تيموثي جاورز

الرياضيات

مقدمة قصيرة جدًّا

مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم
MOHAMMED BIN RASHID
AL MAKTOUM FOUNDATION

كلمات عربية

الرياضيات

رسالة مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم

عزيزي القارئ،

إن كان الحلم في حد ذاته أمرًا مشروعًا، فإن الأكثر إلحاحًا في ظل التحديات التي تواجه واقعنا العربي، هو العمل على تحويل الحلم إلى مشروع حقيقي على الأرض. واذا كان العصر الذي نعيش فيه يتسم بالمعرفة والمعلوماتية والانفتاح على الآخر، فإن مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم ترى إلى الترجمة باعتبارها جسرًا لاستيعاب المعارف العالمية واللحاق بالعصر.

لقد عبّر صاحب السمو الشيخ محمد بن راشد آل مكتوم نائب رئيس دولة الإمارات العربية المتحدة رئيس مجلس الوزراء حاكم دبي عن مدى الحاجة للتعامل العاجل مع مقتضيات العصر عندما قال: «إن أهم ما في الاقتصاد الجديد هو الفكرة التي تنفّذ في وقتها». وعليه فإن مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم تعتقد بحزم أن إحياء حركة الترجمة العربية، وجعلها محركًا فاعلًا من محركات التنمية واقتصاد المعرفة في الوطن العربي، هي فكرة حان وقتها، ولا يجوز تأخيرها.

فمتوسط ما تترجمه المؤسسات الثقافية ودور النشر العربية مجتمعة لا يتعدى كتابًا واحدًا لكل مليون شخص في العام الواحد، بينما تنتج دول منفردة في العالم من حولنا أضعاف هذا الرقم.

في ظل هذه المعطيات أطلقت المؤسسة برنامج «ترجم»، بهدف إثراء المكتبة العربية بأفضل ما قدّمه الفكر العالمي من معارف وعلوم، عبر ترجمة تلك الأعمال إلى العربية. ومن أهداف البرنامج أيضًا العمل على إبراز الوجه الحضاري للأمة عبر ترجمة الإبداعات العربية إلى لغات العالم.

ومن التباشير الأولى لهذا البرنامج إطلاق خطة لترجمة ألف كتاب من اللغات العالمية إلى اللغة العربية في خلال ثلاث سنوات، أي بمعدل كتاب في اليوم الواحد. وما الكتاب الذي بين يديك، عزيزي القارئ، إلا دفقة في نهر معرفي نأمل أن يجري غزيرًا ليروي الظمأ، ويسقي بساتين النهضة العلمية، وصولًا إلى التنمية الشاملة في الوطن العربي.

إن مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم على ثقة بأن هذا الكتاب سيكون بمثابة خطوة إلى الأمام في سبيل تحقيق رسالتها الكلية، المتمثلة في تمكين الأجيال المقبلة من ابتكار وتطوير حلول مستدامة لمواجهة التحديات، عن طريق نشر المعرفة، ورعاية الأفكار النيّرة التي تقود إلى إبداعات حقيقية، بالإضافة إلى بناء جسور الحوار بين الشعوب والحضارات.

للمزيد من المعلومات عن برنامج «ترجم» والبرامج الأخرى لمؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم، يرجى زيارة الموقع الإلكتروني: www.mbrfoundation.ae

مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم

عن المؤسسة:

انطلقت مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم بمبادرة شخصية من صاحب السمو الشيخ محمد بن راشد آل مكتوم، نائب رئيس دولة الإمارات العربية المتحدة رئيس مجلس الوزراء حاكم دبي، الذي خصص للمبادرة وقفًا قدره 37 مليار درهم (10 مليارات دولار). وجاء الإعلان عن تأسيسها في كلمة سموه أمام المنتدى الاقتصادي العالمي في البحر الميت، الأردن في أيار/مايو 2007.

تهدف مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم إلى تمكين الأجيال الشابة في الوطن العربي من امتلاك المعرفة وتوظيفها لمواجهة تحديات التنمية، وابتكار حلول مستدامة نابعة من الواقع المحلي، للتعامل مع المشكلات التي تواجه مجتمعاتهم. ولتحقيق هذا الهدف، حدد سموه ثلاثة قطاعات استراتيجية لعمل المؤسسة، وهذه القطاعات هي: المعرفة والتعليم، والثقافة، وريادة الأعمال وفرص العمل.

مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم
MOHAMMED BIN RASHID AL MAKTOUM FOUNDATION

الرياضيات

مقدمة قصيرة جدًّا

تأليف: تيموثي جاورز

ترجمة: أ.د/ إنتصارات محمد حسن الشبكى
مراجعة: أ.د/ محمد عبد العظيم سعود

مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم
MOHAMMED BIN RASHID
AL MAKTOUM FOUNDATION

كلمات عربية

Mathematics
A Very Short Introduction

Timothy Gowers

الرياضيات
مقدمة قصيرة جدًّا

تيموثي جاورز

الطبعة الأولى ٢٠٠٨
ISBN 978 977 6263 15 4

كلمات عربية للترجمة والنشر
٤٣ شارع ابن قتيبة، حي الزهور، مدينة نصر، القاهرة ١١٤٧١
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٢٧٤٣١ ٢٠٢+ **فاكس:** ٢٢٧٠٦٣٥١ ٢٠٢+
البريد الإليكتروني: kalematarabia@kalematarabia.com
الموقع الإليكتروني: http://www.kalematarabia.com

مؤسسة محمد بن راشد آل مكتوم
البريد الإليكتروني: tarjem@mbrfoundation.ae
الموقع الإليكتروني: www.mbrfoundation.ae

جاورز، تيموثي
الرياضيات: مقدمة قصيرة جدًّا / تيموثي جاورز . - القاهرة : كلمات عربية للترجمة والنشر، ٢٠٠٨
١٤٤ص، ١١×١٧,٤سم
تدمك: ٤ ١٥ ٦٢٦٣ ٩٧٧ ٩٧٨
الرياضيات
أ- العنوان
٥١٠

المحتويات

مقدمة

فى بداية القرن العشرين لاحظ الرياضى العظيم دافيد هيلبرت أن عددًا من الحجج الرياضية الهامة متشابه التركيب. وفى الواقع لقد أدرك هيلبرت أنه عند مستوى مناسب يمكن اعتبارها هى نفسها. هذه الملاحظة — وكثير غيرها مشابه لها — نتج عنه فرع جديد فى الرياضيات وهو أحد المفاهيم المركزية، سُمى باسم هيلبرت. إن فكرة فراغ هيلبرت تلقى الضوء على كثير من الرياضيات الحديثة، من نظرية الأعداد إلى ميكانيكا الكم.

إنك إذا كنت لا تعلم على الأقل مبادئ نظرية فراغ هيلبرت، فلا يمكن أن تدعى أنك رياضى جيد التعليم.

إذن ما فراغ هيلبرت؟ فى المقرر النموذجى للرياضيات الجامعية يُعَرّف بأنه فراغ ضرب داخلى تام.

إن الطلاب الذين يدرسون هذا المقرر يتوقع لهم أن يعرفوا من مقررات سابقة أن فراغ الضرب الداخلى هو فراغ المتجهات المجهز (المعد) بضرب داخلى، وأن الفراغ تام إذا كانت كل متتابعة لكوشِى فى الفراغ تقاربية.

وبالطبع حتى تكون هذه التعاريف ذات معنى، فإن الطلاب بحاجة إلى أن يعرفوا ما فراغ المتجهات وما الضرب الداخلى، وما متتابعة كوشِى، وما التقارب. ولإعطاء مثل واحد منها (ليس أطولها): متتابعة كوشِى هى متتابعة $x_1, x_2, x_3, \ldots$ تحقق أنه لكل عدد موجب ϵ يوجد عدد صحيح N بحيث إنه لأى عددين صحيحين p, q أكبر من N تكون المسافة بين x_p, x_q على الأكثر ϵ.

وباختصار، فحتى تأمل فى فهم ما فراغ هيلبرت ينبغى لك أن تتعلم وتهضم متسلسلة متدرجة كامله من المفاهيم الأدنى مستوى أولًا، وليس مفاجئًا أن ذلك يحتاج إلى الوقت والجهد. ولأن نفس الشىء صحيح بالنسبة لكثير من أهم الأفكار الرياضية، فإنه توجد حدود صارمة لما نستطيع إنجازه بأى كتاب يحاول تقديم مقدمة سهلة للرياضيات، خاصة إذا كانت المقدمة مختصرة جدًّا.

وبدلًا من محاولة إيجاد طرق ماهرة للدوران حول هذه الصعوبة، فقد ركزت على حدود مختلفة للاتصالات الرياضية. هذه الصعوبة فلسفية أكثر منها تقنية وهى تفرق بين من هم راضون بمفهوم مثل اللانهاية والجذر التربيعى لسالب واحد والبعد السادس والعشرين والفراغ المنحنى، عمن يجدونها مفارقات مشوشة. ومن الممكن أن يصبح المرء مرتاحًا لهذه الأفكار، دون تعمق التقنيات، وهذا ما سأحاول عرضه.

وإذا كانت لهذا الكتاب رسالة، فهى أنه يجب تعلم التفكير المجرد، لأنه بفعل ذلك فإن كثيرًا من الصعاب يختفى ببساطة. وسوف أشرح بالتفصيل ما الذى أعنيه بالطريقة المجردة فى الفصل الثانى. الفصل الأول يهتم بأنواع معتادة ومترابطة من التجريد: عملية تقطير السمات الأساسية لمسائل من الواقع، وبالتالى تحويلها إلى مسائل رياضية. هذان الفصلان والفصل الثالث أناقش فيها ماذا أعنى بالبرهان الدقيق فى الرياضيات عمومًا.

سأناقش من بعد عددًا أكبر من الموضوعات المعنية. الفصل الأخير هو عن علماء الرياضيات أكثر منه عن الرياضيات، وبالتالى فطابعه — إلى حد ما — مختلف عن باقى الفصول.

وأنا أوصى بقراءة الفصل الثانى قبل قراءة أى فصل متأخر، ولكن بعيدًا عن ذلك فإن الكتاب قد نظم بطريقة غير متدرجة كلما أمكن ذلك. ولن أفترض قرب نهاية الكتاب أن القارئ قد فهم وتذكر كل شىء أتى من قبل.

ومطلوب لقراءة هذا الكتاب معلومات قليلة سابقة (الثانوية الإنجليزية أو ما يكافئها يمكن أن يكون كافيًا). ولن أحاول جذب انتباه القارئ لأننى سأفترض أنه مهتم.

ولهذا السبب فقد عملت بدون حكايات مسلية أو (كارتون) أو علامات تعجب أو عناوين للفصول مضحكة أو صور لمجموعات ماندلبروت. وتجنبت

أيضًا موضوعات مثل نظرية الفوضى ونظرية جودل اللتين تسيطران على خيال العامة، وتبعدان بهم عن الأبحاث الرياضية الحالية. على أية حال فقد عولجت هذه الموضوعات جيدًا فى كتب أخرى كثيرة.

