مبادئ التحليل الرياضي

Principles of Mathematical Analysis

تأليف

وولتر رودن

ترجمة

الأستاذ الدكتور / عبد السميع عبد الرزاق الجنابي

بغداد - الجامعة المستنصرية

العيـــن

٢٠٠٢

المحتويات

الموضوع	الصفحة
بطاقة فهرسة الكتاب	٢
المقدمة	١١
التمهيد	١٣

الفصل الأول
منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية

– مقدمة	١٧
المجموعات المرتبة	١٩
الحقول	٢٢
الحقل الحقيقي	٢٦
النظام الموسع للأعداد الحقيقية	٣٠
الحقل المركب	٣١
الفضاءآت الإقليدية	٣٥
ملحق	٣٧
تمارين	٤٤

الفصل الثاني
أساسيات الطبولوجيا

المجموعات المحدودة ، القابلة والغير قابله للعد	٤٩
الفضاءآت المترية	٥٧
المجوعات المتراصة	٦٤
المجوعات التامة	٧٠
المجوعات المترابطة	٧٢

الموضـــوع	الصفحة

تمارين ٧٤

الفصل الثالث
المتتاليات والمتسلسلات العددية

المتتاليات المتقاربة ٨١
اللواحق (المتتاليات الجزئية) ٨٥
متتاليات كوشي ٨٧
الغايات العليا والسفلى ٩١
بعض المتتاليات (المتتابعات) الخاصة ٩٣
المتسلسلات ٩٤
متسلسلات الحدود الغير سالبة ٩٧
العدد e ١٠٠
الاختبارين الجذري والنسبي ١٠٢
متسلسلات القوى ١٠٦
الجمع بالتجزئة (الأجزاء) ١٠٧
التقارب المطلق ١٠٩
جمع وضرب المتسلسلات ١١٠
إعادة الترتيب ١١٣
تمارين ١١٧

الفصل الرابع
الاستمرارية

غايات الدوال ١٢٥
الدوال المستمرة ١٢٧
الاستمرارية والتراص ١٣٢
الاستمرارية والترابط ١٣٧

الموضـــوع	الصفحة

عدم الاستمرارية (التفاصل) ١٣٨

الدوال الرتيبة ١٣٩

الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية ١٤٢

تمارين ١٤٤

الفصل الخامس
التفاضل

مشتقة الدوال الحقيقية ١٥٣

مبرهنات القيمة الوسطى ١٥٧

استمرارية المشتقات ١٥٨

قاعدة آل هوبتال ١٥٩

مشتقات الرتبة الأعلى ١٦١

مبرهنة تيلر ١٦١

تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة ١٦٢

تمارين ١٦٦

الفصل السادس
متكامل ريمان - ستيلجز

تعريف ووجود المتكامل .....

خواص المتكامل .....

التكامل و التفاضل .....

تكامل دوال القيم – المتجهة .....

المنحنيات الممكن تحديد طول أقواسها .....

تمارين .....

الموضـــوع	الصفحة

الفصل السابع
المتتاليات والمتسلسلات الدوال

مناقشة المسألة الرئيسية ٢٠٥
التقارب المنتظم ٢٠٩
التقارب المنتظم والاستمرارية ٢١١
التقارب المنتظم و التكامل ٢١٤
التقارب المنتظم و التفاضل ٢١٥
عوائل الدوال المتساوية الاستمرارية ٢١٨
مبرهنة ستون – ويرستراس ٢٢٣
تمارين ٢٣٢

الفصل الثامن
بعض الدوال الخاصة

متسلسلات القوى ٢٤٣
الدوال الآسية واللوغاريتمية ٢٤٩
الدوال المثلثية ٢٥٤
الكمال الجبري للحقل المركب ٢٥٧
متسلسلة فوريّه ٢٥٨
دالة كاما Γ ٢٦٥
تمارين ٢٧١

الفصل التاسع
دوال المتغيرات المتعددة

التحويلات الخطية ٢٨٣
التفاضل ٢٩٢
مبدأ الانكماش (التقليص) ٣٠٢

الموضـــوع	الصفحة

مبرهنة الدالة العكسية ٣٠٤

مبرهنة الدالة الضمنيّة ٣٠٧

مبرهنة الرتبة ٣١٢

المحددات ٣١٧

المشتقات ذات الرتبة الأعلى ٣٢١

تفاضل المتكاملات ٣٢٣

تمارين ٣٢٦

الفصل العاشر
تكامل الصيغ القابلة للتفاضل

التكامل ٣٣٧

التطبيقات الأولية ٣٤٠

تجزئة الوحدة ٣٤٣

تغيير المتغيرات ٣٤٤

الصيغ القابلة للتفاضل ٣٤٦

المفردات و السلاسل ٣٦٢

مبرهنة ستوك ٣٧٠

الصيغ المغلقة و الصيغ الدقيقة ٣٧٣

تحليل المتجه ٣٨٠

تمارين ٣٨٩

الفصل الحادي عشر
نظرية لبيك

دوال المجموعة ٤٠٥

تكوين مقياس لبيك ٤٠٧

فضاءآت القياس ٤١٦

الموضـــوع	الصفحة
الدوال القابلة للقياس	٤١٧
الدوال البسيطة	٤٢٠
التكامل	٤٢١
المقارنة مع متكامل ريمان	٤٣٠
تكامل الدوال المركبة	٤٣٢
دوال من الصنف L^2	٤٣٣
تمارين	٤٤٢

الدليـــل

سجل المراجع	٤٤٧
قائمه بالرموز الخاصة	٤٤٩
دليل إنكليزي – عربي	٤٥٢
دليل عربي – إنكليزي	٤٧٣

مُقَدِّمَة:

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وتعم الخيرات والبركات وتزول الكر بات وبنوره تتبدد الظلمات والصلاة والسلام على سيد السادات المبعوث رحمةً للعالمين وقائد الغر المحجلين.

وبعد..

فإن كتاب مبادئ التحليل الرياضي *(Principles of Mathematical Analysis)* الذي كتبه الأستاذ وولتر رودن **Walter RUDIN** يعتبر واحد من أهم الكتب في التحليل الرياضي لما يحويه من معلومات وأسلوب رصين ومستوى علمي رفيع وهو قاعدة أساسية لكل من يرغب في اختصاص الرياضيات وهو مترجم إلى اغلب لغات العالم ورغبتي في إغناء المكتبة العربية بواحد من أمهات الكتب في الرياضيات. كما يمكن اعتماده كتاباً منهجياً للصفوف المتقدمة في أقسام الرياضيات أي يمكن أن يدرس للسنة الدراسية الثالثة والرابعة بمعدل ثلاث ساعات في الأسبوع، أو اعتماده كتاب منهجي للسنة الدراسية الأولى لطلبة الماجستير في الرياضيات.

وجدت نفسي راغبا في ترجمة هذا الكتاب. أسأل الله العلي القدير أن يحقق النفع به ويجعل هذا العمل خالصا لوجهه ومرضاته إنه سميع مجيب الدعاء والحمد لله رب العالمين. وصلى الله على محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

عبد السميع عبد الرزاق الجنابي

تمهيد:

يهدف هذا الكتاب لأن يستخدم كمرجع في دروس ومحاضرات التحليل الرياضي التي يتلقاها طلاب البكالوريوس – المراحل المتقدمة – بصوره عامه، أو طلاب الصفوف الجامعية الأولي الذين يدرسون الرياضيات.

تعطي هذه الطبعة من الكتاب بشكل أساسي نفس المواضيع التي تضمنتها الطبعة الثانية منه، مع بعض الإضافات والقليل من المحذوفات البسيطة بالإضافة إلي إعادة ترتيب المواضيع بشكل كبير. إنني أمل أن تساهم هذه التغييرات بجعل المادة العلمية للكتاب اكثر وضوحا وجاذبيه للطلاب الذين يتلقون مثل هذه الدروس.

إن تجربتي وخبرتي في التدريس قد أقنعتني بان البدء ببناء الأعداد الحقيقية من خلال الأعداد النسبية أمر غير محبذ أحيانا على الرغم من صحته منطقيا. في بادئ الأمر قد لا يتمكن معظم الطلاب من تقدير الحاجة الداعية لهذا الإجراء. وفقا لذلك فقد تم تقديم نظام الأعداد الحقيقية على أساس انه حقل مرتب يمتلك خاصية الحد العلوي الأصغر، وقد تم تقديم بعض التطبيقات الممتعة والمهمة لهذه الخاصية في حينها. على الرغم من ذلك فان بناء الأعداد الحقيقية وفق طريقه ديدكند **Dedekind's Construction** لم يتم حذفها وإنما وضعت على شكل ملحق للفصل الأول، وبذلك فانه بالإمكان دراستها والتمتع بها كلما سنح الوقت بذلك.

أعيد كتابة موضوع الدوال ذات المتغيرات المتعددة بشكل كامل تقريبا مع إضافة العديد من التفاصيل الموضحة والأمثلة والحوافز. وقد تم تسهيل برهنة مبرهنة الدالة العكسية – الموضوع الرئيسي في الفصل التاسع – باستخدام نظريه النقطة الصامدة لتقليص الرسوم.فقد تمت مناقشة أشكال التفاضل بصوره اكثر إسهابا أضافه إلى إدخال تطبيقات متعددة لمبرهنة ستوك **Stokes 'theorem**.

وبالنسبة للمتغيرات الأخرى، فقد تم تقليص الفصل المتعلق بتكامل ريمان – ستيلجيز **Riemann Stieltjes**، وتم إضافة فقرة قصيرة إلى دالة كاما **gamma** في الفصل الثامن، وتم إضافة أعداد كبيره من التمارين الجديدة تحتوي معظمها على بعض التوضيحات والإرشادات المتعلقة بطريقة حلها.

وقد قمت أيضا بالإشارة إلى العديد من المقالات التي تظهر في بعض المجلات العلمية *مثل America Mathematical Monthly* وفي *Mathematics Magazine*، متوخيا بذلك

أن يتطور عند الطلاب عادة البحث والتقصي في المجالات العلمية، وقد زودني مشكورا بمعظم هذه المقالات السيد آر. بي. بيركل R. B. Burckel.

خلال السنوات الماضية قام العديد من المهتمين، طلابا وأساتذة، بإرسال بعض التصحيحات، والانتقادات وبعض الملاحظات الأخرى فيما يخص الطبعات السابقة من هذا الكتاب.

وفي الوقت الذي أقدر مثل هذه المراسلات، أنتهز هذه الفرصة لأعرب فيها عن جزيل شكري لكل من ساهم بذلك.

وولتر رودن
WALTER RUDIN

الفصل الأول

منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية

- المقدمة
- المجموعات المرتبة
- الحقول
- الحقل الحقيقي
- النظام الموسع للأعداد الحقيقية
- الحقل المركب
- الفضاءآت الإقليدية
- ملحق
- تمارين

الفصل الأول
منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية
The Real and Complex Number Systems

مقدمة

أن الطرح الموضوعي للمفاهيم الرئيسية للتحليل الرياضي (مثل التقارب، الاستمرارية، التفاضل، والتكامل) يجب أن يبنى على أساس مفهوم دقيق و محدد للأعداد. وسوف لا ندخل هنا بمناقشة البديهيات التي تحكم حساب الأعداد الصحيحة، ولكننا نفترض إلمام القارئ بموضوع الأعداد النسبية ***rational numbers*** (أي الأعداد التي على شكل $\frac{m}{n}$، حيث m و n أعداد صحيحة و n لا تساوي صفر).

أن نظام الأعداد النسبية كحقل ومجموعة مرتبة، لا يفي بصوره كاملة بالعديد من الأغراض. (سوف نحدد هذه المصطلحات بالبندين ١، ٦ و ١، ١٢). على سبيل المثال، لا يوجد هنالك عدد نسبي p يحقق المعادلة $p^2 = 2$. (سوف نبرهن هذا قريبا). أن هذه المسألة أدت إلى ظهور ما يسمى " الأعداد الغير النسبية" ***irrational number*** والتي غالبا ما تكتب على شكل مفكوكات عشرية لا نهائية يتم تقريبها إلى أعداد عشرية محدده. لذلك فإن المتتالية

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ldots$$

"تنتهي إلى $\sqrt{2}$" ولكن ما لم يتم تحديد العدد الغير نسبي $\sqrt{2}$ بصورة دقيقه، فإن السؤال الذي يطرح نفسه هو: إلى ماذا تنتهي هذه المتتالية بالضبط ؟

أن سؤالا كهذا يمكن الإجابة عليه بعد تقديم ما يسمى "نظام الأعداد الحقيقية ".

١، ١ مثال: نبين الآن أن المعادلة

$$p^2 = 2 \qquad (١)$$

لا يمكن أن تتحقق من قبل أي عدد نسبي p . لو كان يوجد هنالك مثل هذا العدد، لكان بإمكاننا أن نكتب $p = \frac{m}{n}$ حيث n و m عددين صحيحين ليسا زوجيين بنفس الوقت. لنفترض أن هذا قد حدث. عندها فإن المعادلة (١) تدل ضمنا على أن

$$m^2 = 2n^2 , \qquad (٢)$$

إن هذا يبين أن m^2 هو عدد زوجي. عندها فإن m هو عدد زوجي (إذا كان m فرديا، فإن m^2 سيكون فرديا أيضا)، وكذلك أن m^2 يقبل القسمة على ٤. أن هذا يؤدي إلى أن الجانب الأيمن من المعادلة (٢) يقبل القسمة على ٤ أيضا، ولهذا فإن n^2 هو عدد زوجي، الأمر الذي يؤدي إلى أن n هو عدد زوجي.

إن صحة المعادلة (١) تؤدي إلى الاستنتاج بأن كلاً من m و n عددان زوجيان، خلافا لاختيارنا لـ m و n. لذلك فإن المعادلة (١) مستحيلة للعدد النسبي p.

سنقوم الآن بتفحص هذا الموضوع بصوره اكثر دقه. لتكن A المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية الموجبة p بحيث $p^2 < 2$ ولتكن B المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية الموجبة p بحيث $p^2 > 2$. وسوف نبين أن A *لا تحتوي على اكبر عدد* ***contains no largest number*** وB *لا تحتوي على اصغر عدد* ***contains no smallest number***.

بشكل اكثر تحديدا، لكل p في A نستطيع أ يجاد عدد نسبي q في Aبحيث $p < q$، ولكل p في B نستطيع إيجاد عدد نسبي q فيB بحيث أن $q < p$.

لعمل هذا، نرفق لكل عدد نسبي $p > 0$ العدد

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p+2} = \frac{2p+2}{p+2}. \qquad (٣)$$

عندها

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2} \qquad (٤)$$

إذا كانت p تقع في A عندها فإن $p^2 - 2 < 0$، (٣) تبين أن $q > p$، و (٤) تبين أن $q^2 < 2$. لذلك فإن q تقع في A.

إذا كانت p تقع في B عندها $p^2 - 2 > 0$، (٣) تبين أن $0 < q < p$، و(٤) تبين أن $q^2 > 2$. لذلك فإن q تقع في B.

١، ٢ ملاحظة: أن الغرض من الطرح والنقاش أعلاه هو لبيان أن نظام الأعداد النسبية يحتوي على بعض الفجوات، على الرغم من أنه يوجد هنالك بين كل عددين نسبيين عدد آخر: إذا كان $r < s$ عندها فإن $r < (r+s)/2 < s$. أن نظام الأعداد الحقيقية يملأ هذه الفجوات. الأمر الذي يعتبر السبب الأساسي للدور الجوهري الذي تلعبه هذه الأعداد في التحليل الرياضي.

لأجل توضيح بنية الأعداد الحقيقية، إضافة إلى بنيه الأعداد العقدية، سوف نبتدأ مناقشة موحدة حول المفاهيم العامة *للمجموعة المرتبة ordered set* و*الحقل field*.

نقدم هنا بعض المصطلحات القياسية لنظرية المجموعات والتي ستستخدم على طول صفحات هذا الكتاب.

١، ٣ تعاريف: إذا كان A أي مجموعة (والذي قد تكون عناصره من الأعداد أو أي عناصر أخرى)، نكتب أن $x \in A$ لنبين أن x هي أحد أعضاء (أو عناصر) A.

إذا لم تكن x أحد أعضاءA، فإننا نكتب: $x \notin A$.

إن المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى *المجموعة الخالية empty set*. إذا كانت المجموعة تحتوي على عنصر واحد على الأقل، فإنها تسمى مجموعة *غير خالية nonempty*.

إذا كانت A وB مجموعتين، وكان كل عنصر من عناصر A عنصر في المجموعة B، فإننا نقول أن A هي مجموعة جزئية لـB، ونكتب $A \subset B$، أو $B \supset A$. بالإضافة إلى ذلك إذا كان هناك عنصر في B لا ينتمي إلى A فإننا نقول أن A هي مجموعة *جزئية فعلية proper set* لـ B. لاحظ أن $A \subset A$ لكل مجموعة A.

إذا كان $B \subset A$ و $A \subset B$، فإننا نكتب $B = A$. خلافا لذلك فإن $A \neq B$.

١، ٤ تعريف: على مدى الفصل الأول، فإن المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية سيرمز لها بالرمز $\mathbf{Q}$.

المجموعات المرتبة Sets Ordered

١، ٥ تعريف: لتكن S مجموعة. أن *الترتيب order* علىS هو علاقة، يرمز لها بـ $<$ ، والتي تمتلك الخاصيتين الآتيتين:

(i) إذا كان $x \in S$ و $y \in S$ عندها فإن عبارة واحدة فقط من العبارات التالية

$$x < y \ , \quad x = y \ , \quad y < x$$

تكون صحيحة.

(ii) إذا كان $x, y, z \in S$ بحيث أن $x < y$ و $y < z$، فإن $x < z$ العبارة "$x < y$" وتقرأ "x اقل من y "أو "x اصغر من y " أو "x يسبق y ".

وكتقليد غالبا ما يكتب $y > x$ مكان $x < y$.

التأشير $x \le y$ يبين أن $x < y$ أو $x = y$، بدون أن تتحقق الحالتين في أن واحد. وبعبارة أخرى، $x \le y$ هي نقيض لـــ $x > y$.

١، ٦ تعريف: *المجموعة المرتبة* (*order set*) S هي المجموعة التي يعرف عليها الترتيب.

كمثال على ذلك، $\mathbf{Q}$ هي مجموعة مرتبة إذا كان $r < s$ معرفة بمعنى أن $s - r$ هي عدد نسبي موجب.

١، ٧ تعريف: نفرض أن S مجموعة مرتبة، وإن $E \subset S$. إذا كان يوجد $\beta \in S$ بحيث $x \le \beta$ لكل $x \in E$، ونحن نقول أن E هي *مقيدة من الأعلى* (*bounded above*)، ويدعى β قيد *علوي* *upper bound* لـــ E.

القيد السفلي يعرف بنفس الطريقة (مع $\ge$ مكان $\le$).

١، ٨ تعريف: لنفترض أن S هي مجموعة مرتبة $E \subset S$، و E مقيدة من الأعلى. لنفترض أن هناك $\alpha \in S$ تمتلك الخصائص الآتية:

(i) α هي قيد علوي لـــ E.

(ii) إذا كان $\gamma < \alpha$ عندها فإن γ ليست قيداً علويا لـــ E.

عندها فإن α تسمى *القيد (المحدد) العلوي الأصغر* *least upper bound* لـــ E [هناك على الأكثر α واحدة كهذه كما هو واضح من (II)] أو *الأسمى* (*أصغر قيمة عظمى، أصغر نهاية عظمى*) *supremum* لـــ E، وتكتب بالشكل الآتي

$$\alpha = \sup E \ .$$

يتم تحديد *القيد السفلي الأعظم* *greatest bound lower*، أو *الأدنى* (*اعظم قيمة صغرى، اعظم نهاية صغرى*) *infimum* للمجموعة E المقيدة من الأسفل بنفس الطريقة: أن العبارة

$$\alpha = \inf E$$

تعني أن α هي *القيد* السفلي للمجموعة E وإنه لا توجد هناك β بحيث $\beta > \alpha$ تكون قيد سفلي للمجموعة E.

١، ٩ أمثلة

(أ) اعتبر المجموعتين A و B المذكورتين في المثال ١، ١مجموعتين جزئيتين للمجوعة المرتبة $\mathbf{Q}$. أن المجموعة A *مقيدة من الأعلى*. وفي الحقيقة، فإن القيود العليا للمجموعة A هي بالضبط عناصر المجموعة B. وبما أن المجموعة B لا تحتوي على العنصر الأصغر، فإن المجموعة A *لا تمتلك قيداً علويا اصغر في* $\mathbf{Q}$ *A has no least upper bound in*.

وبنفس الطريقة، فإن B مقيدة من الأسفل:أن مجموعة جميع القيود السفلى لـــ B تكون المجموعة A ولكل $r \in \mathbf{Q}$ بحيث $r \leq 0$. بما أن المجموعة A لا تمتلك العنصر الأكبر، فإن المجموعة B لا تمتلك قيداً سفليا اعظم في $\mathbf{Q}$ *B has no greatest lower bound in*.

(ب) إذا كان $\alpha = \sup E$ موجودة، عندها فإن α قد تكون أو لا تكون عضوا في E. على سبيل المثال، لتكن E_1 المجموعة التي تضم جميع $r \in \mathbf{Q}$ حيث $r < 0$. ولتكن E_2 المجموعة التي تضم جميع $r \in \mathbf{Q}$ بحيث $r \leq 0$. عندها فإن

$$0, = \sup E_2 = \sup E_1$$

و $0 \notin E_1$، $0 \in E_2$.

(ج) لتكن المجموعة E تتألف من جميع الأعداد $\frac{1}{n}$، بحيث $(n = 1,2,3,\ldots)$ عندها فإن $\sup E = 1$ والتي تقع في E، و $\inf E = 0$، والتي لا تقع في E.

١، ١٠ تعريف: يقال للمجموعة المرتبة S بأنها تمتلك *خصوصية القيد العلوي الأصغر* ***least - upper - bound property*** إذا صح ما يلي:

إذا كان $E \subset S$، المجموعة E ليست مجموعة خاليه، و المجموعة E مقيدة من الأعلى، عندها فيوجد هنالك $\sup E$ في S. يبين المثال ١، ٩ (أ) بأن $\mathbf{Q}$ لا تمتلك خصوصية القيد الأعلى الأصغر. سوف نبين الآن أنه توجد هنالك علاقة وثيقة بين القيود السفلى الأعظم والقيود العليا الأصغر، وإن كل مجموعة مرتبة تمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر تمتلك بنفس الوقت خصوصية القيد الأسفل الأعظم.

١، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن S هي مجموعة مرتبة تمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر، $B \subset S$، B ليست مجموعة خاليه، و B مقيدة من الأسفل. لتكن L المجموعة التي تضم جميع القيود السفلى لـــ B. عندها فإن*

$$\alpha = \sup L$$

توجد في S *و* $\alpha = \inf B$.

وعلى وجه الخصوص، $\inf B$ *موجودة في* S.

البرهان: بما أن B مقيدة من الأسفل، و L ليست مجموعة خاليه. وبما أن L تتألف بالضبط من $y \in S$ التي تحقق المتباينة $y \le x$ لجميع $x \in B$، فإننا نلاحظ أن *كل* $x \in B$ *هي قيد علوي لـ* L *is an upper bound of L*. لذلك فإن L هي مقيدة من الأعلى. أن افتراضاتنا حول S تدل ضمنا على أن L تمتلك قيمه عظمى **supremum** في S ؛ لنسميه α.

إذا كان $\gamma < \alpha$ عندها (لاحظ التعريف ١، ٨) فإن γ ليست قيداً علويا لـ L، لذلك فإن $\gamma \notin B$. أن هذا يؤدي إلى أن $\alpha \le x$ لكل $x \in B$. إذن $\alpha \in L$.

إذا كان $\alpha < \beta$، عندها فإن $\beta \notin L$، حيث أن α هي قيداً علويا لـ L.

بينا بأن $\alpha \in L$ ولكن $\beta \notin L$ إذا كان $\beta > \alpha$. بكلمة أخرى، α هي قيداً سفليا لـ B، ولكن β ليست كذلك إذا كان $\beta > \alpha$. أن هذا يعني أن $\alpha = \inf B$.

الحقول Fields

١، ١٢ تعريف الحقل *field* : هو المجموعة F بعمليتين، تسمى *الجمع addition* و*الضرب multiplication*، والتي تحقق ما يسمى "بديهيات الحقل *field axioms*" (A) ، (M) و (D) الآتية:

(A) بديهيات الجمع *addition for Axiom*

(A1) إذا كان $x \in F$ و $y \in F$، عندها فإن المجموع $x + y$ يقع في F.

(A2) الجمع الإبدالي **Addition is commutative**: $x + y = y + x$ لجميع $x, y \in F$.

(A3) الجمع التجميعي **Addition is associative**: $(x + y) + z = x + (y + z)$ لجميع $x, y, z \in F$.

(A4) تحتوي المجموعة F على العنصر 0 بحيث $0 + x = x$ لجميع $x \in F$.

(A5) لكل $x \in F$ هنالك عنصراً $-x \in F$ بحيث

$$x + (-x) = 0$$

(M) بديهيات الضرب Axioms for multiplication

(M1) إذا كان $x \in F$ و $y \in F$، عندها فإن حاصل ضربها xy يقع في F.

(M2) الضرب الإبدالي **Multiplication is commutative**: $xy = yx$ لجميع $x, y \in F$.

(M3) الضرب التجميعي **Multiplication is associative**: $(xy)z = x(yz)$ لجميع $x, y, z \in F$.

(M4) تحتوي المجموعة F على العنصر $1 \neq 0$ بحيث $1x = x$ لجميع $x \in F$.

(M5) إذا كان $x \in F$ و $x \neq 0$، عندها فإن هنالك عنصراً $\frac{1}{x} \in F$ بحيث أن $x \cdot (1/x) = 1$.

(D) القانون التوزيع The distributive law

$$x(y+z) = xy + xz$$

تتحقق المعادلة لجميع $x, y, z \in F$.

١، ١٣ ملاحظات

(أ) يصار عادة إلى كتابة (في أي حقل)

$$x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \ldots$$

بدلاً من

$$x + (-y), x \cdot \left(\frac{1}{y}\right), (x+y) + z, (xy)z, xx, xxx, x + x, x + x + x, \ldots .$$

(ب) من الواضح أن بديهيات الحقل تنطبق على **Q**، المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية، بالمفهوم المألوف لعمليتي الجمع والضرب. إذن المجموعة **Q** هي حقل.

(ج) على الرغم من أننا لا نهدف إلى دراسة المجالات (أو أية مركبات جبرية أخرى) بصورة منفصلة، إلا أنه من المهم البرهنة بأن بعض الخصائص المعروفة لـ **Q** هي نتائج بديهيات الحقل ؛ وفي حالة قيامنا بذلك فإننا لا نحتاج إلى إجراءها مرة ثانية بالنسبة للأعداد الحقيقية وكذلك للأعداد المركبة.

١، ١٤ فرضية : *تؤدي بديهيات الجمع إلى العبارات الآتية.*

(أ) *إذا كان* $x + y = x + z$ *عندها فإن* $y = z$.

(ب) *إذا كان* $x + y = x$ *عندها فإن* $y = 0$.

(ج) *إذا كان* $x + y = 0$ *عندها فإن* $y = -x$.

(د) $-(-x) = x$.

العبارة (أ) تمثل قانون الحذف **cancellation law**. لاحظ بأن (ب)تؤكد على انفرادية العنصر الذي افترض وجوده في (A_4)، وبان (ج) تفعل نفس الشيء بالنسبة لـــ (A_5).

البرهان: إذا كان $x + y = x + z$، من البديهيات (A)

$$y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y)$$
$$= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z.$$

إن هذا يبرهن (أ). عوض عن $z = 0$ في (أ) لتحصل على (ب). عوض عن $z = -x$ في (أ) لتحصل على (ج).

بما أن $-x + x = 0$، فإن (ج) (بوضع x -بدل منx) تؤدي إلى (د).

١، ١٥ فرضية : *تؤدي بديهيات الضرب إلى العبارات الآتية.*

(أ) *إذا كان* $x \neq 0$ *و* $xy = xz$ *عندها فإن* $y = z$.

(ب) *إذا كان* $x \neq 0$ *و* $xy = x$ *عندها فإن* $y = 1$.

(ج) *إذا كان* $x \neq 0$ و $xy = 1$ عندها فإن $y = 1/x$.

(د) *إذا كان* $x \neq 0$ *عندها فإن* $1/(1/x) = x$.

البرهان: مشابه لبرهان الفرضية ١، ١٤، لذلك سوف لا نذكره هنا.

١، ١٦ فرضية : *تنتج عن بديهيات الحقل العبارات الآتية، لجميع* $x, y, z \in F$.

(أ) $0x = 0$.

(ب) *إذا كان* $x \neq 0$ *و* $y \neq 0$ *عندها فإن* $xy \neq 0$.

(ج) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

(د) $(-x)(-y) = xy$.

البرهان:

$0x + 0x = (0+0)x = 0x$. نستنتج من ١، ١٤(ب) بأن $0x = 0$، وان (أ) صحيحة.

الخطوة الآتية، لنفترض أن $x \neq 0, y \neq 0$، ولكن $xy = 0$. من (أ) نستنتج أن

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0,$$

وهذا تناقض. إذن (ب) صحيحة.

المعادلة الأولى في (ج) تأتي من

$$(-x)y + xy = (-x+x)y = 0y = 0,$$

بالترابط مع ١، ١٤(ج) ؛ تتم برهنة النصف الآخر من (ج) بنفس الطريقة.

أخيراً،

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy$$

بواسطة (ج) و ١، ١٤ (د).

١، ١٧ تعريف: *الحقل المرتب ordered field* هو *الحقل F field* والذي هو بنفس الوقت *مجموعة مرتبة ordered set*، بحيث

(i) $x + y < x+z$ إذا كان $x, y, z \in F$ و $y < z$،

(ii) $xy > 0$ إذا كان $x \in F$، $y \in F$، $x > 0$ و $y > 0$.

إذا كان $x > 0$، فإننا نسمي x *موجباً positive*؛ إذا كان $x < 0$، فإن x *سالب negative*.

على سبيل المثال، **Q** هي حقل مرتب.

جميع القواعد المعروفة في التعامل مع المتباينات تنطبق على كل حقل مرتب: الضرب في كميات موجبة [سالبة] تحافظ على [تعكس] المتباينات، المربع لا يمكن أن يكون سالباً، الخ... تبين الفرضية الآتية بعض هذه القواعد.

١، ١٨ فرضية: *العبارات الآتية صحيحة لكل حقل مرتب.*

(أ) *إذا كان* $x > 0$ *فإن* $-x < 0$، *والعكس صحيح.*

(ب) *إذا كان* $x > 0$ *و* $y < z$ *فإن* $xy < xz$.

(ج) *إذا كان* $x < 0$ *و* $y < z$ *فإن* $xy > xz$.

(د) *إذا كان* $x \neq 0$ *فإن* $x^2 > 0$. *وعلى وجه الخصوص،* $1 > 0$.

(هـ) *إذا كان* $0 < x < y$ *فإن* $0 < 1/y < 1/x$.

البرهان:

(أ) إذا كان $x > 0$ فإن $0 = -x + x > -x + 0$، لذلك $-x < 0$. إذا أن $x < 0$ فإن $0 = -x + x < -x + 0$، لذلك فإن $-x > 0$. وهذا يبرهن (أ).

(ب) بما أن $z > y$، فإن $z - y > y - y = 0$، إذن $x(z-y) > 0$، لذلك فإن

$$xz = x(z-y) + xy > 0 + xy = xy \ .$$

(ج) استنادا إلى (أ)، (ب)، والفرضية ١، ١٦ (ج)،

$$-[x(z-y)] = (-x)(z-y) > 0,$$

لذلك فإن $x(z-y) < 0$، إذن $xz < xy$.

(د) إذا كان $x > 0$، استناداً إلى (ii) من التعريف ١، ١٧فإن $x^2 > 0$. إذا كان $x < 0$، فإن $-x > 0$، إذن $(-x)^2 > 0$. ولكن $x^2 = (-x)^2$، استناداً إلى الفرضية ١، ١٦ (د). بما أن $1 = 1^2, 1 > 0$.

(هـ) إذا كان $y > 0$ و $v \leq 0$، فإن $yv \leq 0$. ولكن $y.(1/y) = 1 > 0$. إذن $1/y > 0$. وبنفس الطريقة، فإن $1/x > 0$. إذا ضربنا طرفي المتباينة $x < y$ بالمقدار الموجب $(1/x)(1/y)$، فإننا نحصل على أن $1/y < 1/x$.

الحقل الحقيقي The Real Field

ندرج هنا مبرهنة التواجد *existence theorem* التي هي جوهر هذا الفصل.

١، ١٩ مبرهنة: *هنالك حقل مرتب* R *يمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر.*

إضافة إلى ذلك، فإن R *يحتوي على* Q *كمجموعة جزئية.*

إن العبارة الثانية تعني أن $Q \subset R$ وان عمليات الجمع والضرب في R، عندما تطبق على عناصر Q، فإنها تتطابق مع العمليات الاعتيادية على الأعداد النسبية ؛وبنفس الوقت، فإن الأعداد النسبية الموجبة هي عناصر موجبة في R.

تسمى عناصر R *الأعداد الحقيقية real numbers*.

أن برهان المبرهنة ١، ١٩ هو برهان طويل بعض الشيء وشائك ولذلك فإننا سنقدمه في ملحق للفصل الأول. وفي الحقيقة فإن البرهان يؤلف (يكون) **construct** R من Q.

من الممكن استخلاص المبرهنة الآتية من هذا البناء بجهد إضافي قليل. ولكننا، نفضل أن نشتقه من المبرهنة ١، ١٩ حيث أن ذلك يقدم إيضاحا جيداً للتطبيقات الممكنة لخاصية القيد العلوي الأصغر.

١، ٢٠ مبرهنة:

(أ) *إذا كان* x R، $y \in$ R، و $x > 0$، *فيوجد هنالك عدد صحيح موجب* n *بحيث*

$$nx > y.$$

(ب) *إذا كان* x R، $y \in$ R، و $x < y$، *فيوجد هنالك* $p \in$ Q *بحيث* $x < p < y$.

غالباً ما يطلق على الفرع (أ) *الخاصية الارخميديسيه لـ archimedean property of* R . ويمكن القول من الفرع (ب) بأن Q *كثيفة* (مركزة) *dense* في R: بين كل عددين حقيقيين هناك عدد نسبي.

البرهان:

(أ) لتكن A المجموعة التي تضم جميع العناصر nx، حيث أن قيم n الأعداد الصحيحة الموجبة.

إذا كانت (أ) خاطئة، فإن y ستكون القيد العلوي لـ A. لكن A تمتلك قيداً علوياً أصغر في R. ضع $\alpha = \sup A$. بما أن $x > 0$، $\alpha - x < \alpha$، و $\alpha - x$ ليست قيداً علوياً في A. إذن $\alpha - x < mx$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة مثل m. ولكن عندها ستكون $\alpha < (m+1)x \in A$، وهذا مستحيل، لأن α هي قيدا علوياً في A.

(ب) بما أن $x < y$، فإن $y - x > 0$، وتقدم (أ) عدداً صحيحاً موجباً n بحيث

$$n(y-x) > 1 .$$

نطبق (أ) مرة ثانية، للحصول على أعدادا صحيحة موجبة مثل m_1 و m_2 بحيث $m_1 > nx$، $m_2 > -nx$. عندها

$$-m_2 < nx < m_1 .$$

إذن يوجد هنالك عدد صحيح m (بحيث $-m_2 \le m \le m_1$) بحيث

$$m-1 \le nx < m \ .$$

إذاً ربطنا هاتين المتباينتين، فإننا نحصل على

$$nx < m \le 1+nx < ny.$$

بما أن $n > 0$، فإن ذلك يؤدي إلى

$$x < \frac{m}{n} < y \ .$$

أن هذا يبرهن (ب)، عندما يكون $p = m/n$.

سوف نبرهن الآن وجود existence e الجذور لدرجة نون للأعداد الحقيقية الموجبة. سوف يبين هذا البرهان الصعوبة التي تطرقنا إليها في المقدمة (ألــ لا نسبيه لــ $\sqrt{2}$) في R.

١، ٢١ مبرهنة: *لكل عدد حقيقي $x > 0$ ولكل عدد صحيح $n > 0$ هنالك عدد حقيقي واحد وواحد فقط y بحيث $y^n = x$.*

يكتب هذا العدد y بالشكل التالي $\sqrt[n]{x}$ أو $x^{1/n}$.

البرهان: أن مسألة وجود عدد واحد y كهذا على الأكثر هي مسألة واضحة، بما أن $0 < y_1 < y_2$ تدل ضمناً على أن $y_1^n < y_2^n$.

لتكن E المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الموجبة t بحيث $t^n < x$. إذا كانت $t = x/(1+x)$ فإن $0 < t < 1$. إذن $t^n < t < x$. لذلك فإن $t \in E$، و E ليست مجموعة فارغة (خالية).

إذا كانت $t > 1+x$ فإن $t^n > t > x$، فإن $t \notin E$. ولهذا فإن $1+x$ هو قيد علوي لــ E. إذن المبرهنة ١، ١٩ تدل ضمناً على وجود $y = \sup E$.

ولبرهنة أن $y^n = x$ سوف نبين بأن كلاً من المتباينتين $y^n < x$ و $y^n > x$ تؤدي إلى تناقض.

تنتج المتطابقة الآتية

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})$$

المتباينة

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

عندما تكون $0 < a < b$.

لنفترض أن $y^n < x$. نختار h بحيث $0 < h < 1$ و

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}} .$$

نضع $a = y$، $b = y + h$. عندها

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

لذلك فإن $(y+h)^n < x$، و $y + h \in E$. بما أن $y + h > y$، فإن هذا يتناقض كون y قيداً علوياً في E.

لنفترض أن $y^n > x$. ضع

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} .$$

ثم $0 < k < y$. إذا كانت $t \geq y - k$، فإننا نستنتج أن

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x .$$

لذلك فإن $t^n > x$، و $t \notin E$. وهذا يؤدي إلى أن $y - k$ هو القيد العلوي لـE .

ولكن $y - k < y$، الآمر الذي يناقض كون y القيد العلوي الأصغر لـ E.

إذن $y^n = x$، وان البرهان انتهى عند هذا الحد.

نتيجة: *إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين و n عدد صحيح موجب، فإن*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n} .$$

البرهان: $\alpha = a^{1/n}$، $\beta = b^{1/n}$. عندها فإن

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

بما أن عملية الضرب هي عمليه تبادليه. [البديهية (M_2) في التعريف ١،١٢].

أن تأكيد الوحدانية في المبرهنة ١، ٢١تبين تبعاً لذلك بأن

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n} b^{1/n} .$$

١، ٢٢ الأعداد العشرية Decimals : ننهي هذا القسم ببيان العلاقة بين الأعداد الحقيقية والأعداد العشرية.

لتكن $x > 0$ عدداً حقيقياً. لتكن n_0 اكبر عدد صحيح بحيث $n_0 \leq x$. (لاحظ بأن وجود n_0 يعتمد على الخاصية الارخميدسيه لـ$\mathbf{R}$). بعد أن اخترنا $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$، لتكن

n_k العدد الصحيح الأكبر بحيث أن

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \le x.$$

لتكن E المجموعة التي تضم الأعداد الآتية

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \cdot \tag{٥}$$

عندها فإن $x = \sup E$. أن المفكوك العشري لـ x هو

$$n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots . \tag{٦}$$

وبالعكس، لكل عدد عشري لانهائي (٦) فإن المجموعة E التي تضم الأعداد (٥) هي مقيدة من الأعلى، و (٦) هي المفكوك العشري لـ $\sup E$.

وبما إننا سوف لن نستخدم الأرقام العشرية، سوف لن ندخل هنا بتفاصيل مستفيضة لها.

النظام الموسع للأعداد الحقيقية

The Extended Real Number System

١، ٢٣ تعريف : يتألف النظام الموسع للأعداد الحقيقية من الحقل الحقيقي **R** والرمز $+\infty$ و $-\infty$. بعد المحافظة على الترتيب الأساسي لـ **R**، و نعرف

$$-\infty < x < +\infty$$

لكل **R** x.

من الواضح الآن بأن $+\infty$ هي القيد العلوي لكل مجموعة جزئية في النظام الموسع للأعداد الحقيقية، وإن كل مجموعة جزئية غير خاليه تمتلك قيداً علوياً أصغر. على سبيل المثال، إذا كانت E مجموعة غير خاليه من الأعداد الحقيقية والتي هي غير مقيدة من الأعلى في **R**، عندها فإن $\sup E = +\infty$ في النظام الموسع للأعداد الحقيقية.

تنطبق نفس هذه الملاحظات بالضبط على القيد السفلي.

أن النظام الموسع للأعداد الحقيقية لا يشكل حقلاً، لكن من المألوف تقديم هذه المصطلحات:

(أ) إذا كانت x عدداً حقيقياً فإن

$$x - \infty = -\infty, \ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \ x + \infty = +\infty.$$

(ب) إذا كانت $x > 0$ فإن $x \cdot (-\infty) = -\infty, \quad x \cdot (+\infty) = +\infty$.

(ج) إذا كانت $x < 0$ فإن $x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = +\infty$.

إذا كانت هنالك رغبه للتميز الدقيق بين الأعداد الحقيقية من جهة والرمزين $+\infty$ و $-\infty$ من جهة أخرى، فإن الأعداد الحقيقية تسمى "محدودة" *finite*.

الحقل المركب The Complex Field

١، ٢٤ تعريف: *العدد العقدي (complex number)* هو زوج مرتب order pair (a,b) من الأعداد الحقيقية. أن كلمة "مرتبة" "Ordered" تعني بأن (a,b) و(b,a) هما زوجان متميزان إذا كانت $a \neq b$.

ليكن $x = (a,b)$، $y = (c,d)$ عددين عقدين. أننا نكتب $x = y$ إذا وإذا فقط كان $a = c$ و $b = d$. (لاحظ بأن هذا التعريف ليس قليل الأهمية بمعنى الكلمة ؛فكر بمعادلة من الأعداد النسبية، مقدمه على شكل خارج قسمه الأعداد الصحيحة). نقوم بتعريف

$$x + y = (a + c, b + d),$$
$$xy = (ac - ba, ad + bc) .$$

١، ٢٥ مبرهنة: *تحول هذه التعاريف للجمع والضرب المجموعة المكونة من جميع الأعداد العقدية إلى الحقل، بأخذ* $(0,0)$ و $(1,0)$، بدلاً من 0 و 1.

البرهان: ببساطة نقوم بإثبات بديهيات الحقل، كما مدرجه في التعريف ١، ١٢. (بالطبع، نستخدم بنية الحقل لـــ **R**).

لتكن $x = (a,b), y = (c,d), z = (e,f)$.

(**A1**) واضحة.

(**A2**) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$.

(**A3**)
$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a,b) + (c + e, d + f) \\ &= x + (y + z) .\end{aligned}$$

(**A4**) $x + 0 = (a,b) + (0,0) = (a,b) = x$.

(A5) ضع $-x = (-a,-b)$. عندها فإن $x + (-x) = (0,0) = 0$.

(M1) واضحة.

(M2) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$.

(M3)

$$(xy)z = (ac - bd, ad + bc)(e, f)$$
$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$
$$= (a,b)(ce - df, cf + de) = x(yz) .$$

(M4) $1x = (1,0)(a,b) = (a,b) = x$.

(M5) إذا كان $x \neq 0$ فإن $(a,b) \neq (0,0)$، الأمر الذي يعني بأن هناك على الأقل عدداً واحداً صحيحاً a,b يختلف عن الـ 0، إذن $a^2 + b^2 > 0$، استنادا إلى الفرضية ١، ١٨ (د)، ونستطيع أن نعرف

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

$$x.\frac{1}{x} = (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = 1 .$$

(D)

$$x(y+z) = (a,b)(c+e, d+f)$$
$$= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$$
$$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)$$
$$= xy + xz .$$

١، ٢٦ مبرهنة: *لكل عددين حقيقيين a و b*

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$

وكذلك

$$(a,0)(b,0) = (ab,0).$$

البرهان عادي جداً.

تبين المبرهنة ١، ٢٦بان الأعداد العقدية التي على شكل $(a,0)$ تمتلك نفس الخصائص الحسابية لمثيلاتها من الأعداد الحقيقية a. لذلك فإن بإمكاننا أن نمثل $(a,0)$ بـــ a. أن هذا التمثل يقدم لنا الحقل الحقيقي كحقل جزئي من الحقل المركب.

قد يلاحظ القارئ بأننا قد حددنا الأعداد العقدية بدون أي إشارة إلى الجذر التربيعي الغامض لـــ -١. نبين الآن بأن الرمز (a,b) مكافئ للرمز الأكثر ألفه $a + bi$.

١، ٢٧ تعريف: $i = (0,1)$.

١، ٢٨ مبرهنة: $i^2 = -1$.

البرهان: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

١، ٢٩ مبرهنة: *إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن* $(a,b) = a + bi$.

البرهان:

$$a + bi = (a,0) + (b,0)(0,1)$$
$$= (a,0) + (0,b) = (a,b) \ .$$

١، ٣٠ تعريف: إذا كان a و b عددين حقيقيين وكان $z = a + bi$، فإن العدد العقدي $\bar{z} = a - bi$ يسمى العدد "*المرافق*" لـ *conjugate of z*. العددان a و b هما *الجزء الحقيقي* لـ *of part real z* و *الجزء الخيالي* لـ *imaginary part of z*، على التوالي.

بين فتره وأُخرى سنقوم بكتابة

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

١، ٣١ مبرهنة: *إذا كان z و w عددين عقديين فإن*

(أ) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$،

(ب) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$،

(ج) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$،

(د) $z\bar{z}$ *عدد حقيقي و موجب (باستثناء عندما تكون* $z = 0$ *)*.

البرهان: أن برهنة (أ)، (ب)، (ج) عاديه جداً. لبرهنة (د) أُكتب أن $z = a + bi$، ولاحظ بأن $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

١، ٣٢ تعريف: إذا كان z عدداً عقدياً، فإن *قيمته المطلقة absolute value* $|z|$ هي الجذر التربيعي الغير سالب لـ $z\bar{z}$، أي بكلمة أُخرى، $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

إن وجود (ووحدانية) $|z|$ تتأتى من المبرهنة ١، ٢١ والجزء (د) من المبرهنة ١، ٣١.

لاحظ بأنه عندما يكون x عدداً حقيقياً، فإن $\bar{x} = x$، إذن $|x| = \sqrt{x^2}$. لذلك فإن $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$، و $|x| = -x$ إذا كان $x < 0$.

