. *Rev. Philosophique de Louvain*, 1946, *44*, 74-103.

Frey, L., Langage logique et processus intellectuels in: *Les modèles et la formalisation du comportement* (Colloques internationaux du CNRS), Paris, Éd. du CNRS, 1967, 327-345.

Grize, J.-B., Quelques problèmes logico-linguistiques. *Mathématiques et Sciences humaines*, 1971, *35*, 43-50.

Rosenbloom, P. C., *The elements of mathematical logic*. New York, Dover Books, 1950 (ch. III, Section 4).

CINQUIÈME PARTIE

ONTOLOGIE ET MÉRÉOLOGIE DE LEŚNIEWSKI

5.1 Les systèmes de Leśniewski

Leśniewski a construit trois théories dont les deux premières sont logiques et la troisième extra-logique. Ce sont:
(1) La *protothétique*, dont le concept de base est celui de proposition.
(2) L'*ontologie*, dont le concept de base est celui de nom.
(3) La *méréologie* qui est une axiomatisation de la relation de partie à tout.

Chacune présuppose celle qui la précède.

La protothétique constitue un calcul des propositions dont l'originalité est triple.

1) Il permet, à partir de la catégorie primitive de proposition, de construire autant de nouvelles catégories sémantiques que l'on désire, les foncteurs permettant, non seulement d'engendrer des propositions, mais de nouveaux foncteurs.
2) Il utilise des quantificateurs, de sorte qu'une expression comme
$$p \supset (\forall q)f(q)$$
par exemple, a un sens.[1]
3) Il repose sur le seul foncteur primitif $\equiv$ (biconditionnelle) et sur un unique axiome.

Il est possible de tirer de la protothétique la logique classique des propositions. D'autre part, au moment où les propositions p, q, etc. sont analysées en termes de sujets et de prédicats, on dispose de l'équivalent de la logique des prédicats du premier ordre.

1. J'adopte partout les notations usuelles et je renonce à introduire celles de Leśniewski et des auteurs de son Ecole.

Dans ce texte, je me donne comme acquise la logique des prédicats du premier ordre sans identité, sous sa forme usuelle. Je ne dirai donc rien de la protothétique.

Il est de mise aujourd'hui de traiter les systèmes formels *comme si* l'on ignorait les interprétations que l'on a en vue. L'attitude de Leśniewski est très différente. Il se propose de formaliser certaines notions, celles par exemple que recouvre *est* (3^e personne du verbe «être»), celle que recouvre l'expression *est élément de*, etc. Ces locutions ont un sens pour celui qui parle français. Leśniewski se donne pour tâche de fixer ce sens – plus exactement une partie de ce sens – à l'aide d'axiomes et d'en déduire ensuite les conséquences. Il s'en suit donc:

1) que Leśniewski estime, comme le faisait Aristote, que les langues naturelles véhiculent aussi des rapports logiques et qu'il est légitime d'y prendre appui;
2) que la signification des symboles coexiste avec les règles formelles qui les dirigent.

L'interprétation est donc un guide heuristique permanent et ce ne sont pas les axiomes qui donnent un sens aux signes, mais bien le sens des signes qui justifie et explique les axiomes. Un système formel se présente donc comme le résultat d'une formalisation de nos intuitions.

5.2 L'ontologie

La catégorie de base est celle de *nom* et l'ontologie va se présenter comme un système de relations entre noms. On peut avoir affaire à des noms réels ou à des noms fictifs, mais le problème n'est pas de faire une théorie du monde. L'ontologie est une partie de la logique, c'est donc un langage au sein duquel certaines choses existent et d'autres pas.

Il est aujourd'hui banal de rappeler que *est* (*sont*) a des sens multiples et que la formalisation classique est capable d'en distinguer plusieurs. C'est ainsi qu'on aurait, par exemple, en utilisant l'initiale du mot comme nom:

(1) Jean est malade	mJ
(2) Jean est un malade	$J \in \{x \mid mx\}$
(3) Poquelin est Molière	$P = M$
(4) L'eau est incolore	?
(5) Les soucis sont des fleurs	$\{x \mid sx\} \subset \{x \mid fx\}$
(6) Le loup est un animal	$\{x \mid lx\} \subset \{x \mid ax\}$

On fait donc usage de deux types de distinction:
l'une entre relateurs ($\in$, $=$, $\subset$), l'autre notationnelle (ax, $x \in \{y|ay\}$).

Leśniewski se propose d'axiomatiser au plus près l'idée centrale connotée dans diverses langues par les mots *est* (latin, français), *jest* (polonais), *ist* (allemand), *is* (anglais), etc. Il introduit pour cela le signe ε (à *ne pas confondre avec le signe ensembliste* $\in$) et qui sera lu *est*.

La distinction entre « Jean est malade » et « Jean est *un* malade », plus généralement la distinction entre adjectif et substantif n'est pas ici pertinente.

Considérons le raisonnement suivant, donné par Luschei, 1962.

Si Socrates est coniunx Xantippae, et coniunx Xantippae est homo, Socrates est homo et coniunx Xantippae.

Selon que le régime matrimonial est monogamique ou non, la traduction française et ensembliste change. Le latin et le lesniewskien sont invariants!

En revanche, il sera commode – bien que non nécessaire – d'adopter la distinction suivante:
les *noms individuels* seront représentés par des majuscules: A, B, C, ...
les *noms génériques* par des minuscules: x, y, z, ...

Avec ces conventions, les deux écritures

Majuscule ε Majuscule Majuscule ε minuscule

sont correctes et les deux écritures

minuscule ε minuscule minuscule ε Majuscule

sont incorrectes.

Remarque. Dans toute expression de la forme $\alpha \ \varepsilon \ \beta$, une majuscule peut être substituée à une minuscule.

Leśniewski a donné plusieurs versions de l'ontologie.[2] Je choisis celle de 1920.

Supposons que l'on dise:
« Nicole est étudiante »: $A \ \varepsilon \ x$

(1) On présuppose par là-même l'existence de « Nicole », c'est-à-dire qu'il existe un certain nom, « la fille du voisin » (B) par exemple, qui est « Nicole »:

$$(\exists B)(B \ \varepsilon \ A)$$

(2) D'autre part, de « la fille du voisin » ou de tout autre nom propre

2. Voir, par exemple, Lejewski, 1957-58.

à désigner « Nicole », comme « Mlle Dupont », « la jeune fille qui passe », etc., on peut dire « est étudiante »:

$$(\forall B)(B \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, x)$$

(3) Enfin « Nicole » est un nom individuel et l'on présuppose son unicité. Puisque « la fille du voisin » et « Mlle Dupont » sont « Nicole », il s'ensuit que « la fille du voisin » est « Mlle Dupont ».

De là l'axiome de l'ontologie qui comporte trois parties:

$$Ax \qquad (\forall A, x){:}\, A \,\varepsilon\, x \cdot \equiv \cdot (\exists B)(B \,\varepsilon\, A) \wedge (\forall B)(B \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, x) \wedge (\forall B, C)(B \,\varepsilon\, A \wedge C \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, C)$$

Remarques

1) Dans les références, je renverrai à chacune des trois clauses de l'axiome en notant $Ax(1)$, $Ax(2)$ et $Ax(3)$.

2) Maintenant qu'il est posé, l'axiome est une expression formelle. Ainsi dans l'antécédent de $Ax(3)$, B précède C et on a $B \,\varepsilon\, C$ dans le conséquent et *pas* $C \,\varepsilon\, B$.

