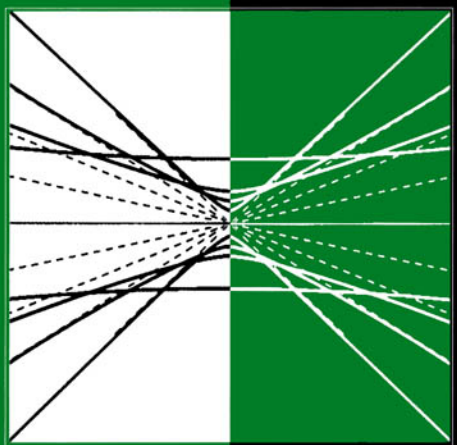
PHYSIQUE

Bernard CAGNAC - Jean-Pierre FAROUX

• LASERS •

Interaction lumière-atomes



SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

LASERS
Interaction lumière-atomes

Bernard Cagnac
Jean-Pierre Faroux

LASERS

Interaction lumière-atomes

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS Éditions

Illustration de couverture :
Relation entre le diamètre minimum (waist) et l'ouverture angulaire du faisceau gaussien (Fig. 15.7, p. 362)

© **2002, EDP Sciences**, 7, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-528-7
ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-05954-2

Table des matières

Introduction xiii

Partie I. Action d'un champ électromagnétique classique sur un système à deux états quantiques 1

1 Action d'une onde classique sur un atome isolé 3
- 1.1 Hamiltonien de l'interaction dipolaire électrique 3
- 1.2 Résolution de l'équation de Schrödinger. Représentation « tournante ». Approximation séculaire 6
- 1.3 Cas d'un seul atome non perturbé. Oscillation de Rabi pure . . 10
- 1.4 Les expériences de Rabi sur jet atomique 12

2 Équations différentielles de Bloch 17
- 2.1 Introduction des variables collectives, moyennées sur les atomes 18
- 2.2 Expression de l'équation de Schrödinger avec les nouvelles variables 20
- 2.3 Description théorique de l'émission spontanée et des collisions 22
- 2.4 Équations différentielles de Bloch 24

3 Solution stationnaire des équations de Bloch 27
- 3.1 Calcul de la solution stationnaire 27
- 3.2 Les populations atomiques. Comparaison avec le modèle des probabilités de transition 29
- 3.3 La polarisation atomique. Absorption et dispersion 33
- 3.4 Courbes de résonance en fréquence. Élargissement de puissance 36
- 3.5 Saturation 43
- 3.6 Comparaison avec l'oscillateur classique. Force d'oscillateur . . 46

4 Comparaison avec la résonance magnétique (spin 1/2) 49
- 4.1 Hamiltonien d'interaction avec un champ magnétique 50
  - 4.1.1 Rapport gyromagnétique 50
  - 4.1.2 Opérateur moment angulaire 50

4.2 Équation de Schrödinger dans un champ transverse oscillant . . 51
4.3 Vecteur moment magnétique atomique 53
4.4 Vecteur de Bloch 54
4.4.1 Référentiel tournant 54
4.4.2 Cas d'un champ tournant. Approximation séculaire . . . 56
4.5 Aimantation volumique et relaxation 59
4.6 Solution stationnaire. Observation expérimentale 61

5 Solution transitoire des équations de Bloch 65
5.1 Calcul dans le cas résonnant. Amortissement de l'oscillation de Rabi 65
5.2 Calcul de l'oscillation amortie dans le cas général, non résonnant 69
5.3 Comparaison des oscillations atomiques individuelles avec l'oscillation collective 74
5.4 Observation expérimentale de l'oscillation collective 80

6 Impulsions courtes de l'onde électromagnétique 87
6.1 Impulsions carrées résonnantes à très forte intensité 88
6.2 Généralisation au cas d'impulsions résonnantes non carrées . . 91
6.3 Impulsions carrées hors résonance. Élargissement de la résonance par réduction de la durée d'interaction 93
6.4 Évolution libre de la polarisation dans le noir 96
6.5 Cas de deux impulsions cohérentes successives (Ramsey). Explication approchée 98
6.6 Calcul exact des franges de Ramsey 102
6.6.1 Calcul de la population après la deuxième impulsion, en l'absence d'amortissement 102
6.6.2 Effet de l'amortissement 105
6.7 Application aux expériences de physique atomique et de métrologie 106

7 Champs électromagnétiques intenses 115
7.1 Le hamiltonien dans la Représentation « Tournante » 116
7.2 Cas non résonnant « déplacements lumineux » ou effet Stark dynamique 119
7.3 Observation expérimentale des déplacements lumineux 123
7.4 Cas résonnant doublet Autler-Townes 131
7.5 Oscillation de Rabi à résonance 136
7.6 Effet Bloch-Siegert et approximation séculaire (en Résonance Magnétique) 139

Partie II. Fonctionnement des lasers dans le modèle des probabilités de transition 143

8 L'amplification d'une onde de lumière 147
8.1 Les équations d'évolution des populations atomiques, coefficients d'Einstein 147
8.2 Sections efficaces d'interaction. Différence pondérée des populations 151
8.3 La saturation à forte intensité lumineuse 153
8.4 Coefficient d'absorption généralisé. L'inversion des populations, condition d'amplification 156
8.5 Les processus d'inversion ou de pompage 159
8.5.1 Le tri sur jet atomique ou moléculaire 159
8.5.2 Irradiation avec une autre onde électromagnétique sur une autre transition 160
8.5.3 Collisions électroniques, atomiques ou moléculaires dans les gaz 165

9 Équations fondamentales du laser oscillateur ou générateur 169
9.1 Amplification et oscillation. Rôle d'une cavité résonnante . . . 169
9.2 Constante de temps et coefficient de qualité d'une cavité 171
9.3 Équation différentielle de l'énergie lumineuse. Seuil de fonctionnement 176
9.4 Comparaison avec le gain sur un tour de cavité 180
9.5 Équations différentielles des populations. Exemples de modélisation 182
9.5.1 Modèle à deux niveaux 182
9.5.2 Modèle à quatre niveaux 186

10 Régime continu de fonctionnement 191
10.1 Équation de l'énergie lumineuse. Populations au seuil 191
10.2 Raisonnement sur un tour. Gain saturé et gain non saturé . . . 192
10.3 Bilan stationnaire des populations. Puissance de sortie 193
10.3.1 Modèle à deux niveaux 194
10.3.2 Modèle à quatre niveaux 196
10.4 Optimisation de la puissance de sortie 198
10.5 Bilan d'énergie. Compétition entre émissions spontanée et stimulée 201

11 Régimes variables ou impulsionnels 205
11.1 Oscillations de relaxation, conséquence des équations non linéaires couplées 205

11.2 Démarrage d'un laser continu 210
11.2.1 Laser à fibre optique, dopée au Nd^{3+}, démarré par l'irradiation du pompage optique 210
11.2.2 Laser à décharge de très faible puissance démarré par déblocage instantané de la cavité 212
11.3 Impulsions déclenchées 215
11.4 Calcul approché des impulsions géantes très courtes 220
11.5 Impulsions ultra courtes en blocage de modes 225
11.6 Dilatation et compression d'impulsion 232

12 Divers types de lasers **237**
12.1 Gaz pompés par décharge électrique 237
12.2 Excimères ou Exciplexes 251
12.3 Pompage optique ou chimique dans les gaz 255
12.3.1 Pompage optique résonnant de vibrations moléculaires 255
12.3.2 Production de molécules excitées par photodissociation ou réaction chimique 258
12.4 Pompage optique en milieu condensé. Lasers accordables 259
12.5 Lasers à semi-conducteurs 266
12.6 Chaînes d'amplificateurs pour les fortes puissances 270

13 Fréquence de l'oscillation laser **275**
13.1 Résonances de cavité et résonance atomique. Mode pulling . . . 275
13.1.1 Correction des fréquences de résonance d'une cavité pleine 277
13.1.2 Cas d'un laser en régime continu 280
13.2 Élargissement homogène par collisions 282
13.2.1 Calcul des probabilités de collisions, vitesse relative et section efficace 282
13.2.2 Application aux transitions optiques résonnantes 285
13.3 Élargissement inhomogène. Classes d'atomes. Classes de vitesses 287
13.3.1 Classes d'atomes dans un environnement inhomogène 288
13.3.2 Effet Doppler dans un gaz (inhomogénéité dynamique) 291
13.4 « Hole burning », conséquence des classes d'atomes 295
13.5 Cas des gaz en cavités : résonance de saturation et Lamb-dip 298
13.6 Compétition de modes dans les lasers à gaz 303

14 Techniques de contrôle des fréquences laser **309**
14.1 La première sélection de fréquence d'un laser accordable 309
14.1.1 Train de prismes 309
14.1.2 Réseau de diffraction 311
14.1.3 Filtre de Lyot 312
14.2 Cavité en anneau unidirectionnelle 314

14.3 Interféromètres en cascade dans un laser accordable monomode 317
14.4 Synchronisation par injection 320
14.5 Asservissements sur une raie fine. Standards de fréquence et de longueur 322
14.5.1 Le « jitter » en fréquence 322
14.5.2 Asservissement sur une raie de saturation 322
14.5.3 La mesure directe des fréquences optiques 325
14.6 Cohérence temporelle et spatiale 327

Partie III. Calcul des ondes émises 337

15 Le faisceau gaussien en espace libre 341
15.1 Approximation des ondes sphériques paraxiales 341
15.2 Limitation gaussienne de l'étendue du front d'onde 344
15.3 Rappel de la résolution des équations d'onde par la méthode de Kirchhoff 347
15.4 Application de la méthode de Kirchhoff à un faisceau paraxial : stabilité de la solution gaussienne 351
15.5 Caractéristiques de l'onde gaussienne 356
15.5.1 Rayon gaussien du profil transversal 357
15.5.2 Rayon de courbure du front d'onde 357
15.5.3 Amplitude et phase de l'onde 359
15.5.4 Directivité et inégalités de Heisenberg 362
15.6 Problèmes de détermination des caractéristiques gaussiennes . . 363
15.6.1 Rayon gaussien w_1 et rayon de courbure R_1 imposés dans un plan d'onde fixé P 363
15.6.2 Deux rayons gaussiens w_1 et w_2 imposés dans deux plans P et Q distants de D 364
15.7 Transformation de l'onde gaussienne par une lentille 366
15.7.1 Action d'une lentille sur le rayon de courbure de l'onde 366
15.7.2 Application au cas d'une onde gaussienne 368
15.8 Aspect vectoriel de l'onde gaussienne 371

16 Les modes d'une cavité linéaire 375
16.1 Le faisceau gaussien en cavité linéaire (modes gaussiens fondamentaux) 375
16.1.1 Discussion de la validité de ces calculs de modes 378
16.1.2 Condition de résonance de la cavité 383
16.2 Équation des ondes paraxiales (approximation de l'enveloppe lentement variable) 384
16.3 Solutions de l'équation paraxiale à variables x et y séparées. Modes transverses de Hermite-Gauss 387

16.4 Mise en évidence expérimentale des modes transverses 395
16.4.1 Cas d'une cavité passive 395
16.4.2 Cas d'une cavité active 397
16.4.3 Modes de symétrie circulaire, de Laguerre-Gauss 399
16.5 Comparaison avec les modes guidés 401

17 Propagation dépendant de la polarisation atomique 405
17.1 Couplage des équations d'onde et des équations quantiques de Bloch 405
17.2 Équations de Maxwell avec second membre. Ondes planes dans les milieux isolants, homogènes et *isotropes* 408
17.3 Onde plane progressive quasi sinusoïdale (approximation de l'enveloppe lentement variable). Laser amplificateur 411
17.4 Onde stationnaire dans une cavité laser (en dessous de la saturation) 415
17.4.1 Conséquence sur la phase et la fréquence. Mode pulling 419
17.4.2 Conséquence sur l'amplitude du champ 421
17.5 Effet de la saturation dans une onde stationnaire (laser oscillateur, modèle de Lamb) 422
17.5.1 Conséquence sur la phase et la fréquence 424
17.5.2 Conséquences de l'équation sur l'amplitude 425
17.6 Propagation d'impulsions ultracourtes : aires d'impulsion . . . 429
17.6.1 Équations de Bloch sans relaxation 429
17.6.2 Élargissement inhomogène 430
17.6.3 Théorème des aires d'impulsion 431
17.6.4 Application à une impulsion de faible intensité 433
17.7 Impulsions ultracourtes très intenses. Autotransparence 434
17.7.1 Cas où l'aire d'impulsion est un multiple de π 435
17.7.2 Recherche d'une loi temporelle indéformable (solitons résonnants) 437

18 Les dipôles atomiques, sources de rayonnement 443
18.1 Onde rayonnée par un dipôle oscillant 443
18.2 Application au dipôle atomique créé par une onde incidente . . 446
18.2.1 Puissance cohérente rayonnée dans l'onde dipolaire 447
18.2.2 Puissance absorbée et dissipée par un atome 448
18.2.3 Cas des processus éloignés de la résonance 450
18.2.4 Bilan des énergies échangées. Puissance incohérente . . 451
18.3 Interférences des ondes dipolaires dans les directions obliques 455
18.3.1 En milieu condensé 456
18.3.2 Les fluctuations de densité dans un gaz 457
18.3.3 Diffusion par une onde sonore 460

18.4 Diffusion cohérente vers l'avant 463
18.4.1 Cône de cohérence 463
18.4.2 Faisceau incident gaussien (dispersion et absorption) . . 466
18.4.3 Puissance de l'onde résultante. Amplification 469
18.5 Superradiance due aux interactions entre voisins 470
18.6 L'émission spontanée amplifiée (ou A.S.E., Amplified Spontaneous Emission) 475
18.7 Émission libre cohérente et échos de photons 477
18.7.1 Brouillage des oscillations libres dans le noir par les inhomogénéités 477
18.7.2 La technique des échos 478
18.7.3 Observation expérimentale dans les solides et dans les gaz 482

19 Vecteur dipôle atomique et polarisation des ondes 487
19.1 Représentation standard du moment angulaire ou dipolaire . . 488
19.2 Théorème de Wigner-Eckart 491
19.3 Action d'une onde polarisée circulairement 492
19.4 Probabilités de transition et coefficients d'Einstein 495
19.4.1 Transition élémentaire entre deux états quantiques . . . 495
19.4.2 Coefficients d'Einstein 496
19.4.3 Utilisation des probabilités de transition 498
19.5 Diagrammes de rayonnement des transitions dipolaires électriques 503
19.6 Base standard 508
19.6.1 Définition. Produit scalaire hermitien 508
19.6.2 Application aux polarisations standard 509
19.6.3 Composantes standard d'un vecteur 510
19.7 Changements de base pour la polarisation lumineuse 511

Notations 515

Index 521

Introduction

CET OUVRAGE a un double but : 1) donner une première approche aussi simple que possible aux processus d'interaction entre les atomes et les ondes lumineuses, qui interviennent dans un si grand nombre de phénomènes physiques, et 2) aider tous les scientifiques ou ingénieurs qui sont amenés à utiliser des lasers et qui souhaitent en connaître le fonctionnement, voire qui ont besoin parfois de comprendre tel ou tel aspect technique de ce fonctionnement pour améliorer leur utilisation.

Ces deux finalités ne sont pas étrangères l'une à l'autre ; et c'est bien ce qui autorise à les réunir dans le même ouvrage. Elles ne se recouvrent cependant pas entièrement ; et ceci nous a conduit à découper l'ouvrage en trois parties assez différentes, et largement indépendantes, qui peuvent être lues séparément, dans l'ordre qui paraîtra le plus urgent pour le besoin immédiat de chaque lecteur.

Les lecteurs, qui souhaitent comprendre rapidement le fonctionnement des lasers, **peuvent lire directement la partie II fondée sur les hypothèses phénoménologiques d'Einstein et les équations de probabilités qui en découlent (en anglais « rate équations »)**. Ils y trouveront l'essentiel de ce dont ils ont besoin dans la pratique courante de l'utilisation des lasers.

Mais les hypothèses de base du modèle phénoménologique ne sont pas une représentation exacte de l'interaction lumière-atomes ; et en toute rigueur, elles sont fausses. Si l'on s'en tient à cette description simpliste de l'interaction, on garde dans l'esprit des images simplistes qui ne permettent pas de comprendre les expériences modernes en optique atomique.

C'est pourquoi nous incitons vivement le lecteur à lire au moins la moitié de la partie I (chapitres 1, 2, 3 et 5) qui lui donnera une représentation plus exacte de l'interaction lumière-atomes, permettant d'expliquer toutes les expériences effectuées avec une intensité lumineuse suffisante.

Nous montrons en particulier dans les chapitres 3 et 5 dans quelles conditions expérimentales particulières les calculs quantiques exacts conduisent à des résultats collectifs identiques à ceux du modèle phénoménologique : bien que les probabilités phénoménologiques restent toujours incapables d'expliquer le comportement individuel d'un atome, tout se passe, en valeur moyenne sur un grand nombre d'atomes, « comme si » elles étaient vraies. C'est ce qui permet de les utiliser dans la partie II.

Nous avons donc cherché dans la partie I à réconcilier les deux langages, en partie contradictoires, que constituent la théorie d'Einstein et l'application rigoureuse de la mécanique quantique. On ne peut lire avec fruit cette première partie que si l'on a suivi un cours général d'introduction à la mécanique quantique. Mais nous avons voulu aussi permettre au plus grand nombre de lecteurs d'entrer dans cette explication quantique de l'interaction avec la lumière sans avoir à fournir un effort trop ardu dans les mathématiques abstraites. C'est pourquoi nous avons choisi de restreindre cette étude dans le cadre de deux grandes hypothèses simplificatrices :

1) **Le système atomique étudié est supposé n'avoir que deux niveaux d'énergie** E_a **et** E_b non dégénérés. Cette hypothèse, qui est rarement vraie, est cependant applicable à un grand nombre d'expériences parce que l'aspect résonnant de l'interaction électromagnétique avec la fréquence ν de l'onde ($E_b - E_a = h\nu$) fait que, très souvent dans la pratique, seuls deux niveaux d'énergie de l'atome sont réellement mis en jeu de manière significative ; on peut donc négliger l'effet sur les autres niveaux.

2) L'onde lumineuse interagissant avec l'atome est supposée d'assez forte intensité pour que le nombre de photons correspondants soit très élevé (cette hypothèse est, de fait, vérifiée à l'intérieur des lasers, comme à l'extérieur, pour les atomes éclairés par un faisceau laser). Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire d'utiliser la représentation quantique du rayonnement, parce que l'on peut alors donner une signification réelle au champ électrique (ou magnétique) de l'onde ; et **utiliser ce champ électrique pour écrire mathématiquement l'interaction quantique de l'onde.**

C'est dans le cadre de ces deux hypothèses que nous pouvons écrire les **équations de Bloch optiques** et étudier leurs solutions.

Nous renvoyons pour la représentation quantique du rayonnement à l'ouvrage « Photons et atomes (Processus d'interaction) » de Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc et Grynberg (dans cette même collection) qui reste l'ouvrage de référence en ce domaine. Nous excluons bien sûr du champ de notre ouvrage les expériences effectuées avec de très petits nombres de photons, et en particulier toutes celles qui portent sur les corrélations de photons.

Nous espérons ainsi permettre à un grand nombre d'étudiants ou de scientifiques non physiciens (dans leur formation première) d'entrer sans trop de difficulté dans la théorie quantique de l'interaction onde-atomes, et de découvrir les nombreux effets spécifiques, non explicables dans les modèles plus simples : oscillation de Rabi, phénomènes transitoires et impulsionnels, franges de Ramsey, « déplacements lumineux » des niveaux d'énergie, dédoublement de niveaux « Autler-Townes ». Dans chaque chapitre des descriptions d'expériences donnent immédiatement la signification physique des équations théoriques, et justifient ainsi, au fur et à mesure, l'effort accompli.

On n'oubliera pas que ces équations quantiques sont seules capables d'expliquer les lasers émettant les impulsions ultra-courtes ou les expériences utilisant ces impulsions extrêmement courtes.

Il faut noter également que le modèle d'Einstein décrit seulement les échanges d'énergie entre les atomes et le faisceau lumineux. Mais le faisceau lumineux ne peut être décrit seulement par l'énergie qu'il transporte ; il s'agit d'une onde caractérisée par la répartition dans l'espace d'un champ électrique. La description précise de nombreuses expériences nécessite la prise en compte de cette répartition spatiale du champ. C'est pourquoi, **dans la partie III, nous calculons, à partir des équations de Maxwell, les répartitions spatiales du champ** couramment rencontrées dans la pratique.

Les deux premiers chapitres de cette troisième partie n'utilisent que les équations de Maxwell et peuvent donc être lus de manière totalement indépendante des parties I et II. Dans le premier de ces chapitres (chapitre 15), nous étudions le faisceau lumineux issu d'un laser, qui se propage en espace libre avec une extension spatiale limitée malgré l'absence de diaphragme, et qui doit se substituer au modèle simpliste de l'optique géométrique. Dans le deuxième (chapitre 16), nous étudions les solutions possibles des équations de Maxwell à l'intérieur des cavités optiques utilisées dans les lasers ; c'est ce qui nous permet de décrire les modes de fonctionnement des lasers.

Dans les deux derniers chapitres de la partie III, nous ne pouvons plus être indépendants de la partie I. Nous parvenons en effet au faîte de l'édifice dessiné dans cet ouvrage ; nous devons utiliser conjointement les équations de Maxwell et les équations quantiques de Bloch pour calculer comment la polarisation atomique calculée dans la partie I peut être source de l'onde engendrée à l'intérieur du laser, ou à l'extérieur du laser dans d'autres expériences courantes de diffusion de la lumière.

Nous essayons enfin, dans un dernier chapitre (chapitre 19), de donner quelques aperçus de problèmes mettant en jeu plus de deux états quantiques (niveaux d'énergie dégénérés). Ceci est en particulier absolument nécessaire pour décrire les phénomènes d'émission ou d'interaction électromagnétique en tenant compte des **diverses polarisations** possibles pour l'onde électromagnétique.

Une dernière remarque concernera les quelques références que nous avons citées à la fin de chaque chapitre. Il était impossible, sur des sujets aussi vastes, quarante ans après le début de l'aventure des lasers, de fournir une bibliographie exhaustive qui aurait rempli sans doute la moitié du volume de ce livre. Nous nous sommes, *a priori*, limités aux quelques références fondatrices qui, sur chaque sujet, ont marqué le démarrage de développements nouveaux. Mais bien sûr, nous devions également citer les références des expériences décrites pour illustrer chaque chapitre. Celles-ci ont été choisies assez arbitrairement, soit parce que nous les connaissions bien, soit parce qu'elles nous ont semblé particulièrement spectaculaires. Mais cela ne signifie

en aucune manière qu'elles soient plus importantes que de nombreuses autres qui ne sont pas citées. Que les auteurs de ces autres expériences veuillent bien nous excuser de cette sélection un peu arbitraire.

Ce livre est issu de cours spécialisés en maîtrise ou en DEA. Nous espérons rendre service aux étudiants avancés en mettant à leur disposition un exposé relativement simple, leur permettant d'éclaircir un grand nombre de phénomènes, avant de se plonger dans les exposés plus ardus et plus spécialisés, indispensables pour leurs sujets de recherche.

B. CAGNAC, J.P. FAROUX

Partie I

Action d'un champ électromagnétique classique sur un système à deux états quantiques

Chapitre 1

Action d'une onde classique sur un atome isolé

DANS CE CHAPITRE, nous débutons le calcul de l'interaction entre le champ électrique de l'onde classique et l'atome décrit quantiquement par sa fonction d'onde, obéissant à l'équation de Schrödinger. Nous choisissons le problème le plus simple qui soit : un atome isolé dans l'espace et soumis à la seule action de ce champ électrique, à l'abri de toute autre interaction, ce qui est rarement le cas dans les expériences réelles.

Ce calcul aboutit à un résultat *a priori* surprenant (l'oscillation de Rabi) qui peut sembler en contradiction avec les phénomènes souvent observés dans les expériences courantes. C'est pourquoi nous terminons ce chapitre en décrivant les expériences réalisées en radiofréquence, sur jet atomique, où les conditions de validité de ce calcul peuvent être considérées comme réalisées.

Nous verrons dans le chapitre 2 comment décrire théoriquement les interactions aléatoires inévitables dans les expériences réelles en optique ; ceci nous permettra, dans le chapitre 3, de mener à bien des calculs quantiques dont les résultats sont compatibles avec les représentations phénoménologiques courantes. Nous préciserons aussi dans quelles conditions les représentations phénoménologiques simples (ou équations de probabilités — en anglais « rate equations ») peuvent être utilisées en première approximation et dans quels cas, au contraire, elles n'ont aucun sens.

1.1 Hamiltonien de l'interaction dipolaire électrique

Le champ électrique de l'onde électromagnétique qui irradie l'atome peut localement être écrit sous la forme :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

où l'amplitude $\vec{\mathcal{E}}_1$ varie lentement en fonction de la position $\vec{r}$, tandis que le terme de propagation en $\vec{k} \cdot \vec{r}$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, varie beaucoup plus rapidement avec la position. Cependant les dimensions de l'atome sont de l'ordre de l'Angström (1 Å = 0,1 nm), très inférieures donc aux longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$ des ondes lumineuses. Cela nous autorise à négliger les variations du terme de propagation $\vec{k}.\vec{r}$ et à faire l'approximation d'un champ uniforme sur le volume de l'atome, égal au champ en son centre : $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_1 \cos\omega t$ (cette approximation ne serait pas justifiée avec des rayons X durs dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de l'Angström, voisines des dimensions atomiques, voire inférieures).

Lorsqu'un champ électrique uniforme $\vec{\mathcal{E}}$ agit sur un système de charges électriques, globalement neutre, comme un atome ou une molécule, le terme prépondérant dans le calcul de leur énergie d'interaction W est le terme dipolaire électrique

$$W = -\vec{p}.\vec{\mathcal{E}} \quad \text{avec } \vec{p} = \sum_n q_n \vec{r}_n$$

$\vec{p}$ est le vecteur moment dipolaire électrique obtenu en faisant la somme sur toutes les charges électriques q_n du système ; en pratique, on choisit l'origine au noyau, et l'on fait la somme sur tous les électrons de même charge.

Si nous nous limitons à un *champ électrique polarisé rectilignement*, parallèle à l'axe Ox, nous utilisons p_x, composante de $\vec{p}$ sur l'axe $0x$; et nous obtenons

$$W = -p_x \mathcal{E}_x(t) = -p_x \mathcal{E}_1 \cos\omega t \quad \text{avec } p_x = \sum_n q_n x_n$$

Le hamiltonien d'interaction H_I de la mécanique quantique s'obtient en transposant l'énergie classique d'interaction W, c'est-à-dire en remplaçant les composantes du vecteur dipolaire classique $\vec{p}$ par des opérateurs quantiques :

$$\mathrm{H}_I = -D_x \mathcal{E}_x, \text{ avec } \vec{D} = \sum_n q_n \vec{r}_n \text{ et } D_x = \sum_n q_n x_n \qquad (1\text{-}1)$$

Le choix d'une onde polarisée rectiligne fait que seul intervient dans cette expression l'opérateur D_x, et non les deux autres composantes D_y et D_z, de l'opérateur vectoriel $\vec{D}$. Le changement de notation entre $\vec{p}$ et $\vec{D}$ signifie que l'on remplace dans p_x la variable de position classique x par l'opérateur x qui agit sur les fonctions d'onde de l'atome. En pratique, dans la grande majorité des transitions étudiées, les deux états E_a et E_b de l'atome ne diffèrent que par l'état d'un seul électron ; on peut dans le calcul ne considérer que ce seul électron, et simplifier l'écriture en supprimant la sommation sur tous les électrons, et en considérant seulement la contribution de cet électron à l'opérateur dipolaire $\vec{D} = q\vec{r}$ et $D_x = qx$.