١، ٣٣ مبرهنة: *لتكن z و w عددين عقديين، فإن*

(أ) $|z| > 0$ *ما لم يكن* $z = 0$، $|0| = 0$،

(ب) $|\bar{z}| = |z|$،

(ج) $|zw| = |z||w|$،

(د) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$،

(هـ) $|z + w| \le |z| + |w|$.

البرهان: (أ) و (ب) عادية جداً. ضع $z = a + bi$، $w = c + di$، حيث أن a,b,c,d أعداداً حقيقة عندها فإن

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

أو

$|zw|^2 = (|z||w|)^2$. أما بالنسبة لـ (ج) فإنها تتأتى من تأكيد الوحدانية للمبرهنة١، ٢١.

لبرهنة (د)، لاحظ بأن $a^2 \le a^2 + b^2$، إذن

$$|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} \ .$$

لبرهنة (هـ)، لاحظ بأن $\bar{z}w$ هو المرافق لـ $z\bar{w}$، لذلك فإن $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

إذن

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\le |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \ . \end{aligned}$$

الآن (هـ) تتحقق بعد أخذ الجذور التربيعية.

١، ٣٤ ترميز : إذا كان $x_1, \ldots, x_n$ أعداداً عُقديه، فإننا نكتب

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \ .$$

نختتم هذا البند بمتباينة مهمة، غالباً ما تعرف *بمتباينة شوارز* ***Schwarz inequality***.

١، ٣٥ مبرهنة: *إذا كان $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1, \ldots, b_n$ أعداداً عُقديه، فإن*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \ .$$

برهان: ضع $A = \sum |a_j|^2$ ، $B = \sum |b_j|^2$ ، $C = \sum a_j \bar{b}_j$ (في جميع المجاميع لهذا برهان j تمر خلال القيم $1,\ldots,n$). إذا كانت $B = 0$ ، فإن $0 = b_n = \cdots = b_1$ ، ويكون لاستنتاج عديم القيمة. لذلك نفترض أن $B > 0$. استناداً للمبرهنة ١، ٣١ فإن

$$\begin{aligned}\sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(B\bar{a}_j - \overline{Cb}_j) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C}\sum a_j \bar{b}_j - BC\sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2).\end{aligned}$$

بما أن كل حد في المجموع الأول ليس سالباً، فإننا نلاحظ بأن

$$B(AB - |C|^2) \ge 0 \ .$$

بما أن $B > 0$ ، فإن ذلك يؤدي إلى أن $AB - |C|^2 \ge 0$. وهذه هي المتباينة المطلوبة.

الفضاءآت الاقليدية Euclidean Spaces

١، ٣٦ تعاريف: لكل عدد صحيح موجب k، لتكن $\mathbf{R}^k$ المجموعة التي تضم جميع قوى k مرتبة k-tuples

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \ ,$$

حيث أن $x_1, \ldots, x_k$ أعداداً حقيقية، تدعى *الإحداثيات* لـ $\mathbf{x}$ *coordinates of* . تسمى عناصر $\mathbf{R}^k$ *النقاط points*، أو *المتجهات vectors*، على الخصوص عندما تكون $k > 1$. سوف نشير إلى المتجهات بواسطة الحروف السميكة. إذا كانت $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ و α عدداً حقيقياً، ضع

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k)$$

بحيث $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ و $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$. أن هذا يحدد عملية جمع المتجهات بالإضافة إلى عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي (غير متجه). أن هاتين العمليتين تحققان القوانين التبادلية

والتجميعية، والتوزيعية (البرهان بسيط جداً، على ضوء تشابهها مع القوانين المتعلقة بالأعداد الحقيقية). وتجعل من R^k *فضاء متجه على الحقل الحقيقي* ***a vector space over the real field***. أن العنصر الصفري لـــ R^k (يدعى أحيانا *الأصل* ***origin*** أو *المتجهة الخامد* ***null vector***) هو النقطة 0، والتي جميع إحداثياتها 0.

نقوم أيضا بتحديد ما يسمى "*حاصل الضرب الداخلي*" ***"inner product"*** (أو *حاصل الضرب الغير الموجهة أو الجداء الداخلي*) لـــ **x** & **y** ***scalar product of*** بواسطة

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \quad = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

والمعيار لـــ **x** ***of norm*** بواسطة

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2} = (\sum_{1}^{k} x_i^2)^{1/2} \quad .$$

أن البناء الذي حدد الآن (الفضاء المتجهة R^k بحاصل الضرب الداخلي والمعيار أعلاه) يسمى *الفضاء– k الاقليدي* ***(euclidean k - space)*** .

١، ٣٧ مبرهنة: *افرض أن* $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z} \in R^k$ و α *عدد حقيقي. فإن*

(أ) $|\mathbf{x}| \geq 0$ ؛

(ب) $|\mathbf{x}| = 0$ *إذا وإذا فقط كان* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ؛

(ج) $|\alpha\,\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$؛

(د) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$؛

(هـــ) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$؛

(و) $|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \leq |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

البرهان: (أ)، (ب)، و(ج) واضحة، (د) هي نتيجة مباشرة لمتباينة شو أرز. من (د) فإن

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2\\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,\end{aligned}$$

وبذلك فإن (هـ) قد برهنت. أخيراً، فإن (و) تستنتج من (هـ) إذا استبدلنا x بـ x - y و y بـ y - z.

١، ٣٨ ملاحظات: المبرهنة١، ٣٧ (أ)، (ب)، و (و) سوف تسمح لنا (لاحظ الفصل الثاني) باعتبار R^k فضاءاً مترياً.

غالباً ما تسمى R^1 (المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية) *الخط line*، أو *الخط الحقيقي real line*. وبنفس الطريقة، *فإن* R^2 تسمى *المستوي plane*، أو *المستوي المركب complex plane* (قارن التعريف١، ٢٤ و١، ٣٦). في هاتين الحالتين يكون المعيار مجرد قيمة مطلقة للعدد الحقيقي أو العدد العقدي المتعلق به.

ملحق Appendix

سوف تتم برهنة المبرهنة ١، ١٩في هذا الملحق عن طريق بناء Rمن Q. سوف نقسم هذا البناء إلى عدة خطوات.

الخطوة ١: إن عناصر R ستكون مجاميع جزئية محددة من K وتسمى *قواطع cuts*. واستناداً إلى التعريف، فإن القاطع، هو أية مجموعة $\alpha \subset Q$ تمتلك الخصائص الثلاثة الآتية.

(I) α ليست فارغة، $\alpha \neq Q$.

(II) إذا كانت $p \in \alpha$ ، $q \in Q$ ، و $q < p$ ، فإن $q \in \alpha$.

(III) إذا كانت $p \in \alpha$ ، فإن $p < r$ لبعض $r \in \alpha$.

الحروف $p,q,r,...$ سوف تشير دائماً إلى الأعداد النسبية، و $\alpha,\beta,\gamma,...$ سوف تشير إلى القواطع.

لاحظ بأن (III) تشير ببساطه إلى أن α لا تمتلك عنصراً اكبراً، بينما (II) تشير ضمناً إلى حقيقيتين سوف تستخدم بحريه تامة:

إذا كانت $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ فإن $p < q$.

إذا كانت $r \notin \alpha$ و $r < s$ فإن $s \notin \alpha$.

الخطوة ٢: حدد " $\alpha < \beta$ " لتعني أن: α هي مجموعة جزئية فعلية لـ β.

لنتحقق من أن هذا يستجيب لمتطلبات التعريف ١، ٥.

إذا كانت $\alpha < \beta$ و $\beta < \gamma$ فمن الواضح أن $\alpha < \gamma$. (المجموعة الجزئية الفعلية لمجموعة جزئية فعلية هي مجموعة جزئية فعلية). وكذلك فانه من الواضح أيضا بأن علاقة واحدة على الأكثر من العلاقات الثلاثة

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$$

تتحقق لأي زوج α, β. ولكي نبين انه يتحقق على الأقل علاقة واحدة، نفترض أن العلاقتين الأوليتين لا تتحقق. عندها فإن α ليست مجموعة جزئية لـــ β. إذن يوجد هنالك $p \in \alpha$ مع $p \notin \beta$. إذا كانت $q \in \beta$، فإن ذلك يعني بأن $q < p$ (بما أن $p \notin \beta$)، إذن $q \in \alpha$، استنادا لـــ (**III**). لذلك فإن $\beta \subset \alpha$. بما أن $\beta \neq \alpha$، فإننا نستنتج بأن: $\beta < \alpha$.

لذلك فإن **R** هي الآن مجموعة مرتبة.

الخطوة ٣: *تمتلك المجموعة المرتبة* **R** *خاصية القيد العلوي الأصغر* ***least -upper - bound property.***

لبرهنة ذلك، لتكن A مجموعة جزئية غير خالية لـــ **R**، ونفترض بأن $\beta \in$ **R** هي القيد العلوي لـــA. نعين γ لتكون الاتحاد لجميع $\alpha \in A$. بعبارة أخرى، فإن $p \in \gamma$ إذا وإذا فقط كانت $p \in \alpha$ لبعض $\alpha \in A$. سوف نبرهن على أن $\gamma \in$ **R** وكذلك $\gamma = \sup A$.

بما أن A مجموعة غير خالية، يوجد هنالك $\alpha_0 \in A$. هذه الـــ α_0 غير خالية. بما أن $\alpha_0 \subset \gamma$، γ غير خالية. الآن، $\gamma \subset \beta$ (بما أن $\alpha \subset \beta$ لكل $\alpha \in A$)، وذلك فإن $\gamma \neq$ **Q**. إذن γ تحقق الخاصية (I). لبرهنة (II) و(III)، أختر $p \in \gamma$. ثم $p \in \alpha_1$ لبعض $\alpha_1 \in A$. إذا كانت $q < p$ فإن $q \in \alpha_1$، ثم $q \in \gamma$ ؛وهذا يبرهن (II). إذا تم اختيار $r \in \alpha_1$ بحيث $r > p$، يتبين لنا بأن $r \in \gamma$ (حيث أن $\alpha_1 \subset \gamma$)، وذلك فإن γ تحقق **(III).**

إذن $\gamma \in$ **R**.

من الواضح أن $\alpha \leq \gamma$ لكل $\alpha \in A$.

نفترض أن $\delta < \gamma$. إذن يوجد هنالك $s \in \gamma$ وبنفس الوقت $s \notin \delta$. بما أن $s \in \gamma$، $s \in \alpha$ لبعض $\alpha \in A$. إذن $\delta < \alpha$، و δ ليست قيداً علوياً لـــ A.

أن هذا يعطي النتيجة المطلوبة وهي أن: $\gamma = \sup A$.

الخطوة ٤: إذا كانت **R** α و $\beta \in$ **R** فإننا نعين $\alpha + \beta$ لتكون المجموعة التي تضم المجاميع $r + s$، حيث $r \in \alpha$ و $s \in \beta$.

نعين 0^* لتكون المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية السالبة. من الواضح أن 0^* هي قاطع. *نستنتج من ذلك بأن بديهيات الجمع* (انظر التعريف ١، ١٢) *تنطبق في* **R**، حيث *تلعب* 0^* *دور الـ* 0.

(A1) علينا أن نبين أن $\alpha+\beta$ هي قاطع. من الواضح أن $\alpha+\beta$ هي مجموعة جزئية غير خالية لـ **Q**. نأخذ $r' \notin \alpha$, $s' \notin \beta$. عندها فإن $r'+s' > r+s$ لجميع الاختيارات لـ $r \in \alpha$، $s \in \beta$. لذلك فإن $r'+s' \notin \alpha+\beta$. يستدل من ذلك بأن $\alpha+\beta$ تمتلك الخاصية (I).

نختار $p \in \alpha+\beta$. عندها فإن $p=r+s$، حيث $r \in \alpha$، $s \in \beta$. إذا كانت $q<p$، فإن $q-s<r$، لذلك فإن $q-s \in \alpha$، و $q=(q-s)+s \in \alpha+\beta$. إذن **(II)** تتحقق.

نختار $t \in \alpha$ بحيث $t>r$. عندها فإن $p<t+s$ و $t+s \in \alpha+\beta$. إذن **(III)** تتحقق.

(A2) $\alpha+\beta$ هي المجموعة التي تضم جميع $r+s$، بحيث $r \in \alpha$، $s \in \beta$. استناداً إلى نفس التعريف، فإن $\beta+\alpha$ هي المجموعة التي تضم جميع $s+r$. بما أن $r+s=s+r$ لجميع $r \in \mathbf{Q}$، $s \in \mathbf{Q}$، فإن $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(A3) كما جاء ا علاه، يستدل ذلك من قانون التجميع في **Q**.

(A4) إذا كانت $r \in \alpha$ و $s \in 0^*$، فإن $r+s<r$، إذن $r+s \in \alpha$. لذلك فإن $\alpha+0^* \subset \alpha$. لكي نحصل على التضمين المعاكس، نختار $p \in \alpha$، ونختار أيضا $r \in \alpha$، $r>p$. إذن $p-r \in 0^*$، و $p=r+(p-r) \in \alpha+0^*$ إذن $\alpha \subset \alpha+0^*$. نستنتج من هذا بأن $\alpha+0^*=\alpha$.

(A5) حدد **R** α. لتكن β المجموعة التي تضم جميع الـ p التي تمتلك الخاصية الآتية:

يوجد هنالك $r>0$ *بحيث* $-p-r \notin \alpha$.

بعبارة أخرى، بعض الأعداد النسبية الأصغر من $-p$ لا تدخل ضمن α.

نبين أن $\beta \in \mathbf{R}$ *وان* $\alpha+\beta=0^*$.

إذا كانت $s \notin \alpha$ و $p=-s-1$، فإن $-p-1 \notin \alpha$، إذن $p \in \beta$. لهذا فإن β ليست خالية. إذا كانت $q \in \alpha$، فإن $-q \notin \beta$. لذلك فإن $\beta \neq \mathbf{Q}$. إذن β تحقق **(I)**.

نقوم باختيار $p \in \beta$، و $r>0$ بحيث $-p-r \notin \alpha$. إذا كانت $q<p$، فإن

$-q-r>-p-r$، إذن $-q-r\notin\alpha$. ولهذا فإن $q\in\beta$ و(II) تتحقق. ضع $t=p+(r/2)$. إذن $t>p$، و $-t-(r/2)=-p-r\notin\alpha$، لذلك فإن $t\in\beta$. إذن β تحقق (III).

برهنا على أن $\beta\in\mathbf{R}$.

إذا كانت $r\in\alpha$ و $s\in\beta$، فإن $-s\notin\alpha$، إذن $r<-s$، $r+s<0$. لذلك فإن $\alpha+\beta\subset 0^*$.

للبرهنة على التضمين المعاكس، نختار $v\in 0^*$، ضع $w=-v/2$. إذن $w>0$، ويوجد هنالك عدد صحيح n بحيث $mw\in\alpha$ ولكن $(n+1)w\notin\alpha$. (لاحظ بأن هذا يعتمد على امتلاك $\mathbf{Q}$ للخاصية الارخميديسيه!). ضع $p=-(n+2)w$. إذن $p\in\beta$، بما أن $-p-w\notin\alpha$، و. $v=mw+p\in\alpha+\beta$
لذلك فإن $0^*\subset\alpha+\beta$.

نستنتج بأن $\alpha+\beta=0^*$.

بالطبع فإن هذا الـ β سوف يرمز له بـ $-\alpha$.

الخطوة ٥: بعد أن برهنا بأن الجمع المحدد في الخطوة ٤ يحقق البديهيات (A) للتعريف ١، ١٢، نستنتج من ذلك بأن الفرضية ١، ١٤ تنطبق على $\mathbf{R}$، وباستطاعتنا برهنة واحدة من متطلبات التعريف ١، ١٧:

إذا كانت $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ و $\beta<\gamma$، *فإن* $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$ ؛

في الحقيقة، من الواضح من تعريف الـ + في $\mathbf{R}$ بأن $\alpha+\beta\subset\alpha+\gamma$، إذا كان لدينا $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$، فإن قانون الحذف (الفرضية ١، ١٤) سوف يدل ضمناً على أن $\beta=\gamma$.

ونحصل أيضاً على أن $\alpha>0^*$ إذا وإذا فقط كان $-\alpha<0^*$.

الخطوة ٦: أن عملية الضرب أعقد قليلاً من عملية الجمع في النطاق الحالي، نظراً لأن حاصل ضرب عددين نسبيين سالبين يكون موجباً. لهذا السبب فإننا سنحدد نفسنا بالتعامل أولا مع $\mathbf{R}^+$، وهي المجموعة التي تضم جميع الـ $\alpha\in\mathbf{R}$ حيث $\alpha>0^*$.

إذا كانت $\alpha\in\mathbf{R}^+$ و $\beta\in\mathbf{R}^+$، فإننا نحدد $\alpha\beta$ لتكن المجموعة التي تضم كل p بحيث $p\le sr$ لبعض الاختيارات لـ $r\in\alpha$, $s\in\beta$ و $r>0$, $s>0$. نحدد 1^* لتكن المجموعة التي تضم كل $q<1$.

ينتج عن ذلك تحقق البديهيات (M) و (D) للتعريف ١، ١٢، بعد إحلال R^+ *محل* F*، وأخذ* 1^* *دور الـ* 1.

أن البرهان على ذلك متشابه جداً للبرهان الذي قدم بالتفصيل بالخطوة ٤ لذلك سوف لا نذكره هنا.

لاحظ، على وجه الخصوص، تحقيق المتطلب الثاني للتعريف ١، ١٧: إذا كانت $\alpha > 0^*$ و $\beta > 0^*$ فإن $\alpha\beta > 0^*$.

الخطوة ٧: نكمل تعريف عملية الضرب بوضع $\alpha\, 0^* = 0^*\alpha = 0^*$، وكذلك

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)\,(-\beta) & \text{إذا كانت } \alpha < 0^* \text{ و } \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{إذا كانت } \alpha < 0^*, \text{ و } \beta > 0^* \\ -[\alpha\cdot(-\beta)] & \text{إذا كانت } \alpha > 0^* \text{ و } \beta < 0^*. \end{cases}$$

تم تعريف حاصل الضرب في الجهة اليمنى بالخطوة ٦.

بعد أن أثبتنا(في الخطوة ٦) بأن البديهيات (M) تتحقق في R^+، أصبحت مسألة إثبات ذلك في R، سهلة جداً وذلك بإعادة تطبيق المتطابقة $\gamma = -(-\gamma)$ التي هي جزء من الفرضية ١، ١٤(راجع الخطوة ٥).

أن برهان قانون التوزيع

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ينقسم إلى عدة حالات. على سبيل المثال، لنفترض أن $\alpha > 0^*$، $\beta < 0^*$، $\beta+\gamma > 0^*$. عندها فإن $\gamma = (\beta+\gamma)+(-\beta)$، و (بما أننا نَعْرِف الآن أن قانون التوزيع يتحقق في R^+)

$$\alpha\gamma = \alpha\,(\beta+\gamma)+\alpha\cdot(-\beta)\ .$$

ولكن $\alpha\cdot(-\beta) = -(\alpha\beta)$. لذلك فإن

$$\alpha\beta+\alpha\gamma = \alpha\,(\beta+\gamma)\ .$$

تعامل الحالات الأخرى بنفس الطريقة.

أكملنا الآن البرهان بأن R *هي حقل مرتب يمتلك خاصية القيد العلوي الأصغر.*

الخطوة ٨: نُعين لكل $r \in Q$ المجموعة r^* التي تتألف من $p \in Q$ بحيث $p < r$. من الواضح أن كل r^* هو قاطع cut؛ أي أن، $r^* \in R$. تحقق هذه القواطع العلاقات الآتية:

(أ) $r^* + s^* = (r+s)^*$،

(ب) $r^* s^* = (rs)^*$،

(ج) $r^* < s^*$ *إذا وإذا كان فقط* $r < s$.

لبرهنة (أ)، نختار $p \in r^* + s^*$. عندها فإن $p = u + v$، حيث $u < r$، $v < s$. إذن $p < r + s$، الذي يعني أن $p \in (r+s)^*$.

وبالعكس، نفترض $p \in (r+s)^*$. عندها فإن $p < r + s$ نختار t بحيث $2t = r + s - p$، نضع

$$r' = r - t \ , \ \ s' = s - t \, .$$

عندها فإن $r' \in r^*$، $s' \in s^*$، و $p = r' + s'$ بحيث $p \in r^* + s^*$.

أن هذا يبرهن (أ). أما برهان (ب) فإنه مشابه لهذا البرهان.

إذا كان $r < s$ فإن $r \in s^*$، ولكن $r \notin r^*$ ؛إذن $r^* < s^*$.

إذا كان $r^* < s^*$، فيوجد هنالك $p \in s^*$ بحيث $p \notin r^*$. إذن $r \le p < s$، إذن $r < s$. وهذا يبرهن (ج).

الخطوة ٩: لاحظنا في الخطوة ٨ بأن استبدال الأرقام النسبية r بمثيلاتها من "القواطع النسبية" $r^* \in \mathbf{R}$ تحافظ على الجمع، حاصل الضرب، والترتيب. من الممكن صياغة هذه الحقيقة بالقول بأن الحقل المرتب $\mathbf{Q}$ هو *تشاكل تقابلياً* ***isomorphic*** للحقل المرتب $\mathbf{Q}^*$ الذي تتكون عناصره من القواطع النسبية. بالطبع، فإن r^* ليس نفس r لكل حال من الأحوال، ولكن الخصائص التي نحن بصددها (الحسابية والترتيب) هي متشابهة في المجالين.

إن *هذا التطابق لـ* $\mathbf{Q}$ *مع* $\mathbf{Q}^*$ *هو الذي يتيح لنا اعتبار* $\mathbf{Q}$ *حقلاً جزئياً لـ* $\mathbf{R}$.

يفهم الجزء الثاني من المبرهنة ١، ١٩من خلال أساس هذا التطابق. لاحظ بأن نفس الظاهرة تحدث *عندما ينظر* إلى الأرقام الحقيقية على أسس إنها حقل جزئي للحقل المركب، ويحدث نفس الشيء أيضا على مستوى ابتدائي جداً، عندما تعرف الأعداد الصحيحة بمجموعة جزئية معينة لـ $\mathbf{Q}$.

إن كل حقلين مرتبين مع خاصية القيد العلوي الأصغر هما متشاكلين تقابلياً. هذه الحقيقة سوف لا نبرهنها هنا. لذلك فإن الجزء الأول من المبرهنة ١، ١٩يحدد خواص الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$ بصوره كاملة.

إن الكتابين المذكورين في المراجع للاندو *Landau* وثرستون *Thurston* خصصا بصوره كلية لموضوع منظومات الأعداد. ويقدم الفصل الأول من كتاب نوب *Knopp* وصفاً ممتعاً للطريقة التي توصل إلى R من Q. وهنالك طريقه أخرى يتم بموجبها تعيين كل رقم حقيقي على أساس انه صف متكافئ لمتتاليات كوشي **Cauchy sequences** للأعداد النسبية (راجع الفصل الثالث) هذه الطريقة مذكورة في البند الخامس من كتاب هيوت *Hewitt* و ستروم يرغ *Stromberg*.

اكتشفت القواطع في Q التي استعملناها هنا من قبل ديديكانيد *Dedekind*. ويعود الفضل في بناء R من Q باستخدام متتاليات كوشي لـــ كانتور **Cantor**. كلاً من كانتور وديديكانيد كان قد نشر طريقته خلال ١٨٧٢.

تمارين EXERCISES

ما لم يرد ما يشير خلافاً لذلك بصوره صريحة، فإن جميع الأعداد المذكورة في هذه التمارين هي أعداد حقيقية.

١- إذا كانت r عدداً نسبياً ($r \neq 0$) و x عدد غير نسبي، برهن أن كل من $r+x$ و rx عدداً غير نسبي.

٢- برهن على أنه لا يوجد عدد نسبي جذره التربيعي يساوي ١٢.

٣- برهن الفرضية ١، ١٥.

٤- لتكن E مجموعة جزئية مرتبة غير خالية ؛ أفترض أن α هي القيد السفلي لـ E و β هي القيد العلوي لـ E. برهن على أن $\alpha \leq \beta$.

٥- لتكن A مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية ومقيدة من الأسفل. لتكن $-A$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد $-x$، حيث $x \in A$. برهن على أن

$$\inf A = -\sup(-A) .$$

٦- ضع $b > 1$.

(أ) إذا كانت m,n,p,q أعداد صحيحة، $n > 0$, $q > 0$، و $r = m/n = p/q$، برهن على أن

$$\left(b^m\right)^{1/n} = \left(b^p\right)^{1/q} .$$

من المفيد تعريف $b^r = (b^m)^{1/n}$.

(ب) برهن على أن $b^{r+s} = b^r b^s$ إذا كان r و s عددين نسبيين.

(ج) إذا كان x عدداً حقيقياً، اجعل من $B(x)$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد b^t، حيث t عدداً نسبياً و $t \leq x$. برهن على أن

$$b^r = \sup B(r)$$

عندما يكون r عددا نسبيا. إذن من المفيد تعريف

$$b^x = \sup B(x)$$

لكل عدد حقيقي x.

(د) برهن على أن $b^{x+y} = b^x b^y$ لجميع الأعداد الحقيقية x و y.

٧- ضع $b > 1$، $y > 0$، برهن على وجود عدد حقيقي وحيد x بحيث $b^x = y$، وذلك

بتكملة الخطوات الآتية. (يدعى هذا العدد x *بلوغاريتم* y *للأساس* b ***logarithm of y to the base b***).

(أ) لأي عدد صحيح موجب n، $b^n - 1 \geq n(b-1)$.

(ب) إذن $(b-1) \geq n(b^{1/n} - 1)$.

(ج) إذا كانت $t > 1$ و $n > (b-1)/(t-1)$، فإن $b^{1/n} < t$.

(د) إذا كانت w تحقق $b^w < y$، فإن $b^{w+(1/n)} < y$ للأعداد الكبيرة من n ؛للتوصل إلى ذلك، طبق الجزء (ج) بوضع $t = y.b^{-w}$.

(هـ) إذا كانت $b^w > y$، فإن $b^{w-(1/n)} > y$ للأعداد الكبيرة من n.

(و) لتكن A المجموعة التي تضم جميع الـ w بحيث $b^w < y$، وبين أن $x = \sup A$ يحقق $b^x = y$.

(ز) برهن على وحدانية هذا لـ x.

٨- برهن على أنه لا يمكن تحديد ترتيب في الحقل المركب الذي يحوله إلى حقل مرتب.

تلميح: **1- عدد مربع.**

٩- أفترض أن $z = a + bi$, $w = c + di$. أفترض أن $z < w$ إذا كانت $a < c$، وكذلك إذا كانت $a = c$ ولكن $b < d$. برهن على أن هذا يحول المجموعة التي تضم جميع الأعداد المركبة إلى مجموعة مرتبه. (يسمى هذا النوع من علاقة الترتيب بـ*الترتيب القاموسي* ***lexicographic order***، *أو الترتيب المعجمي* ***dictionary order***، وذلك لأسباب واضحة). هل تمتلك هذه المجموعة المرتبة خاصية القيد العلوي الأصغر ؟

١٠- افترض أن $z = a + ib$، $w = u + iv$، و

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \; b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}$$

برهن على أن $z^2 = w$ إذا كانت $v \geq 0$ وبأن $(\bar{z})^2 = w$ إذا كانت $v \leq 0$. استنتج أن كل عدد عقدي (باستثناء واحد !)يمتلك جذرين تربيعيين مركبين.

١١- إذا كان z عدداً عقدياً، برهن على وجود $r \geq 0$ وعدداً عقدياً w مع $|w| = 1$ بحيث $z = rw$. هل تحدد w و r دائماً بصوره منفردة من قبل z؟

١٢- إذا كانت $z_1,\dots,z_n$ أعدادا عقدية، برهن على أن
$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

١٣- إذا كانت x و y أعدادا عقديه، برهن على أن
$$\big||x|-|y|\big|\le|x-y|.$$

١٤- إذا كان z عدداً عقدياً بحيث $|z|=1$، أو بكلمة أخرى، بحيث $z\bar{z}=1$، ما قيمة المقدار الأتي $|1+z|^2+|1-z|^2$.

١٥- تحت أي شروط تتحقق المتطابقة في متباينة شوارز؟

١٦- افترض أن $k\ge3$، $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^k$، $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=d>0$ و، $r>0$ برهن ما يلي:

(أ) إذا كان $2r>d$ فإن هنالك ما لانهاية من $z\in\mathbf{R}^k$ بحيث
$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\mathbf{z}-\mathbf{y}|=r\ .$$

(ب) إذا كان $2r=d$، فإن هنالك $\mathbf{z}$ واحد كهذا فقط.

(ج) إذا كان $2r<d$ فلا يوجد هنالك أي $\mathbf{z}$ كهذا.

كيف يجب أن تغير هذه العبارات إذا كان k هو 2 أو 1 ؟

١٧- برهن على أن
$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2$$
إذا كانت $\mathbf{x}$ $\mathbf{R}^k$ و $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^k$. عبر عن ذلك هندسياً، بعبارة متوازيات الأضلاع.

١٨- إذا كان $k\ge2$ و $\mathbf{x}$ $\mathbf{R}^k$، برهن على وجود $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^k$ بحيث $\mathbf{y}\ne\mathbf{0}$ ولكن $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. هل يتحقق هذا إذا كان $k=1$ ؟

١٩- افترض أن $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^k$، $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^k$. أوجد $\mathbf{c}$ $\mathbf{R}^k$ و $r>0$ بحيث
$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$$
إذا وإذا فقط كانت $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$

(الجواب: $3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a},3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$).

٢٠- إشارة إلى الملحق، افترض أن الخاصية (I II) حذفت من تعريف القاطع. ابقي على نفس تعاريف الترتيب والجمع. بين بأن المجموعة المرتبة الناتجة عن ذلك تمتلك خاصية القيد العلوي الأصغر، وبأن عملية الجمع تحقق البديهيات من (A1) إلى (A 4) (بعنصر مختلف قليلاً للصفر !) وان (A 5) لا تتحقق.

الفصل الثاني

أساسيات الطبولوجيا

- المجموعات المحدودة ، القابلة والغير قابلة للعد
- الفضاءآت المترية
- المجوعات المتراصة
- المجوعات التامة
- المجوعات المترابطة
- تمارين

الفصل الثاني
أساسيات الطبولوجيا
Basic Topolyogy

المجموعات المنتهية، القابلة، وغير القابلة للعد
Finite, Countable, And Uncountable Sets

نبدأ هذا البند بتعريف مفهوم الدالة.

٢، ١ تعريف: تأمل المجموعتين A و B، اللتين قد تكون عناصرهما أي شيء مهما كان، وأفترض أنه لكل عنصر x من A هنالك عنصراً يقابله (يرادفه)، بصيغة أو بأخرى، يقع في B، والذي نرمز له $f(x)$. عندها يقال عن f بأنها *دالة function* من A إلى B (*تصوير* أو *تطبيق mapping* A في B). تسمى المجموعة A *المنطلق* لـ *domain of f* (ونقول أيضاً أن f معرفة على A)، وتسمى العناصر $f(x)$ القيم لـ f. وتسمى المجموعة التي تضم جميع قيم f *مدى* لـ *range of f*.

٢، ٢ تعريف: لتكن A و B مجموعتيّن ولتكن f تطبيق (تصوير) A في B. إذا كانت $E \subset A$، فإن $f(E)$ هي المجموعة التي تضم جميع العناصر $f(x)$، لـ $x \in E$. نسمي $f(E)$ *الصورة image* لـ E تحت f. في هذا الرمز، $f(A)$ هي مدى f. من الواضح أن $f(A) \subset B$. إذا كانت $f(A) = B$، فإننا نقول أن f (تصوير) تطبيق A *فوق(شامل) onto* B. (لاحظ، أن كلمة *فوق onto* هي أكثر دقة من كلمة *في into*، وفق هذا الاستخدام).

إذا كانت $E \subset B$، فإن $f^{-1}(E)$ ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع $x \in A$ بحيث $f(x) \in E$. نسمي $f^{-1}(E)$ *الصورة المعاكسة inverse image of E* لـ E تحت f. إذا كان $y \in B$، فإن $f^{-1}(y)$ هي المجموعة التي تضم جميع $x \in A$ بحيث $f(x) = y$. إذا كان، لكل $y \in B$ ، $f^{-1}(y)$ تتألف من عنصر واحد من A على الأكثر، فإن f هي تطبيق 1 - 1 (*واحد لواحد*) (متباين) *one - to- one* لـ A في B. من الممكن التعبير عن ذلك

كما يلي: أن f هي تطبيق 1 - 1 في B شريطة أن تكون $f(x_1) \neq f(x_2)$ كلما كان $x_1 \neq x_2$، $x_1 \in A$, $x_2 \in A$.

(إن الرمز $x_1 \neq x_2$ يعني بأن x_1 و x_2 هما عنصرين مختلفين ؛خلاف ذلك فإننا نكتب $x_1 = x_2$).

٢، ٣ تعريف: إذا كان هناك تطبيق 1 - 1 لـــ A فوق B *onto*، فإننا نقول أنه بالإمكان وضع A وB في *مراسلة* 1-1 1-1 *correspondence*، و أن A و B يملكان نفس *الأعداد الأصلية* *cardinal number*، أو باختصار أن A و B *متكافئين* *equivalent*، ونكتب $A \sim B$. من الواضح أن هذه العلاقة تمتلك الخواص الآتية :

إنها *انعكاسية* *reflexive* : $A \sim A$.

إنها *متناظرة* *symmetric* : إذا كانت $A \sim B$، فإن $B \sim A$.

إنها *انتقالية* *transitive* : إذا كانت $A \sim B$ و $B \sim C$، فإن $A \sim C$.

إن أي علاقة تمتلك هذه الخواص الثلاثة تسمى علاقة *تكافئية* *equivalence relation*.

٢، ٤ تعريف: لأي عدد صحيح موجب n، لتكن J_n المجموعة التي عناصرها الأعداد الصحيحة $1,2, \ldots n$؛ لتكن J المجموعة التي تتألف من جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. لأي مجموعة A، نقول :

(أ) أن A *منتهية* *finite* إذا كانت $A \sim J_n$ لبعض n (تعتبر المجموعة الفارغة منتهية أيضا).

(ب) أن A *لانهائية* (غير منتهية) *infinite* إذا لم تكن منتهية.

(ج) أن A *قابلة للعد* *countable* إذا كانت $A \sim J$.

(د) أن A *غير قابلة للعد* *uncountable* إذا لم تكن A منتهية ولا قابلة للعد.

(هـــ) أن A *على الأكثر قابلة للعد* *a t most countable* إذا كانت A منتهية أو قابلة للعد.

في بعض الأحيان تسمى المجموعة *القابلة للعد* *enumerable*، أو *denumerable*.

لكل مجموعتين منتهيتين A و B، من الواضح أن $A \sim B$ إذا وإذا فقط كانت A و B تحتويان نفس العدد من العناصر. وبالنسبة للمجموعات اللانهائية، فإن فكرة " احتوائهما على نفس العدد من العناصر " تصبح مبهمة بالفعل، بينما يبقى رمز المراسلة 1 1 - على وضوحه.

٢، ٥ مثال: لتكن A المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة. عندها فإن A قابلة للعد. لأنه، لاحظ الترتيب الآتي للمجموعتين A و J :

$$A: 0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots$$
$$J: 1,2,3,4,5,6,7,\ldots$$

إننا نستطيع، في هذا المثال، أن نقدم صيغه لداله f من J إلى A التي تكون مراسلة 1-1 :

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n \text{ زوجي}), \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n \text{ فردي}). \end{cases}$$

٢، ٦ ملاحظة: لا يمكن للمجموعة المنتهية أن تكون مكافئه لأحد مجموعاتها الجزئية الفعلية. أن كون هذا الشيء، ممكناً بالنسبة للمجموعات اللانهائية، قد بيناه في المثال ٢، ٥، الذي تكون فيه J مجموعة جزئية فعليه لـــ **proper subset of** A.

في الواقع، إننا نستطيع استبدال التعريف ٢، ٤ (ب) بالعبارة الآتية : المجموعة A هي مجموعة لانهائية إذا كانت A مكافئه لأحد مجموعاتها الجزئية الفعلية.

٢، ٧ تعريف: إننا نعني "*بالمتتالية*" *sequence*، الدالة f المعرفة على المجموعة J التي تحتوي على جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا كانت $f(n) = x_n$، لـــ $n \in J$، من المألوف أن نرمز إلى المتتالية f بالرمز $\{x_n\}$، أو في بعض الأحيان بالرمز $x_1, x_2, x_3, \ldots$ أن قيم f، التي، هي العناصر x_n تسمى ***حدود terms*** المتتالية. إذا كانت A مجموعة وكانت $x_n \in A$ لجميع $n \in J$، فإن $\{x_n\}$ تسمى ***المتتالية في sequence in A***، أو ***متتالية من العناصر لـــ A sequence of elements of*** .

لاحظ أن الحدود $x_1, x_2, x_3, \ldots$ للمتتالية لا تحتاج لأن تكون مختلفة (متميزة).

بما أن كل مجموعة قابلة للعد هي المدى لدالة 1-1 المعرفة على J، فإننا نستطيع أن نعتبر كل مجموعة قابلة للعد كمدى للمتتالية من الحدود المتميزة. وبكلام تعوزه الدقة، نستطيع القول

بأن عناصر كل مجموعة قابلة للعد من الممكن "ترتيبها في متتالية" " arranged in a sequence".

في بعض الأحيان يكون من الملائم استبدال J في هذا التعريف بالمجموعة التي تحتوي على جميع الأعداد الصحيحة الغير سالبه، أي، البدء بالعدد 0 بدلاً من 1.

٢، ٨ مبرهنة: *كل مجموعة جزئية لانهائية لمجموعة قابلة للعد A قابلة للعد.*

البرهان: نفترض أن $E \subset A$ وE مجموعة لانهائية. رتب العناصر x التابعة لـــ A في متتالية $\{x_n\}$ ذات العناصر المتميزة. كوّن متتالية $\{n_k\}$ كالآتي :

لتكن n_1 أصغر عدد صحيح موجب بحيث $x_{n_1} \in E$. بعد أن نختار $n_1, \ldots, n_{k-1}$ $k = 2,3,4, \ldots$ ()، لتكن n_k أصغر عدد صحيح أكبر من n_{k-1} بحيث $x_{nk} \in E$.

بوضع $f(k) = x_{nk}$ ($k = 1,2,3, \ldots$ (، فإننا نحصل على مراسلة 1 - 1 بين E وJ.

بشكل تقريبي، تبين المبرهنة، بأن المجموعات القابلة للعد تمثل " أصغر" مجموعة لانهاية : لا يمكن للمجموعة الغير قابلة للعد أن تكون مجموعة جزئية لمجموعة قابلة للعد.

٢، ٩ تعريف: لتكن A و Ω مجموعتين، ولنفترض أن لكل عنصر α من A هنالك مجموعة جزئية لـــ Ω مرادفه associated التي نرمز لها بالرمز E_α.

سنرمز للمجموعة التي عناصرها المجموعات E_α بالرمز $\{E_\alpha\}$. وبدلاً من التحدث عن *مجموعات المجموعات sets of sets*، سنقول في بعض الأحيان *طائفة المجموعات collection of sets*، *أو عائلة المجموعات family of sets*.

نعرف *اتحاد union* المجموعات E_α بالمجموعة S بحيث $x \in S$ إذا وإذا فقط كانت $x \in E_\alpha$ على الأقل $\alpha \in A$ واحدة. نستخدم الرمز

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \qquad (١)$$

إذا كانت A تتألف من الأعداد الصحيحة $1,2,\ldots,n$، وغالباً ما نكتب

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \qquad (٢)$$

أو

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \ . \qquad (٣)$$

إذا كانت A المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة الموجبة، الرمز الاعتيادي هو

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \quad . \tag{٤}$$

لا يشير الرمز ∞ في (٤) إلى اكثر من إننا نتناول اتحاد طائفة المجموعات القابلة للعد، ويجب أن لا يخلط مع الرمزين $-\infty$, $+\infty$، اللذين قدمناهما بالتعريف ١، ٢٣.

يعرف *التقاطع intersection* للمجموعات E_α بأنه المجموعة P بحيث $x \in P$ إذا وإذا فقط كان $x \in E_\alpha$ لكل $\alpha \in A$. إننا نستخدم الرمز

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \quad , \tag{٥}$$

أو

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n , \tag{٦}$$

أو

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_\alpha , \tag{٧}$$

بالنسبة للاتحادات. إذا كان $A \cap B$ غير خالية، فإننا نقول بأن A و B *يتقاطعان intersect*؛ خلافاً لذلك فإنهما *منفصلان disjoint*.

٢، ١٠ أمثلـــة :

(أ) أفترض أن E_1 تتألف من 3 , 2 , 1 و E_2 تتألف من 4 ,3 , 2. عندها فإن $E_1 \cup E_2$ تتألف من 4 , 3 , 2 , 1، بينما $E_1 \cap E_2$ تتألف من 3, 2.

(ب) لتكن A المجموعة التي تضم الأعداد الحقيقية x بحيث $0 < x \le 1$. لكل $x \in A$، لتكن E_x مجموعة الأعداد الحقيقية y بحيث $0 < y < x$. عندها فإن

(i) $E_x \subset E_z$ إذا وإذا فقط كان $0 < x \le z \le 1$ ؛

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$ ؛

(iii) $\bigcap_{x \in A} E_x$ مجموعة فارغة ؛

(i) و (ii) واضحة جداً. لبرهنة (iii)، نلاحظ أنه لكل $0 < y$، $y \notin E_x$ إذا كانت $x < y$. إذن $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

٢، ١١ ملاحظات: إن العديد من خواص الاتحادات والتقاطعات متشابهة إلى حد كبير لخواص حاصل الجمع وحاصل الضرب ؛ وفي الحقيقة، فإن الكلمات حاصل الجمع وحاصل الضرب تستخدم أحياناً في هذا المجال وإن الرموز $\sum$ و $\prod$ تكتب بدلاً من $\bigcup$ و $\bigcap$.

إن قانوني الإبدال و التجميع واضحة :

$$A\bigcup B = B\bigcup A \quad ; \quad A\bigcap B = B\bigcap A \tag{٨}$$

$$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C); \quad (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C) \tag{٩}$$

الأمر الذي يبرر حذف الأقواس في (٣) و (٦).

أن قانون التوزيع يتحقق أيضاً :

$$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) \tag{١٠}$$

لبرهنة ذلك، نرمز إلى العناصر في يسار ويمين (١٠) بـــ EوF، على التوالي.

نفترض أن $x \in E$. عندها فإن $x \in A$ و $x \in B\bigcup C$، أي أن، $x \in B$ أو $x \in C$ (من الجائز في كليهما). إذن $x \in A\bigcap B$ أو $x \in A\bigcap C$، وهذا يعني أن $x \in F$. لذلك فإن $E \subset F$.

الخطوة التالية، نفترض أن $x \in F$. عندها فإن $x \in A\bigcap B$ أو $x \in A\bigcap C$. أي أن، $x \in A$، و $x \in B\bigcup C$. إذن $x \in A\bigcap(B\bigcup C)$، لذلك تكون $F \subset E$.

نستنتج من ذلك أن $E = F$.

ندرج أدناه بعض العلاقات الأخرى التي يمكن إثباتها بسهولة :

$$A \subset A\bigcup B \ , \tag{١١}$$

$$A\bigcap B \subset A \ . \tag{١٢}$$

إذا كان الـــ 0 يرمز إلى المجموعة الخالية، فإن

$$A\bigcup 0 = A \ , \qquad A\bigcap 0 = 0 \ . \tag{١٣}$$

إذا كانت $A \subset B$، فإن

$$A\bigcup B = B, \qquad A\bigcap B = A \ . \tag{١٤}$$

٢، ١٢ مبرهنة: *لتكن* $\{E_n\}$، $n = 1,2,3,\ldots$، *متتالية من المجموعات القابلة للعد، ونضع*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad . \qquad (١٥)$$

عندها فإن S قابلة للعد.

البرهان: لنقم بترتيب كل مجموعة E_n في متتالية $\{x_{nk}\}$، $k = 1,2,3,\ldots$، ونلاحظ الترتيب اللانهائي.

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad (١٦)$$

والذي يشكل فيه الصف النوني عناصر E_n. أن الترتيب يحتوي على جميع عناصر S. وكما هو مؤشَر بالأسهم، فإنه من الممكن ترتيب هذه العناصر في متتالية

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14} \ldots \qquad (١٧)$$

إذا كانت أياً من مجموعتين E_n تمتلك عناصر مشتركة، فإن ذلك سوف يظهر أكثر من مرة في (١٧). إذن توجد هنالك مجموعة جزئية T للمجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $S \sim T$ ، التي تبين بأن S هي على الأكثر قابلة للعد (المبرهنة ٢، ٨). بما أن $E_1 \subset S$، و E_1 لانهائية، فإن S لانهائية، ولذلك فهي قابلة للعد.

نتيجة:

نفرض أن A هي قابلة للعد على الأكثر، ولكل $\alpha \in A$، B_α قابلة للعد على الأكثر. نضع

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \quad .$$

عندها فإن T قابلة للعد على الأكثر.

لان T هي مكافئه للمجموعة الجزئية لـــ (١٥).

٢، ١٣ مبرهنة: *لتكن A مجموعة قابلة للعد، ولتكن B_n المجموعة التي تضم جميع القوى النونية $(a_1,\ldots,a_n)$، حيث $a_k \in A$ $(k = 1,\ldots,n)$، وليس بالضرورة أن تكون العناصر $a_1,\ldots,a_n$ متميزة. عندها فإن B_n قابلة للعد.*

البرهان: حيث أن B_1 قابلة للعد بشكل واضح، وان $B_1 = A$. نفترض أن B_{n-1} قابلة للعد

$n =$) 2,3,4, . . . (. عندها فإن عناصر B_n بالشكل الأتي

$$(b,a) \quad (b \in B_{n-1}, a \in A) \ . \qquad (١٨)$$

لكل b ثابتة، فإن المجموعة التي تضم الأزواج (b,a) مكافئه لـــ A، إذن فهي قابلة للعد. لذلك فإن B_n هي الاتحاد لمجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد. استناداً للمبرهنة ٢، ١٢، فإن B_n قابلة للعد.

أن المبرهنة تستنتج بطريقة الاستقراء الرياضي.

نتيجة: *المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية قابلة للعد.*

البرهان: نطبق المبرهنة ٢، ، ١٣بجعل $n = 2$، وبملاحظة أن كل عدد نسبي r يكون بالشكل b/a، حيث a وb أعداد صحيحه. أن مجموعة الأزواج (a,b)، وتبعاً لذلك مجموعة الكسور b/a، قابلة للعد. في واقع الأمر، حتى المجموعة التي تضم جميع الأعداد الجبرية قابلة للعد (راجع التمرين رقم ٢). أن عدم كون جميع المجموعات اللانهائية، قابلة للعد، مبيناً بالمبرهنة الآتية :

٢، ١٤مبرهنة: *لتكن A المجموعة التي تضم جميع المتتاليات التي عناصرها العددين الصحيحين 0 و1. أن هذه المجموعة غير قابلة للعد.*

أن عناصر A هي المتتاليات المشابهة لـــ 1,0,0,1,0,1,1,1,... .