3) Nous construisons une théorie des noms et pas du monde. Ainsi serait-il incorrect – quoique bien commode – d'interpréter $Ax(1)$ en disant:

« Il existe une personne qui est Nicole »

4) Sobocinski a montré en 1929[3] que l'axiome Ax était déductivement équivalent à

$$(\forall A, x){:}\, A \,\varepsilon\, x \cdot \equiv (\exists B)(A \,\varepsilon\, B \wedge B \,\varepsilon\, x)$$

Cet axiome est plus simple mais moins explicite. D'autre part, les démonstrations des théorèmes sont plus compliquées.

Voici d'abord quelques conséquences immédiates:

T_1 $\vdash (\forall A, x){:}\, A \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, A$

1	$A \,\varepsilon\, x$	*hyp*
2	$(\exists B)(B \,\varepsilon\, A)$	1, $Ax(1)$
3	$(\forall B)(B \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, A)$	Loi logique
4	$(\forall B, C)(B \,\varepsilon\, A \wedge C \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, C)$	1, $Ax(3)$
5	$A \,\varepsilon\, A$	2, 3, 4, Ax

Remarque J'applique tacitement la règle d'introduction de $\forall$. Ce théorème donne, par exemple: « Si Socrate est mortel, Socrate est Socrate ».

Il est possible de poser une première définition[4]

3. Cité par Lejewski 1957-58, p. 63.

4. Je m'écarte, ici aussi, des procédés de Leśniewski pour adopter l'usage courant.

$Df\,\vee \qquad A\,\varepsilon\,\vee \cdot = \mathrm{df} \cdot A\,\varepsilon\,A$

Nous lirons l'expression $A\,\varepsilon\,\vee : A$ est un objet. La justification sera donnée plus loin. Pour le moment, on peut remarquer que $\vee$ est un analogue de la classe totale ensembliste. Mais un analogue seulement: rien ne permet d'affirmer ici que $\vee$ soit une classe. Nous verrons d'ailleurs que, pour Leśniewski, il n'existe pas de classe vide. En revanche, l'idée de «rien» a un sens:

$Df\,\Lambda \qquad A\,\varepsilon\,\Lambda \cdot = \mathrm{df} : A\,\varepsilon\,A \cdot \wedge \cdot \sim(A\,\varepsilon\,A)$

soit: A n'est rien ssi A est A et A n'est pas A. L'intérêt de cette définition est de montrer que «rien» n'est pas un objet.

T2 $\quad \vdash \sim(\Lambda\,\varepsilon\,\Lambda)$

1	$\sim(P \wedge \sim P)$	loi logique
2	$\sim(\Lambda\,\varepsilon\,\Lambda \cdot \wedge \sim(\Lambda\,\varepsilon\,\Lambda))$	1, $P/\Lambda\,\varepsilon\,\Lambda$[5]
3	$\sim(\Lambda\,\varepsilon\,\Lambda)$	2, $df\,\Lambda$

Intuitivement, si «Poquelin est Molière» alors «Molière est Poquelin». On aura aussi que si $A\,\varepsilon\,B$, $B\,\varepsilon\,A$, mais à la condition supplémentaire que B soit un objet.

T3 $\quad \vdash (\forall A, B, x) : A\,\varepsilon\,B \wedge B\,\varepsilon\,x \cdot \supset \cdot B\,\varepsilon\,A$

1	$A\,\varepsilon\,B \wedge B\,\varepsilon\,x$	*hyp*
2	$B\,\varepsilon\,x$	1, $\wedge e$
3	$(\forall C, D)(C\,\varepsilon\,B \wedge D\,\varepsilon\,B \cdot \supset \cdot C\,\varepsilon\,D)$	2, $Ax(3)$
4	$B\,\varepsilon\,B \wedge A\,\varepsilon\,B \cdot \supset \cdot B\,\varepsilon\,A$	3, $\forall e$, C/B, D/A
5	$B\,\varepsilon\,B$	2, *T*1
6	$A\,\varepsilon\,B$	1, $\wedge e$
7	$B\,\varepsilon\,B \wedge A\,\varepsilon\,B$	5, 6, $\wedge i$
8	$B\,\varepsilon\,A$	7, 4, $\supset e$

Ceci permet d'introduire une relation d'identité entre objets:

$Df = \qquad A = B \cdot = \mathrm{df} \cdot A\,\varepsilon\,B \wedge B\,\varepsilon\,A$

Je postulerai que la relation = satisfait à la règle:

= e	n	$A = B$	
	m	$f(A)$	

		$f[B]$	$n, m, = e$

5. J'écris X/Y pour indiquer que je substitue Y à X.

où $f[B]$ est la même expression que $f(A)$, à ceci près que quelques mentions de A ont été remplacées par une mention de B.

On est alors conduit à la loi caractéristique de l'ontologie:

T4 $\quad \vdash (\forall A, B, x) : A \,\varepsilon\, B \wedge B \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot A = B$

Deux noms individuels sont donc identiques si

(1) l'un est l'autre

(2) l'autre est (un) quelque chose.

Notons enfin que la relation ε est transitive:

T5 $\quad \vdash (\forall A, B, x) : A \,\varepsilon\, B \wedge B \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, x$

1	$A \,\varepsilon\, B \wedge B \,\varepsilon\, x$	*hyp*
2	$B \,\varepsilon\, x$	$1, \wedge e$
3	$(\forall C)(C \,\varepsilon\, B \supset C \,\varepsilon\, x)$	$2, Ax(2)$
4	$A \,\varepsilon\, B \supset A \,\varepsilon\, x$	$3, \forall e, C/A$
5	$A \,\varepsilon\, x$	$1, \wedge e; 4 \supset e$

Ainsi par exemple: si Homère est l'auteur de l'Odyssée et que ce dernier est aveugle, Homère est aveugle.

Lorsque la langue et la tradition aristotélicienne disent:

« Les losanges ont leurs côtés égaux »

elles présupposent l'existence des losanges. En d'autres termes, le quantificateur universel a un import existentiel. C'est l'attitude qu'adopte Leśniewski.

Nous poserons d'abord qu'un nom générique x existe, s'il existe au moins un individu qui est x:

Df ex $\quad ex(x) \cdot = \mathrm{df} \cdot (\exists A)(A \,\varepsilon\, x)$

Dès lors dire que *chaque* x est y, c'est poser:

(1) que x existe

(2) que tout ce qui est x est aussi y.

Df $\sqsubset$ $\quad x \sqsubset y \cdot = \mathrm{df} \cdot ex(x) \wedge (\forall A)(A \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, y)$

On prouve immédiatement:

T6 $\quad \vdash (\forall x) : ex(x) \cdot \supset \cdot x \sqsubset x$

T7 $\quad \vdash (\forall x, y, z) : x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \cdot \supset \cdot x \sqsubset z$

La relation $\sqsubset$ est donc réflexive sous condition et toujours transitive. Une universelle affirmative « chaque x est y » aura donc comme expression:

A $\quad x \,\varepsilon\, y.$

Pour ce qui concerne les particulières affirmatives, rien de spécial. Posons:

Df $\triangle$ $\quad x \triangle y \cdot = \mathrm{df} \cdot (\exists A)(A \,\varepsilon\, x \wedge A \,\varepsilon\, y)$

Donc « quelque x est y » s'écrit:

I $\quad x \bigtriangleup y$

Quant aux négatives, on les obtient régulièrement. « Aucun x n'est y » s'exprime par $\sim(\exists A)(A \,\varepsilon\, x \wedge A \,\varepsilon\, y)$ ce qui équivaut à $(\forall A)(A \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot \sim(A \,\varepsilon\, y))$.