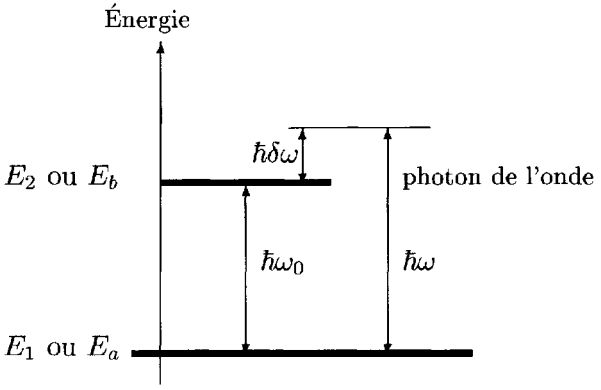


FIG. 1.1 – *Niveaux d'énergie du système atomique étudié.*

On démontre en mécanique quantique que les états propres de l'atome, correspondant à des énergies bien définies, sont aussi des états de parité définie, c'est-à-dire que les fonctions d'onde correspondantes $\psi(x, y, z)$ sont soit paires soit impaires dans une symétrie par rapport au centre de l'atome. L'opérateur $D_x = qx$ est un opérateur impair qui, appliqué à une fonction d'onde $\psi(x)$ la transforme en une fonction $\varphi(x)$ de parité opposée :

$$\begin{cases} \text{si } \psi(x) \text{ est paire : } \psi(-x) = \psi(x) \text{ ; alors } \varphi(x) = D_x\psi(x) \text{ est impaire ;} \\ \text{si } \psi(x) \text{ est impaire : } \psi(-x) = -\psi(x) \text{ ; alors } \varphi(x) = D_x\psi(x) \text{ est paire.} \end{cases}$$

Dans tous les cas le produit scalaire des deux fonctions $\psi(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ est nul :

$$\langle\psi(x, y, z)|\varphi(x, y, z)\rangle = \iiint \psi^*(x, y, z)\varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

parce que la contribution à l'intégrale calculée pour x négatif est opposée à la contribution calculée pour x positif.

Nous faisons maintenant l'hypothèse, tout à fait réaliste, que l'interaction de l'onde électromagnétique ne met en jeu que *deux niveaux* d'énergie de l'atome E_a et $E_b = E_a + \hbar\omega_0$ (*cf.* Fig. 1.1) ; c'est par exemple le niveau fondamental de l'atome et le premier niveau excité. Mais nous faisons l'hypothèse simplificatrice (moins souvent réalisée en pratique) que ces deux niveaux d'énergie sont non dégénérés ; c'est-à-dire qu'il existe *un seul état de l'atome* $|\psi_a(x, y, z)\rangle$ correspondant à l'énergie E_a et un seul état $|\psi_b(x, y, z)\rangle$ correspondant à l'énergie E_b. En d'autres termes $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$) sont les deux seules fonctions ou vecteurs propres du hamiltonien normal H_0 de l'atome (en l'absence de l'onde électromagnétique) correspondant aux valeurs propres E_a

ou E_b :

$$\mathrm{H}_0 \left|\psi_a(x,y,z)\right\rangle = E_a \left|\psi_a(x,y,z)\right\rangle \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_0 \left|\psi_b(x,y,z)\right\rangle = E_b \left|\psi_b(x,y,z)\right\rangle \quad (1\text{-}2)$$

Dans l'espace des états atomiques $|\psi\rangle$ les deux fonctions orthonormées $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ définissent un sous-espace à deux dimensions dans lequel l'opérateur D_x est représenté par une matrice 2×2 ; et il nous faut écrire ces quatre éléments de matrice. Mais d'après la remarque faite précédemment, les deux éléments de matrice diagonaux sont nuls :

$$\langle\psi_a| D_x |\psi_a\rangle = 0 = \langle\psi_b| D_x |\psi_b\rangle$$

et nous n'aurons à utiliser que les deux éléments de matrice non diagonaux

$$d_{ab} = \langle\psi_a| D_x |\psi_b\rangle \quad \text{et} \quad d_{ba} = \langle\psi_b| D_x |\psi_a\rangle = d_{ab}^* \qquad (1\text{-}3)$$

D'après les propriétés générales des produits scalaires, nous savons que ces deux éléments de matrice sont imaginaires conjugués. Par un choix convenable de la phase des fonctions d'onde (qui est arbitraire), il est possible de rendre réels, égaux et positifs ces deux coefficients imaginaires conjugués ; c'est l'hypothèse que nous ferons : $d_{ab} = d_{ab}^* = d_{ba}$.

Le hamiltonien d'interaction $\mathrm{H}_I = -D_x \mathcal{E}_1 \cos\omega t$ comporte donc deux éléments de matrice diagonaux nuls et deux éléments de matrice non diagonaux :

$$\boxed{\begin{array}{l}\langle\psi_a| \mathrm{H}_I |\psi_b\rangle = \langle\psi_b| \mathrm{H}_I |\psi_a\rangle = -\mathcal{E}_1 d_{ab} \cos\omega t = -\hbar\Omega_1 \cos\omega t \\ \text{avec } \Omega_1 = \mathcal{E}_1 d_{ab}/\hbar\end{array}} \qquad (1\text{-}4)$$

en introduisant le paramètre Ω_1 qui permet de mesurer en unité de fréquence l'amplitude maximale $\mathcal{E}_1 d_{ab}$ de l'énergie sinusoïdale d'interaction, et qui permettra de simplifier l'écriture de l'équation de Schrödinger (on rappelle que $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck divisée par 2π).

Remarque 1.1 – La possibilité de nous limiter à un espace quantique à deux dimensions est liée à notre choix de nous limiter à une seule composante de l'opérateur vectoriel $\overrightarrow{D}$, c'est-à-dire à un champ électrique ayant toujours la même polarisation. Ceci sera expliqué dans le chapitre 19, lorsque nous traiterons des ondes polarisées.

1.2 Résolution de l'équation de Schrödinger. Représentation « tournante ». Approximation séculaire

Puisque nous nous restreignons au sous-espace sous-tendu par les deux vecteurs propres $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$, un état quelconque de l'atome est représenté

par un vecteur d'état de la forme :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle\,, \quad \text{avec} \quad aa^* + bb^* = 1 \text{ (normalisation)} \quad (1\text{-}5)$$

En présence de l'onde électromagnétique, le hamiltonien total du système est $(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)$ et l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)\,|\psi(t)\rangle$$

en remplaçant $|\psi(t)\rangle$ par l'expression précédente (1-5), et en tenant compte de (1-2)

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\,|\psi_a\rangle + i\hbar\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\,|\psi_b\rangle = aE_a\,|\psi_a\rangle + bE_b\,|\psi_b\rangle + a\mathrm{H}_I\,|\psi_a\rangle + b\mathrm{H}_I\,|\psi_b\rangle$$

Suivant une méthode classique on projette cette équation vectorielle sur les vecteurs « kets » de base $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ en faisant successivement le produit scalaire par les deux vecteurs « bras » $\langle\psi_a|$ et $\langle\psi_b|$:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = a(t)E_a + b(t)\,\langle\psi_a|\,\mathrm{H}_I\,|\psi_b\rangle = a(t)E_a - b(t).\hbar\Omega_1\cos\omega t \quad (1\text{-}6)$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = b(t)E_b + a(t)\,\langle\psi_b|\,\mathrm{H}_I\,|\psi_a\rangle = b(t)E_b - a(t).\hbar\Omega_1\cos\omega t \quad (1\text{-}7)$$

système de deux équations différentielles couplées à deux fonctions inconnues $a(t)$ et $b(t)$ mais dont les coefficients dépendent du temps comme

$$\cos\omega t = \frac{\mathbf{e}^{i\omega t} + \mathbf{e}^{-i\omega t}}{2}$$

En l'absence de l'onde optique ($\Omega_1 = 0$), les solutions triviales pour a et b sont bien connues :

$$\Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = a(0)\,\mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

et

$$b(t) = b(0)\,\mathbf{e}^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = b(0)\,\mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\mathbf{e}^{-i\omega_0 t}$$

On attend alors que l'effet résonnant de l'onde, lorsque ω est voisin de ω_0, soit dû au terme $\mathbf{e}^{+i\omega t}$ dans l'équation (1-6) et au terme $\mathbf{e}^{-i\omega t}$ dans l'équation (1-7). On réécrit ces deux équations sous une forme tenant compte de cette attente :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -i\frac{E_a}{\hbar}a + i\frac{\Omega_1}{2}b.\mathbf{e}^{i\omega t}(1 + \mathbf{e}^{-2i\omega t}) \quad (1\text{-}8)$$

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = -i\left(\frac{E_a}{\hbar} + \omega_0\right)b + i\frac{\Omega_1}{2}a.\mathbf{e}^{-i\omega t}(1 + \mathbf{e}^{+2i\omega t}) \quad (1\text{-}9)$$

On pourra montrer en effet par la suite que les termes exponentiels en $2i\omega t$ dans les parenthèses donnent des contributions très petites, et pourront être négligés : c'est ce qu'on appelle couramment l'*approximation séculaire*.

Pour tenir compte des termes en $\mathbf{e}^{\pm i\omega t}$ dont on attend l'effet principal, une méthode classique consiste à définir de nouvelles fonctions inconnues $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ dont la variation avec le temps sera beaucoup moins rapide que celle de $a(t)$ et $b(t)$:

$$\boxed{\alpha(t) = a(t)\mathbf{e}^{+i\frac{E_a}{\hbar}t} \quad \text{et} \quad \beta(t) = b(t)\mathbf{e}^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\mathbf{e}^{i\omega t}} \tag{1-10}$$

On calcule alors facilement les dérivées :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}^{+i\frac{E_a}{\hbar}t} + i\frac{E_a}{\hbar}\alpha(t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}^{i\left(\frac{E_a}{\hbar}+\omega\right)t} + i\left(\frac{E_a}{\hbar}+\omega\right)\beta(t)$$

En substituant les expressions (1-8) et (1-9), et tenant compte de (1-10), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\beta(t)\left(1+\mathbf{e}^{-2i\omega t}\right) \tag{1-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t)\left(1+\mathbf{e}^{+2i\omega t}\right) + i\delta\omega.\beta(t) \quad \text{avec } \delta\omega = \omega - \omega_0 \tag{1-12}$$

Compte tenu de l'approximation séculaire (négliger les exponentielles en $\pm 2i\omega t$), on obtient finalement un système de deux équations différentielles couplées *à coefficients constants*. L'intérêt du changement de variables (a, b) en (α, β) réside précisément dans l'obtention de ces coefficients constants ; ce changement correspond, au passage, à ce qu'on appelle la représentation « tournante » (*cf.* remarque 1.2)

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= i\frac{\Omega_1}{2}\beta \\ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} &= i\frac{\Omega_1}{2}\alpha + i\delta\omega\beta\end{aligned}} \tag{1-13}$$

avec $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ (normalisation).

Dans la suite de la première partie, nous étudierons différentes méthodes, adaptées à différentes expériences, pour résoudre ce système.

Remarque 1.2 – Les modules des anciennes et des nouvelles variables sont les mêmes ($\alpha\alpha^* = aa^*$) et ($\beta\beta^* = bb^*$) permettant les mêmes prédictions en termes de probabilités. Ce changement de variable revient à projeter les états atomiques $|\psi(t)\rangle$ sur de nouveaux vecteurs de base dépendant du temps ; c'est ce qu'on appelle

un changement de représentation. Par analogie avec le phénomène de Résonance Magnétique, on parle de passage à la représentation « tournante » (que l'on évitera de confondre avec la classique représentation d'interaction : dans ce dernier cas on écrirait ω_0 au lieu de ω dans l'expression de $\beta(t)$).

En d'autres termes, cette représentation « tournante » est définie par deux vecteurs de base sur lesquels on projette $|\psi(t)\rangle$

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi_\alpha\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,|\psi_a\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_\beta\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\mathbf{e}^{-i\omega t}\,|\psi_b\rangle \\ \text{soit } |\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\varphi_\alpha\rangle + \beta(t)\,|\varphi_\beta\rangle \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}14)$$

Cette nouvelle expression de $|\psi(t)\rangle$ est bien identique au vecteur d'état défini en (1-5).

Remarque 1.3 – Nous sommes maintenant en mesure de justifier l'approximation séculaire. Supposons que nous ayons trouvé une solution $\alpha(t)$ qui varie lentement avec le temps ; nous utilisons alors (1-12) pour chercher la solution $\beta(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - i\delta\omega\beta = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t)\left(1 + \mathbf{e}^{+2i\omega t}\right) \;;$$

une méthode classique consiste à résoudre d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - i\delta\omega\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = C\mathbf{e}^{i\delta\omega t}$$

On cherche la solution générale par la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire que l'on cherche maintenant une solution de la forme $\beta(t) = C(t)\mathbf{e}^{i\delta\omega t}$:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - i\delta\omega\beta = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}^{i\delta\omega t} = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t)\left(1 + \mathbf{e}^{2i\omega t}\right)$$

$$\text{ou } \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t)\left[\mathbf{e}^{-i\delta\omega t} + \mathbf{e}^{i(2\omega\,-\,\delta\omega)t}\right]$$

Une approximation, valable pour les instants proches de l'origine $t = 0$ permet d'écrire

$$C(t) = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(0)\int_0^t \mathrm{d}t\left[\mathbf{e}^{-i\delta\omega t} + \mathbf{e}^{i(2\omega\,-\,\delta\omega)t}\right]$$

$$= i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(0)\left[\frac{\mathbf{e}^{-i\delta\omega t} - 1}{-i\delta\omega} + \frac{\mathbf{e}^{i(2\omega\,-\,\delta\omega)t} - 1}{i(2\omega - \delta\omega)}\right]$$

On voit que le terme exponentiel en 2ω fournit une contribution dont l'amplitude relative (comparée au terme principal) est en $|\delta\omega|/2\omega$. Dans les expériences courantes, ce rapport est inférieur à 10^{-4} voire 10^{-6} ; et ceci nous autorise à négliger complètement les termes exponentiels en $2i\omega t$ qui figurent dans les parenthèses de (1-11) et (1-12). Une justification plus détaillée sera donnée au chapitre 7, où nous calculerons la faible correction due à ces termes en 2ω.

1.3 Cas d'un seul atome non perturbé. Oscillation de Rabi pure

La solution d'un système d'équations différentielles couplées telles que (1-13) est très simple. Une méthode classique dans ce cas est de dériver l'une des deux équations ; on obtient ainsi trois équations entre lesquelles il est facile d'éliminer une des variables et sa dérivée. Nous choisissons de dériver $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$ et d'éliminer α ;

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} = i\frac{\Omega_1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + i\delta\omega\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega_1^2}{4}\beta + i\delta\omega\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} - i\delta\omega\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} + \frac{\Omega_1^2}{4}\beta = 0 \tag{1-15}$$

La solution générale de cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une combinaison linéaire de deux fonctions exponentielles du temps dont on trouve les coefficients à partir de l'équation caractéristique en r :

$$r^2 - i\delta\omega r + \frac{\Omega_1^2}{4} = 0 \tag{1-16}$$

dont les solutions sont

$$r = +i\frac{\delta\omega}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2} = i\frac{\delta\omega}{2} \pm i\frac{\Omega}{2}, \text{ avec } \boxed{\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}} \tag{1-17}$$

La solution générale est :

$$\beta(t) = \mathbf{e}^{i\frac{\delta\omega}{2}t}\left(A\mathbf{e}^{i\frac{\Omega}{2}t} + B\mathbf{e}^{-i\frac{\Omega}{2}t}\right) \tag{1-18}$$

Les constantes d'intégration A et B dépendent des conditions initiales et, pour les déterminer, nous devons écrire la dérivée de β :

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{i\delta\omega}{2}\beta(t) + i\frac{\Omega}{2}\mathbf{e}^{i\frac{\delta\omega t}{2}}\left[A\mathbf{e}^{i\frac{\Omega}{2}t} - B\mathbf{e}^{-i\frac{\Omega}{2}t}\right] \tag{1-19}$$

Si nous appliquons brusquement l'onde $\mathcal{E}_1 \cos\omega t$ à un atome *qui est initialement dans l'état fondamental* E_a, nous savons qu'à l'instant initial $t = 0$:

$$\beta(0) = 0 = A + B$$

$$\alpha(0) = 1 = -\frac{2\delta\omega}{\Omega_1}\beta(0) + \frac{2}{i\Omega_1}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\Omega}{\Omega_1}(A - B)$$

soit

$$A = -B = \frac{\Omega_1}{2\Omega} \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = i\frac{\Omega_1}{\Omega}\mathrm{e}^{i\frac{\delta\omega}{2}t}\sin\frac{\Omega t}{2} \tag{1-20}$$

L'exponentielle en $i\frac{\delta\omega}{2}t$ est une oscillation de phase qui s'élimine lorsque nous calculons la probabilité $\beta^*\beta(t)$ d'être dans l'état E_b au temps t, c'est-à-dire encore, compte tenu des conditions initiales, la probabilité $\mathcal{P}_{a\to b}(t)$ pour qu'un atome initialement à l'état E_a, soit passé à l'état E_b au temps t :

$$\boxed{\mathcal{P}_{a\to b}(t) = \beta^*\beta(t) = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\frac{\Omega}{2}t = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2+\delta\omega^2} \times \frac{1-\cos\Omega t}{2}} \tag{1-21}$$

La figure 1.2 représente l'évolution temporelle de cette probabilité : c'est une oscillation sinusoïdale avec la pulsation $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2+\delta\omega^2}$; on a représenté deux cas distincts sur la figure :

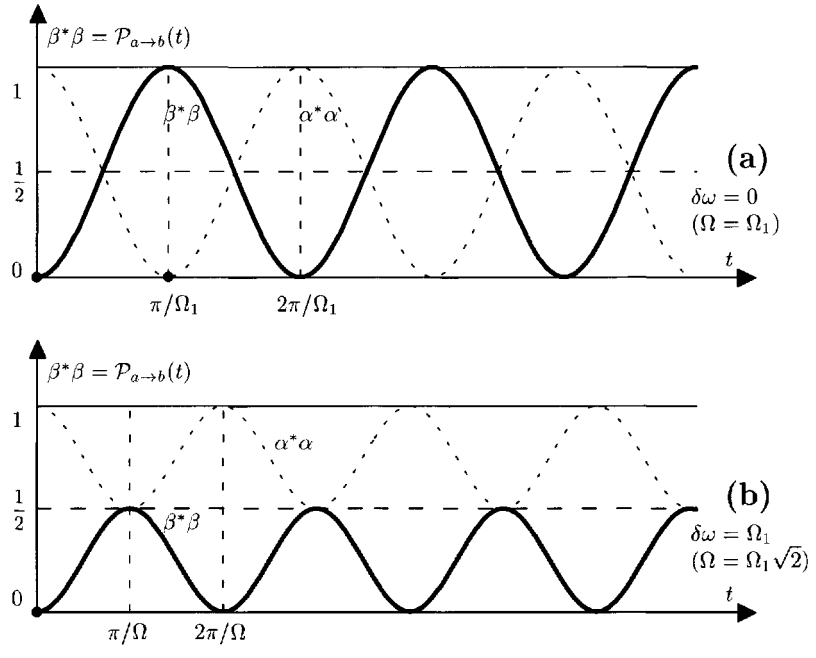


FIG. 1.2 – *Oscillation de Rabi d'un atome originalement à l'état E_a. Évolution temporelle de la probabilité $\beta^*\beta(t)$ d'être dans l'état excité E_b (en pointillé, la probabilité complémentaire $\alpha^*\alpha = 1 - \beta^*\beta$). Cas (a) à résonance exacte, cas (b) écart à la résonance $\delta\omega = \Omega_1$. L'oscillation est plus rapide, et son amplitude est inférieure.*

a) *à résonance exacte* ($\delta\omega = 0$), la probabilité $\beta^*\beta(t)$ oscille entre 0 et 1 ; c'est-à-dire que, à certains instants, on est sûr de trouver l'atome dans l'état E_b. La fréquence des oscillations vaut alors $\Omega_1/2\pi = \mathcal{E}_1 \mathrm{d}_{ab}/h$; cette fréquence, dite *fréquence de Rabi*, est strictement proportionnelle à l'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ électrique de l'onde (réf. [1]) ;

b) *avec un léger écart par rapport à la résonance* ($\delta\omega \neq 0$), la probabilité $\beta^*\beta(t)$ n'atteint pas des valeurs aussi importantes, et elle oscille plus rapidement avec la pulsation Ω, supérieure à Ω_1. Nous parlerons d'une fréquence de Rabi généralisée hors résonance.

Ceci pourra être interprété à l'aide du vecteur de Bloch, que nous introduisons au chapitre 4.

1.4 Les expériences de Rabi sur jet atomique

La vérification expérimentale de ce phénomène a été faite dans les années précédant immédiatement la seconde guerre mondiale à l'université Columbia de New York dans les expériences effectuées par le professeur Rabi sur des jets atomiques (réf. [2] et [3]). En effet, dans ces expériences sur jet atomique, chaque atome traverse successivement l'appareil, où il subit l'interaction voulue ; il est ensuite détecté séparément à la sortie du jet atomique dans un dispositif où il est mesuré, seul, indépendamment des autres. On réalise ainsi la succession d'un très grand nombre d'expériences qui sont faites chacune sur un atome isolé.

Il s'agissait en fait de transitions dans le domaine des radiofréquences ; dans ce cas, conformément à la relation d'Einstein, la probabilité A d'émission spontanée est extrêmement petite et peut être négligée, parce que la durée de vie τ_b du niveau excité est beaucoup plus longue que la durée de traversée de l'appareil par les atomes du jet atomique (de l'ordre de la milliseconde). Les atomes sont soumis à l'onde électromagnétique résonnante ($\delta\omega = 0$) sur une longueur a, c'est-à-dire pendant une durée $t = a/v$ inverse de leur vitesse v. Cette durée varie donc d'un atome à l'autre ; mais on peut calculer pour les atomes du jet atomique la vitesse la plus probable v_0 (on montre qu'elle est égale à la vitesse quadratique moyenne dans la vapeur qui a donné naissance au jet atomique). En définitive, un grand nombre d'atomes sont soumis à l'onde pendant une durée voisine du temps de vol le plus probable $t_v = a/v_0$; le brouillage, dû aux atomes trop lents ou trop rapides, reste limité si la fréquence $\Omega/2\pi$ de l'oscillation de Rabi n'est pas trop élevée ($\Omega t \leq 2\pi$). On analyse avec une méthode du type Stern et Gerlach (réf. [4]) la répartition des atomes entre les états E_a et E_b à la sortie du jet atomique (*cf.* Fig. 1.3) ; la durée t_v étant constante, on fait varier l'amplitude du champ $\mathcal{E}_1$; donc ainsi la fréquence de Rabi Ω_1, et l'on observe bien une variation de la probabilité $\mathcal{P}_{a\to b}(t_v)$ conforme à l'équation (1-21) en fonction du paramètre $\Omega_1 t_v$.

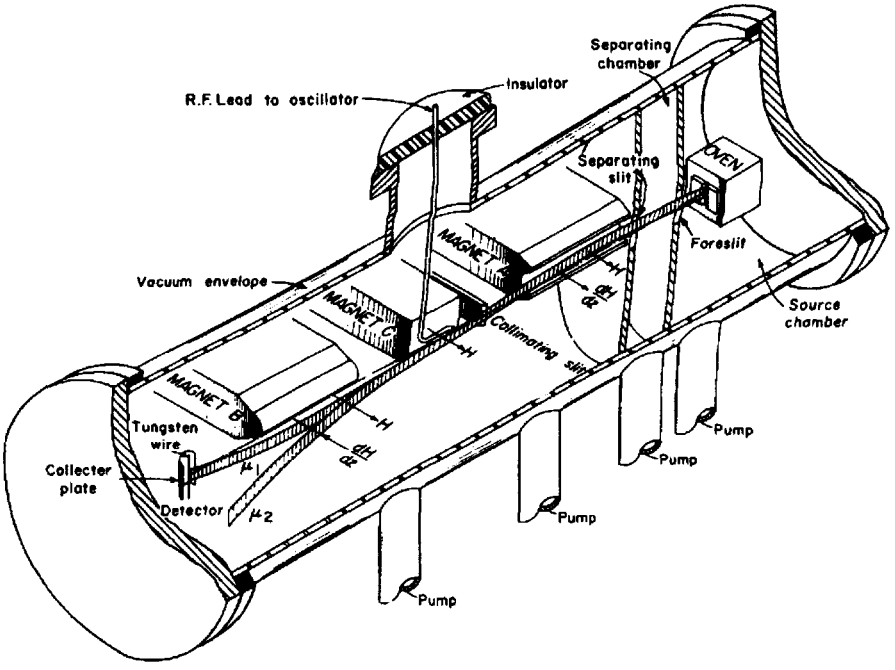


FIG. 1.3 – *Spectromètre à radiofréquence de Kusch (d'après la réf. [3], avec la permission de Elsevier Science).*

*La vapeur atomique issue du four (oven) est collimatée par deux fentes successives (slit) pour former un jet atomique. Les trajectoires des atomes du jet sont déviées en sens opposés par deux aimants du type Stern et Gerlach, identiques mais dont les pièces polaires sont inversées (*MAGNET A *et* MAGNET B *: pour la clarté de la figure on a représenté qu'une seule des deux pièces polaires de chaque aimant ; la pièce polaire creuse en A et la pièce polaire pointue en B. Les deux aimants créent ainsi des champs H de même sens, mais dont les gradients* $\mathrm{d}H/\mathrm{d}z$ *sont opposés).*
Les courbures des trajectoires imposées aux atomes par l'aimant A et par l'aimant B se compensent, et tous les atomes arrivent au détecteur (fil de tungstène chauffé), placé dans l'axe de l'appareil, quelle que soit la composante de leur moment magnétique (sous-niveau Zeeman). L'interaction avec l'onde radio a lieu dans l'aimant C à pièces polaires plates, placé entre A et B. Si l'oscillation de Rabi entre les sous-niveaux Zeeman voisins produit une répartition différente des atomes entre sous-niveaux, la courbure de trajectoire imposée par l'aimant B ne compense plus exactement la courbure imposée par l'aimant A ; une partie des atomes n'atteint plus le détecteur.

Après avoir insisté sur l'observation expérimentale des oscillations de Rabi, nous conclurons ce paragraphe par trois remarques.

1) L'évolution de l'atome sous l'action de l'onde est cohérente et déterministe, par opposition aux évolutions incohérentes et aléatoires sous l'action des phénomènes de hasard. On utilise le mot de cohérence dans un système physique pour signifier l'existence d'une relation de phase précise entre deux grandeurs sinusoïdales qui le caractérisent ; ici c'est la relation de phase entre les deux variables $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ qui permet de parler d'un état atomique cohérent ou d'une superposition cohérente des deux états de base $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$. Dans les expériences de Rabi, la prédiction du résultat est donnée le plus souvent par une répartition probabiliste entre les deux états E_a et E_b ; mais il est possible aussi de prédire à des instants périodiques bien précis le passage de l'atome par un état pur E_a, ou E_b. C'est bien une prévision strictement déterministe.

2) Au cours de l'oscillation de Rabi à résonance (Fig. 1.2a) nous pouvons distinguer deux temps ou deux étapes distinctes. Au cours de la première étape, de l'instant 0 à l'instant $t = \pi/\Omega_1$, l'atome passe de l'état E_a, à l'état E_b et l'on est certain à l'instant π/Ω_1 qu'il a absorbé l'énergie $E_b - E_a = \hbar\omega$. Au cours de l'étape suivante, lorsque la sinusoïde est descendante entre l'instant $t = \pi/\Omega_1$ et l'instant $t = 2\pi/\Omega_1$, l'atome passe de l'état E_b à l'état E_a, en rendant l'énergie $\hbar\omega$; c'est l'émission stimulée par l'action de l'onde. Absorption et émission stimulée apparaissent comme deux étapes symétriques de l'évolution provoquée par l'onde électromagnétique. Dans le mémoire d'Einstein de 1917, absorption et émission stimulée apparaissaient aussi comme deux faces symétriques d'une unique interaction électromagnétique, à tel point qu'il ne lui avait pas semblé utile de les distinguer par un vocabulaire différent (le terme d'émission stimulée ne figure pas dans le mémoire de 1917).

3) À partir de la formule (1-21) ou des courbes de la figure 1.2, on peut calculer la probabilité de transition par seconde

$$-\frac{1}{n_a}\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\alpha^*\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha^*\alpha)$$

On obtient alors une expression en $\tan(\Omega_1 t/2)$ variant entre zéro et l'infini ; ce n'est pas une constante. Les hypothèses d'Einstein de probabilité de transition constantes (*cf.* chapitre 8) ne peuvent donc en aucun cas rendre compte de l'interaction cohérente et déterministe entre l'atome et l'onde électromagnétique. Nous verrons plus loin comment on peut leur redonner un sens *en valeur moyenne sur un grand nombre d'atomes*, quand leurs évolutions temporelles ont été rendues incohérentes les unes par rapport aux autres, sous l'effet aléatoire de l'émission spontanée.

Bibliographie

[1] I. Rabi, Phys. Rev. **51**, 652 (1937).