وبدلًا من ذلك أخذت عددًا من الموضوعات العادية وناقشتها بتفصيل، لتوضيح كيف يمكن فهمها بطريقة أكثر دقة. وبكلمات أخرى قصدت إلى العمق أكثر من البسط، وحاولت جاهدًا أن أنقل جاذبية الرياضيات السائدة بجعلها تتكلم عن نفسها.

أود أن أشكر لمعهد كلاى للرياضيات وجامعة برنستون دعمهما وضيافتهما لى أثناء كتابة جزء من الكتاب. وإننى لممتن جدًّا لجلبرت أدير، وربيكا جوفرز، وإميلى جوفرز، وباتريك جوفرز، وجوشا كاتز، وأدموند توماس لقراءتهم مسودة سابقة. ومع أنهم كانوا ذوى معلومات وأذكى جدًّا من أن يعدوا من عامة القراء، فإنه من المطمئن أن أعلم أن ما كتبته مفهوم، على الأقل، لبعض غير الرياضيين. وقد أثمرت تعليقاتهم كثيرًا من التحسينات. وإننى لأهدى لإميلى هذا الكتاب على أمل أن يعطيها فكرة صغيرة عما أفعله طوال اليوم.

الفصل الأول

نماذج

كيف ترمى حجرًا؟

افترض أنك واقف عل أرض مستوية فى يوم هادئ، وتمسك حجرًا بيدك، وتود أن تقذفه إلى أبعد مسافة ممكنة. من أهم القرارات التى يجب اتخاذها تعيين الزاوية التى يغادر بها الحجر يدك. إذا كانت هذه الزاوية مسطحة جدًّا فإن الحجر على الرغم من أن له سرعة أفقية كبيرة فإنه سيسقط على الأرض سريعًا. وبالتالى فلن تكون لديه فرصة الوصول إلى مسافة بعيدة جدًّا. وعلى الجانب الآخر، فإنك إذا قذفت الحجر عاليًا جدًّا فإنه يظل فترة أطول فى الهواء، ولكن لن يغطى مسافة كبيرة على الأرض. فى هذه العملية واضح أننا نحتاج إلى حل وسط.

أحسن حل وسط الذى يمكن الحصول عليه بالتوفيق بين الفيزياء النيوتنية ومبادئ التفاضل والتكامل، حتى يصبح عملك عملًا بارعًا، كما نأمل فى ظل هذه الظروف: أنّ الحجر يجب أن يكون عند مغادرة يدك متجهًا بزاوية قياسها $45°$ إلى الأعلى مع الخط الأفقى. هذه الحسابات نفسها توضح أن الحجر سيرسم منحنى مكافئًا خلال طيرانه فى الهواء وتخبرك أيضًا بسرعة الحجر عند كل لحظة بعد مفارقته ليدك.

ولهذا يبدو أن توفيقًا ما بين العلوم والرياضيات يمكننا من التنبؤ بسلوك الحجر من لحظة انطلاقه إلى لحظة سقوطه على الأرض. على أية حال، هذا يحدث إذا كنا مستعدين لعمل عدد من الفروض المبسطة، وأهمها أن القوة الوحيدة المؤثرة على الحجر هى الجاذبية الأرضية، وأن هذه القوة لها نفس

القيمة والاتجاه فى كل مكان. وهذا غير صحيح لأنه لا يأخذ فى الحسبان مقاومة الهواء، ودوران الأرض، والتأثير الضئيل لجاذبية القمر، وحقيقة أن جاذبية الأرض تضعف كلما ارتفع الحجر، وكذلك التغير التدريجى فى الاتجاه الرأسى إلى أسفل، كلما تحركت من جزء إلى آخر من الأرض. وحتى إذا وافقت على الحسابات، فإن التوصية باستخدام زاوية قياسها $45°$ يعتمد على فرض آخر ضمنى، وهو أن سرعة الحجر عندما يترك يدك لا تعتمد على اتجاهه، وهذا مرة أخرى غير صحيح، لأن قذف الحجر يكون أقوى عندما تكون الزاوية مسطحة.

فى ضوء هذه الاعتراضات، وبعضها من الواضح أنه أكثر جدية من غيره، ما الموقف الذى على المرء أن يتخذه من الحسابات، والتوقعات الناتجة عنها؟ إحدى الطرائق اعتبار أكبر عدد من الاعتراضات فى الحسبان. وعلى أية حال فالسياسة الأكثر حساسية فى الاتجاه المعاكس تمامًا. حدد أى مستوى من الدقة أنت بحاجه إليه، وحاول تحقيقة بأبسط الوسائل. وإذا كنت تعلم من خبرتك أن تبسيط الافتراض سيكون له تأثير صغير على الإجابة، فينبغى لك الأخذ بهذا الافتراض.

وعلى سبيل المثال، فإن تأثير مقاومة الهواء على الحجر سيكون صغيرًا نوعًا ما، لأن الحجر صغير، وصلب، ومتماسك إلى حد ما. إذن لا يوجد ما يستحق أن يعقد الحسابات بأن نأخذ مقاومة الهواء فى الاعتبار، بينما يحدث خطأ هام (ذو مغزى) فى حساب زاوية قذف الحجر بأية طريقة. فإذا رغبت فى اعتبار مقاومة الهواء، فإن قاعدة إبهام اليد تكون كافية بشكل جيد فى معظم الأغراض: كلما كبرت مقاومة الهواء، صغرت الزاوية المناسبة لها.

ما النموذج الرياضى؟

عندما يفحص المرء الحل لمسألة فيزيائية فإنه يحدث أحيانًا وليس دائمًا أن يحدد تمايزًا واضحًا بين المساهمة من العلوم، وتلك المساهمة من الرياضيات. فأداة العلماء هى النظريات التى تعتمد جزئيًا على نتائج الملحوظات والتجارب، وجزئيًا على الاعتبارات العامة مثل التبسيط وقوة الإيضاح. الرياضيون أو علماء الرياضيات يفحصون المنطق البحت الناتج عن النظرية. وفى بعض الأحيان تكون هذه نتائج حسابات روتينية تتنبأ تمامًا بنوع الظاهرة التى من أجلها

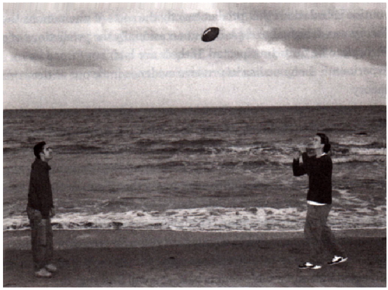
صممت النظرية للإيضاح، لكن تنبؤات النظرية أحيانًا ما تكون غير متوقعه بالمرة. وإذا حدث أن هذه التوقعات أمكن إثباتها حديثًا بواسطة التجارب فإنه يكون لدينا برهان مؤثر فى تأييد النظرية.

إن مفهوم تأكيد التنبؤ العلمى يكون على أية حال مشكلًا، لأنه يحتاج إلى تبسيطات من النوع الذى سبق أن ناقشته. لنأخذ مثالًا آخر: إن قانونَىْ نيوتن للحركة والجاذبية يقتضيان أنك إذا أسقطت جسمين من الارتفاع نفسه، فإنهما يرتطمان بالأرض إذا كانت مستوية فى الوقت نفسه. لقد أشار جاليليو إلى هذه الظاهرة لكن كبديهة عكسية إلى حد ما، وفى الحقيقة إنها أسوأ من كونها بديهة عكسية؛ فإذا حاولت بنفسك التجربة مع كرتين إحداهما للجولف والأخرى لتنس الطاولة، فإنك ستجد أن كرة الجولف تصل إلى الأرض أولًا. إذن، فى أى مفهوم كان جاليليو محقًّا؟

بالطبع، إن مقاومة الهواء التى لم نهتم بها فى هذه التجربة هى التى أفسدت نظرية جاليليو. لقد أوضحت الخبرة أن النظرية صحيحة إذا كانت مقاومة الهواء صغيرة. فإذا وجدت أنه من المريح أكثر مما ينبغى اعتبار مقاومة الهواء هى المنقذ فى كل مرة لتنبؤات الميكانيكا النيوتنية الخاطئة، فإن إيمانك بالعلم، وإعجابك بجاليليو سيسترجعان إذا حصلت على فرصة مراقبة ريشة تسقط فى الفراغ؛ إنها فى الحقيقة تسقط بالضبط كما يسقط الحجر.

ومع ما سبق، ولأن الملحوظات العلمية لا يمكن أن تكون مباشرة وقاطعة، فإننا بحاجة إلى طريقة أفضل لوصف العلاقة بين العلوم والرياضيات. إن الرياضيين لا يستخدمون النظريات العلمية مباشرة للحياة، لكن، على الأصح، يستخدمونها للنماذج. النموذج بهذا المعنى يمكن اعتباره رؤية تخيلية مبسطة لجزء من العالم تحت الدراسة، حيث تكون الحسابات الدقيقة ممكنة. فمثلًا فى حالة الحجر تشبه العلاقة بين العالم والنموذج العلاقة بين شكلى ١، ٢ إلى حدٍّ ما.

توجد طرائق كثيرة لتشكيل نموذج الوضع الفيزيائى المعطَى، ويجب استعمال خليط من الخبرة والاعتبارات النظرية لتحديد أى نموذج مُعطَى من المحتمل أن يزودنا بمعلومات عن العالم نفسه. إن أهم الأولويات عند اختيار النموذج هى أن سلوك النموذج يتطابق بقدر الإمكان مع السلوك الحقيقى الملاحظ للعالم. على أية حال، هناك عوامل أخرى تكون أكثر أهمية مثل البساطة



شكل ١

شكل ٢

والأناقة الرياضية. أيضًا توجد نماذج نافعة جدًّا، وتقريبًا دون أي تشابه مع العالم، كما سوف توضح بعض أمثلتي.

دحرجة النردين

إذا دحرجت نردين، وأردت أن أعرف سلوكهما، فإن التجربة تخبرني أن هناك أسئلة معينة يكون طرحها غير واقعي. فمثلًا لا يوجد شخص يكون من المتوقع أن يخبرني بناتج الدحرجة مقدمًا، حتى إذا كان يمتلك تقنية عالية، وكانت الدحرجة تحدث آليًّا. وعلى النقيض فالأسئلة ذات الطبيعة الاحتمالية مثل «ما احتمال أن يكون مجموع العددين على النرد سبعة؟» يمكن دائمًا الإجابة عنها، وربما تكون الإجابة مفيدة إذا كنا نلعب النرد للمكسب، على سبيل

المثال. وللنوع الثانى من الأسئلة يمكن بسهولة شديدة عمل نموذج للوضع بتمثيل الدحرجة كاختيار عشوائى لواحد من الـ 36 زوجًا مرتبًا للأعداد:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

حيث يمثل العدد الأول فى كل زوج العدد على النرد الأول، ويمثل العدد الثانى فى كل زوج العدد على النرد الثانى، ولأن عدد الأزواج المرتبة التى مجموعها 7 هو 6 فقط فإن الفرصة هى $6/36$ أو $1/6$.