Si l'on pose:

Df$\bigtriangledown$ $\quad x \bigtriangledown y \cdot = \mathrm{df} \cdot (\forall A)(A \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot \sim(A \,\varepsilon\, y))$.

on aura:

E $\quad x \bigtriangledown y$

Enfin, pour « quelque x n'est pas y », on a $(\exists A)(A \,\varepsilon\, x \wedge \sim(A \,\varepsilon\, y))$ que l'on notera par analogie:

Df$\sqsupset$ $\quad x \sqsupset y \cdot = \mathrm{df} \cdot (\exists A)(A \,\varepsilon\, x \wedge \sim(A \,\varepsilon\, y))$

d'où:

O $\quad x \sqsupset y$

Nous disposons ainsi de tout le matériel nécessaire à la reconstruction de la syllogistique aristotélicienne.

Remarque. Il est utile d'introduire aussi l'inclusion usuelle que je lirai « *tous* les x sont y ».

Df$\subset$ $\quad x \subset y \cdot = \mathrm{df} \cdot (\forall A)(A \,\varepsilon\, x \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, y)$

Comme les minuscules (noms génériques) peuvent être remplacées par des majuscules (noms individuels), on aura en particulier:

T8 $\quad \vdash (\forall A, B) : A \,\varepsilon\, B \cdot \supset \cdot A \subset B$

1	$A \,\varepsilon\, B$	*hyp*
2	C | $C \,\varepsilon\, A$	*hyp*
3	$A \,\varepsilon\, B$	1, *reit*
4	$C \,\varepsilon\, B$	2, 3, *T5*
5	$C \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot C \,\varepsilon\, B$	2-4, $\supset i$
6	$(\forall C)(C \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot C \,\varepsilon\, B)$	2-5, $\forall i$
7	$A \subset B$	6, *df* $\subset$

Réciproquement:

T9 $\quad \vdash (\forall A, B) : A \subset B \wedge A \,\varepsilon\, \mathrm{V} \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, B$

1	$A \subset B \wedge A \,\varepsilon\, \mathrm{V}$	*hyp*
2	$A \subset B$	1, $\wedge e$
3	$A \,\varepsilon\, \mathrm{V}$	
4	$(\forall C)(C \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot C \,\varepsilon\, B)$	2, *df* $\subset$

5	$A \varepsilon A \cdot \supset \cdot A \varepsilon B$	4, $\forall e$, C/A
6	$A \varepsilon A$	3, *df* V
7	$A \varepsilon B$	6, 5, $\supset e$

Comme dans la langue d'usage ε et $\subset$ sont très proches. Ils coïncident même s'il s'agit d'objets.

Il convient d'examiner les raisons qui nous ont permis d'interpréter $A \varepsilon \mathrm{V}$ par « A est un objet ». Notons d'abord que tout ce qui est V existe:

*T*10 $\vdash (\forall A): A \varepsilon \mathrm{V} \cdot \supset \cdot ex(A)$

1	$A \varepsilon \mathrm{V}$	*hyp*
2	$A \varepsilon A$	1, *df* V
3	$(\exists B)(B \varepsilon A)$	2, $\exists i$
4	$ex(A)$	3, *df ex*

L'existence toutefois ne garantit pas l'unicité, laquelle peut d'ailleurs se définir sans présupposer l'existence:

Df sol $sol(x) \cdot = \mathrm{df} \cdot (\forall A, B)(A \varepsilon x \wedge B \varepsilon x \cdot \supset \cdot A \varepsilon B)$

En d'autres termes:

$ex(A)$ signifie: il existe au moins un A.

$sol(A)$ signifie: il existe au plus un A.

L'idée d'objet correspond à l'existence d'un et d'un seul A:

Df ob $ob(A) \cdot = \mathrm{df} \cdot ex(A) \wedge sol(A)$

Dès lors, on a:

T11 $\vdash (\forall A): A \varepsilon \mathrm{V} \cdot \equiv \cdot ob(A)$

En effet, si dans l'axiome on substitue A à x, on trouve:

$$A \varepsilon A \cdot \equiv : (\exists B)(B \varepsilon A) \cdot \wedge \cdot (\forall B)(B \varepsilon A \supset B \varepsilon A) \cdot \wedge \cdot (\forall B, C)$$
$$(B \varepsilon A \wedge C \varepsilon A \cdot \supset \cdot B \varepsilon C)$$

Or, $(\exists B)(B \varepsilon A) \cdot = \mathrm{df} \cdot ex(A)$
$(\forall B)(B \varepsilon A \cdot \supset \cdot B \varepsilon A)$ est une loi logique et
$(\forall B, C)(B \varepsilon A \wedge C \varepsilon A \cdot \supset \cdot B \varepsilon C) \cdot = \mathrm{df} \cdot sol(x)$ aux changements d'écriture près.

Le théorème 11 justifie la lecture que nous avons faite de $A \varepsilon \mathrm{V}$.

Remarque. Les définitions précédentes permettent d'écrire l'axiome *Ax* sous la forme abrégée:

Ax $(\forall A, x): A \varepsilon x \cdot \equiv \cdot ob(A) \wedge (\forall B)(B \varepsilon A \cdot \supset \cdot B \varepsilon x)$

Ceci explique pourquoi x ne figure que dans une seule des clauses du membre de droite de l'axiome original.

Il est possible de poursuivre l'étude de l'ontologie dans deux directions.

(1) On peut expliciter d'autres conséquences de l'axiome. Ainsi a-t-on, en particulier, le théorème suivant qui sera utile par la suite:
T12 $\vdash (\forall A, B) : A \varepsilon B \wedge (\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C = D) : \supset \cdot A = B$
Pour démontrer *T12*, établissons deux lemmes:

Lemme 1 On sait, par définition, que si $C = D$ alors $C \varepsilon D$.
On obtient:
$\vdash (\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C = D) \supset (\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C \varepsilon D)$

Lemme 2 Si l'on substitue B à A et à x dans Ax et que l'on change le nom des variables liées, on a:
$\vdash B \varepsilon B \cdot \equiv \cdot (\exists C)(C \varepsilon B) \cdot \wedge \cdot (\forall C)(C \varepsilon B \cdot \supset \cdot C \varepsilon B) \cdot \wedge \cdot$
$(\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C \varepsilon D)$

Dès lors:

1	$A \varepsilon B$	*hyp*
2	$(\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C = D)$	
3	$A \varepsilon B \wedge B \varepsilon B \cdot \supset \cdot A = B$	2, $\forall e$, C/A, D/B
4	$(\exists C)(C \varepsilon B)$	1, $\exists i$
5	$(\forall C)(C \varepsilon B \cdot \supset \cdot C \varepsilon B)$	Loi logique
6	$(\forall C, D)(C \varepsilon B \wedge D \varepsilon B \cdot \supset \cdot C \varepsilon D)$	2, Lemme 1
7	$B \varepsilon B$	4, 5, 6, lemme 2
8	$A \varepsilon B \wedge B \varepsilon B$	1, 7, $\wedge i$
9	$A = B$	3, 8, $\supset e$

(2) On peut aussi introduire des opérations entre noms génériques, analogues à celles d'union et d'intersection entre classes ensemblistes.

Ainsi, par exemple, si l'on veut dire que « A est représentant de commerce (x) ou agent d'assurance (y) », on posera:
Df$\cup$ $A \varepsilon x \cup y \cdot = \mathrm{df} : \cdot A \varepsilon A \cdot \wedge : A \varepsilon x \vee A \varepsilon y$
La clause $A \varepsilon A$ garantit que A est un objet.

5.3 La méréologie

La méréologie peut être conçue comme la théorie générale des rapports qui existent entre des choses, tant abstraites que concrètes. Ses concepts de base ne se réduisent pas à ceux de la logique. Celle-ci ne sert que de moyen d'expression, comme elle peut servir de moyen d'expression à l'axiomatisation de la théorie des groupes, par exemple.[6] Les plus importants sont les suivants:

(1) Le concept de *classe collective* ou classe méréologique, qui se distingue de celui de classe ensembliste, dite classe distributive.