[2] I. Rabi, S. Millman, P. Kusch et J. Zacharias, Phys. Rev. **55**, 526 (1939).

[3] P. Kusch, Physica **17**, 339 (1951).

[4] W. Gerlach et O. Stern, Annalen der Physik **74**, 673 (1924).

[5] H. Kopfermann, Nuclear Moments, Academic Press, New York (1958).

Chapitre 2

Équations différentielles de Bloch

LES EXPÉRIENCES sur des atomes isolés et non perturbés, telles que nous les avons décrites au chapitre précédent (expériences de Rabi) sont sans doute fort intéressantes, mais elles exigent un support technique complexe et délicat (jet atomique, détection Stern et Gerlach) ; et la plupart des expériences d'interaction entre la lumière et les atomes sont en pratique beaucoup plus simples. Mais dans toutes ces expériences courantes, on observe une collection macroscopique d'atomes et, donc, les grandeurs mesurées sont moyennées sur l'ensemble des atomes. Si les atomes étaient à l'abri de toute perturbation autre que la lumière, on calculerait pour chacun d'eux les mêmes fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et il n'y aurait rien à ajouter au chapitre précédent.

Mais en pratique les expériences sont réalisées sur des vapeurs où les atomes subissent les collisions étudiées en théorie cinétique des gaz (entre atomes ou bien sur les parois du récipient) et qui se produisent à des instants aléatoires différents pour chaque atome. Même si nous travaillions avec des atomes à très basse température confinés dans un piège (on commence à savoir le faire, mais ce n'est pas simple !), un autre phénomène aléatoire perturbe de manière absolument inévitable les expériences d'optique : c'est l'émission spontanée de photons par les atomes de l'état excité E_b et qui les fait brusquement retourner à l'état inférieur E_a, de manière tout à fait indépendante de l'onde électromagnétique incidente.

Du fait de ces phénomènes aléatoires, les phases des fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ des différents atomes sont rendues aléatoires aussi, en sorte que leurs valeurs moyennes sont généralement nulles. Il est donc indispensable d'introduire de nouvelles variables. Ce sont les variables habituelles du formalisme de la matrice densité ; mais nous les introduisons ici, volontairement, sans utiliser ce formalisme qui nécessite une connaissance plus approfondie de la mécanique quantique. Les lecteurs de formation plus avancée le reconnaîtront « en filigrane ».

2.1 Introduction des variables collectives, moyennées sur les atomes

L'introduction de ces nouvelles variables semblera momentanément compliquée puisque nous remplaçons les deux variables complexes α et β et leurs imaginaires conjugués α^* et β^* par leurs quatre produits : $\alpha\alpha^*$, $\beta\beta^*$, $\alpha\beta^*$ et $\beta\alpha^*$. Mais l'intérêt de ce changement de variables apparaît dans les trois remarques suivantes :

1) Ces nouvelles variables (produits avec les quantités conjuguées) sont celles qui interviennent automatiquement dans le calcul de la valeur moyenne $\langle G\rangle$ d'une grandeur physique quelconque, représentée par l'opérateur G. Le calcul est fait dans la représentation tournante en utilisant les vecteurs de base $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$ de la remarque 1.2 :

$$\left.\begin{aligned}\langle G\rangle &= \langle\varphi(t)|\, G\,|\varphi(t)\rangle = \left(\alpha^*\langle\varphi_\alpha| + \beta^*\langle\varphi_\beta|\right) G\left(\alpha\,|\varphi_\alpha\rangle + \beta\,|\varphi_\beta\rangle\right)\\ \langle G\rangle &= \alpha^*\alpha\langle\varphi_\alpha|\, G\,|\varphi_\alpha\rangle + \beta^*\beta\langle\varphi_\beta|\, G\,|\varphi_\beta\rangle\\ &\qquad + \alpha^*\beta\langle\varphi_\alpha|\, G\,|\varphi_\beta\rangle + \beta^*\alpha\langle\varphi_\beta|\, G\,|\varphi_\alpha\rangle\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}1)$$

$$\langle G\rangle = \alpha^*\alpha G_{\alpha\alpha} + \beta^*\beta G_{\beta\beta} + \alpha^*\beta G_{\alpha\beta} + \beta^*\alpha G_{\beta\alpha} \quad (2\text{-}2)$$

où $G_{\alpha\alpha}$, $G_{\beta\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, $G_{\beta\alpha}$, sont les éléments de matrice de l'opérateur G.

2) Compte tenu de leurs parties réelle et imaginaire, chacune des variables complexes α et β représente deux variables réelles distinctes, soit en tout quatre variables réelles. Mais comme elles sont liées entre elles par la condition de normalisation $\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$, il n'y a en fait que *trois variables réelles indépendantes*. On les obtient aisément à partir des quatre produits :

$$\left.\begin{aligned}u &= \alpha^*\beta + \beta^*\alpha && \text{2 fois la partie réelle commune de } \alpha^*\beta \text{ ou } \beta^*\alpha\ ;\\ v &= i(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha) && \text{2 fois la partie imaginaire de } \beta^*\alpha\ ;\\ m &= \alpha^*\alpha - \beta^*\beta && \begin{cases}\text{différence des 2 probabilités d'être}\\ \text{dans les états } E_a \text{ ou } E_b.\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}3)$$

Dans une collection d'atomes identiques, la variable m est reliée de manière évidente, à la différence des nombres d'atomes dans l'état E_a et dans l'état E_b.

La signification physique des variables « croisées » u et v peut être donnée par le calcul de la valeur moyenne de l'opérateur dipôle électrique D_x, qui se réduit à deux termes du fait de la nullité des éléments de matrice diagonaux :

$$\langle D_x\rangle = \alpha^*\beta\langle\varphi_\alpha|\, D_x\,|\varphi_\beta\rangle + \beta^*\alpha\langle\varphi_\beta|\, D_x\,|\varphi_\alpha\rangle$$

La formule (1-14) nous permet de trouver les éléments de matrice de D_x dans la représentation « tournante » :

$$\left.\begin{aligned}\langle\varphi_\alpha|\, D_x\,|\varphi_\beta\rangle &= \mathbf{e}^{i\frac{E_a}{\hbar}t}\langle\psi_a|\, D_x\,|\psi_b\rangle\,\mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\mathbf{e}^{-i\omega t}\\ &= d_{ab}\mathbf{e}^{-i\omega t} = d_{ab}[\cos\omega t - i\sin\omega t]\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}4)$$

et le résultat imaginaire conjugué pour l'autre élément de matrice. On en déduit :

$$\langle D_x \rangle = d_{ab}[(\alpha^*\beta + \beta^*\alpha)\cos\omega t - i(\alpha^*\beta - \beta^*\alpha)\sin\omega t]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\langle D_x \rangle = d_{ab}[u\cos\omega t - v\sin\omega t]\ ;} \tag{2-5}$$

u et v permettent de calculer le moment dipolaire électrique de l'atome et représentent respectivement les parties en phase et en quadrature par rapport au champ électrique de l'onde.

3) Losqu'on effectue en pratique une mesure macroscopique d'une grandeur G sur un échantillon, il est usuel et commode de la rapporter à l'unité de volume ; et c'est cette grandeur volumique G_{vol} qui figure dans les équations macroscopiques (*cf.* par exemple la polarisation diélectrique volumique dans les équations de Maxwell). Cette grandeur volumique correspond à la sommation sur tous les atomes de l'échantillon, que nous numérotons avec l'indice i :

$$G_{\text{vol}} = \sum_i \langle G_i \rangle = \sum_i (\alpha_i^*\alpha_i G_{\alpha\alpha} + \beta_i^*\beta_i G_{\beta\beta} + \alpha_i^*\beta_i G_{\alpha\beta} + \beta_i^*\alpha_i G_{\beta\alpha}) \tag{2-6}$$

l'indice i variant de 1 à n, où n est le nombre d'atomes dans l'unité de volume.

Si tous les atomes étaient identiques, il suffirait de multiplier par n la parenthèse de l'expression de droite ; ce serait le cas si les atomes étaient soumis seulement à l'action cohérente de l'onde électromagnétique. Mais on ne peut éviter dans la réalité l'effet de processus aléatoires qui perturbent les atomes à des instants différents (émission spontanée, collisions, ...). De ce fait les histoires « vécues » par les différents atomes ne sont pas identiques ; et les coefficients α_i et β_i de l'atome numéroté i ne sont pas forcément les mêmes que les coefficients α_j et β_j de l'atome numéroté j. La somme (2-6) ne se réduit donc pas à une multiplication par n. Pour la comparaison avec la théorie, il est commode d'exprimer le résultat en utilisant la valeur atomique moyenne dans l' échantillon

$$\overline{\langle G \rangle} = \frac{1}{n} G_{\text{vol}} = \frac{1}{n} \sum_i \langle G_i \rangle \tag{2-7}$$

Il faut donc calculer les valeurs moyennes sur l'ensemble des atomes, des variables obtenues en faisant les produits avec les quantités conjuguées

$$\overline{\alpha^*\alpha} = \frac{1}{n}\sum_i {\alpha^*}_i\alpha_i\ ; \quad \overline{\beta^*\beta} = \frac{1}{n}\sum_i {\beta^*}_i\beta_i\ ;$$
$$\overline{\alpha^*\beta} = \frac{1}{n}\sum_i {\alpha^*}_i\beta_i\ ; \quad \overline{\beta^*\alpha} = \frac{1}{n}\sum_i {\beta^*}_i\alpha_i\ ;$$

et les trois variables m, u, v introduites en (2-3) doivent être moyennées

$$\left.\begin{aligned} \overline{u} &= \frac{1}{n}\sum_i u_i = \overline{\alpha^*\beta} + \overline{\beta^*\alpha} \\ \overline{v} &= \frac{1}{n}\sum_i v_i = i\left(\overline{\alpha^*\beta} - \overline{\beta^*\alpha}\right) \\ \overline{m} &= \frac{1}{n}\sum_i m_i = \overline{\alpha^*\alpha} - \overline{\beta^*\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}8)$$

La signification physique de la variable $\overline{m}$ apparaît alors de manière simple : $\overline{m}$ est reliée à la différence des populations atomiques n_a et n_b, c'est-à-dire des nombres d'atomes par unité de volume qui sont respectivement dans l'état E_a et dans l'état E_b.

$$n\overline{m} = n\overline{\alpha^*\alpha} - n\overline{\beta^*\beta} = n_a - n_b \qquad (n_a + n_b = n) \qquad (2\text{-}9)$$

Cette nécessité de moyenner sur l'ensemble des atomes, pour faire une mesure, est la raison réelle qui nous oblige à utiliser les variables-produits. En effet, les phases aléatoires des variables α_i et β_i des atomes individuels conduisent à la nullité des valeurs moyennes de α_i et β_i séparément tandis que les produits avec les quantités conjuguées permettent d'éliminer ces phases aléatoires et d'obtenir des valeurs moyennes non nulles.

2.2 Expression de l'équation de Schrödinger avec les nouvelles variables

La description des phénomènes aléatoires sera l'objet du paragraphe suivant. Dans ce paragraphe nous transformons le système d'équations différentielles (1-13) sur les variables complexes α et β en un nouveau système d'équations différentielles sur les trois nouvelles variables réelles définies en (2-3). Il suffit d'écrire les deux équations imaginaires conjuguées de (1-13) :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha^*}{\mathrm{d}t} = -i\frac{\Omega_1}{2}\beta^* \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\beta^*}{\mathrm{d}t} = -i\frac{\Omega_1}{2}\alpha^* - i\delta\omega\beta^*$$

On explicite ensuite les dérivées de (2-3)

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha^*}{\mathrm{d}t}\alpha + \alpha^*\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\beta^*}{\mathrm{d}t}\beta - \beta^*\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$$

et de même pour $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.

On parvient alors facilement, dans les seconds membres de ces trois équations, à regrouper les produits $\alpha\alpha^*$, $\beta\beta^*$, $\alpha\beta^*$ et $\beta\alpha^*$, et faire apparaître les nouvelles variables (2-3), ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \delta\omega v \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\delta\omega u - \Omega_1 m \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \Omega_1 v \qquad (2\text{-}10)$$

Ces trois équations différentielles expriment l'action cohérente de l'onde électromagnétique sur l'atome à deux niveaux par l'intermédiaire des trois fonctions réelles u, v et m. Elles sont généralement plus commodes à utiliser que le système (1-13) pour deux raisons : (1) les équations (1-13) portent en fait sur quatre variables réelles (au lieu de trois) : les parties réelles et imaginaires des deux variables complexes α et β ; (2) il suffit de faire la moyenne des deux membres de chacune des équations (2-10) pour obtenir les équations portant sur les variables collectives, moyennées sur l'ensemble des atomes (2-8) :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = \delta\omega\overline{v} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = -\delta\omega\overline{u} - \Omega_1\overline{m} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}\overline{m}}{\mathrm{d}t} = \Omega_1\overline{v} \tag{2-11}$$

Remarque 2.1 – Nous avons introduit les variables de la matrice densité $\alpha\alpha^*$, $\beta\beta^*$, $\alpha\beta^*$ et $\beta\alpha^*$ directement dans la représentation « tournante ». Mais ce formalisme est très général, et nous aurions pu introduire directement les variables correspondantes a^*a, b^*b, a^*b et b^*a avant de faire le passage en représentation « tournante ». Nous aurions alors utilisé les trois variables réelles

$$\left.\begin{aligned} U &= a^*b + b^*a \\ V &= i(a^*b - b^*a) \\ m &= a^*a - b^*b = \alpha^*\alpha - \beta^*\beta \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

La variable m est la même que dans la représentation « tournante ». Il peut être utile de connaître les relations entre ces nouvelles variables « croisées » U, V et les variables u, v, définies en (2-3). Il suffit de reporter le changement de variables (1-10) dans (2-3) pour obtenir :

$$\left.\begin{aligned} u &= U\cos\omega t + V\sin\omega t \\ v &= -U\sin\omega t + V\cos\omega t \end{aligned}\right\} \quad \text{ou inversement} \quad \left.\begin{aligned} U &= u\cos\omega t - v\sin\omega t \\ V &= u\sin\omega t + v\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

Ces équations sont identiques à celles d'une transformation des coordonnées x et y entre deux repères tournant l'un par rapport à l'autre avec la vitesse angulaire ω.

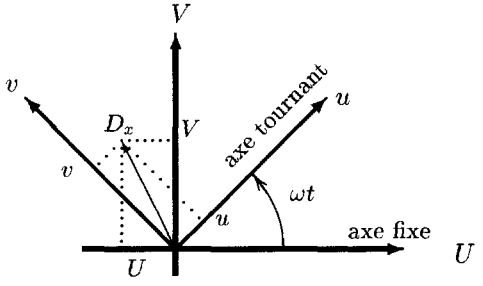


FIG. 2.1 – *Axes tournants dans le plan complexe. Le même vecteur du plan complexe qui représente le moment dipolaire électrique atomique D_x a les projections U et V sur les axes fixes, mais u et v sur les axes tournants à la vitesse angulaire ω.*

On peut les interpréter comme une rotation des axes dans le plan complexe : le même vecteur, moment dipolaire complexe, qui est représenté par le nombre complexe $U+iV$ projeté sur les axes fixes (U,V), est représenté par le nombre complexe $u+iv$ projeté sur les axes tournants (u,v) faisant l'angle ωt avec les axes fixes (*cf.* Fig. (2.1)). C'est la raison du nom « *passage en représentation tournante* » donné à la transformation (1-10) ; mais il ne faut pas chercher à donner une interprétation géométrique dans l'espace vrai à cette transformation.

Nous aurions pu calculer la valeur moyenne du dipôle électrique directement sans passer dans la représentation tournante ; nous aurions obtenu :

$$\langle D_x \rangle = a^* b\, d_{ab} + b^* a\, d_{ba} = d_{ab}(a^* b + b^* a) = d_{ab} U \tag{2-14}$$

Tenant compte de l'expression de U en fonction de u et v dans (2-13), on retrouve bien l'expression (2-5) obtenue au début de ce chapitre.

Si nous avions effectué la recherche des équations différentielles avec les variables U et V, nous aurions obtenu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= -\omega_0 V + \Omega_1 \sin\omega t\; m \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= +\omega_0 U - \Omega_1 \cos\omega t\; m \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= -\Omega_1 \sin\omega t\; U + \Omega_1 \cos\omega t\; V \end{aligned}\right\} \tag{2-15}$$

Les coefficients des équations différentielles en U et V sont des fonctions du temps. Le changement de variable (2-13) appliqué au système différentiel (2-15) permettrait de retrouver le système différentiel (2-10) ; mais ce serait assez compliqué. Le passage immédiat en représentation « tournante » (1-10) nous a permis d'obtenir directement le système différentiel (2-10) dont les coefficients sont des constantes, et qui sera donc plus facile à résoudre.

2.3 Description théorique de l'émission spontanée et des collisions

Parmi ces phénomènes aléatoires qui détruisent la cohérence de l'interaction électromagnétique, le plus important, parce qu'il est absolument inévitable, est l'émission spontanée de photons en dehors de l'onde incidente. C'est un échange d'énergie sous forme de photons isolés entre les atomes et tous les modes électromagnétiques de l'espace qui sont initialement vides d'énergie. La description théorique de cet échange ne peut être faite rigoureusement que dans le cadre de la quantification du champ électromagnétique, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à des ouvrages plus spécialisés (*cf.* « Photons et atomes (Processus d'interaction) »). Nous nous contenterons ici d'utiliser les résultats de cette description et de montrer leur accord avec les observations expérimentales de l'émission spontanée.

Les lampes fluorescentes courantes utilisent le phénomène d'émission spontanée par des atomes préalablement excités (généralement par une décharge

électrique). Si l'on peut arrêter brusquement le processus d'excitation, on observe la décroissance progressive de l'intensité lumineuse émise, qui reflète la diminution progressive exponentielle du nombre des atomes excités

$$n_b(t) = n_0 \mathbf{e}^{-At} = n_0 \mathbf{e}^{-t/\tau_b}$$

où A est la constante d'Einstein et $\tau_b = 1/A$ est la durée de vie de niveau excité E_b. On en tire l'équation différentielle à laquelle obéit la population excitée n_b et, par suite, la moyenne $\overline{\beta^*\beta} = n_b/n$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\beta^*\beta}) = -A\overline{\beta^*\beta} = -\frac{1}{\tau_b}\overline{\beta^*\beta} \tag{2-16}$$

conformément à la théorie quantique du champ électromagnétique.

Utilisant la condition de normalisation qui relie $\overline{\alpha^*\alpha}$ et $\overline{\beta^*\beta}$, on en déduit l'équation différentielle de $\overline{m}$:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\alpha^*\alpha}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\beta^*\beta}) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\beta^*\beta}) = +\frac{2}{\tau_b}\overline{\beta^*\beta} = \frac{1-\overline{m}}{\tau_b} \tag{2-17}$$

Ceci signifie que la variable $\overline{m}$ tend vers la valeur 1 (correspondant à $\overline{\beta^*\beta} = 0$ et $\overline{\alpha^*\alpha} = 1$) avec la constante de temps τ_b.

La variation des termes croisés $\overline{\alpha^*\beta}$ et $\overline{\beta^*\alpha}$ est moins évidente et ne pourra être justifiée expérimentalement qu'indirectement et plus tard. Nous devons admettre le résultat de la théorie quantique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\alpha^*\beta}) = \frac{1}{2\tau_b}\overline{\alpha^*\beta} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\beta^*\alpha}) = \frac{1}{2\tau_b}\overline{\beta^*\alpha} \tag{2-18}$$

Nous en déduisons pour les variables $\overline{u}$ et $\overline{v}$ définies en (2-8) :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2\tau_b}\overline{u} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2\tau_b}\overline{v} \tag{2-19}$$

c'est-à-dire que les variables croisées $\overline{u}$ et $\overline{v}$ tendent vers zéro avec une constante de temps double $2\tau_b$; ou encore avec une probabilité par unité de temps $1/2\tau_b$, moitié de la probabilité $1/\tau_b$ de variation de la variable $\overline{m}$ qui représente les populations atomiques. Une interprétation intuitive peut être donnée de ce résultat : l'évolution des termes croisés mélange l'évolution *spontanée* des atomes dans l'état excité E_b (probabilité spontanée $1/\tau_b$) et des atomes dans l'état fondamental E_a. (Probabilité spontanée nulle, puisque c'est un *état stable*) ; la probabilité d'évolution des termes croisés est la demi-somme des deux probabilités spontanées précédentes.

Dans beaucoup d'expériences effectuées sur des vapeurs atomiques, on doit aussi tenir compte de l'effet perturbateur des collisions subies par les atomes entre eux ou sur les parois du récipient qui les contient. Il est hors du propos de cet ouvrage d'expliquer les processus de collisions ; mais dans

la plupart des expériences, l'effet des collisions sur les trois variables $\overline{m}$, $\overline{u}$ et $\overline{v}$ se traduit par des équations différentielles très voisines de celles de l'émission spontanée, conduisant aussi à l'annulation des variables croisées $\overline{u}$ et $\overline{v}$. Ce n'est pas étonnant puisque, dans les deux cas, il s'agit d'une moyenne sur un grand nombre de processus de hasard. La différence essentielle entre les deux phénomènes tient au fait que les collisions perturbent les termes croisés plus rapidement que les populations, c'est-à-dire que la probabilité d'évolution de $\overline{u}$ et $\overline{v}$ est au contraire plus élevée que celle de $\overline{m}$. Autrement dit, les constantes de temps des équations en $\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\overline{v}/\mathrm{d}t$ sont plus courtes que celle de l'équation en $\mathrm{d}\overline{m}/\mathrm{d}t$, contrairement à ce qui se produit pour l'émission spontanée.

Comme il est classique, les probabilités de phénomènes aléatoires indépendants s'additionnent ; et l'on peut représenter l'action simultanée des collisions et de l'émission spontanée par le simple jeu des trois équations différentielles suivantes

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_2}\overline{u} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_2}\overline{v} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}\overline{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0 - \overline{m}}{\tau_1} \; ; \tag{2-20}$$

la probabilité $1/\tau_1$ est la somme de $1/\tau_b$ et d'une probabilité de collision ; la probabilité $1/\tau_2$ est la somme de $1/2\tau_b$ et d'une autre probabilité de collision plus élevée. Si l'émission spontanée est prépondérante, alors $\tau_2 > \tau_1$; si au contraire les collisions sont prépondérantes, $\tau_2 < \tau_1$. La valeur courante du paramètre m_0 est 1 ; mais dans certains types de collisions, on peuple partiellement l'état excité E_b et m_0 peut alors avoir une valeur différente, inférieure à 1.

Nous décrirons dans la deuxième partie (chapitres 8 et 9) des techniques de laboratoires, appelées *processus de pompage*, capables de modifier les populations atomiques et de produire des valeurs de m_0 différentes de l'unité, et pouvant même être négatives. Suivant la même règle d'addition des probabilités de phénomènes indépendants, la probabilité résultante $1/\tau_1$ pour les populations sera obtenue en faisant la somme de $1/\tau_b$ et de cette probabilité de pompage (*cf.* §9.5, remarque 9.4).

2.4 Équations différentielles de Bloch

Il ne nous reste plus qu'à combiner simultanément l'effet cohérent de l'onde, exprimé par les équations différentielles (2-11), et l'effet des phénomènes aléatoires (émission spontanée et collisions) exprimé par les équations (2-20). Comme il s'agit de moyennes sur de très grands nombres et comme ces effets sont absolument indépendants l'un de l'autre, il suffit

d'additionner les variations provoquées par l'un et par l'autre ; on obtient au total

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau_2}\overline{u} + \delta\omega\overline{v} \\
\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} &= -\delta\omega\overline{u} - \frac{1}{\tau_2}\overline{v} - \Omega_1\overline{m} \\
\frac{\mathrm{d}\overline{m}}{\mathrm{d}t} &= \Omega_1\overline{v} + \frac{m_0 - \overline{m}}{\tau_1}
\end{aligned}\right\} \quad \text{Système d'équations différentielles de Bloch} \tag{2-21}$$

Comme il est classique dans ce genre de système d'équations différentielles couplées, on remarque que le coefficient qui relie la dérivée d'une variable à une autre variable change de signe quand on permute les deux variables $(\pm\Omega_1, \pm\delta\omega)$.

On rencontrera, suivant les ouvrages consultés, des variations de signes dans les coefficients de ce système différentiel. Elles peuvent être dues à des définitions de signe opposé choisies pour les variables m et v (changements $m \leftrightarrow -m$ ou $v \leftrightarrow -v$) ; ou pour l'écart à la résonance $\delta\omega$ (changement $\omega - \omega_0 \leftrightarrow \omega_0 - \omega$), ou pour le paramètre Ω_1 qui représente l'amplitude du champ électrique de l'onde (changement $\Omega_1 \leftrightarrow -\Omega_1$, correspondant, *cf.* (1-4), à un déphasage de π sur le champ électrique).

On remarquera enfin que ce système différentiel est invariant dans les transformations suivantes :

- changements $\Omega_1 \leftrightarrow -\Omega_1$ et $m \leftrightarrow -m$ (m_0 change de signe avec m) ;
- changements $\delta\omega \leftrightarrow -\delta\omega$ et $u \leftrightarrow -u$;
- changements simultanés des signes des 3 variables m, u, et v ;

ainsi que dans les produits de ces trois transformations.

Bibliographie

[1] F. Bloch, Phys. Rev. **70**, 460 (1946).

[2] F. Bloch et I. Rabi, Rev. Mod. Phys. **17**, 237 (1946).

Chapitre 3

Solution stationnaire des équations de Bloch

DANS LE CHAPITRE précédent, nous avons soigneusement distingué par des notations différentes les variables m, u et v définies sur un atome, et les variables collectives $\overline{m}$, $\overline{u}$ et $\overline{v}$ définies comme valeurs moyennes sur un ensemble d'atomes. Dans la suite nous utiliserons le plus souvent les variables collectives ; et il sera exceptionnel que nous ayons besoin des variables individuelles. C'est pourquoi, comme dans tous les autres ouvrages, nous utiliserons désormais m, u et v pour désigner les variables collectives moyennées ; et le système des équations différentielles (2-21) de Bloch sera utilisé en supprimant toutes les barres horizontales au-dessus de m, u et v :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau_2}u + \delta\,\omega\,v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\delta\,\omega u - \frac{1}{\tau_2}v - \Omega_1 m \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \Omega_1 v + \frac{m_0 - m}{\tau_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}1)$$

3.1 Calcul de la solution stationnaire

Les coefficients figurant dans les équations différentielles (3-1) étant tous constants, cela rend possible une solution où les trois fonctions m, u et v sont constantes. Nous recherchons cette solution particulière : si les trois fonctions sont constantes leurs trois dérivées par rapport au temps sont nulles et le système de trois équations différentielles (3-1) se réduit à un système

algébrique de trois équations à trois inconnues

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\tau_2}u + \delta\omega\, v &= 0 \\ +\delta\omega\, u + \frac{1}{\tau_2}v + \Omega_1 m &= 0 \\ -\Omega_1 v + \frac{1}{\tau_1}m &= \frac{m_0}{\tau_1} \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

L'existence d'un terme indépendant des inconnues constant et non nul au second membre de la troisième équation permet d'obtenir des solutions différentes de zéro. La solution de ce système d'équations est très simple ; sans utiliser les déterminants, il suffit d'exprimer u et m en fonction de v dans la première et la dernière équation

$$u = \delta\omega\tau_2 v$$

$$m = m_0 + \Omega_1\tau_1 v$$

et de les reporter dans la deuxième équation, pour obtenir

$$v\left[\frac{1}{\tau_2} + \delta\omega^2\tau_2 + \Omega_1^2\tau_1\right] + \Omega_1 m_0 = 0$$

Ayant trouvé la valeur de v, on en déduit celles des deux autres variables. Nous affectons de l'indice S ces solutions stationnaires :

$$\boxed{\begin{aligned} u_S &= -m_0\frac{\Omega_1\delta\omega\tau_2^2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} = \delta\omega\tau_2\cdot v_S \\ v_S &= -m_0\frac{\Omega_1\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} \\ m_S &= m_0\frac{1+\delta\omega^2\tau_2^2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} = m_0\frac{1}{1+\dfrac{\Omega_1^2\tau_1\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}} \end{aligned}} \tag{3-3}$$

On rappelle que généralement le paramètre $m_0 = 1$ et que $\Omega_1 = \dfrac{d_{ab}}{\hbar}\mathcal{E}_1$. Plutôt que de considérer m_S, il sera souvent commode de considérer la quantité $(m_0 - m_S)$ qui représente dans le cas général la partie variable de la population de l'état supérieur E_b :

$$\begin{aligned} (m_0 - m_S) &= -\Omega_1\tau_1 v_S = m_0\frac{\Omega_1^2\tau_1\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} \\ \text{avec } (\beta\beta^*)_S &= \frac{1-m_S}{2} = \frac{1-m_0}{2} + \frac{m_0-m_S}{2} \end{aligned} \tag{3-4}$$

Pour comprendre la signification physique de ces solutions constantes, il faut se rappeler que les variables u et v ont été introduites, pour faciliter la résolution mathématique des équations différentielles. Mais pour interpréter le résultat d'une expérience il faudra revenir aux variables U et V définies en (2-12) à partir des coefficients $a(t)$ et $b(t)$ de la fonction d'onde (1-5) avant le changement de représentation. D'après les formules de changement de variables (2-13), on voit que : aux valeurs constantes de u et v correspondent pour les variables U et V des fonctions dépendant sinusoïdalement du temps. Mais les amplitudes de ces sinusoïdes sont constantes, et l'on les appelle *solutions stationnaires*.