ربما كان على المرء أن يعترض فى هذا النموذج على أساس أن النرد يتدحرج طبقًا لقوانين نيوتن إلى درجة كبيرة من الدقة، وأنه يتوقف عشوائيًّا. ومن حيث المبدأ يمكن حساب توقفه. ومهما يكن فكلمة «من حيث المبدأ» هنا فيها مغالاة، لأن الحسابات قد تكون معقدة جدًّا، وقد تحتاج إلى أن تُبنى على معلومات أكثر دقة، عن الشكل والتكوين، والسرعة الابتدائية، ودوران النرد، مما يمكن قياسه فى الواقع. ولكل هذه الأسباب لا توجد ميزة فى استخدام نماذج أكثر تحديدًا وتعقيدًا.

التنبؤ بالنمو السكانى

إن العلوم «الأسهل» مثل البيولوجيا والاقتصاد مليئة بالنماذج الرياضية، وهى أبسط كثيرًا من الظاهرة التى تمثلها، أو حتى غير دقيقة فى نطاقات معينة، لكنها، مع ذلك، نافعة ومضيئة. لنأخذ مثالًا من البيولوجيا ذا أهمية اقتصادية عظيمة. لنتصور أننا نرغب فى التنبؤ بسكان بلد ما فى خلال عشرين عامًا. أحد النماذج البسيطة جدًّا هو اعتبار البلد كأنه أزواج الأعداد $(t, P(t))$ حيث تمثل t الزمن، وتمثل $P(t)$ حجم السكان عند الزمن t. وبالإضافة إلى ذلك فإن لدينا عددين b, d يمثلان نسبة عدد المواليد، ونسبة عدد الوفيات إلى عدد السكان، على الترتيب، فى كل سنة.

فإذا افترضنا أن عدد السكان عند بداية عام 2002 هو P، فطبقًا للنموذج المعرف توًّا فإن عدد المواليد وعدد الوفيات فى خلال العام هما bP, dP على الترتيب. إذن يصبح عدد السكان فى بداية عام 2003

$$P + bP - dP = (1 + b - d)P.$$

هذا البرهان صحيح فى أية سنة. وبالتالى نحصل على العلاقة:

$$P(n+1) = (1 + b - d)P(n),$$

وتعنى أن عدد السكان فى بداية السنة $n+1$ سيكون $(1+b-d)$ مضروبًا فى عدد السكان فى بداية السنة n.

وبكلمات أخرى، يتضاعف عدد السكان كل سنة بمقدار $(1+b-d)$. وبالتالى فإنه فى عشرين عامًا يتضاعف عدد السكان بمقدار $(1+b-d)^{20}$، وهذه إجابة عن السؤال الأصلى.

حتى هذا النموذج الأساسى فإنه جيد بدرجة كافية لإقناعنا بأنه إذا كانت نسبة المواليد تزيد على نسبة الوفيات زيادة واضحة، فإن عدد السكان ينمو بأقصى سرعة. على أية حال، فإن هذا النموذج غير واقعى ولذلك فالتنبؤات غير دقيقة. فمثلًا افتراض أن نسبة المواليد والوفيات تظل ثابتة خلال 20 سنة ليس تمامًا مقبولًا، لأنهما قد تأثرا فى الماضى بالتغيرات الاجتماعية والأحداث السياسية مثل التحسُّن فى الطب، والأمراض الحديثة، وارتفاع متوسط الأعمار الذى تبدأ عنده النساء فى الولادة، والحوافز الضريبية، والحروب العرضية، بدرجة كبيرة. سبب آخر لتوقع التغير فى نسبة المواليد والوفيات مع الزمن هو أن أعمار السكان فى البلد ربما تتوزع بعدم انتظام إلى حدٍّ ما. وعلى سبيل المثال، فإنه إذا كان قد حدث ارتفاع مفاجئ فى مجموعة الأطفال منذ 15 سنة، فإنه يوجد سبب لتوقع ارتفاع نسبة المواليد خلال 15–10 سنة تالية.

إذن هناك محاولة لتعقيد النموذج بإضافة عوامل أُخر. ويمكننا أن نعتبر نسبة المواليد والوفيات $b(t), d(t)$ بمعنى أنهما يتغيران مع الزمن. وبدلًا من العدد المفرد $P(t)$ الذى يمثل حجم السكان، ربما ينبغى للمرء أن يعرف

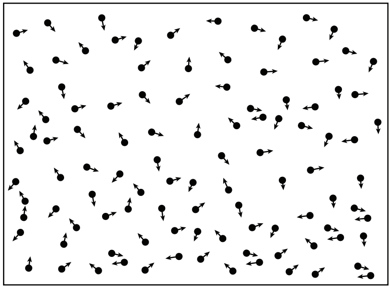
عدد السكان فى مجموعات الأعمار المختلفة. وربما تساعدنا كذلك — بقدر الإمكان — معرفة المواقف الاجتماعية والسلوك للتنبؤ بالمعدلات المحتملة للمواليد والوفيات فى المستقبل لهذه المجموعات العمرية. والحصول على هذا النوع من المعلومات صعب ومرتفع الثمن. لكن المعلومات فى هذه الحالة يمكن أن تحسن بشكل جيد الحصول على تنبؤات دقيقة. ولهذا السبب لا يوجد نموذج يبدو أنه أفضل من النماذج الأخرى. فمثلًا فى التغيرات الاجتماعية والسياسية يكون من المستحيل القول — بأية درجة من اليقين — ماذا سيحدث. ومن ثم فإن أحسن ما يمكن للمرء أن يسأل بحصافة عن أى نموذج: هو التنبؤات ذات النوع الشرطى، ألا وهى التى تخبرنا عن تأثير التغيرات الاجتماعية والسياسية إذا حدثت.

سلوك الغازات

وفقًا لنظرية الحركة للغازات التى قدمها دانيل برنولى عام 1738، وتطورت مع ماكسويل وبولتزمان وآخرين فى النصف الثانى من القرن 19، فإن الغازات تتكون من جزيئات متحركة، وكثير من خصائصها، مثل درجة الحرارة والضغط، هى خصائص إحصائية لهذه الجزيئات. درجة الحرارة مثلًا تناظر متوسط سرعة الجزيئات.

ومع وجود هذه الآراء فى أذهاننا، فلنتدبر كيف يعمل نموذج للغاز الموجود فى صندوق مكعب: إن الصندوق يجب أن يمثل — بالطبع — بمكعب (وهو تمثيل رياضى وليس فيزيائيًّا)، ولأن الجزيئات صغيرة جدًّا فإنه من الطبيعى تمثيلها بنقط داخل المكعب. من المفترض أن هذه النقط تتحرك، وهكذا فإنه يجب أن نقرر القوانين التى تحكم حركتها، وعلينا القيام ببعض الاختبارات:

إذا وجد جزىء واحد فى الصندوق، فإنه ستوجد قاعدة واضحة: سوف يتحرك الجزىء بسرعة ثابتة ثم يرتد عائدًا من حوائط الصندوق عند اصطدامه بها، وأبسط الطرائق المقنعة لتعميم هذا النموذج هو اعتبار N من الجزيئات حيث N عدد كبير، ونفترض أن جميع الجزيئات سوف تتصرف بالطريقة نفسها، مع عدم وجود تفاعل بينها. ولكى نحصل على النموذج N من الجزيئات، بدايةً علينا أن نختار مواقع وسرعات ابتدائية للجزيئات، أو بالأحرى نختار



شكل ٣

نقطًا لتمثيلها، والطريقة الجيدة لعمل هذا هى الاختيار العشوائى، حيث إننا قد نتوقع أنه عند أية لحظة فإن الجزيئات فى غاز حقيقى قد تنتشر وتتحرك فى اتجاهات متعددة.

وليس من الصعب أن نقول ما المقصود بنقطة عشوائية فى الصندوق أو باتجاه عشوائى، ولكن كيفية اختيار سرعة عشوائية هى أقل وضوحًا، حيث إن السرعة تأخذ أية قيمة تتراوح بين الصفر واللانهاية. وللتغلب على هذه الصعوبة دعنا نعمل افتراضًا فيزيائيًّا غير معقول، وهو أن كل الجزيئات تتحرك بنفس السرعة، وأن المواقع والاتجاهات الابتدائية اختيرت عشوائيًّا، وشكل ٣ يمثل صورة ثنائية الأبعاد للنموذج الناتج.

إن افتراض أن N من الجزيئات تتحرك غير معتمدة بعضها على بعض كلية، على وجه اليقين، تبسيط زائد على الحد. وعلى سبيل المثال، فإن هذا يعنى أنه لا يوجد أمل فى استخدام هذا النموذج لفهم: لماذا يصبح الغاز سائلًا عند درجات حرارة منخفضة بدرجة كافية: إنك لو أبطأت النقط فى النموذج ستحصل على النموذج نفسه، لكن الجزيئات تجرى بسرعات أقل، وعلى الرغم من ذلك فإنه يفسر كثيرًا من سلوك الغازات الحقيقية. وعلى سبيل المثال تصور ماذا يمكن أن يحدث لو أننا صغرنا الصندوق تدريجيًّا. إن الجزيئات ستستمر فى الحركة بالسرعة نفسها، ولكن لأن الصندوق الآن أصغر فإنها تصطدم بالحيطان مرات أكثر من ذى قبل، وتكون مساحة الحيطان المعرضه للاصطدام أقل. لهذين السببين فإن عدد الاصطدامات فى الثانية فى أية مساحة

مغطاة من الحائط ستصبح أكبر، وهذه الاصطدامات تتسبب فى الضغط الذى سيحدثه الغاز، لذا فإننا نستنتج أنه إذا حشرت الغاز فى حجم أقل فعلى فالأرجح أن ضغطه سيزداد، كما تأكد ذلك بالملاحظة. ومناقشة مماثلة تفسر لماذا لو رفعت درجة حرارة الغاز، بدون زيادة حجمه، يزداد ضغطه. ويجب ألا يكون استنتاج شكل العلاقات العددية بين الضغط ودرجة الحرارة والحجم صعبًا جدًّا.

النموذج السابق يقارب نموذج برنولى. وواحدة من إنجازات ماكسويل كانت اكتشاف حجة نظرية أنيقة حلت مشكلة كيفية اختيار السرعات الابتدائية بواقعية أكثر. ولفهم هذا دعنا نبدأ بإسقاط افتراضنا أن الجزيئات لا تتفاعل، وبدلًا من ذلك سنفترض أنها ستصطدم من وقت لآخر مثل زوج صغير من كرات البلياردو، وبعدها ستتحرك بسرعات أخرى، وفى اتجاهات أخرى، تخضع لقوانين حفظ الطاقة، وكمية الحركة، لكنها عشوائية فى غير ذلك. وبالطبع فإنه ليس سهلًا رؤية كيف كانت ستفعل ذلك لو كانت نقطًا منفردة لا تشغل حجمًا. لكن هذا الجزء من الحجة نحتاج إليه فقط كمبرر غير شكلى لبعض أنواع العشوائية فى سرعات واتجاهات الجزيئات. إن افتراضى ماكسويل المحتملين جدًّا (القابلين للتحقيق)، عن طبيعة هذه العشوائية ينبغى ألا يتغيرا بمرور الوقت وألا يميزا بين اتجاه وآخر.