البرهان: لتكن E مجموعة جزئية قابلة للعد من A، ولتكن E تتألف من المتتاليات $s_1, s_2, s_3, \ldots$. نكون متتالية s كآلاتي إذا كان الرقم النوني في s_n هو 1، نجعل الرقم النوني في sصفر، والعكس بالعكس. عندها فإن المتتالية s تختلف عن كل عنصر من E بما لا يقل عن موقع واحد؛ إذن $s \notin E$. ولكن من الواضح أن $s \in A$ ، لذلك فإن E مجموعة جزئية فعليه لـــ A.

يجب أن نبين بأن كل مجموعة جزئية قابلة للعد في A هي مجموعة جزئية فعلية. نستنتج من ذلك أن A غير قابلة للعد (لان خلاف ذلك سيجعل من A مجموعة جزئية فعليه لـــ A، وهذا شئ عديم المعنى).

استخدمت فكرة البرهان أعلاه لأول مره من قبل كانتور Cantor's، وهي تسمى خطوه كانتور القطرية ؛وذلك لأنه إذا تم استبدال المتتاليات $s_1, s_2, s_3, \ldots$ بشعاع *array* مثل (١٦)، فإن العناصر على القطر هي التي تدخل في بناء المتتالية الجديدة.

إن القراء المطلعون على التمثيل الثنائي للأعداد الحقيقية (الأساس ٢ بدلاً من ١٠) سوف يلاحظون بأن المبرهنة ٢، ١٤تؤدي ضمنياً إلى أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. سوف نقدم برهاناً ثانياً لهذه الحقيقة في المبرهنة٢، ٤٣.

فضاءآت مترية Metric Spaces

٢، ١٥تعريف: المجموعة X، التي سنسمي عناصرها "نقاط" points، يقال لها فضاءً مترياً metric *space* إذا كان لأي نقطتينp و q في X عدداً حقيقياً مرادفاً $d\ (p,q)$، يسمى *المسافة distance* من p إلى q، بحيث

(أ) $d(p,q) > 0$ إذا كانت $p \neq q$ ؛ $d(p,p) = 0$ ؛

(ب) $d(p,q) = d(q,p)$ ؛

(ج) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)\ ,\ \forall\, r \in X$.

إن أي دالة تمتلك الخواص أعلاه تسمى *دالة المسافة function distance*، أو *المترية metric*.

٢، ١٦ أمثلـــة: إن اكثر الأمثلة أهميه للفضاءآت المترية، من وجهة نظرنا، هي الفضاءآت الأقليدية $\mathbf{R}^k$، وعلى وجه الخصوص $\mathbf{R}^1$ (الخط الحقيقي) و $\mathbf{R}^2$ (المستوي المركب)؛ تعرف المسافة في $\mathbf{R}^k$ بما يلي:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k) \qquad (١٩)$$

استناداً للمبرهنة ١، ٣٧، فإن شروط التعريف ٢، ١٥ تتحقق بـــ (١٩).

من المهم ملاحظة أن كل مجموعة جزئية Y لفضاء متري X هي فضاء متري بحد ذاتها، وتمتلك نفس دالة المسافة. لأنه من الواضح إذا تحققت الشروط (أ) إلى (ج) للتعريف ٢، ١٥ لكل $p,q,r \in X$، فإنها تتحقق أيضا إذا حددنا p,q,r تقع في Y.

لذلك فإن كل مجموعة جزئية لفضاء اقليدي هي فضاء متري. المثالين الآخرين هما الفضائيين $\mathcal{C}(K)$ و $L^2(\mu)$ اللذين سنناقشه في الفصلين السابع والحادي عشر، على التوالي.

٢، ١٧تعريف: نقصد *بالقطعة segment* (a,b) المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $a < x < b$.

نقصد *بالفترة interval* $[a,b]$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $a \le x \le b$.

بين فتره وأخرى، سنجابه "الفترات النصف مفتوحة **"half-open intervals"** , $[a,b)$ و $(a,b]$; الأول يتألف من كل x بحيث $a \le x < b$، الثاني يتألف من كل x بحيث $a < x \le b$.

إذا كانت $a_i < b_i$ لـــ $i = 1,\dots,k$، فإن المجموعة التي تضم جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_k)$ في $\mathbf{R}^k$ والتي تحقق احداثياتها المتباينات $a_i \le x_i \le b_i$ $(1 \le i \le k)$ تسمى *الخلية* k – (*k- cell*). لذلك فإن الخلية –1 هي فترة، الخلية – 2 هي مستطيل، . . . الخ.

إذا كانت $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ و $r > 0$، فإن *الكرة ball المفتوحة open* (أو المغلقة) (**or closed**) B التي يقع مركزها على $\mathbf{x}$ ونصف قطرها r المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < r$ (أو $|\mathbf{y}-\mathbf{x}| \le r$).

نسمي المجموعة $E \subset \mathbf{R}^k$ *محدبة convex* إذا كانت

$$\lambda\,\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \in E$$

كلما كان $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$, $0 < \lambda < 1$.

على سبيل المثال، *الكرات محدبة*. وذلك لأنه إذا كانت $|\mathbf{y}-\mathbf{x}| < r$, $|\mathbf{z}-\mathbf{x}| < r$, $0 < \lambda < 1$، فإن

$$\begin{aligned}|\lambda\,\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| &= |\lambda\,(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + (1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})| \\ &\le \lambda\,|\mathbf{y}-\mathbf{x}| + (1-\lambda)|\mathbf{z}-\mathbf{x}| < \lambda\,r + (1-\lambda)r \\ &= r.\end{aligned}$$

نفس البرهان يطبق على الكرات المغلقة. وبنفس الوقت فإنه من السهل أن نرى أن الخلايا – k محدبة.

٢، ١٨تعريف: لتكن X فضاءاً مترياً. أن جميع النقاط والمجموعات المذكورة أدناه هي عناصر ومجموعات جزئية لـــ X.

(أ) أن *الجوار neighborhood* للنقطة p هي المجموعة $N_r(p)$ التي تتألف من جميع

النقاط q بحيث $d(p,q) < r$. يسمى العدد r *نصف قطر* لـــ $N_r(p)$ *radius of*.

(ب) النقطة p هي نقطة *غاية* *limit* للمجموعة E إذا كان كل جوار لـــ p يحتوي على نقطه $q \neq p$ بحيث $q \in E$.

(ج) إذا كانت $p \in E$ و p ليست نقطة غاية لـــ E، عندها فإن p تسمى نقطة *منعزلة* لـــ E *isolated point of*.

(د) E مجموعة *مغلقة* *closed* إذا كانت كل نقطة غاية لـــ E هي نقطه في E.

(هـــ) النقطة p هي نقطه *داخلية* *interior* في E إذا كان هنالك جوار N لـــ p بحيث $N \subset E$.

(و) E مجموعة *مفتوحة* *open* إذا كانت كل نقطه في E هي نقطة داخلية في E.

(ز) *المتممة* لـــ E *complement of* (يرمز لها E^c) هي المجموعة التي تضم جميع النقاط $p \in X$ بحيث $p \notin E$.

(ح) E مجموعة *تامة* *perfect* إذا كانت E مغلقة وكانت كل نقطه من E هي نقطة غاية في E.

(ط) E مجموعة *مقيدة* *bounded* إذا كان هنالك عدد حقيقي M ونقطه $q \in X$ بحيث $d(p,q) < M$ لكل $p \in E$.

(ي) E *كثيفة* (*مركزة*) *dense* في X إذا كانت كل نقطه من نقاط X هي نقطة غاية لـــ E، أو نقطه في E (أو كلاهما).

يلاحظ أن الجوار في R^1 هي قطعة، بينما في R^2 يكون الجوار داخل الدوائر.

٢، ١٩ مبرهنة: *كل جوار هو مجموعة مفتوحة.*

البرهان: نلاحظ الجوار $E = N_r(p)$، ولتكن q أية نقطه في E. عندها فيوجد هنالك عدد حقيقي موجب h بحيث

$$d(p,q) = r - h .$$

لجميع النقاط s بحيث $d(q,s) < h$، هنالك

$$d(p,s) \leq d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r,$$

بحيث $s \in E$. لذلك فإن q هي نقطة داخلية لـــ E.

٢، ٢٠ مبرهنة: *إذا كانت p نقطة غاية للمجموعة E، فإن كل جوار لـــ p يحتوي على مالانهاية من نقاط E.*

البرهان: نفترض أن هنالك جوار N لـــ p والذي يحتوي على عدد محدد (منتهى) فقط من نقاط E. لتكن $q_1,\ldots,q_n$ تلك النقاط التابعة لـــ $N\cap E$ والتي تختلف عن p، و نضع

$$r=\min_{1\le m\le n} d(p,q_m)$$

[نستخدم هذا الرمز للإشارة إلى أصغر الأعداد $d(p,q_1),\ldots,d(p,q_n)$]. من الواضح أن العدد الأصغر من بين مجموعة منتهية للأعداد الموجبة هو موجب، لذلك فإن $r>0$.

لا يحتوي الجوار $N_r(p)$ أية نقطه q من E بحيث $q\neq p$، لذلك فإن p ليست نقطة غاية لـــ E. أن هذا التناقض يثبت صحة المبرهنة.

نتيجة: *المجموعة المنتهية من النقاط لا تمتلك نقاط غاية.*

٢، ٢١ أمثلة: لندرس المجموعات الجزئية الآتية لـــ $\mathbf{R}^2$:

(أ) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية z بحيث $|z|<1$.

(ب) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية z بحيث $|z|\le 1$.

(ج) مجموعة منتهية.

(د) المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة.

(هـــ) المجموعة التي تتألف من الأعداد $1/n$ $(n=1,2,3,\ldots)$. نلاحظ أن هذه المجموعة E تمتلك نقطة غاية (وبالتحديد، $z=0$) ولكن لا توجد في E أي نقطة هي نقطة غاية لـــ E؛ نود أن نؤكد على الاختلاف بين امتلاك نقطة غاية و احتواء واحدة منها.

(و) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية، (التي هي $\mathbf{R}^2$).

(ز) القطعة $(a\,,b)$.

لنلاحظ أنه من الممكن اعتبار (د)، (هـــ) و (ز) مجموعات جزئية لـــ $\mathbf{R}^1$. يبين الجدول أدناه. بعض خواص هذه المجموعات :

	مغلقـــة	مفتوحـــة	تامـــة	مقيـــدة
(أ)	كلا	نعم	كلا	نعم
(ب)	نعم	كلا	نعم	نعم

(ج)	نعم	كلا	كلا	نعم
(د)	نعم	كلا	كلا	كلا
(هـ)	كلا	كلا	كلا	نعم
(و)	نعم	نعم	نعم	كلا
(ز)	كلا		كلا	نعم

في (ز)، تركنا المدخول الثاني فارغاً. السبب لذلك هو أن القطعة (a,b) غير مفتوحة إذا اعتبرناها جزئية لـ R^2، ولكنه مجموعة مفتوحة لـ R^1.

٢، ٢٢ مبرهنة: *لتكن $\{E_\alpha\}$ طائفة (عائلة المجوعات، مجموعة المجوعات) collection E_α (منتهية أو لانهائية). عندها فإن*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha \left(E_\alpha^c\right) . \qquad (٢٠)$$

البرهان: لتكن A و B العناصر في يسار ويمين (٢٠). إذا كانت $x \in A$، فإن $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$، إذن $x \notin E_\alpha$ لأي α، إذن $x \in E_\alpha^c$ لكل α، بحيث $x \in \bigcap E_\alpha^c$. لذلك فإن $A \subset B$.

وبالعكس، إذا كانت $x \in B$، فإن $x \in E_\alpha^c$ لكل α، إذن $x \notin E_\alpha$ لكل α، إذن $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$، بحيث $x \in \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c$. لذلك فإن $B \subset A$.

نستنتج من ذلك أن $B = A$.

٢، ٢٣ مبرهنة: *المجموعة E مفتوحة إذا وإذا فقط كانت المجموعة المتممة لها مغلقة.*

البرهان: أولاً، نفرض أن E^c مغلقة. نختار $x \in E$. عندها فإن $x \notin E^c$، و x ليست نقطة غاية لـ E^c . إذن يوجد هنالك جوار N لـ x بحيث $E^c \cap N$ خالية، أي أن، $N \subset E$. إذن فإن x نقطة داخلية لـ E، و E مفتوحة.

الخطوة التالية، نفترض أن E مفتوحة. لتكن x نقطة غاية لـ E^c. عندها فكل جوار لـ xيحتوي على نقطة في E^c، بحيث x ليست نقطة داخلية لـ E. بما أن E مفتوحة، فإن ذلك يعني أن $x \in E^c$. نستنتج من ذلك أن E^c مغلقة.

نتيجة: *المجموعة F مغلقة إذا وإذا فقط كانت المجموعة المتممة لها مفتوحة.*

٢، ٢٤ مبرهنة: (أ) *لأي طائفة* $\{G_\alpha\}$ *لمجموعات مفتوحة،* $\bigcup_\alpha G_\alpha$ *مفتوحة.*

(ب) *لأي طائفة* $\{F_\alpha\}$ *لمجموعات مغلقة،* $\bigcap_\alpha F_\alpha$ *مغلقة.*

(ج) *لأي طائفة منتهية* $G_1,\ldots,G_n$ *لمجموعات مفتوحة،* $\bigcap_{i=1}^n G_i$ *مفتوحة.*

(د) *لأي طائفة منتهية* $F_1,\ldots,F_n$ *لمجموعات مغلقة،* $\bigcup_{i=1}^n F_i$ *مغلقة.*

البرهان: نضع $G=\bigcup_\alpha G_\alpha$. إذا كانت $x\in G$، فإن $x\in G_\alpha$ لبعض α. بما أن x نقطة داخلية لـ G_α، فإن x أيضاً نقطة داخلية لـ G، و G مفتوحة. أن هذا يبرهن (أ).

استنادا للمبرهنة ٢، ٢٢،

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha\left(F_\alpha^c\right), \qquad (٢١)$$

و F_α^c مفتوحة، استنادا للمبرهنة ٢، ٢٣. إذن (أ) تدل ضمنياً بأن (٢١) مفتوحة بحيث $\bigcap_\alpha F_\alpha$ مغلقة.

الخطوة التالية، نضع $H=\bigcap_{i=1}^n G_i$. لأي $x\in H$، هنالك جوار N_i لـ x بنصف قطر r_i، بحيث $N_i\subset G_i$ $(i=1,\ldots,n)$. نضع

$$r=\min(r_1,\ldots,r_n),$$

ولتكن N الجوار لـ x بنصف قطر r. عندها فإن $N\subset G_i$ لـ $i=1,\ldots,n$، بحيث $N\subset H$، و H مفتوحة.

بأخذ المتممات، فإن (د) تستنتج من (ج) :

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^n\left(F_i\right)^c.$$

٢، ٢٥ أمثلة: في الجزئين (ج) و (د) من المبرهنة السابقة كانت صفة المنتهية للطائفتين مهمة جداً. على سبيل المثال لتكن G_n القطع $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,3,\ldots)$. عندها فإن G_n مجموعة جزئية مفتوحة لـ $\mathbf{R}^1$. نضع $G=\bigcap_{i=1}^\infty G_n$. عندها فإن G تتألف من نقطة واحدة (بالتحديد، $x=0$) لذلك فهي ليست مجموعة جزئيه مفتوحة لـ $\mathbf{R}^1$.

لذلك فإن تقاطع طائفة لانهائية لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة مفتوحاً. وبنفس الطريقة، فإن اتحاد طائفة لانهائية لمجموعات مغلقة ليس بالضرورة مغلقاً.

٢، ٢٦ تعريف: إذا كانت X فضاءا مترياً، وإذا كانت $E \subset X$، وإذا كانت E' ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع النقاط الغاية لـــ E في X، عندها فإن *انغلاق لـــ* ***closure of E*** $\overline{E}$ هو المجموعة $\overline{E} = E \cup E'$.

٢، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت X فضاءا مترياً و $E \subset X$، فإن*

(أ) $\overline{E}$ *مغلقة،*

(ب) $E = \overline{E}$ *إذا وإذا فقط كانت E مغلقة،*

(ج) $\overline{E} \subset F$ *لكل مجموعة مغلقة* $F \subset X$ *بحيث* $E \subset F$.

استنادا إلى (أ) و (ج)، $\overline{E}$، هو *أصغر مجموعة مغلقة لـــ* ***smallest closed subset of X*** التي تحتوي E.

البرهان:

(أ) إذا كانت $p \in X$ و $p \notin \overline{E}$ عندها فإن p ليست نقطة في E ولا نقطة غاية لـــ E. إذن p تمتلك جوار لا يقاطع E. لذلك فإن المتممة لـــ $\overline{E}$ مفتوحة. إذن $\overline{E}$ معلقة.

(ب) إذا كانت $E = \overline{E}$، نستدل من (أ) على أن E مغلقة. إذا كانت E مغلقة، فإن $E' \subset E$ [استنادا للتعريفين ٢، ١٨ (د) و ٢، ٢٦]، إذن $\overline{E} = E$.

(ج) إذا كانت F مغلقة و $F \supset E$، عندها فإن $F \supset F'$، إذن $F \supset E'$. لذلك فإن $F \supset \overline{E}$.

٢، ٢٨ مبرهنة: *لتكن E مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية مقيدة من الأعلى. لتكن $y = \sup E$. عندها فإن $y \in \overline{E}$. إذن $y \in E$ إذا كانت E مغلقة.*

قارن ذلك مع الأمثلة في البند ١، ٩.

البرهان إذا كانت $y \in E$ فإن $y \in \overline{E}$. لنفترض أن $y \notin E$. لكل $h > 0$ عندها توجد نقطة $x \in E$ بحيث $y - h < x < y$، وذلك لأنه خلافاً لذلك ستكون $y - h$ قيداً علوياً لـــ E. لذلك فإن y نقطة غاية لـــ E. إذن $y \in \overline{E}$.

٢، ٢٩ ملاحظة: نفترض أن $E \subset Y \subset X$، حيث X فضاءا مترياً. حين نقول أن E مجموعة جزئيه مفتوحة في X فإن ذلك يعني أنه لكل نقطة $p \in E$ هنالك عدداً موجباً قريناً r

بحيث أن الشرطين $d(p,q)<r$, $q \in X$ يدلان على أن $q \in E$. ولكننا لاحظنا (البند ٢، ١٦) بأن Y هي أيضاً فضاءاً مترياً، لذلك فإن تعاريفنا بنفس الوقت تشمل Y. لنكن واضحين بخصوص هذه النقطة، لنقل أن E *مفتوحة نسبياً لـ* Y ***open relative of Y*** إذا كان لكل $p \in E$ هنالك $r>0$ رديف له بحيث $q \in E$ كلما كانت $d(p,q)<r$ و $q \in Y$. بيّن المثال ٢، ٢١ (ز) بأن المجموعة قد تكون مفتوحة نسبياً لـ Y بدون أن تكون مجموعة جزئية مفتوحة لـ X. هنالك علاقة بسيطة بين هذه المفاهيم، سنذكرها الآن.

٢، ٣٠ مبرهنة: *لنفترض $Y \subset X$. المجموعة الجزئية E لـ Y مفتوحة نسبياً لـ Y إذا وإذا فقط كانت $E = Y \cap G$ لبعض المجموعات الجزئية المفتوحة G لـ X.*

البرهان: نفترض أن E مفتوحة نسبياً لـ Y. لكل $p \in E$ هنالك عدداً موجباً r_p بحيث أن الشرطين $d(p,q)<r_p$, $q \in Y$ يدلان على أن $q \in E$. لتكن V_p المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q)<r_p$، ونعرف

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p .$$

عندها فإن G مجموعة جزئيه مفتوحة لـ X، استناداً للمبرهنتين ٢، ١٩ و ٢، ٢٤.

بما أن $p \in V_p$ لجميع $p \in E$، من الواضح أن $E \subset G \cap Y$.

ووفقاً لاختيارنا V_p، فإن $V_p \cap Y \subset E$ لكل $p \in E$، لذلك فإن $G \cap Y \subset E$.

إذن $E = G \cap Y$، وبذلك فإن نصف المبرهنة قد برهن.

وبالعكس، إذا كانت G مفتوحة في X و $E = G \cap Y$، فإن كل $p \in E$ يمتلك الجوار $V_p \subset G$. عندها فإن $V_p \cap Y \subset E$، لذلك فإن E مفتوحة نسبياً لـ Y.

المجموعات المتراصة Compact Sets

٢، ٣١ تعريف: نقصد بعبارة *الغطاء المفتوح* ***open cover*** للمجموعة E في الفضاء المتري X، تلك الطائفة **collection** $\{G_\alpha\}$ للمجموعات الجزئية المفتوحة لـ X بحيث $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

٢، ٣٢ تعريف: يقال للمجموعة الجزئية K للفضاء المتري X بأنها *متراصة* ***compact*** إذا كان كل غطاء مفتوح لـ K يحتوي على غطاء جزئي منتهي ***finite subcover***.

بصورة أكثر وضوحاً، فإن الشرط هو أنه إذا كانت $\{G_\alpha\}$ غطاء اً مفتوحاً لـ K، فإن هنالك أعداداً منتهياً من الأدلة $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ بحيث

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \ .$$

إن مفهوم التراص يحمل أهمية كبيرة في التحليل الرياضي، وعلى الخصوص في مجال الاستمرارية (الفصل الرابع).

من الواضح أن كل مجموعة منتهية هي متراصة. أن وجود صف كبير من المجموعات اللانهائية المتراصة في $\mathbf{R}^k$ سوف سيستنتج من المبرهنة ٢، ٤١.

لاحظنا سابقاً (في البند ٢، ٢٩) بأنه إذا كانت $E \subset Y \subset X$، فإن E قد تكون مفتوحة نسبياً (مقارنة) لـ Y بدون أن تكون مفتوحة نسبياً لـ X. إذن فإن خاصية المجموعات المفتوحة تعتمد على الفضاء الذي تشغله E. ونفس الشيء ينطبق على خاصية المجموعات المغلقة.

سوف نلاحظ الآن، بأن التعامل مع التراص أفضل من ذلك، لتكن المبرهنة القادمة، لِنقُل، مؤقتاً بأن، K مجموعة متراصة بالنسبة (مقارنة) لـ X إذا تحققت متطلبات التعريف ٢، ٣٢.

٢، ٣٣ مبرهنة: *لنفترض أن $K \subset Y \subset X$. عندها فإن K متراصة نسبياً لـ X إذا وفقط إذا كانت K متراصة نسبياً (مقارنة) لـ Y.*

بفضل هذه المبرهنة نستطيع، في حالات متعددة، أن نعتبر المجموعات المتراصة فضاءآت مترية بحد ذاتها، بدون أن نعير أية أهميه إلى أي فضاء مشغول. وبصوره خاصة فإنه، وعلى الرغم من الحديث عن *الفضاءآت المفتوحة* ***open spaces***، أو *الفضاءآت المغلقة* ***closed spaces*** (كل فضاء متري X هو مجموعة جزئيه مفتوحة على نفسها، وهو مجموعة جزئيه مغلقة على نفسها)، يعطي مفهوماً ضيقاً ولكنه من المفيد التحدث عن الفضاءآت المترية المتراصة **compact metric**.

البرهان: لنفترض أن K متراصة نسبياً لـ X، ولتكن $\{V_\alpha\}$ طائفة المجموعات، مفتوحة نسبياً لـ Y بحيث $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. استناد اً للمبرهنة ٢، ٣٠، هنالك مجموعات G_α، مفتوحة نسبياً لـ X، بحيث $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$، لكل α ؛وبما أن K متراصة نسبياً لـ X، فإن

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \qquad (٢٢)$$

لبعض الخيارات من العديد من الأدلة المنتهية $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. بما أن $K \subset Y$، فإن (٢٢) تدل على أن

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \quad . \qquad (٢٣)$$

إن هذا يبرهن على أن K متراصة نسبياً لـــ Y.

وبالعكس، لنفترض أن K متراصة نسبياً لـــ Y، لتكن $\{G_\alpha\}$ طائفة المجموعات الجزئية المفتوحة لـــ X التي تغطي K، ونضع $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. عندها فإن (٢٣) سوف تتحقق لبعض الخيارات من $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$؛ وبما أن $V_\alpha \subset G_\alpha$، فإن (٢٣) تدل على (٢٢). أن هذا يكمل البرهان.

٢، ٣٤ مبرهنة: *المجموعات الجزئية المتراصة للفضاءآت المترية تكون مغلقة.*

البرهان: لتكن K مجموعة جزئيه متراصة للفضاء المتري X. سوف نبرهن على أن المتمم لـــ K يكون مجموعة جزئية مفتوحة لـــ X.

لنفترض أن $p \notin K, p \in X$. إذا كانت $q \in K$، ليكن V_q و W_q جوارين لـــ p و q ، على التوالي، وبنصف قطر اقل من $\frac{1}{2}d(p,q)$ [لاحظ التعريف ٢، ١٨(أ)] بما أن K متراصة، يوجد هنالك عدد منتهي من النقاط $q_1,\ldots,q_n$ في K بحيث $K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W$.

إذا كانت $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$، فإن يكون جوار لـــ p والذي لا يقاطع W . إذن $V \subset K^c$، ولذلك فإنp تكون نقطة داخليه لـــ K^c وهذا يبرهن المبرهنة.

٢، ٣٥مبرهنة: *المجموعات الجزئية المغلقة للمجموعات المتراصة تكون متراصة.*

البرهان: نفترض أن $F \subset K \subset X$، F مغلقة (نسبياً لـــ X)، و K متراصة. لتكن $\{V_\alpha\}$ غطاء اً مفتوحـــاً لـــ F. إذا كانت F^c محاذية adjoined لـــ $\{V_\alpha\}$، فإننا نحصل على غطاء مفتوح Ω لـــ K. بما أن K متراصة، يوجد هنالك طائفة جزئيه منتهية Φ finite subcollection لـــ Ω التي تغطي K، ومن ثم F. إذا كانت F^c عنصراً في Φ، فإننا نستطيع إخراجها من Φ ونبقى محافظين على غطاء مفتوح لـــ F. وبهذا فإننا نكون قد بينا أن الطائفة الجزئية المنتهية لـــ $\{V_\alpha\}$ تغطي F.

نتيجة: *إذا كانت F مغلقة و K متراصة، فإن $F \cap K$ متراصة.*

البرهان: تبين المبرهنتان ٢، ٢٤(ب) و ٢، ٣٤بان $F \cap K$ مغلقة ؛ بما أن $F \cap K \subset K$، فان المبرهنة ٢، ٣٥ تبين بأن $F \cap K$ متراصة.

٢، ٣٦مبرهنة: *إذا كانت $\{K_\alpha\}$ طائفة لمجموعات جزئيه متراصة للفضاء المتري X بحيث أن التقاطع لكل طائفة جزئيه منتهية لـــ $\{K_\alpha\}$ غير خالية، فإن $\bigcap K_\alpha$ يكون غير خالي.*

البرهان: نحدد K_1 كأحد أعضاء $\{K_\alpha\}$ ونضع $G_\alpha = K_\alpha^c$. نفترض انه لا توجد نقطة لـــ K_1 تعود إلى كل K_α. عندها فإن المجموعات G_α تشكل غطاء مفتوحاً لـــ K_1 ؛ وبما أن K_1 متراصة، فيوجد هنالك عدد منتهي من الأدلة $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ بحيث $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. ولكن هذا يعني أن

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

خالية، وهذا يناقض افتراضنا.

نتيجة: *إذا كانت $\{K_n\}$ متتالية لمجموعات متراصة غير خالية بحيث* $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$، *عندها فإن $\bigcap_1^\infty K_n$ غير خالية.*

٢، ٣٧ مبرهنة: *إذا كانت E مجموعة جزئيه لانهائية لمجموعه متراصة K، فإن E تمتلك غاية في K.*

البرهان: إذا لم تكن هنالك أية نقطة في K هي نقطة غاية لـــ E، فإن كل $q \in K$ ستمتلك جوار V_q يحتوي على نقطة واحدة من E على الأكثر (بالتحديد، q، إذا كانت $q \in E$). من الواضح أنه لا توجد أية طائفة جزئيه منتهية لـــ $\{V_q\}$ تستطيع أن تغطي E ؛ ونفس الشيء يصح على K، لأن $E \subset K$. أن هذا يناقض التراص في K.

٢، ٣٨ مبرهنة: *إذا كانت $\{I_n\}$ متتالية من الفترات (الفواصل) intervals في R^1، بحيث* $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$، *فإن $\bigcap_1^\infty I_n$ تكون غير خالية.*

البرهان: إذا كانت $I_n = [a_n, b_n]$، لتكن E المجموعة التي تضم كل a_n. عندها فإن E

تكون غير خالية ومقيدة من الأعلى (من قبل b_1). لتكن x هي أصغر قيمة عظمى لـ sup of E. إذا كان m و n أعداد صحيحه موجبة، فإن

$$a_n \le a_{m+n} \le b_{m+n} \le b_m$$

بحيث $x \le b_m$ لكل m. حيث أنه من الواضح أن $a_m \le x$، فإن $x \in I_m$ لـ $m = 1,2,3,\ldots$.

٢، ٣٩ مبرهنة: *لتكن K عدداً صحيحـاً موجباً. إذا كانت $\{I_n\}$ متتالية للخلايا $-k$ بحيث $I_n \supset I_{n+1}$ (n=1,2,3, . . .)، عندها فإن $\bigcap_1^\infty I_n$ غير خالية.*

البرهان: لتكن I_n تتألف من جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)$ بحيث

$$a_{n,j} \le x_j \le b_{n,j} \quad (1 \le j \le k \ ; \ n = 1,2,3,\ldots),$$

نضع $I_{n,j} = \left[a_{n,j}, b_{n,j}\right]$. لكل j ، تحقق المتتالية $\left\{I_{n,j}\right\}$ فرضيات المبرهنة٢، ٣٨. إذن يوجد هنالك أعدادا حقيقية $(1 \le j \le k)$ x^*_j بحيث

$$(n = 1,2,3,\ldots \ ;1 \le j \le k) \qquad a_{n,j} \le x^*_j \le b_{n,j} \ .$$

بوضع $\mathbf{x}^* = (x^*_1,\ldots,x^*_k)$، نلاحظ بأن $\mathbf{x}^* \in I_n$ لـ $n = 1,2,3,\ldots$ وهذا يبرهن المبرهنة.

٢، ٤٠ مبرهنة: *كل خليه $-k$ تكون متراصة.*

البرهان: لتكن I الخلية $-k$، التي تتألف من جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)$ بحيث $a_j \le x_j \le b_j$ $(1 \le j \le k)$. نضع

$$\delta = \left\{\sum_1^k (b_j - a_j)^2\right\}^{1/2}$$

عندها فإن $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \delta$، إذا كانت $\mathbf{x} \in I, \ \mathbf{y} \in I$.

ولكي نتوصل إلى تناقض، نفترض، أن هنالك غطاءاً مفتوحاً $\{G_\alpha\}$ لـ I لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى لـ I. نضع $c_j = (a_j + b_j)/2$. عندها فإن الفترتين $\left[a_j, c_j\right]$, $\left[c_j, b_j\right]$ تحددان Q_i من الخلايا-k عددها 2^k و التي اتحادها I. على الأقل واحد من هذه المجموعات Q_i، لنسميه I_1، لا يمكن تغطيته بأي مجموعة جزئيه منتهية لـ $\{G_\alpha\}$ (وإلا فإن I يمكن تغطيتها بهذه الطريقة). بعد ذلك نقوم بتجزئة I_1 ونكمل الخطوات.

سوف نحصل على متتالية $\{I_n\}$ تمتلك الخواص الآتية :

(أ) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ ؛

(ب) لا تغطى I_n بأي مجموعة جزئيه منتهية لـــ $\{G_\alpha\}$ ؛

(ج) إذا كانت $\mathbf{x} \in I_n$ و $\mathbf{y} \in I_n$ ، فإن $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 2^{-n}\delta$.

استناداً إلى (أ) والمبرهنة ٢، ٣٩، هنالك نقطة $\mathbf{x}^*$ تقع في كل I_n. لبعض α ، $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. بما أن G_α مفتوحة، هنالك $r > 0$ بحيث $|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*| < r$ يؤدي إلى أن $\mathbf{y} \in G_\alpha$. إذا كانت n كبيره لدرجه أن $2^{-n}\delta < r$ (يوجد هنالك مثل هذه الـــ n، خلاف ذلك يؤدي إلى أن $2^n \le \delta / r$ لجميع الأعداد الصحيحة n، والتي لا قيمة لها لأن $\mathbf{R}$ ارخميديسي)، عندها فإن (ج) تؤدي إلى أن $I_n \subset G_\alpha$ ، الأمر الذي يناقض (ب). وهذا يكمل البرهان.

إن المكافئ لـــ (أ) و(ب) في المبرهنة القادمة يعرف بنظرية هيني- بوريل (Heine- Borel).

٢، ٤١ مبرهنة: *إذا امتلكت المجموعة E في $\mathbf{R}^k$ لأحد الخواص الثلاثة الآتية، فإنها تمتلك الخاصيتين الأخريين:*

(أ) أن تكون E مغلقة ومقيدة.

(ب) أن تكون E متراصة.

(ج) كل مجموعة جزئيه لانهائية لـــ E تمتلك نقطة غاية في E.

البرهان: إذا تحققت (أ)، فإن $E \subset I$ لبعض خلية k- I، وتُستنتج (ب) من المبرهنتين ٢، ٤٠ و ٢، ٣٥. المبرهنة ٢، ٣٧ تبين بأن (ب) تؤدي إلى (ج). وبقي علينا أن نبرهن أن (ج) تؤدي إلى (أ).

إذا كانت E غير *مقيدة* فإن E تحتوي على النقاط $\mathbf{x}_n$ بحيث

$$(n = 1,2,3,\ldots) \qquad |\mathbf{x}_n| > n$$

إن المجموعة S التي تحتوي على هذه النقاط $\mathbf{x}_n$ هي مجموعة لانهائية ومن الواضح أنها لا تمتلك نقطة غاية في $\mathbf{R}^k$، لذلك فهي لا تحتوي شيئاً في E. لذلك فإن (ج) تؤدي إلى أن E تكون *مقيدة*.

إذا لم تكن E مغلقة، فإن هنالك نقطة $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^k$ والتي هي نقطة غاية لـــ E ولكنها ليست نقطة في E.

لـــ $n = 1,2,3, \ldots$، هنالك نقاط $\mathbf{x}_n \in E$ بحيث $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. لتكن S المجموعة التي

تضم هذه النقاط $\mathbf{x}_n$. عندها فإن S تكون لانهائية (وإلا فإن $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ ستمتلك قيمه موجبة ثابتة، لعدد لانهائي من n)، S تمتلك $\mathbf{x}_0$ كنقطة غاية، ولا تمتلك نقطة غاية أخرى في. $\mathbf{R}^k$ لذلك إذا كان $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$ $\mathbf{R}^k$، فإن

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$$

$$\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$$

لجميع n المنتهية ؛ هذا يبين بأن $\mathbf{y}$ ليست نقطة غاية لـــ S (المبرهنة٢، ٢٠).

لذلك فإن S لا تمتلك نقطة غاية في E ؛ إذن يجب أن تكون E مغلقة إذا تحقق (ج).

يجب أن نشير، في هذه المرحلة، إلى أن (ب) و(ج) متكافئين في أي فضاء متري (التمرين ٢٦) وبأن (أ) لا تؤدي، بصورة عامة، إلى (ب)و(ج). الأمثلة على ذلك متوفرة في التمرين ١٦ والفضاء $\mathcal{L}^2$ ، الذي ستتم مناقشته في الفصل ١١.

٢،٤٢ مبرهنة (ويرستراس) Weierstrass: *كل مجموعة جزئية غير نهائية مقيدة في $\mathbf{R}^k$ تمتلك نقطة غاية في $\mathbf{R}^k$.*

البرهان: لكونها *مقيدة*، فإن المجموعة E موضوعة البحث هي مجموعة جزئيه من الخلية k – $I \subset \mathbf{R}^k$. استنادا إلى المبرهنة ٢، ٤٠، فإن I متراصة ولذلك فإن E تمتلك نقطة غاية في I، استنادا إلى المبرهنة ٢، ٣٧.

المجموعات التامة Perfect Sets

٢، ٤٣ مبرهنة: *لتكن P مجموعة تامة غير خالية في $\mathbf{R}^k$. عندها فإن P تكون غير قابلة للعد.*

البرهان: بما أن P تمتلك نقاط غاية، فإنها يجب أن تكون لانهائية. لنفترض أن P قابله للعد، ونرمز إلى نقاط P بـــ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$. سوف نقوم بتشكيل متتالية $\{V_n\}$ من الجوار، كالآتي.

لتكن V_1 أي جوار لـــ $\mathbf{x}_1$. إذا كانت V_1 تتألف من جميع $y \in \mathbf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| < r$، فإن الانغلاق $\overline{V_1}$ لـــ V_1 هو المجموعة التي تضم جميع $y \in \mathbf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \leq r$.

نفترض أنه قد تم تشكيل V_n، بحيث $V_n \cap P$ غير خالية. بما أن كل نقطة من نقاط P

هي نقطة غاية لـــ P، فإنه يوجد هنالك جوار V_{n+1} بحيث (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$، (ii) $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$، (iii) $V_{n+1} \cap P$ غير خالية. إستادا إلى (i ii)، فإن V_{n+1} تُحقق فرضياتنا للاستقراء، حيث بإمكاننا الاستمرار بالتشكيل.

نضع $K_n = \overline{V}_n \cap P$. بما أن $\overline{V}_n$ مغلقة ومقيدة، فإن $\overline{V}_n$ تكون متراصة. بما أن $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$، فلا توجد هنالك نقطة في P تقع في $\bigcap_1^\infty K_n$. بما أن $K_n \subset P$، فإن هذا يعني بأن $\bigcap_1^\infty K_n$ خالية. ولكن كل K_n هي غير خالية، استنادا إلى (iiii)، و $K_n \supset K_{n+1}$، استنادا إلى (i) ؛ وهذا يناقض نتيجة المبرهنة ٢، ٣٦.

نتيجة: *كل فتره* $[a , b]$ $(a < b)$ *تكون غير قابلة للعد. وعلى وجه الخصوص، فإن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية هي غير قابلة للعد.*

٢، ٤٤ المجموعة كانتور The Cantor set: تبين المجموعة التي سنقدمها الآن أنه يوجد هنالك مجموعات تامة في $\mathbf{R}^1$ لا تحتوي على أية قطعة.

لتكن E_0 الفترة $[0 , 1]$. ننتزع القطعة $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$، ولتكن E_1 الاتحاد للفترتين

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \left[\frac{2}{3}, 1\right] .$$

ننتزع الأثلاث المتوسطة من هذين الفترتين، ولتكن E_2 الاتحاد للفترات

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right] .$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة، فإننا نحصل على متتالية من المجموعات المتراصة E_n، بحيث

(أ) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ ؛

(ب) E_n هو الاتحاد لـــ 2^n من الفترات، طول كل واحدة منها 3^{-n}.

تسمى المجموعة

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

مجموعة كانتور cantor set. من الواضح أن P تكون متراصة، وتبين المبرهنة ٢، ٣٦ أن P ليست خالية.

لا تمتلك أي قطعه على شكل

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \qquad (٢٤)$$

نقاط مشتركة مع P، حيث k و m أعداد صحيحه موجبة. بما أن كل قطعه (α , β) تحتوي على قطعه على شكل (٢٤)، إذا كان

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

فإن P لا تحتوي على أي قطعة.

ولكي نبين أن P تامة، يكفي بأن نبين أن P لا تحتوي على نقطة منعزلة. لتكن $x \in P$، ولتكن S أي قطعه تحتوي على x. لتكن I_n الفترة لـــ E_n التي تحتوي على x. نختار n بحيث يكون كبير بما فيه الكفاية، ليكون $I_n \subset S$. لتكن x_n النقطة النهائية لـــ **endpoint of** I_n بحيث، $x_n \neq x$.

ينتج عن بناء P هذا أن $x_n \in P$. إذن x هي نقطة غاية لـــ P، و P تامة.

إن واحدة من اكثر الخواص أهميه لمجموعة كانتور هي إنها تقدم لنا مثالاً على مجموعة غير قابله للعد بقياس صفري **measure zero** (سوف نناقش مفهوم القياس في الفصل الحادي عشر).

المجموعات المترابطة Connected Sets

٢، ٤٥ تعريف: يقال للمجموعتين الجزئيتين A و B للفضاء المتري X بأنهما *متباعدتان* *separated* إذا كان كل من $A\cap\overline{B}$ & $\overline{A}\cap B$ خالية. بكلمة أخرى، إذا لم تكن هنالك أية نقطة من A تقع في انغلاق B وأية نقطة من B تقع في انغلاق A.

يقال للمجموعة $E \subset X$ بأنها *مترابطة* *connected* إذا لم تكن E اتحاداً لمجموعتين متباعدتين غير خاليتين.

٢، ٤٦ ملاحظة: من الطبيعي أن المجموعات المتباعدة منفصلة، ولكن ليس بالضرورة أن تكون المجاميع المنفصلة متباعدة. على سبيل المثال، فإن الفترة $[0 , 1]$ و القطعة $(1 , 2)$ ليسا متباعدتين، حيث أن 1 هو نقطة غاية لـــ $(1 , 2)$. ولكن القطعتين $(0 , 1)$ و $(1 ,2)$ متباعدان.

المجموعات المترابطة للخط المستقيم تمتلك تركيبة بسيطة خاصة بها :

٢، ٤٧ مبرهنة: *تكون المجموعة الجزئية E للخط الحقيقي $\mathbf{R}^1$ مترابطة إذا وإذا فقط كانت تمتلك الخاصية الآتية : إذا كانت $x \in E$, $y \in E$ و $x < z < y$ فإن $z \in E$*

البرهان: إذا كان هنالك $x \in E, y \in E$، ولبعض $z \in (x,y)$ بحيث $z \notin E$ ، فإن $E = A_z \bigcup B_z$ حيث

$$A_z = E \bigcap (-\infty, z), \qquad B_z = E \bigcap (z, \infty) \ .$$

بما أن $x \in A_z$ و $y \in B_z$ ، A و B غير خاليتين. بما أن $A_z \subset (-\infty, z)$ و $B_z \subset (z, \infty)$، فإنهما متباعدتان، أذن فإن E ليست مترابطة.

ولكي نبرهن العكس، نفترض أن E ليست مترابطة. عندها يوجد هنالك مجموعتين متباعدتين غير خاليتين A و B بحيث $A \bigcup B = E$. نختار $x \in A, y \in B$، ونفترض أن $x < y$ (بدون أي خسارة في العمومية). نعرف

$$z = \sup(A \bigcap [x, y]) \ .$$

استناداً للمبرهنة ٢، ٢٨فإن $z \in \overline{A}$; حيث $z \notin B$. وعلى وجه الخصوص، $x \le z < y$.

إذا كانت $z \notin A$، فإن ذلك يؤدي إلى أن $x < z < y$ وان $z \notin E$.

إذا كان $z \in A$ ، فإن $z \notin \overline{B}$، إذن يوجد هنالك z_1 بحيث $z < z_1 < y$ و $z_1 \notin B$. عندها فإن $x < z_1 < y$ و $z_1 \notin E$.

تمارين EXERCISES

١- برهن على أن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئيه لكل مجموعة.

٢- يقال للعدد العقدي z بأنه *جبري algebraic* إذا كان هنالك أعداد صحيحه $a_0,\ldots,a_n$، ليست جميعها صفراً، بحيث

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \ .$$

برهن على أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الجبرية تكون قابله للعد. *تلميح* : لكل عدد صحيح موجب N هنالك عدد منتهى فقط من المعادلات بحيث

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N \ .$$

٣- برهن على أنه يوجد أعداد حقيقية ليست جبرية.

٤- هل أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الغير نسبيه، قابله للعد ؟

٥- كون مجموعة مقيدة من الأعداد الحقيقية تمتلك ثلاث نقاط غاية فقط.

٦- لتكن E' المجموعة التي تضم جميع نقاط الغاية بمجموعه E. برهن على أن E' مغلقة. برهن على أن E و $\overline{E}$ تمتلكان نفس نقاط الغاية. (تذكر أن $\overline{E} = E \cup E'$). هل أن E و E' تمتلكان دائماً نفس نقاط الغاية ؟

٧- لتكن $A_1, A_2, A_3, \ldots$ مجاميع جزئية من الفضاء المتري.

(أ) إذا كانت $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$، برهن على أن $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$، لـ $n = 1,2,3,\ldots$.

(ب) إذا كانت $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، برهن على أن $\overline{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$. بَين، بمثال، على أن هذا التضمين ممكن أن يكون تاماً.

٨- هل أن كل نقطة لكل مجموعة مفتوحة $E \subset \mathbf{R}^2$ هي نقطة غاية لـ E ؟ أجب على نفس السؤال بالنسبة للمجموعات المغلقة في $\mathbf{R}^2$.

٩- لتكن E^0 ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع النقاط الداخلية للمجموعة E. [راجع التعريف ٢، ١٨ (هـ) ؛ E^0 تسمى *الجزء الداخلي* لـ *interior of E*].

(أ) برهن على أن E^0 تكن مفتوحة دائماً.

(ب) برهن على أن E تكون مفتوحة دائماً إذا وإذا فقط كانت $E^0 = E$.

(ج) إذا كانت $G \subset E$ و G مفتوحة، برهن على أن $G \subset E^0$.

(ء) برهن على أن المتمم لـــ E^0 هو الانغلاق لمتمم E.

(هـــ) هل تمتلك E و $\overline{E}$ دائماً نفس الأجزاء الداخلية؟

(و) هل تمتلك E و E^0 دائماً نفس الانغلاقات؟

١٠- لتكن X مجموعة لانهائية. بالنسبة لـــ $p \in X$ و $q \in X$، عرف

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & (\text{إذا كانت } p \neq q) \\ 0 & (\text{إذا كانت } p = q) \end{cases}$$

برهن على أن هذا متريا. أياً من المجموعات الجزئية الناتجة من الفضاء المتري مفتوحة ؟ أيا منها مغلقة ؟ أيا منها متراصة ؟

١١- إذا كانت $x \in \mathbf{R}^1$ و $y \in \mathbf{R}^1$، نعرف

$$d_1(x,y) = (x-y)^2,$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$
$$d_3 = |x^2 - y^2|,$$
$$d_4 = |x - 2y|,$$
$$d_5 = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

بين، فيما إذا كان أي من هؤلاء، متريا أم لا.