Une classe distributive est, à proprement parler, l'extension d'un concept. Si p est le concept « planète » dire que Jupiter est une planète c'est soit poser pJ soit $J \in \{x|px\}$ et l'information transmise est la même dans les deux écritures. Soit donc la classe distributive

$P =$ df {Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton}

Elle contient neuf éléments et rien d'autre.

Les calottes polaires de Mars, la tache rouge de Jupiter, les anneaux de Saturne n'appartiennent pas à P. Et cependant, tout cela et mille autres choses ont affaire avec le concept « planète ». La notion de classe collective doit pallier cette lacune.

Prenons un autre exemple. Soit la classe distributive $C =$ {une tête, deux bras, deux jambes, un tronc}. De toute évidence C n'est pas un corps. Par opposition, la classe collective engendrée par les éléments de C formera une réelle totalité. Elle sera un corps et comprendra les mains, les yeux, les cheveux, etc.

(2) Une classe collective sera un tout. Il conviendra donc d'introduire une relation de partie à tout. Leśniewski a distingué la relation *est partie de* (au sens strict, où la partie est nécessairement distincte du tout) de la relation *est élément de* (au sens large, où le tout est aussi élément de lui-même). Il a même introduit la relation *est ingrédient de* qui s'est révélée être équivalente à « est élément de ».[7]

Il faut bien noter que la relation de partie à tout ne coïncide nullement avec celle d'inclusion. Ainsi, il est exact de dire

« Les mots sont éléments des phrases »

J'utilise « est élément de », puisqu'il peut se trouver qu'un mot tienne lieu d'une phrase. Mais, il est manifestement faux de poser

$$\{x|x \text{ est un mot}\} \subset \{x|x \text{ est une phrase}\}$$

puisque ceci supposerait que tout mot est une phrase.

(3) Enfin, il sera utile de définir la situation où deux objets sont extérieurs l'un à l'autre de celle où ils ont quelque élément commun.

Leśniewski a donné deux axiomatisations de la méréologie.[8] J'adop-

6. Voir, par exemple, Kleene, 1971, p. 223 *sq*.
7. Kearns, 1967, p. 82.
8. Voir Lejewski, 1967.

terai toutefois une axiomatisation qui se donne la notion d'élément comme primitive et que j'emprunte à Clay, 1965.

Le symbole «el» est un foncteur qui s'applique à un nom individuel, de sorte que «$el(A)$» par exemple signifie «élément de A». Il s'ensuit que l'expression

$B \varepsilon el(A)$

se lira «B est élément de A». Il faut bien prendre garde que $B \varepsilon el(A)$ n'a, en principe rien à voir avec $\alpha \in \beta$ dans la théorie ensembliste.

Ayant choisi «est élément de» et non «est partie de», on peut poser un premier axiome qui postule que tout objet est élément de lui-même:

Ax1 $(\forall A): A \varepsilon A \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(A)$

Par *Df*V et *T*11, on aurait aussi pu poser

$(\forall A): ob(A) \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(A).$

Si deux objets sont éléments l'un de l'autre, ils sont identiques:

Ax2 $(\forall A, B): A \varepsilon el(B) \wedge B \varepsilon el(A) \cdot \supset \cdot A = B$

Il est intuitivement évident que «est élément de», au sens de «est ingrédient de» est une relation transitive:

Ax3 $(\forall A, B, C): A \varepsilon el(B) \wedge B \varepsilon el(C) \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(C)$

Enfin, nous poserons que si A est élément de B, B est un objet:

Ax4 $(\forall A, B): A \varepsilon el(B) \cdot \supset \cdot B \varepsilon B.$

La construction part d'une définition et introduit deux nouveaux axiomes.

L'idée est de définir un objet qui est la classe (collective) des x où x est, en général, un nom collectif. Si, par exemple, x est «livres-de-ma-bibliothèque», on veut que $Kl(x)$ représente «la classe des livres-de-ma-bibliothèque».

Remarque. J'utilise *Kl* pour les classe collectives. La définition sera celle de $A \varepsilon Kl(x)$ donc de la proposition «A est la classe des x». Elle comporte trois clauses:

(1) $A \varepsilon A$, donc une classe est un objet. Dans l'exemple ci-dessus A est le nom de cet objet que j'appelle «ma bibliothèque».

(2) $(\forall D)(D \varepsilon x \cdot \supset \cdot D \varepsilon el(A))$ c'est-à-dire que, tout ce qui est «livre-de-ma-bibliothèque» est élément de ma bibliothèque.

(3) $(\forall D)[B \varepsilon el(A) \cdot \supset \cdot (\exists E)(E \varepsilon x \cdot \wedge \cdot el(D) \triangle el(E)]$. Cette clause est la plus originale. Soit D un élément quelconque de ma bibliothèque, par exemple «le troisième rayon» comme on dit, étant entendu que l'on pense aux livres qui sont dessus. Il faut alors pouvoir trouver un E qui est «livre-de-ma-bibliothèque» et tel que quelque élément du troisième rayon est élément de E. Supposons que E soit le Littré, dont

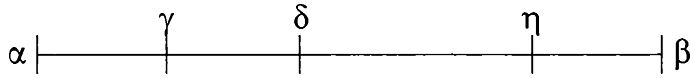
les tomes sont sur le troisième rayon. Alors le tome V est à la fois élément de D et de E.

L'expression $el(D) \triangle el(E)$ est une abréviation pour $(\exists F)(F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E))$, de sorte que l'on posera finalement:

$$\begin{aligned} &DfKl \quad A \varepsilon Kl(x) \cdot = \mathrm{df}: A \varepsilon A \cdot \wedge \cdot \\ &(\forall D)(D \varepsilon x \cdot \supset \cdot D \varepsilon el(A)) \cdot \wedge \cdot \\ &(\forall D)[D \varepsilon el(A) \cdot \supset \cdot (\exists E, F)(E \varepsilon x \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(D) \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(E))] \end{aligned}$$

Les choses ne sont peut-être pas encore très claires. Voici donc un exemple et deux contre-exemples de Leśniewski lui-même.[9]

Proposons-nous de former la classe A des segments-de-$\alpha\beta$:



On aura donc $A \varepsilon Kl(x) = \mathrm{df}\, A \varepsilon Kl$ (segments-de-$\alpha\beta$). Dès lors:

1) A est un objet. C'est le «trait» $\alpha\beta$.
2) Tout segment-de-$\alpha\beta$, comme $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, ..., $\gamma\delta$, $\gamma\eta$, ..., $\eta\beta$ est élément de A, élément ou ingrédient du «trait» $\alpha\beta$.
3) Prenons un élément D quelconque de A, par exemple $\gamma\eta$, on peut trouver un segment-de-$\alpha\beta$, par exemple $E = \mathrm{df}\ \delta\beta$ et un F, disons $\delta\eta$, tel que $\delta\eta$ est élément de $D(\gamma\eta)$ et de $E(\delta\beta)$.

1^er^ contre-exemple

Le «trait $\alpha\beta$» n'est pas Kl (segments-de-$\alpha\delta$). Les conditions (1) et (2) sont évidemment satisfaites: $\alpha\beta$ est un objet et tout ce qui est segment-de-$\alpha\delta$ est élément de $\alpha\beta$.

En revanche, (3) n'est pas satisfaite. En effet, si nous prenons pour D l'élément $\eta\beta$ qui est bien un ingrédient de $\alpha\beta$, on ne trouve aucun segment-de-$\alpha\delta$ qui ait quelque élément commun avec un élément de $\eta\beta$.