وبكلام تقريبى: إن الافتراض الثانى يعنى أنه إذا كان d_1, d_2 اتجاهين، وs هى سرعة ما، فإن احتمال أن جسيمًا يتحرك بسرعة s فى الاتجاه d_1 هو نفسه احتمال أن يتحرك بسرعة s فى الاتجاه d_2. من المدهش أن هذين الافتراضين كانا كافيين لتعيين كيف ينبغى أن تتوزع السرعات بدقة. بمعنى أنهما يقولان لنا، إذا ما أردنا أن نختار السرعات عشوائيًّا، إنه توجد طريقة واحدة طبيعية لفعل ذلك. (يجب أن يحددا طبقًا للتوزيع الطبيعى، وهذا هو التوزيع المنتج لشكل الجرس المشهور، الذى يحدث فى عدد كبير من الموضوعات المختلفة، رياضيًّا، وعمليًّا).

وبمجرد اختيارنا للسرعات نستطيع مرة أخرى أن ننسى كل ما هو حول التجاذب بين الجزيئات، وكنتيجة لذلك فإن النموذج المحسن قليلًا يشترك فى كثير من عيوب النموذج الأول. ومن أجل معالجة هذين النموذجين لا يوجد اختيار إلا نمذجة التفاعلات بطريقة ما. ويتضح أنه حتى النماذج المبسطة

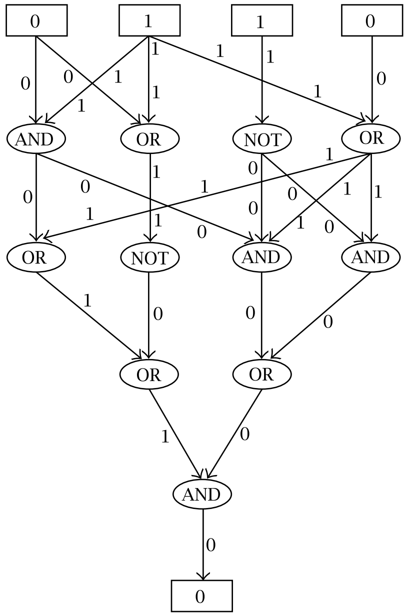
جدًّا لأنظمة الجسيمات المتفاعلة تتصرف بطريقة سحرية، وتنتج مشكلات رياضية صعبة للغاية، لا يحل أغلبها.

نمذجة العقول والحاسبات

يمكن اعتبار الحاسب الآلى (الكمبيوتر) كتجمع من أجزاء بسيطة تتفاعل بعضها مع بعض. ولهذا السبب فإن علم الكمبيوتر النظرى يعتبر إلى حد بعيد مليئًا بمشكلات هامة لمّا تحل. وهذا مثال جيد لنوع الأسئلة التى ربما يرغب المرء فى حلها: نفترض أن أحدًا اختار عددين p, q، وضرب أحدهما فى الآخر، وأخبرك أن الإجابة هى pq. يمكنك فى الحقيقة أن تستنبط p, q، بأن تأخذ كل عدد أوَّلى على التوالى، ومعرفة هل يمكن أن ينتج حاصل الضرب pq. فمثلًا إذا أعطيت العدد 91 فإنه يمكنك بسرعة أن تثبت أنه ليس مضاعفًا للأعداد $2, 3, 5$، وأنه يساوى 13×7.

على أية حال إذا كان p, q عددين كبيرين جدًّا، يتكون كل منهما مثلًا من 200 رقم، فإن طريقة المحاولة والخطأ سوف تأخذ زمنًا طويلًا غير متصور، حتى إذا كان ذلك بمساعدة كمبيوتر قوى. (إذا كنت تريد الإحساس بمثل هذه الصعوبة، حاول أن تجد عددين أوليين يمكن ضربهما لتحصل على 6901، وآخرين للحصول على 280123). ومن ناحية أخرى فإنه ليس من المستحيل وجود طريقة أكثر مهارة لمباشرة العمل فى المسألة، يمكن استعمالها كأساس لبرنامج كمبيوتر، ولا تأخذ وقتًا طويلًا فى العمل. فإذا أمكننا إيجاد هذه الطريقة، فإنها ستسمح بتكسير الشفرات التى بنيت عليها غالبية أنظمة الأمان الحديثة فى الإنترنت وغيرها، لأن الصعوبة فى حل شفرات هذا النظام تعتمد على الصعوبة فى تحليل الأعداد الكبيرة. ولهذا قد نستطيع أن نؤكد مرة أخرى أنه لا يوجد إجراء سريع وفعال لحساب p, q من حاصل ضربهما pq. ولسوء الحظ فإنه بينما يستمر الكمبيوتر فى مفاجأتنا بما يمكن استعماله له، فإنه على وجه التقريب لا شىء معلومًا عما لا يمكن للكمبيوتر عمله.

وقبل أن نبدأ التفكير فى هذه المشكلة، يجب أن نجد طريقة ما نمثل بها الكمبيوتر بواسطة الرياضيات، وتكون بسيطة بقدر الإمكان. يوضح شكل ٤ واحدة من أحسن الطرائق لفعل ذلك: إنه يتكون من عدد من الطبقات تحتوى عقدًا ترتبط معًا بخطوط تسمى حوافًا. فى الطبقة العلوية يأتى «الإدخال»



شكل ٤

(input)، وهو متتابعة من الأصفار والواحدات، وخارجًا من الطبقة السفلية يأتى «الخارج» (output)، وهو متتابعة أخرى من الأصفار والواحدات. والعقد ثلاثة أنواع تسمى بوابات AND, OR, NOT. كل بوابة من هذه تستقبل بعض الأصفار والواحدات من الحواف التى أُدْخِلت فيها من أعلى، واعتمادًا على ما استقبلته البوابة، فإنها عندئذ ترسل أصفارًا أو واحدات تبعًا للقواعد البسيطة التالية: إذا لم تستقبل بوابة AND شيئًا إلا الواحدات، فإنها ترسل واحدات وإلا فإنها ترسل أصفارًا. وإذا لم تستقبل بوابة OR شيئًا إلا أصفارًا، فإنها ترسل أصفارًا وإلا فإنها ترسل واحدات. ولا يسمح بدخول بوابة NOT من أعلى إلا لحافة واحدة، وترسل واحدات إذا استقبلت أصفارًا، وترسل أصفارًا إذا استقبلت واحدات.

يقال لمجموعة من البوابات المرتبطة بالحواف «دائرة»، وما وُصِف هو نموذج دائرة للحسابات. السبب فى أن الحسابات (computation) كلمة مناسبة، هو أن الدائرة يمكن تصورها إذ إنها تأخذ متتابعة من الأصفار والواحدات، وتنقلها إلى متتابعة أخرى طبقًا لقواعد معدة سابقًا، بحيث إنه إذا كانت الدائرة كبيرة تكون القواعد معقدة جدًّا. وهذا أيضًا ما تفعله الكمبيوترات على الرغم من أنها تترجم هذه المتتابعة إلى أشكال يمكن فهمها مثل لغات البرمجة عالية المستوى icons, windows وغيرها. وبالتالى يصبح سهلًا جدًّا (من وجهة النظر النظرية — يصبح هذا حلمًا مروعًا فى الممارسة) تحويل أى برنامج كمبيوتر إلى دائرة تحول متتابعات 01 طبقًا تمامًا لنفس القاعدة. علاوة على ذلك فإن المميزات الهامة لبرامج الكمبيوتر يكون لها نظائر مطابقة فى الدوائر الناتجة.

وعلى وجه الخصوص فإن عدد العقد فى الدائرة يتناسب مع طول الوقت الذى يأخذه برنامج الكمبيوتر للتشغيل. ولهذا فإنه إذا استطاع المرء أن يظهر أن طريقه معينه لنقل المتتابعة (01) يحتاج إلى دائرة كبيرة جدًّا، فإنه يكون قد اظهر كذلك أنها تحتاج إلى برنامج للكمبيوتر ذى وقت طويل جدًّا فى التشغيل. إن ميزة استعمال نموذج الدائرة على تحليل الكمبيوترات مباشرة، من وجهة نظر الرياضيات، هو أن التفكير فى الدوائر أكثر سهولة وطبيعية.

إن تعديلًا صغيرًا لنموذج الدائرة يؤدى إلى نموذج نافع للمخ البشرى. والآن فبدلًا من أصفار وواحدات فإن المرء لديه إشارات متغيره فى القوة، يمكن تمثيلها بأعداد ما بين صفر وواحد. البوابات التى تقابل خلايا الأعصاب أو خلايا المخ أيضًا مختلفة، لكنها ما زالت تتصرف بنفس الطريقة البسيطة. كل واحدة تستقبل بعض الإشارات من البوابات الأخرى، فإذا كانت القوة الكليه لهذه الإشارات — أى مجموع الأعداد المقابلة — كبيره بدرجة كافية، فإن البوابة ترسل إشاراتها الخاصة بقوى معينة، وإلا فإنها لا ترسل أية إشارة، وهذا يقابل قرار الخلية العصبية أن تعمل أو لا تعمل.

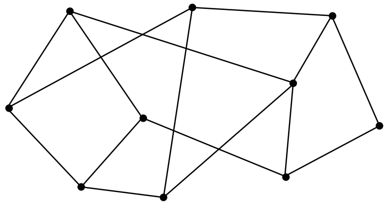
قد يكون من الصعب الاعتقاد بأن هذا النموذج يمكن أن يستأثر بكل تعقيدات المخ. على كل حال، قد يكون ذلك صحيحًا جزئيًّا، لأننا لم نقل شيئًا عن عدد البوابات التى ينبغى أن تكون موجودة، ولا كيف ينبغى ترتيبها.

إن المخ البشرى النموذجى يحتوى على نحو 100 مليون خلية عصبية مرتبة بطريقة معقدة جدًّا، وعلى مستوى المعلومات الحالية عن المخ من غير الممكن أن نقول ما هو أكثر، خاصة عن التفصيلات الدقيقة. وعلى الرغم من ذلك، فإن النموذج يمدنا ببناء نظرى مفيد للتفكير عن كيف يمكن أن يعمل المخ، وكذلك يتيح للناس محاكاة بعض أنواع شبيهة بسلوك المخ.

تلوين الخرائط ورسم جداول الزمن

لنفترض أنك صممت خريطة مقسمة إلى مناطق، وأردت أن تختار ألوانًا للمناطق. ورغبت فى أن تستعمل أقل عدد ممكن من الألوان، لكن على ألا تتماس منطقتان لهما اللون نفسه. ونفترض أنك أردت أن ترسم جدولًا لمقرر جامعى مقسم إلى وحدات عيارية: عدد الأوقات الممكنة للمحاضرات محدود، وبالتالى فإن بعض الوحدات يتصادم مع الأخرى، ولديك قائمة تحدد لكل طالب ماذا يأخذ من الوحدات، وتريد أن تختار الوقت بحيث إن الوحدتين تتصادمان فقط إذا لم يأخذهما أحد معًا. هاتان المشكلتان تبدوان مختلفتين تمامًا، لكن باختيار نموذج مناسب يتضح من وجهة النظر الرياضية أنهما متطابقتان. وفى كلتا الحالتين يوجد بعض الأشياء (دول، وحدات) لكل منها يجب تعيين شىء (لون، زمن). بعض أزواج الأشياء لا تقارن (البلدان المتجاورة، الوحدات التى ينبغى ألا تتصادم) بمعنى أنه من غير المسموح لها استقبال نفس المهمة. فى أية مسألة لا نهتم حقيقة بنوع الأشياء ولا المهمة التى عينت لها، وبالتالى يمكن تمثيلها بنقط. لتوضيح الأزواج من النقط المتعارضة يمكن توصيلها بخطوط. مجموعة النقط التى يرتبط بعضها بخطوط هى بناء رياضى يعرف باسم الرسم. شكل ٥ يعطى مثالًا بسيطًا. ومن المعتاد أن تسمى النقط بالرءوس، والخطوط بالحواف فى الرسم.