١٢- لتكن $K \subset \mathbf{R}^1$ تتألف من 0 والأعداد $1/n$، لـــ $n = 1,2,3,\ldots$. برهن على أن K متراصة من التعريف مباشرة. (بدون استخدام نظرية هيني -بوريل).

١٣- كون مجموعة متراصة للأعداد الحقيقية التي تكّون نقاط الغاية فيها مجموعة قابله للعد.

١٤- قدم مثالاً للقطعة $(0,1)$ غطاءها المفتوح لا يمتلك غطاءاً جزئياً منتهياً.

١٥- بين أن المبرهنة ٢، ٣٦ ونتيجتها تصبح غير صحيحة (في $\mathbf{R}^1$، على سبيل المثال) إذا استبدلت عبارة "متراصة" بعبارة "مغلقة" أو بـــ "مقيدة".

١٦- اعتبر $\mathbf{Q}$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية، فضاءاً متريا، بحيث $d(p,q) = |p-q|$. لتكن E المجموعة التي تضم جميع النقاط $p \in \mathbf{Q}$. بحيث $2 < p^2 < 3$. بين أن E مغلقة ومقيدة في $\mathbf{Q}$، ولكنها ليست متراصة. هل أن E مفتوحة في $\mathbf{Q}$ ؟

١٧- لتكن E المجموعة التي تضم جميع $x \in [0,1]$ والتي مفكوكها العشري يحتوي على الأرقام ٤و٧ فقط. هل أن E قابله للعد ؟ هل أن E كثيفة في $[0,1]$ ؟ هل أن E متراصة ؟ هل أن E تامة ؟.

١٨- هل توجد مجموعة تامة غير خالية في $\mathbf{R}^1$ لا تحتوي على أي عدد نسبي ؟.

١٩- (أ) إذا كانت A و B مجموعتين مغلقتين منفصلتين في بعض الفضاء المتري X، برهن على انهما متباعدتان.

(ب) برهن الشيء نفسه بالنسبة لمجموعتين مفتوحتين منفصلتين.

(ج) حدد $\delta > 0, p \in X$، عرفت A لتكون المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \delta$، عرفت B بنفس الطريقة، بوضع $<$ بدلاً من $>$. برهن على A وB متباعدتان.

(د) برهن على أن كل فضاء متري مترابط يحتوي على نقطتين على الأقل غير قابله للعد.
تلميح : استخدم (ج).

٢٠- هل أن الانغلاقات ومجموعة النقاط الداخلية للمجموعات المترابطة، مترابطة دائماً ؟ (ركز على المجموعات الجزئية لـ $\mathbf{R}^2$).

٢١- لتكن A وB مجموعات جزئيه متباعدة لبعض $\mathbf{R}^k$، افترض أن $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B$، وعرف

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

بالنسبة لـ $t \in \mathbf{R}^1$. ضع $A_0 = \mathbf{p}^{-1}(A)$, $B_0 = \mathbf{p}^{-1}(B)$. [لذلك فإن $t \in A_0$ إذا وإذا فقط كانت $\mathbf{p}(t) \in A$].

(أ) برهن على أن A_0 و B_0 تكونان مجموعتين جزئيتين متباعدتين لـ $\mathbf{R}^1$.

(ب) برهن على انه يوجد هنالك $t_0 \in (0,1)$. بحيث $\mathbf{p}(t_0) \notin A \cup B$

(ج) برهن على أن كل مجموعة جزئيه محدبة لـ $\mathbf{R}^k$ تكون مترابطة.

٢٢- يسمى الفضاء المتري *قابل للانفصال separable* إذا كان يحتوي على مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد. بين أن $\mathbf{R}^k$ يكون قابل للانفصال. *تلميح* : لاحظ مجموعة النقاط التي تمتلك إحداثيات نسبيه فقط.

٢٣- تسمى *الطائفة collection* $\{V_\alpha\}$ للمجموعات الجزئية المفتوحة لـ X، *أساساً* لـ X *base of* إذا صح ما يلي: لكل $x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ بحيث

$x \in G$ فإن $x \in V_\alpha \subset G$ لبعض α. بكلمة أخرى، أن كل مجموعة مفتوحة في X هي الاتحاد *لطائفه جزئيه* لـــ $\{V_\alpha\}$ *subcollection of*.

برهن على أن كل فضاء متري قابل للانفصال يمتلك أساسا قابلاً للعد ***countable*** **base**. *تلميح* : خذ جميع الجوارات التي أنصاف أقطارها أعداد نسبيه ومركزها في بعض المجموعات الجزئية الكثيفة لـــ X.

٢٤- لتكن X فضاءاً مترياً تمتلك فيها كل مجموعة جزئيه لانهائية نقطة غاية. برهن على أن X قابل للانفصال. تلميح: حدد $\delta > 0$، واختار $x_1 \in X$. بعد أن تختار $x_1,\ldots,x_j \in X$، اختار $x_{j+1} \in X$، إذا كان ممكناً، بحيث $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$ بالنسبة لـــ $i = 1,\ldots,j$. بين أن هذه الخطوات يجب أن تتوقف بعد عدد محدد من الخطوات، و لذلك فإن بالإمكان تغطية X بعدد منتهي من الجوارات يكون نصف قطرها δ . خذ $\delta = 1/n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$، ولاحظ مراكز الجوارات المماثلة.

٢٥- برهن على أن كل فضاء متري متراص K يمتلك أساساً قابل للعد، وبأن K تبعاً لذلك يكون قابل للانفصال. *تلميح* : لكل عدد صحيح موجب n، يوجد هنالك العديد من الجوارات المحددة بنصف قطر $1/n$ والتي يغطي اتحادها K.

٢٦- لتكن X فضاءاً مترياً تمتلك فيه كل مجموعة جزئيه لانهائية نقطة غاية. برهن على أن X متراصة. *تلميح* : استناداً إلى التمرينين ٢٣و٢٤، فإن X تمتلك أساسا قابلاً للعد. يؤدي ذلك إلى انه كل غطاء مفتوح لـــ X يمتلك غطاء جزئي قابلا للعد ***countable*** **subcover** n =1,2,3, . $\{G_n\}$. إذا لم يكن هنالك عدد منتهي من الطوائف الجزئية لـــ $\{G_n\}$ تغطي X، فإن المتمم F_n لـــ $G_1 \cup \cdots \cup G_n$ يكون غير خالي لكل n، ولكن $\bigcap F_n$ يكون خالي. إذا كانت E مجموعة تحتوي على نقطة من كل F_n، لاحظ نقطة الغاية لـــ E، ونصل إلى تناقض.

٢٧- حدد النقطة p في الفضاء المتري X لتكون *نقطة مركزة* ***condensation point*** للمجموعة $E \subset X$ إذا كان كل جوار لـــ p يحتوي على عدة نقاط من E غير قابلة للعـــد.

افترض أن $E \subset \mathbf{R}^k$، E قابله للعد، ولتكن المجموعة P التي تضم جميع النقاط المركزة

لـــ E. برهن على أن P تكون تامة وبأنه على الأكثر هنالك العديد من النقاط القابلة للعد من E لا تقع في P. بكلمة أخرى، بين أن $P^c \cap E$ تكون قابله للعد على الأكثر.

تلميح : لتكن $\{V_n\}$ أساسا قابلاً للعد لـــ $\mathbf{R}^k$، لتكن W اتحاد الـــ V_n التي يكون فيها $E \cap V_n$ على الأكثر قابلاً للعد، وبين أن $P = W^c$.

٢٨- برهن على أن كل مجموعة مغلقة في فضاء متري متباعد تكون الاتحاد لمجموعه تامة (من الجائز أن تكون فارغة) مع مجموعة قابله للعد على الأكثر. (نتيجة: كل مجموعة مغلقة قابله للعد في $\mathbf{R}^1$ تمتلك نقاطاً منعزلة).

تلميح : استخدم التمرين ٢٧.

٢٩- برهن على أن كل مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^1$ تكون الاتحاد لمجموعه من القطع المنفصلة القابلة للعد على الأكثر. تلميح : استخدم التمرين ٢٢.

٣٠- قلد برهان المبرهنة ٢،٤٣ للحصول على النتيجة الآتية :

إذا كانت $\mathbf{R}^k = \bigcup_1^\infty F_n$، حيث أن كل F_n هي مجموعة جزئيه مغلقة لـــ $\mathbf{R}^k$، فإن هنالك على الأقل F_n واحدة تمتلك جزءاً داخلياً غير خالي.

عبارة مماثلة :

إذا كانت G_n مجموعة جزئيه مفتوحة مركزة لـــ $\mathbf{R}^k$، بالنسبة لـــ n =1,2,3, . . . ، فإن $\bigcap_1^\infty G_n$ لا يكون خالياً (في الحقيقة، انه كثيف في $\mathbf{R}^k$).

(أن هذا يعتبر حاله خاصة من مبرهنة باير ؛ راجع التمرين ٢٢، الفصل الثالث بالنسبة للحالة العامة)

الفصل الثالث

المتتاليات والمتسلسلات العددية

- المتتاليات المتقاربة
- اللواحق (المتتاليات الجزئية)
- متتاليات كوشى
- الغايات العليا والسفلى
- بعض المتتاليات (المتتابعات) الخاصة
- المتسلسلات
- متسلسلات الحدود الغير سالبة
- العدد e
- الاختبارين الجذري والنسبي
- متسلسلات القوى
- الجمع بالتجزئة (الأجزاء)
- التقارب المطلق
- جمع وضرب المتسلسلات
- إعادة الترتيب
- تمارين

الفصل الثالث
المتتاليات والمتسلسلات العددية
Numerical Sequences And Series

كما يشير العنوان، فإن هذا الفصل يتناول بصورة رئيسية المتتاليات والمتسلسلات للأعداد العقدية. ويتناول الفصل أيضاً الحقائق الأساسية حول التقارب، التي يتم شرحها بإطار أكثر عمومية. لذلك فإن البنود الثلاثة الأولى من الفصل ستتناول في الفضاءآت الإقليدية، أو حتى في الفضاءآت المترية.

المتتاليات المتقاربة Convergent Sequences

٣، ١ تعريف: يقال للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري **X** بأنها **تتقارب converge** إذا كانت هنالك نقطه $p \in X$ تمتلك الخاصية الآتية: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك **عدد صحيح N** بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. (**d** هنا ترمز إلى المسافة في **X**).

في هذه الحالة نقول أيضاً أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p، أو أن p هي الغاية لـ $\{p_n\}$ [راجع المبرهنة ٣، ٢ (ب)]، ونكتب أن $p_n \to p$، أو

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \ .$$

يقال لـ $\{p_n\}$ بأنها *تتباعد diverge*، إذا كانت لا تتقارب.

من المفيد أن نشير هنا إلى أن تعريفنا للـ "متتاليات المتقاربة" *"convergent sequence"* لا يعتمد فقط على $\{p_n\}$ ولكن أيضاً على X ؛على سبيل المثال، المتتالية $\{1/n\}$ متقاربة في $\mathbf{R}^1$ (إلى 0)، لكن التقارب أخفق في المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الموجبة [حيث $d(x,y) = |x-y|$]. في الحالة التي قد يكتنفها بعض الغموض، بإمكاننا أن نكون أكثر دقة بتعريف " التقارب في X " بدلاً من "التقارب".

نستذكر هنا بأن المجموعة التي تضم جميع النقاط p_n (n =1,2,3,...) هي المدى *range* لـ $\{p_n\}$. من الممكن أن يكون مدى المتتالية مجموعة منتهية، أو غير منتهية. يقال للمتتالية $\{p_n\}$ بأنها *مقيدة (محدده) bounded* إذا كان مداها مقيد.

وكأمثلة، لاحظ المتتاليات الآتية للأعداد العقدية ($X = \mathbf{R}^2$):

(أ) إذا كانت $s_n = 1/n$, فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ؛ ويكون المدى لانهائي، والمتتالية مقيدة.

(ب) إذا كانت $s_n = n^2$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ غير مقيدة، وتكون متباعدة (غير متقاربة)، وتمتلك مدى لانهائي.

(ج) إذا كانت $s_n = 1 + [(-1)^n / n]$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ تتقارب لـــ 1، وتكون مقيدة، وتمتلك مدى لانهائي.

(د) إذا كانت $s_n = i^n$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ غير متقاربة (متباعدة)، مقيدة، وتمتلك مدى منتهي.

(هـــ) إذا كانت $s_n = 1$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ ، فإن $\{s_n\}$ تتقارب لـــ 1، مقيدة، وتمتلك مدى منتهي.

نلخص الآن بعض الخواص الرئيسية للمتتالية المتقاربة في الفضاءآت المترية.

٣، ٢ مبرهنة:

لتكن $\{p_n\}$ متتالية في الفضاء متري X.

(أ) تتقارب $\{p_n\}$ إلى $p \in X$ إذا وإذا فقط كان كل جوار لـــ p يحتوي على كل النقاط ما عدا عدد منتهي من حدود $\{p_n\}$.

(ب) إذا كانت $p \in X$ ، $p' \in X$ ، وكانت $\{p_n\}$ تتقارب إلى p والى p' ، فإن $p' = p$.

(ج) إذا كانت $\{p_n\}$ تتقارب، فـــإنها تكون مقيدة.

(د) إذا كانت $E \subset X$ وكانت p نقطة غاية لـــ E، عندها يوجد هنالك متتالية $\{p_n\}$ في E بحيث $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

البرهان: (أ) لنفترض أن $p_n \to p$ ولتكن V جوار لـــ p. لبعض $\varepsilon > 0$ ، فإن الشرطين $q \in X$, $d(q,p) < \varepsilon$ يؤديان إلى $q \in V$. وبخصوص هذه الـــ ε ، يوجد هنالك N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. لذلك فإن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $p_n \in V$.

وبالعكس، لنفترض أن كل جوار لـــ p يحتوي على كل النقاط ماعدا عدد منتهى من الـــ p_n. ضع $\varepsilon > 0$ ، ولتكن V المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \varepsilon$. حسب

الافتراض، يوجد هنالك N (متعلقة بهذه الـ V) بحيث $p_n \in V$ إذا كانت $n \geq N$. لذلك فإن $d(p_n, p) < \varepsilon$ إذا كانت $n \geq N$ ؛ إذن $p_n \to p$.

(ب) لنفترض أن $\varepsilon > 0$. يوجد هنالك عددين صحيحين N , N' بحيث

$n \geq N$, يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$

$n \geq N'$. يؤدي إلى أن $d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}$

إذن، إذا كانت $n \geq \max(N, N')$، فإن

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon \ .$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإننا نستنتج بأن $d(p, p') = 0$.

(ج) لنفترض أن $p_n \to p$. يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $n > N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < 1$. نضع

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_n, p)\} \ .$$

عندها فإن $d(p_n, p) \leq r$ بالنسبة لـ $n = 1,2,3,\ldots$.

(د) لكل عدد صحيح موجب n، يوجد هنالك نقطة $p_n \in E$ بحيث $d(p_n, p) < 1/n$. وإذا أخذنا $\varepsilon > 0$، نختار N بحيث $N\varepsilon > 1$. إذا كانت $n > N$، فإن ذلك يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. إذن $p_n \to p$.

وبذلك يكون البرهان قد انتهى.

بالنسبة للمتتاليات في $\mathbf{R}^k$، نستطيع أن ندرس العلاقة بين التقارب، من جهة، والعمليات الجبرية من جهة أخرى. ندرس أولا متتاليات الأعداد العقدية.

٣، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن* $\{s_n\}$،$\{t_n\}$ *هما متتاليتان مركبتان complex sequences*، *وان* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ، $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. *عندها فإن*

(أ) $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$ ؛

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs$ ، $\lim\limits_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$ ، لأي عدد c ؛

(ج) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$ ؛

(د) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$ ، شريطة أن تكون $s_n \neq 0$ ، $(n = 1,2,3,\ldots)$ ، و $s \neq 0$.

البرهان : (أ) لنفترض أن $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عددين صحيحين N_2, N_1 بحيث

$n \geq N_1$ يؤدي إلى أن $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$،

$n \geq N_2$ يؤدي إلى أن $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$.

إذا كانت $N = \max(N_1, N_2)$, فإن $n \geq N$ تؤدي إلى

$$|(s_n + t_n) - (s+t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon \ .$$

وهذا يبرهن (أ). برهان (ب) بسيط جداً.

(ج) نستعمل المتطابقة الآتية

$$s_n\, t_n - s\, t = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s) \ . \qquad (١)$$

وإذا افترضنا أن $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عددان صحيحان N_2،N_1 بحيث

$n \geq N_1$ يؤدي إلى أن $|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$،

$n \geq N_2$ يؤدي إلى أن $|t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$.

وإذا أخذنا $N = \max(N_1, N_2)$, فإن $n \geq N$ يؤدي إلى أن

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon \text{ ،}$$

بحيث

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s)(t_n - t) = 0 \ .$$

نطبق الآن (أ) و(ب) على (١)، لنستنتج بأن

$$\lim_{n\to\infty}(s_n\, t_n - s\, t) = 0 \ .$$

(د) نختار m بحيث $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$. إذا كانت $n \geq m$، نلاحظ أن

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \qquad (n \geq m)$$

وإذا أخذنا $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح $N > m$ بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2 \varepsilon \ .$$

إذن، بالنسبة لـ $n \geq N$،

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon \ .$$

٣، ٤ مبرهنة : (أ) *نفترض أن* $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^k$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ *و*

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}) \ .$$

عندها فإن $\{\mathbf{x}_n\}$ *تتقارب إلى* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *إذا وإذا فقط كانت*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \le j \le k) \ . \qquad (٢)$$

(ب) *نفترض أن* $\{\mathbf{x}_n\}$ ، $\{\mathbf{y}_n\}$ *متتاليتان في* $\mathbf{R}^k$، $\{\beta_n\}$ *متتالية في الأعداد الحقيقية، و*

$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\beta_n \to \beta$. *عندها فإن*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta\,\mathbf{x} \quad , \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \quad , \lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \ .$$

البرهان:

(أ) إذا كانت $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ ، فإن المتباينات

$$\left|\alpha_{j,n} - \alpha_j\right| \le \left|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\right| \quad ,$$

التي تأتي مباشرة من تعريف المعيار في $\mathbf{R}^k$ ، تبين بأن (٢) تتحقق.

وبالعكس، إذا كانت (٢) تتحقق، فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد بالمقابل عدد صحيح N بحيث أن $n \ge N$ تؤدي إلى أن

$$(1 \le j \le k) \qquad \left|\alpha_{j,n} - \alpha_j\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \ .$$

إذن $n \ge N$ تؤدي إلى أن

$$\left|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\right| = \left\{\sum_{j=1}^{k} \left|\alpha_{j,n} - \alpha_j\right|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon \ ,$$

بحيث $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. وهذا يبرهن (أ).

الجزء (ب) ينتج عن (أ) والمبرهنة ٣، ٣.

المتتاليات الجزئية (اللواحق) Subsequences

٣، ٥ تعريف: لنأخذ المتتالية $\{p_n\}$، لاحظ المتتالية $\{n_k\}$ للأعداد الصحيحة الموجبة، بحيث $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. عندها فإن المتتالية $\{p_{n_i}\}$ تسمى *متتالية جزئية لـ* *subsequence of* $\{p_n\}$.

إذا كانت $\{p_{ni}\}$ تتقارب، فإن غايتها تسمى *غاية المتتالية الجزئية لـ* ***subsequential limit of*** $\{p_n\}$.

من الواضح أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p إذا وإذا فقط كانت كل متتالية جزئية لـ $\{p_n\}$ تتقارب إلى p. نترك تفاصيل البرهان إلى القارئ.

٣، ٦ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية في الفضاء المتري المتراص X، فإن بعض المتتاليات الجزئية لـ $\{p_n\}$ تتقارب إلى نقطه في X.

(ب) كل متتالية مقيدة في $\mathbf{R}^k$ تحتوي على متتالية جزئية متقاربة.

البرهان:

(أ) لتكن E المدى لـ $\{p_n\}$. إذا كانت E منتهية، فيوجد هنالك $p \in E$ ومتتالية $\{n_i\}$ بـ $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$، بحيث

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p \ .$$

من الواضح أن المتتالية الجزئية التي نحصل عليها $\{p_{ni}\}$ تتقارب إلى p.

إذا كانت E لانهائية، فإن المبرهنة ٢، ٣٧ تبين بأن E تمتلك نقطة غاية $p \in X$. نختار n_1 بحيث $d(p, p_{n_1}) < 1$. بعد أن نختار $n_1, \ldots, n_{i-1}$، نلاحظ من المبرهنة ٢، ٢٠ أن هنالك عدداً صحيحاً $n_i > n_{i-1}$ بحيث $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. عندها فإن $\{p_{n_i}\}$ تتقارب إلى p.

(ب) يستنتج ذلك من (أ)، بما أن المبرهنة ٢، ٤١ تؤدي إلى أن كل مجموعة جزئية مقيدة لـ $\mathbf{R}^k$ تقع في مجموعة جزئية متراصة $\mathbf{R}^k$.

٣، ٧ مبرهنة: *تشكل الغايات للمتتاليات الجزئية للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري X مجموعة جزئية مغلقة لـ X.*

البرهان: لتكن E^* المجموعة التي تضم جميع الغايات للمتتاليات الجزئية لـ $\{p_n\}$ ولتكن q نقطة غاية لـ E^*. أن علينا أن نبين أن $q \in E^*$.

نختار n_1 بحيث $p_{n_1} \neq q$. (إذا لم يكن هنالك مثل هذه الـ n_1، فإن E^* تمتلك نقطة واحدة فقط، ولا يوجد شيء لبرهنته). ضع $\delta = d(q, p_{n_1})$. لنفترض انه تم اختيار

$n_1,\ldots,n_{i-1}$. بما أن q نقطة غاية لـ E^*، يوجد هنالك $x \in E^*$ بحيث $d(x,q) < 2^{-i}\delta$. بما أن $x \in E^*$، يوجد هنالك $n_i > n_{i-1}$ بحيث $d(x,p_{ni}) < 2^{-i}\delta$. لذلك فإن $d(q,p_{ni}) \le 2^{1-i}\delta$ بالنسبة لـ $i = 1,2,3,\ldots$. أن هذا يُفيد بأن $\{p_{ni}\}$ تتقارب إلى q. إذن $q \in E^*$.

متتالية كوشي Cauchy Sequence

٣، ٨ تعريف: يقال للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري X بأنها متتالية كوشي إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $d(p_n,p_m) < \varepsilon$ إذا كانت $n \ge N$ و $m \ge N$.

في مناقشتنا لمتتالية كوشي، أضافه إلى الحالات الأخرى التي ستبرز في مراحل لاحقه، يحمل المفهوم الهندسي الآتي فوائداً جما.

٣، ٩ تعريف: لتكن E مجموعة جزئية لفضاء متري X، ولتكن S المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية التي على شكل $d(p,q)$, حيث $p \in E$ و $q \in E$. عندها فإن أصغر قيمة عظمى (sup)لـ S يسمى *القطر* لـ *diameter of E*.

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية في X وإذا كانت E_N تتألف من النقاط $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots,$، من الواضح من التعريفين السابقين بأن $\{p_n\}$ تكون متتالية كوشي إذا وإذا فقط كان

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} E_N = 0 .$$

٣، ١٠ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت* $\overline{E}$ *الإغلاق للمجموعة* E *في الفضاء المتري* X، *فإن*

$$\operatorname{diam} \overline{E} = \operatorname{diam} E .$$

(ب) *إذا كانت* K_n *متتالية لمجموعات متراصة في الفضاء المتري* X *بحيث* $K_n \supset K_{n+1}$ $(n= 1, 2, 3,\ldots)$.

وإذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

فإن $\bigcap_1^\infty K_n$ *تتألف من نقطه واحدة فقط.*

البرهان:

(أ) بما أن $E \subset \overline{E}$، فإنه من الواضح أن

$$\operatorname{diam} E \le \operatorname{diam} \overline{E} \ .$$

نضع $\varepsilon > 0$، ونختار $p \in \overline{E}$، $q \in \overline{E}$. من تعريف $\overline{E}$، يوجد هنالك نقطتان p'، q'، في E بحيث $d(p,p') < \varepsilon$, $d(q,q') < \varepsilon$. إذن

$$\begin{aligned} d(p,q) &\le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) \\ &< 2\varepsilon \quad + d(p',q') \le 2\varepsilon \quad + \operatorname{diam} E. \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\operatorname{diam} \overline{E} \le 2\varepsilon \quad + \operatorname{diam} E \,,$$

وبما أن ε عشوائية، فإن (أ) تكون قد برهنت.

(ب) نضع $K = \bigcap_1^\infty K_n$. استنادا للمبرهنة ٢، ٣٦، فإن K ليست خاليه. إذا كانت K تحتوي على اكثر من نقطه واحدة، عندها فإن $\operatorname{diam} K > 0$. ولكن لكل n، فإن $K_n \supset K$، لذلك فإن $\operatorname{diam} K_n \ge \operatorname{diam} K$. وهذا يناقض الافتراض بأن $\operatorname{diam} K_n \to 0$.

٣، ١١ مبرهنة:

(أ) *في أي فضاء متري X، كل متتالية متقاربة تكون متتالية كوشي.*

(ب) *إذا كانت X فضاءا متريًا متراصا وكانت $\{p_n\}$ متتالية كوشي في X، عندها فإن $\{p_n\}$ تتقارب إلى نقطه ما لـــ X.*

(ج) *في $\mathbf{R}^k$، كل متتالية كوشي تتقارب.*

ملاحظة:

أن الفرق بين تعريف الاقتراب وتعريف متتالية كوشي هوان الغاية تستخدم بشكل ظاهر في الأول، ولكن ليس في الثاني. لذلك فإن المبرهنة ٣، ١١ (ب) قد تمكننا من أن نقرر فيما إذا كانت متتالية معينه تتقارب أم لا بدون معرفة الغاية التي قد تتقارب إليها.

أن الحقيقة (المتضمنة في المبرهنة ٣، ١١) القاضية بأن المتتالية تتقارب في $\mathbf{R}^k$ إذا وإذا فقط كانت متتالية كوشي يطلق عليها عادة *قاعدة (مقياس) كوشي* *Cauchy criterion* للاقتراب.

البرهان:

(أ) إذا كانت $p_n \to p$ وكانت $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد أ صحيحاً N بحيث $d(p,p_n) < \varepsilon$ لجميع $n \geq N$. إذن

$$d(p_n,p_m) \leq d(p_n,p) + d(p,p_m) < 2\varepsilon$$

طالما $n \geq N$ و $m \geq N$. لذلك $\{p_n\}$ هي متتابعة كوشي.

(ب) لتكن $\{p_n\}$ متتالية كوشي في الفضاء المتراص X. بالنسبة لـ $N = 1,2,3,\ldots$، لتكن E_N المجموعة التي تتألف من $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ عندها فإن

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} \overline{E}_N = 0, \qquad (٣)$$

استناداً للتعريف ٣، ٩ والمبرهنة ٣، ١٠ (أ). ونظراً لكونها مجموعة جزئية مغلقة في لفضاء المتراص X، فإن كل $\overline{E}_N$ تكون متراصة (المبرهنة ٢، ٣٥). أيضاً $E_N \supset E_{N+1}$، بحيث $\overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$.

تبين المبرهنة ٣، ١٠ (ب) الآن بأنه هنالك $p \in X$ وحيده تقع في كل $\overline{E}_N$.

لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى (٣) يوجد هنالك عدداً صحيحاً N_0 بحيث $\operatorname{diam} \overline{E}_N < \varepsilon$ إذا كانت $N \geq N_0$. بما أن $p \in \overline{E}_N$، يؤدي ذلك إلى أن $d(p,q) < \varepsilon$ لكل $q \in \overline{E}_N$، وهذا لكل $q \in E_N$. بكلمة أخرى، فإن $d(p,p_n) < \varepsilon$ إذا كانت $n \geq N_0$. وهذا بالضبط معناه أن $p_n \to p$.

(ج) لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في $\mathbf{R}^k$. نعين E_N كما في (ب)، بوضع $\mathbf{x}_i$ محل p_i. لبعض N، يكون $\operatorname{diam} E_N < 1$. المدى لـ $\{\mathbf{x}_n\}$ هو الاتحاد لـ E_N والمجموعة المنتهية $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$.

إذن $\{\mathbf{x}_n\}$ مقيدة. بما أن كل مجموعة جزئية مقيدة لـ $\mathbf{R}^k$ تمتلك انغلاق متراص في $\mathbf{R}^k$ (المبرهنة٢، ٤١)، فإن (ج) تستنتج من (ب).

٣، ١٢ تعريف: يسمى الفضاء المتري الذي تتقارب فيه كل متتالية كوشي بـ *التام complete*.

لذلك فإن المبرهنة ٣، ١١ تفيد بأن *جميع الفضاءآت المترية المتراصة وجميع الفضاءآت الإقليدية تكون تامة*. تدل المبرهنة ٣، ١١أيضا على أن *كل مجموعة جزئية مغلقة E لفضاء متري*

تام X تكون تامة. (كل متتالية كوشي في E تكون متتالية كوشي في X، إذن فإنها تتقارب إلى بعض $p \in X$، وفي الحقيقة فإن $p \in E$ لأن E مغلقة). كمثال على الفضاء المتري الغير تام هو الفضاء لجميع الأعداد النسبية، التي تحقق $d(x,y) = |x-y|$.

تبين المبرهنة ٣، ٢ (ج) والمثال (د) للتعريف ٣، ١بأن المتتاليات المتقاربة تكون مقيدة، ولكن ليس بالضرورة أن تتقارب المتتاليات المقيدة في $\mathbf{R}^k$. على الرغم من ذلك، هنالك حاله واحدة مهمة يكون فيها الاقتراب مكافئاً للتقيد **boundedness**: يحدث هذا في المتتاليات المرتبة $\mathbf{R}^1$.

٣، ١٣تعريف: يقال للمتتالية $\{s_n\}$ للأعداد الحقيقية بأنها

(أ) *متزايدة ترتيبياً* ***monotonically increasing*** إذا كان $s_n \le s_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$؛

(ب) *متناقصة ترتيبياً* ***monotonically decreasing*** إذا كان $s_n \ge s_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$.

تتألف طبقه المتتاليات الرتيبة من المتتاليات المتزايدة والمتناقصة.

٣، ١٤مبرهنة: *افترض أن $\{s_n\}$ رتيبة. عندها فإن $\{s_n\}$ تتقارب إذا و إذا فقط كانت مقيدة.*

البرهان: لنفترض أن $s_n \le s_{n+1}$ (يكون البرهان مماثلاً في الحالة الأخرى). لتكن E المدى لـــ $\{s_n\}$. إذا كانت $\{s_n\}$ مقيدة، لتكن s القيد العلوي الأصغر لـــ E. عندها فإن

$$s_n \le s \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

لكل $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث

$$s - \varepsilon < s_N \le s,$$

لأنه خلاف ذلك ستكون $s-\varepsilon$ قيداً علوياً لـــ E. بما أن $\{s_n\}$ متزايدة، $n \ge N$ لذلك يؤدي إلى

$$s - \varepsilon < s_n \le s,$$

التي تبين أن $\{s_n\}$ تتقارب (إلى s).

العكس يأتي من المبرهنة ٣، ٢(ج).

الغايات العليا والسفلى Upper And Lower Limits

٣، ١٥ تعريف: لتكن $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية وتمتلك الخاصية الآتية: لكل M حقيقة يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n \geq M$. عندها فأننا نكتب

$$s_n \to +\infty \ .$$

بنفس الطريقة، إذا كان لكل M حقيقية يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n \leq M$، فإننا نكتب

$$s_n \to -\infty \ .$$

تجدر الإشارة إلى أننا نستخدم الآن الرمز $\to$ (الذي قدم في التعريف٣، ١) لأنواع معينة من المتتاليات المتباعدة، إضافة إلى المتتاليات المتقاربة، وبأن تعاريف الاقتراب والغاية المقدمة في التعريف ٣، ١، لم تتغير أبدا.

٣، ١٦ تعريف: لتكن $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية. لتكن E المجموعة التي تضم الأعداد x (في النظام الموسع للأعداد الحقيقية) بحيث $s_{nk} \to x$ لبعض ا لمتتاليات الجزئية $\{s_{nk}\}$. تحتوي هذه المجموعة E على جميع الغايات لمتتاليات الجزئية كما معرفة في التعريف ٣، ٥، ومن الممكن أن تحوي العددين $+\infty$, $-\infty$.

نستذكر الآن التعريفين ١، ٨و١، ٢٣ ونضع

$$s^* = \sup E \ ,$$
$$s_* = \inf E \ .$$

يسمى العددين s^* و s_*، *الغايتين العليا والسفلي* لـ *upper and lower limits of* ؛ $\{s_n\}$ ونستخدم لهما الرمزين الآتيين:

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = s^* \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = s_* \ .$$

٣، ١٧ مبرهنة: *لتكن* $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية. *لتكن* E *و* s^* *تمتلكان نفس المعنى الوارد في التعريف ٣، ١٦. عندها فإن* s^* *تمتلك الخاصيتين الآتيتين:*

(أ) $s^* \in E$.

(ب) إذا كانت $x > s^*$، فيوجد هنالك عدد صحيح N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n < x$.

إضافة لذلك، فإن s^* هو العدد الوحيد الذي يمتلك الخاصيتين (أ)، (ب).

من الطبيعي، أن تصح النتيجة المناظرة لهذه النتيجة بالنسبة لـ s_*..

البرهان:

(أ) إذا كانت $s^* = +\infty$، فإن E ليست مقيدة من الأعلى ؛ إذن $\{s_n\}$، ليست مقيدة من الأعلى، ويوجد هنالك متتالية جزئية $\{s_{nk}\}$ بحيث $s_{nk} \to +\infty$.

إذا كانت s^* عدداً حقيقياً، فإن E مقيدة من الأعلى، ويوجد هنالك غاية متتالية جزئية واحدة على الأقل، لذلك فإن (أ) تستنتج من المبرهنتين ٣، ٧و ٢، ٢٨.

إذا كانت $s^* = -\infty$ فإن E تحتوي على عنصراً واحداً، فقط هو $-\infty$، ولا يوجد هنالك غاية للمتتابعة الجزئية. إذن، لكل عدد حقيقي M، $s_n > M$ بالنسبة لعدد محدد من قيم n. على الأكثر، لذلك فإن $s_n \to -\infty$.

أن هذا يبرهن (أ) بجميع الاحتمالات.

(ب) لنفترض أن هنالك عدداً $x > s^*$ بحيث $s_n \geq x$ بالنسبة لعدد لانهائي من قيم n، في هذه الحالة، يوجد هنالك عدداً $y \in E$ بحيث $y \geq x > s^*$، الأمر الذي يناقض تعريف s^*.

لذلك فإن s^* تحقق (أ) و (ب).

لبيان الوحدانية، نفترض أن هنالك عددين، p و q، يحققان (أ) و (ب)، ونفترض أن $p < q$. نختار x بحيث $p < x < q$. بما أن p تحقق (ب)، فإن $s_n < x$ بالنسبة لـ $n \geq N$. ولكن عندها فإن q لا تستطيع أن تحقق (أ).

٣، ١٨ أمثلـــة:

(أ) لتكن $\{s_n\}$ متتالية تحتوي على جميع الأعداد النسبية. عندها فإن كل عدد حقيقي هو غاية لمتتالية جزئية، و

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty \quad ، \quad \limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty .$$

(ب) لتكن $s_n = (-1)^n / [1 + (1/n)]$. فإن

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = -1 \quad ، \quad \limsup_{n\to\infty} s_n = 1$$

(ج) بالنسبة لمتتالية القيم الحقيقية $\{s_n\}$، فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ إذا وإذا فقط كان

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s \ .$$

نختتم هذا الجزء بمبرهنة مفيدة، وبرهانها بسيط جداً:

٣، ١٩ مبرهنة: *إذا كانت $s_n \le t_n$ بالنسبة لـ $n \ge N$، حيث أن N ثابتة، فإن*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \le \liminf_{n\to\infty} t_n ,$$

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \le \limsup_{n\to\infty} t_n .$$

بعض المتتاليات الخاصة Some Special Sequences

سوف نقوم الآن باحتساب غايات بعض المتتاليات التي يتكرر حدوثها. سوف تُبنى جميع البراهين على الملاحظة الآتية: إذا كانت $0 \le x_n \le s_n$ بالنسبة لـ $n \ge N$، حيث N عدد معين، وإذا كانت $s_n \to 0$، عندها فإن $x_n \to 0$.

٣، ٢٠ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $p > 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(ب) إذا كانت $p > 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(ج) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(د) إذا كانت $p > 0$ وα عدداً حقيقياً، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(هـ) إذا كانت $|x| < 1$، فإن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

البرهان:

(أ) نأخذ $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$. (لاحظ بأننا نستخدم هنا الخاصية الارخميديسية لنظام الأعداد الحقيقية).

(ب) إذا كانت $p > 1$، نضع $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. عندها فإن $x_n > 0$، واستناداً إلي مبرهنة الحدين فإن

$$1 + nx_n \le (1 + x_n)^n = p \quad ,$$

لذلك فإن
$$0 \le x_n \le \frac{p-1}{n}.$$
إذن $x_n \to 0$. إذا كانت $p = 1$، فإن (ب) بسيطة جداً، وإذا كانت $0 < p < 1$، فنحصل على النتيجة بأخذ المعاكسات.

(ج) نضع $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$، عندها فإن $x_n \ge 0$، واستناداً لمبرهنة الحدين، فإن
$$n = (1 + x_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \ .$$
إذن
$$(n \ge 2) \qquad 0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

(د) ليكن k عدداً صحيحاً بحيث $k > 0 \ , \ k > \alpha$ بالنسبة إلى $n > 2k$
$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!} \ .$$
إذن
$$(n > 2k) \qquad 0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k} \ .$$
بما أن $\alpha - k < 0$ ، فإن $n^{\alpha-k} \to 0$ استناداً إلى (أ).

(هـ) نضع $\alpha = 0$ في (د).

المتسلسلات Series

فيما تبقى من هذا الفصل، ستكون جميع المتتاليات والمتسلسلات التي نتناولها أقيامها عقدية *complex - valued*، ما لم يرد ما ينص على عكس ذلك. التمرين ١٥ يبين توسعات بعض المبرهنات التي سنقدمها للمتسلسلات التي تكون حدودها في $\mathbf{R}^k$.

٣، ٢١ تعريف: لنأخذ المتتالية $\{a_n\}$، نستخدم الرمز
$$(p \le q) \qquad \sum_{n=p}^{q} a_n \ .$$
للإشارة إلى المجموع $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$. مع $\{a_n\}$ نرفق المتتالية $\{s_n\}$، حيث
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$
بالنسبة لـ $\{s_n\}$ فإننا نستخدم أيضا الاصطلاح الرمزي
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

أو، بصورة اكثر اختصاراً،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad . \qquad (٤)$$

نسمي الرمز (٤) *متسلسلات لانهائية* *infinite series*، أو *متسلسلات* فقط *series*. تسمى الأعداد s_n *المجموعات الجزئية* *the partial sum* للمتسلسلات. إذا كانت $\{s_n\}$ تتقارب إلى s، فإننا نقول أن *المتسلسلة تتقارب* *the series converges* ، ونكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad .$$

يسمى العدد s المجموع للمتسلسلة ؛ولكن يجب أن يفهم بشكل واضح أن s هو *الغاية لمجموع المتتاليات* *is the limit of a sequence of sums*، ولا يتم الحصول عليه بمجرد استخدام عملية الجمع.

إذا كانت $\{s_n\}$ تتباعد، فيقال أن المتسلسلة تتباعد.

في بعض الأحيان، ولتسهيل الترميز، فإننا سنتناول المتسلسلات في الشكل الآتي

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad . \qquad (٥)$$

وبين فترة وأُخرى، حين لا يكون هنالك مجالاً للغموض، أو حينما يكون التميز عديم الأهمية، فإننا سنكتب $\sum a_n$ فقط بدلاً من (٤) أو (٥).

من الواضح أن كل مبرهنة تخص المتتاليات يمكن إعادة صياغتها لتخص المتسلسلات أيضا (بوضع $a_1 = s_1$، و $a_n = s_n - s_{n-1}$ بالنسبة لـ $n > 1$)، والعكس بالعكس. على العكس من ذلك فإنه من المفيد أن ندرس كلا المفهومين. يمكن إعادة قاعدة كوشي (المبرهنة ٣، ١١) بالشكل الآتي:

٣، ٢٢مبرهنة: *تتقارب* $\sum a_n$ *إذا وإذا فقط كان لكل* $\varepsilon > 0$ *يوجد هنالك عدداً صحيحاً* N *بحيث*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \le \varepsilon \qquad (٦)$$

إذا كانت $m \ge n \ge N$.

بشكل خاص، إذا وضعنا $m = n$، فإن (٦) ستصبح

$$|a_n| \le \varepsilon \qquad (n \ge N).$$

بكلمة أخرى:

٣، ٢٣ مبرهنة: *إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

إن الشرط $a_n \to 0$ ليس كافياً لضمان اقتراب $\sum a_n$. على سبيل المثال، فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

تتباعد ؛لبرهنة ذلك راجع المبرهنة ٣، ٢٨.

المبرهنة ٣، ١٤، المتعلقة بالمتتاليات الرتيبة، وأيضا بشكل مباشر ما يماثلها للمتسلسلات.

٣، ٢٤ مبرهنة: *تتقارب المتسلسلة ذات الحدود الغير سلبية[1] إذا وإذا فقط كانت مجموعاتها الجزئية تشكل متتالية مقيدة.*

نتناول الآن مسألة اختبار الاقتراب، بطبيعة مختلفة، وهو ما يسمى "اختبار المقارنة" "comparison test".

٣، ٢٥مبرهنة:

(أ) *إذا كانت $|a_n| \le c_n$ بالنسبة لـ $n \ge N_0$، حيث N_0 عددا صامدا، وإذا كانت $\sum c_n$ تتقارب، فإن $\sum a_n$ تتقارب.*

(ب) *إذا كانت $a_n \ge d_n \ge 0$ بالنسبة لـ $n \ge N_0$، وإذا كانت $\sum d_n$ تتباعد، فإن $\sum a_n$ تتباعد.*

لاحظ بأن (ب) تنطبق فقط على المتسلسلات ذات الحدود الغير سالبه a_n.

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك $N \ge N_0$ بحيث أن $m \ge n \ge N$ إلى أن

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon,$$

استناداً إلى قاعدة كوشي. إذن

(١) إن المصطلح "الغير سلبي" "nonnegative" يشير إلى الأعداد الحقيقية .

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon ,$$

وهذا يبرهن (أ).

الخطوة الآتية، (ب) تستنتج من (أ)، لأنه إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، فإن $\sum d_n$ يجب أن تتقارب أيضا [لاحظ بأن (ب) تستنتج أيضا من المبرهنة ٣، ٢٤].

أن اختبار المقارنة مفيد جداً ؛ ولكي يتسنى لنا استخدامه بصورة صحيحة يتوجب علينا أن نتعرف على بعض المتسلسلات ذات الحدود الغير سالبة والتي تقاربها أو تباعدها معروف.

متسلسلات ذات حدود غير سالبة

Series Of Nonnegative Terms

ربما تكون المتسلسلة الهندسية *geometric series* ابسط أنواع هذه المتسلسلات.

٣، ٢٦ مبرهنة: *إذا كانت* $0 \le x < 1$، *فإن*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

إذا كانت $x \ge 1$، *فإن المتسلسلة تتباعد.*

البرهان: إذا كانت $x \ne 1$، فإن

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} .$$

ونحصل على النتيجة عندما $n \to \infty$. و إذا كانت $x = 1$، فـإننا نحصل على

$$1+1+1+\cdots,$$

التي من الواضح أنها تتباعد.

في حالات عديدة تحدث أثناء التطبيق، يتناقص ترتيب حدود المتسلسلة. الأمر الذي يكسب المبرهنة التالية لكوشي أهميه خاصة. أن الميزة المهمة لهذه المبرهنة هي أن المتتالية الجزئية " رقيقه " " thin " لـ $\{a_n\}$ هي التي تحدد تقارب أو تباعد $\sum a_n$.

٣، ٢٧ مبرهنة: *نفترض أن* $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge 0$. *عندها فإن المتسلسلة* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *تتقارب إذا وإذا فقط كانت المتسلسلة*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \qquad (٧)$$

تتقارب.

البرهان: استناداً إلى المبرهنة ٣، ٢٤، يكفي أن ندرس تقيد **boundedness** المجامع الجزئية. لتكن

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

بالنسبة لـ $n < 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\le a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

لذلك فإن

$$s_n \le t_k . \qquad (٨)$$

من جهة أخرى، إذا كانت لـ $n > 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

لذلك فإن

$$2s_n \ge t_k . \qquad (٩)$$

استناداً إلى (٨) و(٩)، فإنه إما أن تكون كلا المتتاليتين $\{s_n\}$ و$\{t_k\}$ مقيدة أو تكونا غير مقيدة. وهذا ينهي البرهان.

٣، ٢٨مبرهنة: *تتقارب* $\sum \frac{1}{n^p}$ *إذا كان* $p > 1$، *وتتباعد إذا كان* $p \le 1$.

البرهان: إذا كانت $p \le 0$، فإنه يستدل على التباعد من المبرهنة٣، ٢٣. إذا كانت $p > 0$، نطبق المبرهنة ٣، ٢٧، ا لآمر الذي يقودنا إلى المتسلسلة

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} \quad .$$

الآن، تكون $2^{1-p} < 1$ إذا وإذا فقط كان $1-p<0$، وتحصل على النتيجة بالمقارنة مع المتسلسلة الهندسية (ضع $x = 2^{1-p}$ في المبرهنة٣، ٢٦).

وكتطبيق إضافي للمبرهنة ٣، ٢٧، فإننا نبرهن:

٣، ٢٩مبرهنة: *إذا كانت $p > 1$، فإن المتسلسلة*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \qquad (١٠)$$

تتقارب ؛إذا كانت $p \le 1$، فإنها تتباعد.

ملاحظة: يرمز "$\log n$" إلى اللوغاريتم لـــ n للأساس e (قارن التمرين ٧، الفصل الأول)؛ سوف نقوم بتعريف e قريباً (لاحظ التعريف ٣، ٣٠). لقد ابتدأنا المتسلسلة بوضع $n = 2$ لأن $\log 1 = 0$.