Seule la grandeur m, correspondant à la différence des populations, a une valeur constante m_S. C'est elle que nous comparerons en premier avec l'expérience dans le paragraphe suivant. Nous rechercherons ensuite la signification physique des variables croisées. Enfin nous étudierons en détail la variation avec la fréquence de l'onde de ces solutions stationnaires u_S, v_S et m_S (*cf.* Fig. 3.2) ; pour l'instant, remarquons seulement que le terme $\delta\omega^2\tau^2$ dans le dénominateur commun des trois grandeurs conduit à un effet important au voisinage de la valeur $\delta\omega = 0$: *on observe expérimentalement cet effet résonnant lorsque ω est voisin de ω_0.*

Sans doute la solution stationnaire n'est-elle, mathématiquement parlant, qu'une solution particulière du système différentiel (3-1). Mais nous verrons plus loin (chapitre 5) que *la solution générale de ce système est la somme de cette solution stationnaire et d'une solution transitoire, amortie avec une constante de temps de l'ordre de τ_1 ou τ_2.* C'est-à-dire qu'après une durée de plusieurs τ_1 ou τ_2, la solution transitoire est devenue pratiquement nulle, et que seule reste la solution stationnaire. C'est cette solution stationnaire que l'on observe dans les expériences les plus courantes.

En définitive, lorsque nous tenons compte dans les équations différentielles de l'effet aléatoire des collisions et de l'émission spontanée à côté de l'effet cohérent de l'onde, étudié au chapitre 1, nous obtenons des solutions bien différentes : l'oscillation de Rabi du chapitre 1 fait place à des solutions qui sont beaucoup plus compliquées dans leur généralité (*cf.* chapitre 5), mais parmi lesquelles nous trouvons cette solution stationnaire, relativement simple, qui correspond bien à la description phénoménologique d'Einstein et qui permet d'interpréter un grand nombre d'expériences.

3.2 Les populations atomiques. Comparaison avec le modèle des probabilités de transition

Les expériences d'interaction entre atomes et faisceaux lumineux sont décrites le plus souvent en utilisant les hypothèses phénoménologiques introduites par Einstein dans son mémoire de 1917, qui permettent d'obtenir les équations de probabilités (en anglais « rate equation »). Elles sont

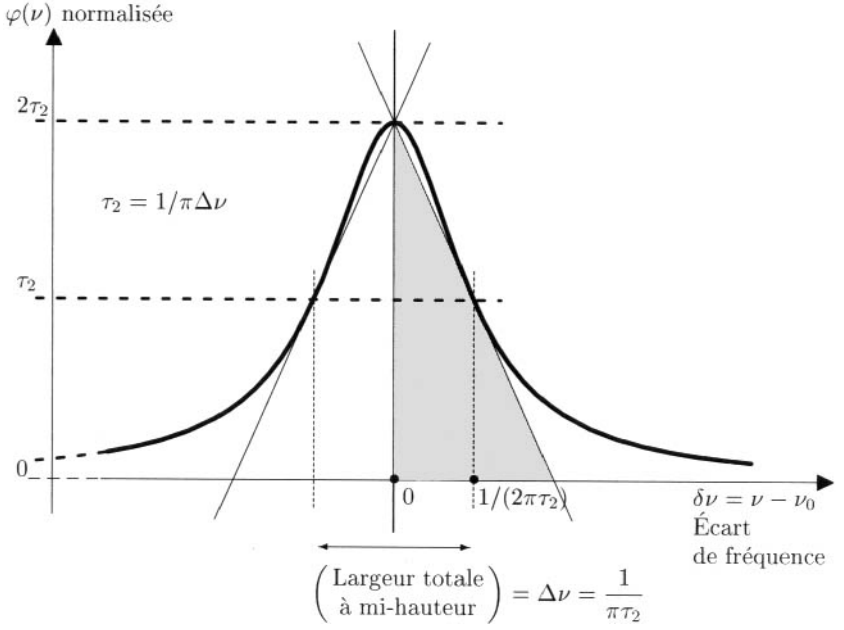


FIG. 3.1 - *Variation avec la fréquence de la probabilité de transition par seconde. La fonction $\varphi(\nu)$ est normalisée en sorte que la surface délimitée par la courbe et l'axe des fréquences soit égale à l'unité (on calcule que cette surface vaut π fois celle du triangle gris, délimité par la tangente à mi-hauteur passant par le sommet).*

exposées au chapitre 8, au début de la partie II consacrée au fonctionnement des lasers. Nous rappelons par exemple la probabilité d'absorption

$$-\frac{1}{n_a}\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = B_{12}\varphi(\nu)w \qquad (cf.\ \text{formule (8-1)})$$

où w est la densité d'énergie de l'onde et $\varphi(\nu)$ la forme de raie normalisée des probabilités. Nous avons choisi au chapitre 8 de garder les notations habituelles des coefficients phénoménologiques B_{12} et B_{21} ; on fera facilement la correspondance $1 \leftrightarrow a$ et $2 \leftrightarrow b$ (*cf.* Fig. 1.1).

L'application laser nous a conduit dans la partie II à choisir, pour caractériser un échantillon atomique, une variable qui est la différence pondérée des populations totales n_a du niveau E_a et n_b du niveau E_b (ces deux niveaux étant le plus souvent dégénérés) :

$$D = n_b - \frac{g_b}{g_a}n_a \qquad (cf.\ \text{formule (8-9)})$$

Mais dans cette première partie, nous nous limitons aux systèmes où deux

états quantiques seulement interviennent, ce qui est équivalent à deux niveaux non dégénérés E_a et E_b dont les poids statistiques sont égaux à l'unité : $g_a = g_b = 1$, et par suite, les deux constantes d'Einstein sont aussi égales ($B_{12} = B_{21}$). Nous avons calculé au chapitre 8 la valeur stationnaire D_S atteinte au bout d'un temps suffisamment long sous une irradiation d'intensité constante, (*cf.* formule (8-12)) :

$$(n_a - n_b)_S = -D_S = n\frac{A_{21}}{A_{21} + 2B\varphi(\nu)w} = n\frac{1}{1 + \tau_b B\varphi(\nu)\varepsilon_0\mathcal{E}_1^2} \tag{3-5}$$

nous avons, dans la dernière expression, remplacé la densité volumique d'énergie lumineuse w par son expression calculée en fonction de l'amplitude du champ électrique. $w = \varepsilon_0\mathcal{E}_1^2/2$.

Nous comparons ce résultat (3-5) avec la valeur de m_S calculée quantiquement en (3-3), en tenant compte du fait que l'équation phénoménologique ayant été établie en l'absence de collisions, il faut faire la même hypothèse dans les équations quantiques (3-3) ($\tau_1 = \tau_b$ et $m_0 = 1$) qui deviennent

$$(n_a - n_b)_S = nm_S = n\frac{1}{1 + \dfrac{\Omega_1^2\tau_1\tau_2}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2}} = n\frac{1}{1 + \tau_b\dfrac{\tau_2}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2}\left(\dfrac{d_{ab}}{\hbar}\right)^2\mathcal{E}_1^2} \tag{3-6}$$

Le résultat phénoménologique (3-5) et le résultat quantique (3-6) conduisent à la même variation en fonction de $\mathcal{E}_1^2$, carré du champ électrique, c'est-à-dire en fonction de la densité d'énergie $w = \varepsilon_0\mathcal{E}_1^2/2$. Mais, de plus le calcul quantique nous a permis d'obtenir la forme exacte de la dépendance en fréquence (ν ou $\omega = 2\pi\nu$) qui reste indéterminée dans les hypothèses d'Einstein. Nous en déduisons la forme de raie normalisée (*cf.* Fig. 3.1)

$$\varphi(\nu) = \frac{2\tau_2}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2} = \frac{2\tau_2}{1 + (2\pi\tau_2\delta\nu)^2} \quad \text{avec } \delta\nu = \nu - \nu_0 = \nu - \frac{Eb - Ea}{h} \tag{3-7}$$

On vérifie en effet facilement (avec le changement de variable $x = 2\pi\tau_2\delta\nu$) que

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^\infty \frac{2\tau_2}{1 + (2\pi\tau_2\delta\nu)^2}\,\mathrm{d}(\delta\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi\tau_2\nu_0}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \\ \simeq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\operatorname{Arctan} x\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 1\end{aligned}\right\}$$

L'égalité de (3-5) et (3-6) nous permet alors de calculer la constante B des probabilités phénoménologiques (ici $B_{12} = B_{21} = B$) :

$$B = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d_{ab}}{\hbar}\right)^2 \tag{3-8}$$

Remarque 3.1 – Rappelons les conventions adoptées dans le calcul de la formule (3-8) : Nous avons choisi dans la définition de B_{12} la convention d'Einstein $\int \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 1$. Certains auteurs définissent une fonction $\varphi'(\omega)$ qui est 2π fois plus petite parce que définie par $\int \varphi'(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Ils obtiennent alors un coefficient B'_{12} qui est 2π fois plus grand.

Nous avons adopté la définition de l'élément de matrice d_{ab} à partir de la composante D_x de l'opérateur dipolaire électrique. Certains auteurs définissent l'élément de matrice d'_{ab} à partir du module du vecteur $\overrightarrow{D}$; cela modifie d'un facteur 3 la formule ci-dessus parce que : $\langle|\|\overrightarrow{D}\|\rangle^2 = \langle|D_x|\rangle^2 + \langle|D_y|\rangle^2 + \langle|D_z|\rangle^2$.

Certains auteurs préfèrent exprimer les probabilités de transition par seconde en remplaçant les coefficients d'Einstein par la section efficace d'interaction $\sigma(\nu)$ entre l'onde et les atomes. Nous donnons au §8.2 la définition de la section efficace et sa relation avec le coefficient phénoménologique , soit

$$\sigma(\nu) = \frac{h}{\lambda} B\varphi(\nu) \qquad (cf.\ \text{formule (8-8)})$$

La section efficace maximum au centre de la raie vaut donc :

$$\sigma(\nu_0) = \frac{h}{\lambda_0} B\varphi(\nu_0) = 2\tau_2 \frac{h}{\lambda_0} B$$

On peut encore exprimer le coefficient B en fonction de la probabilité A de l'émission spontanée qui, dans un cas à deux niveaux, est égale à l'inverse de la durée de vie de l'état supérieur E_b. Mais attention ! dans ce cas particulier où seuls deux états quantiques sont considérés, les coefficients B et A ne concernent que les transitions entre ces deux états, et la théorie quantique de l'émission spontanée conduit à une relation générale entre ces deux coefficients A et B (*cf.* chapitre 19) :

$$B = \frac{3\lambda_0^3}{8\pi h} A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma(\nu_0) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi}\left(\frac{A\tau_2}{2}\right)} \tag{3-9}$$

En l'absence de collisions ou autres causes d'élargissement, le coefficient sans dimension entre parenthèses vaut 1 ; c'est-à-dire que $\sigma(\nu_0) = 3\lambda_0^2/2\pi \simeq \lambda_0^2/2$.

Ce résultat donne une bonne image de l'importance de l'interaction électromagnétique résonnante : tout se passe comme si chaque atome arrêtait tous les photons qui passent dans un cercle de diamètre voisin de λ_0, 1000 fois plus large que la dimension réelle de l'atome (3000 Å contre quelques Å), dont la surface est 10^6 fois supérieure à celle de l'atome. On se rappellera que la section efficace est reliée de manière très directe au coefficient d'absorption couramment mesuré par la formule (8-16) $K(\nu) = n\sigma(\nu)$.

On notera la différence d'un facteur 3 entre la relation (3-9) liant les coefficients A et B et la classique relation (8-4) liant les coefficients d'Einstein. Ces relations ne sont cependant pas contradictoires, parce que le coefficient B défini dans ce chapitre en (3-8) et les coefficients B_{nm} d'Einstein ne s'appliquent pas aux mêmes populations atomiques : le coefficient B s'applique à la population d'un seul état quantique, tandis que les coefficients B_{nm} s'appliquent à la population globale d'un niveau d'énergie E_n dégénéré, c'est-à-dire à la somme des populations des g_n états quantiques distincts ayant la même énergie E_n (explications plus détaillées aux chapitres 8 et 19).

Les règles de sélection interdisant les transitions optiques entre deux niveaux d'énergie dont les nombres quantiques de moment cinétique sont nuls (soit $J_a = J_b = 0$), dans la réalité, un des deux niveaux d'une transition optique est nécessairement dégénéré. Cependant le modèle à deux états quantiques s'applique directement dans deux types d'expériences :

1) le niveau inférieur est non dégénéré ($J_a = 0$) et la polarisation de l'onde incidente sélectionne un seul sous-niveau du niveau d'énergie supérieur dégénéré ;

2) l'application d'un champ magnétique suffisamment intense lève la dégénérescence des niveaux en écartant nettement les énergies des différents sous-niveaux Zeeman, en sorte que la condition de résonance (conservation de l'énergie) n'est vérifiée qu'entre un seul sous-niveau Zeeman du niveau inférieur et un seul sous-niveau Zeeman du niveau supérieur.

3.3 La polarisation atomique. Absorption et dispersion

Lorsque nous avons introduit les variables u et v au chapitre précédent, nous avons démontré qu'elles permettent de calculer la valeur moyenne du moment dipolaire électrique D_x de l'atome :

$$\langle D_x \rangle = d_{ab}\big(u\cos\omega t - v\sin\omega t\big) \qquad (cf.\ \text{équation (2-5)})$$

Il suffit maintenant de remplacer u et v dans cette expression par les valeurs u_S et v_S obtenues en (3-3). Tirons les conclusions du calcul :

(1) lorsque l'atome est dans un état d'énergie définie E_a ou E_b (état propre du hamiltonien H_0), nous avons vu que son moment dipolaire électrique est nul. Mais lorsque l'atome est soumis à l'onde résonnante $\mathcal{E}_1$, il est transformé et décrit par un état $|\psi(t)\rangle$ qui est une superposition cohérente des deux états $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$; alors le moment dipolaire n'est plus nul et sa valeur oscille à la fréquence de l'onde, mais avec un déphasage ;

(2) les variables croisées u et v définies au chapitre précédent ont des significations physiques précises : u représente la partie du dipôle atomique qui est en phase avec l'onde ; v représente la partie du dipôle qui est déphasée, en quadrature par rapport à l'onde. Nous pouvons pousser plus loin la comparaison avec les mesures expérimentales effectuées sur des **milieux dilués (vapeurs)**.

En physique expérimentale macroscopique, on définit la polarisation volumique $\overrightarrow{P}$ d'un diélectrique qui intervient dans les équations de Maxwell. S'il y a n atomes dans l'unité de volume, la composante P_x est donnée par

$$P_x = n\overline{\langle D_x \rangle} = nd_{ab}\big(u_S\cos\omega t - v_S\sin\omega t\big) \qquad (3\text{-}10)$$

Dans le cas des diélectriques linéaires et en régime sinusoïdal permanent, on définit la susceptibilité diélectrique χ comme le coefficient de proportionnalité

entre la polarisation volumique et le champ électrique appliqué : $\overrightarrow{P} = \chi\varepsilon_0 \overrightarrow{E}$. Lorsque le champ est alternatif, il se produit un déphasage entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{E}$ dont on rend compte en régime *stationnaire* en introduisant une susceptibilité complexe qui s'écrit :

$$\begin{cases} \chi' - i\chi'' & \text{si le champ complexe est écrit sous la forme } \mathcal{E}_1 \mathrm{e}^{+i\omega t} \\ \chi' + i\chi'' & \text{si le champ complexe est écrit sous la forme } \mathcal{E}_1 \mathrm{e}^{-i\omega t} \end{cases}$$

Avec les deux conventions, on obtient le même résultat réel pour une mesure :

$$P_x = \chi'\varepsilon_0\mathcal{E}_1 \cos\omega t + \chi''\varepsilon_0\mathcal{E}_1 \sin\omega t \tag{3-11}$$

puisque $\sin\omega t = \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, P_x est toujours en déphasage retard par rapport à $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_1 \cos\omega t$. Le rapprochement des équations (3-10) et (3-11) en régime stationnaire permet le calcul des deux termes de la susceptibilité (partie réelle χ' et partie imaginaire χ'') de l'échantillon d'atomes étudié :

$$\chi' = n\frac{d_{ab}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{u_S}{\mathcal{E}_1} = nm_0 \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar} \times \frac{-\delta\,\omega\tau_2}{1 + \delta\,\omega^2\tau_2^2 + \Omega_1^2\tau_1\tau_2} = -\delta\,\omega\tau_2\chi'' \quad \text{(dispersion)}$$

$$\chi'' = n\frac{d_{ab}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{-v_S}{\mathcal{E}_1} = nm_0 \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar} \times \frac{1}{1 + \delta\,\omega^2\tau_2^2 + \Omega_1^2\tau_1\tau_2} = \chi_0'' \frac{1}{1 + \delta\,\omega^2\tau_2^2 + \Omega_1^2\tau_1\tau_2} \quad \text{(absorption)}$$

(3-12)

Dans les conditions courantes $m_0 = 1$; nous avons maintenu cependant m_0 en vue des conditions décrites dans la partie II où la valeur de m_0 est modifiée. L'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ disparaît au numérateur de u_S et v_S lorsqu'on remplace le paramètre Ω_1 par sa valeur $d_{ab}\mathcal{E}_1/\hbar$ (on vérifie que ces expressions sont effectivement sans dimension puisque $\hbar/\tau_2$ a les dimensions d'une énergie, et $\dfrac{nd_{ab}^2}{\varepsilon_0}$ a la dimension $\dfrac{1}{\varepsilon_0} \times \dfrac{[Q^2]}{[L]}$, qui est aussi celle d'une énergie). Mais attention ! L'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ électrique est toujours présente implicitement dans le paramètre Ω_1^2 au dénominateur : χ' et χ'' ne sont indépendants de $\mathcal{E}_1$ que si $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$.

Nous avons ainsi calculé quantiquement l'indice de réfraction $n_r = \sqrt{1+\chi'}$ du gaz atomique étudié et son coefficient d'absorption $K = (2\pi/\lambda)\chi''$, qui permet de calculer la puissance lumineuse transmise à travers l'épaisseur z : $P(z) = P(0)\mathrm{e}^{-Kz}$.

Dans les milieux *condensés*, liquides ou solides, on ne peut pas négliger l'action du milieu sur lui-même, d'une part ; d'autre part, les atomes sont soumis à de fortes perturbations et notre modèle d'atome à deux niveaux est trop simple pour pouvoir représenter valablement la réalité ; les formules

d'indices de réfraction sont alors plus compliquées. Mais les formules (3-12) peuvent être vérifiées dans des vapeurs monoatomiques. Sans doute l'indice de réfraction d'un gaz est très proche de l'unité et ne saurait être mesuré avec les méthodes habituelles de l'optique géométrique ; pour l'air, dans les conditions normales par exemple, $n_r - 1$ est compris entre 10^{-3} et 10^{-4}. Il peut cependant être mesuré avec précision en faisant le vide dans un tube interposé sur l'un des deux bras d'un interféromètre à deux ondes (Jamin, Michelson) et en comptant le nombre de franges que l'on fait ainsi défiler.

Remarque 3.2 - Pour mémoire, rappelons rapidement le calcul de propagation d'ondes planes sinusoïdales dans un diélectrique selon une direction $0z$ perpendiculaire à la polarisation $0x$ du champ électrique ; en nous restreignant au cas des milieux dilués,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_r}{c^2} \omega^2 \mathcal{E}_1 \mathbf{e}^{-i\omega t} \qquad \text{(seconde convention } \mathbf{e}^{-i\omega t})$$

On définit un indice de réfraction complexe $n_r + i\kappa$ tel que :

$$(n_r + i\kappa)^2 = n_r^2 - \kappa^2 + 2in_r\kappa = \varepsilon_r = 1 + \chi' + i\chi''$$

dans le cas d'un milieu dilué ($\chi', \chi'', \kappa \ll 1$; $n_r \simeq 1$), on obtient :

$$\begin{cases} 1 + \chi' = n_r^2 - \kappa^2 \simeq n_r^2, & \text{soit } n_r \simeq \sqrt{1 + \chi'} \\ \chi'' = 2n_r\kappa \simeq 2\kappa. \end{cases}$$

On en déduit le champ électrique de l'onde :

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_1 \mathbf{e}^{-i\omega t} \mathbf{e}^{i(n_r + i\kappa)\frac{\omega}{c} z} = \mathcal{E}_1 \mathbf{e}^{-i\omega\left(t - \frac{n_r z}{c}\right)} \mathbf{e}^{-\kappa \frac{\omega}{c} z}$$

On retrouve bien la vitesse de phase c/n_r avec l'indice $n_r = \sqrt{1 + \chi'} \simeq 1 + \dfrac{\chi'}{2}$ et la diminution de la puissance de l'onde suivant la loi $\mathcal{E}_1^2 \mathbf{e}^{-Kz} = \mathcal{E}_1^2 \mathbf{e}^{-2\kappa \frac{\omega}{c} z}$ avec le coefficient d'absorption $K = 2\kappa \dfrac{\omega}{c} = \chi'' \dfrac{\omega}{c}$.

En l'absence de saturation, au centre de la résonance on en déduit la constante :

$$\chi_0'' = \frac{c}{\omega} K(\nu_0) = \frac{\lambda}{2\pi} n\sigma(\nu_0) = n \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \left(\frac{A\tau_2}{2}\right) \tag{3-13}$$

(en utilisant (8-16) et (3-9) ; ici n est la densité atomique ; dans ce calcul on a supposé $m_0 = 1$, dans le cas général il faudrait remplacer n par nm_0).

Le calcul de propagation rappelé ci-dessus suppose que χ' et χ'' sont des constantes indépendantes de l'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ électrique de l'onde. Si le champ est trop intense ($\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \gtrsim 1$) cette hypothèse n'est plus réaliste, et les calculs deviennent plus compliqués. La relation entre la polarisation P_x et le champ ne peut plus être considérée comme linéaire ; et l'on parle alors d'optique non linéaire. Ces formules (3-12) sont en toute rigueur des formules d'optique non linéaire.

Remarque 3.3 – On retrouverait la même expression du coefficient d'absorption en calculant la puissance donnée au dipôle électrique par unité de volume (3-11) :

$$P_{\text{abs}} = \overrightarrow{E} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t} = E_x \frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_1^2 \cos\omega t.\omega(-\chi' \sin\omega t + \chi'' \cos\omega t)$$

$$P_{\text{abs}} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_1^2 \omega(-\chi' \cos\omega t \sin\omega t + \chi'' \cos^2\omega t)$$

La valeur moyenne sur le temps du premier terme est nulle, tandis que la valeur moyenne $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ conduit à une puissance moyenne $\overline{P}_{\text{abs}}$, absorbée par unité de volume, proportionnelle à χ'' :

$$\overline{P}_{\text{abs}} = \frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}_1^2}{2} \omega \chi'' = w.\omega\chi'' \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{-1}{P}\frac{\delta P}{\delta z} = \frac{1}{Swc}\frac{\overline{P}_{\text{abs}} S \delta z}{\delta z} = \frac{\omega}{c}\chi''$$

À partir de cette formule, on pourrait encore retrouver le calcul du coefficient $B_{12} = B_{21} = B$ de la description phénoménologique ; on écrirait dans cette description le nombre de photons absorbés par seconde, multiplié par leur énergie $\hbar\omega$:

$$\overline{P}_{\text{abs}} = B\varphi(\nu) w (n_a - n_b)\hbar\omega = B\varphi(\nu) w . n m_S \hbar\omega$$

En égalant les deux expressions de $\overline{P}_{\text{abs}}$, le produit $w\omega$ s'élimine, et il vient :

$$B\varphi(\nu) m_S \hbar = \frac{\chi''}{n} = \frac{d_{ab}}{\varepsilon_0}\frac{|v_S|}{\mathcal{E}_1} \quad \text{(d'après (3-12))}$$

lorsqu'on remplace m_S et v_S par leurs expressions (3-3), leur dénominateur commun s'élimine, et en tenant compte de $\Omega_1 = \dfrac{d_{ab}\mathcal{E}_1}{\hbar}$, il vient :

$$B\varphi(\nu)\left(1 + \delta\omega^2 \tau_2^2\right)\hbar = \frac{d_{ab}^2 \tau_2}{\varepsilon_0 \hbar}$$

on retrouve bien l'allure de la fonction $\varphi(\nu)$ (3-7) ; et la normalisation imposant son numérateur $2\tau_2$, on retrouve bien l'expression (3-8) pour B.

3.4 Courbes de résonance en fréquence. Élargissement de puissance

Maintenant que nous connaissons la signification physique des trois variables u, v et m, et la possibilité de les mesurer, il peut être utile d'étudier plus en détail leurs variations en fonction de l'écart à résonance $\delta\omega = \omega - \omega_0$. Ces courbes de variation sont tracées sur la figure 3.2 à partir des formules (3-3).

La différence des populations $n_a - n_b = n m_S$ est étroitement corrélée avec le nombre de photons absorbés par les atomes (3-4) ; il n'est donc par surprenant que la variation de m_S ou plus précisément de $(m_0 - m_S)$ ait la même forme que la variation de la variable v_S qui représente l'absorption de l'énergie de l'onde incidente. Ce sont des courbes lorentziennes (fonctions

en $1/(1+x^2)$) dont la forme est caractérisée par le fait que les tangentes à mi-hauteur se croisent au sommet de la courbe (*cf.* Fig. 3.2).

On calcule facilement l'écart $\delta\omega_{1/2}$ pour lequel les fonctions v_S ou $(m_0 - m_S)$ ne sont plus que la moitié de leur valeur au centre de la résonance ; on en déduit la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\omega = 2\delta\omega_{1/2} = \frac{2}{\tau_2}\sqrt{1+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} \tag{3-14}$$

Avec les lampes de laboratoire courantes, l'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ électrique est assez faible pour que $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$. On obtient alors la largeur *naturelle*

$$\Delta\omega_N = \frac{2}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_b} \tag{3-15}$$

(en l'absence de collisions et de toute autre cause d'élargissement). On vérifie facilement que cette largeur en fréquence correspond à l'incertitude en fréquence résultant du principe d'indétermination de Heisenberg : l'état atomique $|\psi_b\rangle$ ayant une durée de vie limitée τ_b, son énergie E_b n'est connue qu'avec une indétermination ΔE_b telle que $\Delta E_b \times \tau_b \approx \hbar$. On en déduit, sur la fréquence centrale $\omega_0 = (E_b - E_a)/\hbar$, une indétermination $\Delta\omega_0 = \Delta E_b/\hbar \approx 1/\tau_b$.

Mais les nouveaux lasers peuvent produire maintenant des ondes monochromatiques très intenses et l'amplitude $\mathcal{E}_1$ du champ électrique devient dans ce cas assez importante pour que $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gtrsim 1$. On observe alors un élargissement de la raie selon la formule (3-14), appelé *élargissement de puissance* ou élargissement d'intensité. Pour des intensités lumineuses monochromatiques, exceptionnellement élevées, on peut obtenir $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gg 1$ et la largeur des courbes est alors pratiquement déterminée par ce phénomène :

$$\Delta\omega \simeq 2\Omega_1\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}$$

L'élargissement de puissance est alors proportionnel à l'amplitude du champ électrique $\mathcal{E}_1$, c'est-à-dire à la racine carrée de la puissance lumineuse. C'est bien ce qui est vérifié dans les expériences. Cet élargissement peut être interprété comme une conséquence du phénomène de saturation (*cf.* remarque au paragraphe suivant).