ما دمنا مثلنا المشكلات بهذه الطريقة فتكون مهمتنا فى الحالتين أن نقسم الرءوس إلى أعداد صغيرة من المجموعات بحيث لا تحتوى أية مجموعة على رأسين مرتبطين بحافة. الرسم فى شكل ٥ يمكن تقسيمه إلى ثلاث مجموعات من هذا النوع، لكن لا يمكن تقسيمه إلى اثنين فقط. هذا يوضح سببًا آخر جيدًا جدًّا لعمل نماذج بسيطة بقدر الإمكان. إذا كنت سعيد الحظ فإن النموذج نفسه يمكن استخدامه لدراسة مختلف الظواهر فى الوقت نفسه.



شكل ٥: رسم له عشرة رءوس، خمس عشرة حافة.

معان مختلفة لكلمة مجرد

عند ابتكار نموذج نحاول إهمال كثير مما حول الظاهرة تحت الدراسة بقدر المستطاع، ونستخلص منها فقط الملامح الأساسية لفهم سلوكها. فى الأمثلة التى نوقشت اختصرت الأحجار إلى نقط وحيدة، وسكان أية دولة إلى عدد واحد، والمخ إلى شبكة من البوابات تطيع قواعد رياضية بسيطة، والتفاعل بين الجزيئات إلى لا شىء بالمرة. إن البناءات الرياضية الناتجة هى تمثيل مجرد لحالات مدركه بالحواس تمت نمذجتها.

هذان مفهومان لمعنى أن الرياضيات موضوع مجرد: إنها تستخلص الملامح الهامة من المسألة، وتتعامل مع نتائج الأشياء غير الملموسة. وسوف يناقش الفصل التالى مفهومًا ثالثًا أعمق للتجريد فى الرياضيات، ولهذا المفهوم أعطانا مثال الفصل السابق فكرة ما. الرسم هو نموذج مرن جدًّا له استخدامات كثيرة، وعلى أية حال فإنه عند دراسة الرسوم ليست هناك حاجة لتحميل العقل باستخداماتها: إنه ليس مهمًّا إذا ما كانت النقط تمثل مناطق أو محاضرات أو شيئًا مختلفًا تمامًا؛ إن الباحثين فى نظرية الرسوم يمكن أن يتركوا العالم الحقيقى كلية خلفهم ويدلفوا إلى عالم التجريد البحت.

الفصل الثاني

الأعداد والتجريد

الطريقة التجريدية

قبل عدد قليل من الأعوام ابتدأ مقال نقدى فى الملحق الأدبى لجريدة التايمز بالفقرة التالية:

> إذا كان $1 = 1\times1, 0 = 0\times0$ فإنه توجد أعداد هى مربعات نفسها، وبالتالى فإنه توجد أعداد، وبخطوة وحيدة فى بساطة ساذجة يبدو أننا تقدمنا من جزء من الحساب الابتدائى إلى استنتاج فلسفى مروّع ومثير للجدل بدرجة عالية: إن الأعداد موجودة، وكان ينبغى لك أن تفكر أن الأمر أكثر صعوبة.
>
> A. W. Moore reviewing Realistic Rationalism,
> by Jerrold J. Katz, in the T.L.S., 11th September 1998.

يمكن انتقاد هذا الجدل بطرائق عدة، ومن غير المحتمل أن يأخذه أحد على محمل الجد، حتى الناقد. وعلى أية حال، فمن المؤكد وجود فلاسفة يأخذون بجدية مسألة وجود الأعداد، وهو ما يميزهم من علماء الرياضيات، الذين يجدون مسألة وجود الأعداد واضحة، أو لا يفهمون ما المقصود بالسؤال. الغرض الأساسى من هذا الفصل هو شرح لماذا يستطيع الرياضى (وهو ما يجب أن يكون) بسعادة إهمال هذا السؤال الذى يبدو أساسيًّا.

إن سخف المجادلة البسيطة الساذجة فى وجود الأعداد يصبح واضحًا جدًّا إذا التفت المرء إلى مجادلة مماثلة عن لعبة الشطرنج. فإذا عرفتَ أن الملك الأسود فى الشطرنج سُمِحَ له بالحركة أحيانًا فى اتجاه قطرى لمسافة مربع واحد، فإنه يتعين وجود قطع من الشطرنج التى يسمح لها أحيانًا بالتحرك فى اتجاه قطرى لمربع واحد، وبالتالى فإنه يوجد قطع شطرنج.

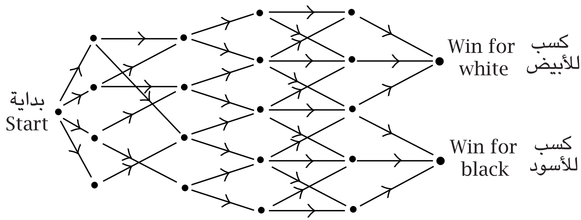
بالطبع أنا لا أقصد بهذا التقرير العادى إلى أن الناس يبنون أحيانًا مجموعات الشطرنج — بعد كل هذا أنه من الممكن أن تلعب مباراة بدونها — لكن النتيجة الفلسفية الأشد ترويعًا أن قطع الشطرنج موجودة غير معتمدة على طبيعتها المادية.

ما الملك الأسود فى الشطرنج؟ هذا سؤال غريب، وأحسن الطرائق الكافية للتعامل معه هى تنحيته جانبًا قليلًا. ماذا يستطيع المرء أكثر من الإشارة إلى رقعة الشطرنج ويشرح قواعد اللعبة، وربما يعطى اهتمامًا خاصًّا لدور الملك الأسود؟ ماذا عن الملك الأسود؟ ليس وجوده ولا طبيعته الذاتية، ولكن الدور الذى يلعبه فى الشوط.

الطريقة التجريدية فى الرياضيات، كما يقال لها أحيانًا، هى النتيجة عندما يتخذ المرء وضعًا مماثلًا للأشياء الرياضية. هذا الوضع ممكن تغليفه (= وضعه فى كبسولة) فى الشعار الآتى: الرياضى هو ما يقوم بعمله. شعارات مشابهة ظهرت مرات عديدة فى فلسفة اللغات، ويمكن أن تكون مثيرة للجدل. مثالان هما «فى اللغة يوجد فقط اختلافات»، «معنى الكلمة هو استعمالها فى اللغة» يرجعان إلى Saussure and Wittgenstein على الترتيب (راجع القراءات الأخرى). ويمكن للمرء إضافة الصيحة الحاشدة للوضعين المنطقيين: «معنى أى تقرير هو طريقة تحقيقة». فإذا وجدت أن عدم استساغتى لأسباب فلسفية، عندئذ فأن تنظر إليه كموقف يمكن للمرء تبنيه أحيانًا أفضل من اعتباره إعلانًا مؤكدًا من غير بينة أو دليل، كما آمل أن أبرهن على أنه من الضرورى أن نتمكن من تبنى هذا الموقف إذا كان المطلوب فهم الرياضيات المتقدمة.

الشطرنج بدون قطع

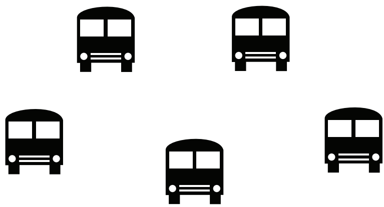
من المسلى أن نرى، على الرغم من أن مجادلتى لا تعتمد على ذلك، أن الشطرنج أو أية لعبة مشابهة يمكن نمذجتها باستخدام الرسوم (تم تعريف الرسوم



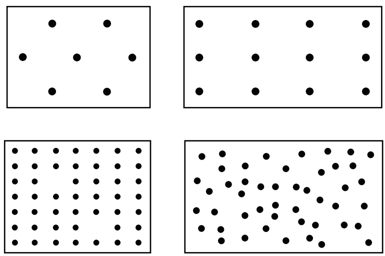
شكل ٦

فى نهاية الفصل السابق): رءوس الرسم تمثل الأوضاع الممكنة فى المباراة، والرأسان P, Q يتصلان بحافة واحدة إذا كان الشخص فى دوره يتحرك من النقطة P منطقيًّا إلى النقطة Q، ولأنه ربما يكون من غير الممكن التحرك إلى الخلف من Q إلى P فإن الحواف بها حاجهة إلى أسهم توضح اتجاهها. رءوس معينة تعتبر كسبًا للاعب الأبيض وأخرى كسبًا للاعب الأسود، وتبدأ المباراة عند رأس معين يمثل بداية المباراة، ثم يأخذ كل لاعب دوره ليتحرك متقدمًا خلال الحواف. اللاعب الأول يحاول الوصول إلى أحد الرءوس البيضاء الرابحة، والثانى إلى واحد من السوداء. المباراة المبسطة إلى درجة بعيدة من هذا النوع تم شرحها فى شكل ٦ (ليس من الصعب رؤية أنه فى هذه المباراة يكون للأبيض إستراتيجية رابحة).

هذا النموذج المرسوم للشطرنج، مع أنه ليس عمليًّا، نظرًا لكبر عدد المواقع الممكنة للشطرنج، فإنه مثالى، بمعنى أن المباراة الناتجة تكافئ تمامًا الشطرنج. وعلاوة على ذلك فإننى عندما عرّفته لم أذكر قطع الشطرنج أبدًا. ومن وجهة النظر هذه فإنه يبدو من غير العادى تمامًا أن نسأل عن وجود الملك الأسود: رقعة الشطرنج وقطعه ما هى إلا مبادئ منظمة ملائمة، تساعدنا على التفكير حول النسق المذهل للرءوس والحواف فى الرسوم الهائلة. إذا قلنا شيئًا مثل «الملك الأسود معرض للخطر (check)» فإن ذلك يعنى اختصارًا لجملة تعين قائمة طويلة من الرءوس وتخبرنا أن اللاعبين قد وصلا إلى أحد الرءوس.



شكل ٧



شكل ٨: طرائق تمثيل $7, 12, 47$، (مرتين).

الأعداد الطبيعية

«الطبيعية» هو اسم أعطاه علماء الرياضيات للأعداد المألوفة $1, 2, 3, 4, \ldots$ وهى من أهم الموضوعات الأساسية فى الرياضيات، لكن يبدو أنها لا تشجعنا على التفكير المجرد. ماذا يستطيع، بعد كل هذا، عدد مثل 5 أن يفعل؟ إنه لا يتحرك حوله مثل قطعة الشطرنج. لكنه بدلًا من ذلك يبدو أن له طبيعة ذاتية، نوع من الخمسية النقية التى نستوعبها مباشرة عندما ننظر إلى صورة مثل التى فى شكل ٧.