البرهان: أن ترتيب الدالة اللوغارتمية (التي سوف ندرسها بتفصيل اكثر في الفصل الثامن) يدل على أن $\{\log n\}$ متزايدة. إذن $\{1/n \log n\}$ متناقصة، ونستطيع تطبيق المبرهنة ٣، ٢٧ لـــ (١٠)؛ وهذا يؤدي بنا إلى المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \ , \qquad (١١)$$

وتستنتج المبرهنة ٣، ٢٩ من المبرهنة ٣، ٢٨.

من الواضح أنه بالإمكان الاستمرار بهذا النهج. على سبيل المثال، فإن،

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \qquad (١٢)$$

تتباعد، في حين أن

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \qquad (١٣)$$

تتقارب.

نلاحظ الآن أن حدود المتسلسلة (١٢) تختلف قليلاً جداً عن حدود المتسلسلة (١٣). على الرغم من ذلك فإن واحدة تتباعد، والأخرى تتقارب.

إذا استمرينا في الخطوات التي أدت بنا من المبرهنة ٣،٢٨ إلى المبرهنة ٣،٢٩، وبعدها إلى (١٢) و(١٣)، نحصل على أزواج من المتسلسلات المتقاربة والمتباعدة التي تختلف حدودها حتى اقل من تلك التي في (١٢) و(١٣). فإن المرء ربما يتوصل إلى حدس مفاده أن هناك حالة محددة نوعاً ما، أو "مقيدة" يفصل بين المتسلسلات المتقاربة من جهة والمتباعدة من جهة أخرى – على الأقل فيما يخص المتسلسلات ذات المعاملات الرتيبة. مصطلح "القيد" هذا هو بالطبع مبهم وغير واضح. أن ما نريد توضيحه في هذا المجال هو: انه مهما حاولنا بجعل هذا المصطلح أكثر دقة، فإن الحدس هو حدس خاطئ. قد يساهم التمرينان ١١ (ب) و١٢ (ب) بإيضاح هذه النقطة.

إننا لا نرغب بالتعمق اكثر من ذلك في مفهوم نظرية التقارب، ونشير للقارئ إلى"نظرية وتطبيق المتسلسلات اللانهائية" لـــ نوب *" theory and Application of knopp`s Infinite Series* الفصل IX، وعلى وجه الخصوص البند ٤١.

العدد e The Number

٣، ٣٠ تعريف: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

في هذه الحالة $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ إذا كانت $n \geq 1$ و $0! = 1$.

بما أن

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

فإن المتسلسلة تتقارب، والتعريف يحمل معناً موضوعياً. في الواقع، أن المتسلسلة تتقارب بصوره سريعة جداً وتسمح لنا باحتساب e بصوره دقيقه جداً.

من الجدير بالذكر يمكننا أيضا تعريف e بواسطة طريقه أخرى تعتمد على تحليل الغاية؛ والتي يقدم البرهان فيها توضيحاً جيداً لعمليات الغايات:

٣، ٣١مبرهنة: $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

البرهان: لتكن

$$t_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad , \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} .$$

استناداً إلى مبرهنة الحدين، فإن

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

إذن $t_n \le s_n$، لذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup t_n \le e, \qquad (١٤)$$

استناداً إلى المبرهنة ٣، ١٩. الخطوة الآتية، إذا كانت $n \ge m$، فإن

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n}) .$$

لندع $n \to \infty$، ونبقي على m ثابتة. فإننا نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \inf t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} ,$$

لذلك فإن

$$s_m \le \lim_{n\to\infty} \inf t_n .$$

وبالسماح لـ $m \to \infty$، فإننا نحصل في النهاية على

$$e \le \lim_{n\to\infty} \inf t_n . \qquad (١٥)$$

والمبرهنة تستنتج من (١٤) و (١٥).

من الممكن تقدير السرعة التي تتقارب بموجبها المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}$ كالآتي: إذا كانت s_n تحمل نفس المعنى كما في أعلاه، فإن

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n}$$

لذلك فإن

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} . \qquad (١٦)$$

لذلك فإن s_{10}، على سبيل المثال، تقرب e بخطأ يبلغ أقل من 10^{-7}. أن المتباينة (١٦) تحمل أيضاً أهمية من الناحية النظرية، وذلك لكونها تمكننا من البرهنة على عدم نسبية e بسهولة كبيرة.

٣، ٣٢ مبرهنة: *تكون e غير نسبية .*

البرهان: لنفترض أن e نسبية. عندها فإن $e = p/q$، حيث أن p و q عددين صحيحين موجبين.

استنادا إلى (١٦)، فإن

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \quad . \qquad (١٧)$$

استنادا إلى افتراضنا، فإن $q!e$ هي عدد اً صحيحاً. بما أن

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

هي عدداً صحيحاً، فإننا نلاحظ أن $q!(e - s_q)$ عدداً صحيحاً أيضاً.

بما أن $q \geq 1$، فإن (١٧) تدل على وجود عدد صحيح بين 0 و 1. و بذلك فـإننا نكون قد توصلنا إلى تناقض.

في الحقيقة، فإن e ليست عدد اً جبرياً. وكبرهان بسيط على ذلك، راجع الصحيفة ٢٥ من كتاب نيفن Niven's، أو صفحة ١٧٦ من كتاب هيرستياين Herstein's، المذكور في المراجع.

الاختبارين الجذري والنسبي The Root And Ratio Tests

٣، ٣٣ مبرهنة (الاختبار الجذري) Root Test

إذا أخذنا $\sum a_n$، *ونضع* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

فإن

(أ) *إذا كانت* $\alpha < 1$ ، *فإن* $\sum a_n$ *تتقارب ؛*

(ب) *إذا كانت* $\alpha > 1$ ، *فإن* $\sum a_n$ *تتباعد ؛*

(ج) *إذا كانت* $\alpha = 1$، *فإن الاختبار لا يقدم أية معلومات.*

البرهان: إذا كانت $\alpha < 1$، بإمكاننا أن نختار β بحيث $\alpha < \beta < 1$، و N عدد اً صحيحاً بحيث

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

بالنسبة لـــ $n \geq N$ [استناداً إلى المبرهنة ٣، ١٧ (ب)]. أي أن، $n \geq N$ يدل على أن

$$|a_n| < \beta^n \ .$$

بما أن $0 < \beta < 1$، فإن $\sum \beta^n$ تتقارب. أن تقارب $\sum a_n$ ينتج الآن من اختبار المقارنة.

إذا كانت $\alpha > 1$، فإنه، استنادا إلى المبرهنة ٣، ١٧ مرة ثانيه، يوجد هنالك متتالية $\{n_k\}$ بحيث

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha \ .$$

إذن $|a_n| > 1$ لعدد لانهائي من قيم n، لذلك فإن الشرط $a_n \to 0$، اللازم لاقتراب $\sum a_n$، لا يتحقق (المبرهنة ٣، ٢٣).

لبرهنة (ج)، نلاحظ المتسلسلتين $\sum \frac{1}{n}$. , $\sum \frac{1}{n^2}$

لكل من هاتين المتسلسلتين $\alpha = 1$، ولكن الأولى تتباعد والثانية تتقارب.

٣، ٣٤ مبرهنة (الاختبار النسبي) (*Ratio Test*) *المتسلسلة* $\sum a_n$

(أ) *تتقارب إذا كان* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$،

(ب) *تتباعد إذا كان* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *بالنسبة لـــ* $n \geq n_0$، *حيث* n_0 *عدد صحيح ثابت معلوم.*

البرهان: إذا صح الشرط (أ)، فإن بإمكاننا أن نجد $\beta < 1$، وعدد صحيح N، بحيث

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

بالنسبة لـــ $n \geq N$. وعلى وجه الخصوص،

$$|a_{N+1}| < \beta \ |a_N|,$$
$$|a_{N+2}| < \beta \ |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_{N+p}| < \beta^p \ |a_N|.$$

وهذا يعني،

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n$$

بالنسبة لـــ $n \geq N$، وتستنتج (أ) من اختبار المقارنة، نظراً لأن $\sum \beta^n$ تتقارب.

إذا كانت $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ بالنسبة لـ $n \geq n_0$، فإنه من السهولة أن نلاحظ أن الشرط $a_n \to 0$ لا يتحقق، وينتج عن ذلك (ب).

ملاحظة: إن معرفة $\lim a_{n+1} / a_n = 1$ لا تقدم أي مدلول على اقتراب $\sum a_n$. تدل المتسلسلتان $\sum 1/n$ و $\sum 1/n^2$ على ذلك.

٣، ٣٥ أمثلة

(أ) لاحظ المتسلسلة

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

والتي فيها يكون

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty.$$

إن الاختبار الجذري يدل على التقارب ؛ بينما لا ينطبق ذلك على الاختبار النسبي.

(ب) نفس الشيء يصح على المتسلسلة

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots,$$

حيث

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

ولكن

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}.$$

٣، ٣٦ ملاحظات: غالباً ما يكون الاختبار النسبي أسهل تطبيقاً من الاختبار الجذري، نظراً لأن احتساب النسب يكون في اغلب الأحيان اسهل من أيجاد الجذور النونية. على الرغم من ذلك، فإن الاختبار الجذري يمتلك آفاقا اكبر. وعلى وجه الخصوص: كلما بين الاختبار النسبي حالة اقتراب، فإن الاختبار الجذري يفعل نفس الشيء ؛ وكلما كان الاختبار الجذري غير حاسماً، فإن الاختبار النسبي يكون كذلك أيضا. أن هذا هو نتيجة للمبرهنة ٣، ٣٧، وهو موضح بالأمثلة أعلاه.

ولا واحد من هذين الاختبارين دقيق بخصوص التباعد divergence. كلاهما يستنتجان التباعد من خلال كون a_n لا تفضي إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

٣، ٣٧ مبرهنة: *لكل متتالية* $\{c_n\}$ *من الأعداد الموجبة،*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

البرهان: سوف نبرهن المتباينة الثانية ؛ أما برهان الأولى فإنه مشابه لذلك تماماً. نضع

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} .$$

إذا كانت $\alpha = +\infty$، فلا يوجد شيء لبرهنته. إذا كانت α منتهية، نختار $\beta > \alpha$. يوجد عدد صحيح N بحيث

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \le \beta$$

لـ $n \ge N$. بصورة خاصة، لأي $p > 0$،

$$c_{N+k+1} \le \beta\, c_{N+k} \quad (k = 0,1,\ldots,p-1)$$

بضرب هاتين المتباينتين، فأننا نحصل على

$$c_{N+p} \le \beta^p c_N,$$

أو

$$(n \ge N) \quad c_n \le c_N\, \beta^{-N} \cdot \beta^n,$$

إذن

$$\sqrt[n]{c_n} \le \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}}.\beta,$$

لذلك فإن

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \beta , \qquad (١٨)$$

استناداً للمبرهنة ٣، ٢٠ (ب). بما أن (١٨) تتحقق لكل $\beta > \alpha$، فإن

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \alpha \ .$$

متسلسلات القوى Power Series

٣، ٣٨ تعريف: إذا أخذنا المتتالية $\{c_n\}$ للأعداد العقدية، فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (١٩)$$

تسمى *متسلسلات القوى power series*. نطلق على الأعداد c_n *معاملات المتسلسلة coefficients*؛ z عدداً عقدياً.

بصوره عامة، فإن المتسلسلات تتقارب أو تتباعد، طبقاً لاختيار z. بصوره اكثر دقة، لكل متسلسلة قوى يوجد هنالك دائرة مرادفة لها، دائرة التقارب، بحيث أن (١٩) تتقارب إذا كانت z تقع في القسم الداخلي من الدائرة، وتتباعد إذا كانت z تقع في القسم الخارجي (لتغطية جميع الحالات، علينا أن نتصور المستوي بمثابة القسم الداخلي من دائرة بنصف قطر لانهائي، ونقطة بمثابة دائرة بنصف قطر يساوي صفر). أن السلوك في دائرة التقارب متنوع بشكل كبير ولا يمكن وصفه بسهولة.

٣، ٣٩ مبرهنة: *لناخذ متسلسلة القوى* $\sum c_n z^n$، *نضع*

$$R = \frac{1}{\alpha} \quad , \qquad \alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \ .$$

(إذا كانت $\alpha = 0$، *فإن* $R = +\infty$; *إذا كانت* $\alpha = +\infty$ *فإن* $R = 0$ *). عندها فإن* $\sum c_n \ z^n$ *تتقارب إذا كانت* $|z| < R$، *وتتباعد إذا كانت* $|z| > R$.

البرهان: نضع $a_n = c_n \ z^n$، ونطبق الاختبار الجذري:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{|z|}{R} \ .$$

ملاحظة: تدعى R نصف قطر التقارب لـ $\sum c_n \ z^n$.

٣، ٤٠ أمثلة:

(أ) المتسلسلة $\sum n^n z^n$ تمتلك $R = 0$.

(ب) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n!}$ تمتلك $R = +\infty$. (في هذه الحالة فإن الاختبار النسبي هو الأسهل في التطبيق من الاختبار الجذري).

(ج) المتسلسلة $\sum z^n$ تمتلك $R = 1$. إذا كانت $|z| = 1$، فإن المتسلسلة تتباعد، نظراً لأن $\{z^n\}$ لا تقضي إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

(د) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n}$ تمتلك $R = 1$. هي تتباعد إذا كانت $z = 1$. هي تتقارب لكل قيم z بحيث $|z| = 1$. (التأكيد الأخير سوف يبرهن في المبرهنة ٣، ٤٤).

(هـ) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n^2}$ تمتلك $R = 1$. هي تتقارب لكل قيم z بحيث $|z| = 1$، استناداً إلى اختبار المقارنة، نظرا لأن $|z^n / n^2| = 1/n^2$.

الجمع بالتجزئة (الأجزاء) Summation By Parts

٣، ٤١ مبرهنة: *لنأخذ متتاليتين* $\{a_n\}, \{b_n\}$، *نضع*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

إذا كانت $n \geq 0$ *؛ نضع* $A_{-1} = 0$. *عندها، إذا كانت* $0 \leq p \leq q$، *فإن*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \ . \qquad (٢٠)$$

البرهان:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \ ,$$

من الواضح أن العبارة الأخيرة في الجهة اليمنى تساوي الجهة اليمنى لـ (٢٠). المعادلة (٢٠)، التي تسمى "معادلة الجمع الجزئي" "partial summation formula" مفيدة في دراسة وتقصي المتسلسلات التي على هيئة $\sum a_n b_n$، وعلى وجه الخصوص عندما تكون $\{b_n\}$ رتيبة. سنقدم الآن بعض التطبيقات.

٣، ٤٢ مبرهنة: *نفترض أن*

(أ) *المجاميع الجزئية* A_n *لـ* $\sum a_n$ *تكون متتالية مقيدة ؛*

(ب) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ ؛

(ج) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

عندها فإن $\sum a_n b_n$ *تتقارب.*

البرهان: نختار M بحيث $|A_n| \leq M$ لجميع n. لتكن $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $b_N \leq (\varepsilon/2M)$. بالنسبة إلى $N \leq p \leq q$، فإن

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\, b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q\, b_q - A_{p-1}\, b_p\right|$$

$$\leq M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right|$$

$$= 2M\, b_p \leq 2M\, b_N \leq \varepsilon.$$

التقارب الآن يتأتى من قاعدة كوشي. نلاحظ أن المتباينة الأولى في الحلقة أعلاه تعتمد بالطبع على كون $b_n - b_{n+1} \geq 0$.

٣، ٤٣ مبرهنة: *لنفترض أن*

(أ) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$ ؛

(ب) $c_{2m-1} \geq 0$, $c_{2m} \leq 0$ $(m = 1,2,3,\ldots)$ ؛

(ج) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

عندها فإن $\sum c_n$ *تتقارب.*

تسمى المتسلسلة التي تتحقق فيها (ب) *"المتسلسلة المتناوبة"* ***alternating series*** ؛ كانت المبرهنة معروفة لـ ليبنز ***Leibnitz***.

البرهان: طبق المبرهنة ٣، ٤٢، بوضع $a_n = (-1)^{n+1}$ ، $b_n = |c_n|$.

٣، ٤٤ مبرهنة: *لنفترض أن نصف قطر التقارب لـ* $\sum c_n z^n$ *يساوي* 1، *ولنفترض أن* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$، $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. *عندها فإن* $\sum c_n z^n$ *تتقارب في أي نقطه على*

الدائرة $|z| = 1$، *ربما ماعدا في* $z = 1$.

البرهان: ضع $a_n = z^n$, $b_n = c_n$. عندها فإن افتراضات المبرهنة ٣، ٤٢ تكون قد تحققت، لأنه

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}\right| \le \frac{2}{|1 - z|},$$

إذا كانت $|z| = 1$ ، $z \neq 1$.

التقارب المطلق Absolute Convergence

يقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها *تتقارب بصوره مطلقة* ***converges absolutely*** إذا كانت المتسلسلة $\sum |a_n|$ تتقارب.

٣، ٤٥ مبرهنة: إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب بشكل مطلق، فإن $\sum a_n$ تتقارب.

البرهان: إن التوكيد يتأتى من المتباينة

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{n=k}^{m} |a_k|,$$

أضافه إلى قاعدة كوشي.

٣،٤٦ ملاحظات: بالنسبة لمتسلسلات الحدود الموجبة، التقارب المطلق هو نفس التقارب.

إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، ولكن $\sum |a_n|$ تتباعد، فإننا نقول $\sum a_n$ ***تتقارب بصورة غير مطلقة*** ***converges non- absolutely***. على سبيل المثال، فإن المتسلسلة

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

تتقارب بصورة غير مطلقة (المبرهنة ٣، ٣٤).

إن اختبار المقارنة، وكذلك الاختبارين الجذري والنسبي، هو في الواقع اختباراً للتقارب المطلق، وهو لذلك لا يستطيع أن يقدم أية معلومات بخصوص التقارب الغير المطلق للمتسلسلات. من الممكن استخدام الجمع بالتجزئة في بعض الأحيان لمعالجة هذا الموضوع. بصوره خاصة، تتقارب متسلسلات القوى بصوره مطلقة في القسم الداخلي من دائرة التقارب.

سوف نلاحظ بأننا قد نتعامل مع متسلسلات التقارب المطلق بنفس الطريقة التي نتعامل بها

مع المجامع المنتهية. بإمكاننا أن نطبق عملية الضرب عليهم حدا حداً وكذلك باستطاعتنا أن نغير الترتيب الذي تتم به عملية الجمع، بدون أن يؤثر ذلك على مجموع المتسلسلة. أن هذا لا يصح على متسلسلات التقارب الغير المطلق، لذلك فأننا يجب أن نكون حذرين في التعامل معهم.

جمع وضرب المتسلسلات

Addition And Multiplication Of Series

٣، ٤٧ مبرهنة: *إذا كانت* $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ *فإن* $\sum (a_n + b_n) = A + B$، و $\sum ca_n = cA$، *لأي* c *ثابتة.*

البرهان: لتكن

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{و} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \ .$$

عندها فإن

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \ .$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} B_n = B$، فإننا نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B \ .$$

أما برهان الجزء الثاني من المبرهنة فإنه اسهل من هذا البرهان.

لذلك فإنه من الممكن جمع متسلسلتين متقاربتين، حدا حداً، و تتقارب المتسلسلة الناتجة عن عملية الجمع هذه إلى مجموع المتسلسلتان. تصبح هذه المتسلسلة اكثر تعقيداً عندما نتناول موضوع ضرب متسلسلتين. وكبداية للموضوع، يتوجب علينا، تعريف حاصل الضرب. من الممكن أن يتم ذلك بعدة طرق؛ وسوف ندرس أولا ما يسمى *"حاصل ضرب كوشي" Cauchy product.*

٣، ٤٨ تعريف: لنأخذ $\sum a_n$ و $\sum b_n$، نضع

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

فإننا نسمي $\sum c_n$ حاصل ضرب المتسلسلتين المأخوذتين.

من الممكن تفسير هذا التعريف كالآتي. إذا أخذنا متسلسلتين للقوى

$\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$، ونضربهما حدا حداً، ونجمع الحدود التي تحتوي على نفس القوى لـ z، فإننا نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots$$

$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots.$$

بوضع $z = 1$ فإننا نتوصل إلى التعريف أعلاه.

٣، ٤٩ مثال: إذا كانت

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ ،} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ ،} \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \text{ ،}$$

و $A_n \to A$, $B_n \to B$، عندها فإنه ليس من الواضح دائماً بأن $\{C_n\}$ سوف تتقارب إلى AB، وذلك لأننا لا نملك $C_n = A_n B_n$. أن اعتماد $\{C_n\}$ على $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ اعتماداً معقداً بالفعل (راجع تعريف المبرهنة ٣، ٥٠). سوف نبين الآن أن حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين قد يتباعد بالفعل.

إن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

تتقارب (المبرهنة ٣، ٤٣). نكون حاصل ضرب هذه المتسلسلة بنفسها لنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots$$

لذلك فإن

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \ .$$

بما أن

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 .$$

فإن

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

لذلك فإن الشرط $c_n \to 0$، وهو الشرط اللازم لاقتراب $\sum c_n$، لا يتحقق.

بالنسبة إلى المبرهنة القادمة، واستناداً إلى ميرتنس Mertens، نلاحظ بأننا تناولنا هنا حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين بصوره غير مطلقة.

٣، ٥ مبرهنة: *لنفترض أن*

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *تتقارب بصورة مطلقة،*

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$،

(ج) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$،

(د) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$.

عندها فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A\,B .$$

بكلمه أخرى، يتقارب حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين، وتبقى القيمة صحيحة، إذا كانت إحدى هاتين المتسلسلتين تتقارب بصورة مطلقة.

البرهان: نضع

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ , \ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \ , \ C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \ , \ \beta_n = B_n - B \ .$$

إذن

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \end{aligned}$$

نضع

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0$$

نود الآن أن نبين أن $C_n \to AB$. بما أن $A_n B \to AB$، فيكفي أن نبين أن

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \ . \qquad (٢١)$$

نضع

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

[هنا نستخدم (أ)]. لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى (ج)، فإن $\beta_n \to 0$. إذن بإمكاننا أن نختار N بحيث $|\beta_n| \le \varepsilon$ بالنسبة لـ $n \ge N$. وفي هذه الحالة

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha . \end{aligned}$$

نُبْقي على N ثابتة، وندع $n \to \infty$، فإننا نحصل على

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon \alpha ،$$

بما أن $a_k \to 0$ عندما $k \to \infty$. بما أن ε عشوائية، فإننا نستنتج (٢١).

السؤال الآخر الذي قد يثار هو أنه فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum c_n$، تتقارب، فإنها ستمتلك المجموع لـ AB: بَيَّنَ آبيل *Abel* بأن الجواب على ذلك السؤال هو بالإيجاب.

٣، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت المتسلسلات $\sum a_n$، $\sum b_n$، $\sum c_n$ تتقارب إلى A، B، C وكانت $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$، عندها فإن $C = AB$.*

هنا لم نضع أي افتراض بخصوص التقارب المطلق. سوف نقدم برهاناً بسيطاً (والذي يعتمد استمرارية متسلسلات القوى) بعد المبرهنة ٨، ٢.

إعادة الترتيب Rearrangements

٣، ٥٢ تعريف: لتكن $\{k_n\}$، $n = 1,2,3,\ldots$، المتتالية التي يظهر فيها كل عدد صحيح موجب مرة واحدة فقط (أي أن $\{k_n\}$ هي دالة 1-1 من J إلى J، في رمز التعريف ٢، ٦). نضع

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1,2,3,\ldots) ،$$

فإننا نقول بأن $\sum a'_n$ هي إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$.

إذا كانت $\{s_n\}$، $\{s'_n\}$ متتاليتين للمجاميع الجزئية لـ $\sum a_n$، $\sum a'_n$، فإننا نلاحظ بسهوله بأنه، وبصورة عامة، تتألف هاتين المتتاليتين من أعداد مختلفة كلياً. وهذا يؤدي بنا إلى أن نُجابه مشكلة تحديد الشروط التي تقترن بموجبها جميع أعادات الترتيب للمتسلسلات المتقاربة

وفيما إذا كان بالضرورة أن تكون المجامع نفس الشيء.

٣، ٣ ه مثال: لنتأمل المتسلسلة المتقاربة

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \qquad (٢٢)$$

وواحدة من إعادة ترتيبها

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \qquad (٢٣)$$

والتي يكون فيها كل حدين موجبين يعقبهما دائماً حداً سالباً. إذا كان s مجموع (٢٢)، فإن

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\ .$$

بما أن

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

بالنسبة لـ $k\geq 1$، نلاحظ بأن $s'_3<s'_6<s'_9<\cdots$، حيث s'_n هي المجموع الجزئي النوني لـ (٢٣).

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n > s'_3=\frac{5}{6}\ ،$$

كذلك فإن (٢٣) لا تتقارب بالتأكيد إلى s [نترك مسألة إثبات كون (٢٣) تتقارب إلى القارئ].

استنادا إلى ريمان Riemann، فإن هذا المثال يوضح المبرهنة الآتية.

٣، ٤ ه مبرهنة: *لتكن $\sum a_n$ متسلسلة من الأعداد الحقيقية والتي تتقارب، ولكن ليست بصورة مطلقة. لنفترض أن*

$$-\infty\leq\alpha\leq\beta\leq\infty\ .$$

عندها يوجد هنالك إعادة ترتيب $\sum a'_n$ بمجموع جزئي s'_n بحيث

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n=\alpha\quad,\quad \limsup_{n\to\infty} s'_n=\beta \qquad (٢٤)$$

البرهان: لتكن

$$(n=1,2,3,\ldots)\qquad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\quad,\quad p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}\ .$$

ثم $p_n - q_n = a_n$ ، $p_n + q_n = |a_n|$ ، $p_n \geq 0$ ، $q_n \geq 0$. كلاً من المتسلسلتين $\sum p_n$ ، $\sum q_n$ يجب أن يتباعد.

وذلك لأن إذا كان كليهما يتقارب، فإن

$$\sum (p_n + q_n) = \sum |a_n| ،$$

سوف تتقارب، وهذا يناقض افتراضنا. بما أن

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n ،$$

فإن تباعد $\sum p_n$ ، وتقارب $\sum q_n$ (أو بالعكس) يؤدي إلى تباعد $\sum a_n$ ، وهذا يناقض افتراضنا أيضاً.

الآن لتكن $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ترمز إلى الحدود الغير سالبه لـ $\sum a_n$ ، حسب تسلسل حدوثهما، ولتكن $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ القيم المطلقة للحدود السالبة لـ $\sum a_n$ ، وكذلك حسب تسلسلهما الأصلي.

تختلف المتسلسلتان $\sum P_n$ ، $\sum Q_n$ عن $\sum p_n$ ، $\sum q_n$ بالحدود الصفرية فقط، ولذلك فـإنهما تتباعدان.

سنقوم الآن بتركيب متتاليتين $\{m_n\}$ ، $\{k_n\}$ ، بحيث أن المتسلسلة

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots, \tag{٢٥}$$

والتي من الواضح أنها إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$ ، تحقق (٢٤).

نختار متتاليتين القيم الحقيقية $\{\alpha_n\}$،$\{\beta_n\}$ بحيث أن $\alpha_n \to \alpha$ ، $\beta_n \to \beta$ ، $\alpha_n < \beta_n$ ، $\beta_1 > 0$.

لتكن k_1 , m_1 أصغر عددين صحيحين بحيث

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

لتكن m_2 ، k_2 أصغر عددين صحيحين بحيث

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2;$$

ونستمر بهذه الطريقة. أن هذا ممكن لأن $\sum P_n$ و $\sum Q_n$ تتباعدان.

إذا كانت x_n ، y_n لا ترمزان إلى المجامع الجزئية لـ (٢٥) و اللتان آخر حدودهما هما P_{m_n} ، Q_{k_n} فإن

$$|x_n - \beta_n| \le P_{m_n} \quad ، \quad |y_n - \alpha_n| \le Q_{k_n} \ .$$

بما أن $P_n \to 0$ و $Q_n \to 0$ عندما $n \to \infty$، فإننا نلاحظ أن $x_n \to \beta$ ، $y_n \to \alpha$.

أخيراً، فإنه من الواضح أنه لا يوجد هنالك عدداً أقل من α أو أكبر من β يمكن أن يكون غاية للمجموعة الجزئية للمجامع الجزئية لـ (٢٥).

٣، ٥٥ مبرهنة: *إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة من الأعداد العقدية والتي تتقارب بصورة مطلقة، عندها فإن كل إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$ يتقارب، وإنهم جميعاً يتقاربون إلى نفس المجموع.*

البرهان: لتكن $\sum a'_n$ إعادة ترتيب، بمجامع جزئية s'_n. لنأخذ $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث أن $m \ge n \ge N$ يؤدي إلى

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \le \varepsilon \ . \qquad (٢٦)$$

الآن نختار p بحيث أن جميع الأعداد الصحيحة $1,2,3,\ldots N$ محتواة بالمجموعة $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (نستخدم الرمز في التعريف ٣، ٥٢) عندها فإنه إذا كانت $n > p$، فإن الأعداد $a_1, \ldots, a_N$ س سوف تمحي الفرق $s_n - s'_n$، لذلك فإن $|s_n - s'_n| \le \varepsilon$، استنادا إلى (٢٦). إذن $\{s'_n\}$ تتقارب إلى نفس مجموع $\{s_n\}$.

تمارين EXERCISES

١- برهن على أن اقتراب $\{s_n\}$ يؤدي إلى اقتراب $\{|s_n|\}$. هل يصح العكس ؟

٢- أحسب $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

٣- إذا كانت $s_1=\sqrt{2}$، و

$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}} \quad (n=1,2,3,\ldots)،$$

برهن على أن $\{s_n\}$ تتقارب وبـــان $s_n<2$ لكل $n=1,2,3,\ldots$.

٤- أوجد الغايتين العليا والسفلي للمتتالية $\{s_n\}$ المعرفة بـــ

$$s_{2m+1}=\frac{1}{2}+s_{2m} \quad ، \quad s_{2m}=\frac{s_{2m-1}}{2} \quad ، \quad s_1=0 .$$

٥- لأي متتاليتين حقيقيتين $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$، برهن على أن

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\le \limsup_{n\to\infty} a_n+\limsup_{n\to\infty} b_n ،$$

شريطة أن لا يكون المجموع في الجهة اليمنى على شكل $\infty-\infty$.

٦- أستقصي السلوك (الاقتراب أو الابتعاد) $\sum a_n$ إذا كانت

(أ) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ؛

(ب) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ ؛

(ج) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$ ؛

(د) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$، بالنسبة للقيم العقدية لـــ z.

٧- برهن على أن اقتراب $\sum a_n$ يؤدي إلى اقتراب $\sum\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$، إذا كانت $a_n\ge 0$.

٨- إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، وكانت $\{b_n\}$ رتيبة ومقيدة، برهن على أن $\sum a_n b_n$ تتقارب.

٩- أوجد نصف قطر التقارب لكل من متسلسلات القوى الآتية:

(أ) $\sum n^3 z^n$ ، (ب) $\sum\dfrac{2^n}{n!}z^n$ ، (ج) $\sum\dfrac{2^n}{n^2}z^n$ ، (د) $\sum\dfrac{n^3}{3^n}z^n$.

١٠- أفترض أن معاملات متسلسلات القوى $\sum a_n z^n$ تكون أعداد صحيحه، ما لانهاية

العدد والتي تختلف عن الصفر. برهن على أن نصف قطر التقارب يكون 1 على أكثر تقدير.

١١- أفترض أن $a_n > 0$ ، $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ، وإن $\sum a_n$ تباعد.

(أ) برهن على أن $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ تباعد.

(ب) برهن على أن

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

وأستنتج أن $\sum \frac{a_n}{s_n}$ تباعد.

(ج) برهن على أن

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

واستنتج أن $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ تتقارب.

(د) ماذا يمكن أن يقال حول

$$\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \quad \text{و} \quad \sum \frac{a_n}{1+na_n} ?$$

١٢- افترض أن $a_n > 0$ و $\sum a_n$ تتقارب. ضع

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \ .$$

(أ) برهن على أن

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$

إذا كانت $m < n$، و نستنتج $\sum \frac{a_n}{r_n}$ تباعد.

(ب) برهن على أن

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

واستنتج بأن $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ تتقارب.

١٣- برهن على أن حاصل الضرب الكوشي للمتسلسلتان المتقاربتان تقارباً مطلقاً يتقارب تقارباً مطلقاً.

١٤- إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية عقدية، عرف معدلاتها الحسابية σ_n بـــ

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad .(n=0,1,2,\ldots)$$

(أ) إذا كانت $s_n = s$، برهن على أن $\lim \sigma_n = s$.

(ب) كوّن متتالية $\{s_n\}$ التي لا تتقارب، على الرغم من أن $\lim \sigma_n = 0$.

(ج) هل من الممكن أن تكون $s_n > 0$ لجميع n و $\limsup s_n = \infty$ على الرغم من أن $\lim \sigma_n = 0$ ؟

(د) ضع $a_n = s_n - s_{n-1}$، بالنسبة لـــ $n \geq 1$. بين أن

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k a_k \quad .$$

افترض أن $\lim(na_n) = 0$ وان $\{\sigma_n\}$ تتقارب. برهن على أن $\{s_n\}$ تتقارب.

[أن هذا يقدم المعكوس لـــ (أ)، ولكن بموجب افتراض إضافي هو أن $na_n \to 0$].

(هـــ) اشتق الاستنتاج الأخير من افتراض اضعف: افترض أن $M < \infty$ ، $|na_n| \leq M$ لجميع n، وان $\lim \sigma_n = \sigma$. برهن على أن $\lim s_n = \sigma$، وذلك بتكملة الخطوات الآتية:

إذا كانت $m < n$ فإن

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \left(\frac{1}{n-m}\right)\sum_{i=m+1}^{n}(s_n - s_i) \quad .$$

بالنسبة لهذه الـــ i،

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2} \quad .$$

نضع $\varepsilon > 0$، ونرفق لكل n العدد الصحيح m الذي يحقق

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1 \quad .$$

عندها فإن $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ و $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. إذن

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon >$$

بما أن ε كانت عشوائية، $\lim s_n = \sigma$.

١٥- من الممكن توسيع التعريف ٣، ٢١ إلى الحالة التي تكون فيها الـ a_n تقع في بعض R^k الثابتة. يعرف التقارب المطلق بأنه تقارب $\sum |a_n|$. بين صحة المبرهنات ٣، ٢٢، ٣، ٣٣، ٣، ٢٥ (أ)، ٣، ٣٣، ٣، ٣٤، ٣، ٤٢، ٣، ٤٥، ٣، ٤٧، و ٣، ٥٥ وفق هذا المفهوم الأكثر عمومية. (يقتضي الأمر إجراء بعض التغيرات الطفيفة في كل برهان من البراهين).

١٦- حدد عدداً موجباً α. أختار $x_1 > \sqrt{\alpha}$ وعرف $x_2, x_3, x_4, \ldots$ وفق صيغة التكرار

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

(أ) برهن على أن $\{x_n\}$ تتناقص ترتيبياً وان $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ب) ضع $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$، وبين أن

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

لذلك فإنه، بوضع $\beta = 2\sqrt{\alpha}$،

$$(n = 1,2,3,\ldots) \quad \varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}.$$

(ج) أن هذه طريقه جيده لاحتساب الجذور التربيعية، بما أن صيغة التكرار هي صيغة بسيطة وان التقارب سريع جداً. على سبيل المثال، إذا كانت $\alpha = 3$ وان $x = 2$، بين أن $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ وبأنه تبعاً لذلك

$$\varepsilon_5 < 4.10^{-16} \quad ، \quad \varepsilon_6 < 4.10^{-32}.$$

١٧- ضع $\alpha > 1$ خذ. $x_1 > \sqrt{\alpha}$، وعرف

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(أ) برهن على أن $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(ب) برهن على أن $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(ج) برهن على أن $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(د) قارن سرعة تقارب هذه الخطوات مع الطريقة المذكورة في التمرين ١٧.

١٨- استبدل صيغة التكرار في التمرين ١٦ بما يلي

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} .$$

حيث أن p عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً، أوصف سلوك المتتالية الناتجة $\{x_n\}$.

١٩- ارفق مع كل متتالية $a = \{\alpha_n\}$، التي تكون α_n هي 0 او 2، العدد الحقيقي

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} .$$

برهن على أن المجموعة التي تضم جميع $x(a)$ هي بالضبط مجموعة كانتور المذكورة في الجزء ٢، ٤٤.

٢٠- افترض أن $\{p_n\}$ متتالية كوشية في الفضاء المتري X، وان بعض المتتاليات الجزئية $\{p_n\}$ تتقارب إلى النقطة $p \in X$. برهن على أن المتتالية بأكملها $\{p_n\}$ تتقارب إلى p.

٢١- برهن المناظرة الآتية للمبرهنة ٣، ١٠ (ب): إذا كانت $\{E_n\}$ متتالية لمجاميع مغلقة ومقيدة في الفضاء المتري التام X، وكانت $E_n \supset E_{n+1}$، و

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0 ،$$

عندها فإن $\bigcap_1^\infty E_n$ تتألف من نقطه واحدة فقط.

٢٢- افترض أن X فضاءاً متريا تاماً، وان $\{G_n\}$ متتالية لمجموعات مفتوحة كثيفة (مركزه) لـ X. برهن مبرهنة بابر Baire، أو بالتحديد، أن $\bigcap_1^\infty G_n$ ليست خاليه. (في الحقيقة، أنها كثيفة في X). تلميح: أوجد سلسلة متقلصة من المناطق المجاورة E_n بحيث $\overline{E}_n \subset G_n$، وطبق التمرين ٢١.

٢٣- أفترض أن $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ متتاليتين كوشيتين في الفضاء المتري X. بَين أن المتتالية $\{d(p_n, q_n)\}$ تتقارب. *تلميح*: لكل m , n،

$$d(p_n, q_n) \le d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n) ;$$

يلي ذلك أن

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

يكون صغيراً إذا كانت m و n كبيرتين.

٢٤- لتكن X فضاءا متريـــاً.

(أ) نطلق على المتتاليتين الكوشيتين $\{p_n\}$،$\{q_n\}$ في X بأنهما متكافئتين *equivalent* إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n\ ,q_n) = 0\ .$$

برهن على أن هذه العلاقة تكافؤ.

(ب) لتكن X^* المجموعة التي تضم جميع صفوف التكافؤ التي حصلنا عليها. إذا كانت، $P \in X^*$, $Q \in X^*$، $\{p_n\} \in P$ ، $\{q_n\} \in Q$، عرف

$$\Delta(P,Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n\ ,q_n);$$

استنادا إلى التمرين ٢٣، فإن هذه الغاية موجودة. بين أن العدد $\Delta(P,Q)$ غير قابل للتغير إذا استبدلت $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ بمتتاليات مكافئه، وعندها فإن Δ هي دالة مسافة في X^*.

(ج) برهن أن الفضاء المتري X^* يكون تاماً.

(ء) لكل $p \in X$، يوجد هنالك متتالية كوشية جميع حدودها p ؛ لتكن P_p العنصر لـــ X^* الذي يحتوي هذه المتتالية. برهن أن

$$\Delta(P_p\ ,P_q\ ) = d(p,q)$$

لجميع $p,q \in X$. بكلمة أخرى، أن التطبيق φ المعرف بـــ $\varphi\ (p) = P_p$ هو مقياس isometry (أي تطبيق محافظ على الأبعاد) لـــ X في X^*.

(هـــ) برهن على أن $\varphi\ (X)$ تكون كثيفة في X^*، وبأن $\varphi\ (X) = X^*$ إذا كانت X تامة. استنادا إلى (د)، نستطيع أن نعين X و $\varphi\ (X)$ وبذلك نعتبر أن X مغمور embedded في الفضاء المتري التام X^*. يطلق على X^* *التممة completion* لـــ X.

٢٥- لتكن X الفضاء المتري الذي نقاطه الأعداد النسبية، بحيث $d(x,y) = |x-y|$ ما هو المتمم لهذا الفضاء ؟ (قارن بالتمرين ٢٤).

الفصل الرابع

الاستمـــراريـــة

- غايات الدوال
- الدوال المستمرة
- الاستمرارية والتراص
- الاستمرارية والترابط
- عدم الاستمرارية (التفاصل)
- الدوال الرتيبة
- الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية
- تمارين

الفصل الرابع
الاستمـــراريـــة
Continuity

تم تقديم مفهوم الدالة وبعض المصطلحات ذات العلاقة بها في التعريفين ٢، ١ و٢، ٢ وعلى الرغم من إننا سنتناول الدوال الحقيقية والمركبة بصورة رئيسية خلال الفصول القادمة (أي، الدوال التي تكون قيمتها أعدادا حقيقية أو عقدية) إلا أننا سنناقش أيضاً دوال القيم المتجهة (أي، الدوال التي تقع قيمتها في R^k) والدوال التي تقع قيمتها في بعض الفضاءآت المترية العشوائية. بأي حال من الأحوال سوف لن تكون المبرهنات التي سنناقشها ضمن هذا الإطار العام اسهل إذا ما حددنا أنفسنا في التعامل فقط مع الدوال الحقيقية، على سبيل المثال، وفي الحقيقة فإن مسألة التخلص من الافتراضات الغير ضرورية وصياغة وبرهنة المبرهنات ضمن إطار عام ومناسب، تساهم في تسهيل وتوضيح الصورة بشكل كبير.

ستكون منطلقات التعريف لدوالنا هذه فضاءآت مترية أيضاً، والتي هي مناسبة جداً لعديد من الحالات.

غايات الدوال Limits Of Functions

٤، ١ تعريف: ليكن X وY فضائيين مترين ؛ نفترض أن $E \subset X$، f تطبيق E في Y، و p نقطة غاية لـ E. إننا نكتب $f(x) \to q$ عندما $x \to p$، أو

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad (١)$$

إذا كانت هنالك نقطة $q \in Y$ تمتلك الخاصية الآتية: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \qquad (٢)$$

لجميع النقاط $x \in E$ والتي يكون فيها

$$0 < d_X(x, p) < \delta \ . \qquad (٣)$$

يشير الرمزان d_X و d_Y إلى المسافات في X و Y، على التوالي.

إذا تم استبدال X و / أو Y بخط حقيقي، مستوى مركب، أو ببعض الفضاءآت الإقليدية

$\mathbf{R}^k$، فإن المسافتين d_X، d_Y سوف تستبدل بالطبع بقيم مطلقة، أو معيار بمتجهات مناسبة (راجع البند ٢، ١٦).

تجدر الملاحظة هنا إلى أن $p \in X$، لا يعني بالضرورة أن p هي نقطة من نقاط E في التعريف أعلاه. إضافة إلى ذلك، حتى إذا كانت $p \in E$، فإنه من الجائز جداً أن تكون $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

بالإمكان إعادة صياغة هذا التعريف بمصطلحات غايات المتتاليات:

٤، ٢ مبرهنة: *لتكن X, Y, E, f و p كما معرفة بالتعريف ٤، ١. عندها فإن*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad (٤)$$

إذا و إذا فقط كانت

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \qquad (٥)$$

لكل متتالية $\{p_n\}$ في E بحيث أن

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p, \qquad p_n \neq p \ . \qquad (٦)$$

البرهان: لنفترض أن (٤) تتحقق. نختار $\{p_n\}$ في E بحيث تحقق (٦). لنأخذ $\varepsilon > 0$. عندها يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$ *إذا كانت* $x \in E$ و $0 < d_X(x,p) < \delta$. أيضا، يوجد هناك N بحيث $n > N$ يؤدي إلى أن $0 < d_X(p_n,p) < \delta$. وذلك، لـ $n > N$، نحصل على $d_Y(f(p_n),q) < \varepsilon$، والتي تبين أن (٥) تتحقق.

وبالعكس، نفترض أن (٤) خاطئة. عندها يوجد هنالك بعض $\varepsilon > 0$ بحيث إنه لكل $\delta > 0$ يوجد هنالك نقطة $x \in E$ *(تعتمد على* أن $d_Y(f(x),q) \geq \varepsilon$ ولكن $0 < d_X(x,p) < \delta$. بأخذ $\delta_n = 1/n (n = 1,2,3,\ldots)$، ولذلك نجد أن المتتابعة في E تحقق (٦) بحيث أن (٥) تكون خاطئة.

نتيجة: *إذا كانت f تمتلك غاية في p، فإن هذه الغاية تكون وحيدة.*

وهذا يأتي من المبرهنتين ٢، ٣ (ب) و ٢، ٤.

٤، ٣ تعريف: لنفترض أن لدينا دالتين مركبتين، f و g، كلاهما معرفة في E. نقصد بـ

$f+g$ الدالة التي تعين لكل نقطة x في E العدد $f(x)+g(x)$. بنفس الطريقة نعين الفرق $f-g$، حاصل *الضرب* fg، وحاصل القسمة f/g للدالتين، أخذاً بنظر الاعتبار أن حاصل القسمة يتعين فقط في تلك النقاط x من E والتي يكون فيها $g(x) \neq 0$. إذا كانت f تعين لكل نقطة x من E بنفس العدد c، فإن f عندها تسمى دالة ثابتة، أو مجرد ثابتة، وعندها نكتب $f = c$. إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين، وكانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in E$، فإننا سنكتب أحيانا $f \geq g$، للاختصار.

بنفس الطريقة، إذا كانت f و g تطبيقان E في $\mathbf{R}^k$، فإننا نعرف $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ و $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ كما يلي:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x), \qquad (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x);$$

وإذا كان λ عدداً حقيقياً فإن، $(\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x)$.

٤، ٤ مبرهنة: *لنفترض أن $E \subset X$، فضاءاً متريًا، p نقطة غاية لـ E، f و g دالتين مركبتين في E، و*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A\,, \quad \lim_{x\to p} g(x) = B$$

عندها فإن

(أ) $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = A+B$ ؛

(ب) $\lim_{x\to p}(fg)(x) = AB$ ؛

(ج) $\lim_{x\to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$، *إذا كانت* $B \neq 0$.

البرهان: وفقاً للمبرهنة ٤، ٢، فإن هذه التأكيدات تتأتى مباشرة من الخواص المتشابهة للمتتاليات (مبرهنة ٣، ٣).

ملاحظة: إذا كانت f و g تطبيقان E في $\mathbf{R}^k$، فإن (أ) صحيحة أيضاً، و (ب) تصح كالآتي

(ب) $\lim_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

(قارن المبرهنة ٣، ٤).

الدوال المستمرة Continuous Functions

٤، ٥ تعريف: لنفترض أن X و Y فضائيين مترين، $E \subset X$, $p \in E$، و f تطبيق E في Y. عندها يقال لـ f بأنها مستمرة في p إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

لكل النقاط $x \in E$ والتي يكون عندها $d_X(x,p) < \delta$.

إذا كانت f مستمرة في كل نقطة من نقاط E، عندها يقال لـــ f أنها ***مستمرة في E on continuous***.