La variable u_S qui détermine l'indice de réfraction s'annule et change de signe lorsqu'on passe par la résonance. On peut vérifier que u_S est maximum (du côté positif) ou minimum (du côté négatif) pour les écarts $\mp\delta\omega_{1/2}$ calculés précédemment. Il est alors facile de calculer cette valeur absolue maximum :

$$\text{si } m_0 = 1, \quad |u_M| = \frac{\Omega_1\tau_2}{2\sqrt{1+\Omega_1^2\tau_1\tau_2}} \tag{3-16}$$

Lorsque l'écart à résonance devient grand ($|\delta\omega| \gg \delta\omega_{1/2}$), la valeur absolue $|u_S|$ décroît comme $1/|\delta\omega|$, c'est-à-dire beaucoup plus lentement que les

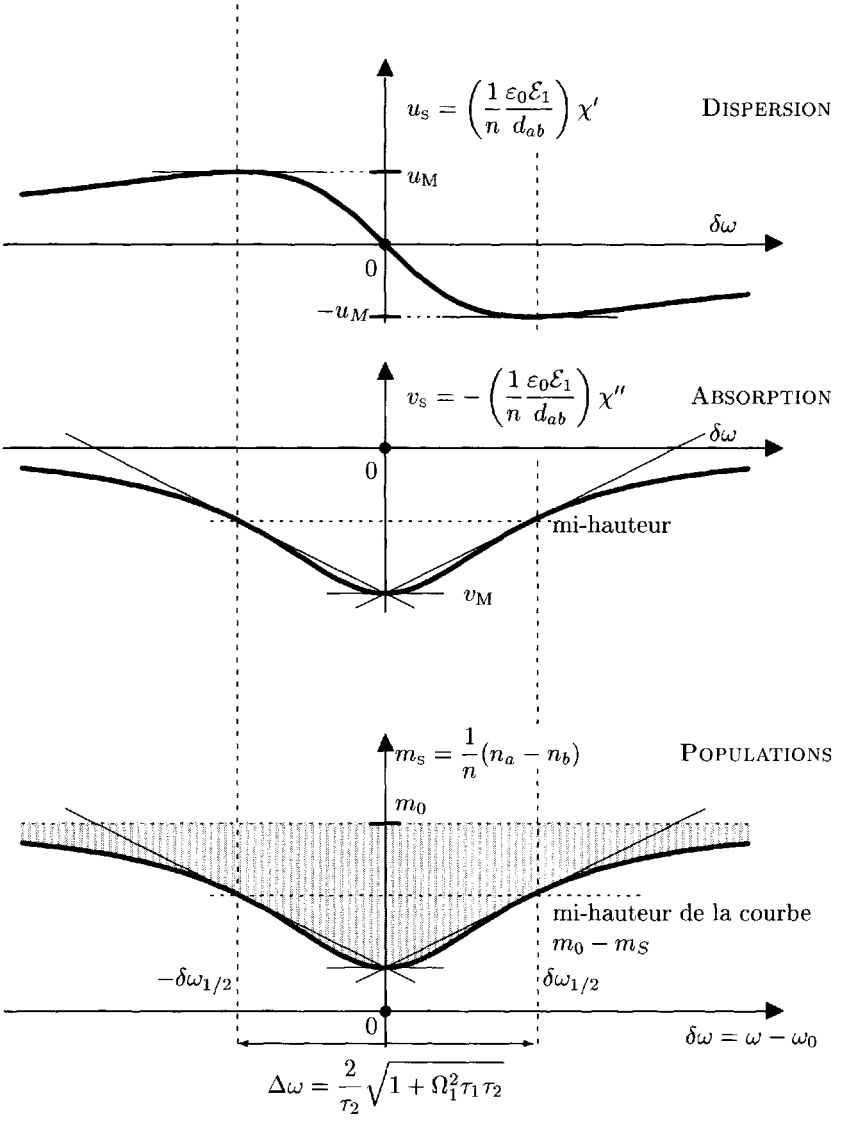


FIG. 3.2 – *Courbes de résonance de la solution stationnaire : variation du dipôle atomique u_S et v_S et de la différence de population m_S en fonction de l'écart à résonance $\delta\omega$. Le remplissage en gris de la courbe inférieure figure la quantité $m_0 - m_S$ proportionnelle à la population de l'état supérieur.*

deux autres variables $|v_S|$ et $(m_0 - m_S)$ qui décroissent comme $1/\delta\omega^2$. Cette différence de comportement asymptotique entre u_S et v_S permet de trouver

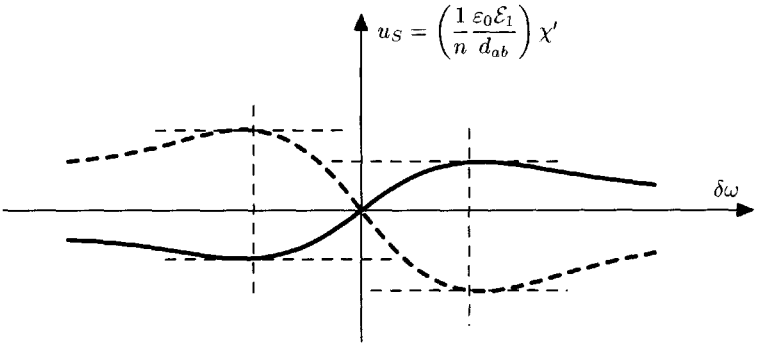


FIG. 3.2bis. *Courbe de résonance pour la variable u_S (Dispersion) dans le cas d'un milieu inversé ($m_0 < 0$). En tireté la courbe normale (Fig. 3.2).*

sur l'axe des fréquences des zones de transparence (v_S et $\chi'' \simeq 0$) où l'on peut observer une dispersion importante ($\chi' \neq 0$ et indice de réfraction $n_r \neq 1$). Expérimentalement, la mesure de l'indice de réfraction d'une vapeur ne peut être faite que si l'on travaille avec un écart de la résonance $\delta\omega$ assez grand pour assurer une transparence suffisante, soit : $|\delta\omega|$ très supérieur à l'élargissement Doppler moyen. Dans ces conditions les fluctuations de la valeur de $\delta\omega$ d'un atome à l'autre (à cause de leurs vitesses différentes) deviennent négligeables ; et les variations d'indice mesurées reflètent bien les ailes de la courbe u_S aussi bien en dessous qu'au-dessus de la fréquence de résonance.

Remarque 3.4 – Dans la deuxième partie de cet ouvrage, lorsque nous étudions le fonctionnement des lasers (chapitre 8 et suivants), nous décrivons les méthodes de « pompage » qui permettent de modifier les populations des niveaux atomiques et de les inverser ; si le pompage est permanent, on obtient un équilibre dynamique entre le pompage et la relaxation spontanée (émission spontanée, collision, etc.) conduisant, en l'absence d'irradiation lumineuse résonnante, à une population moyenne de l'état excité n_{b_0} constante supérieure à celle de l'état fondamental n_{a_0} :

$$n_{b_0} > n_{a_0} \qquad \text{soit } m_0 = n_{a_0} - n_{b_0} < 0 \quad (\text{mais } |m_0| < 1)$$

Rien n'est changé dans les calculs de l'interaction avec la lumière résonnante ; il faut simplement changer la valeur numérique de m_0 dans l'équation (2-20) décrivant les phénomènes aléatoires de l'émission spontanée, des collisions et du pompage. Mais l'inversion de signe de m_0 produit aussi une inversion de signe des solutions stationnaires calculées en (3-3), et des trois courbes qui les représentent sur la figure 3.2. Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté sur la figure 3.2bis la variation obtenue alors pour la variable u_S, c'est-à-dire la partie réelle χ' de la susceptibilité. On voit que l'indice de réfraction d'un milieu « inversé » varie en fonction de la fréquence en sens opposé de celui d'un milieu normal. On pourrait aussi dessiner des courbes inversées pour v_S et m_S.

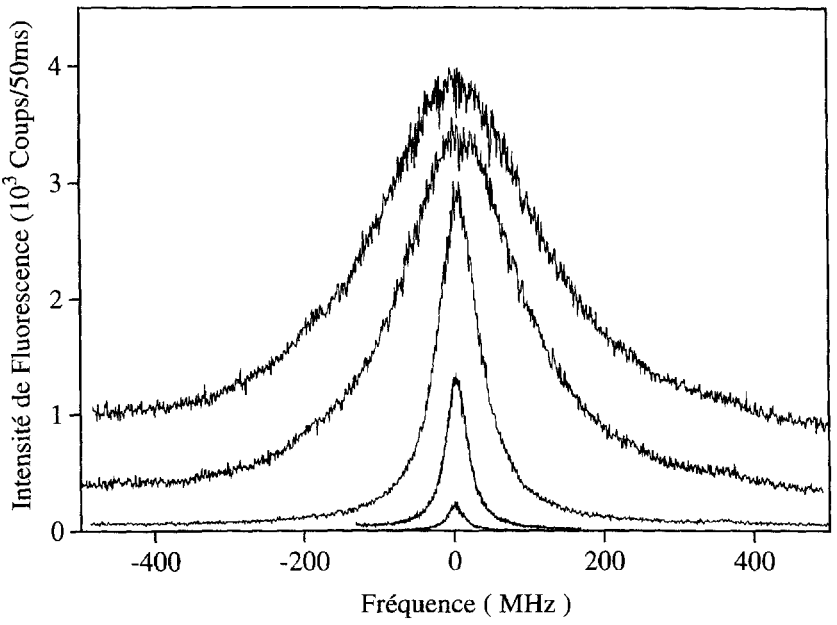


FIG. 3.3 – *Enregistrement expérimental des courbes de résonance de Bloch sur une molécule unique piégée dans un cristal. La fluorescence mesurée est proportionnelle à la probabilité d'occupation de l'état excité $\beta^*\beta = (m_0 - m_S)/2$ (cas le plus courant où $m_0 = 1$). Chaque courbe est obtenue en faisant varier la fréquence du laser excitateur (l'écart à résonance $\delta\nu = \nu - \nu_0$ est indiqué sur l'axe horizontal) avec une intensité incidente constante. L'intensité lumineuse incidente (c'est-à-dire aussi le paramètre $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$) varie d'un facteur 3 environ d'une courbe à l'autre. On contrôle que la hauteur des courbes et leur élargissement vérifient les formules (3-4) et (3-14). On note que les courbes plus larges obtenues aux très fortes intensités ont des hauteurs très voisines ; c'est le phénomène de saturation (Communiqué par le laboratoire de Physique Moléculaire de l'université de Bordeaux ; cf. réf. [1]).*

Largeurs de raies expérimentales :
Dans les expériences les plus courantes, on peut mesurer :

- soit l'absorption de l'onde incidente à travers le milieu atomique, proportionnelle à $|v_S|$;
- soit l'intensité de fluorescence réémise spontanément par les atomes dans une direction oblique. Cette intensité, qui est proportionnelle au nombre d'atomes excités, varie comme $(m_0 - m_S)$ et suit la même loi.

L'observation des formes de raies de la figure 3.2, avec leur largeur à mi-hauteur $\delta\omega$ voisine de la largeur naturelle $\delta\omega_N$, est effectivement courante

dans les expériences réalisées en radiofréquence (Résonance Magnétique) ou en hyperfréquences, domaines où les déplacements de fréquence par effet Doppler sont négligeables (parce que la longueur d'onde λ est supérieure à la dimension de l'échantillon étudié ; *cf.* remarque 3.5) ; l'élargissement de puissance est aussi facilement observé.

En ce qui concerne le domaine de l'optique, on travaille le plus souvent dans des gaz, et les déplacements de fréquence par effet Doppler, dus aux mouvements atomiques, y sont 100 à 1000 fois plus importants que la largeur naturelle ; les formes de raies observées couramment sont proches de gaussiennes (et non pas des lorentziennes) reflétant la statistique des vitesses atomiques. On observe donc un très important élargissement des courbes de résonance appelé *élargissement inhomogène*. Le terme d'élargissement inhomogène est utilisé chaque fois qu'on observe dans une expérience des déplacements de la fréquence centrale ω_0, qui diffèrent d'un atome ou d'une molécule à l'autre (*cf.* chapitre 13). On peut cependant observer les formes de raie « naturelles » de la figure 3.2 avec des dispositifs plus sophistiqués permettant de s'affranchir de l'élargissement par effet Doppler (par exemple : l'irradiation d'un jet atomique bien collimaté avec un faisceau laser de direction exactement perpendiculaire au jet atomique).

Dans les solides à très basse température, l'énergie de vibration thermique peut aussi être suffisamment réduite pour rendre négligeable les déplacements de fréquence par effet Doppler (raies à zéro phonon). Malheureusement les molécules diluées dans un solide sont soumises aux fortes interactions de leurs proches voisins, qui sont différentes d'un site à l'autre du cristal ou du verre formé par le solvant, et qui modifient en conséquence les niveaux d'énergie et la fréquence centrale ω_0 des différentes molécules. C'est un autre processus d'élargissement inhomogène.

Cependant, depuis quelques années les physiciens ont réussi à s'affranchir de cet élargissement inhomogène dû aux fluctuations d'environnement dans un solide. Ils travaillent pour cela sur des échantillons très dilués, suffisamment dilués pour que la probabilité de trouver plusieurs molécules étudiées dans un même volume, de dimension 10 μm environ, soit quasiment nulle. On concentre le faisceau lumineux incident (issu d'un laser) à l'aide d'un objectif de microscope en une tache focale dont la dimension est de quelques μm, de telle sorte qu'il n'irradie qu'une seule des molécules étudiées. On mesure alors véritablement la probabilité moyenne pour cette molécule unique d'être dans l'état excité (d'énergie supérieure) en recueillant avec le même objectif de microscope les photons d'émission spontanée réémis à partir de ce point focal quand la molécule est excitée. La figure 3.3 montre les résultats expérimentaux obtenus par une équipe de l'université de Bordeaux avec une molécule de dibenzanthanthrène dans un cristal de naphtalène (réf. [1]). Chaque courbe en fonction de la fréquence est obtenue avec une intensité constante du faisceau lumineux excitateur ; et l'on observe les largeurs homogènes des formules (3-3) et de la figure 3.2. On vérifie l'élargissement de puissance et l'augmentation de

la probabilité quand l'intensité lumineuse croît, environ d'un facteur 3, entre chaque courbe. Quand l'intensité devient très forte (courbes les plus larges), l'accroissement de la probabilité au centre de la résonance ($\delta\nu = 0$) devient moins rapide ; c'est le phénomène de saturation que nous allons étudier dans le paragraphe suivant.

En comptant les photons spontanés émis par cette molécule unique pendant des durées suffisamment longues, nous mesurons en fait la valeur moyenne sur le temps de sa probabilité d'être dans l'état excité. Or les développements de ce chapitre (à la suite du chapitre 2) calculent les valeurs moyennes sur un grand nombre de molécules rendues indépendantes par les phénomènes de hasard. En les comparant, nous admettons donc l'égalité entre la valeur moyenne instantanée sur des molécules indépendantes et la valeur moyenne temporelle sur une seule molécule dont l'évolution est perturbée par les mêmes phénomènes de hasard – c'est l'hypothèse ergodique (ou théorème ergodique) utilisée couramment en physique statistique.

Remarque 3.5 – Des réseaux de courbes, conformes aux équations de Blach, analogues à celui de la figure 3.3, ont été observés dès les années 1950 dans les expériences de Résonance Magnétique Nucléaire, en radiofréquence :

- soit en milieu condensé, parce que la faible interaction des noyaux atomiques avec leur environnement réduit considérablement l'élargissement inhomogène, par comparaison avec les transitions optiques ;
- soit en milieu gazeux, parce que la longueur d'onde $\lambda_0 = c/\nu_0$ de ces transitions en radiofréquence est très supérieure à la dimention l du récipient ; et dans ce cas là l'effet des déplacements Doppler se moyenne à zéro. En effet l'atome ne conserve sa vitesse v que pendant un temps de vol $\delta t \leqslant l/v$. Pendant cette durée δt, le déplacement de fréquence Doppler $\delta\omega_D = (v/c)\omega_0 = 2\pi v/\lambda_0$ produit un déphasage :

$$\delta\varphi = \delta\omega_D \cdot \delta t \lesssim 2\pi \frac{v}{\lambda_0}\frac{l}{v} = 2\pi\frac{l}{\lambda_0} \ll 2\pi$$

  Lorsqu'on ajoute les effets de tous ces petits déphasages successifs aléatoires, qui sont tantôt positifs, tantôt négatifs, on calcule un effet résiduel extrêmement faible et négligeable (effet Dicke réf. [2]) ;
- une autre cause d'élargissement, fréquente en R.M.N., et commune aux milieux condensés ou gazeux, est l'inhomogénéité spatiale du champ magnétique B_0 appliqué (qui détermine la fréquence centrale de résonance $\omega_0 = |\gamma| \cdot B_0$; *cf.* chapitre 4). En appelant ΔB_0 l'amplitude de la variation du champ sur le volume de l'échantillon étudié, l'élargissement inhomogène correspondant vaut :

$$\Delta\omega_0 = |\gamma| \cdot \Delta B_0$$

  Mais cet élargissement peut être considérablement réduit par le mouvement des atomes du gaz ou par un mouvement de rotation rapide imposé à l'échantillon solide ou liquide. On caractérise la variation temporelle de l'écart à résonance $\delta\omega(t)$ de chaque atome par un temps de corrélation τ_c défini de la manière habituelle en statistique (τ_c est de l'ordre du temps de vol l/v,

ou de la période du mouvement de rotation). Si le déphasage produit pendant cette durée τ_c est assez faible :

$$\Delta\varphi = \Delta\omega_0 \cdot \tau_c \ll 1$$

l'effet de cette inhomogénéité est très réduit, de l'ordre de :

$$\Delta\omega_{\text{inhom}} \approx \Delta\omega_0^2 \cdot \tau_c \ll \Delta\omega_0$$

Cette effet de rétrécissement par le mouvement des raies de Résonance Magnétique, est analogue à l'effet Dicke mentionné ci-dessus à propos du déplacement Doppler.

3.5 Saturation

Aux très fortes intensités lumineuses, lorsque $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ devient très grand, on observe un phénomène de saturation où les deux susceptibilités χ' et χ'' deviennent nulles ; et de même la différence des populations $nm_S = n_a - n_b$ devient nulle. Ce phénomène de saturation est utilisé dans certaines méthodes de spectroscopie ou d'optique non linéaire ; et pour mieux le caractériser, nous représentons sur la figure 3.4 les variations de ces grandeurs en fonction de l'intensité lumineuse (puisque c'est elle que l'on mesure expérimentalement). Sur cette figure, l'intensité lumineuse est repérée par le paramètre sans dimension $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ qui lui est proportionnel.

Les grandeurs étudiées dépendant de l'écart de résonance, on a choisi de les étudier pour les valeurs $\delta\omega$ où l'effet de l'onde est maximum : au centre de la résonance ($\delta\omega = 0$) pour m_S et v_S ou χ''. Pour la dispersion, au contraire, on étudie la valeur maximum $|u_M|$ calculée en (3-16),ou $|\chi'_M|$ correspondant à l'écart $\delta\omega_{1/2}$ donnée en (3-14) :

$$|\chi'_M| = \chi''_0 \frac{1}{2\sqrt{1+\Omega_1^2\tau_1\tau_2}}$$

On illustre sur les diagrammes de la figure 3.4 les propriétés asymptotiques lorsque $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gg 1$: la différence des populations nm_S tend vers zéro comme l'inverse de l'intensité, et la susceptibilité imaginaire χ'' correspondant à l'absorption suit exactement la même loi. La susceptibilité réelle maximum $|\chi'_M|$ décroît moins vite, comme l'inverse de la racine carrée de l'intensité. La composante en quadrature du moment dipolaire atomique $|v_S|$ tend aussi lentement vers zéro (inverse de la racine carrée), tandis que le maximum de la composante en phase $|u_M|$ tend vers une valeur constante.

Lorsque l'intensité lumineuse est déjà très forte ($\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \sim 10$ ou 20 par exemple), il ne sert plus à rien de l'augmenter encore : une augmentation supplémentaire ne modifie pratiquement plus le système atomique, parce qu'on a déjà produit le maximum de modification possible ; c'est cela qu'on appelle la saturation. Elle joue à la fois sur la dispersion et sur l'absorption ; mais plus rapidement sur l'absorption.

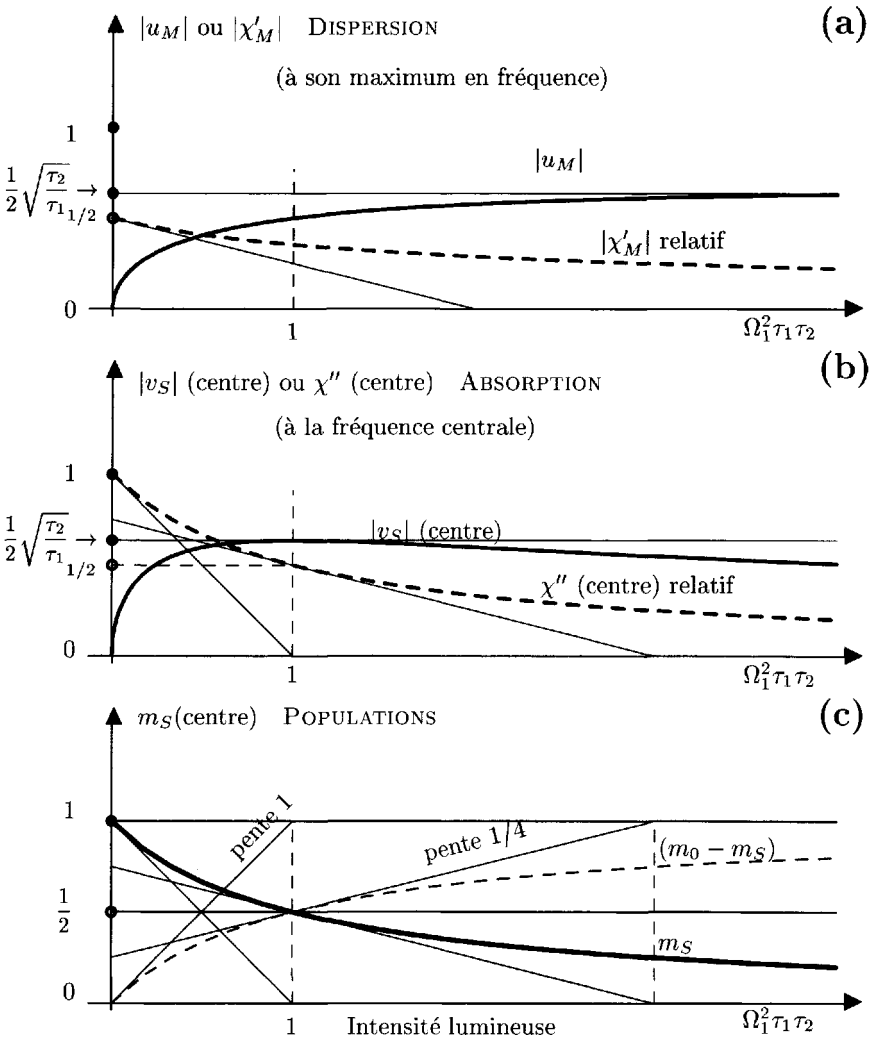


FIG. 3.4 – *Phénomène de saturation à forte intensité lumineuse :* $1 \ll \Omega_1^2\tau_1\tau_2$. *La variable portée sur l'axe horizontale est le paramètre théorique* $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ *proportionnel à l'intensité lumineuse. Les variables de Bloch sont représentées en traits pleins (cas idéal :* $m_0 = 1$, $\tau_2 = 2\tau_1$*). En tireté, les variations relatives des susceptibilités* χ' *et* χ''*, en choisissant* $\chi''_0 = 1$. *La courbe en tireté sur le diagramme du bas, symétrique de la courbe* m_S*, représente le signal* $(m_0 - m_S)$ *généralement mesuré dans les expériences. Pour les variables* m *et* v*, on représente les valeurs au centre de la raie* ($\delta\omega = 0$)*, tandis que pour la variable* u *on représente son module maximum* $|u_M|$ *au voisinage de la résonance (lorsque le module de l'écart* $|\delta\omega| = (1/\tau_2)\sqrt{1 + \Omega_1^2\tau_1\tau_2}$*).*

Par convention, on appelle *intensité de saturation* l'intensité telle que :

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_{\text{sat}}^2 \tau_1 \tau_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{d_{ab}\mathcal{E}_{\text{sat}}}{\hbar}\right)^2 \tau_1 \tau_2 = 1 \\ \text{ou } w_{\text{sat}} = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\mathcal{E}_{\text{sat}}^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\left(\dfrac{\hbar}{d_{ab}}\right)^2 \dfrac{1}{\tau_1 \tau_2} \end{array}\right\} \tag{3-17}$$

Revenant aux équations (3-5) et (3-6) du §3.2, appliquées au centre de la résonance ($\nu = \nu_0$), on voit que l'intensité de saturation correspond à l'égalité des deux termes figurant au dénominateur de $(n_a - n_b)_S$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{\tau_1} = A = 2B\varphi(\nu_0) w_{\text{sat}} = (B_{12} + B_{21})\varphi(\nu_0) w_{\text{sat}} = \Omega_{\text{sat}}^2 \tau_2$$

(en utilisant (3-7), (3-8) et (3-17), on le vérifie facilement). Ceci peut s'exprimer simplement : *l'intensité de saturation est celle pour laquelle, au centre de la résonance, la somme des deux probabilités stimulées (émission et absorption) est égale à la probabilité de l'émission spontanée.*

Le paramètre sans dimension $\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2$ est couramment appelé paramètre de saturation. Il est égal au rapport entre l'intensité lumineuse utilisée et l'intensité de saturation, choisie comme référence (parce que $\Omega_{\text{sat}}^2 \tau_1 \tau_2 = 1$) :

$$\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 = \frac{\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2}{\Omega_{\text{sat}}^2 \tau_1 \tau_2} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_{\text{sat}}^2} = \frac{\mathcal{E}_1^2}{\mathcal{E}_{\text{sat}}^2} = \frac{w}{w_{\text{sat}}} \tag{3-18}$$

Remarque 3.6 – L'appellation paramètre de saturation pour la quantité (3-18), proportionnelle à l'intensité lumineuse, est fréquemment utilisée mais n'est pas strictement codifiée. Certains auteurs utilisent le même vocable pour désigner par exemple la quantité $(m_0 - m_S)/m_0$, quantité qui varie entre 0 et 1, et indique le pourcentage du signal observé $(m_0 - m_S)$ par rapport au signal maximum possible m_0 pour une intensité infinie. Nous préférons l'appellation de taux de saturation pour cette quantité $(m_0 - m_S)/m_0$. Avec notre choix d'appellation, on peut dire que la courbe en tireté du bas de la figure 3.4 représente la variation du taux de saturation en fonction du paramètre de saturation proportionnel à l'intensité lumineuse ; la valeur 1 du paramètre de saturation sépare les intensités faibles (pour lesquelles le taux de saturation est inférieur à 50 %) des intensités fortes (pour lesquelles le taux de saturation est supérieur à 50 %).

Remarque 3.7 – L'élargissement de puissance peut être interprété aussi comme une conséquence de la saturation : si la fréquence de l'onde n'est pas exactement résonnante, mais seulement voisine de la résonance $\delta\omega \sim 1/\tau_2$, son action est moins efficace qu'à la résonance, et l'on atteint moins vite la saturation. Lorsqu'on utilise une intensité lumineuse moyenne $\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \sim 1$, on est déjà proche de la saturation au centre ($\delta\omega = 0$) alors qu'on en est encore loin sur les ailes de la courbe ($\delta\omega \neq 0$) : l'onde produit donc des effets relativement importants sur les ailes, alors qu'au centre de la courbe, la saturation limite son action. C'est ce renforcement relatif des ailes de la courbe ou plutôt l'atténuation de son centre qui produit l'élargissement observé.

On explique ainsi que, dans le chapitre 8, les probabilités d'Einstein, dont la forme de raie $\varphi(\nu)$ est indépendante de l'intensité lumineuse, permettent de calculer des résultats expérimentaux sur les populations atomiques qui dépendent de l'intensité (*cf.* formule (8-12) adaptée en (3-5) au cas $g_a = g_b$).

3.6 Comparaison avec l'oscillateur classique. Force d'oscillateur

Les deux courbes de la figure 3.2 représentant u_S et v_S en fonction de l'écart à résonance $\delta\omega$, ont les mêmes allures que les courbes obtenues pour les susceptibilités χ' et χ'' dans les cours d'optique élémentaires à l'aide du modèle classique de l'électron élastiquement lié ; c'est sans doute ce qui justifie le maintien dans l'enseignement de ce modèle historique.