على أية حال، فإنه عند اعتبارنا لأعداد أكبر توجد درجة أقل من هذا النقاء. ويعطينا شكل ٨ تمثيلًا للأعداد $7, 12, 47$. ربما يستطيع بعض الناس استيعاب العدد 7 مباشرة من الصورة الأولى، لكن فى معظم العقول ستكون هناك أفكار سريعة مثل: النقط الخارجية تمثل سداسى الأضلاع، فهى مع النقطة المركزية تجعلنا نحصل على $7 = 1 + 6$. وبالمثل 12 ربما يفكر بها

مثل 4×3 أو 6×2. بالنسبة للعدد 47 لا يوجد مميز خاص لمجموعة هذا العدد من الأشياء بالمقابل مثلًا مع العدد 46. إذا رتبت النقط فى نمط مثل شبكة 7×7 مع اختفاء نقطتين فإننا نستطيع باستخدام معلوماتنا أن نلاحظ أن $47 = 49 - 2 = 7 \times 7 - 2$ لنقول بسرعة ما عدد النقط الموجودة. فإذا لم يحدث، فلن يكون لدينا إلا الخيار الضيق أن نعد هذه النقط ونفكر فى أن 47 هو العدد التالى لــ 46، الذى يأتى بدوره بعد 45، وهكذا.

وبكلمات أخرى فإن الأعداد لا ينبغى لها أن تكون كبيرة جدًّا قبل التوقف والتفكير فيها كأشياء معزولة، ونبدأ فى فهمها من خلال خصائصها، ومن خلال ارتباطها بالأعداد الأخرى، ومن خلال دورها فى نظام الأعداد. هذا ما قصدت إليه عند قولى ماذا «يفعل» العدد.

وأصبح الآن واضحًا أن مفهوم العدد يرتبط جوهريًّا بالعمليات الحسابية للجمع والضرب. مثلًا: بدون بعض مفاهيم الحساب يستطيع المرء أن يستوعب بصعوبة معنى عدد مثل $1,000,000,017$. إن نظام الأعداد ليس مجرد مجموعة من الأعداد، بل مجموعة من الأعداد مع قوانين تحدد كيف نقوم بالحساب. طريقة أخرى لتلخيص الاقتراب التجريدى هى: فكر فى القوانين، وليس فى الأعداد نفسها. الأعداد من وجهة النظر هذه هى رموز فى نوع من الألعاب (أو ربما يجب أن نسميها عدادات).

وللحصول على بعض الأفكار عن ماهية القوانين، فلنعتبر: ماذا يفعل المرء حتى يصبح مقتنعًا بأن: $38 \times 263 = 9994$؟ سؤالًا حسابيًّا بسيطًا معظم الناس ربما يختبر ذلك باستخدام الآلة الحاسبة، فإذا كان ذلك غير متوفر لسبب ما، فإنه ربما يبرر ذلك كالآتى:

$$\begin{aligned}
38 \times 263 &= 30 \times 263 + 8 \times 263 \\
&= 30 \times 200 + 30 \times 60 + 30 \times 3 \\
&\quad + 8 \times 200 + 8 \times 60 + 8 \times 3 \\
&= 6000 + 1800 + 90 + 1600 + 480 + 24 \\
&= 9400 + 570 + 24 \\
&= 9994
\end{aligned}$$

لماذا، على الرغم من كل شيء، تبدو هذه الخطوات صحيحة بوضوح؟ مثلًا، لماذا يصدق المرء فى التو أن $30 \times 200 = 6000$؟ إن تعريف 30 هو 3×10 وتعريف 200 هو $2 \times (10 \times 10)$، ولهذا نستطيع القول بكل الثقة إن

$$30 \times 200 = (3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10))$$

لكن لماذا يكون هذا 6000؟

المعتاد ألا يُقْلِق أى امرئ نفسه بهذا السؤال، لكن الشخص الذى يسأل يجب أن نقول له:

$$\begin{aligned}(3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10)) &= (3 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10)\\ &= 6 \times 1000 = 6000\end{aligned}$$

بدون تفكير حقيقى فإننا استخدمنا حقيقتين مألوفتين عن حاصل الضرب: إذا ضربت عددين معًا فمن غير المهم الترتيب الذى وضعته لهما، وإذا ضربت أكثر من عددين فلا ينتج فرق عن طريقة وضعك للأقواس. مثلًا $7 \times 8 = 8 \times 7$ وكذلك $(31 \times 34) \times 35 = 31 \times (34 \times 35)$. ويلاحظ أن الحسابات الوسطى فى المثال الثانى تتأثر بالتأكيد بالأقواس، لكننا نعلم أن الإجابة النهائية هى نفسها.

هذان القانونان يسميان قانونى الإبدال والمشاركة للضرب. ولنضع الآن قائمة لقليل من القوانين بما فيها هذان الاثنان الشائعا الاستخدام فى عمليات الجمع والضرب.

- A1 قانون الإبدال للجمع: $a + b = b + a$ لأى عددين a, b.
- A2 قانون المشاركة (أو الدمج) للجمع: $a + (b + c) = (a + b) + c$ لأى ثلاثة أعداد a, b, c.
- M1 قانون الإبدال للضرب: $ab = ba$ لأى عددين a, b.
- M2 قانون المشاركة (أو الدمج) للضرب: $a(bc) = (ab)c$ لأى ثلاثة أعداد a, b, c.
- M3 1 محايد الضرب: $1a = a$ لأى عدد a.
- D قانون التوزيع: $(a + b)c = ac + bc$ لأى ثلاثة أعداد a, b, c.

سردت هذه القوانين لتنبيهك على دورها الذى تلعبه فى تفكيرنا، لا لإقناعك بأنها مهمة فى حد ذاتها، حتى عن التقارير الرياضية البسيطة تمامًا. اقتناعنا بأن $6 = 3 \times 2$ قد يكون على أساس صورة مثل هذه:

$$\begin{matrix} * & * & * \\ \\ \\ * & * & * \end{matrix}$$

ومن ناحية أخرى، فإن الطريقة المباشرة للفهم تكون غير واردة إذا كنا نريد أن نظهر أن $9994 = 263 \times 38$، ولهذا فإننا نفكر فى هذه الحقيقة الأكثر تعقيدًا بطريقة مختلفة تمامًا، باستخدام قوانين الإبدال والمشاركة (الدمج) والتوزيع، فإذا اتبعنا هذه القوانين فإننا سنصدق النتيجة. أكثر من ذلك أننا نصدق تلك النتيجة حتى إذا لم يكن لدينا معنى مصور لما قد يشبه 9994 من الأشياء.

الصفر

تاريخيًّا، نمت فكرة العدد صفر بعد فكرة الأعداد الموجبة. وبدا هذا لكثير من الناس مفهومًا غامضًا ومتناقضًا، موحيًا بأسئلة مثل: «كيف يكون شىء موجودًا على الرغم من أنه لا شىء؟» على أية حال، فمن وجهة النظر التجريدية، فإن الصفر هو — بكلام مباشر تمامًا — مجرد رمز جديد قدم فى نظامنا العددى، وله الخاصة الآتية:

A3 الصفر هو المحايد الجمعى: $0 + a = a$ لأى عدد a.

وهذا هو كل ما تحتاج إلى معرفته عن الصفر. هذا ليس معناه، ولكن مجرد قانون صغير يقول لك ماذا يفعل.

ماذا عن الخصائص الأخرى للعدد صفر، مثل حقيقة أن حاصل ضرب الصفر فى أى عدد يكون صفرًا؟ أنا لم أذكر هذا القانون فى القائمة لأنه يمكن استنتاجه من الخاصة A3 وقوانيــننا السابقة. هنا نوضح مثلًا كيف أن $0 = 2 \times 0$ حيث عرفت 2 بأنها العدد $1 + 1$. أولًا من القانون M1 نحصل على أن $0 \times 2 = 2 \times 0$. ثم يخبرنا القانون D أن $0 \times (1 + 1) = 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0 \times 1 + 0 \times 1$،

ولكن $0 = 0 \times 1$ من القانون M3، وبالتالى هذا يساوى $0 + 0$. القانون A3 يستلزم أن $0 = 0 + 0$، وهنا تنتهى المجادلة (الحجة).

هناك حجة بديلة غير تجريدية من الممكن أن تكون كالآتى: «0×2 تعنى اجمع اثنين من لا شىء تحصل على لا شىء، أى صفر». لكن هذه الطريقة من التفكير تجعل من الصعب الإجابة عن أسئلة مثل السؤال الذى طرحه ابنى عندما كان فى السادسة من عمره: كيف أن لا شىء، مضروبًا فى لا شىء يؤدى إلى لا شىء، لأن ذلك يعنى أنك لا تملك أى شىء؟ الإجابة الجيدة، على الرغم من أنها لم تكن مناسبة فى ذلك الوقت هى التى يمكن استنتاجها من القوانين كالآتى:

(بعد كل خطوة كتبت القانون الذى استخدمته)

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 \times 0 && \text{M3}\\
&= (0 + 1) \times 0 && \text{A3}\\
&= 0 \times 0 + 1 \times 0 && \text{D}\\
&= 0 \times 0 + 0 && \text{M3}\\
&= 0 + 0 \times 0 && \text{A1}\\
&= 0 \times 0 && \text{A3}
\end{aligned}
$$

لماذا أُعطى هذا البرهان الطويل لدرجة الإملال لإثبات حقيقة ابتدائية؟ مرة أخرى ليس لأننى أجد البراهين الرياضية ممتعة، لكن لأننى أرغب فى بيان ماذا يعنى تبرير التقارير الحسابية تجريديًا (باستخدام قوانين بسيطة قليلة، دون أن نجهد أنفسنا بماهية الأعداد فعلًا) بدلًا من التحديد الملموس (بإظهار ماذا تعنى التقارير). ومن المفيد — بالطبع — أن نربط بين المعانى والصور الذهنية بالموضوعات الرياضية، لكن، كما سنرى مرات كثيرة فى هذا الكتاب، غالبًا ما يكون هذا الربط غير كافٍ حتى يخبرنا ماذا نفعل فى المواقف الجديدة غير العادية، ولهذا فإن الطريقة التجريدية تصبح لا غنى عنها.