يجب أن يلاحظ أن f يجب أن تكون معرفة في النقطة p لأجل أن تكون مستمرة في p. (قارن هذه الملاحظة مع الملاحظة التالية للتعريف ٤، ١).

إذا كانت p نقطة منعزلة لـــ **isolated point of E**، عندها فإن تعريفنا يؤدي إلى أن كل دالة f تمتلك E منطلقاً لتعريفها تكون مستمرة في p. وذلك لأنه نغض النظر عن أي $\varepsilon > 0$ نختارها، نستطيع أن نأخذ $\delta > 0$ بحيث أن النقطة الوحيدة $x \in E$ التي تحقق $d_X(x,p) < \delta$ هي $x = p$ ؛ عندها فإن

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

٤، ٦ مبرهنة: *في حالة التي قدمت في التعريف ٤، ٥، أفترض أيضاً أن p هي نقطة غاية لـــ E. عندها فإن f تكون مستمرة في p إذا وإذا فقط كان* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

البرهان: واضح جداً إذا قارنا التعريفين ٤، ١ و ٤، ٥.

نتطرق الآن إلى بناء الدوال. النص المختصر للمبرهنة الآتية هو أن الدالة المستمرة للدوال المستمرة تكون مستمرة.

٤، ٧ مبرهنة: *لنفترض أن X, Y, Z فضاءآت مترية، $x \in E$, f تطبيق E في Y، g تطبيق مدى f، $f(E)$، في Z، و h هو تطبيق E في Z المعرف بـــ*

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in E).$$

إذا كان f مستمرة في النقطة $p \in E$ وكانت g مستمرة في النقطة $f(p)$، عندها فإن h مستمرة في p.

نطلق على الدالة h بأنها تركيب *composition* أو (*the composite of d and g*). وغالباً ما يستخدم الرمز

$$h = g \circ f$$

في هذا المجال.

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن g مستمرة في $f(p)$، يوجد هنالك $\eta > 0$ بحيث $d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$ إذا كانت $d_Y(y, f(p)) < \eta$ و $y \in f(E)$.

بما أن f مستمرة في p، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث $d_Y(f(x), f(p)) < \eta$ إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$.

ينتج عن ذلك أن

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$$

إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$. لذلك فإن h تكون مستمرة في p.

٤، ٨ مبرهنة: *التطبيق f للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y تكون مستمرة في X إذا و إذا فقط كانت $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X لكل مجموعة مفتوحة V في Y.*

(تعرف الصور العكسية في التعريف ٢، ٢) تعتبر هذه خاصية مفيدة جداً للاستمرارية.

البرهان: لنفترض أن f مستمرة في X و V مجموعة مفتوحة في Y. أن علينا أن نبين أن كل نقطة من $f^{-1}(V)$ تكون نقطة داخلية لـ $f^{-1}(V)$. لذلك، نفترض أن $p \in X$ و $f(p) \in V$. بما أن V مفتوحة، يوجد هنالك $\varepsilon > 0$ بحيث أن $y \in V$ إذا كانت $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$ ؛ وبما أن f مستمرة في p، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$. لذلك فإن $x \in f^{-1}(V)$ طالما أن $d_X(x, p) < \delta$.

وبالعكس، نفترض أن $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X لكل مجموعة مفتوحة V في Y. نثبت $p \in X$ و $\varepsilon > 0$، لتكن V المجموعة التي تضم جميع الـ $y \in Y$ بحيث $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. عندها فإن V تكون مفتوحة ؛ إذن $f^{-1}(V)$ مفتوحة ؛ إذن يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $x \in f^{-1}(V)$ طالما أن $d_X(p, x) < \delta$. ولكن إذا كانت $x \in f^{-1}(V)$، عندها فإن $f(x) \in V$، لذلك فإن $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. وهذا ينهي البرهان.

نتيجة: *التطبيق f للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y يكون مستمراً إذا و إذا فقط كان $f^{-1}(C)$ مغلقاً في X لكل مجموعة مغلقة C في Y.*

يستنتج هذا من المبرهنة، بما أن المجموعة تكون مغلقة إذا و إذا فقط كانت متممتها مفتوحة، و بما أن $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$ لكل $E \subset Y$.

نتحول الآن إلى دوال القيم العقدية والقيم المتجهة، و إلى الدوال المعرفة في المجموعات الجزئية لـــ $\mathbf{R}^k$.

٤، ٩ مبرهنة: *لتكن f و g دالتين مركبتين مستمرتين في الفضاء المتري X. عندها يكون $f+g$ ، fg ، و f/g مستمرين في X.*

في الحالة الأخيرة، يجب علينا بالطبع أن نفترض أن $g(x) \neq 0$، لجميع الـــ $x \in X$.

البرهان: في النقاط المنعزلة لـــ x لا يوجد هنالك شيء لبرهنته. أما في نقاط الغاية، فإن التعبير يستنتج من المبرهنات ٤، ٤ و ٤، ٦.

٤، ١٠ مبرهنة: (أ) *لتكن $f_1,\ldots,f_k$ دوال حقيقية في الفضاء المتري X، ولتكن $\mathbf{f}$ التطبيق لـــ X في $\mathbf{R}^k$ المعرفة بـــ*

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x),\ldots,f_k(x)) \qquad (x \in X); \tag{٧}$$

عندها فإن $\mathbf{f}$ تكون مستمرة إذا و إذا فقط كانت كل من الدوال $f_1,\ldots,f_k$ مستمرة.

(ب) *إذا كان $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ تطبيقان مستمران لـــ X في $\mathbf{R}^k$، عندها فإن $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ & $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ تكون مستمرة في X.*

يطلق على الدوال $f_1,\ldots,f_k$ *المكونات* لـــ $\mathbf{f}$ *components of* $\mathbf{f}$. لاحظ أن $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ يكونان تطبيقاً في $\mathbf{R}^k$، بينما $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ تكون دالة حقيقية في X.

البرهان: يستنتج الجزء (أ) من المتباينات

$$\left|f_j(x) - f_j(y)\right| \leq \left|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\right| = \left\{\sum_{i=1}^{k}\left|f_i(x) - f_i(y)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

بالنسبة لـــ $j = 1,\ldots,k$. يستنتج الجزء (ب) من (أ) و المبرهنة ٤، ٩.

٤، ١١ أمثلة: إذا كانت $x_1,\ldots,x_k$ الإحداثيات للنقطة $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$، الدوال ϕ_i معرفة بـــ

$$\phi_i(\mathbf{x}) = x_i \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k) \tag{٨}$$

تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$، بما أن المتباينة

$$\left|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\mathbf{y})\right| \leq \left|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|$$

تبين بأننا قد نأخذ $\delta = \varepsilon$ في التعريف ٤، ٥. يطلق على الدوال ϕ_i أحياناً *الدوال الإحداثية*

coordinate functions.

تبين التطبيقات المتكررة للمبرهنة ٤، ٩ بأن كل أحادي الحد **monomial**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \qquad (٩)$$

حيث أن $n_1, n_2, \dots, n_k$ أعداد صحيحة غير سالبة، يكون مستمراً في $\mathbf{R}^k$. نفس الشيء يصح على المضاعفات الثابتة لـــ (٩)، نظراً لأنه من الواضح أن الثوابت مستمرة. يعقب ذلك أن كل متعددة الحدود P، التي تكون على شكل

$$P(\mathbf{x}) = \sum c_{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k), \qquad (١٠)$$

تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$. هنا تكون المعاملات $c_{n_1 \dots n_k}$ أعداد عقدية، $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة غير سالبة، والمجموع في (١٠) يمتلك حدود كثيرة منتهية.

إضافة لذلك، فإن كل دالة نسبية في $x_1, \dots, x_k$، أي أن، كل حاصل قسمة متعددات الحدود بالشكل (١٠)، تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$ طالما أن المقام لا يساوي صفر.

من متباينة المثلث، يستطيع المرء أن يلاحظ بسهولة أن

$$\big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k). \qquad (١١)$$

إذن يكون التطبيق $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ دالة حقيقية مستمرة في $\mathbf{R}^k$.

الآن إذا كانت $\mathbf{f}$ تطبيقاً مستمر من الفضاء المتري X إلى $\mathbf{R}^k$، وإذا كانت ϕ معرفة في X بالعلاقة $\phi(p) = |\mathbf{f}(p)|$، يعقب ذلك، استناداً إلى المبرهنة ٤، ٧، بأن ϕ تكون دالة حقيقية مستمرة في X.

٤، ١٢ ملاحظة: قمنا بتعريف رمز الاستمرارية للدوال المعرفة في المجموعة الجزئية E للفضاء المتري X. ولكن، المتمم لـــ E في X لا تلعب أي دور مهما كان في هذا التعريف (لاحظ بأن الوضعية كانت تختلف بعض الشيء بالنسبة لغايات الدوال). طبقاً لذلك، فإننا لا نخسر أي شيء مهم بإهمالنا لمتمم المنطلق لـــ f. أن هذا يعني بأنه ربما كان من المستحسن أن نتحدث عن التطبيق المستمر لفضاء متري معين في فضاء متري آخر، بدلاً من التطبيق للمجموعات الجزئية. أن هذا يبسط من تعبير وبراهين بعض المبرهنات. وقد استخدمنا بالفعل من المبدأ في المبرهنات من ٤، ٨ إلى ٤، ١٠، وسوف نستمر في البند الآتي بخصوص التراص.

الاستمرارية والتراص Continuity And Compactness

٤، ١٣ تعريف: يقال للتطبيق f للمجموعة E في R^k بأنه *مقيد bounded* إذا كان هنالك عدداً حقيقياً M بحيث أن $|f(x)| \le M$ لجميع $x \in E$.

٤، ١٤ مبرهنة: *لنفترض أن f تطبيق مستمر للفضاء المتري المتراص X في الفضاء المتري Y. عندها فإن $f(X)$ تكون متراصة.*

البرهان: لتكن $\{V_\alpha\}$ غطاءاً مفتوحاً لـ $f(X)$. بما أن f مستمرة، فإن المبرهنة ٤، ٨ تبين بأن كلاً من المجموعات $f^{-1}(V_\alpha)$ تكون مفتوحة. بما أن X متراصة، يوجد عدد كبير منتهي من الأسس أو الأدلة indices، لنقل $\alpha_1,\dots,\alpha_n$، بحيث

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}) \ . \qquad (١٢)$$

بما أن $f(f^{-1}(E)) \subset E$ لكل $E \subset Y$، فإن (١٢) تدل على أن

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \ . \qquad (١٣)$$

وهذا ينهي البرهان.

ملاحظة: استخدمنا العلاقة $f(f^{-1}(E)) \subset E$، نأخذه لـ $E \subset Y$. إذا كانت $E \subset X$، فإن $f^{-1}(f(E)) \supset E$ ؛ ليس بالضرورة أن تتحقق المعادلة في كلتا الحالتين.

سوف نستنتج الآن بعض النتائج للمبرهنة ٤، ١٤.

٤، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري المتراص X في R^k، عندها تكون $f(X)$ مغلقه ومقيدة. وهكذا فإن f تكون مقيدة.*

تنتج ذلك من المبرهنة ٢، ٤١. تكون النتيجة مهمة بشكل خاص عندما تكون f حقيقية:

٤، ١٦ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية مستمرة في الفضاء المتري المتراص X، و*

$$M = \sup_{p \in X} f(p) \ ، \quad m = \inf_{p \in X} f(p) \qquad (١٤)$$

عندها يوجد هنالك نقطتين $p,q \in X$ حيث أن $f(p) = M$ و $f(q) = m$.

الرمز في (١٤) يعني أن M هي القيد العلوي الأصغر للمجموعة التي تضم جميع الأعداد $f(p)$، حيث p تمتد خلال X، وان m القيد السفلي الأعظم لمجموعة الأعداد هذه.

من الممكن أيضا صياغة الاستنتاج بالشكل آلاتي: *يوجد هنالك نقطتين* q, p في X بحيث *ان* $f(q) \le f(x) \le f(p)$ لجميع $x \in X$; أي أن f تحرز قيمتها القصوى (في p) وقيمتها الصغرى (في q).

البرهان: استناداً للمبرهنة ٤، ١٥، فإن $f(x)$ مجموعة مغلقه ومقيدة من الأعداد الحقيقية ؛ إذن $f(x)$

تحتوي على

$$M = \sup f(X) \text{ و } m = \inf f(X)$$

استنادا للمبرهنة ٢، ٢٨.

٤، ١٧ مبرهنة: *لنفترض أن f تطبيق 1-1 مستمر للفضاء المتري المتراص X شاملاً الفضاء المتري Y. عندها فإن التطبيق العكسي f^{-1} المعرف على Y بـــ*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X)$$

يكون تطبيقاً مستمراً لـــ Y في X.

البرهان: بتطبيق المبرهنة ٤، ٨ على f^{-1} بدلاً من f، نلاحظ بأنه يكفي البرهنة على أن $f(V)$ تكون مجموعة مفتوحة في Y لكل مجموعة مفتوحة V في X . عين مثل هذه المجموعة V.

يكون المتمم V^c لـ V مغلقاً في X، إذن يكون متراصاً (المبرهنة ٢، ٣٥)، إذن $f(V^c)$ مجموعة جزئية متراصة لـــ Y (المبرهنة ٤، ١٤) وكذلك مغلقه في Y (المبرهنة ٢، ٣٤). بما أن f هي 1-1 وشاملاً، $f(V)$ هي المتممة لـــ $f(V^c)$. إذن $f(V)$ مفتوحة.

٤، ١٨ تعريف: لتكن f تطبيقاً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، نقول بأن f تكون *مستمرة بانتظام continuous uniformly* في X إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \qquad (١٥)$$

لجميع p , q في X التي يكون فيها $d_X(p,q) < \delta$.

لنناقش الفروق بين مفهومي الاستمرارية والاستمرارية المنتظمة. أولا، أن الاستمرارية

المنتظمة هي خاصية لدالة في مجموعة، بينما من الممكن تعيين الاستمرارية في نقطه واحدة. لذلك فإن السؤال عما إذا كانت دالة ما مستمرة بانتظام في نقطه معينه يعتبر سؤالاً عديم المعنى. ثانياً، إذا كانت f مستمرة في X، عندها فإنه من الممكن إيجاد، لكل $\varepsilon > 0$ ولكل نقطه p من X، العدد $\delta > 0$ الذي يمتلك الخاصية المذكورة في التعريف ٤، ٥. أن هذا الـــ δ يعتمد على كلٍ من ε و p. ولكن، إذا كانت f، مستمرة بانتظام في X، عندها فإنه من الممكن، لكل $\varepsilon > 0$، إيجاد عدد *واحد* $\delta > 0$ والذي يعوض عن جميع نقاط p في X.

من الواضح، أن كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة. أن كون هذين المفهومين متكافئين في المجموعات المتراصة هو موضوع المبرهنة القادمة.

٤، ١٩ مبرهنة: *لتكن f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري المتراص X في الفضاء المتري Y، عندها فإن f تكون مستمرة بانتظام في X.*

البرهان: لنأخذ $\delta > 0$. بما أن f مستمرة، بـــإمكاننا أن نرافق لكل نقطه $p \in X$ عدد اً موجباً $\phi(p)$ بحيث أن

$$d_X(p,q) < \phi(p) \quad ، \quad q \in X \text{ يؤدي إلى } d_Y(f(p),f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (١٦)$$

لتكن $J(p)$ المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ والتي يكون فيها

$$d_X(p,q) < \frac{1}{2}\phi(p). \qquad (١٧)$$

بما أن $p \in J(p)$، فإن طائفة جميع المجموعات $J(p)$ تكون غطاء اً مفتوحـــاً لـــ X؛ وبما أن X متراص، يوجد هنالك مجموعة منتهية من النقاط في X، $p_1,\ldots,p_n$ بحيث أن

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \qquad (١٨)$$

نضع

$$\delta = \frac{1}{2}\min[\phi(p_1),\ldots,\phi(p_n)]. \qquad (١٩)$$

عندها فإن $\delta > 0$. (هذه إحدى النقاط التي تكون فيها منتهية الغطاء، المتضمن في تعريف التراص، مهمة جد اً. أن القيمة الدنيا لمجموعة منتهية من الأعداد الموجبة تكون موجبة، بينما من الجائز جداً أن يكون الـــ اعظم قيد أدنى inf لمجموعة غير منتهية من الأعداد الموجبة يساوي 0 صفراً).

الآن لتكن q و p نقطتين من X، بحيث أن $d_X(p,q) < \delta$. حسب (١٨)، يوجد هنالك عدداً صحيحاً m، $1 \le m \le n$، بحيث أن $p \in J(p_m)$ ؛ إذن

$$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m), \qquad (٢٠)$$

ولدينا أيضاً

$$d_X(q, p_m) \le d_X(p,q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\phi(p_m) \le \phi(p_m) .$$

أخيراً، تبعاً لذلك تُبَين (١٦) أن

$$d_Y(f(p), f(q)) \le d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon .$$

وهذا ينهي البرهان.

يوجد هنالك برهان بديل لهذه المبرهنة مذكور في التمرين ١٠.

نستمر الآن لنبين أن التراص هو افتراض أساسي في المبرهنات ٤، ١٤، ٤، ١٥، ٤، ١٦ و ٤، ١٩.

٤، ٢٠ مبرهنة: *لتكن E مجموعة غير متراصة في R^1. عندها فإن*

(أ) *يوجد هنالك دالة مستمرة في E ليست مقيدة not bounded ؛*

(ب) *يوجد هنالك دالة مستمرة ومقيدة في E لا تمتلك قيمه عظمى إضافة لذلك، إذا كانت E مقيدة، فإن*

(ج) *يوجد هنالك دالة مستمرة في E ليست مستمرة بانتظام.*

البرهان: لنفترض أولا أن E *مقيدة*، لذلك يوجد هنالك نقطة غاية x_0 لـ E والتي هي ليست نقطه في E. لاحظ

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0} \qquad (x \in E) \qquad (٢١)$$

إن هذه الدالة مستمرة في E (المبرهنة ٤، ٩) ، ولكنها من الواضح ليست *مقيدة* . لبرهنة أن (٢١) ليست مستمرة بانتظام، لتكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ عشوائيتين، ونختار نقطه $x \in E$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta$. بأخذ t قريبة بما فيها الكفاية لـ x_0، فإننا نستطيع أن نأخذ عندها الفرق $|f(t) - f(x)|$ اكبر من ε، على الرغم من أن $|t - x| < \delta$. بما أن هذا صحيح لكل

$\delta > 0$، إذن f ليست مستمرة بانتظام في E.

إن الدالة g التي على شكل

$$(x \in E) \quad g(x) = \frac{1}{1+(x+x_0)^2} \qquad (٢٢)$$

تكون مستمرة في E، *ومقيدة*، بما أن $0 < g(x) < 1$. فإنه من الواضح أن

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1,$$

بينما أن $g(x) < 1$ لكل $x \in E$. لذلك فإن g لا تمتلك قيمه عظمى في E.

بعد أن برهنا المبرهنة بالنسبة للمجموعات المقيدة E، لنفترض الآن أن E غير *مقيدة*. عندها فإن $f(x) = x$ يبرهن (أ)، بينما

$$(x \in E) \quad h(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (٢٣)$$

تبرهن (ب)، نظراً لأن

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

و $h(x) < 1$ لجميع $x \in E$.

إن التوكيد (ج) سيصبح خاطئاً إذا حذفت التقييد **boundedness** من الافتراض. وذلك لأنه، لتكن E المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة. عندها فإن كل دالة معرفة في E تكون مستمرة بانتظام في E. لرؤية ذلك، فإننا نحتاج فقط إلى وضع $\delta > 1$ في التعريف ٤، ١٨.

نختتم هذا البند ببيان أن التراص يكون أساسيا أيضا في المبرهنة ٤، ١٧.

٤، ٢١ مثال: لتكن X الفترة النصف – مفتوحة $[0,2\pi)$ في الخط الحقيقي، ولتكن f التطبيق لـــ X شاملاً الدائرة Y التي تتألف من جميع النقاط التي تبعد عن المركز بـــ 1، والتي على شكل

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (٢٤)$$

سوف تبرهن استمرارية الدالتين المثلثتين، الجيب تمام والجيب، إضافة إلى خواصهما الدورية، في الفصل الثامن. تبين هذه النتائج أن f تكون تطبيقاً 1-1 مستمراً لـــ X شاملاً Y.

ولكن، التطبيق المعاكس (الذي يتواجد، نظراً لأن f هي 1- 1 وشاملاً) يخفق أن يكون مستمراً في النقطة $\mathbf{f}(0) = (1,0)$. بالطبع أن، X ليست متراصة في هذا المثال. (ربما من الجدير بالذكر

أن نشير هنا إلى أن f^{-1} تخفق في أن تكون مستمرة على الرغم من كون Y متراصة !)

الاستمرارية والترابط Continuity And Connectedness

٤، ٢٢ مبرهنة: *إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، وكانت E مجموعة جزئية مترابطة لـ X، عندها فإن $f(E)$ تكون مترابطة.*

البرهان: لنفترض، على العكس تماماً، أن $f(E) = A \cup B$، حيث أن A و B مجموعتان جزئيتان متباعدتان غير خاليه لـ Y. نضع $G = E \cap f^{-1}(A)$، $H = E \cap f^{-1}(B)$. عندها فإن $E = G \cup H$، ولا تكون G ولا H خاليه. بما أن $A \subset \overline{A}$ (الانغلاق لـ A)، لدينا $G \subset f^{-1}(\overline{A})$، تكون المجموعة الأخيرة مغلقه، لأن f مستمرة ؛ إذن $\overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A})$. ينتج عن ذلك أن $f(\overline{G}) \subset \overline{A}$. بما أن $f(H) = B$ و $\overline{A} \cap B$ خاليه، نستنتج من ذلك أن $\overline{G} \cap H$ خالية.

بنفس الطريقة نبين أن $G \cap \overline{H}$ فارغة. لذلك فإن G و H متباعدين. أن هذا غير ممكن إذا كانت E مترابطة.

٤، ٢٣ مبرهنة: *لتكن f دالة حقيقية مستمرة في الفترة $[a,b]$. إذا كانت $f(a) < f(b)$ وكانت c عدداً بحيث أن $f(a) < c < f(b)$، عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ بحيث أن $f(x) = c$.*

وبالطبع فإن، نفس النتيجة تتحقق، إذا كانت $f(a) > f(b)$. بصوره غير دقيقه، تفيد هذه المبرهنة بأن الدالة الحقيقية المستمرة تنتحل جميع القيم المتوسطة في الفترة.

البرهان: استناداً للمبرهنة ٢، ٤٧، تكون $[a,b]$ مترابطة ؛ إذن تبين المبرهنة ٤، ٢٢ بأن $f([a,b])$ تكون مجموعة جزئية مترابطة لـ $\mathbf{R}^1$، ويستنتج المطلوب باستخدام المبرهنة ٢، ٤٧ مره ثانية.

٤، ٢٤ ملاحظة للمرحلة الأولى، ربما يبدو أن المبرهنة ٤، ٢٣ تمتلك معكوساً. أي انه، ربما يفكر البعض بأنه لأي نقطتين $x_1 < x_2$ ولأي عدد c بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد هنالك نقطه x في (x_1, x_2) بحيث أن $f(x) = c$، عندها فإن f يجب أن تكون مستمرة.

بالإمكان استنتاج عدم صحة هذه الفكرة من التمرين ٤، ٢٧ (د).

عدم الاستمرارية (التفاصل) Discontinuities

إذا كانت x نقطة في منطلق تعريف الدالة f الذي تكون فيه f غير مستمرة، فإننا نقول أن f غير مستمرة (منفصلة) في x، وان f تمتلك عدم استمرارية في x. إذا كانت f معرفة في فترة أو على قطعة، فإنه من الشائع تقسيم عدم الاستمرارية إلى نوعين. قبل أن نقدم هذا التصنيف، يتوجب علينا أن نعرف الغايتين اليمنى واليسرى لـ f في x، واللتين يرمز لهما بـ $f(x+)$ و $f(x-)$، على التوالي.

٤، ٢٥ تعريف: لتكن f معرفة في (a,b). تأمل أي نقطه x بحيث أن $a \le x < b$. إننا نكتب

$$f(x+) = q$$

إذا كانت $f(t_n) \to q$ عندما $n \to \infty$، لجميع المتتاليات $\{t_n\}$ في (x,b) بحيث أن $t_n \to x$. وللحصول على تعريف $f(x-)$، بالنسبة لـ $a < x \le b$، فإننا نحدد تعاملنا مع المتتاليات $\{t_n\}$ في (a,x).

من الواضح أن لكل نقطه x من (a,b)، يتواجد $\lim_{t\to x} f(t)$ إذا وإذا فقط كان

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t)$$

٤، ٢٦ تعريف: لتكن f معرفة في (a,b). إذا كانت f غير مستمرة في النقطة x **discontinues**، وكانت $f(x-)$ و $f(x+)$ موجدتين، عندها يقال بأن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الأول ***first kind*** أو عدم الاستمرارية البسيطة ***simple discontinues***، في x. أما الحالات الأخرى من عدم الاستمرارية فيقال بأنها من النوع الثاني ***second kind***.

هنالك طريقتان تمتلك بموجبهما الدالة عدم استمرارية بسيطة: أما أن تكون $f(x+) \ne f(x-)$ [وعندها تكون قيمه $f(x)$ عديمة الأهمية]، أو أن تكون $f(x+) = f(x-) \ne f(x)$.

٤، ٢٧ أمثلة:

(أ) عرف

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{(نسبي x)}, \\ 0 & \text{(غير نسبي x)}. \end{cases}$$

عندها فإن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني عند كل نقطه x، وذلك لعدم وجود $f(x+)$ ولا $f(x-)$.

(ب) عرف

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{(نسبي x)}, \\ 0 & \text{(غير نسبي x)}. \end{cases}$$

عندها تكون f مستمرة في $x=0$ وتمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني في كل نقطه أخرى.

(ج) عرف

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-3<x<-2), \\ -x-2 & (-2\le x<0), \\ x+2 & (0\le x<1). \end{cases}$$

عندها فإن f تمتلك عدم استمرارية بسيطة في $x=0$ و تكون مستمرة في كل نقطة أخرى من $(-3,1)$.

(د) عرف

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

بما أنه لا توجد $f(0+)$ ولا $f(0-)$، فإن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني في $x=0$. لم نقم لحد الآن بإثبات أن $\sin x$ دالة مستمرة. إذا افترضنا هذه النتيجة في الوقت الحاضر، فإن المبرهنة ٤، ٧ تدل على أن f تكون مستمرة عند كل نقطه $x\neq 0$.

الدوال الرتيبة Monotonic Functions

نقوم الآن بدراسة تلك الدوال التي لا تتناقص أبدا (أولا تتزايد أبدا) عند قطعة معطاة.

٤، ٢٨ تعريف: لتكن f حقيقية في (a,b). عندها يقال أن f *متزايدة ترتيبياً* ***monotonically increasing*** في (a,b) إذا كانت $a<x<y<b$ تؤدي إلى أن $f(x)\le f(y)$. إذا تم قلب المتباينة الأخيرة، فإننا نحصل على تعريف الدالة *المتناقصة ترتيبياً* ***monotonically decreasing*** طَبقة الدوال الرتيبة تشمل كل من الدوال المتزايدة والمتناقصة.

٤، ٢٩ مبرهنة: *لتكن f متزايدة ترتيبياً في (a,b). عندها فإن تتواجد $f(x+)$ و $f(x-)$ عند كل نقطه من x من (a,b). بشكل أدق*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) \ . \qquad (٢٥)$$

إضافة لذلك، إذا كانت $a < x < y < b$، فإن

$$f(x+) \le f(y-) \ . \qquad (٢٦)$$

من الواضح أن نتائج مماثلة تتحقق بالنسبة للدوال المتناقصة ترتيباً.

البرهان: استناداً إلى الافتراض، فإن مجموعة الأعداد $f(t)$، حيث $a < t < x$، تكون مقيدة من الأعلى بالعدد $f(x)$، وذلك فإنها تمتلك قيداً علوياً اصغر والذي سنرمز له بالحرف A. من الواضح أن $A \le f(x)$. يتوجب علينا أن نبين أن $A = f(x-)$.

لنأخذ $\varepsilon > 0$. نستنتج من تعريف A كقيد علوي اصغر بأنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $a < x - \delta < x$ و

$$A - \varepsilon < f(x-\delta) \le A \ . \qquad (٢٧)$$

بما أن f رتيبة، فإن لدينا

$$(x-\delta < t < x) \qquad f(x-\delta) \le f(t) \le A \ . \qquad (٢٨)$$

بجمع (٢٧) و(٢٨)، نلاحظ بأن

$$(x-\delta < t < x) \quad |f(t) - A| < \varepsilon \ .$$

إذن $f(x-) = A$.

يبرهن القسم الثاني من (٢٥) بنفس الطريقة بالضبط.

الخطوة التالية، إذا كانت $a < x < y < b$، فإننا نلاحظ من (٢٥) بأن

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t) \ . \qquad (٢٩)$$

يتم الحصول على المساواة الأخيرة بتطبيق (٢٥) على $(a\ ,\ y)$ بدلاً من $(a\ ,\ b)$. بنفس الطريقة، فإن

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t) \ . \qquad (٣٠)$$

إن مقارنة (٢٩) و (٣٠) تعطيننا (٢٦).

نتيجة: *الدوال الرتيبة لا تكون غير مستمرة من النوع الثاني.*

هذه النتيجة تبين أن كل دالة رتيبة غير مستمرة في مجموعة النقاط القابلة للعد على الأكثر. عوضاً عن أن نلجأ إلى المبرهنة العامة المقدم برهانها في التمرين ١٧، فإننا نعمم هنا برهاناً بسيطاً ينطبق على الدوال الرتيبة.

٤، ٣٠ مبرهنة: *لتكن f رتيبة في $(a\ ,\ b)$. عندها فإن مجموعة نقاط $(a\ ,\ b)$ التي تكون عندها f غير مستمرة، تكون على الأكثر قابلة للعد.*

البرهان: لنفترض، لأجل المحدودية، أن f متزايدة، ولتكن E مجموعة النقاط التي تكون عندها f غير مستمرة.

لكل نقطة x من E نرفق عدداً نسبياً $r(x)$ بحيث أن

$$f(x-) < r(x) < f(x+) \ .$$

بما أن $x_1 < x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1+) \le f(x_2-)$، نلاحظ أن $r(x_1) \ne r(x_2)$ إذا كانت $x_1 \ne x_2$.

وبهذا نكون قد كونا تراسل 1-1 بين المجموعة E والمجموعة الجزئية لمجموعة الأعداد النسبية. وكما نعرف، فإن الأخير، قد يكون قابل للعد.

٤، ٣١ ملاحظة: يجب الإشارة هنا إلى أن عدم استمرارية الدوال الرتيبة ليس بالضرورة أن يكون منعزلاً. في الحقيقة، لنأخذ أي مجموعة جزئية قابلة للعد E لـــ (a,b)، والتي حتى من الممكن أن تكون مركزه، نستطيع أن نكون الدالة f، التي تكون رتيبة في (a,b)، غير مستمرة عند كل نقطة من نقاط E وليس عند أية نقطه أخرى من (a,b).

لبيان ذلك، لنرتب جميع نقاط E في متتالية الأعداد الموجبة $\{x_n\}$، $n = 1,2,3,\ldots$.
لتكن $\{c_n\}$ متتالية الأعداد الموجبة بحيث أن $\sum c_n$ تتقارب. نعرف

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \qquad (a < x < b) \qquad (٣١)$$

يفهم الجمع كالتالي: الجمع لتلك الأسس n التي يكون عندها $x_n < x$. إذا لم تكن هنالك أي نقطه x_n إلى اليسار من x فإن المجموع يكون فارغاً ؛ ووفقاً للعرف المألوف، فإننا نعرفه بأنه يكون صفراً. بما أن (٣١) تتقارب بصورة مطلقة، لذلك فإن طبيعة ترتيب الحدود ليست مهمة.

نترك برهنة الخصائص الآتية لـــ f إلى القارئ.

(أ) تكون f متزايدة ترتيبياً في (a,b) ؛

(ب) تكون f غير مستمرة عند جميع نقاط E ؛ في الحقيقية أن،

$$f(x_n+)-f(x_n-)=c_n \ .$$

(ج) تكون f مستمرة عند كل النقاط الأخرى لـــ (a,b).

بالإضافة لذلك، ليس من الصعب أن نلاحظ $f(x-)=f(x)$ عند جميع نقاط (a,b). إذا كانت أي دالة تحقق هذا الشرط، فإننا نقول أن f *مستمرة من اليسار* ***continuous from the left***. إذا اخذ الجمع في (٣١) فوق جميع الأسس n التي يكون عندها $x_n \le x$، فسيكون عندها $f(x+)=f(x)$ عن جميع النقاط (a,b) ؛ أي أن تكون، f *مستمرة من اليمين* ***continuous from the right***.

من الممكن تعريف مثل هذه الدوال بطريقه أخرى ؛ وكمثال على ذلك نشير إلى المبرهنة ٦، ١٦.

الغايات اللانهائية والغايات عند اللانهائية

Infinite Limits And Limits At Infinity

بغية التمكن من العمل ضمن نظام الأعداد الحقيقية الموسع، نقوم الآن بتوسيع مجال التعريف ٤، ١، وذلك بإعادة صياغته وفق حدود الجوار (المناطق المجاورة).

لأي عدد حقيقي x، قمنا بتحديد الجوار لـــ x لتكون القطعة $(x-\delta, x+\delta)$.

٤، ٣٢ تعريف: لأي عدد حقيقي c، تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث أن $x>c$ "*جوار المنطقة المجاورة لـــ* $+\infty$ " وهي تكتب كالآتي: $(c,+\infty)$. وبنفس الطريقة، فإن المجموعة $(-\infty,c)$ هي " *جوار المنطقة المجاورة لـــ* $-\infty$ ".

٤، ٣٣ تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة في E. نقول بأن

$$f(t)\to A, \quad \text{عندها} \quad t\to x$$

حيث تقع A و x في النظام الموسع للأعداد الحقيقية، إذا كان لكل جوار U لـــ A يوجد هنالك جوار V لـــ x بحيث أن $V\cap E$ ليست خاليه، وبحيث أن $f(t)\in U$ لجميع

$t \in V \cap E$ ، $t \neq x$.

إن ملاحظة وجيزة تبين أن هذا يتطابق مع التعريف ٤، ١ عندما تكون A و x عددين حقيقيين.

النظير المماثل للمبرهنة ٤، ٤ يتحقق أيضا، ولا يقدم برهان ذلك أي شئ جديد. سوف نقوم بتقديمه لغرض تكامل الموضوع.

٤، ٣٤ مبرهنة: *لتكن f و g معرفة في E. لنفترض أن*

$$f(t) \to A \quad ، \quad g(t) \to B \qquad \text{عندما} \qquad t \to x \,.$$

عندها فإن

(أ) $f(t) \to A'$ *تدل على أن* $A' = A$.

(ب) $(f+g)(t) \to A+B$،

(ج) $(fg)(t) \to AB$،

(د) $(f/g)(t) \to A/B$،

شريطة أن تكون العناصر اليمنى لـ (ب)، (ج)، و(د) معرفة.

لاحظ بأن $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $A/0$ ليست معرفة (راجع التعريف ١، ٢٣).

تمارين EXERCISES

١- افترض أن f دالة حقيقية معرفة في $\mathbf{R}^1$ والتي تحقق

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)-f(x-h)\right]=0$$

لكل $\mathbf{R}^1$ x. هل يدل ذلك على أن f مستمرة ؟

٢- إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، برهن على أن

$$f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$$

لكل مجموعة $E\subset X$. (نرمز $\overline{E}$ إلى انغلاق E). بين، بمثال، أن $f(\overline{E})$ لا يمكن أن تكون مجموعة جزئية فعلية لـ $\overline{f(E)}$.

٣- لتكن f دالة حقيقية مستمرة في الفضاء المتري X. لتكن $Z(f)$ (المجموعة الصفرية لـ f) مجموعة جميع النقاط $p\in X$ التي يكون عندها $f(p)=o$. برهن على أن $Z(f)$ تكون مغلقة.

٤- لتكن f و g تطبيقان مستمران للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، ولتكن E مجموعة جزئية كثيفة لـ X. برهن على أن $f(E)$ تكون كثيفة في $f(X)$. إذا كانت $g(p)=$ $f(p)$ لجميع $p\in E$، برهن على أن $g(p)=f(p)$ لجميع $p\in X$. (بكلمة أخرى، يتحدد التطبيق المستمر بأقيامه في المجموعة الجزئية الكثيفة ومنطلقها).

٥- إذا كانت f دالة حقيقية ومستمرة معرفة في المجموعة المغلقة $E\subset\mathbf{R}^1$، برهن على انه يوجد هنالك دوال حقيقية مستمرة g في $\mathbf{R}^1$ بحيث أن $g(x)=f(x)$ لجميع $x\in E$. (دوالاً مثل هذه الـ g تسمى *الامتدادات المستمرة* لـ f *continues extensions of* من E إلى $\mathbf{R}^1$. بين أن هذه النتيجة تكون خاطئة إذا حذفنا كلمة "مغلقة". وسع النتيجة لتشمل دوال القيم المتجهة. تلميح: ليكن الرسم البياني لـ g خطاً مستقيماً في كل القطعات التي تشكل المتمم لـ E (قارن مع التمرين ٢٩، الفصل الثاني). تبقى النتيجة صحيحة إذا قمنا باستبدال $\mathbf{R}^1$ بأي فضاء متري، ولكن برهنة ذلك ليست بتلك السهولة.

٦- إذا كانت f معرفة في E، الرسم البياني لـ f هو مجموعة النقاط $(x,f(x))$، بالنسبة لـ $x\in E$. بشكل خاص، إذا كانت E مجموعة من الأعداد الحقيقية، وكانت قيم f

حقيقية، فإن الرسم البياني لـ f هو المجموعة الجزئية للمستوي.

افترض أن E متراصة، وبرهن أن f تكون مستمرة في E إذا وإذا فقط كان رسمها البياني متراص.

٧- إذا كانت $E \subset X$ وكانت f دالة معرفة في X، فإن التقييد لـ f في E *the restriction of f on* هو الدالة g التي يكون منطلق تعريفها هو E بحيث أن $g(p) = f(p)$ بالنسبة لـ $p \in E$. عرف f و g في $\mathbf{R}^2$ بما يلي:

$$f(0,0) = g(0,0) = 0 \quad , f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^4)} \quad , g(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^6)}$$ إذا

كانت $(x,y) \neq (0,0)$. برهن على أن f تكون مقيدة في $\mathbf{R}^2$، وان g تكون غير مقيدة في كل جوار لـ $(0,0)$، وان f غير مستمرة في $(0,0)$ ،على الرغم من ذلك، فإن المضيقات restrictions لكل f و g لكل خط مستقيم في $\mathbf{R}^2$ تكون مستمرة !

٨- لتكن f دالة حقيقية مستمرة بانتظام في المجموعة المقيدة E في $\mathbf{R}^1$. برهن على أن f تكون مقيدة في E.

بين أن هذا الاستنتاج يكون خاطئاً إذا حذفت تقييد E من الافتراض.

٩- بين أن شرط تعريف الاستمرارية المنتظمة يمكن أن يصاغ بالشكل الآتي، بمصطلحات أقطار المجموعات: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$ لجميع $E \subset X$ بـ $\operatorname{diam} E < \delta$.

١٠- اكمل تفاصيل البرهان البديل الآتي للمبرهنة ٤، ١٩ : إذا كانت f ليست مستمرة بانتظام، عندها لبعض $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك متتاليتين $\{p_n\},\{q_n\}$ في X بحيث أن $d_X(p_n,q_n) \to 0$ لكن $d_Y(f(p_n),f(q_n)) > \varepsilon$. استخدم المبرهنة ٢، ٣٧ للحصول على تناقض.

١١- أفترض أن f تطبيقاً مستمراً بانتظام للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y برهن أن $\{f(x_n)\}$ تكون متتالية كوشي في Y لكل متتالية كوشية في X. استخدم هذه النتيجة لتقدير برهانا بديلاً للمبرهنة المنصوص في التمرين ١٣.

١٢- تكون الدالة المستمرة بانتظام لداله مستمرة بانتظام، مستمرة بانتظام. اكتب هذا بشكل أكثر دقة وبرهنة.

١٣- لتكن E مجموعة جزئية مركزه في الفضاء المتري X، ولتكن f دالة حقيقية مستمرة بانتظام معرفة في E. برهن على أن f تمتلك امتداداً مستمراً من E إلى X. (راجع التمرين ٥ بالنسبة للاصطلاحات). (تتأتى الوحدانية من التمرين ٤). تلميح: لكل $p \in X$ ولكل عدد صحيح موجب n، لتكن $V_n(p)$ مجموعة جميع $q \in E$ ← $d(p,q) < 1/n$. استخدم التمرين ٩ لتبين أن تقاطع الانغلاقات للمجاميع $f(V_1(p), f(V_2(p),\ldots,$ يتألف من نقطه واحدة، لنقل $g(p)$، من $\mathbf{R}^1$.

برهن على أن الدالة g المعرفة بهذا الشكل في X هي الامتداد المطلوب لـ f.

هل من الممكن استبدال مدى الفضاء $\mathbf{R}^1$ بـ $\mathbf{R}^k$؟ بأي فضاء متري متراص ؟بأي فضاء متري تام ؟بأي فضاء متري ؟

١٤- لتكن $I = [0,1]$ وحدة الفترة المغلقة. افترض أن f هي تطبيق مستمر لـ I في I برهن على أن $f(x) = x$ لواحدة على الأقل من $x \in I$.

١٥- يسمى التطبيق X في Y *مفتوحاً open* إذا كانت $f(V)$ مجموعة مفتوحة في Y كلما كانت V مجموعة مفتوحة في X.

برهن على أن كل تطبيق مفتوح ومستمر لـ $\mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^1$ يكون رتيباً.

١٦- لتكن $[x]$ ترمز إلى اكبر الأعداد الصحيحة الموجودة في x، أي أن، $[x]$ هي العدد الصحيح بحيث أن $x-1 < [x] \le x$، ولتكن $(x) = x - [x]$ ترمز إلى الجزء الكسري من x. ماهية الاستمراريات التي تمتلكها الدالتين $[x]$ و (x) ؟

١٧- لتكن f دالة حقيقية معرفة في (a,b). برهن على أن مجموعة النقاط التي تمتلك فيها f استمرارية بسيطة تكون قابلة للعد على الأكثر. *تلميح:* لتكن E المجموعة التي $f(x-) < f(x+)$. مع كل نقطة x من E، ارفق الثلاثي (p,q,r) للأعداد النسبية بحيث أن

(أ) $f(x-) < p < f(x+)$،

(ب) تدل $a < q < t < x$ على أن $f(t) < p$،

(ج) تدل $x < t < r < b$ على أن $f(t) > p$.

إن المجموعة لجميع مثل هذه الثلاثيات تكون قابلة للعد. بين أن كل ثلاثي كهذا يكون

مترافقاً مع نقطه واحدة على الأكثر لـــ E. تناول بنفس الطريقة مع الأنواع المختلفة الأخرى من الاستمرارية البسيطة.

١٨- يمكن كتابة كل عدد نسبي x على شكل $x = m/n$ حيث $n > 0$, n, m عددين صحيحين بدون أي قاسم مشترك. عندما تكون $x = 0$, . نأخذ $n = 1$ لاحظ الدالة f المعرفة في $\mathbf{R}^1$ بواسطة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{x غير نسبي}), \\ \dfrac{1}{n} \ . & (x = \dfrac{m}{n}) \end{cases}$$

برهن على أن f تكون مستمرة عند كل نقطه غير نسبية، وبأن x تمتلك عدم استمرارية بسيطة عند كل نقطه نسبية.

١٩- افترض أن f دالة حقيقية بمنطلق التي تمتلك خاصية القيمة المتوسطة: إذا كانت $f(a) < c < f(b)$ ، عندها فإن $f(x) = c$ لبعض x بين a و b. افترض أيضا، أنه لكل عدد نسبي r، تكون مجموعة جميع x بحيث $f(x) = r$ مغلقة.

برهن أن f تكون مستمرة.

تلميح: إذا كانت $x_n \to x_0$ لكن $f(x) > r > f(x_0)$ لبعض r وجميع n، فإن $f(t_n) = r$ لبعض t_n بين x_0 و x_n؛ لذلك فإن $t_n \to x_0$. أوجد تناقض.

(ان جي. فاين، امريكن ماث الشهرية، مجلد ٧٣، ١٩٦٦، صفحه ٧٨٢).

(N. J. Fine, A*mer. Math. Monthly*, vol. 73, 1966, p. 782).

٢٠- إذا كانت E مجموعة جزئية غير خاليه في الفضاء المتري X، عرف المسافة بين $x \in X$ إلى E بواسطة

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z) \ .$$

(أ) برهن على أن $\rho_E(x) = 0$ إذا وإذا فقط كانت $x \in \overline{E}$.

(ب) برهن على أن ρ_E دالة مستمرة بانتظام في X، وذلك ببيان أن

$$\left|\rho_E(x) - \rho_E(y)\right| \le d(x, y)$$

لجميع $x \in X, y \in X$.

تلميح: $\rho_E(x) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

لذلك $\rho_E(x) \le d(x,y) + \rho_E(y)$,

٢١- افترض أن K و F مجموعتان منفصلتان في الفضاء المتري X، وان K متراصة، F مغلقة. برهن على أنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $d(p,q) > \delta$ إذا كانت $q \in F, p \in K$.

تلميح: ρ_F هي دالة مستمرة موجبة في K.

بين أن النتيجة قد لا تتحقق بالنسبة لمجموعتين مغلقتين منفصلتين إذا لم تكن أي واحدة منهما متراصة.

٢٢- لتكن A و B مجموعتين منفصلتين غير خاليتين في الفضاء المتري X، وعرف

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad . \qquad (p \in X)$$

بين أن f دالة مستمرة في X التي يقع مداها في $[0,1]$ وان، $f(p) = 0$ بالضبط في A و $f(p) = 1$ بالضبط في B. يبرهن هذا معكوس التمرين ٣: كل مجموعة مغلقه $A \subset X$ تكون $Z(f)$ لبعض f الحقيقية والمستمرة في X. بوضع

$$V = f^{-1} = \left(\left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right), \quad , \quad W = f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right)$$

بين أن V و W تكونا منفصلتين ومفتوحتين، وبان $A \subset V$، $B \subset W$. (لذلك فإن أزواج المجموعات المنفصلة والمنغلقة في الفضاء المتري يمكن أن تغطي بأزواج مجموعات منفصلة ومفتوحة. يطلق على هذه الخاصية للفضاء المتري *"النظامية"* ***normality***.