Mais, attention ! l'accord entre ce modèle et le calcul quantique est limité aux faibles intensités lumineuses lorsque $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$. En effet, à la différence des formules classiques, les formules quantiques des susceptibilités χ' et χ'' (formules (3-12)) dépendent encore du champ $\mathcal{E}_1$ par le terme $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ au dénominateur. C'est ce terme qui est responsable à la fois de l'élargissement de puissance et de la saturation.

Le modèle classique ne peut pas trouver la saturation parce que rien ne limite l'amplitude de l'oscillateur classique. Les hypothèses phénoménologiques, quantiques, utilisent la notion d'états (*cf.* §3.2) et tiennent compte de ce phénomène de saturation ; c'est ce qui permet avec une probabilité de transition de largeur constante (*cf.* fonction $\varphi(\nu)$ sur la Fig. 3.1) d'obtenir la différence de populations (3-5) qui présente l'élargissement de puissance de la figure 3.2.

Dans le modèle classique de l'électron élastiquement lié, avec la fréquence propre ω_0 et le coefficient d'atténuation γ (charge q et masse m_e), on écrit pour la position x de l'électron l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m_e}\mathcal{E}_1\cos\omega t = \frac{q}{m_e}\mathcal{E}_1\Re\left[\mathbf{e}^{-i\omega t}\right]$$

On en déduit la solution stationnaire sinusoïdale (restant seule après un transitoire amorti avec une constante de temps $2/\gamma$) :

$$x = \frac{q\mathcal{E}_1}{m_e}\Re\left[\frac{\mathbf{e}^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right] \tag{3-19}$$

et la polarisation diélectrique du milieu contenant n électrons identiques par unité de volume :

$$\begin{aligned} P_x = nqx &= \left(\chi'_{\text{Class}}\cos\omega t + \chi''_{\text{Class}}\sin\omega t\right)\varepsilon_0\mathcal{E}_1 \\ &= \Re\left[\left(\chi'_{\text{Class}} + i\chi''_{\text{Class}}\right)\varepsilon_0\mathcal{E}_1\,\mathbf{e}^{-i\omega t}\right] \end{aligned} \tag{3-20}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire dans (3-19), on retrouve les expressions des susceptibilités réelle χ' et imaginaire χ'' dans le modèle classique :

$$\left.\begin{aligned}\chi'_{\text{Class}} &= \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e} \times \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \simeq \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e \gamma\omega} \times \frac{-\delta\omega\frac{2}{\gamma}}{1+\delta\omega^2\frac{4}{\gamma^2}} \\ \chi''_{\text{Class}} &= \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e} \times \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \simeq \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e \gamma\omega} \times \frac{1}{1+\delta\omega^2\frac{4}{\gamma^2}}\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}21)$$

(on suppose $\gamma \ll \omega_0$ et les expressions de χ' et χ'' peuvent être simplifiées parce qu'elles ne sont vraiment différentes de zéro que pour les valeurs de ω voisines de ω_0, permettant l'approximation : $\omega_0^2-\omega^2 = (\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) \simeq -2\omega\cdot\delta\omega$).

À condition de se restreindre aux faibles intensités lumineuses, permettant de négliger le terme $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$ dans les expressions quantiques (3-12), et en posant $\tau_2 = 2/\gamma$, on voit que les expressions classiques et quantiques se ressemblent, et varient de la même manière en fonction de $\delta\omega$. On appelle force d'oscillateur f le coefficient sans dimension exprimant le rapport entre les susceptibilités quantiques et classiques :

$$\chi' = \chi'_{\text{Class}} \cdot f \qquad \text{et} \qquad \chi'' = \chi''_{\text{Class}} \cdot f \quad (3\text{-}22)$$

Comparant (3-12) et (3-21), on en déduit que (avec $m_0 = 1$)

$$\chi''_0 = \frac{nd_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\tau_2 = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m_e\gamma\omega}\cdot f = \frac{nq^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega}\tau_2\cdot f$$

$$f = \frac{d_{ab}^2}{q^2} \times \frac{2m_e\omega}{\hbar} \qquad \text{ou} \qquad d_{ab}^2 = \frac{\hbar q^2}{2m_e\omega}\cdot f \quad (3\text{-}23)$$

et utilisant (3-8), on en déduit le coefficient phénoménologique B en fonction de f :

$$B = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{d_{ab}^2}{\hbar^2} = \frac{q^2}{4\varepsilon_0 m_e\hbar\omega}\cdot f = \alpha\frac{\lambda}{2m_e}f \quad (3\text{-}24)$$

en utilisant la constante de structure fine α, sans dimension : $\alpha = q^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$. Les valeurs de ces coefficients f sont répertoriées dans les tables spectroscopiques.

Remarque 3.8 – Les règles de somme sur les opérateurs quantiques permettent de montrer que la force d'oscillateur f, ainsi définie, est toujours inférieure à l'unité. Il existe quelques cas particuliers où elle est presque égale à l'unité (exemple : la transition de résonance optique du sodium dans le jaune).

On notera que les forces d'oscillateur sont introduites à partir des susceptibilités χ' et χ'' calculées dans le cadre du modèle à deux états quantiques. Nous devons donc utiliser la relation (3-9) entre les coefficients A et B :

$$A = \frac{8\pi h}{3\lambda^3} B = \frac{8\pi h}{3\lambda^3} \frac{q^2}{4\varepsilon_0 m_e h\nu} f = \frac{2\pi q^2}{3\varepsilon_0 m_e c\lambda^2} f \tag{3-25}$$

Dans le cas de la raie jaune du sodium ($\lambda = 0,592$ μm), on peut montrer que ce modèle à deux états quantiques s'applique parce que le moment angulaire orbital du niveau inférieur est nul.

Avec $f = 1$, on calcule numériquement $A = 0,64 \cdot 10^8$ s^{-1} en accord avec la valeur mesurée expérimentalement.

Pour les niveaux dégénérés, lorsqu'on utilise les coefficients B_{12} et B_{21}, moyennés sur tous les sous-niveaux (*cf.* chapitre 19), introduits par Einstein, ces coefficients B_{12} et B_{21} peuvent être différents, et conduisent à distinguer des forces d'oscillateur différentes en absorption f_{12} et en émission f_{21}.

Bibliographie

[1] B. Lounis, F. Jelezko et M. Orrit, Jour. of Luminescence **76**, 274 (1998).

[2] R.H. Dicke, Phys. Rev. **89**, 472 (1953).

Chapitre 4

Comparaison avec la résonance magnétique (spin 1/2)

CE CHAPITRE n'est pas indispensable pour la suite et peut être sauté en première lecture. Mais il nous sert à introduire, de manière plus concrète, le vecteur de Bloch, qui est aussi utilisé par certains auteurs dans les calculs de l'interaction optique. Dans l'étude de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un système quantique à deux niveaux effectuée dans les chapitres précédents, nous avons à plusieurs reprises fait référence au phénomène de résonance magnétique.

Ainsi dans les deux premiers chapitres, l'expression de « représentation tournante » a été utilisée et nous avons alors indiqué que le changement de représentation effectué dans les calculs (*cf.* (2-13)) ne correspondait en rien à une rotation spatiale. L'emploi de cette expression est dû au calcul analogue rencontré en résonance magnétique où là, comme nous allons le voir, ce changement de représentation correspond à un véritable changement de référentiel : des axes fixes du laboratoire à des axes tournants.

Par ailleurs, ce sont les expériences de résonance magnétique qui ont permis pour la première fois d'illustrer expérimentalement le phénomène « d'oscillation de Rabi » collective étudiée au chapitre 5.

Enfin, le jeu d'équations qui couple la différence de population entre les deux niveaux concernés et le moment dipolaire électrique au chapitre 2 (équations (2-21)) sont formellement identiques à celles introduites par Félix Bloch en résonance magnétique pour décrire l'évolution du moment magnétique d'un spin 1/2 (réf. [1]) ; d'où le nom d'« équations de Bloch optiques » qui leur a été donné.

C'est pour ces raisons qu'il nous a semblé intéressant d'expliciter le formalisme et les principales caractéristiques de la résonance magnétique, en rappelant d'abord le lien essentiel entre moment angulaire et moment magnétique.

4.1 Hamiltonien d'interaction avec un champ magnétique

4.1.1 Rapport gyromagnétique

L'expérience montre que tout système possédant un moment angulaire $\overrightarrow{\mathfrak{J}}$ possède un moment dipolaire magnétique associé $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, colinéaire à $\overrightarrow{\mathfrak{J}}$ et relié par la relation de proportionnalité :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \gamma \overrightarrow{\mathfrak{J}} \tag{4-1}$$

où la constante γ est appelée « rapport gyromagnétique » du système.

Dans un atome, comme dans une molécule, le magnétisme électronique a une double origine, le mouvement orbital des électrons et leurs spins. Pour du magnétisme orbital pur, γ est négatif et a pour expression $\gamma = -e/2m_e$, où e est la charge élémentaire et m_e la masse de l'électron ; pour du magnétisme de spin électronique pur, $\gamma \simeq -e/m_e$. Pour un atome, dans le cas général, les deux types de magnétisme existent ; on pose alors $\gamma = -ge/2m_e$, où g, appelé « facteur de Landé », est un nombre sans dimension, calculable à l'aide des règles quantiques de composition des moments cinétiques.

Le magnétisme associé aux spins nucléaires est beaucoup plus faible, de trois ordres de grandeur environ (songer au rapport de la masse de l'électron à celle du proton). Mais le rapport gyromagnétique γ peut être aussi bien positif que négatif. Ainsi il est positif pour le proton mais par contre négatif pour le neutron ; celui d'un noyau de deutérium, comportant un neutron et un proton, est positif.

Le tableau suivant donne les valeurs des moments magnétiques de spin de quelques particules :

Magnéton de Bohr $\beta = e\hbar/2m_e = 0,9273 \times 10^{-23}$ JT^{-1}
(multiplié par le nombre d'Avogadro $\mathfrak{N} \cdot \beta = 5,587$ JT^{-1})

électron	$\begin{cases} \mathfrak{M}_e = \beta\left(1 + \dfrac{\alpha}{2\pi} + \cdots\right) \\ \mathfrak{M}_e = 0,928\,477 \times 10^{-23} \text{ JT}^{-1} \end{cases}$
proton	$\mathfrak{M}_p = 1,410\,607 \times 10^{-26}$ JT^{-1}
neutron	$\mathfrak{M}_n = 0,966\,237 \times 10^{-26}$ JT^{-1}

4.1.2 Opérateur moment angulaire

Dans une description quantique, au moment angulaire d'une particule est associé un opérateur vectoriel $\overrightarrow{J}$, ensemble de trois opérateurs hermitiques, ou « observables », J_x, J_y et J_z qui en représentent les composantes dans un système d'axes cartésiens. Ces trois opérateurs ne commutent pas entre eux, mais chacun commute séparément avec l'opérateur $\overrightarrow{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.

On montre que les valeurs propres de $\vec{J}^2$ sont toujours de la forme $j(j+1)\hbar^2$, où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck « réduite » ou quantum de moment angulaire, et j est le nombre quantique de moment angulaire, nombre positif entier ou demi-entier.

Soit un champ magnétique constant $\vec{B_0}$ dont nous prenons la direction comme axe $0z$: $\vec{B_0} = B_0\,\vec{e_z}$ ($B_0 > 0$). L'énergie d'interaction d'un dipôle magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ avec ce champ est donnée classiquement par

$$W = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B_0} = -\mathfrak{M}_z B_0 \tag{4-2}$$

En mécanique quantique, l'opérateur hamiltonien H_0 correspondant est obtenu en remplaçant $\mathfrak{M}_z$ par l'opérateur associé γJ_z, soit :

$$\boxed{H_0 = -\gamma B_0 J_z = \omega_0 J_z} \tag{4-3}$$

avec la notation traditionnelle consistant à poser $\omega_0 = -\gamma B_0$ pour tenir compte du fait que dans le cas du magnétisme électronique γ est négatif.

Dans la présentation qui suit, nous supposerons implicitement $\gamma < 0$ pour avoir $\omega_0 > 0$ par commodité. Le cas $\gamma > 0$ n'introduit pas de différences physiques fondamentales ; il suffit de prendre garde parfois aux signes des expressions pour leur interprétation.

Les valeurs propres de J_z sont de la forme $m_j\hbar$ où m_j, nombre quantique magnétique, peut prendre les $(2j+1)$ valeurs de l'ensemble $\{-j, -j+1, \cdots, j-1, j\}$. Ce résultat conduit aux énergies des états stationnaires de H_0 :

$$E_m = -m_j \gamma B_0 \hbar = m_j \hbar \omega_0$$

Rappelons que, dans un système atomique, cette levée de dégénérescence d'un niveau quantique est appelée « effet Zeeman », et les niveaux correspondant aux différentes valeurs de m_j, sous-niveaux Zeeman. Les états quantiques correspondants sont alors désignés par $|j, m_j\rangle$, ou simplement $|m_j\rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de j. Nous nous limiterons dans ce chapitre au cas $j = 1/2$.

4.2 Équation de Schrödinger dans un champ transverse oscillant

Considérons un système de spin $j = 1/2$; m_j peut prendre les valeurs $+1/2$ et $-1/2$; il leur correspond deux états quantiques, états propres de J_z, que nous désignerons respectivement par $|+\rangle$ et $|-\rangle$. Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ le plus général du système est une combinaison linéaire de ces états :

$$|\psi(t)\rangle = b(t)|+\rangle + a(t)|-\rangle \tag{4-4}$$

Dans un champ magnétique constant, $\overrightarrow{B_0} = B_0\ \overrightarrow{e_z}$, les énergies de ces états stationnaires sont respectivement $E_+ = +\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ et $E_- = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, et leur écart est $\hbar\omega_0$. On peut leur ajouter l'énergie E_0 du système pour $B_0 = 0$, mais cette constante ne jouant aucun rôle, on la prendra dans la suite égale à zéro.

Superposons un autre champ magnétique $\overrightarrow{B}(t)$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$ et variant sinusoïdalement ; nous prendrons la direction d'oscillation comme axe Ox, soit :

$$\overrightarrow{B}(t) = 2B_1 \cos\omega t\ \overrightarrow{e_x} \tag{4-5}$$

Le hamiltonien H du système dans le champ magnétique total s'écrit alors :

$$H = -\overrightarrow{\mathfrak{M}} \cdot \left[\overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B}(t)\right]$$

$$H = -\gamma B_0 J_z - 2\gamma B_1 \cos\omega t J_x$$

avec les notations $\omega_0 = -\gamma B_0$, $\omega_1 = -\gamma B_1$:

$$H = \omega_0 J_z + 2\omega_1 \cos\omega t\, J_x \tag{4-6}$$

Dans la base des états $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (attention à l'ordre choisi pour les vecteurs de base), les opérateurs J_x, J_y et J_z sont représentés par les matrices « standard », que l'on trouve dans tous les cours de mécanique quantique :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \qquad J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \tag{4-7}$$

agissant sur le vecteur d'état (4-4) : $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix}$. L'équation de Schrödinger donne alors :

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -a(t)\frac{\hbar\omega_0}{2} + b(t)\hbar\omega_1 \cos\omega t \\ i\hbar\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} &= b(t)\frac{\hbar\omega_0}{2} + a(t)\hbar\omega_1 \cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

Ce système d'équations couplées est formellement identique à celui constitué par (1-6) et (1-7) ; à condition d'adopter pour les paramètres E_a, E_b et Ω_1 les valeurs :

$$E_a = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\ ; \qquad E_b = +\frac{1}{2}\hbar\omega_0\ ; \qquad \Omega_1 = -\omega_1 \tag{4-9}$$

Cette identité entre les systèmes d'équations explique pourquoi le formalisme développé antérieurement pour l'étude de la résonance magnétique a pu être appliqué à l'étude de l'interaction dipolaire électrique avec un système à deux niveaux. C'est en particulier le cas des équations de Bloch alors que les grandeurs physiques mesurées sont totalement différentes (réf. [2]). Nous allons expliciter cette analogie.

4.3 Vecteur moment magnétique atomique

Les expressions des opérateurs J_x, J_y et J_z, rappelées au paragraphe précédant, permettent d'obtenir les valeurs moyennes $\langle \mathfrak{M}_x \rangle$, $\langle \mathfrak{M}_y \rangle$ et $\langle \mathfrak{M}_z \rangle$ des composantes du moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ en fonction des coefficients $a(t)$ et $b(t)$ du vecteur d'état (4-4). On obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_x \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} \langle \psi | J_x | \psi \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} (a^* b + b^* a) \\ \langle \mathfrak{M}_y \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} \langle \psi | J_y | \psi \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} i (a^* b - b^* a) \\ \langle \mathfrak{M}_z \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} \langle \psi | J_z | \psi \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} (b^* b - a^* a) \end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

Rappelons que, pour $\gamma < 0$, donc $\omega_0 > 0$, $|a|^2 = a^* a$ correspond à la population du niveau d'énergie inférieure et $|b|^2 = b^* b$ à celle du niveau d'énergie supérieure.

Nous remarquons que dans ces trois expressions apparaissent les mêmes combinaisons réelles des coefficients complexes a et b, introduites au chapitre 2 (*cf.* §2.2). Avec les notations utilisées dans les formules (2-12), on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathfrak{M}_x \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} U \\ \langle \mathfrak{M}_y \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} V \\ \langle \mathfrak{M}_z \rangle &= \gamma \frac{\hbar}{2} (-m) \end{aligned}\right\} \tag{4-11}$$

On en déduit que l'ensemble de ces trois valeurs moyennes obéit aux mêmes équations que l'ensemble $\{U, V, -m\}$ (*cf.* (2-15)), soit, en remplaçant aussi Ω_1 par $-\omega_1$ (*cf.* (4-9)) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathfrak{M}_x \rangle &= -\omega_0 \langle \mathfrak{M}_y \rangle + \omega_1 \sin \omega t \langle \mathfrak{M}_z \rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathfrak{M}_y \rangle &= +\omega_0 \langle \mathfrak{M}_x \rangle - \omega_1 \cos \omega t \langle \mathfrak{M}_z \rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathfrak{M}_z \rangle &= -\omega_1 \sin \omega t \langle \mathfrak{M}_x \rangle + \omega_1 \cos \omega t \langle \mathfrak{M}_y \rangle \end{aligned}\right\} \tag{4-12}$$

L'identité formelle avec le système (2-15) est parfaite.

Cela n'est pas un hasard : en effet le système (2-15) est invariant dans les deux changements simultanés de Ω_1 en $-\Omega_1$ et m en $-m$ (comme les équations de Bloch ; *cf.* §2.4) ; or l'application des formules de transformation (4-9) et (4-11) revient à faire ces deux changements simultanés.

Notons qu'en l'absence de champ oscillant (soit $\omega_1 = 0$), on obtient pour le vecteur moyen $\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle$ une précession angulaire autour de la direction de $\vec{B_0}$ à la vitesse angulaire ω_0 (c'est la rotation de Larmor). Il est alors naturel de s'attendre à des effets notables du champ oscillant lorsque ω sera proche de ω_0.

On remarque que l'obtention du jeu (4-12) nécessite d'effectuer, comme au §1.2, l'approximation séculaire, valable pour ω voisin de ω_0. Nous allons dans le paragraphe suivant préciser, dans le cas de la résonance magnétique, la signification physique de cette approximation.

4.4 Vecteur de Bloch

4.4.1 Référentiel tournant

Introduisons un référentiel $0XYz$ tournant autour de $0z$ à la vitesse angulaire ω, $0XY$ se déduisant de $0xy$ par la rotation d'angle $\varphi = \omega t$ (Fig. 4.1). Dans ce référentiel, les valeurs moyennes des composantes $\mathfrak{M}_X$ et $\mathfrak{M}_Y$ de $\vec{\mathfrak{M}}$ sont données par :

$$\left.\begin{aligned} \langle\mathfrak{M}_X\rangle &= \langle\mathfrak{M}_x\rangle\cos\omega t + \langle\mathfrak{M}_y\rangle\sin\omega t = \gamma\frac{\hbar}{2}u \\ \langle\mathfrak{M}_Y\rangle &= -\langle\mathfrak{M}_x\rangle\sin\omega t + \langle\mathfrak{M}_y\rangle\cos\omega t = \gamma\frac{\hbar}{2}v \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}13)$$

Les égalités de droite sont obtenues en exprimant $\langle\mathfrak{M}_x\rangle$ et $\langle\mathfrak{M}_y\rangle$ en fonction de U et V (4-11) puis en utilisant les expressions (2-13) du changement des variables (U, V) aux variables (u, v). La signification physique différente des variables mesurées en Résonance Magnétique permet dans ce cas de donner une signification géométrique dans l'espace réel à la transformation (2-13) d'où par abus de langage le nom de « représentation tournante » donné à cette transformation dans le chapitre 2.

On en déduit, sans calculs supplémentaires, que $\langle\mathfrak{M}_X\rangle$, $\langle\mathfrak{M}_Y\rangle$ et $\langle\mathfrak{M}_z\rangle$ obéissent au même jeu d'équations couplées que $(u, v, -m)$ (2-10), en n'oubliant pas de remplacer Ω_1 par $-\omega_1$, soit :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathfrak{M}_X\rangle &= \delta\omega\langle\mathfrak{M}_Y\rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathfrak{M}_Y\rangle &= -\delta\omega\langle\mathfrak{M}_X\rangle - \omega_1\langle\mathfrak{M}_z\rangle \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathfrak{M}_z\rangle &= \omega_1\langle\mathfrak{M}_Y\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

avec $\delta\omega = \omega - \omega_0$.

On retrouve ainsi les équations différentielles de Bloch (2-11) (en l'absence de relaxation) dans le phénomène de résonance magnétique.

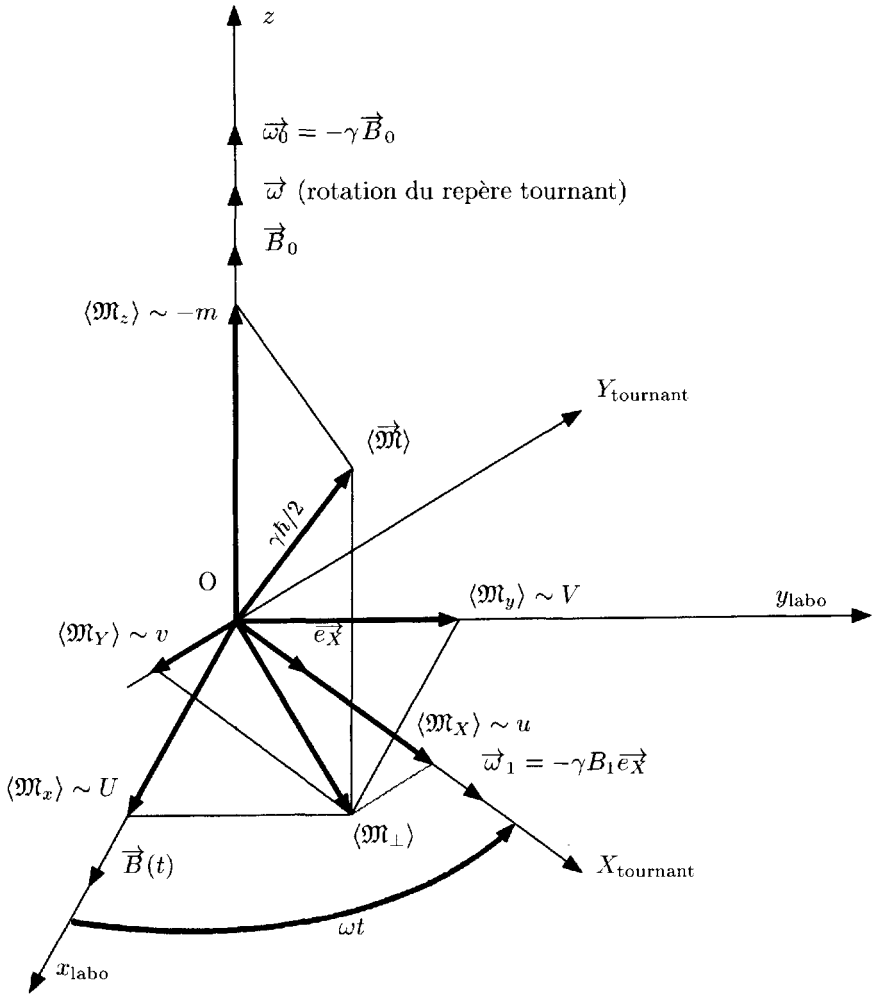


FIG. 4.1 – *Représentation dans l'espace du vecteur moment magnétique moyen d'un atome, qui est proportionnel au vecteur de Bloch (sur cette figure, le signe $\sim$ signifie proportionnel). Pour les composantes transversales, on distingue $\langle \mathfrak{M}_x \rangle$ et $\langle \mathfrak{M}_y \rangle$ dans le repère du laboratoire, et $\langle \mathfrak{M}_X \rangle$ et $\langle \mathfrak{M}_Y \rangle$ dans le repère tournant. Compte tenu du signe négatif de v, le vecteur transversal $\langle \vec{\mathfrak{M}}_\perp \rangle$ tourne avec un déphasage retard par rapport à l'axe OX du repère tournant.*

La figure 4.1 donne une représentation du vecteur moment magnétique moyen $\vec{\mathfrak{M}}$ dont les composantes sur les axes fixes $Oxyz$ du laboratoire sont proportionnelles à U, V et $-m$ et dont les composantes sur les axes $OXYz$

du repère tournant sont proportionnelles à u, v et $-m$. On appelle couramment *vecteur de Bloch* le vecteur sans dimension obtenu en supprimant le coefficient de proportionnalité $\gamma\hbar/2$, et dont les composantes se réduisent à U, V, $-m$ dans le laboratoire et u, v, $-m$ dans le repère tournant.

On montre facilement que le module de ce vecteur de Bloch est constant : il suffit de multiplier chacune des équations (4-14) respectivement par $\langle \mathfrak{M}_X \rangle$, $\langle \mathfrak{M}_Y \rangle$, $\langle \mathfrak{M}_z \rangle$; on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\langle \mathfrak{M}_X \rangle^2 + \langle \mathfrak{M}_Y \rangle^2 + \langle \mathfrak{M}_z \rangle^2\Big) = \langle \mathfrak{M}_X \rangle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathfrak{M}_X \rangle + \langle \mathfrak{M}_Y \rangle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathfrak{M}_Y \rangle + \langle \mathfrak{M}_z \rangle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathfrak{M}_z \rangle = 0$$

soit

$$\langle \mathfrak{M}_X \rangle^2 + \langle \mathfrak{M}_Y \rangle^2 + \langle \mathfrak{M}_z \rangle^2 = \left(\frac{\gamma\hbar}{2}\right)^2 (u^2 + v^2 + m^2) = \text{Constante} \qquad (4\text{-}15)$$

On peut encore utiliser les expressions (2-12) de définition de U, V et m, données en (4-10) et (4-11). On obtient alors directement :

$$\boxed{U^2 + V^2 + m^2 = (b^*b + a^*a)^2 = 1 = u^2 + v^2 + m^2} \qquad (4\text{-}16)$$

(en tenant compte de la condition de normalisation habituelle, et du fait que le module d'un vecteur ne dépend pas du repère choisi pour le calcul).

Cette condition (4-16) jointe aux expressions (2-13) du changement des variables (U, V) en (u, v), suffisent à assurer que les trois quantités U, V, $\pm m$ d'une part, et les trois quantités u, v, $\pm m$ d'autre part, se comportent mathématiquement comme les trois composantes d'un même vecteur dans deux repères différents : on utilisera $-m$ avec $\omega_1 = -\gamma B_1$, mais $+m$ avec $\Omega_1 = d_{ab}\mathcal{E}_1/\hbar$. **Ceci permet d'employer aussi les propriétés mathématiques du vecteur de Bloch, de module unité, dans les calculs de l'interaction optique, bien que ce vecteur n'ait alors aucune signification géométrique réelle** (réf. [2]).

4.4.2 Cas d'un champ tournant. Approximation séculaire

Il est classique de décomposer un champ linéaire alternatif comme $\overrightarrow{B}(t)$ en la somme de deux composantes de module constant tournant en sens opposés avec les vitesses angulaires $\pm\omega$ (*cf.* Fig. 4.2). La composante $\overrightarrow{B'}$ qui tourne avec la vitesse angulaire $+\omega$ est fixe dans le repère tournant, et en utilisant le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_X}$ de l'axe tournant OX, elle peut s'écrire $\overrightarrow{B'} = B_1 \overrightarrow{e_X}$. L'autre composante $\overrightarrow{B''}$ tourne au contraire, dans ce repère tournant, avec une vitesse angulaire doublée -2ω.