2^e^ contre-exemple

Le «trait» $\alpha\gamma$ n'est pas Kl (segments-de-$\alpha\beta$). La condition (1) est évidemment satisfaite. La condition (3) aussi: on n'a que $\alpha\gamma$ qui est élément de $\alpha\gamma$ et il suffit de prendre encore $\alpha\gamma$ pour E et F. En revanche, la condition (2) n'est pas satisfaite: tout ce qui est segment-de-$\alpha\beta$, par exemple $\delta\eta$, n'est pas élément de $\alpha\gamma$.

La notion de classe collective va s'éclairer par ses propriétés. Je désignerai les théorèmes par Mn pour les distinguer de ceux de l'onto-

9. Rapporté par Luschei, 1962, p. 68.

logie. On a d'abord que si A est la classe d'un objet, cet objet est élément de A:

M1 $\vdash (\forall A, B): A \varepsilon Kl(B) \wedge B \varepsilon B \cdot \supset \cdot B \varepsilon el(A)$

1	$A \varepsilon Kl(B) \wedge B \varepsilon B$	*hyp*
2	$A \varepsilon Kl(B)$	1, $\wedge e$
3	$B \varepsilon B$	1, $\wedge e$
4	$(\forall D)(D \varepsilon B \cdot \supset \cdot D \varepsilon el(A))$	2, *df* $Kl(2)$*
5	$B \varepsilon B \cdot \supset \cdot B \varepsilon el(A)$	4, $\forall e$, D/B
6	$B \varepsilon el(A)$	3, 5, $\supset e$

D'autre part, on a:

M2 $\vdash (\forall A): A \varepsilon Kl(A) \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(A)$

1	$A \varepsilon Kl(A)$	*hyp*
2	$A \varepsilon A$	1, $Df\, Kl(1)$
3	$A \varepsilon el(A)$	2, $Ax \cdot 1$

Si l'on reprend l'exemple de la classe engendrée par les parties du corps, on comprend que la notion de classe collective vide n'ait aucun sens. D'une certaine façon, une classe distributive est comme une boîte: elle peut être vide. Mais une classe collective n'existe que par ses éléments. On a, en effet:

M3 $\vdash (\forall A, x): A \varepsilon Kl(x) \cdot \supset \cdot (\exists B)(B \varepsilon x)$

1	$A \varepsilon Kl(x)$		*hyp*
2	$A \varepsilon A$		1, $Df\, Kl(1)$
3	$A \varepsilon el(A)$		2, $Ax1$
4	$(\forall D)[D \varepsilon el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge \ldots)]$		1, $Df\, Kl(3)$
5	$A \varepsilon el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge \ldots)$		4, $\forall e$, D/A
6	$(\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge \ldots)$		3, 5, $\supset e$
7	E, F	$E \varepsilon x \wedge \ldots$	*hyp*
8		$E \varepsilon x$	7, $\wedge e$
9		$(\exists B)(B \varepsilon x)$	8, $\exists i$
10	$(\exists B)(B \varepsilon x)$		6, 7-9, $\exists e$

La notion de classe collective n'est pas entièrement déterminée par sa définition. En particulier l'unicité doit être garantie par un axiome:

Ax5 $(\forall A, B, x): A \varepsilon Kl(x) \wedge B \varepsilon Kl(x) \cdot \supset \cdot A = B$

* Signifie: 2[e] clause de la définition de *Kl*.

Ainsi si Pferd ε Kl (chevaux) et Horse ε Kl (chevaux) alors Pferd = Horse.

Il s'agit enfin de s'assurer de l'existence de certaines classes. C'est là un problème délicat, puisque l'on sait que, d'un point de vue ensembliste, postuler qu'à toute fonction propositionnelle correspond un ensemble conduit à l'antinomie de Russell. Leśniewski pose néanmoins l'axiome suivant:

$Ax6 \quad (\forall A, x): A \varepsilon x \cdot \supset (\exists B)(B \varepsilon Kl(x))$

Ainsi, puisque Roland est un héros, la classe des héros existe. Il suffit même qu'il existe un héros quelconque pour assurer la classe des héros et, réciproquement, dès que la classe existe, quelqu'un est un héros. C'est ce que montre le théorème:

$M4 \quad \vdash (\forall x) \cdot (\exists A)(A \varepsilon x) \equiv (\exists B)(B \varepsilon Kl(x))$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{(\exists A)(A \varepsilon x)} & hyp \\
2 & A & A \varepsilon x & hyp \\
3 & & A \varepsilon x \cdot \supset (\exists B)(B \varepsilon Kl(x)) & Ax6, \forall e \\
4 & & (\exists B)(B \varepsilon Kl(x)) & 2, 3, \supset e \\
5 & \multicolumn{2}{l}{(\exists B)(B \varepsilon Kl(x))} & 1, 2\text{-}4, \exists e
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{(\exists B)(B \varepsilon Kl(x))} & hyp \\
2 & B & B \varepsilon Kl(x) & hyp \\
3 & & B \varepsilon Kl(x) \cdot \supset (\exists A)(A \varepsilon x) & M3, \forall e, A/B, B/A \\
4 & & (\exists A)(A \varepsilon x) & 2, 3, \supset e \\
5 & \multicolumn{2}{l}{(\exists A)(A \varepsilon x)} & 1, 2\text{-}4, \exists e
\end{array}
$$

$A \varepsilon Kl(x)$ devrait se lire « A est classe des x » et il s'agit de justifier la lecture de « A est *la* classe des x ». Pour cela démontrons d'abord le théorème suivant:

$M5 \quad \vdash (\forall A, x): A \varepsilon x \cdot \supset \cdot Kl(x) \varepsilon Kl(x)$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
1 & \multicolumn{2}{l}{A \varepsilon x} & hyp \\
2 & \multicolumn{2}{l}{(\exists B)(B \varepsilon Kl(x))} & 1, Ax6 \\
3 & B & B \varepsilon Kl(x) & hyp \\
4 & & (\forall A, Bx): A \varepsilon Kl(x) \wedge B \varepsilon Kl(x) \cdot \supset \cdot A = B & Ax5
\end{array}
$$

5 | | $B \varepsilon Kl(x) \wedge (\forall A, B, x)(A \varepsilon Kl(x) \wedge B \varepsilon Kl(x) \cdot \supset \cdot A = B)$:
$\supset \cdot B = Kl(x)$
$T12, \forall e, A/B, B/Kl(x), C/A, D/B$[10]
6 | | $B = Kl(x)$ — $3, 4, \wedge i, 5, \supset e$
7 | | $Kl(x) \varepsilon Kl(x)$ — $3, 6, =e$
8 | $Kl(x) \varepsilon Kl(x)$ — $2, 3\text{-}7, \exists e$

On a alors:

M6 $\vdash (\forall A, x) : A \varepsilon Kl(x) \cdot \supset \cdot A = Kl(x)$

1 | $A \varepsilon Kl(x)$ — *hyp*
2 | $(\exists B)(B \varepsilon Kl(x))$ — $1, \exists i$
3 | $(\exists A)(A \varepsilon x)$ — $2, M4$
4 | A | $A \varepsilon x$ — *hyp*
5 | | $Kl(x) \varepsilon Kl(x)$ — $4, M5$
6 | $Kl(x) \varepsilon Kl(x)$ — $3, 4\text{-}5, \exists e$
7 | $A = Kl(x)$ — $1, 6, T4, B/Kl(x), x/Kl(x)$[11]

Dans les classes distributives, il faut distinguer un objet A et la classe qui ne contient que cet objet: $\{A\}$. Cette distinction n'existe pas pour les classes collectives, comme le montre le théorème:
M7 $\vdash (\forall A) : A \varepsilon A \cdot \equiv \cdot A = Kl(A)$
La démonstration de droite à gauche est immédiate:

1 | $A = Kl(A)$ — *hyp*
2 | $A \varepsilon Kl(A)$ — $1, df =$
3 | $A \varepsilon A$ — $2, df\, Kl(1)$

Pour démontrer la relation de gauche à droite, il suffira de prouver que $A \varepsilon Kl(A)$: on applique ensuite *M6*. Quant à la preuve que $A \varepsilon Kl(A)$, elle exige, selon la *Df Kl*, trois propositions:

(1) $A \varepsilon A$ ce qui est l'hypothèse
(2) $(\forall D)(D \varepsilon A \cdot \supset \cdot D \varepsilon el(A))$

1 | $D \varepsilon A$ — *hyp*
2 | $A \varepsilon A$ — prémisse

10. J'admets que $Kl(x)$ est une valeur de l'univers couvert par $\forall$.
11. En admettant que $Kl(x)$ est une valeur de l'univers que recouvre $\forall$.