٢٣- يقال لداله القيمة -الحقيقية f المعرفة في (a,b) بأنها *محدبة* ***convex*** إذا كانت

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

كلما كانت $a < x < b$, $a < y < b$, $0 < \lambda < 1$.

برهن على أن كل دالة محدبة تكون مستمرة. برهن على أن كل دالة محدبة متزايدة لدالة محدبة تكون محدبة. (على سبيل المثال، إذا كانت f محدبة، فإن e^f تكون كذلك).

إذا كانت f محدبة في (a,b) وإذا كانت $a < s < t < u < b$، بين أن

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \le \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \le \frac{f(u) - f(t)}{u - t} .$$

٢٤- افترض أن f دالة حقيقية مستمرة معرفة في (a,b) بحيث أن

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

لجميع $x,y \in (a,b)$. برهن على أن f تكون محدبة.

٢٥- إذا كانت $A \subset \mathbf{R}^k$ و $B \subset \mathbf{R}^k$، عرف $A+B$ لتكون المجموعة التي تضم جميع المجاميع $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ بـ $\mathbf{x} \in A$ ، $\mathbf{y} \in B$.

(أ) إذا كانت K متراصة و C مغلقة في $\mathbf{R}^k$، برهن على أن $K+C$ تكون مغلقة.

تلميح: خذ $\mathbf{z} \notin K+C$ ضع $F = \mathbf{z}-C$، المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ بحيث $\mathbf{y} \in C$. عندها فإن K و F تكونا غير متقاطعين. أختار δ كما في التمرين ٢١. بين أن الكرة المفتوحة التي يكون مركزها $\mathbf{z}$ ونصف قطرها δ لا تقاطع $K+C$.

(ب) لتكن α عدد اً حقيقياً غير نسبي. لتكن C_1 مجموعة جميع الأعداد الصحيحة، لتكن مجموعة C_2 جميع $n\alpha$ بحيث $n \in C_1$. بين أن C_1 و C_2 مجموعتين جزئيتين مغلقتين لـ $\mathbf{R}^1$ اللتين يكون مجموعتهما $C_1 + C_2$ غير مغلقاً، وذلك ببيان أن $C_1 + C_2$ مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد $\mathbf{R}^1$.

٢٦- أفترض أن X، Y، Z فضاءآت مترية، وإن Y متراصة. لتكن f تطبيق X في Y، لتكن g تطبيقاً مستمراً واحد لواحد لـ Y في Z، وضع $h(x) = g(f(x))$ بالنسبة لـ $x \in X$.

برهن على أن f تكون مستمرة بانتظام إذا كانت h مستمرة بانتظام.

تلميح: تمتلك g^{-1} منطلقاً متراصاً $g(Y)$، و $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

برهن أيضاً على أن f تكون مستمرة إذا كانت h مستمرة.

بين (بتحوير المثال ٤، ٢١ ، أو بإيجاد مثالاً مختلفاً) على أن تراص Y لا يمكن حذفه من الافتراض، حتى عندما تكون X و Z متراصتين.

الفصل الخامس

التفاضـــل

- مشتقة الدوال الحقيقية
- مبرهنات القيمة الوسطى
- استمرارية المشتقات
- قاعدة آل هوبتال
- مشتقات الرتبة الأعلى
- مبرهنة تيلر
- تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة
- تمارين

الفصل الخامس
التفـاضـل
Differentiation

سوف نحدد اهتمامنا في هذا الفصل (باستثناء الجزء الأخير منه) على الدوال الحقيقية المعرفة في الفترات أو القطع. يرجع ذلك إلى أسباب منطقية، نظراً لظهور اختلافات جوهرية عندما ننتقل من الدوال الحقيقية إلى الدوال ذات القيم المتجهة. سوف نناقش تفاضل الدوال المعرفة في R^k في الفصل التاسع.

مشتقة الدالة الحقيقية The Derivative Of A Real Function

٥، ١ تعريف: لتكن f معرفة (وبقيم حقيقية) في $[a, b]$. لأي $x \in [a,b]$ كوّن حاصل القسمة

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b, t \neq x), \tag{١}$$

وعرف

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) , \tag{٢}$$

شريطة أن تكون هذه الغاية موجودة وفقاً للتعريف ٤، ١

لذلك نرفق مع الدالة f الدالة f' التي يكون منطلقها مجموعة النقاط x التي يكون عندها الغاية (٢) موجودة ؛تسمى f' *مشتقة* f *derivative*.

إذا كانت f' معرفة في النقطة x فإننا نقول أن f *قابلة للتفاضل في* x *differentiable at*.

إذا كانت f' معرفة عند كل نقطة بمجموعة $E \subset [a,b]$، فإننا نقول أن f قابلة للتفاضل في E.

من الممكن أن نلاحظ الغايتين اليمنى واليسرى في (٢)، وهذا يؤدي إلى تعريف المشتقتين اليمنى واليسرى. وبصورة خاصة، عند نقطتي النهاية a و b، فإن المشتقة، إذا كانت موجودة، تكون مشتقة يمنى أو يسرى، على التوالي. سوف لا ندخل بالنقاش التفصيلي لمشتقات الجهة الواحدة.

إذا كانت f معرفة في القطعة (a,b) وإذا كانت $a < x < b$ فإن $f'(x)$ تكون

معرفة بـــ (١) و(٢)، كما في أعلاه. ولكن $f'(a)$ و $f'(b)$ ليستا معرفتين في هذه الحالة.

٥، ٢ مبرهنة: *لتكن f معرفة في $[a,b]$. إذا كانت f قابلة للتفاضل في النقطة $x \in [a,b]$، عندها فإن f تكون مستمرة في x.*

البرهان: عندما $t \to x$، فإن لدينا، استناد للمبرهنة ٤، ٤ ،

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0 \ .$$

إن معكوس هذه المبرهنة ليس صحيحاً. من السهل بناء دوال مستمرة تخفق في أن تكون قابلة للتفاضل في النقاط المنعزلة. في الفصل السابع سنتعرف حتى على الدالة التي تكون مستمرة على طول الخط بدون أن تكون قابلة للتفاضل عند أي نقطة !

٥، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن f و g معرفتين في $[a,b]$ وقابلتين للتفاضل عند النقطة $x \in [a,b]$. عندها فإن $f+g$ ، fg ، و f/g تكون قابلة للتفاضل عند x و*

(أ) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$؛

(ب) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ؛

(ج) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

بالطبع فإننا نفترض في (ج) أن $g(x) \neq 0$.

البرهان: (أ) واضحة، استناداً للمبرهنة ٤، ٤. لتكن $h = fg$. عندها فإن

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - g(x)] \ .$$

إذا قسمنا على $t - x$ ونلاحظ أن $f(t) \to f(x)$ عندما $t \to x$ (المبرهنة ٥، ٢)، فإن (ب) تكون قد برهنت. الخطوة الآتية، لتكن $h = f/g$. عندها فإن

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x)\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right] .$$

وبترك $t \to x$، المبرهنتين ٤، ٤ و ٥، ٢، فإننا نحصل على (ج).

٥، ٤ أمثلة: من الواضح أن مشتقة أي قيمة ثابتة تساوي صفر. إذا كانت f معرفة بـــ $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$. أن التطبيقات المتكررة لـــ (ب) و(ج) سوف تبين أن x^n

تكون قابلة للتفاضل، وبأن مشتقتها هي nx^{n-1}، لكل عدد صحيح n (إذا كانت $n < 0$، فإن علينا لن نقتصر على $x \neq 0$). لذلك فإن كل مقدار متعدد الحدود يكون قابلا للتفاضل، وكذلك كل دالة نسبية، باستثناء عند تلك النقاط التي يكون مقامها صفراً.

يطلق على المبرهنة الآتية *"قاعدة التتابع" "chain rule"*، وهي تتناول تفاضل الدوال المركبة وربما تكون أهم مبرهنة بخصوص المشتقات. وسوف نتناول الإطار الأكثر عمومية لها في الفصل التاسع.

٥، ٥ مبرهنة: *لنفترض أن f مستمرة في $[a , b]$، وأن $f'(x)$ متواجدة عن بعض النقاط $x \in [a,b]$، g معرفة على الفترة I التي تحتوي على مدى f، وإن g قابلة للتفاضل عند النقطة $f(x)$. إذا كانت*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \le t \le b),$$

عندها فإن h تكون قابلة للتفاضل عند x و

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \qquad (٣)$$

البرهان: لتكن $y = f(x)$. استناداً لتعريف المشتقة، فإن لدينا

$$f(t) - f(x) = (t - x)\left[f'(x) + u(t)\right], \qquad (٤)$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)\left[g'(y) + v(s)\right], \qquad (٥)$$

حيث أن $t \in [a,b]$, $s \in I$ و $u(t) \to 0$ عندما $t \to x$، $v(s) \to 0$ عندما $s \to y$

لتكن $s = f(t)$.

باستخدام (٥) أولا ثم (٤)، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t) - g(f(x)) \\ &= \left[f(t) - f(x)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right], \\ &= (t - x) \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \end{aligned}$$

أو، إذا كانت $t \neq x$،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \left[g'(y) + v(s)\right] \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] . \qquad (٦)$$

لندع $t \to x$، فإننا نلاحظ أن $s \to y$ ، استناداً لاستمرارية f، لذلك فإن الجهة اليمنى من (٦) تتجه إلى $g'(y)f'(x)$، والذي يعطينا (٣).

٥، ٦ أمثلة:

(أ) لتكن f معرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases} \qquad (٧)$$

لنسلم جدلاً أن مشتقة $\sin x$ هي $\cos x$ (سوف نناقش الدوال المثلثية في الفصل الثامن)، نستطيع أن نطبق المبرهنتين ٥، ٣ و ٥، ٥ كلما كان $x\neq 0$، ونحصل على

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)\ . \qquad (٨)$$

عندما $x=0$ فإن هاتين المبرهنتين لا تنطبقان عندها، نظراً لأن $\dfrac{1}{x}$ تكون غير معرفة حينها، وعندها فإننا نستغيث مباشرة بالتعريف: بالنسبة لـــ $t\neq 0$،

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\sin\frac{1}{t}.$$

عندما $t\to 0$، فإن هذا لا يميل إلى أي غاية، لذلك فإن $f'(0)$ لا يتواجد.

(ب) لتكن f معرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0,\end{cases} \qquad (٩)$$

كما في أعلاه، فإننا نحصل على

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)\ . \qquad (١٠)$$

عندما $x=0$، فأننا نستغيث بالتعريف، ونحصل على

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right|=\left|t\sin\frac{1}{t}\right|\leq|t| \quad t\neq 0\ ;$$

لندع $t\to 0$، فأننا نلاحظ أن

$$f'(0)=0 \qquad (١١)$$

لذلك فإن f تكون قابلة للتفاضل عند جميع النقاط x ولكن f' ليست دالة مستمرة، نظراً لأن $\cos(1/x)$ في (١٠) لا تميل إلى غاية عندما $x\to 0$.

مبرهنات القيمة الوسطى Theorems Value Mean

٥، ٧ تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة في الفضاء المتري X. نقول أن f تمتلك ***نهاية عظمى محلية local maximum*** في النقطة $p \in X$ إذا كان يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $f(q) \le f(p)$ لجميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \delta$.

النهاية الصغرى المحلية **Local minima** تعرف بنفس الطريقة.

المبرهنة القادمة هي الأساس لكثير من التطبيقات في الاشتقاق.

٥، ٨ مبرهنة: *لتكن f معرفة في $[a,b]$ ؛ إذا كانت f تمتلك نهاية عظمى محليه في النقطة $x \in (a,b)$، وإذا كانت $f'(x)$ تتواجد، عندها فإن $f'(x) = 0$.*

وبالطبع يصح أيضا النص المماثل للنهاية الصغرى المحلية.

البرهان: نختار δ وفقاً للتعريف ٥، ٧، لذلك فإن

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b \ .$$

إذا كانت $x - \delta < t < x$، فإن

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ge 0 \ .$$

لندع $t \to x$، فإننا نلاحظ أن $f'(x) \ge 0$.

إذا كانت $x < t < x + \delta$، فإن

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \le 0,$$

والذي يبين أن $f'(x) \le 0$. إذن $f'(x) = 0$.

٥، ٩ مبرهنة: *إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين مستمرتين في $[a,b]$ واللتان تكونان قابلة للتفاضل في (a,b)، عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ تكون فيها*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) \ .$$

لاحظ بأن القابلية على التفاضل غير مطلوبة في نقاط النهاية.

البرهان: ضع

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \qquad (a \le t \le b) \ .$$

عندها فإن h تكون مستمرة في $[a,b]$، h قابلة للتفاضل في (a,b)، و

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \qquad (١٢)$$

لبرهنة المبرهنة، يتوجب علينا أن نبين أن $h'(x) = 0$ لبعض $x \in (a,b)$.

إذا كانت h مقداراً ثابتاً، فإن ذلك يتحقق لكل $x \in (a,b)$. إذا كانت $h(t) > h(a)$ لبعض $t \in (a,b)$، لتكن x نقطة في $[a,b]$ تحقق فيها h نهايتها العظمى (المبرهنة ٤، ١٦). استناداً إلى (١٢)، $x \in (a,b)$، وتبين المبرهنة ٥، ٨ أن $h'(x) = 0$. إذا كانت $h(t) < h(a)$ لبعض $t \in (a,b)$، فإن نفس المناقشة تنطبق إذا اخترنا لـ x نقطة في $[a,b]$ تحقق فيها h نهايتها الصغرى.

غالباً ما يطلق على هذه المبرهنة *أعمام لمبرهنة القيمة الوسطى* ***generalized mean values theorem***؛ عادة ما يطلق على الحالة الخاصة الآتية *"مبرهنة القيمة الوسطى"* ***"mean values theorem"***.

٥، ١٠ مبرهنة: *إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة في $[a,b]$ والتي تكون قابلة للتفاضل في (a,b)، عندها توجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ يكون فيها*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x).$$

البرهان: نأخذ $g(x) = x$ في المبرهنة ٥، ٩.

٥، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن f تكون قابلة للتفاضل في (a,b).*

(أ) *إذا كانت $f'(x) \geq 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون متزايدة ترتيبا.*

(ب) *إذا كانت $f'(x) = 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون ثابتة.*

(ج) *إذا كانت $f'(x) \leq 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون متناقصة ترتيبا.*

البرهان يمكن استخلاص جميع النتائج من المعادلة

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x),$$

التي تكون صحيحة، لكل زوج من الأعداد x_2, x_1 في (a,b)، لبعض x بين x_1 و x_2.

استمرارية المشتقات The Continuity Of Derivatives

لاحظنا سابقاً [المثال ٥، ٦ (ب)] بأن الدالة f قد تمتلك المشتقة f' التي تتواجد عند

كل نقطة، ولكنها ليست مستمرة عند بعض النقاط. على الرغم من ذلك، فإن ليس كل دالة تكون مشتقة. وعلى وجه الخصوص، تمتلك المشتقات الموجودة في كل نقطة في فترة بشكل مشترك خصائص مهمة مع الدوال التي تكون مستمرة على تلك فترة : تكون القيم الوسطى مسلم بصحتها (قارن المبرهنة ٤، ٢٣) النص المضبوط سيرد لاحقاً.

٥، ١٢ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل في $[a,b]$ ولنفترض أن $f'(a) < \lambda < f'(b)$. عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ بحيث أن $f'(x) = \lambda$.*

وبالطبع فإن نتيجة مماثلة تتحقق إذا كانت $f'(a) > f'(b)$.

البرهان: نضع $g(t) = f(t) - \lambda t$. عندها فإن $g'(a) < 0$ لذلك فإن $g(t_1) < g(a)$ لبعض $t_1 \in (a,b)$ و $g'(b) > 0$ ، لذلك فإن $g(t_2) < g(b)$ لبعض $t_2 \in (a,b)$. إذن g تحرز غايتها الصغرى في $[a,b]$ (المبرهنة ٤، ١٦) في بعض النقاط x بحيث أن $a < x < b$. استناداً للمبرهنة ٥، ٨، فإن $g'(x) = 0$. إذن $f'(x) = \lambda$.

نتيجة: *إذا كانت f قابلة للتفاضل في $[a,b]$، فإن f' لا يمكن أن تمتلك أي عدم استمرارية بسيطة في $[a,b]$.*

ولكن من الجائز جداً أن تمتلك f' عدم استمرارية من النوع الثاني.

قاعدة ال هوبيتال L`Hospital`S Rule

غالباً ما تكون المبرهنة القادمة مفيدة في تقييم الغايات.

٥، ١٣ مبرهنة: *لنفترض أن f و g دالتان حقيقيتان وقابلتان للتفاضل في (a,b) ، وان $g'(x) \neq 0$ لجميع $x \in (a,b)$ ، حيث $-\infty < a < b \leq +\infty$. لنفترض أن*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{عندما} \quad x \to a \qquad (١٣)$$

إذا كانت

$$f(x) \to 0, \quad \text{و} \quad g(x) \to 0 \quad \text{عندما} \quad x \to a \qquad (١٤)$$

أو إذا كانت

$$g(x) \to +\infty , \quad \text{عندما} \quad x \to a \qquad (١٥)$$

فإن

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ عندما } x \to a \quad (١٦)$$

وبالطبع يصح العرض إذا كانت $x \to b$، أو إذا كانت $g(x) \to -\infty$ في (١٥). لنلاحظ بأننا نستخدم الآن مفهوم الغاية في المعنى الموسع للتعريف ٤، ٣٣.

البرهان: ندرس أولا الحالة التي تكون فيها $-\infty \le A < +\infty$. نختار عدداً حقيقياً q بحيث أن $A < q$ ثم نختار r بحيث أن $A < r < q$. استناداً لـ (١٣) يوجد هنالك نقطة $c \in (a,b)$ بحيث أن $a < x < c$ تدل على

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \ . \quad (١٧)$$

إذا كانت $a < x < y < c$، فإن المبرهنة ٥، ٩ تبين انه يوجد هنالك نقطة $t \in (x,y)$ بحيث أن

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \ . \quad (١٨)$$

افترض أن (١٤) تتحقق. لندع $x \to a$ في (١٨)، فإننا نلاحظ أن

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le r < q \quad (a < y < c). \qquad (a < y < c) \quad (١٩)$$

الخطوة الآتية، نفترض أن (١٥) تتحقق. بترك y ثابتة في (١٨)، نستطيع أن نختار النقطة $c_1 \in (a,y)$ بحيث أن $g(x) > g(y)$ و $g(x) > 0$ إذا كانت $a < x < c_1$. إذا ضربنا (١٨) بـ $[g(x) - g(y)] / g(x)$، فإننا نحصل على

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1) \ . \quad (٢٠)$$

إذا تركنا $x \to a$ في (٢٠)، فإن (١٥) تبين أنه يوجد هنالك نقطة $c_2 \in (a,c_1)$ بحيث أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \ . \quad (٢١)$$

خلاصة القول، تبين (١٩) و (٢١) أنه لأي q، تخضع للشرط $A < q$ فقط، يوجد هنالك نقطة c_2 بحيث أن $f(x) / g(x) < q$ إذا كانت $a < x < c_2$.

بنفس الطريقة، إذا كانت $-\infty < A \le +\infty$، واخترت p بحيث $p < A$، فإننا نستطيع أن نجد النقطة c_3 بحيث أن

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a<x<c_3), \tag{٢٢}$$

ونستنتج (١٦) من هاتين العبارتين.

مشتقات الرتبة الأعلى Derivatives Of Higher Order

٥، ١٤ تعريف: إذا كانت f تمتلك المشتقة f' في فترة ما، وكانت f' نفسها قابلة للتفاضل، فإننا نرمز لمشتقة f' بالرمز f'' ونطلق على f'' المشتقة الثانية لـ f. إذا استمرينا بهذه الطريقة، فإننا نحصل على الدوال

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)},$$

كل واحدة منها هي مشتقة الدالة التي تسبقها. نطلق على $f^{(n)}$ المشتقة النونية، أو المشتقة ذات الرتبة n، لـ f.

لأجل أن تتواجد $f^{(n)}(x)$ عند النقطة x، فإن $f^{(n-1)}(t)$ يجب أن تتواجد في جوار لـ x (أو في منطقة مجاورة من جهة واحدة، إذا كانت x نقطة نهاية في الفترة الذي عرفت فيها f)، ويجب أن تكون $f^{(n-1)}$ قابلة للتفاضل في x. بما أن $f^{(n-1)}$ يجب أن تتواجد في جوار لـ x، فإن $f^{(n-2)}$ يجب أن تكون قابلة للتفاضل في ذلك الجوار.

مبرهنة تيلور Taylor's Theorem

٥، ١٥ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية في $[a,b]$، n عدداً صحيحاً موجباً، $f^{(n-1)}$ مستمرة في $[a,b]$، $f^{(n)}(t)$ تتواجد عند كل $t \in (a,b)$. لتكن α , β نقطتين مختلفتين في $[a,b]$، ونعرف*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k. \tag{٢٣}$$

عندها توجد هنالك نقطة x بين α و β بحيث أن

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{٢٤}$$

بالنسبة لـ $n = 1$، فإن هذه عبارة عن مبرهنة القيمة الوسطية لا غير. بصورة عامة، تبين المبرهنة أن بالإمكان تقريب f بمقدار متعدد الحدود بدرجة $n - 1$، وإن (٢٤) تسمح لنا بتقدير الخطأ، إذا عرفنا القيود على $|f^{(n)}(x)|$.

البرهان: ليكن M العدد المعرف بـــ

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n \qquad (٢٥)$$

ونضع

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad (a \le t \le b). \qquad (٢٦)$$

يجب علينا أن نبين أن $n!M = f^{(n)}(x)$ لبعض x بين α و β. استناداً إلى (٢٣) و(٢٦)، فإن

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b). \qquad (٢٧)$$

إذن سيكمل البرهان إذا استطعنا أن نبين بأن $g^{(n)}(x) = 0$ لبعض x بين α و β.

بما أن $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ بالنسبة لـــ $k = 0,1,\ldots,n-1,$، فإن لدينا

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0. \qquad (٢٨)$$

إن اختيارنا لـــ M يبين أن $g(\beta) = 0$، لذلك فإن $g'(x_1) = 0$ لبعض x_1 بين α و β، استنادا لمبرهنة القيمة الوسطية. بما أن $g'(\alpha) = 0$، فإننا نستنتج بنفس الطريقة أن $g''(x_2) = 0$ لبعض x_2 بين α و x_1. بعد n من الخطوات نصل الاستنتاج بأن $g^{(n)}(x_n) = 0$ لبعض x_n بين α و x_{n-1}، وهذا يعني، بين α و β.

تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة

Differentiation Of Vector-Valued Functions

٥، ١٦ ملاحظات: ينطبق التعريف ٥، ١ بدون أي تغيير على الدوال المركبة f المعرفة في $[a,b]$، وكذلك تبقى المبرهنتان ٥، ٢ و٥، ٣، إضافة إلى براهنيهما، صحيحتان. إذا كان f_1 و f_2 الجزئيين الحقيقي والخيالي لـــ f، أي أنه، إذا كان

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

بالنسبة لـــ $a \le t \le b$، حيث $f_1(t)$ و $f_2(t)$ حقيقتين، عندها فإن من الواضح أن لدينا

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x); \qquad (٢٩)$$

إضافة لذلك، فإن f تكون قابلة للتفاضل في x إذا وإذا فقط كان كلاً من f_1 , f_2 قابلاً للتفاضل في x.

عند الانتقال إلى دوال القيم المتجهة بصورة عامة، أي، إلى الدوال $\mathbf{f}$ التي تصور $[a,b]$ في

بعض $\mathbf{R}^k$، فإن باستطاعتنا أن نطبق التعريف ٥، ١ لتعريف $\mathbf{f}'(x)$. يصبح الآن الحد $\phi(t)$ في (١)، لكل t، نقطة في $\mathbf{R}^k$، وتؤخذ الغاية في (٢) بالاستناد إلى المعيار لـــ $\mathbf{R}^k$. بكلمه أخرى، $\mathbf{f}'(x)$ هي تلك النقطة في $\mathbf{R}^k$ (إذا كان يوجد هنالك واحدة) التي يكون عندها .

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0, \qquad (٣٠)$$

و $\mathbf{f}'$ هي أيضا دالة تكون قيمتها في $\mathbf{R}^k$.

إذا كان $f_1,\ldots,f_k$ مكونات $\mathbf{f}$، كما هو معروف في المبرهنة ٤، ١٠، فإن

$$\mathbf{f}'=(f_1',\ldots,f_k'), \qquad (٣١)$$

و $\mathbf{f}$ تكون قابلة للتفاضل في النقطة x إذا وإذا فقط كان كل من الدوال $f_1,\ldots,f_k$ قابلاً للتفاضل في x.

تصح أيضا المبرهنة ٥، ٢ ضمن هذا الإطار، وكذلك المبرهنة ٥، ٣ (ا) و (ب)، ÷ إذا ما استبدل fg بحاصل الضرب الداخلي $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ (لاحظ التعريف ٤، ٣).

إلا أننا عندما ننتقل إلى مبرهنة القيمة الوسطية، والى أحد نتائجها بالتحديد قاعدة آل هوبيتال، فإن الوضعية تتغير.

يبين المثالان الآتيان بأن كلاً من هاتين النتيجتين لا تصح بالنسبة لدوال القيم – المركبة.

٥، ١٧ مثال: عرف، لقيم x الحقيقية، بـــ

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x\ . \qquad (٣٢)$$

(من الممكن اعتبار التغيير الأخير تعريفاً للأس المركب e^{ix} ؛ راجع الفصل الثامن للدراسة الكاملة لهذه الدوال) إذن

$$f(2\pi)-f(0)=1-1=0, \qquad (٣٣)$$

ولكن

$$f'(x)=ie^{ix}, \qquad (٣٤)$$

لذلك فإن $|f'(x)|=1$ لجميع x الحقيقية.

لذلك فإن المبرهنة ٥، ١٠ لا تتحقق عن هذه الحالة.

٥، ١٨ مثال: في القطعة $(0,1)$، عرف $f(x) = x$ و

$$g(x) = x + x^2 e^{i/x^2} . \qquad (٣٥)$$

بما أن $\left|e^{it}\right| = 1$ لجميع t الحقيقية، فإننا نلاحظ أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ . \qquad (٣٦)$$

بعد ذلك

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \qquad (0 < x < 1) , \qquad (٣٧)$$

لذلك فإن

$$\left|g'(x)\right| \geq \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1 \ . \qquad (٣٨)$$

إذن

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\left|g'(x)\right|}\right| \leq \frac{x}{2-x} \qquad (٣٩)$$

ولذلك

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \ . \qquad (٤٠)$$

استنادا لـــ (٣٦) و (٤٠)، فإن قاعدة ال هوبيتال لا تتحقق في هذه الحالة. لاحظ أيضاً بأن $g'(x) \neq 0$ في $(0,1)$، استنادا إلى (٣٨).

على الرغم من ذلك، توجد هنالك نتيجة للمبرهنة القيمة الوسطية والتي، لأغراض التطبيق، لا تقل فائدة عن المبرهنة ٥، ١٠، والتي تحافظ على صحتها بالنسبة لدوال القيم – المتجهة: نحصل من المبرهنة ٥، ١٠ على أن

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq (b-a) \sup_{a<x<b} \left|f'(x)\right| . \qquad (٤١)$$

٥، ١٩ مبرهنة:

لنفترض أن $\mathbf{f}$ *تطبيقاً مستمراً لـــ* $[a,b]$ *إلى* $\mathbf{R}^k$ *و* f *قابلة للتفاضل في* (a,b). *عندها يوجد هنالك* $x \in (a,b)$ *بحيث أن*

$$\left|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\right| \leq (b-a)\left|\mathbf{f}'(x)\right| \ .$$

البرهان: [1]

نضع $\mathbf{z} = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$، ونعرف

$$(a \le t \le b) \qquad \varphi(t) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t)$$

عندها فإن φ تكون دالة بقيمه حقيقية ومستمرة في $[a,b]$ والتي تكون قابلة للتفاضل في (a,b). لذلك فإن المبرهنة القيمة الوسطية تبين أن

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(x) = (b-a)\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)$$

لبعض $x \in (a,b)$. من جهة أخرى، فإن

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(b) - \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2 \ .$$

نقدم الآن متباينة شو أرز بأن

$$|\mathbf{z}|^2 = (b-a)|\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)| \le (\mathrm{b} - \mathrm{a})|\mathbf{z}||\mathbf{f}'(x)|$$

إذن $|\mathbf{z}| \le (b-a)|\mathbf{f}'(x)|$، والتي هي النتيجة المطلوبة.

(١) V.P. Havin قام بترجمة الطبعة الثانية من هذا الكتاب إلى اللغة الروسية قام بإضافة البرهان لهذه المبرهنة إلى الأصل الأول.

تمارين EXERCISES

١- لتكن f معرفة لجميع الأعداد الحقيقية x، وافترض أن

$$|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2$$

لجميع x و y الحقيقيتين. برهن على أن f تكون ثابتة.

٢- افترض أن $f'(x)>0$ في (a,b). برهن على أن f تكون متزايدة بشكل تام في (a,b)، ولتكن g دالتها العكسية. برهن على أن g تكون قابلة للتفاضل، وبأن

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (a<x<b).$$

٣- افترض أن g دالة حقيقية في $\mathbf{R}^1$، مع أن المشتقة لها قيد (لنقل أن $|g'| \le M$). ثبت أن $\varepsilon > 0$، وعرفت $f(x) = x + \varepsilon\, g(x)$ برهن أن f هي 1-1 إذا كان ε هو صغير بشكل كافي. (المجموعة المقبولة لقيم ε يمكن أن تكون تعتمد في تحديدها على M فقط).

٤- إذا كانت

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

حيث $C_0,\ldots,C_n$ ثوابت حقيقية، برهن على أن المعادلة

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

تمتلك على الأقل جذراً حقيقياً واحداً بين 0 و 1.

٥- أفترض أن f تكون معرفة وقابلة للتفاضل عند كل $x>0$، وإن $f'(x) \to 0$ عندما $x \to +\infty$. ضع $g(x) = f(x+1) - f(x)$. برهن على أن $g(x) \to 0$ عندما $x \to +\infty$.

٦- افترض أن

(أ) f مستمرة لـ $x \ge 0$،

(ب) تتواجد $f'(x)$ لـ $x>0$،

(ج) $f(0)=0$،

(د) تكون f' متزايدة ترتيباً.

ضع

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x>0)$$

وبرهن على أن g تكون متزايدة ترتيباً.

٧- أفترض أن $f'(x)$ ، $g'(x)$ موجودتان، $g'(x) \neq 0$ و $f(x) = g(x) = 0$. برهن على أن

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(يتحقق هذا أيضاً في الدوال المركبة).

٨- أفترض أن f' مستمرة في $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$. برهن على أنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

كلما كان $0 < |t - x| < \delta$ ، $a \le t \le b, a \le x \le b$. (بالإمكان التعبير عن ذلك بالقول أن f قابلة للتفاضل بصورة منتظمة في $[a,b]$ إذا كانت f' مستمرة في $[a,b]$). هل يتحقق ذلك أيضاً بالنسبة لدوال القيم المتجهة ؟

٩- لتكن f دالة حقيقية مستمرة في $\mathbf{R}^1$ والتي تعرف عندها أن $f'(x)$ موجودة لجميع $x \neq 0$ وبأن $f'(x) \to 3$ عندما $x \to 0$. هل يستنتج من ذلك أن $f'(0)$ موجودة؟

١٠- أفترض أن f و g دالتين مركبتين قابلتين للتفاضل في $(0,1)$، وإن $f(x) \to 0$ ، $g(x) \to 0$ ، $f'(x) \to A$ ، $g'(x) \to B$ عندما $x \to 0$ ، حيث أن A و B عددين عقديين، $B \neq 0$. برهن على أن

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

قارن ذلك بالمثال ٥، ١٨. *تلميح:* -

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$

طبق المبرهنة ٥، ١٣ على الجزئيين الحقيقي والخيالي من $f(x)/x$ و $g(x)/x$.

١١- أفترض أن f معرفة في الجوار لـ x، وأفترض أن $f''(x)$ موجودة. بين أن

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

بين بمثال أن الغاية قد تكون موجودة حتى إذا لم تكن $f''(x)$ موجودة.

تلميح: –أستخدم المبرهنة ٥، ١٣.

١٢– إذا كانت $f(x)=|x|^3$، أوجد $f'(x), f''(x)$ لجميع x الحقيقية، وبين أيضاً أن $f^{(3)}(0)$ غير موجودة.

١٣– أفترض أن a و c عددين حقيقيين، $c>0$، و f معرفة في $[-1,1]$ بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & (\text{إذا كانت } x\neq 0), \\ 0. & (\text{إذا كانت } x=0). \end{cases}$$

برهن العبارات الآتية:

(أ) تكون f مستمرة إذا وإذا فقط كانت $a>0$.

(ب) تكون $f'(0)$ موجودة إذا وإذا فقط كانت $a>1$.

(ج) تكون f' مقيدة إذا وإذا فقط كانت $a\geq 1+c$.

(د) تكون f' مستمرة إذا وإذا فقط كانت $a>1+c$.

(هـــ) تكون $f''(0)$ موجودة إذا وإذا فقط كانت $a>2+c$.

(و) تكون f'' مقيدة إذا وإذا فقط كانت $a\geq 2+2c$.

(ز) تكون f'' مستمرة إذا و إذا فقط كانت $a>2+2c$.

١٤– لتكن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل في (a,b). برهن على أن f تكون محدبة إذا وإذا فقط كانت f' متزايدة ترتيبا. بعد ذلك أفترض أن $f''(x)$ موجودة لكل $x\in(a,b)$، وبرهن على أن f تكون محدبة إذا وإذا فقط كانت $f''(x)\geq 0$ لجميع $x\in(a,b)$.

١٥– أفترض أن $a\in\mathbf{R}^1$، وإن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل مرتين في (a,∞)، و M_2, M_1, M_0 القيود العلوية الصغرى لـــ $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$، على التوالي، في (a,∞).

برهن على أن

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2 \ .$$

تلميح: إذا كانت $h>0$، فإن مبرهنة تيلور تبين أن

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\left[f(x+2h)-f(x)\right]-hf''(\xi)$$

لبعض $\xi \in (x, x+2h)$. إذن

$$|f'(x)| \le hM_2 + \frac{M_0}{h} \ .$$

لبيان أن $M_1^2 = 4M_0M_2$ بالفعل، خذ $a = -1$، عرف

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & (-1 < x < 0), \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & (0 \le x < \infty), \end{cases}$$

وبين أن $M_2 = 4, M_1 = 4, M_0 = 1$.

هل أن $M_1^2 \le 4M_0M_2$ تتحقق بالنسبة لدوال القيم المتجه أيضاً ؟

١٦- أفترض أن f قابلة للتفاضل مرتين في $(0,\infty)$، f'' مقيدة في $(0,\infty)$، وأن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$. برهن على أن $f'(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

تلميح: دع $a \to \infty$ في التمرين ١٥.

١٧- افترض أن f دالة حقيقية، قابلة للتفاضل ثلاث مرات في $[-1,1]$، بحيث أن

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

برهن على أن $f^{(3)}(x) \ge 3$ لبعض $x \in (-1,1)$.

لاحظ بأن المتطابقة تتحقق بالنسبة $\frac{1}{2}(x^3 + x^2)$.

تلميح: أستخدم المبرهنة ٥، ١٥، بـ $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$، لبيان أنه يوجد هنالك $s \in (0,1)$ و $t \in (-1,0)$ بحيث أن

$$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6 \ .$$

١٨- أفترض أن f دالة حقيقية في $[a,b]$، n عدداً صحيحاً موجباً، وأن $f^{(n-1)}$ موجودة لكل $t \in [a,b]$. لتكن α , β، وكما معرفة في مبرهنة تيلور، ١٥. عرف

$$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}$$

بالنسبة $t \in [a,b]$، $t \ne \beta$، أشتق

$$f(t) - f(\beta) = (t - \beta)Q(t)$$

$n-1$ مرة في $t = \alpha$، أشتق النسخة التالية لمبرهنة تيلور :

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n.$$

١٩- أفترض أن f معرفة في $(1,1)$ و $f'(0)$ موجودة. أفترض أن $-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$، و $\alpha_n \to 0$, و $\beta_n \to 0$ عندما $n \to \infty$. عرف حاصل القسمة للفرق

$$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

برهن العبارات الآتية:

(أ) إذا كانت $\alpha_n < 0 < \beta_n$ فإن $\lim D_n = f'(0)$.

(ب) إذا كانت $0 < \alpha_n < \beta_n$، و $\{\beta_n / (\beta_n - \alpha_n)\}$ مقيدة، فإن $\lim D_n = f'(0)$.

(ج) إذا كانت f' مستمرة في $(-1,1)$ فإن $\lim D_n = f'(0)$.

أعطي مثالاً تكون فيه f قابلة للتفاضل في $(-1,1)$ (ولكن f' ليست مستمرة في 0) والتي تكون فيها β_n, α_n تقتربان من 0 بحيث $\lim D_n$ تكون موجودة ولكنها تختلف عن $f'(0)$.

٢٠- شكّل وبرهن متباينة تتلخص من مبرهنة تيلور والتي تبقى صحيحة بالنسبة لدوال القيم المتجهة.

٢١- لتكن E مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbf{R}^1$. لاحظنا في التمرين ٢٢، للفصل الرابع، بأنه يوجد هنالك دالة حقيقية مستمرة f في $\mathbf{R}^1$ التي تكون مجموعتها الصفرية. هل من الممكن، لكل مجموعة مغلقة E، إيجاد دالة مثل f تكون قابلة للاشتقاق $\mathbf{R}^1$، أو قابلة للتفاضل n من المرات، أو حتى دالة تمتلك مشتقات لجميع الدرجات في $\mathbf{R}^1$؟

٢٢- أفترض أن f دالة حقيقية في $(-\infty, \infty)$. تسمى *نقطة صامدة* لـ f *fixed point of* f إذا كانت $f(x) = x$.

(أ) إذا كانت f قابلة للتفاضل و $f'(t) \neq 1$ لكل t حقيقية، برهن على أن f تمتلك نقطة صامدة واحدة على الأكثر.

(ب) بين أن الدالة f المعرفة بـ

$$f(t) = t + (1 + e^t)^{-1}$$

لا تمتلك نقطة صامدة، على الرغم من أن $0 < f'(t) < 1$ لكل t حقيقية.

(ج) على الرغم من ذلك، إذا كان هنالك ثابت $A<1$ بحيث أن $|f'(t)|\le A$ لجميع t الحقيقية، برهن على أن النقطة الصامدة x لـ f تكون موجودة، وأن $x=\lim x_n$، حيث أن x_1 هي عدد حقيقي عشوائي و

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

لـ $n=1,2,3,\ldots$.

(د) بين أنه بالإمكان تَصور الطريقة المذكورة في (ج) بالطرق المتعرج

$$(x_1,x_2)\to(x_2,x_2)\to(x_2,x_3)\to(x_3,x_3)\to(x_3,x_4)\to\cdots .$$

٢٣- الدالة f المعرفة بـ

$$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$$

تمتلك ثلاث نقاط ثابتة، لتكن α,β,γ، حيث

$$1<\gamma<2\ ,\ \ 0<\beta<1\ ,\ \ -2<\alpha<-1\ .$$

بالنسبة لـ x_1 المختارة عشوائياً، عرف $\{x_n\}$ بوضع $x_{n+1}=f(x_n)$.

(أ) إذا كانت $x_1<\alpha$، برهن على أن $x_n\to-\infty$ عندما $n\to\infty$.

(ب) إذا كانت $\alpha<x_1<\gamma$، برهن $x_n\to\beta$ عندما $n\to\infty$.

(ج) إذا كانت $\gamma<x_1$، برهن على أن $x_n\to+\infty$ عندما $n\to\infty$.

لذلك فإن تحديد مكان β بهذه الطريقة، وليس بالإمكان ذلك لـ α و γ.

٢٤- بالطبع بالإمكان أيضاً تطبيق الطريقة المذكورة في الجزء (ج) من التمرين ٢٢ على الدوال التي تطبق $(0,\infty)$ في $(0,\infty)$.

ثبت بعض $\alpha>1$، وضع

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)\quad ,\quad g(x)=\frac{\alpha+x}{1+x}.$$

كلاً من f و g تمتلك $\sqrt{\alpha}$ كنقطة صامدة وحيدة لهما في $(0,\infty)$. حاول أن تفسر، استناداً إلى خواص f وg، لما يكون التقارب المذكور في التمرين ١٦، الفصل الثالث، أكثر سرعة وبشكل كبير عن ذلك المذكور في التمرين ١٧. (قارن f' , g'، ارسم الطرق المتعرجة المقترحة في التمرين ٢٢).

افعل نفس الشيء عندما تكون $0<\alpha<1$.

٢٥- أفترض أن f قابلة للتفاضل مرتين في $[a,b]$، $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)\ge\delta>0$ ، و $0\le f''(x)\le M$ لجميع $x\in[a,b]$ لتكن ξ النقطة الوحيدة في (a,b) التي تكون فيها $f(\xi)=0$.

اكمل التفاصيل المذكورة في المخطط الآتي *لطريقة نيوتن* ***Newton's method*** لاحتساب ξ .

(أ) أختار $x_1\in(\xi,b)$ ، وعرف $\{x_n\}$ بـــ

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

فسر ذلك هندسياً، بمفردات المماس للرسم البياني لـــ f.

(ب) برهن على أن $x_{n+1}<x_n$ وبأن

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi .$$

(ج) استخدم مبرهنة تيلور لبيان أن

$$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$$

لبعض $t_n\in(\xi,x_n)$.

(د) إذا كانت $A=M/2\delta$ ، استنتج أن

$$0\le x_{n+1}-\xi\le\frac{1}{A}[A(x_1-\xi)]^{2^n} .$$

(قارن بالتمرينين ١٦ و ١٨، الفصل الثالث).

(هـــ) بين أن طريقة نيوتن تعادل إيجاد نقطة ثابتة للدالة g المعرفة

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} .$$

كيف تتصرف $g'(x)$ في x بالقرب من ξ ؟.

(و) ضع $f(x)=x^{1/3}$ في $(-\infty,\infty)$ وطبق طريقة نيوتن. ماذا سيحدث ؟

٢٦- افترض أن f قابلة للتفاضل في $[a,b]$, $f(a)=0$ ، وان هنالك عدداً حقيقياً A بحيث أن $|f'(x)|\le A|f(x)|$ في $[a,b]$. برهن على أن $f(x)=0$ لجميع $x\in[a,b]$.

تلميح: ثبت $x_0\in[a,b]$ ، لتكن

$$M_1=\sup|f'(x)| \quad , \quad M_0=\sup|f(x)|$$

لـــ $a \le x \le x_0$. لأي من مثل هذه ألـــ x،

$$|f(x)| \le M_1(x_0 - a) \le A(x_0 - a)M_0 \ .$$

إذن $M_0 = 0$ إذا كانت $A(x_0 - a) < 1$. أي أن، $f = 0$ في $[a, x_0]$. استمر.

٢٧- لتكن ϕ دالة حقيقية معرفة في المستطيل R في المستوي المعرف بـــ $a \le x \le b$، $\alpha \le y \le \beta$. الحل لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c, \quad (\alpha \le c \le \beta)$$

يكون استناداً للتعريف، دالة قابلة للتفاضل f في $[a,b]$ بحيث أن $f(a) = c$، $\alpha \le f(x) \le \beta$، و

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \qquad (a \le x \le b) \ .$$

برهن على أن مسألة كهذه تمتلك حلاً واحداً على الأكثر إذا كان يوجد هنالك ثابت A بحيث أن

$$|\phi((x, y_2) - \phi(x, y_1)| \le A|y_2 - y_1|$$

كلما كان $(x, y_1) \in R$ و $(x, y_2) \in R$.

تلميح: طبق التمرين ٢٦ على الفرق بين حلين. لاحظ بأن مبرهنة الوحدانية هذه لا تتحقق على مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

التي تمتلك حلين : $f(x) = 0$ و $f(x) = x^2/4$. أوجد جميع الحلول الأخرى.

٢٨- صغ وبرهن مبرهنة وحدانية مماثلة لأنظمة الدوال القابلة للتفاضل التي تكون على شكل

$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

لاحظ بأن هذا يمكن إعادة كتابته بالشكل الآتي

$$\mathrm{y}(a) = \mathrm{c} \qquad , \qquad \mathrm{y}' = \Phi(x, \mathrm{y})$$

حيث أن $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ تمتد عبر الخلية – k، Φ هي التطبيق لـــ الخلية – $(k+1)$ في الفضاء – k الاقليدي الذي عناصره الدوال $\phi_1, \ldots, \phi_k$، و c هي المتجه $(c_1, \ldots, c_k)$. استخدم التمرين ٢٦، على دوال القيم المتجه.

٢٩- خصص التمرين ٢٨ بملاحظة النظام

$$y_j' = y_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j ,$$

حيث أن f، $g_1,\dots,g_k$ دوال حقيقية مستمرة في $[a,b]$، واشتق مبرهنة الوحدانية لحلول المعادلة

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x) \ .$$

استناداً للشروط الأولية

$$y(a) = c_1 \quad , \quad y'(a) = c_2 , \dots , y^{(k-1)}(a) = c_k \ .$$

الفصل السادس

متكامل ريمان - ستيلجز

- تعريف ووجود المتكامل
- خواص المتكامل
- التكامل و التفاضل
- تكامل دوال القيم - المتجهة
- المنحنيات الممكن تحديد طول أقواسها
- تمارين

الفصل السادس
مقدم متكامل ريمان - ستيلجيز
The Riemann - Stieltjes Integral

يستند الفصل الحالي على تعريف التكامل الريماني الذي يعتمد بشكل واضح على ترتيب هيكلية الخط الحقيقي. وفقاً لذلك، فإننا نبتدأ بمناقشة تكامل دوال القيم الحقيقية في الفترات. التوسع نحو الدوال المركبة ودوال القيم المتجهة في الفترات سوف يناقش في البنود التي تلي ذلك. التكامل وفق المجموعات الأخرى التي تختلف عن الفترات سوف تناقش في الفصلين ١٠ و١١.

تعريف ووجود التكامل

Definition And Existence Of The Integral

٦، ١ تعريف: لتكن $[a,b]$ فترة معينة. نعني *بالتجزئة* P لـ $[a,b]$ *partition P of* مجموعة منتهية من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، حيث

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b.$$

نقوم بكتابة

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

الآن أفترض أن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$. بالتناظر لكل تجزئة P لـ $[a,b]$ نضع

$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$
$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ,$$

وأخيراً

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf U(P,f) \ , \qquad (١)$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup L(P,f) \ , \qquad (٢)$$

حيث تكون الـ **inf** و **sup** موجودة فوق جميع التجزئات P لـ $[a,b]$. العناصر اليسرى لـ (١) و (٢) تسمى ***المتكاملات الريمانية العليا والسفلى*** ***upper* and *lower integral Riemann*** لـ f فوق $[a,b]$، على التوالي.