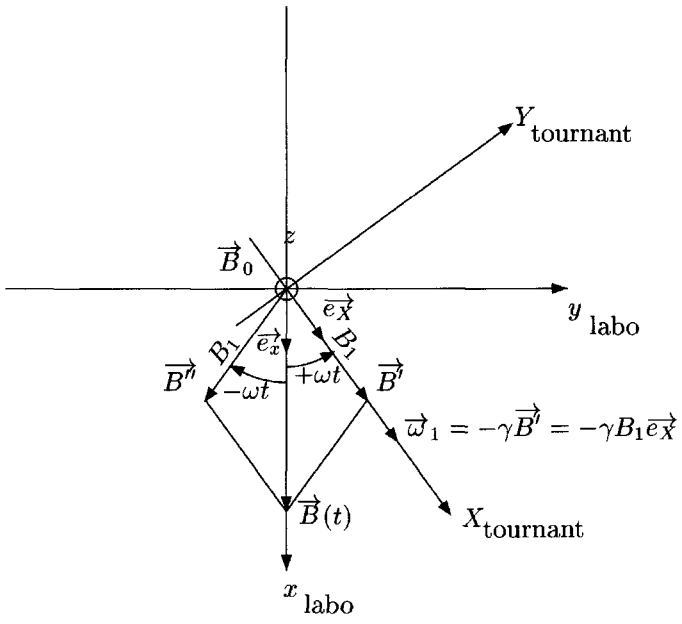


FIG. 4.2 – *Dans le plan horizontal xOy : décomposition du champ linéaire alternatif* $\vec{B}(t) = 2B_1 \cos\omega t \cdot \vec{e_x}$ *comme somme de deux champs* $\vec{B'}$ *et* $\vec{B''}$ *de même module constant* B_1*, mais tournant en sens opposés avec les vitesses angulaires* $\pm\omega$.

En fait, on sait parfaitement réaliser, dans le domaine des radiofréquences, un véritable champ magnétique tournant tel que $\vec{B'}$; il suffit d'envoyer deux courants électriques sinusoïdaux déphasés en quadrature (l'un en $\cos\omega t$, l'autre en $\sin\omega t$) dans deux bobines différentes, la première d'axe Ox et la seconde d'axe Oy. Dans une expérience utilisant le seul champ tournant $\vec{B'}$, le hamiltonien d'interaction s'écrit en transposant (4-6) :

$$H = -\gamma B_0 J_z - \gamma B_1 J_X = -\gamma B_0 J_z - \gamma B_1 (J_x \cos\omega t + J_y \sin\omega t)$$

soit

$$H = \omega_0 J_z + \omega_1 (J_x \cos\omega t + J_y \sin\omega t) \qquad (4\text{-}17)$$

En utilisant les matrices (4-7) la partie dépendant du temps de ce hamiltonien s'écrit :

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1\frac{\hbar}{2}\left[\cos\omega t\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\sin\omega t\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right]\\&\quad=\omega_1\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&\cos\omega t-i\sin\omega t\\\cos\omega t+i\sin\omega t&0\end{pmatrix}=\omega_1\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&\mathbf{e}^{-i\omega t}\\\mathbf{e}^{i\omega t}&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

Lorsqu'on projette l'équation de Schrödinger sur les états de base $|+\rangle$ et $|-\rangle$, les équations (4-8) sont transposées en :

$$\left.\begin{aligned}i\hbar\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-a(t)\frac{\hbar\omega_0}{2}+b(t)\frac{\hbar\omega_1}{2}\mathbf{e}^{+i\omega t}\\i\hbar\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}&=+b(t)\frac{\hbar\omega_0}{2}+a(t)\frac{\hbar\omega_1}{2}\mathbf{e}^{-i\omega t}\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}18)$$

On compare ces équations (4-18) aux deux équations (1-8) et (1-9) du §1.2, en utilisant les notations (4-9) : la seule différence est la disparition des deux parenthèses $(1+\mathbf{e}^{\pm 2i\omega t})$. Mais dans la suite des calculs du §1.2, nous avons fait l'approximation séculaire qui consiste à négliger les exponentielles en $2i\omega t$; les solutions calculées au chapitre 1 sont donc les solutions rigoureuses du système d'équations différentielles (4-18), valable dans le cas d'un seul champ tournant.

En définitive l'approximation séculaire, utilisée dans le cas d'un champ linéaire alternatif, revient à tenir compte seulement de la composante $\overrightarrow{B'}$ tournant dans le sens de la rotation de Larmor et à négliger la composante $\overrightarrow{B''}$ tournant en sens opposé.

Remarque 4.1 – On prendra garde à ne pas confondre le carré du module du moment magnétique moyen $\langle\overrightarrow{\mathfrak{M}}\rangle$ écrit en (4-15) :

$$\langle\mathfrak{M}_X\rangle^2+\langle\mathfrak{M}_Y\rangle^2+\langle\mathfrak{M}_z\rangle^2=\langle\mathfrak{M}_x\rangle^2+\langle\mathfrak{M}_y\rangle^2+\langle\mathfrak{M}_z\rangle^2=\left(\gamma\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

avec la valeur moyenne de l'opérateur « vecteur au carré » :

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{\mathfrak{M}}^2\rangle&=\langle\mathfrak{M}_X^2\rangle+\langle\mathfrak{M}_Y^2\rangle+\langle\mathfrak{M}_z^2\rangle=\langle\mathfrak{M}_x^2\rangle+\langle\mathfrak{M}_y^2\rangle+\langle\mathfrak{M}_z^2\rangle\\\langle\overrightarrow{\mathfrak{M}}^2\rangle&=\gamma^2\langle\overrightarrow{J}^2\rangle=\gamma^2\hbar^2j(j+1)=3\left(\gamma\frac{\hbar}{2}\right)^2\text{ si }j=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Remarque 4.2 – Comparaison avec le traitement classique de la Résonance Magnétique dans le cas d'un seul champ tournant.

D'après cette fin de paragraphe, les équations différentielles (4-12), écrites avec un champ linéaire alternatif dans le cadre de l'approximation séculaire, sont les équations exactes dans le cas d'un seul champ tournant :

$$\overrightarrow{B'}=B_1\ \overrightarrow{e_X}=B_1\cos\omega t\ \overrightarrow{e_x}+B_1\sin\omega t\ \overrightarrow{e_y}$$

Ce jeu d'équations (4-12) peut être regroupé sous forme vectorielle :

$$\frac{\mathrm{d}\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle}{\mathrm{d}t} = -\gamma(\vec{B} + \vec{B_0}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle = (\vec{\omega_1} + \vec{\omega_0}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle \tag{4-19}$$

le vecteur $\vec{\omega_0}$ étant porté par l'axe $0z$ et le vecteur $\vec{\omega_1}$ par l'axe tournant $0X$ (*cf.* Fig. 4.1).

Cette équation (4-19) est identique à celle que donne la mécanique classique pour un moment magnétique macroscopique $\vec{\mathfrak{M}}$ auquel est associé un moment cinétique $\vec{\mathfrak{J}}$ proportionnel avec $\vec{\mathfrak{M}} = \gamma\vec{\mathfrak{J}}$.

En présence d'un champ magnétique total $\vec{B}$, le moment macroscopique $\vec{\mathfrak{M}}$ est soumis au couple $\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$ et le théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathfrak{J}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B}$$

en multipliant les deux membres de cette équation par γ on obtient en mécanique classique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathfrak{M}}}{\mathrm{d}t} = (-\gamma\vec{B}) \wedge \vec{\mathfrak{M}}$$

équation formellement identique à (4-19). On en déduit que le mouvement classique de $\vec{\mathfrak{M}}$ est une rotation à la vitesse angulaire instantanée $\vec{\omega} = -\gamma\vec{B}$. En particulier pour un champ $\vec{B_0}$ constant, le mouvement de $\vec{\mathfrak{M}}$ est la précession de Larmor à vitesse angulaire constante $\omega_0 = -\gamma B_0$ autour de la direction de $\vec{B_0}$. Si l'on veut calculer dans le repère tournant (avec le vecteur de rotation $\vec{\omega}$) la règle de composition des vitesses (ou des dérivées de vecteurs) s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} (\vec{\omega_1} + \vec{\omega_0}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{labo}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle}{\mathrm{d}t}\right)_{\substack{\text{Repère}\\\text{tournant}}} + \vec{\omega} \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle \\ \text{soit } \left(\frac{\mathrm{d}\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle}{\mathrm{d}t}\right)_{\substack{\text{Repère}\\\text{tournant}}} &= (\vec{\omega_1} + \vec{\omega_0} - \vec{\omega}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle = (\vec{\omega_1} - \delta\vec{\omega}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

C'est bien l'équivalent du système d'équations différentielles (4-14).

De façon générale, il y a identité entre les équations quantiques d'évolution de la valeur moyenne d'un moment magnétique associé à un spin 1/2 plongé dans un champ magnétique et les équations classiques correspondantes. Cette identité entre équations classiques et quantiques est strictement limitée au cas du nombre quantique $j = 1/2$; elle n'existe plus pour $j > 1/2$.

4.5 Aimantation volumique et relaxation

Les équations (4-12) et (4-14) qui décrivent l'évolution du moment magnétique moyen $\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle$ d'un atome ne tiennent compte que des champs magnétiques appliqués et connus $\vec{B_0}$ et $\vec{B(t)}$. En pratique, les moments magnétiques sont rarement isolés et ils interagissent avec leur environnement. En particulier, ces interactions aléatoires tendent à ramener en permanence le système

de moments magnétiques vers son état d'équilibre. On dit alors qu'il y a « relaxation ».

La description de cette évolution ne peut se faire que macroscopiquement, non pas sur un moment magnétique isolé, mais sur un ensemble statistique de moments magnétiques, identiques et soumis aux mêmes interactions. Il faut alors renoncer à utiliser comme variables les composantes de $\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle$, et prendre des variables collectives représentant les moments magnétiques d'un grand nombre d'atomes. Nous utiliserons dorénavant comme variable $\vec{M}$, « vecteur aimantation », ou simplement « aimantation » qui par définition est le moment magnétique par unité de volume : $\vec{M} = \sum_i \langle\vec{\mathfrak{M}}_i\rangle$, la somme portant sur les moments magnétiques d'un volume unité (*cf.* (2-6)). Tenant compte de (4-11) et (4-13) on en déduit que les composantes de l'aimantation $\vec{M}$ s'expriment facilement avec les variables quantiques moyennées $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{M}$ définies au chapitre 2 en (2-8) :

$$\left.\begin{aligned} M_X &= n\gamma\frac{\hbar}{2}\overline{u} \\ M_Y &= n\gamma\frac{\hbar}{2}\overline{v} \\ M_z &= n\gamma\frac{\hbar}{2}(-\overline{m}) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}21)$$

En l'absence de relaxation, les composantes M_X, M_Y et M_z de $\vec{M}$ obéissent aux mêmes équations (4-14) que celles de $\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle$ (*cf.* les équations (2-11) au chapitre 2). Dans un champ magnétique $\vec{B_0} = B_0\vec{e_z}$, et en l'absence d'autres processus d'orientation, l'état d'équilibre vers lequel tend à évoluer l'aimantation sous l'effet des processus de relaxation est caractérisé par les composantes d'aimantation :

$$(M_X)_{\text{éq}} = (M_Y)_{\text{éq}} = 0 \qquad (M_z)_{\text{éq}} = M_0$$

M_0 dépend de l'amplitude B_0 du champ et peut être calculé à partir des lois statistiques.

Pour décrire l'évolution vers cet état d'équilibre, on introduit phénoménologiquement dans les équations d'évolution des termes supplémentaires représentant cette relaxation, et qui ressemblent aux termes complémentaires introduits au §2.3 pour représenter l'effet de l'émission spontanée et des collisions. En ajoutant ces termes aux équations (4-14) transposées au vecteur

$\overrightarrow{M}$, on obtient le jeu d'équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}M_X}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{T_2}M_X + \delta\omega M_Y \\ \frac{\mathrm{d}M_Y}{\mathrm{d}t} &= -\delta\omega M_X - \frac{1}{T_2}M_Y - \omega_1 M_z \\ \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t} &= \omega_1 M_Y - \frac{1}{T_1}(M_z - M_0) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}22)$$

Ce sont les équations de Bloch de la résonance magnétique (réf. [1]), analogues aux équations de Bloch optiques (2-21) ou (3-1).

Deux constantes de temps ont été introduites :

- T_1, temps de relaxation longitudinal qui caractérise l'évolution de M_z composante longitudinale de l'aimantation ;
- T_2, temps de relaxation transversal caractérisant l'évolution par relaxation des composantes transversales M_X et M_Y (perpendiculaires au champ magnétique constant $\overrightarrow{B_0}$).

La symétrie axiale imposée par $\overrightarrow{B_0}$ nécessite cette distinction. En général T_2 est nettement inférieur à T_1 ; la raison en est que les moments magnétiques individuels précessent autour de $0z$ et que les composantes transverses M_X et M_Y sont très sensibles aux faibles perturbations qui déphasent les rotations des moments magnétiques les uns par rapport aux autres. En effet ces faibles perturbations ne modifient pas l'énergie d'interaction avec le champ des moments magnétiques individuels $W = -\overrightarrow{\mathfrak{M}} \cdot \overrightarrow{B} = -\mathfrak{M}_z \cdot B_0$ (4-2). Au contraire les perturbations qui modifient la composante longitudinale M_z de l'aimantation nécessitent la modification des composantes individuelles $\mathfrak{M}_z$ et donc aussi de l'énergie d'interaction W.

On notera une différence importante entre le vecteur moment magnétique atomique $(\mathfrak{M}_X, \mathfrak{M}_Y, \mathfrak{M}_z)$, qui est proportionnel au vecteur de Bloch $(u, v, -m)$, et le vecteur aimantation (M_X, M_Y, M_z), qui est proportionnel au vecteur moyen $(\overline{u}, \overline{v}, -\overline{m})$: le premier obéit aux équations de Bloch sans relaxation (4-14) (puisqu'il est impossible de prévoir les interactions aléatoires sur un seul atome) et cela assure une valeur constante de son module (4-15) ; au contraire, l'aimantation et le vecteur moyen $(\overline{u}, \overline{v}, -\overline{m})$ obéissent à l'équation de Bloch avec relaxation et leurs modules varient sous l'action de la relaxation.

4.6 Solution stationnaire. Observation expérimentale

Après un temps long devant les temps de relaxation T_1 et T_2, l'aimantation devient constante dans le référentiel tournant ; c'est le régime stationnaire.

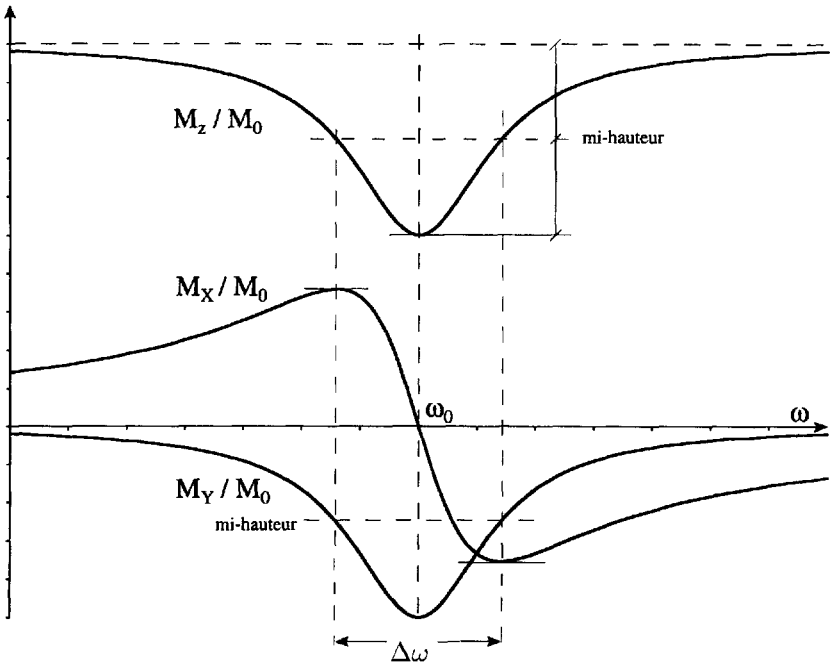


FIG. 4.3 – *Solution stationnaire : vecteur aimantation volumique en fonction de la fréquence de l'onde. On a représenté sur un même graphique la variation des trois composantes (normées à M_0): composante longitudinale M_z et composantes transversales M_X et M_Y dans le repère tournant. Ces courbes sont identiques à celles de la figure 3.2.*

Les composantes de l'aimantation s'obtiennent en résolvant le système des trois équations linéaires obtenues à partir des équations différentielles (4-22) en écrivant que les dérivées par rapport au temps sont nulles (*cf.* 3.2). Elles sont données par les expressions :

$$\left.\begin{aligned} M_X &= -M_0 \frac{\omega_1 T_2^2 \delta\omega}{1+\omega_1^2 T_1 T_2 + T_2^2 \delta\omega^2} \\ M_Y &= -M_0 \frac{\omega_1 T_2}{1+\omega_1^2 T_1 T_2 + T_2^2 \delta\omega^2} \\ M_z &= M_0 \frac{1+T_2^2 \delta\omega^2}{1+\omega_1^2 T_1 T_2 + T_2^2 \delta\omega^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}23)$$

elles sont formellement identiques aux solutions (3-3) calculées au chapitre 3.

Les graphes de ces composantes en fonction de $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ sont donnés en figure 4.3 pour $\gamma < 0$, soit $\omega_1 > 0$, $\omega_0 > 0$ et pour $M_0 > 0$. Ce sont les mêmes courbes que sur la figure 3.2.

Les courbes représentant M_z et M_Y ont la même allure car

$$M_z = M_0 + \omega_1 T_1 M_Y$$

ce sont des courbes d'absorption. La puissance moyenne $\overline{P}$ donnée, par le champ magnétique oscillant, au système de moments magnétiques a pour expression :

$$\overline{P} = -\omega B_1 M_Y = \omega \frac{M_0 - M_z}{\omega_1 T_1}$$

Elle est positive puisque M_Y est négatif, et $M_z < M_0$. Au contraire, le graphe de M_X est une courbe de dispersion.

La détection de la résonance magnétique peut s'effectuer de diverses façons. Une méthode directe est l'observation des modifications des caractéristiques de la bobine qui crée le champ magnétique oscillant $\overrightarrow{B}(t) = 2B_1 \cos\omega t\, \overrightarrow{e_x}$. Orientée selon OX, elle est sensible à la composante M_x de l'aimantation, soit :

$$M_x = M_X \cos\omega t - M_Y \sin\omega t$$

La composante M_X, en phase avec le champ oscillant, tend selon son signe à augmenter ou à diminuer ce champ ; elle se manifeste donc par une modification de l'inductance de la bobine. Au contraire, la composante en quadrature M_Y est liée à l'absorption d'énergie et se manifeste par une modification de la résistance équivalente de la bobine. Il suffit de placer la bobine dans un « pont d'impédances » ; il est alors possible techniquement de mesurer les variations de son impédance, en séparant la partie inductive proportionnelle à M_X et la partie résistive proportionnelle à $(-M_Y)$ (réf. [3] et [4]).

Une autre technique consiste à disposer, autour de l'échantillon contenant les moments magnétiques, une autre bobine d'axe Oy, donc perpendiculaire à celle qui crée le champ oscillant. À ses bornes apparaît une f.é.m. induite proportionnelle à $\mathrm{d}M_y/\mathrm{d}t$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}t} = \omega(M_X \cos\omega t - M_Y \sin\omega t)$$

(méthode d'induction nucléaire ; réf. [5])

Une détection synchrone, sensible à la phase du signal, permet là encore d'obtenir séparément des signaux proportionnels l'un à M_X, l'autre à M_Y.

On trace expérimentalement des courbes analogues à celles de la figure 4.3 en faisant varier $\delta\omega = \omega - \omega_0$, soit en faisant varier la fréquence $\nu = \omega/2\pi$ du générateur de courant sinusoïdal qui crée le champ $\overrightarrow{B}(t)$ (on parle d'un balayage en fréquence), soit en modifiant lentement la valeur du champ statique B_0 (on fait alors un balayage en champ). De toute façon, ce balayage doit être assez lent, comparé aux temps de relaxation T_1 et T_2, pour que les moments magnétiques de l'échantillon mesuré aient le temps d'atteindre l'état d'équilibre correspondant à la solution stationnaire.

Si les variations de fréquence ou de champ sont trop rapides, on observe des phénomènes transitoires, comme ceux que nous calculons et décrivons au chapitre suivant. Pour plus de détails, on peut consulter les livres référencés [6] et [7].

Bibliographie

[1] F. Bloch, Phys. Rev. **70**, 460 (1946).

[2] R.P. Feynmann, F.L. Vernon et R.W. Hellwarth, J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).

[3] E.M. Purcell, H.C. Torrey et R.V. Pound, Phys. Rev. **69**, 37 (1946).

[4] N. Blœmbergen, E.M. Purcell et R.V. Pound, Phys. Rev. **73**, 679 (1948).

[5] F. Bloch, W.W. Hansen et M. Packard, Phys. Rev. **70**, 474 (1946).

[6] A. Abragam, Les principes du magnétisme nucléaire (INSTN et PUF, 1961).

[7] R. Andrew, Nuclear Magnetic Resonance, Cambridge University Press (1958).

Chapitre 5

Solution transitoire des équations de Bloch

LES SOLUTIONS stationnaires étudiées au chapitre 3 nous ont permis d'entrer dans la physique de l'interaction onde-atome avec le minimum de calcul. Nous étudions maintenant des solutions plus générales des équations différentielles de Bloch, qui nous permettront d'expliquer des expériences très courantes : le début de l'irradiation d'un échantillon lorsque le champ de l'onde passe brusquement de zéro à une valeur $\mathcal{E}_1$ qui reste ensuite constante (variation en marche d'escalier).

5.1 Calcul dans le cas résonnant. Amortissement de l'oscillation de Rabi

Ce calcul des solutions plus générales des équations différentielles de Bloch (3-1) sera fait en deux temps ; nous nous limiterons dans ce paragraphe au cas de la résonance exacte $\delta\omega = 0$ qui entraîne des calculs plus simples et permet de décrire les effets physiques essentiels.

La simplification essentielle du cas résonnant réside dans le découplage des équations différentielles en u et v lorsque $\delta\omega = 0$. L'équation en $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ peut être résolue séparément et, compte tenu des conditions initiales où $u(0) = 0$, conduit à $u(t) = 0$ en permanence. Cela correspond bien à la nullité de la solution stationnaire $u_S = 0$ pour $\delta\omega = 0$.

Nous sommes donc ramenés à un système de seulement deux équations différentielles couplées. Suivant une méthode générale, nous éliminerons v et $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en formant une nouvelle équation par dérivationen fonction du temps

de l'équation en $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$:

$$\begin{array}{l|l} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v}{\tau_2} + \Omega_1 m = 0 & \times\Omega_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - \Omega_1 v + \dfrac{m}{\tau_1} = \dfrac{m_0}{\tau_1} & \times\dfrac{1}{\tau_2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2} - \Omega_1 \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau_1}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 & \times 1 \end{array}$$

La combinaison linéaire indiquée ci-dessus permet d'obtenir une équation différentielle du second ordre en M, où v ne figure plus :

$$\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \left(\Omega_1^2 + \frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) m = \frac{m_0}{\tau_1\tau_2} \tag{5-1}$$

On aurait pu aussi bien, exprimer m en fonction de v à partir de la première équation, et reporter cette première expression de m dans la seconde équation ; et nous aurions obtenu une équation différentielle en v dont seul le second membre constant serait différent ; c'est-à-dire que son premier membre se déduit de (5-1) par la simple transposition de m en v. On peut aussi déduire v de m, déjà calculé, en utilisant la dernière équation de Bloch (identique lorsque $\delta\omega \neq 0$) sous la forme :

$$v = \frac{1}{\Omega_1}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \frac{m - m_0}{\tau_1}\right) \tag{5-2}$$

Nous appliquons un résultat classique : la solution générale d'une telle *équation linéaire* est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Nous avons déjà calculé une telle solution particulière : c'est la solution stationnaire m_S (en fait constante) calculée au chapitre 3. Nous retrouvons ici sa valeur dans le cas particulier $\delta\omega = 0$.

Pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre, à coefficients constants, nous devons chercher les racines x de l'équation caractéristique :

$$x^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) x + \Omega_1^2 + \frac{1}{\tau_1\tau_2} = 0 \tag{5-3}$$

Nous obtenons les coefficients des exponentielles complexes e^{xt} qui constituent la solution générale en fonction du temps :

$$x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)^2 - \Omega_1^2 - \frac{1}{\tau_1\tau_2}}$$

Nous nous intéresserons uniquement au cas où le champ électrique $\mathcal{E}_1$ est assez intense pour que :

$$\Omega_1 > \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right| \tag{5-4}$$

c'est-à-dire que la quantité sous le radical est négative ; nous obtenons :

$$x = -\gamma \pm i\Omega \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_2}\right) \\ \Omega = \sqrt{\Omega_1^2 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\tau_1} - \dfrac{1}{\tau_2}\right)^2} \simeq \Omega_1 \end{array}\right\} \tag{5-5}$$

La solution générale est donc une combinaison linéaire d'exponentielles imaginaires $\mathbf{e}^{\pm i\Omega t}$ (ou de sinusoïdes de pulsation Ω) amorties par une exponentielle réelle $\mathbf{e}^{-\gamma t}$. Si l'on irradie brusquement à l'instant zéro l'échantillon atomique à partir d'un état initial où $m(0) = m_0$, et $v(0) = 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, le calcul des constantes d'intégration permet de faire apparaître les solutions stationnaires m_S et v_S calculées au chapitre 3, et d'écrire la solution sous la forme :

$$m(t) = m_S + (m_0 - m_S)\mathbf{e}^{-\gamma t}\left[\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right] \tag{5-6}$$

Nous retrouvons bien à résonance l'oscillation de Rabi calculée au chapitre 1, avec deux différences cependant :

1) La fréquence de Rabi est en toute rigueur légèrement diminuée du fait du terme correctif en $(1/\tau_1 - 1/\tau_2)$; et l'oscillation peut disparaître complètement si le champ électrique $\mathcal{E}_1$ est très faible : $\Omega_1 < 1/2\,|1/\tau_1 - 1/\tau_2|$, condition inverse de (5-4).

2) L'oscillation est amortie avec la constante d'amortissement γ donnée par (5-5), qui est la moyenne des constantes d'amortissement $1/\tau_1$ de la variable m et $1/\tau_2$ de la variable v.

La solution générale pour la variable $v(t)$ a la même forme que $m(t)$. On tient compte des conditions initiales : $v(0) = 0$ et $m(0) = m_0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = -\Omega_1 m_0$; la détermination des constantes d'intégration conduit à la solution suivante, où v_S est la solution stationnaire déjà calculée en (3-3) :

$$v(t) = v_S - \mathbf{e}^{-\gamma t}\left[v_S\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega}(\Omega_1 m_0 + \gamma v_S)\sin\Omega t\right] \tag{5-7}$$

On a représenté sur la figure 5.1 les variations temporelles de $m(t)$ et $v(t)$ correspondant aux expressions (5-6) et (5-7). Suivant la méthode de détection utilisée dans les expériences, on peut être sensible à la variable $m(t)$ ou à l'autre variable $v(t)$. Mais dans tous les cas, pour que l'on puisse observer plusieurs oscillations avant que les grandeurs ne soient amorties, il est nécessaire que la pulsation Ω soit grande devant la constante d'amortissement γ ; et la figure 5.1 est tracée en supposant remplie cette condition : $\Omega \gg \gamma$.