3	$D = A$	1, 2, $T4$
4	$A \varepsilon el(A)$	2, $Ax1$
5	$D \varepsilon el(A)$	4, 3, $=e$

(3) $(\forall D)[D \varepsilon el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \varepsilon A \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(D) \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(E))]$

1	$D \varepsilon el(A)$	*hyp*
2	$D \varepsilon D$	1, $T1$[12]
3	$D \varepsilon el(D)$	2, $Ax1$
4	$A \varepsilon A$	prémisse
5	$A \varepsilon A \cdot \wedge \cdot D \varepsilon el(D) \cdot \wedge \cdot D \varepsilon el(A)$	4, 3, 1, $\wedge i$
6	$(\exists F)(A \varepsilon A \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(D) \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(A)$	5, $\exists i$
7	$(\exists E, F)(E \varepsilon A \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(D) \cdot \wedge \cdot F \varepsilon el(E))$	6, $\exists i$

D'une façon générale, il n'y a pas de classe de classes collectives:

$M8$ $\quad \vdash (\forall A, x): A \varepsilon Kl(x) \cdot \equiv \cdot A \varepsilon Kl(Kl(x))$

Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme: $\quad \vdash (\forall A, B): A \varepsilon Kl(B) \wedge B \varepsilon B \cdot \supset \cdot A = B$

1	$A \varepsilon Kl(B) \wedge B \varepsilon B$	*hyp*
2	$B \varepsilon B$	1, $\wedge e$
3	$B \varepsilon Kl(B)$	2, $M7$
4	$A \varepsilon Kl(B)$	1, $\wedge e$
5	$A = B$	4, 3, $Ax5$

On aura alors de gauche à droite:

1		$A \varepsilon Kl(x)$	*hyp*
2		$(\exists B)(B \varepsilon Kl(Kl(x)))$	1, $Ax6$, $x/Kl(x)$
3	B	$B \varepsilon Kl(Kl(x))$	*hyp*
4		$A \varepsilon Kl(x)$	1, *reit*
5		$A = Kl(x)$	4, $M6$
6		$B \varepsilon Kl(A)$	3, 5, $=e$
7		$A \varepsilon A$	4, $df\, Kl(1)$
8		$B = A$	6, 7 Lemme, B/A, A/B
9		$A \varepsilon Kl(Kl(x))$	3, 8, $=e$
10		$A \varepsilon Kl(Kl(x))$	2, 3-9, $\exists e$

12. En admettant que $Kl(x)$ est une valeur de l'univers que recouvre $\forall$.

Enfin de droite à gauche:

1	$A \varepsilon Kl(Kl(x))$	*hyp*	
2	$(\forall D)[(D \varepsilon el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \varepsilon Kl(x) \wedge \ldots)]$		1, *df Kl*(3)
3	$A \varepsilon el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \varepsilon Kl(x) \wedge \ldots)$		2, $\forall e$, D/A
4	$A \varepsilon A$	1, *df Kl*(1)	
5	$A \varepsilon el(A)$	4, *Ax*1	
6	$(\exists E, F)(E \varepsilon Kl(x) \wedge \ldots)$	3, 5, $\supset e$	
7	$E, F \mid E \varepsilon Kl(x) \wedge \ldots$	*hyp*	
8	$\quad E \varepsilon Kl(x)$	7, $\wedge e$	
9	$\quad E = Kl(x)$	8, *M*6	
10	$\quad A \varepsilon Kl(Kl(x))$	1, *reit*	
11	$\quad A \varepsilon Kl(E)$	10, 9, $= e$	
12	$\quad E \varepsilon E$	8, *df Kl*(1)	
13	$\quad A = E$	11, 12, Lemme, B/E	
14	$\quad A \varepsilon Kl(x)$	8, 13, $= e$	
15	$A \varepsilon Kl(x)$	6, 7-14, $\exists e$	

Il reste à étudier de façon un peu plus détaillée la relation entre classe et élément. Et tout d'abord, ce fait essentiel que, tout ce qui est «livre-de-ma-bibliothèque» est élément de «ma bibliothèque», pour reprendre un exemple antérieur.

*M*9 $\vdash (\forall A, x) : A \varepsilon x \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(Kl(x))$

1	$A \varepsilon x$	*hyp*
2	$(\exists B)(B \varepsilon Kl(x))$	1, *Ax*6
3	$B \mid B \varepsilon Kl(x)$	*hyp*
4	$\quad B = Kl(x)$	3, *M*6
5	$\quad (\forall D)(D \varepsilon x \cdot \supset \cdot D \varepsilon el(B))$	3, *df Kl*(2)
6	$\quad A \varepsilon x \cdot \supset \cdot A \varepsilon el(B)$	5, $\forall e$, D/A
7	$\quad A \varepsilon x$	1, *reit*
8	$\quad A \varepsilon el(B)$	6, 7, $\supset e$
9	$\quad A \varepsilon el(Kl(x))$	8, 4, $= e$
10	$A \varepsilon el(Kl(x))$	2, 3-9, $\exists e$

D'autre part tout objet, «ma bibliothèque» par exemple, est la classe de ses éléments.

$M10 \quad \vdash (\forall A): A \,\varepsilon\, A \cdot \supset \cdot A \,\varepsilon\, Kl(el(A))$

1	$A \,\varepsilon\, A$	*hyp*
2	$(\forall D)(D \,\varepsilon\, el(A) \cdot \supset \cdot D \,\varepsilon\, el(A))$	loi logique
3	D $\quad D \,\varepsilon\, el(A)$	*hyp*
4	$D \,\varepsilon\, D$	3, $T1$[13]
5	$D \,\varepsilon\, el(D)$	4, $Ax1$
6	$D \,\varepsilon\, el(A) \wedge D \,\varepsilon\, el(D) \wedge D \,\varepsilon\, el(D)$	3, 5, 5, $\wedge i$
7	$(\exists F)(D \,\varepsilon\, el(A) \wedge F \,\varepsilon\, el(D) \wedge F \,\varepsilon\, el(D))$	6, $\exists i$
8	$(\exists E, F)(E \,\varepsilon\, el(A) \wedge F \,\varepsilon\, el(D) \wedge F \,\varepsilon\, el(E))$	7, $\exists i$
9	$D \,\varepsilon\, el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(\ldots)$	3-8, $\supset i$
10	$(\forall D)[D \,\varepsilon\, el(A) \cdot \supset (\exists E, F)(E \,\varepsilon\, el(A) \wedge F \,\varepsilon\, el(D) \wedge F \,\varepsilon\, el(E))]$	3-9, $\forall i$
11	$A \,\varepsilon\, Kl(el(A))$	1, 2, 10, *Df Kl*