الأعداد السالبة والكسور

كما يعرف أى فرد له خبرة فى تعليم الرياضيات للأطفال الصغار، يوجد شىء غير مباشر حول الطرح والقسمة يجعلها أصعب فى الفهم من عمليتى الجمع والضرب. لشرح عملية الطرح يمكن طبعًا استخدام مفهوم الحذف (taking away) بأسئلة مثل: «كم عدد البرتقالات المتبقية إذا بدأت بخمس، وأكلت اثنتين؟» على كل حال، هذه ليست دائمًا الطريقة المثلى للتفكير فيها. فمثلًا إذا طلب منا طرح 98 من 100 فمن الأفضل التفكير ليس بأخذ 98 بعيدًا عن 100، لكن بماذا يضاف إلى 98 للحصول على 100. عندئذ، فإن ما نستطيع فعله هو حل المعادلة $98 + x = 100$، على الرغم طبعًا من أنه من غير المعتاد للعدد x أن يمر عبر ذهننا أثناء الحسابات. وبالمثل توجد طريقتان للتفكير حول القسمة. لشرح معنى أن 50 تُقسم إلى 10، يمكن لنا إما أن نسأل: «إذا كان هناك 50 شيئًا انفصلت إلى 10 مجموعات متساوية، فما عدد الأشياء فى كل مجموعة؟»، أو أن نسأل: «إذا انفصل 50 شيئًا فى مجموعات، تحتوى كل منها على 10، فما عدد المجموعات؟». الطريقة الثانية تكافئ السؤال ما الذى تضربه فى 10 حتى يكون الناتج 50، والذى بدوره يكافئ حل المعادلة $10x = 50$.

وبالإضافة إلى صعوبة شرح الطرح والقسمة للأطفال، فإنهما ليستا دائمًا ممكنتين. فمثلًا، لا يمكنك أن تأخذ عشر برتقالات من (سلطانية) بها سبع، كما أن أى ثلاثة أطفال لا يمكن أن يتقاسموا 11 قطعة من الرخام بالتساوى. على أية حال، هذا لم يمنع البالغين من طرح 10 من 7 أو قسمة 11 على 3 ليحصلوا على الإجابات $-3, 11/3$ على الترتيب. وعندئذ يظهر السؤال: هل العددان $-3, 11/3$ موجودان فعلًا؟ وإذا كانا موجودين فما هما؟

من وجهة النظر التجريدية يمكن التعامل مع هذه الأسئلة مثلما فعلنا مع العدد صفر بأن ننسى ما هما. وكل ما نحتاج إلى معرفته عن -3 هو أننا عندما نضيف 3 إليه فإننا نحصل على العدد صفر، وأن كل ما نحتاج إلى معرفته عن $11/3$ هو أن بضربه فى العدد 3 نحصل على العدد 11. هذه هى القوانين، وبالترابط مع القوانين السابقة فإنها تسمح لنا بعمل الحساب فى نظام أكبر للأعداد. لماذا يجب أن نرغب فى أن نوسع نظامنا العددى بهذه الطريقة؟ لأنه يعطينا نموذجًا يمكن فيه حل معادلات مثل $x + a = b, ax = b$، مهما

كانت قيمة a, b فيما عدا أن a يساوى الصفر فى المعادلة الثانية. لصياغة ذلك بطريقة أخرى: إنها تعطينا نموذجًا حيث الطرح والقسمة ممكنان دائمًا، ما دمنا لا نحاول القسمة على الصفر. (مسألة القسمة على الصفر سوف نناقشها مؤخرًا فى هذا الباب).

وكما يحدث أننا نحتاج إلى قانونين آخرين لتوسيع نظامنا للأعداد بهذه الطريقة. أحدهما لإعطائنا أعدادًا سالبة، والآخر لإعطائنا الكسور، أو الأعداد النسبية، كما هى معروفة عادة.

A4 المعكوس الجمعى: لأى عدد a يوجد عدد b بحيث إن $a + b = 0$.
M4 المعكوس الضربى: لأى عدد a يختلف عن الصفر، يوجد عدد c بحيث يكون: $ac = 1$.

يمكننا أن نفكر، متسلحين بهذه القوانين، فى $-a, 1/a$ كرمزين للعددين b فى A4، c فى M4 على الترتيب. وكذلك للتعبير الأعم مثل p/q. فهو يعنى أن p مضروبة فى $1/q$.

A4، M4 تستلزمان قانونين آخرين معروفين باسم قانونى الحذف.

A5 قانون الحذف للجمع: إذا كانت a, b, c أية ثلاثة أعداد، فإن $a + b = a + c$ تقتضى أن $b = c$.
M5 قانون الحذف للضرب: إذا كانت a, b, c أية ثلاثة أعداد، وكان a لا يساوى الصفر، وكان $ab = ac$ فإن $b = c$.

القانون الأول منهما يبرهن بإضافة $-a$ لكل من الطرفين، والقانون الثانى بضرب كل من الطرفين فى $1/a$ تمامًا كما نتوقع. يلاحظ اختلاف موقع A5، وM5 من القوانين السابقة — إنهما نتيجتان من القوانين السابقة، أكثر منهما قانونين قدما ببساطة للحصول على لعبة جيدة.

وإذا سئلنا أن نجمع كسرين مثل $2/5, 3/7$ فإن الطريقة العادية أن نعطيهما مقامًا مشتركًا كالآتى:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

هذه التقنية وغيرها مثلها يمكن تحقيقها باستخدام قوانيننا الجديدة، فمثلًا:

$$\begin{aligned} 35 \times \frac{14}{35} &= 35 \times \left(14 \times \frac{1}{35}\right) \\ &= (35 \times 14) \times \frac{1}{35} \\ &= (14 \times 35) \times \frac{1}{35} \\ &= 14 \times \left(35 \times \frac{1}{35}\right) \\ &= 14 \times 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} 35 \times \frac{2}{5} &= (5 \times 7) \times \left(2 \times \frac{1}{5}\right) \\ &= (7 \times 5) \times \left(\frac{1}{5} \times 2\right) \\ &= \left(7 \times \left(5 \times \frac{1}{5}\right)\right) \times 2 \\ &= (7 \times 1) \times 2 \\ &= 7 \times 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

ومن ثم، فإنه باستخدام M5 يكون $2/5, 14/35$ متساويين، كما افترضنا من الحسابات.

وبالمثل يمكننا التحقق من الحقائق الشائعة حول الأعداد السالبة. وسوف أترك للقارئ أن يستنتج من القوانـين أن $1 = (-1) \times (-1)$، وهذا الاستنتاج مشابه تمامًا لبرهان أن $0 = 0 \times 0$.

لماذا يبدو لكثير من الناس أن الأعداد السالبة أقل واقعية من الأعداد الموجبة؟ ربما، من الأرجح، لأن العد لمجموعات صغيرة من الأشياء هو من

النشاط الإنسانى الأساسى، وعند عمله لا نحتاج إلى الأعداد السالبة. كل هذا يعنى أن نظام الأعداد الطبيعية (باعتباره نموذجًا) يكون مفيدًا فى ظروف معينة، ولكن النظام الموسع للأعداد ليس كذلك. فإذا أردنا أن نفكر فى درجات الحرارة أو التواريخ أو الحسابات البنكية فإن الأعداد السالبة تصبح مفيدة فعلًا. وما دام النظام العددى الموسع متسقًا منطقيًّا، فلا يوجد ضرر من استعماله نموذجًا.

هل نحن لا نحسب فعلًا بدون مثالية خاصة ضمنيًّا؟ نحن فعلا نفعل ذلك، لكن هذا الإجراء ليس دائمًا مناسبًا أو حتى ممكنًا. فليس هناك خطأ مع العدد 1394840275936498649234987 من وجهة النظر الرياضية، لكن إذا لم نستطع عد الأصوات فى فلوريدا فإنه من غير المتصور أن نتأكد فى أى وقت أن لدنيا تجمعًا لــ 1394840275936498649234987 من الأشياء. وإذا أخذت كومتين من الأوراق، وجمعتهما مع ثالث، فإن الناتج لا يكون ثلاث كومات من الأوراق، ولكن كومة كبيرة واحدة. وإذا راقبت عاصفة ممطرة فإن الإجابة الصحيحة عن السؤال: «كم قطرة من المطر رأيت؟» ستكون: «كثيرًا»، وليس: «هناك عدد ولكنك لا تعرفه»، كما قال فيتجنشتاين.

الأعداد الحقيقية والمركبة

يتكون نظام الأعداد الحقيقية من جميع الأعداد التى يمكن تمثيلها بكسور عشرية غير منتهية. هذا المفهوم أكثر تعقيدًا مما يبدو لأسباب ستُشرح فى الفصل الرابع. أما الآن فدعنى أقل لك إن سبب توسيع نظامنا العددى من الأعداد النسبية إلى الأعداد الحقيقية مماثل لسبب تقديمنا للأعداد السالبة والكسور: إنها تمكننا من حل معادلات لا يمكن حلها بدونها.

وأكثر الأمثلة شهرة هى المعادلة $x^2 = 2$. فى القرن السادس قبل الميلاد اكتشفت مدرسة فيثاغورس أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى. وهذا يعنى أننا لا نستطيع تمثيله بكسر (ستُبرهن هذه المعلومة فى الفصل القادم). وقد تسبب فى كثير من الهلع والإحباط، لكننا الآن نوافق بابتهاج على أنه يجب توسيع نظامنا العددى، إذا رغبنا فى نمذجة أشياء مثل طول قطر المربع. مرة أخرى، إن الطريقة التجريدية تجعل مهمتنا سهلة جدًّا. نقدم رمزًا جديدًا $\sqrt{2}$، ولدينا قانون واحد يخبرنا ماذا نفعل به: إن تربيعه يساوى 2.

وإذا تدربت بما يكفى، فإنك ستعترض على ما قلته فى التو، على أساس أن القانون لا يفرق بين $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$. إحدى الطرائق للتعامل مع هذه المسألة هى أن نقدم مفهومًا جديدًا فى نظامنا العددى، وهو الترتيب. ومن المفيد غالبًا الكلام عن أن أحد الأعداد أكبر من الآخر، فإذا سمحنا لأنفسنا بهذا أمكننا تمييز $\sqrt{2}$ بخاصية أخرى: إنه أكبر من 0. وحتى بدون هذه الخاصية، فإنه يمكننا إجراء حسابات مثل:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}-1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

وبالفعل توجد ميزة فى عدم التمييز بين $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$، وهى أننا نعلم أن الحساب السابق يتحقق لكل من العددين.

وتاريخيًا، ترك الشك فى الطريقة التجريدية آثاره فى الكلمات التى تصف الأعداد الجديدة التى تنتج كلما قمنا بتوسيع نظامنا العددى، بكلمات مثل «سالب» و«غير نسبى». لكن أصعب منها كثيرًا فى الاستيعاب كانت «الأعداد التخيلية» أو «الأعداد المركبة»، أى الأعداد التى على الصورة $a + bi$، حيث a, b أعداد حقيقية، وi هو الجذر التربيعى للعدد -1.