إذا كان المتكاملان العلوي والسفلي متساويان، فإننا نقول أن f ***قابلة للتكامل الريماني*** ***Riemann integrable*** في $[a,b]$، نكتب $f \in \Re$ (نرمز $\Re$ إلى مجموعة الدوال القابلة للتكامل الريماني)، ونرمز إلى القيمة المشتركة لـ (١) و(٢) بما يلي

$$\int_a^b f dx \ , \qquad (٣)$$

أو بـ

$$\int_a^b f(x)dx \ . \qquad (٤)$$

هذا هو ***تكامل الريماني*** ***Riemann integral*** لـ f فوق $[a,b]$، بما أن f مقيدة، يوجد هنالك عددين، m و M، بحيث أن

$$m \le f(x) \le M \quad (a \le x \le b) \ .$$

إذن، لكل P،

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a),$$

لذلك فإن العددين $L(P,f)$ و $U(P,f)$ يشكلان مجموعة مقيدة. يبين ذلك أن ***التكاملين العلوي والسفلي يكونان معرفان لكل دالة مقيدة*** f

the upper and lower integrals are defined for every bounded function ..

إن مسألة تساويهما، و مسألة قابلية التكامل لـ f، هي مسألة أكثر دقة. وبدلاً من البحث في هذه المسألة بشكل منفصل للتكامل الريماني، فإننا حالاً سنقوم بدراسة الحالة الأكثر عموماً.

٦، ٢ **تعريف:** لتكن α داله متزايدة ترتيباً في $[a,b]$ (بما أن $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ منتهيتان، فهذا يؤدي إلى أن α تكون مقيدة في $[a,b]$). تناظراً لكل تجزئة P لـ $[a,b]$، تكتب

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

من الواضح أن $\Delta\alpha_i \ge 0$. لكل داله حقيقية f مقيدة في $[a,b]$ نضع

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\alpha_i \quad ,$$

$$L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\alpha_i$$

حيث تمتلك M_i , m_i نفس المعنى المذكور في التعريف ١، ٦ وتعرف

$$\int_a^{-b} f\,d\alpha=\inf\ U(P,f,\alpha) \quad , \qquad (٥)$$

$$\int_{-a}^{b} f\,d\alpha=\sup\ L(P,f,\alpha)\,, \qquad (٦)$$

ومره ثانية تأخذ ألـ inf وألـ sup فوق جميع التجزئات .

إذا كانت العناصر اليسرى لـ (٥) و(٦) متساوية، فإننا نرمز إلى قيمتهما المشتركة بـ

$$\int_a^b f\,d\alpha \qquad (٧)$$

أو أحيانا بـ

$$\int_a^b f(x)d\alpha\,(x)\ . \qquad (٨)$$

هذا هو متكامل ريمان ستلجز ***Riemann-Stieltjes integral*** (أو مجرد متكامل ستلجز ***Stieltjes integral***) لـ f استناداً لـ α، فوق $[a,b]$.

إذا كانت (٧) موجودة، أي أن، (٥) و(٦) متساويتان، فإننا نقول أن f تكون قابله للتكامل بالنسبة إلى لـ α ، في المعنى الريماني، وتكتب $f\in\Re(\alpha)$.

بأخذ $\alpha\,(x)=x$، فإن التكامل الريماني خاصة من تكامل ريمان – ستلجز. لنذكر بصورة واضحة، أنه في الحالة العامة α لا تحتاج حتى لأن تكون مستمرة.

يستوجب الأمر أن نتحدث قليلاً بخصوص الترميز. إننا نفضل (٧) على (٨)، لأن الحرف x في (٨) لا يضيف شيئاً إلى محتوى (٧). لا يهم أي حرف تستخدم لتمثيل ما يسمى" متغير التكامل ***variable of integration***".

على سبيل المثال، فإن (٨) مطابقة لـ

$$\int_a^b f(y)d\alpha(y)\ .$$

يعتمد التكامل على f, a,α و b، ولكن ليس على تغير التكامل، والذي من المفضل أحياناً حذفه.

إن الدور الذي يلعبه متغير التكامل متشابه جداً للدور الذي يلعبه دليل الجمع: أن الرمزين

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

هما نفس الشيء، نظراً لأن كلاً منهما يعني $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

بالطبع، لا يوجد هنالك أي ضرر بإدخال متغير التكامل، وفي حالات عديدة يكون من المفيد عمل ذلك. سوف نبحث الآن مسألة وجود التكامل (٧). بدون أن نقول ذلك في كل مرة، فإن f سوف يفترض أن تكون حقيقية ومقيدة، وأن α متزايدة ترتيباً في $[a,b]$ ؛ و عندما لا يكون هنالك أي نوع من الالتباس، فإننا سنكتب $\int$ بدلاً من $\int_a^b$.

٦، ٣ تعريف: نقول أن التجزئة P^* هي *المنقحة refinement* لـ P إذا كانت $P^* \supset P$ (أي أنه، إذا كانت كل نقطة من P هي نقطة من P^*). لنأخذ متجزئتان، P_1, و P_2، فإننا نقول P^* هي *منقحتهما المشترك common refinement* إذا كانت $P^* = P_1 \cup P_2$.

٦، ٤ مبرهنة: *إذا كانت P^* المنقحة لـ P، فإن*

$$L(P,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \tag{٩}$$

و

$$U(P^*,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) \ . \tag{١٠}$$

البرهان: لبرهنة (٩)، نفترض أولا أن P^* تحتوي على نقطة واحدة فقط أكثر من P. لتكن هذه النقطة الإضافية x^*، ونفترض أن $x_{i-1} < x^* < x_i$، حيث أن x_i و x_{i-1} هما نقطتان متعاقبتان لـ P. ضع

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \le x \le x_i).$$

من الواضح أن $w_1 \ge m_i$ و $w_2 \ge m_i$، حيث، كما في السابق،

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i).$$

إذن

$$\begin{aligned} &L(P^*,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \\ &\quad = w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad = (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \ge 0. \end{aligned}$$

إذا كانت P^* تحتوي على kالنقاط اكثر من P ، فأننا نعيد هذا التحليل k من المرات، ونصل إلى (٩). يكون لـ (١٠) نفس البرهان.

٦، ٥ مبرهنة: $\int_{-a}^{b} f\,d\alpha \le \int_{a}^{-b} f\,d\alpha$.

البرهان: لتكن P^* المنقحة المشترك للتجزئتان P_1 و P_2 . استناداً للمبرهنة ٤، ٦،

$$L(P_1,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \le U(P^*,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) \ .$$

إذن

$$L(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) \ . \qquad (١١)$$

إذا كانت P_2 ثابتة والـ sup مأخوذة على جميع P_1 ، فإن (١١)تقدم

$$\underline{\int} f\,d\alpha \le U(p_2,f,\alpha). \qquad (١٢)$$

تستنتج المبرهنة بأخذ ألـ inf على جميع P_2 في (١٢).

٦، ٦ مبرهنة: $f \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$ *إذا وإذا فقط كان لكل* $\varepsilon > 0$ *يوجد هنالك تجزئة* P *بحيث أن*

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon \ . \qquad (١٣)$$

البرهان: لكل P نملك أن

$$L(P,f,\alpha) \le \underline{\int} f\,d\alpha \le \overline{\int} f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha) \ .$$

إذن فإن (١٣) تؤدي إلى

$$0 \le \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon \ .$$

إذن، إذا كان بالإمكان تحقق (١٣) لكل $\varepsilon > 0$، فإن لدينا

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha,$$

أي أن، $f \in \Re(\alpha)$.

بالعكس، افترض أن $f \in \Re(\alpha)$ ، ولنأخذ $\varepsilon > 0$. عندها يوجد هنالك تجزئتان P_1

و P_2 بحيث أن

$$U(P_2,f,\alpha)-\int f\,d\alpha<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (١٤)$$

$$\int f\,d\alpha-L(P_1,f,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}\ . \qquad (١٥)$$

نختار P لتكون المنقح المشترك لـــ P_1 ، P_2 . عندها فإن المبرهنة ٦، ٤، مع (١٤) و(١٥)، تبين أن

$$U(P,f,\alpha)\le U(P_2f,\alpha)<\int f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}<L(P_1,f,\alpha)+\varepsilon\le L(P_1,f,\alpha)+\varepsilon\ ,$$

لذلك فإن (١٣) تتحقق لهذا القاطع P .

إن المبرهنة ٦، ٦ تقدم لنا قاعدةً مريحاً للقابلية على التكامل. قبل تطبيقها، نذكر بعض الحقائق الوثيقة الصلة.

٦، ٧ مبرهنة:

(أ) إذا كانت (١٣) تتحقق لبعض P وبعض ε، فإن (١٣) تتحقق (لنفس ألـــ ε) لكل منقح لـــ P .

(ب) إذا كانت (١٣) تتحقق لـــ $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ وإذا كانت s_i , t_i نقطتين عشوائيتين في $[x_{i-1},x_i]$، فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(s_i)-f(t_i)\right|\Delta\alpha_i<\varepsilon\ .$$

(ج) إذا كان $f\in\Re(\alpha)$ وافتراضات (ب)متحققة، فإن

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta\alpha_i-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\varepsilon\ .$$

البرهان: نستدل على (أ) من المبرهنة ٦، ٤. بموجب الافتراضات المذكورة في (ب)، فإن كلاً من $f(s_i)$ و $f(t_i)$ تقع في $[m_i,M_i]$، لذلك فإن $\left|f(s_i)-f(t_i)\right|\le M_i-m_i$. لذلك

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(s_i)-f(t_i)\right|\Delta\alpha_i\le U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha),$$

والتي تبرهن (ب). أن المتباينتين الواضحتين

$$L(P,f,\alpha)\le\sum f(t_i)\Delta\alpha_i\le U(P,f,\alpha)$$

و

$$L(P,f,\alpha) \le \int f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha)$$

تبرهنان (ج).

٦، ٨ مبرهنة: *إذا كانت f مستمرة في $[a,b]$ فإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$.*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. نختار $\eta > 0$ بحيث أن

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon \ .$$

بما أن f مستمرة بانتظام في $[a,b]$ (المبرهنة ٤، ١٩)، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(x) - f(t)| < \eta \qquad (١٦)$$

إذا كانت $x \in [a,b]$, $t \in [a,b]$، و $|x-t| < \delta$.

إذا كانت P أي تجزئة في $[a,b]$ بحيث أن $\Delta x_i < \delta$ لجميع i، فإن (١٦) تدل على

$$M_i - m_i \le \eta \qquad (i\text{-}1,\ldots,n) \qquad (١٧)$$

ولذلك فإن

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i$$

$$\le \eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

استناداً للمبرهنة ٦، ٦ ، فإن $f \in \Re(\alpha)$.

٦، ٩ مبرهنة: *إذا كانت f رتيبة في $[a,b]$، وإذا كانت α مستمرة في $[a,b]$، فإن $f \in \Re(\alpha)$. (بالطبع، فإننا لا زلنا نفترض بأن، α رتيبة).*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. لأي عدد صحيح موجب n، نختار تجزئة بحيث أن

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

إن هذا ممكناً نظراً لأن α مستمرة (المبرهنة ٤، ٢٣).

نفترض أن f متزايدة ترتيبا (يكون البرهان متشابهاً في الحالة الأخرى). عندها فإن

$$M_i = f(x_i) \quad , \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad (i = 1,\ldots,n)$$

لذلك فإن

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]$$
$$=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\cdot\left[f(b)-f(a)\right]<\varepsilon$$

إذا أخذت n كبيرة بما فيه الكفاية . استناداً للمبرهنة ٦، ٦ ، فإن $f\in\Re(\alpha)$.

٦، ١٠ مبرهنة: *لنفترض أن f مقيدة في $[a,b]$، f تمتلك نقاطاً منتهية فقط من عدم الاستمرارية في $[a,b]$، و α مستمرة في كل نقطة تكون فيها f غير مستمرة . عندها فإن $f\in\Re(\alpha)$.*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon>0$. نضع $M=\sup|f(x)|$ ، لتكن E مجموعة النقاط التي تكون f غير مستمرة فيها. بما أن E منتهيا و α مستمرة عند كل نقطة من E، فإن بإمكاننا أن نغطي E بواسطة فترات منفصلة منتهية $[u_j,v_j]\subset[a,b]$ بحيث أن مجموع الفروق المتناظرة $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ يكون اقل من ε. إضافة لذلك، بإمكاننا أن نضع هذه الفترات بالطريقة التي تكون فيها كل نقطة من $E\cap(a,b)$ تقع في القسم الداخلي من $[u_j,v_j]$.

ابعد القطع (u_j,v_j) من $[a,b]$. المجموعة المتبقية K تكون متراصة. إذن f تكون مستمرة بانتظام فيK ، ويوجد هنالك $\delta>0$ بحيث أن $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$ إذا كانت $s\in K$, $t\in K$, $|s-t|<\delta$.

الآن تشكل التجزئة $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ لـــ $[a,b]$، كما يلي: كل u_j تقع في P. كل v_j تقع في P. لا تقع أي نقطة من القطعة (u_j,v_j) في P . إذا لم تكن x_{i-1} واحد من الـــ u_j، فإن $\Delta x_i<\delta$.

لاحظ بأن $M_i-m_i\le 2M$ لكل I، وأن $M_i-m_i\le\varepsilon$ ما لم تكن x_{i-1} واحد من ألـــ u_j. أذن كما في برهان المبرهنة ٦، ٨،

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\le\left[\alpha(b)-\alpha(a)\right]\varepsilon+2M\varepsilon\ .$$

بما أن ε عشوائية، فإن المبرهنة ٦، ٦ تبين أن $f\in\Re(\alpha)$.

ملاحظة: إذا كانت f و α تمتلكان نقطة عدم استمرارية مشتركة، فإن f قد لا تكون في $\Re(\alpha)$. التمرين ٣ يبين ذلك.

٦، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن* $f \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$ ، $m \le f \le M$، *مستمرة* ϕ *في* $[m,M]$، *و* $h(x) = \phi(f(x))$ *في* $[a,b]$ *عندها فإن* $h \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$.

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$. بما أن ϕ مستمرة بانتظام في $[m,M]$، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $\delta < \varepsilon$ و $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ إذا كانت $|s-t| \le \delta$ و $s,t \in [m,M]$.

بما أن $f \in \Re(\alpha)$، يوجد هنالك تجزئة $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ لـ $[a,b]$ بحيث أن

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \delta^2 \quad . \tag{١٨}$$

لتكن M_i و m_i تمتلكان نفس المعنى كما في التعريف ٦، ١، و لتكن M_i^*، m_i^* العددين المناظرين لـ h. قسم الأعداد $1,\ldots,n$ إلى طبقتين: $i \in A$ إذا كانت $M_i - m_i < \delta$، $i \in B$ إذا كانت $M_i - m_i \ge \delta$. بالنسبة لـ $i \in A$ ، فإن اختيارنا لـ δ يبين أن $M^*_i - m_i^* \le \varepsilon$ بالنسبة لـ $i \in B$ ، $M^*_i - m_i^* \le 2K$، حيث $K = \sup|\phi(t)|$، $m \le t \le M$. استناداً إلى (١٨)، لدينا

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \le \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{١٩}$$

لذلك فإن $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. يؤدي ذلك إلى أن

$$U(P,h,\alpha) - L(P,h,\alpha) = \sum_{i \in A} (M^* - m^*)\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M^* - m^*)\Delta\alpha_i$$
$$\le \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإن المبرهنة ٦، ٦ تدل على أن $h \in \Re(\alpha)$.

ملاحظة: أن هذه المبرهنة تثير السؤال الآتي: ما هي الدوال التي تكون قابلة للتكامل الريماني ؟ الجواب على ذلك مقدم في المبرهنة ١١، ٣٣ (ب).

خواص التكامل Properties Of The Integral

٦، ١٢ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت* $f_1 \in \Re(\alpha)$ *و* $f_2 \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$، *فإن*

$f_1 + f_2 \in \Re(\alpha)$،

$cf \in \Re(\alpha)$ *لكل ثابت* c ،

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha ,$$

$$\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha \ .$$

(ب) إذا كانت $f_1(x) \le f_2(x)$ في $[a,b]$، فإن

$$\int_a^b f_1\,d\alpha \le \int_a^b f_2\,d\alpha \ .$$

(ج) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$ وكانت $a < c < b$ ، فإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,c]$ وعلى $[c,d]$، و

$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha \ .$$

(د) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$ وكانت $|f(x)| \le M$ في $[a,b]$، فإن

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le M[\alpha(b) - \alpha(a)] \ .$$

(هـ) إذا كانت $f \in \Re(\alpha_1)$ و $f \in \Re(\alpha_2)$ ، فإن $f \in \Re(\alpha_1 + \alpha_2)$ و

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2;$$

إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ و c ثابتا موجبا، فإن $f \in \Re(c\alpha)$ و

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha \ .$$

البرهان: إذا كانت $f = f_1 + f_2$ و P أي تجزئة لـ $[a,b]$، فإن لدينا

$$\begin{aligned} L(P,f_1,\alpha) + L(P,f_2,\alpha) &\le L(P,f,\alpha) \\ &\le U(P,f,\alpha) \le U(P,f_1,\alpha) + U(P,f_2,\alpha) \end{aligned} \qquad (٢٠)$$

إذا كانت $f_1 \in \Re(\alpha)$ و $f_2 \in \Re(\alpha)$ ، لنأخذ $\varepsilon > 0$. يوجد هنالك تجزئان P_j $(j = 1,2)$ بحيث أن

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon \ .$$

تحافظ هذه المتباينات على تحققها إذا ما أستبدل P_1 و P_2 بمنقحهما المشترك P . عندها فإن (٢٠) تؤدي إلى

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < 2\varepsilon\,,$$

والتي تبرهن على أن $f \in \Re(\alpha)$.

لنفس هذا ألـ P لدينا

$$U(P,f_j,\alpha) < \int f_j d\alpha + \varepsilon \qquad (j = 1,2)\ ;$$

إذن فإن (٢٠) تؤدي إلى

$$\int f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha) < \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha + 2\varepsilon \ .$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإننا نستنتج بأن

$$\int f\,d\alpha \le \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha \ . \qquad (٢١)$$

إذا ما استبدلنا f_1 و f_2 في (٢١) بـ $-f_1$ و $-f_2$ ، فإن المتباينة سوف تنعكس، وتتم برهنة المساواة.

إن براهين الفروع الأخرى من المبرهنة ٦، ١٢ مشابهة جداً لهذا البرهان لذلك سوف لا ندخل في تفاصيلها. في الفرع (ج)، النقطة الأساسية هي (بالعبور إلى المنقحة) إننا بإمكاننا أن نحدد نفسنا للتجزئات التي تحتوي على النقطة c، في التقريب $\int f\,d\alpha$.

٦، ١٣ مبرهنة: *إذا كانت* $f \in \Re(\alpha)$ *و* $g \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$، *فإن*

(أ) $fg \in \Re(\alpha)$ ؛

$$|f| \in \Re(\alpha) \text{ و } \left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,d\alpha \ .$$

البرهان: إذا أخذنا $\phi(t) = t^2$ ، تبين المبرهنة ٦، ١١ بأن $f^2 \in \Re(\alpha)$ إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$. المتطابقة

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

تكمل برهنة (أ).

إذا أخذنا $\phi(t) = |t|$، تبين المبرهنة ٦، ١١ أيضا أن $|f| \in \Re(\alpha)$. نختار $c = \pm 1$، بحيث أن

$$c\int f\,d\alpha \ge 0$$

عندها فإن

$$\left|\int f\,d\alpha\right| = c\int f\,d\alpha = \int cf\,d\alpha \le \int |f|\,d\alpha,$$

بما أن $cf \le |f|$.

٦، ١٤ تعريف: *نعرف دالة الوحدة السلمية unit step function* I بـ

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

٦، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت $a < s < b$، وكانت f مقيدة في $[a,b]$، f مستمرة في s، وكانت $\alpha(x) = I(x-s)$، فإن*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

البرهان: لاحظ التجزئة $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$، حيث $x_0 = a$، و $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. فإن

$$U(P,f,\alpha) = M_2, \qquad L(P,f,\alpha) = m_2.$$

بما أن f مستمرة في s، نلاحظ أن M_2 و m_2 تتقاربان إلى $f(s)$ عندما $x_2 \to s$.

٦، ١٦ مبرهنة: *لنفترض أن $c_n \geq 0$ لـ $1,2,3,\ldots$ ، $\sum c_n$ تتقارب، $\{s_n\}$ متتالية من النقاط المنفصلة في (a,b)، و*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n). \tag{٢٢}$$

لتكن f مستمرة في $[a,b]$. فإن

$$\int_a^b f\, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)\ . \tag{٢٣}$$

البرهان: يبين اختبار المقارنة أن المتتالية (٢٢) تتقارب لكل x. من الواضح أن مجموعها $\alpha(x)$ رتيباً، و $\alpha(a) = 0$ ، $\alpha(b) = \sum c_n$. (هذا هو نوع الدالة التي تحدث في الملاحظة ٤، ٣١).

لنأخذ $\varepsilon > 0$، ونختار N بحيث أن $\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$

نضع $\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n)$ ، $\alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$.

استناداً للمبرهنتين ٦، ١٢ و ٦، ١٥،

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\ . \tag{٢٤}$$

بما أن $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$ ،

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon, \tag{٢٥}$$

حيث $M = \sup|f(x)|$. بما أن $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ، نستنتج من (٢٤) و (٢٥) بأن

$$\left|\int_a^b f\ d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \le M\varepsilon \ . \qquad (٢٦)$$

إذا تركنا $N \to \infty$ ، فإننا نحصل على (٢٣).

٦، ١٧ مبرهنة: *افترض أن α تتزايد ترتيبياً وإن $\alpha' \in \Re$ في $[a,b]$. لتكن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$.*

عندها فإن $f \in \Re(\alpha)$ إذا وإذا فقط كانت $f\alpha' \in \Re$. في تلك الحالة

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \ . \qquad (٢٧)$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$ ونطبق المبرهنة ٦، ٦ على α' : يوجد هنالك تجزئة $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ لـ $[a,b]$ بحيث أن

$$U(P,\alpha') - L(P,\alpha') < \varepsilon \ . \qquad (٢٨)$$

تقدم لنا مبرهنة القيمة الوسطية النقاط $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ بحيث أن

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i$$

بالنسبة لـ $i = 1,\dots,n$. إذا كانت $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، فإن

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i < \varepsilon, \qquad (٢٩)$$

استناداً لـ (٢٨) والمبرهنة ٦، ٧ (ب). نضع $M = \sup|f(x)|$. بما أن

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

نستنتج من (٢٩) أن

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| \le M\varepsilon \ . \qquad (٣٠)$$

وعلى وجه الخصوص،

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon \ .$$

لجميع الخيارات لـ $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، لذلك فإن

$$U(P, f, \alpha) \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon \ .$$

نفس المناقشة، من (٣٠) تؤدي إلى أن

$$U(P, f\alpha') \le U(P, f, \alpha) + M\varepsilon.$$

لذلك فإن

$$\left|U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha')\right| \le M\varepsilon. \qquad (٣١)$$

الآن لاحظ بأن (٢٨) تبقى صحيحة إذا استبدلنا P بأي منقحة. إذن (٣١) تبقى صحيحة أيضا. نستنتج أن

$$\left|\int_a^{-b} f\,d\alpha - \int_a^{-b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \le M\varepsilon.$$

ولكن ε عشوائية. إذن

$$\int_a^{-b} f d\alpha = \int_a^{-b} f(x)\alpha'(x)dx, \qquad (٣٢)$$

لأي f مقيدة. أن مساواة المتكاملات السفلي تستنتج من (٣٠) بنفس الطريقة بالضبط. وتستنتج المبرهنة بذلك.

٦، ١٨ ملاحظة: أن المبرهنتين السابقتين توضحان العمومية والمرونة اللتين تتمتع بهما معالجة ستيلجيز للتكامل. إذا كانت α دالة سلمية تامة [هذه التسمية التي تطلق عادة على الدوال التي تكون بالشكل (٢٢)] ، فإن المتكامل يتحول إلى متسلسلات منتهية أو لانهائية. إذا كانت α تمتلك مشتقة قابلة للتكامل فإن، المتكامل يتحول إلى متكامل ريمان بسيط. أن ذلك يجعل من المستطاع وفي حالات عديدة دراسة المتسلسلات والمتكامل بصوره آنية، بدلاً من دراستها بشكل منفصل.

لتوضيح هذه النقطة، لنأخذ مثلاً فيزياويا . أن عزم القصور للسلك المستقيم بوحدة طول، حول محور خلال نقطة نهاية، على الزوايا اليمنى للسلك، هو

$$\int_0^1 x^2 dm \qquad (٣٣)$$

حيث أن $m(x)$ هي الكتلة المحتواة في الفترة $[0, x]$. إذا اعتبرنا أن السلك يمتلك كثافة مستمرة ρ ، أي أن، إذا $m'(x) = \rho(x)$، فإن (٣٣) تتحول إلى

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx \ . \qquad (٣٤)$$

من جهة أخرى، إذا كان السلك يتألف من الكتل m_i المذكورة في النقاط x_i ، فإن (٣٣) تصبح

$$\sum_i x_i^2 m_i \quad . \qquad (٣٥)$$

لذلك فإن (٣٣) تحتوي على (٣٤) و(٣٥) كحالتين خاصتين، ولكنها تحتوي على أكثر من ذلك بكثير، على سبيل المثال، الحالة التي تكون فيها m مستمرة ولكن ليست قابلة للتفاضل في كل مكان.

٦، ١٩ مبرهنة (تغير المتغير) (Change Of Variable)

لنفترض أن φ *دالة مستمرة متزايدة بشكل تام والتي تطبق الفترة* $[A,B]$ *في* $(on\ to)$ $[a,b]$. *لنفترض أن* α *متزايدة ترتيبياً في* $[a,b]$ *وإن* $f \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$. *عرف* β *و* g *في* $[A,B]$ *بما يلي*

$$g(y) = f(\varphi(y)) \quad , \quad \beta(y) = \alpha(\varphi(y)) \quad . \qquad (٣٦)$$

عندها فإن $g \in \Re(\beta)$ *و*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha \quad . \qquad (٣٧)$$

البرهان: لكل تجزئة $P = \{x_0, \ldots, x_0\}$ لـ $[a,b]$ عينت التجزئة المناظرة $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$ لـ $[A,B]$ ، بحيث أن $x_i = \varphi(y_i)$. يتم الحصول على جميع التجزئات لـ $[A,B]$ بهذه الطريقة. بما أن القيم التي تأخذها f في $[x_{i-1}, x]$ هي بالضبط نفس القيم التي تأخذها g في $[y_{i-1}, y]$، فإننا نلاحظ بأن

$$L(Q,g,\beta) = L(P,f,\alpha) \quad , \quad U(Q,g,\beta) = U(P,f,\alpha) \quad . \qquad (٣٨)$$

بما أن $f \in \Re(\alpha)$ ، فإن بالإمكان اختيار P بحيث أن كلاً من $U(P,f,\alpha)$ و $L(P,f,\alpha)$ تكونان قريبتين إلى $\int f d\alpha$ إذن (٣٨)، مع المبرهنة ٦، ٦، تبين أن $g \in \Re(\beta)$ وإن (٣٧) تتحقق. وهذا يكمل البرهان.

لنلاحظ الحالة الخاصة الآتية:

لنأخذ $\alpha(x) = x$. ثم $\beta = \alpha$. لنفرض أن $\varphi' \in \Re$ في $[A,B]$. إذا طبقنا المبرهنة ٦، ١٧ على الجزء الأيسر من (٣٧)، فإننا نحصل على

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \quad . \qquad (٣٩)$$

التكامل والتفاضل Integration And Differentiation

لا نزال نحدد أنفسنا في التعامل مع الدوال الحقيقية في هذا القسم. سوف نبين أن التكامل والتفاضل هما، بمعنى أو بأخر، عمليتان متعاكستان.

٦، ٢٠ مبرهنة: *لتكن $f \in \Re$ في $[a,b]$. بالنسبة إلى $a \le x \le b$ ، نضع*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

عندها فإن F تكون مستمرة في $[a,b]$ ؛إضافة لذلك ؛إذا كانت f مستمرة عند النقطة x_0 لـــ $[a,b]$ فإن f تكون قابلة للتفاضل عند x_0 ، و

$$F'(x_0) = f(x_0) \ .$$

البرهان: بما أن $f \in \Re$ ، فإن f تكون مقيدة . افترض أن $|f(t)| \le M$ بالنسبة إلى $a \le t \le b$ إذا كانت $a \le x < y \le b$، فإن

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le M(y-x),$$

استناداً للمبرهنة ٦، ١٢ (ج) و (د)، لنأخذ $\varepsilon > 0$ ، فإننا نلاحظ أن

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

شريطة أن تكون $|y - x| < \varepsilon / M$. أن هذا يبرهن استمرارية (و، في الحقيقة، الاستمرارية المنتظمة) لـــ F.

الآن أفترض أن f مستمرة عند x_0. لنأخذ $\varepsilon > 0$ ، نختار $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

إذا كانت $|t - x_0| < \delta$ ، و $a \le t \le b$. إذن، إذا كانت

$$x_0 - \delta < s \le x_0 \le t < x_0 + \delta \text{ ، و } a \le s < t \le b$$

فإننا نملك، استناداً للمبرهنة ٦، ١٢ (د)،

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t-s}\int_s^t [f(u) - f(x_0)]du\right| < \varepsilon \ .$$

نستنتج من ذلك أن $F'(x_0) = f(x_0)$.

٦، ٢١ المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

The fundamental theorem of calculus

إذا كانت $f \in \Re$ *في* $[a,b]$ *وإذا كان هنالك الدالة* F *القابلة للتفاضل في* $[a,b]$ *بحيث أن* $F' = f$*، فإن*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. ونختار التجزئة $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ لـ $[a,b]$ بحيث أن $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. تقدم لنا مبرهنة القيمة الوسطية النقاط $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ بحيث أن

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$$

بالنسبة إلى $i = 1, \ldots, n$. لذلك فإن

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

ونستنتج الآن من المبرهنة ٦، ٧ (ج) بأن

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

بما أن هذا يتحقق لجميع $\varepsilon > 0$، إذن يعتبر البرهان مكتملاً .

٦، ٢٢ مبرهنة (التكامل بالتجزئة) (Integration By Parts) *لنفترض أن* F *و* G *دالتان قابلتان للتفاضل في* $[a,b]$*،* $F' = f \in \Re$*، و* $G' = g \in \Re$*. عندها فإن*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

البرهان: ضع $H(x) = F(x)G(x)$ وطبق المبرهنة ٦، ٢١ على H ومشتقتها. لاحظ أن $H' \in \Re$، استناداً للمبرهنة ٦، ١٣.

تكامل دوال القيمة المتجهة

Integration Of Vector-Valued Functions

٦، ٢٣ تعريف: لتكن $f_1, \ldots, f_k$ دوالاً حقيقية في $[a,b]$، ولتكن $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ التطبيق المناظر لـ $[a,b]$ في $\mathbf{R}^k$. إذا كانت α تتزايد ترتيبا في $[a,b]$، فإننا نقول أن

$\mathbf{f} \in \mathfrak{R}(\alpha)$ يعني بأن $f_j \in \mathfrak{R}(\alpha)$ بالنسبة إلى $j = 1,\ldots,k$. إذا كانت هذه الحالة، فإننا نعرف

$$\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha,\ldots,\int_a^b f_k d\alpha\right) .$$

بكلمة أخرى، تكون $\int \mathbf{f}d\alpha$ هي النقطة $\mathbf{R}^k$. التي احداثيتها ألـ jth هو $\int f_j d\alpha$.

من الواضح أن الفروع (أ)، (ج) و (هـ) من المبرهنة ٦، ١٢ تتحقق بالنسبة لهذه المتكاملات ذات القيم المتجهة ؛ نقوم بمجرد تطبيق النتائج السابقة على كل إحداثي. نفس الشيء يصح على المبرهنات ٦، ١٧ ، ٦، ٢٠، و ٦، ٢١ لتوضيح ذلك، ندرج أدناه النظير للمبرهنة ٦، ٢١.

٦، ٢٤ مبرهنة: *إذا كانت* $\mathbf{f}$ *و* $\mathbf{F}$ *تطبيقان* $[a,b]$ *في* $\mathbf{R}^k$، *إذا كانت* $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}$ *في* $[a,b]$، *وإذا كانت* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$، *عندها فإن*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

إن النظير للمبرهنة ٦، ١٣ (ب) يقدم لنا بعض الخصائص المهمة، على الأقل بالنسبة لبرهانه.

٦، ٢٥ مبرهنة: *إذا كانت* $\mathbf{f}$ *تطبيق* $[a,b]$ *في* $\mathbf{R}^k$ *و إذا كانت* $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *لبعض الدوال المتزايدة ترتيبياً* α *في* $[a,b]$، *عندها فإن* $|\mathbf{f}| \in \mathfrak{R}(\alpha)$، *و*

$$\left|\int_a^b \mathbf{f}d\alpha\right| \le \int_a^b |\mathbf{f}|d\alpha \ . \qquad (٤٠)$$

البرهان: إذا كانت $f_1,\ldots,f_k$ المكونات لـ $\mathbf{f}$، عندها فإن

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}. \qquad (٤١)$$

استناداً للمبرهنة ٦، ١١ ، فإن كلاً من الدوال f_i^2 تنتمي إلى $\mathfrak{R}(\alpha)$ ؛ إذن نفس الشيء ينطبق على مجموعها. بما أن x^2 *دالة مستمرة لـ* x ، فإن المبرهنة ٤، ١٧ تبين أن دالة الجذر التربيعي تكون مستمرة في $[0,M]$، لكل M حقيقية. إذا قمنا بتطبيق المبرهنة ٦، ١١ مرة ثانية، فإن (٤١) تبين أن $|\mathbf{f}| \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

لبرهنة (٤٠)، ضع $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_k)$، حيث أن $y_j = \int f_j d\alpha$. عندها فإنه لدينا $\mathbf{y} = \int f d\alpha$، و

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha \ .$$

استناداً إلى متباينة شوارز،

$$\sum y_j f_j(t) \le |\mathbf{y}||\mathbf{f}(t)| \qquad (a \le t \le b); \tag{٤٢}$$

إذن تؤدي المبرهنة ٦، ١٢ (ب) إلى أن

$$|\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{y}| \int |\mathbf{f}| d\alpha \ . \tag{٤٣}$$

إذا كانت $\mathbf{y} = 0$، فإن (٤٠) تصبح عديمة الأهمية. إذا كانت $\mathbf{y} \ne 0$، فإن تقسيم (٤٣) على $|\mathbf{y}|$ يعطينا (٤٠).

المنحنيات الممكن تعين طول أقواسها Rectifiable Curves

نختتم هذا الفصل بموضوع يعتبر ذو أهمية هندسية والذي يقدم لنا تطبيقاً لبعض المبرهنات السابقة. أن الحالة التي تكون فيها $k = 2$ (أي، حالة المنحنيات المستوية) تعتبر ذات أهمية كبيرة في دراسة الدوال التحليلية للمتغيرات المركبة.

٦، ٢٦ تعريف: نطلق على التطبيق المستمر γ لفترة معينة $[a,b]$ في $\mathbf{R}^k$ "*المنحني*" *curve* في $\mathbf{R}^k$. لتأكيد الوساطة للفترة $[a,b]$، ممكن أن نقول أيضا بأن γ هي منحني في $[a,b]$.

إذا كانت γ واحد–لواحد، فإن γ تسمى ***قوس r c a***.

إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، فإنه يقال أن γ ***منحني مغلق*** ***closed curve*** .

يجب أن نلاحظ هنا بأننا قمنا بتعريف المنحني ليكون تطبيقاً، وليس مجموعة نقاط. بالطبع، فإن كل منحني γ في $\mathbf{R}^k$ يوجد هنالك مجموعة جزئية مرافقه في $\mathbf{R}^k$، بالتحديد المدى لـــ γ، ولكن المنحنيات المختلفة قد تمتلك نفس المدى.

نرفق لكل تجزئة $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ لـــ $[a,b]$ ولكل منحني γ في $[a,b]$ العدد

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| \ .$$

إن الحد ith في هذا المجموع هو المسافة (في $\mathbf{R}^k$) بين النقاط $\gamma(x_{i-1})$ و $\gamma(x_i)$. إذن $\Lambda(P,x)$ هو طول الطريق المضلع الذي تكون رؤوسه في $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)$، بهذا الترتيب. عندما تأخذ تجزئتنا هذه بالتضاؤل، فإن المضلع يقترب إلى المدى γ اكثر فأكثر. أن هذا يجعل بالإمكان تعريف طول γ كالتالي

$$\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P,\gamma),$$

حيث أن ألـــ sup يكون مأخوذاً فوق جميع التجزئات $[a,b]$.

إذا كانت $\Lambda(\gamma) < \infty$ ، فإننا نقول أن γ ***قابلة لتعين طولها rectifiable.***

في بعض الحالات، تكون $\Lambda(\gamma)$ مقدمة بواسطة المتكامل الريماني . سوف نقوم برهنة ذلك بالنسبة للمنحنيات المستمرة القابلة للتفاضل، أي، بالنسبة للمنحنيات γ التي تكون مشتقاتها γ' مستمرة.

٦، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت γ' مستمرة في $[a,b]$، فإن γ قابلة لتعين طول قوسها، و*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \ .$$

البرهان: إذا كانت $a \le x_{i-1} < x_i \le b$، فإن

$$|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)dt\right| \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt \ .$$

إذن

$$\Lambda(P,\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

لكل تجزئة P لـــ $[a,b]$. نتيجة لذلك،

$$\Lambda(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)| dt \ .$$

لبرهنة المتباينة العكسية، لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن γ' مستمرة بانتظام في $[a,b]$، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon \ \text{ إذا كانت } |s-t| < \delta \ .$$

لتكن $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزئة لـــ $[a,b]$ ، حيث أن $\Delta x_i < \delta$ لجميع i . إذا كانت $x_{i-1} \le t \le x_i$، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$|\gamma'(t)| \le |\gamma'(x_i)| + \varepsilon \ .$$

إذن

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt &\le |\gamma'(x_i)| \Delta x_i + \varepsilon \, \Delta x_i \\
&= \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)\right] dt\right| + \varepsilon \, \Delta x_i \\
&\le \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt\right| + \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\gamma'(x_i) - \gamma'(t)\right] dt\right| + \varepsilon \, \Delta x_i \\
&\le |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon \ \Delta x_i .
\end{aligned}$$

إذا جمعنا هذه المتباينة، فإننا نحصل على

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \le \Lambda(P,\gamma) + 2\varepsilon(b-a)$$
$$\le \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon \ (b-a).$$

بما أن δ كانت عشوائية، فإن

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \le \Lambda(\gamma) \ .$$

وهذا يكمل البرهان.

تمارين EXERCISES

١- افترض أن α تتزايد في $[a,b]$، $a \le x_0 \le b$، α مستمرة عند x_0، $f(x_0)=1$، وأن $f(x)=0$ إذا كانت $x \ne x_0$. برهن على أن $f \in \Re(\alpha)$ وأن $\int f d\alpha = 0$.

٢- أفترض أن $f \ge 0$، f مستمرة في $[a,b]$، و $\int_a^b f(x)dx = 0$. برهن على أن $f(x)=0$ لجميع $x \in [a,b]$. [قارن ذلك مع التمرين ١] .

٣- عرف ثلاثة دوال $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ كالتالي: $\beta_j(x)=0$ إذا كانت $x<0$, $\beta_j(x)=1$ إذا كانت $x>0$ بالنسبة إلى $j=1,2,3$ ؛ و $\beta_1(0)=0$, $\beta_2(0)=1$, $\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. لتكن f دالة مقيدة في $[-1,1]$.

(أ) برهن على أن $f \in \Re(\beta_1)$ إذا وإذا فقط كانت $f(0+)=f(0)$ وبأن ذلك يؤدي إلى أن

$$\int f d\beta_1 = f(0) \ .$$

(ب) قم بصياغة وبرهنة نتيجة مشابهة لـــ β_2 .

(ج) برهن على أن $f \in \Re(\beta_3)$ إذا وإذا فقط كانت f مستمرة عند 0 .

(د) إذا كانت f مستمرة عند 0، برهن على أن

$$\int f d\beta_1 = \int f d\beta_2 = \int f d\beta_3 = f(0) \ .$$

٤- إذا كانت $f(x)=0$ لجميع الأعداد الغير نسبية x، $f(x)=1$ لجميع الأعداد النسبية x، برهن على أن $f \notin \Re$ في $[a,b]$ بالنسبة لأي $a<b$.

٥- افترض أن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$، وإن $f^2 \in \Re$ في $[a,b]$. هل يؤدي ذلك إلى أن $f \in \Re$ ؟ وهل يتغير الجواب إذ ا افترضنا أن $f^3 \in \Re$ ؟

٦- لتكن P مجموعة كانتور التي شكلت في البند ٢، ٤٤ . لتكن f دالة حقيقية مقيدة في $[0,1]$ والتي تكون مستمرة عند كل نقطة خارج P. برهن على أن $f \in \Re$ في $[0,1]$.

تلميح: بالإمكان تغطية P بواسطة قطع عديدة منتهية والتي يكون بالإمكان جعل مجموع أطوالها بالصغر الذي نريده. أستمر كما في المبرهنة ٦، ١٠.

٧- افترض أن f دالة حقيقية في $(0,1]$ وإن $f \in \Re$ في $[c,1]$ لكل $c>0$.

عرف
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 f(x)dx$$
إذا كانت هذه الغاية موجودة (وكانت منتهية).

(أ) إذا كانت $f \in \Re$ في $[0,1]$ ، بين أن هذا التعريف للمتكامل يرافق التعريف القديم.

(ب) شَكِل الدالة f بحيث أن الغاية تكون موجودة، على الرغم من إنها تخفق في أن تكون موجودة إذا ما وضعنا $|f|$ بدلاً من f.

٨- افترض أن $f \in \Re$ في $[a,b]$ لكل $b > a$ حيث أن a ثابتة. عرف
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$
إذا كانت هذه الغاية موجودة (وكانت منتهية). في هذه الحالة، فإننا نقول أن المتكامل من الجهة اليسرى يتقارب. إذا كان يتقارب أيضا بعد أن نستبدل f بـــ $|f|$ ، فإننا نقول أنه يتقارب بصورة مطلقة.

افترض أن $f(x) \ge 0$ وإن f تتناقص ترتيبياً في $[1,\infty)$ برهن على أن
$$\int_1^\infty f(x)dx$$
تتقارب إذا وإذا فقط كانت
$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$
تتقارب. (هذا هو ما نطلق علية "*اختبار المتكامل*" ***integral test*** لتقارب المتسلسلات.

٩- بين أنه بالإمكان تطبيق التكامل بالتجزئة على المتكاملات الغير اعتيادي "improper" المعرفة في التمرينين ٧و٨. (قم بصياغة الافتراضات المناسبة، كون مبرهنة، وقم ببرهنتها). على سبيل المثال بين أن
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx \ .$$
بين أن واحد من هذين المتكاملين يتقارب بصورة مطلقة، ولكن الثاني لا يفعل ذلك.

١٠- ليكن p و q عددين حقيقيين موجبين بحيث أن
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ .$$

برهن العبارات الآتية :

(أ) إذا كانت $u \geq 0$ و $v \geq 0$، فإن

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} .$$

المساواة تتحقق إذا وإذا فقط كانت $u^p = v^q$.

(ب) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$, $g \in \Re(\alpha)$ ، $f \geq 0$, $g \geq 0$، و

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha$$

فإن

$$\int_a^b fg \, d\alpha \leq 1 .$$

(ج) إذا كانت f و g دالتين مركبتين في $\Re(\alpha)$ ، عندها فإن

$$\left|\int_a^b fg d\alpha\right| \leq \left\{\int_a^b |f|^p d\alpha\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g|^q d\alpha\right\}^{1/q} .$$

هذه هي *متباينة هو لدر* $H\ddot{o}lder's\ inequlity$. عندما تكون $p = q = 2$ فغالباً ما يطلق عليها متباينة شوارز . (لاحظ بأن المبرهنة ١، ٣٥ هي حالة خاصة جداً من هذه الحالة).

(د) بين أن متباينة هولدر تصح أيضاً بالنسبة للمتكاملات " الغير اعتيادية " الموصوفتين في التمرينين ٧ و٨.

١١- لتكن α دالة معينة متزايدة في $[a,b]$. بالنسبة لـ $u \in \Re(\alpha)$، عرف

$$\|u\|_2 = \left\{\int_a^b |u|^2 d\alpha\right\}^{1/2} .$$

افترض أن $f, g, h \in \Re(\alpha)$ ، وبرهن متباينة المثلث

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

وكنتيجة لمتباينة شوارز، كما في برهان المبرهنة ١، ٣٧.

١٢- وفقاً لمجموعة الرموز المذكورة في التمرين ١١، أفترض أن $f \in \Re(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$. برهن على انه يوجد هنالك دالة مستمرة g في $[a,b]$ بحيث أن $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

تلميح: لتكن $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزئة مناسبة لـ $[a,b]$، عرف

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

إذا كانت $x_{i-1} \le t \le x_i$.

١٣- عرف $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt$.

(أ) برهن على أن $|f(x)| < 1/x$ إذا كانت $x > 0$.

تلميح: ضع $t^2 = u$ و كامل بالتجزئة، لتبين أن $f(x)$ تكون مساوية لـ

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du.$$

استبدل $\cos. u$ بـ -1 .

(ب) برهن على أن $2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$

حيث أن $|r(x)| < c/x$ و c ثابتة.

(ج) أوجد الغايتين العليا والسفلي لـ $f(x)$ عندما $x \to \infty$.

هل أن $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ تتقارب ؟

١٤- تناول بنفس الطريقة مع

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)dt \ .$$

بين أن $e^x|f(x)| < 2$

وأن $e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1}\cos(e^{x+1}) + r(x),$

حيث أن $|r(x)| < Ce^{-x}$، لبعض C ثابتة.

١٥- أفترض أن f دالة حقيقية، مستمرة قابلة للتفاضل في $[a,b]$. $f(a) = f(b) = 0$ ، و

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1 \ .$$

برهن على أن $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$

وأن $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \frac{1}{4}.$

١٦- بالنسبة لـ $1 < s < \infty$، عرف

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

(هذه دالة زيتا الريمانية **Riemann's zeta Function** والتي تحمل أهمية كبيرة في دراسة توزيع الأعداد الأولية). برهن أن :