Appelons «humanité» la classe collective des hommes dont nous supposerons qu'ils existent. Il est alors équivalent de dire que Sartre est élément de l'humanité ou que Sartre est un homme. C'est-à-dire qu'on a:

$M11 \quad \vdash (\forall A, B): A \,\varepsilon\, el(B) \cdot \equiv (\exists x)(B \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, x)$

1	$A \,\varepsilon\, el(B)$	*hyp*
2	$B \,\varepsilon\, B$	1, $Ax4$
3	$B \,\varepsilon\, Kl(el(B))$	2, $M10$
4	$B \,\varepsilon\, Kl(el(B)) \wedge A \,\varepsilon\, el(B)$	3, 1, $\wedge i$
5	$(\exists x)(B \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, x)$	4, $\exists i$

1	$(\exists x)(B \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, x)$	*hyp*
2	x $\quad B \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, x$	*hyp*
3	$B \,\varepsilon\, Kl(x)$	2, $\wedge e$
4	$B = Kl(x)$	3, $M6$
5	$A \,\varepsilon\, x$	2, $\wedge e$
6	$A \,\varepsilon\, el(Kl(x))$	5, $M9$
7	$A \,\varepsilon\, el(B)$	6, 4, $= e$
8	$A \,\varepsilon\, el(B)$	1, 2-7, $\exists e$

13. En admettant que $el(A)$ est une valeur de l'univers couvert par $\forall$.

5.4 Aperçu sur l'antinomie de Russell

Sobocinski 1949–1950 fait une analyse approfondie de la question des antinomies. Je n'en retiendrai ici que ce qui est de nature à éclairer davantage la différence entre la perspective ensembliste et celle de Leśniewski.

Plaçons-nous d'abord au niveau le plus naïf et considérons les propositions suivantes:

(1) $(\forall A, B, x, y): A \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, Kl(y) \wedge B \,\varepsilon\, y \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, x$

(2) $(\forall A, B, x): A \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge B \,\varepsilon\, el(A) \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, x$

(3) $(\forall A, B, x, y): A \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, Kl(y) \wedge B \,\varepsilon\, y \wedge \sim(B \,\varepsilon\, Kl(y)) \cdot \supset \cdot B \,\varepsilon\, x$

(4) $(\forall A, B, x): A \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge B \,\varepsilon\, Kl(x) \cdot \supset \cdot A = B$

Elles paraissent toutes quatre parfaitement acceptables. Ainsi

(1) x = df nombres pairs
y = df nombres divisibles par 2
Si A est la classe des nombres pairs et la classe des nombres divisibles par 2 et si B est divisible par 2, B est pair.

(2) Si A est la classe des nombres pairs et que B est élément de A, B est pair.

(3) ne fait que rajouter une restriction: B ne doit pas être la classe des nombres divisibles par 2.[14]

(4) Si Horse est la classe des chevaux et si Pferd est cette même classe, Horse = Pferd.

Voyons toutefois de plus près l'*interprétation collective.*

(1) Supposons que x = df phrases de la « Logique sans peine » et y = df mots de la « Logique sans peine ». La classe collective engendrée par x et celle engendrée par y sont les mêmes. On peut donc bien poser $A \,\varepsilon\, Kl(x) \wedge A \,\varepsilon\, Kl(y)$. Et on voit que si B est un mot de la « Logique sans peine », il est faux d'affirmer que c'en est toujours une phrase.

(3) Le même raisonnement vaut: la proposition n'est pas acceptable.

(2) doit être rejeté pour la même raison. A est la « Logique sans peine », donc B, la page 17 par exemple, peut en être élément sans en être une phrase.

(4) en revanche est acceptable: c'est $Ax5$.

Passons maintenant à l'*interprétation distributive.*

14. Restriction apportée par Frege dans le supplément au tome II (1903) de ses *Grundgesetze der Arithmetik* et qui visait à éliminer l'antinomie découverte par Russell.

Ecrire $A \varepsilon Kl(x)$ revient à dire que A appartient à l'extension de x, donc à dire que A est *un* x. On aura donc l'interprétation suivante:

$A \varepsilon Kl(x) \qquad A \in x$

Quant à $A \varepsilon el(B)$, le théorème $M11$ nous permet d'écrire $(\exists x)(B \varepsilon Kl(x) \wedge A \varepsilon x)$. De là l'interprétation:

$A \varepsilon el(B) \qquad (\exists x)(B \in x \wedge A \in x)$

Dès lors (1) devient:

(1)* $\quad (\forall A, B, x, y): A \in x \wedge A \in y \wedge B \in y \cdot \supset \cdot B \in x$

qui est manifestement fausse.

Socrate est un Grec et Socrate est un homme et Louis XVI est un homme n'entraînent pas Louis XVI est un Grec.

Quant à (2) on a:

(2)* $\quad (\forall A, B, x): A \in x \wedge (\exists y)(A \in y \wedge B \in y) \cdot \supset \cdot B \in x$

et le même contre-exemple ($y =$ df homme) montre que l'expression doit être rejetée.

L'expression (3) devient:

(3)* $\quad (\forall A, B, x, y): A \in x \wedge A \in y \wedge B \in y \wedge \sim(B \in y) \cdot \supset \cdot B \in x$

Cette expression est trivialement *vraie*, puisque l'antécédent de la conditionnelle est toujours faux.

Reste (4) qui donne:

(4)* $\quad (\forall A, B, x): A \in x \wedge B \in x \cdot \supset \cdot A = B$

et qui est manifestement inacceptable.

En résumé, on a la situation suivante:

	(1)	(2)	(3)	(4)
Interprétation collective	−	−	−	+
Interprétation distributive	−	−	+	−

(1) et (2) montrent que leur apparente acceptabilité repose sur la confusion spontanée des deux interprétations. Quant à (3) et (4), elles montrent que les deux interprétations sont incompatibles entre elles.

Leśniewski va plus loin et fait voir que l'antinomie de Russell repose, en fait, sur la violation des règles de « bonne écriture ».

Posons que A est un ensemble normal s'il n'est pas élément de lui-même et soit α l'ensemble des ensembles normaux. On a donc (dans l'écriture ensembliste):

R1 $\quad (\forall A): A \in \alpha \cdot \equiv \sim(A \in A)$

Par $\forall e$, A/α, il vient:

$R2 \qquad \alpha \in \alpha \cdot \equiv \sim(\alpha \in \alpha)$

qui est l'antinomie.

Or, on peut noter:

(1) Les deux $\in$ de $R1$ n'ont pas le même sens:

$A \in \alpha$ signifie $A \, \varepsilon \, el(\alpha)$

$\sim(A \in A)$ signifie A n'est pas A

(2) D'autre part, $R1$ peut être considéré comme la définition des ensembles normaux α. Or, rien ne nous autorise à penser que α est un objet. Ecrivons:

$A \, \varepsilon \, \alpha \cdot = \mathrm{df} \cdot A \, \varepsilon \, A \wedge \sim(A \, \varepsilon \, A)$

Dans ces conditions α est *rien* (*df* Λ) et l'on sait que *rien* n'est pas un objet ($T2$).

5.5 Les ensembles méréologiques et la notion de partie

Il est possible d'affaiblir la notion de classe collective en n'exigeant pas que tout ce qui est x en soit élément ($Df\,Kl(2)$). On obtiendra ce que Leśniewski appelle un ensemble méréologique (*set*), notion dont Rouault 1971 a fait usage dans sa formalisation des langues naturelles.