ومن وجهة نظر واقعية يمكننا أن نصرف النظر بسرعة عن الجذر التربيعى لـ -1 (سالب واحد): ولأن مربع أى عدد يكون موجبًا، فإن -1 ليس له جذر تربيعى، وتكون هذه نهاية القصة. على أية حال، هذا الاعتراض لا يحمل أية قوة إذا تبنينا وجهة النظر التجريدية. لماذا لا نستمر ببساطة فى توسيع نظامنا العددى بتقديم حل للمعادلة $x^2 = -1$، ونسمى الحل i؟ لماذا ينبغى أن يكون هذا أكثر اعتراضًا من تقديمنا السابق لـ $\sqrt{2}$؟

إحدى الإجابات ربما تكون أن $\sqrt{2}$ له مفكوك عشرى (من حيث المبدأ)، الذى يمكن حسابه لأية درجة منشودة من الدقة، فى حين لا يوجد ما يكافئ هذا القول بالنسبة للعدد i. ولكن جميع هذه الأقوال نعرفها مقدمًا، أعنى أن

i عدد غير حقيقى، تمامًا مثل أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى، لكن هذا لم يقفنا عن تمديد نظامنا العددى الذى نستطيع أن نجرى فيه حسابات مثل:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i-1} &= \frac{i+1}{(i-1)(i+1)}\\ &= \frac{i+1}{i^2-i+i-1}\\ &= \frac{i+1}{-1-1}\\ &= -\frac{1}{2}(i+1)\end{aligned}$$

الفرق الأساسى بين $i, \sqrt{2}$ هو أننا فى حالة i مجبرين على التفكير تجريديًّا، أما فى حالة $\sqrt{2}$ فهناك دائمًا الاختيار بين التمثيل الواقعى مثل 1.4142، وبين طول قطر مربع الوحدة. ولترى لماذا i ليس لها مثل هذا التمثيل اسأل نفسك هذا السؤال:

أى الجذرين التربيعيين لــ -1 هو i وأيهما هو $-i$؟ هذا السؤال ليس له معنى لأن الخاصية الوحيدة للعدد i أن مربعه هو -1. ولأن $-i$ له الخاصية نفسها، فإن أى تقرير صحيح حول i سيبقى صحيحًا إذا استبدلنا به التقرير المناظر حول $-i$. ومن الصعب إذا استوعبنا هذا أن يكون لدينا احترام لرؤية i على أنها ترمز لشىء أفلاطونى بوجود مستقل.

ثمة توازٍ هنا مع لغز فلسفى معروف جيدًا؛ قد يكون إحساسك عند ملاحظتك اللون الأحمر هو ما أتصوره أنا عند ملاحظتى اللون الأخضر، والعكس صحيح. وهذا ما دعا بعض الفلاسفة للتفكير الجاد وتعريف ما يسمى qualia بأنها تجاربنا الذاتية المطلقة عند رؤيتنا للألوان على سبيل المثال. لا يعتقد آخرون فى الــ qualia، وبالنسبة لهم فإن كلمة مثل «أخضر» تعرف أكثر تجريديًّا بدورها فى نظام لغوى، أى بعلاقاتها بمفاهيم مثل «حشيش»، «أحمر»، وهكذا. ومن المستحيل استنتاج موقف شخص ما من هذا المقال من طريقة الكلام عن الألوان، فيما عدا خلال المناقشات الفلسفية. وبالمثل فكل الأشياء الخاصة بالأعداد والأشياء الرياضية الأخرى هى عمليًّا القوانين التى تتبعها.

إذا قدمنا i للحصول على حل للمعادلة $x^2 = -1$، فماذا عن معادلات مثل $x^4 = -3$ أو $2x^6 + 3x + 17 = 0$؟ من الجدير بالذكر أن كل معادلة

مثل هذه المعادلة يمكن حلها فى نظام الأعداد المركبة. وبكلمات أخرى، فإننا قمنا باستثمار صغير بالموافقة على العدد i، وتلا ذلك الدفع فى مرات أخرى عديدة. هذه الحقيقة لها تاريخ معقد، لكنها تنسب إلى جاوس، وتعرف باسم النظرية الأساسية فى الجبر وهى تمدنا بدليل مقنع تمامًا بأن هناك شيئًا طبيعيًّا حول العدد i. إنه لا يمكن تخيل سلة مليئة بعدد i من التفاح، أو رحلة فى عربة تستغرق i من الساعات، أو حساب بنكى نسحب منه مقدار i من الجنيهات. لكن نظام الأعداد المركبة أصبح لا غنى عنه للرياضيين والعلميين والمهندسين — نظرية ميكانيكا الكم، مثلًا، تعتمد بقوة على الأعداد المركبة. وهى تمدنا بواحد من أحسن التوضيحات لمبدأ عام: إذا كان تكوين رياضى مجرد طبيعيًّا بدرجة كافية، فمن المؤكد غالبًا أنه سوف يستخدم كنموذج.

نظرة أولى عند اللانهاية

بمجرد أن يتعلم المرء التفكير تجريديًّا، فإنه يكون مبتهجًا بما يشبه بهجته بعد تمكنه فجأة من ركوب الدراجة، دون أن يقلق على توازنه. على أية حال فإننى لا أرغب فى إعطاء انطباع أن الطريقة التجريدية هى مثل رخصة لطبع النقود. ومن المهم مقارنة تقديم i فى نظام الأعداد بمثل ما يحدث عند محاولة تقديم العدد مالانهاية. فى البداية يبدو أنه ليس هناك ما يوقفنا: مالا نهاية يجب أن تعنى شيئًا مثل قسمة 1 على 0. وبالتالى لا تكون ∞ رمزًا مجردًا، وتعتبر حلًّا للمعادلة $0x = 1$؟

الصعوبة مع مثل هذه الفكرة تبزغ بمجرد أن نحاول الحساب. هنا مثلًا نتيجة بسيطة لتطبيق M2 (قانون المشاركة فى الضرب)، وحقيقة أن $0 \times 2 = 0$.

$$1 = \infty \times 0 = \infty \times (0 \times 2) = (\infty \times 0) \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

وهذا يوضح أن وجود حل للمعادلة $0x = 1$ يؤدى إلى عدم اتساق. هل هذا يعنى أن اللانهاية غير موجودة؟ لا، هذا يعنى ببساطة أنه لا توجد فكرة طبيعية عن اللانهاية تتسق مع قوانين الحساب. ومن المفيد أحيانًا توسيع نظام الأعداد ليحتوى الرمز ∞، مع قبول أنه فى النظام الموسع قد لا تتحقق هذه

القوانين دائمًا. مهما يكن فعادة ما نفضل الحفاظ على القوانين، ونستخدمها دون اللانهاية.

رفع الأعداد للقوى السالبة والكسرية

واحدة من أعظم فوائد الطريقة التجريدية أنها تسمح لنا بإعطاء معنى للمفاهيم الشائعة فى المواقف غير الشائعة. العبارة «إعطاء معنى» مناسبة تمامًا، لأنها هى بالضبط ما نقوم بعمله، أكثر من اكتشاف معنى موجود سابقًا. كمثال بسيط لهذه الطريقة توسيع مفهوم رفع الأعداد لقوى.

إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن a^n تعنى ناتج حاصل ضرب a فى نفسها n من المرات. فمثلًا $5^3 = 5\times5\times5 = 125$ و$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$. لكن مع هذا التعريف ليس من السهل تفسير عبارة مثل $2^{3/2}$، لأنك لا تستطيع أن تأخذ 1.5 مرة من 2 وتضربها معًا. ما الطريقة التجريدية لمعاملة مثل هذه المسألة؟ مرة أخرى، ليس المطلوب النظر إلى المعنى الذاتى — فى هذه الحالة عبارة مثل a^n — لكن التفكير فى القوانين.

وهاك قانونين أساسيين عن رفع الأعداد للقوى:

E1 $a^1 = a$ لأى عدد حقيقى a.

E2 $a^{m+n} = a^m \times a^n$ لأى عدد حقيقى a، وأى زوج من الأعداد الطبيعية m, n.

فمثلًا: $2^5 = 2^3 \times 2^2$ حيث تعنى 2^5 : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ و $2^3 \times 2^2$ تعنى $(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2)$، وهما نفس الشيء، لأن الضرب عملية تشاركية (دمجية).

من هذين القانونين يمكننا بسرعة استعادة الحقائق التى نعرفها. فمثلًا $a^2 = a^{1+1}$، وهى بتطبيق E2 تعنى $a^1 \times a^1$. ومن E1 هذه تعنى $a \times a$ كما يجب أن تكون.

لكننا الآن فى وضع يمكننا عمل أكثر من ذلك. دعنا نكتب x للعدد $2^{3/2}$. عندئذ فإن $x \times x = 2^{3/2} \times 2^{3/2}$، وتعنى باستخدام E2 أن $2^{3/2+3/2} = 2^3 = 8$. وبمعنى آخر فإن $x^2 = 8$. وهذا لا يعين قيمة x تمامًا، لأن لها جذرين تربيعيين، وبالتالى فمن المعتاد تبنى العرف الآتى:

E3 إذا كان $a > 0$، وكان b عددًا حقيقيًّا، فإن a^b موجب.

باستخدام E3 أيضًا نجد أن $2^{3/2}$ هو الجذر التربيعى الموجب للعدد 8.

هذا لا يمثل اكتشافًا «للقيمة الحقيقية» للعدد $2^{3/2}$. على أية حال ليس التفسير الذى أعطيناه للتعبير $2^{3/2}$ أختياريًّا. إنه فقط الإمكانية الوحيدة إذا أردنا الاحتفاظ بالقواعد E1، E2، E3.

حجة مماثلة تسمح لنا بتفسير a^0، على الأقل عندما $a \neq 0$. من E2، E1، نعلم أن:

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \times a^0 = a \times a^0.$$

وقانون الحذف M5 يستلزم أن $a^0 = 1$ مهما كانت قيمة a. وبالنسبة للقوى السالبة، إذا عرفنا قيمة a^b فإن

$$1 = a^0 = a^{b+(-b)} = a^b \times a^{-b}$$

وبالتالى يكون $a^{-b} = 1/a^b$. العدد $2^{-3/2}$ على سبيل المثال، هو $1/\sqrt{8}$.

مفهوم آخر يصبح أكثر بساطة عندما نراه تجريديًّا هو مفهوم اللوغاريتم. ليس لدى الكثير لقوله عن اللوغاريتمات فى هذا الكتاب، لكن إذا كان ذلك يقلقك، فإنك ربما تستعيد طمأنينتك حين تعلم أن كل ما تحتاجه لاستعمال اللوغاريتم القواعد الثلاث الآتية. (إذا رغبت فى اللوغاريتم للأساس e بدلًا من 10 يمكنك استبدال العدد e بـ 10)

L1 $\log(10) = 1$.

L2 $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

L3 إذا كانت $x < y$ فإن $\log(x) < \log(y)$.

ومثلًا لترى أن $\log(30)$ أقل من $3/2$ لاحظ أن

$$\begin{aligned}\log(1000) &= \log(10) + \log(100)\\ &= \log(10) + \log(10) + \log(10) = 3\end{aligned}$$

وذلك باستخدام L1، L2

ولكن

$$2\log(30) = \log(30) + \log(30)$$

من (L2)

$$= \log(900)$$

من (L3)

$$\log(900) < \log(1000)$$

وبالتالى فإن

$$2\log(30) < 3$$

أى أن

$$\log(30) < 3/2.$$

سوف أناقش عديدًا من المفاهيم فى الكتاب فيما بعد، لها طبيعة مماثلة لهذه، إذا حاولت أن تفهمها فهمًا ملموسًا فهى ألغاز، لكنها تفقد غموضها إذا استرخيت، ولم تزعجك ماهيتها، واستخدمت الطريقة التجريدية.