Posons:

$Df\,st \qquad A \, \varepsilon \, st(x) \cdot = \mathrm{df} : A \, \varepsilon \, A \cdot \wedge \cdot (\forall D)[D \, \varepsilon \, el(A) \supset (\exists E, F)$
$\qquad (E \, \varepsilon \, x \wedge E \, \varepsilon \, el(A) \wedge F \, \varepsilon \, el(D) \wedge F \, \varepsilon \, el(E))]$

On voit qu'il suffit qu'il existe un x qui soit élément de l'ensemble A, mais que les autres caractères des classes collectives sont conservés. Il s'ensuit que Kl et st sont intimement liés, comme le montrent les deux théorèmes suivants.

$M12 \qquad \vdash (\forall A, x) : A \, \varepsilon \, Kl(x) \cdot \supset \cdot A \, \varepsilon \, st(x)$

1	$A \, \varepsilon \, Kl(x)$	*hyp*
2	$A \, \varepsilon \, A$	1, $Df\,Kl(1)$
3	D | $D \, \varepsilon \, el(A)$	*hyp*
4	$(\exists E, F)(E \, \varepsilon \, x \wedge F \, \varepsilon \, el(D) \wedge F \, \varepsilon \, el(E))$	1, *reit*, *df* $Kl(3)$; 3, $\supset e$
5	E, F | $E \, \varepsilon \, x \wedge F \, \varepsilon \, el(D) \wedge F \, \varepsilon \, el(E)$	*hyp*
6	$(\forall D)(D \, \varepsilon \, x \supset D \, \varepsilon \, el(A))$	1, *reit*; *df* $Kl(2)$
7	$E \, \varepsilon \, x \supset E \, \varepsilon \, el(A)$	6, $\forall e$, D/E

8	$E \varepsilon x$	$5, \wedge e$
9	$E \varepsilon el(A)$	$7, 8, \supset e$
10	$E \varepsilon x \wedge E \varepsilon el(A) \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E)$	$5, 9, \wedge i$
11	$(\exists E, F)[\ldots]$	$10, \exists i$
12	$(\exists E, F)[\ldots]$	$4, 5\text{–}11, \exists e$
13	$D \varepsilon el(A) \supset (\exists E, F)[\ldots]$	$3\text{–}12, \supset i$
14	$(\forall D)[D \varepsilon el(A) \supset (\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge E \varepsilon el(A) \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E))]$	$3\text{–}13, \forall i$
15	$A \varepsilon st(x)$	2, 14, *df st*

Mais on peut aller plus loin. Rappelons d'abord (*Df* $\subset$) que l'on peut écrire:

$x \subset el(A) \cdot = \mathrm{df} \cdot (\forall D)(D \varepsilon x \supset D \varepsilon el(A))$

On aura:

M13 $\vdash (\forall A, x): A \varepsilon st(x) \wedge x \subset el(A) \cdot \equiv \cdot A \varepsilon Kl(x)$

On a, de droite à gauche:

1	$A \varepsilon Kl(x)$	*hyp*
2	$A \varepsilon st(x)$	1, *M*12
3	$(\forall D)(D \varepsilon x \supset D \varepsilon el(A))$	1, *df Kl*(2)
4	$x \subset el(A)$	3, *df* $\subset$

et de gauche à droite:

1	$A \varepsilon st(x)$	*hyp*
2	$(\forall D)(D \varepsilon x \supset D \varepsilon el(A))$	*hyp* et *df* $\subset$
3	$A \varepsilon A$	1, *df st*(1)
4	D $D \varepsilon el(A)$	*hyp*
5	$(\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge E \varepsilon el(A) \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E))$	1, *reit*, *df st*(2)
6	E, F $E \varepsilon x \wedge E \varepsilon el(A) \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E)$	*hyp*
7	$E \varepsilon x \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E)$	$6, \wedge e$
8	$(\exists E, F)[\ldots]$	$7, \exists i$
9	$(\exists E, F)[\ldots]$	$5, 6\text{–}8, \exists e$
10	$D \varepsilon el(A) \supset (\exists E, F)[\ldots]$	$4\text{–}9, \supset i$
11	$(\forall D)[D \varepsilon el(A) \supset (\exists E, F)(E \varepsilon x \wedge F \varepsilon el(D) \wedge F \varepsilon el(E))]$	$4\text{–}10, \supset i$
12	$A \varepsilon Kl(x)$	3, 2, 11, *df Kl*

Une partie est un élément propre. On pose donc:

Df pt $A \mathrel{\varepsilon} pt(B) \cdot = \mathrm{df} \cdot A \mathrel{\varepsilon} el(B) \wedge \sim(A = B)$

Rien n'est évidemment partie de soi-même

M14 $\vdash (\forall A) \sim (A \mathrel{\varepsilon} pt(A))$

1	$A \mathrel{\varepsilon} pt(A)$	*hyp* (rais. par l'absurde)
2	$\sim(A = A)$	1, *df pt*(2)
3	$\sim(A \mathrel{\varepsilon} A)$	2, *df* =
4	$A \mathrel{\varepsilon} el(A)$	1, *df pt* (1)
5	$A \mathrel{\varepsilon} A$	4, *Ax*4
6	$\sim(A \mathrel{\varepsilon} pt(A))$	1, 3, 5, $\sim i$

De même, si *A* est partie de *B*, *B* ne saurait être partie de *A*:

M15 $\vdash (\forall A, B) : A \mathrel{\varepsilon} pt(B) \cdot \supset \sim(B \mathrel{\varepsilon} pt(A))$

1	$A \mathrel{\varepsilon} pt(B)$	*hyp*
2	$B \mathrel{\varepsilon} pt(A)$	*hyp* (rais. par l'absurde)
3	$A \mathrel{\varepsilon} pt(B)$	1, *reit*
4	$B \mathrel{\varepsilon} el(A)$	2, *df pt*(1)
5	$A \mathrel{\varepsilon} el(B)$	3, *df pt*(1)
6	$A = B$	4, 5, *Ax*2
7	$\sim(A = B)$	3, *df pt*(2)
8	$\sim(A \mathrel{\varepsilon} pt(B))$	1, 6, 7, $\sim i$

5.6 Note bibliographique

Clay, R. E., The relation of weakly discrete to set and equinumerosity in mereology. *Notre Dame Journal of formal logic*, 1965, *VI*, 4, 325-340.

Fitch, F. B., *Symbolic logic*. New York, The Ronald Press Co, 1952.

Grize, J. B., *Logique moderne I*. Paris, La Haye, Mouton, Gauthier-Villars, 1970.

Kearns, J. T., The contribution of Lesniewski. *Notre Dame Journal of formal logic*, 1967, *VIII*.1-2, 61-93.

Kleene, S. C., *Logique mathématique*. Trad. J. Largeault, Paris, A. Colin, 1971.

Lejewski, C., Zu Lesniewskis Ontologie. *Ratio*, 1957-58, *II*, 50-78.

Lejewski, C., A single axiom for the mereological notion of proper part. *Notre Dame Journal of formal logic*, 1967, *VIII*.4, 279-285.

*Luschei, E. C., *The logical systems of Lesniewski*. Amsterdam, North-Holland Publ. Cy., 1962.

Rouault, J. et Dupraz, M., *Lexis-Affirmation-Négation: Étude fondée sur les classes.* Centre d'étude pour la traduction automatique Grenoble, 1968. Document G.2400-A.

Rouault, J., *Approche formelle de problèmes liés à la sémantique des langues naturelles.* Thèse, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1971.

Sobocinski, B., L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. *Methodos*, 1949, *1*, 94-107, 220-228, 308-316; 1950, *2*, 237-257.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE III

QUATRIÈME PARTIE: ÉLÉMENTS DE LOGIQUE COMBINATOIRE

CINQUIÈME PARTIE: ONTOLOGIE ET MÉRÉOLOGIE DE LEŚNIEWSKI