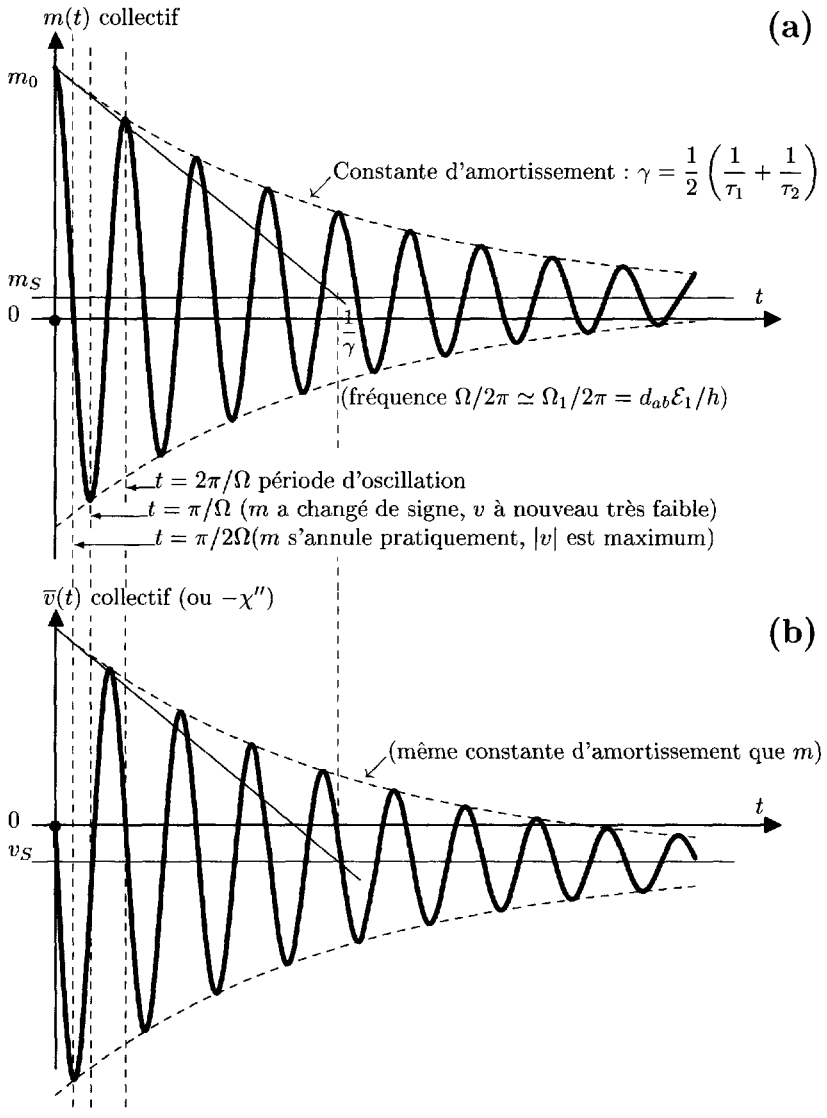


FIG. 5.1 – *Transitoires collectifs à résonance ($\delta\omega = 0$; la variable u est donc nulle). La figure est tracée dans le cas où $\Omega \gg \gamma$.*

Dans ce cas, la pulsation Ω des oscillations se confond pratiquement avec la pulsation de Rabi pure Ω_1 et l'on se trouve dans les conditions de saturation où $\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \gg 1$, c'est-à-dire que v_S et m_S sont voisins de zéro : $m_S \ll m_0$ et $|v_S| \ll m_0$. Les formules (5-6) et (5-7) peuvent alors être réécrites de manière

approchée en négligeant les termes très petits :

$$\left.\begin{aligned} m(t) &\simeq m_0 \mathbf{e}^{-\gamma t} \cdot \cos \Omega_1 t \\ v(t) &\simeq m_0 \mathbf{e}^{-\gamma t} \cdot \sin \Omega_1 t \end{aligned}\right\} \quad \text{(valable pour } \Omega_1 \gg \gamma) \qquad (5\text{-}8)$$

Les deux sinusoïdes amorties représentant $m(t)$ et $v(t)$ ont la même amplitude m_0 et sont en quadrature l'une par rapport à l'autre. Cela s'explique bien si l'on revient à l'équation (5-2) permettant de calculer $v(t)$ à partir de $m(t)$: le premier terme de la parenthèse en $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ est de l'ordre de $\Omega_1 m$, et très supérieur au deuxième terme ; donc $v \simeq \dfrac{1}{\Omega_1} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$.

5.2 Calcul de l'oscillation amortie dans le cas général, non résonnant

Ce calcul n'apporte guère d'idée physique nouvelle et peut être laissé de côté en première lecture. Il permet cependant une vérification plus précise de certaines expériences. Il a été effectué pour la première fois par Torrey en 1949 à propos d'expériences de résonance magnétique (réf. [1]).

Dans le cas non résonnant $\delta\omega \neq 0$ les trois équations différentielles de Bloch restent couplées entre elles et l'élimination de deux des trois variables M, u, v, conduit pour la troisième à une équation différentielle linéaire du troisième ordre.

L'équation différentielle sans second membre est encore une équation différentielle à coefficients constants, qui reste identique pour les trois variables u, v et m. Sa solution générale est encore une combinaison linéaire de fonctions exponentielles du temps, du type $\mathbf{e}^{xt}$; avec cette différence que l'équation caractéristique, permettant de calculer les coefficients x des exponentielles, est maintenant troisième ordre en x, et comporte donc trois solutions (généralement, on obtient deux solutions imaginaires conjuguées et une troisième solution réelle).

On obtient directement cette équation caractéristique en recherchant pour les trois variables des solutions contenant une seule exponentielle $\mathbf{e}^{xt}$: soit $u = A\mathbf{e}^{xt}$, $v = B\mathbf{e}^{xt}$, $m = C\mathbf{e}^{xt}$. Le report de ces expressions dans le système différentiel de Bloch sans second membre, dérivé de (3-1), conduit à :

$$\left.\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{\tau_2}\right)A \;-\; \delta\omega B \qquad\qquad &= 0 \\ \delta\omega A \;+\left(x + \frac{1}{\tau_2}\right)B \;+\; \Omega_1 C \;&= 0 \\ -\; \Omega_1 B \;+\left(x + \frac{1}{\tau_1}\right)C \;&= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}9)$$

Ce système linéaire homogène de trois équations algébriques à trois inconnues

A, B, C n'admet de solutions non nulles que si son déterminant est nul, soit :

$$\left(x+\frac{1}{\tau_2}\right)^2\left(x+\frac{1}{\tau_1}\right)+\delta\omega^2\left(x+\frac{1}{\tau_1}\right)+\Omega_1^2\left(x+\frac{1}{\tau_2}\right)=0 \qquad (5\text{-}10)$$

La résolution de cette équation algébrique du troisième degré en x est facilitée si l'on remarque la possibilité d'une mise en facteur assez simple :

$$\left(x+\frac{1}{\tau_2}\right)\left[x^2+x\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)+\delta\omega^2+\Omega_1^2+\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right]+\delta\omega^2\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)=0 \qquad (5\text{-}11)$$

On commence donc par étudier la solution *dans le cas particulier simple* $\tau_1 \simeq \tau_2$, ce qui permet de négliger le dernier terme de l'équation (5-11), de la réduire à deux équations de degrés inférieurs faciles à résoudre : l'équation du second degré obtenue en écrivant la nullité du crochet ci-dessus est presque identique à l'équation caractéristique (5-3) du paragraphe précédent, puisqu'il suffit de remplacer Ω_1^2 par $\delta\omega^2+\Omega_1^2$. Nous pouvons écrire immédiatement la solution réelle et les deux solutions imaginaires conjuguées.

$$x = -r = -\frac{1}{\tau_2} \qquad (5\text{-}12)$$

$$x = -\gamma \pm i\Omega \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l}\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tau_1}+\dfrac{1}{\tau_2}\right)\\ \Omega=\sqrt{\delta\omega^2+\Omega_1^2-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\tau_1}-\dfrac{1}{\tau_2}\right)^2}\simeq\sqrt{\delta\omega^2+\Omega_1^2}\end{array}\right\} \qquad (5\text{-}13)$$

L'égalité rigoureuse des deux constantes de temps τ_1 et τ_2 permet de retrouver la pulsation de Rabi généralisée hors résonance, obtenue au chapitre 1 en (1-17) : elle conduit aussi à l'égalité de r et γ.

Généralisant le cadre de l'hypothèse (5-4), nous admettrons :

$$|\delta\omega| \qquad \text{ou} \qquad \Omega_1 \gg \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right| \qquad (5\text{-}14)$$

On peut alors à partir des solutions (5-12) et (5-13) faire un développement limité en fonction de la petite quantité $1/\tau_2-1/\tau_1$ et l'on obtient des solutions approchées, suffisantes pour la comparaison avec les expériences :

$$\left.\begin{array}{l} x=-r\simeq-\left[\dfrac{1}{\tau_2}-\left(\dfrac{1}{\tau_2}-\dfrac{1}{\tau_1}\right)\dfrac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2+\Omega_1^2}\right]\\ x=-\gamma\pm i\Omega \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l}\gamma\simeq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tau_1}+\dfrac{1}{\tau_2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tau_2}-\dfrac{1}{\tau_1}\right)\dfrac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2+\Omega_1^2}\\ \Omega \text{ inchangé par rapport à (5-13)}\end{array}\right.\end{array}\right\} \qquad (5\text{-}15)$$

Suivant la valeur de l'écart à résonance $\delta\omega$, la constante réelle r varie entre $1/\tau_2$ et $1/\tau_1$; la partie réelle γ des constantes complexes varie entre la valeur précédente (5-13) et $1/\tau_2$.

La solution oscillante amortie que nous obtenons alors est très voisine de la solution obtenue dans le cas résonnant ; elle s'en distingue essentiellement sous deux aspects :

1) Cette oscillation amortie est centrée sur l'exponentielle réelle $C\mathbf{e}^{-rt}$ qui ajoute une courbure d'ensemble vers le haut ou vers le bas selon le signe positif ou négatif de la constante C (*cf.* Fig. 5.2).

2) L'amplitude de l'oscillation est déterminée par la solution stationnaire $(m_0 - m_S)$; elle est donc d'autant moins importante que l'écart $\delta\omega$ est plus grand.

À la fin de ce paragraphe, nous récrivons l'équation caractéristique (5-11) sous forme développée :

$$x^3 + x^2\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{2}{\tau_2}\right) + x\left(\delta\omega^2 + \Omega_1^2 + \frac{1}{\tau_2^2} + \frac{2}{\tau_1\tau_2}\right) + \frac{\delta\omega^2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\left(\Omega_1^2 + \frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) = 0 \quad (5\text{-}16)$$

Ceci permet, en cas de besoin, d'écrire l'équation différentielle sans second membre, en remplaçant x^3 par $\dfrac{\mathrm{d}^3 m}{\mathrm{d}t^3}$, x^2 par $\dfrac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2}$, x par $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, et en multipliant par m le terme constant (et de même pour u et v).

Remarque 5.1 – La solution générale peut s'écrire de manière plus précise sous la forme :

$$m(t) - m_S = (m_0 - m_S)\left[(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\,\mathbf{e}^{-\gamma t} + C\mathbf{e}^{-rt}\right] \quad (5\text{-}17)$$

et $v(t)$ peut être obtenu grâce à (5-2) à partir de la dérivée de $m(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (m_0 - m_S)\left[\Omega\big(-A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\big)\,\mathbf{e}^{-\gamma t} - \gamma\big(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\big)\,\mathbf{e}^{-\gamma t} - rC\mathbf{e}^{-rt}\right]$$

Les constantes A, B et C sont déterminées par les conditions initiales au temps $t = 0$, auquel débute l'irradiation des atomes, telles que $m(0) = m_0$:

$$m(0) - m_S = m_0 - m_S = (m_0 - m_S)(A + C) \Longrightarrow A + C = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = (m_0 - m_S)\left[\Omega B - \gamma A - rC\right]$$
$$\Longrightarrow \Omega B = \gamma A + rC = \gamma + (r - \gamma)C = r + (\gamma - r)A$$

L'hypothèse $\Omega \gg \gamma$ conduit à une constante B petite devant A et C

$$\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2}(0) = \Omega_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = -\Omega_1^2 m_0 = (m_0 - m_S)\left[-\Omega^2 A + \gamma^2 A - 2\gamma\Omega B + r^2 C\right]$$

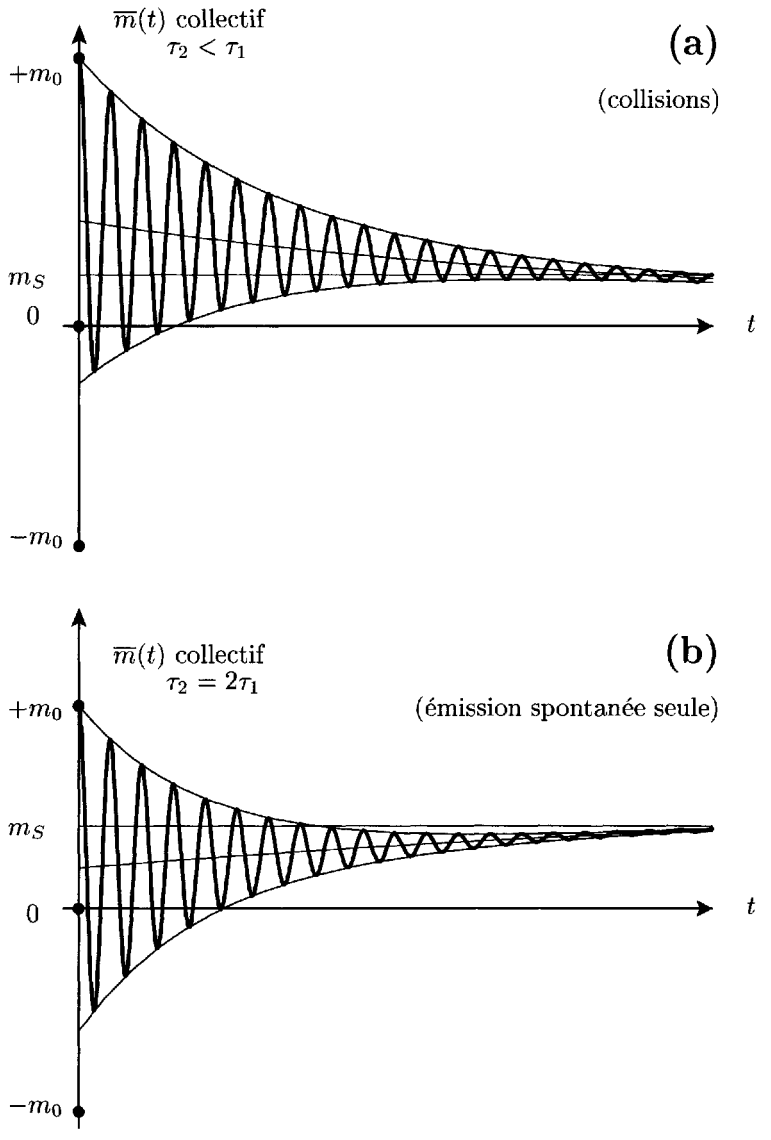


FIG. 5.2 - *Transitoires collectifs hors résonance* ($\delta\omega \neq 0$). *Le calcul des constantes d'intégration permet d'obtenir l'amplitude de l'exponentielle réelle* $C = \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \frac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2 + \Omega_1^2}$ *c'est-à-dire que le signe de* C *change selon que* τ_2 *est inférieur à* τ_1 *(cas (a)) ou bien supérieur à* τ_1 *(cas (b)).*

soit

$$\Omega_1^2 \frac{m_0}{m_0 - m_S} = A\left[\Omega^2 - \gamma^2 + r^2 + 2\gamma(\gamma - r)\right] + 2\gamma r - r^2$$

ou en utilisant (3-4)

$$\Omega_1^2 + \delta\omega^2 \frac{\tau_2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1\tau_2} = A[\Omega^2 + (\gamma - r)^2] + r(2\gamma - r)$$

d'où

$$A = \frac{\Omega_1^2 + \delta\omega^2 \frac{\tau_2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1\tau_2} + r(r - 2\gamma)}{\Omega_1^2 + \delta\omega^2 + (\gamma - r)^2} \simeq \frac{\Omega_1^2 + \delta\omega^2 \frac{\tau_2}{\tau_1}}{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}$$

$$C = 1 - A \simeq \frac{\delta\omega^2 (1 - \tau_2/\tau_1)}{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}$$

approximations valables dans l'hypothèse ci-dessus où $\Omega \gg \gamma$ et r.

Remarque 5.2 – **Le cas $\tau_1 = \tau_2$** conduit à des calculs particulièrement simples puisque, avec les conditions initiales de ce paragraphe, la constante C de l'exponentielle réelle se réduit à zéro (mais $C \neq 0$ avec d'autres conditions initiales ; *cf.* chapitre 6). La solution générale (5-17) ressemble alors à la formule (5-6), avec seulement la valeur différente de $\Omega = \sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2}$. (*cf.* (5-13)). De même pour la variable $v(t)$ la solution se réduit à la formule (5-7) avec cette nouvelle valeur de Ω.

Pour la troisième variable $u(t)$, en tenant compte de la valeur nulle de sa dérivée initiale $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t(0) = 0$, on obtient un résultat simple, ressemblant à la formule de $m(t)$:

$$u(t) = u_S - u_S \mathbf{e}^{-\gamma t}\left[\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right] \tag{5-18}$$

L'écriture des solutions stationnaires (3-3) peut être simplifiée en utilisant le paramètre Ω et la constante d'amortissement $\gamma = 1/\tau_1 = 1/\tau_2$:

$$m_0 - m_S = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2 + \gamma^2} \quad u_S = -m_0 \frac{\Omega_1 \delta\omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \quad v_S = -m_0 \frac{\Omega_1 \gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \tag{5-19}$$

À partir de (5-6) on calculera : $m_0 - m(t)$. L'expression (5-7) de $v(t)$ peut être simplifiée en remarquant que

$$\frac{1}{\Omega}(\Omega_1 m_0 + \gamma v_S) = m_0 \frac{\Omega_1}{\Omega}\left(1 - \frac{\gamma^2}{\Omega^2 + \gamma^2}\right) = m_0 \frac{\Omega_1 \Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} = -\frac{\Omega}{\gamma} v_S$$

on obtient :

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= -m_0 \frac{\Omega_1 \delta\omega}{\Omega^2 + \gamma^2}\left[1 - \mathbf{e}^{-\gamma t}\left(\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right] \\ v(t) &= -m_0 \frac{\Omega_1 \gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}\left[1 - \mathbf{e}^{-\gamma t}\left(\cos\Omega t + \frac{\Omega}{\gamma}\sin\Omega t\right)\right] \\ (m_0 - m(t)) &= m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2 + \gamma^2}\left[1 - \mathbf{e}^{-\gamma t}\left(\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

La quantité $m_0 - m(t)$ est plus simple à écrire ; et c'est elle aussi qui représente la partie variable de la population de l'état supérieur, que l'on mesure dans de nombreuses expériences :

$$\beta^*\beta(t) = \frac{1 - m(t)}{2} = \frac{1 - m_0}{2} + \frac{m_0 - m(t)}{2}$$

5.3 Comparaison des oscillations atomiques individuelles avec l'oscillation collective

Lorsque nous avons calculé au chapitre 1 la probabilité pour un atome isolé d'être dans l'état d'énergie supérieur, nous avons trouvé une fonction sinusoïdale qui dure indéfiniment, aussi longtemps, du moins, que l'atome reste soumis au champ $\mathcal{E}_1 \cos\omega t$ de l'onde (oscillation de Rabi). Nous aurions obtenu le même résultat en résolvant le système d'équations différentielles (2-10) obtenu au §2.2 pour les variables de Bloch avant l'introduction des termes d'émission spontanée ou de collisions. Mais ces phénomènes perturbateurs sont aléatoires, imprévisibles pour un atome isolé, et il est donc impossible de les décrire par une équation.

Cependant, lorsque un processus d'émission spontanée se produit (nous ne parlerons pas ici des collisions), il interrompt l'oscillation de Rabi : avant l'émission du photon spontané, nous pouvions prédire que l'atome était dans la superposition cohérente d'états quantiques (1-14) $|\varphi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\varphi_\alpha\rangle + \beta(t)\,|\varphi_\beta\rangle$ avec la probabilité $\alpha^*\alpha$ d'être dans l'état inférieur E_a et la probabilité $\beta^*\beta$ d'être dans l'état d'énergie supérieure E_b. L'émission du photon spontané à un instant t produit la *réduction du paquet d'onde* : en effet, nous pouvons observer ce photon spontané parce qu'il se propage en dehors de l'onde incidente (à condition d'utiliser un nombre de détecteurs suffisant pour couvrir la totalité de l'angle solide) ; *juste après l'observation de ce photon, nous sommes certains que l'atome est dans l'état inférieur E_a, c'est-à-dire que $\beta^*\beta = 0$.*

Nous admettons que le processus d'émission spontanée apparaît comme instantané, comparé aux autres processus d'évolution. Cela est conforme à un résultat général, que l'on peut exprimer qualitativement sous la forme suivante : la durée d'un processus est de l'ordre de grandeur du temps de corrélation de l'interaction qui le provoque. Or le phénomène d'émission spontanée est considéré comme une émission induite par les fluctuations électromagnétiques du vide ; et celles-ci ont un temps de corrélation τ_c très inférieur à la période $2\pi/\omega_0$, correspondant à la fréquence atomique (*cf.* le livre « Photons et atomes (processus d'interaction) » C. Cohen-Tannoudji *et al.*, EDP Sciences, 1988). Il est donc légitime de **décrire l'émission spontanée par un saut quantique instantané** qui sera représenté sur un diagramme temporel par une flèche verticale.

À défaut de pouvoir prédire l'avenir d'un atome isolé, compte tenu du caractère aléatoire de l'émission spontanée ; nous pouvons **décrire après coup son histoire** si nous avons enregistré tous les instants d'émission des photons spontanés. Cette description est réalisée sur la figure 5.3 où nous représentons en fonction du temps la probabilité $\beta_1\beta_1^*$ pour un atome particulier numéroté 1, d'être dans l'état E_b. Les flèches verticales partant de la sinusoïde vers $\beta^*\beta = 0$ représentent les émissions spontanées observées à certains instants t soigneusement enregistrés. On a choisi comme instant initial, $t = 0$, le moment où débute brusquement l'irradiation de l'atome avec

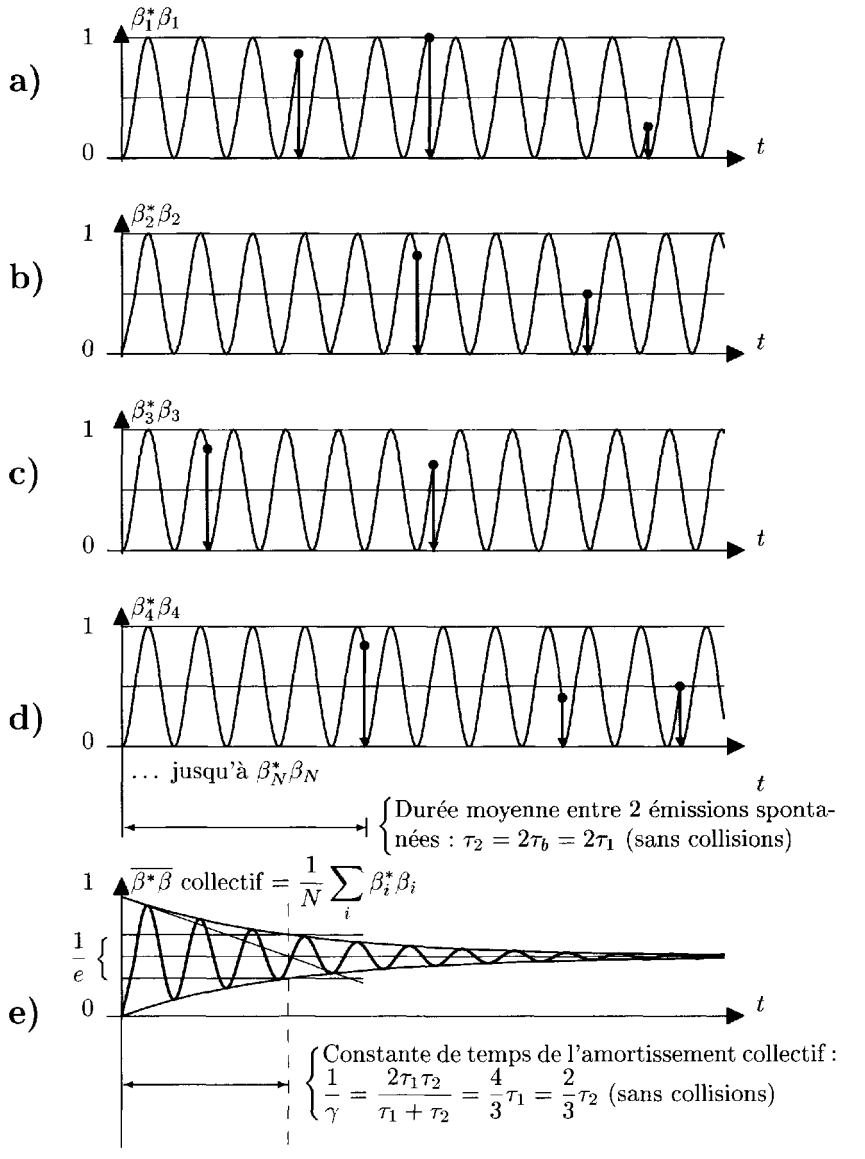


FIG. 5.3 – *Oscillation de Rabi cohérente et émission spontanée aléatoire (à résonance exacte $\delta\omega = 0$, et dans des conditions de saturation : $\Omega_1 \gg \gamma$). (a), (b) (c), (d), ... : histoires individuelles d'atomes (numérotés 1, 2,* etc.*) ; (e) : moyenne calculée sur l'ensemble des atomes $\beta^*\beta = (1-m)/2$.*

l'onde $\mathcal{E}_1 \cos\omega t$ (supposée *à la résonance exacte* : $\delta\omega = 0$ par souci de simplicité). L'oscillation de Rabi, avec la pulsation Ω_1, se traduit par des portions de sinusoïdes qui démarrent de $\beta^*\beta = 0$ chaque fois que l'atome se trouve avec certitude dans l'état inférieur E_a.

Nous avons représenté de la même façon sur les figures (b) (c) (d) les histoires de trois autres atomes particuliers, afin de donner une image de la répartition aléatoire au cours du temps des émissons spontanées. Mais cette répartition aléatoire est soumise à une loi de probabilité très stricte : la probabilité par unité de temps de l'émission spontanée est nulle si l'atome est dans l'état E_a et vaut $1/\tau_b$ si l'atome est dans l'état E_b (τ_b durée de vie du niveau excité E_b). Pour l'atome dans l'état de superposition cohérente (1-14) et en appliquant (1-21), compte tenu de la résonance exacte ($\Omega = \Omega_1$), la probabilité par unité de temps vaut donc :

$$\frac{1}{\tau_b}\beta^*\beta = \frac{1}{\tau_b}\sin^2\frac{\Omega_1}{2}t = \frac{1}{2\tau_b}(1 - \cos\Omega_1 t) \qquad (5\text{-}21)$$

La probabilité d'émission d'un photon spontanée est donc plus grande pour les instants correspondant aux parties hautes des sinusoïdes, et plus petite pour les instants correspondant aux parties basses, où l'atome a une plus grande probabilité d'être dans l'état inférieur E_a. On en déduit encore que la valeur moyenne sur le temps de cette probabilité vaut $1/2\tau_b$ dans le cas représenté sur la figure (où $\Omega_1\tau_b \gg 1$). Cela veut dire encore que la durée moyenne qui sépare deux émissions spontanées successives vaut $2\tau_b$; elle est double de la durée de vie du niveau excité E_b.

Lorsqu'on réalise une expérience sur *une collection de N atomes*, on peut mesurer par exemple le nombre de photons spontanés émis pendant une durée δt courte et constante ; ce nombre est proportionnel à la population de l'état excité : $n_b = \sum_{i=1}^{N} \beta_i^*\beta_i = N\overline{\beta^*\beta}$. Si cette durée δt est suffisamment courte ($\delta t \ll 1/\Omega_1$) on peut observer l'oscillation de Rabi collective de la probabilité moyenne $\overline{\beta^*\beta}$. Mais le déphasage des sinusoïdes individuelles dû à l'interruption aléatoire des émissions spontanées produit un amortissement de l'oscillation collective, représentée sur la figure 5.3e, conformément à l'équation (5-6) calculée au §5.1. La figure 5.3 est tracée dans le cas idéal, en l'absence de collisions ; c'est-à-dire que le temps d'évolution des variables croisées u et v est $\tau_2 = 2\tau_b$, double du temps d'évolution des populations $\tau_1 = \tau_b$. La constante d'amortissement γ calculée à partir des équations de Bloch est la moyenne de $1/\tau_1$ et $1/\tau_2$ (*cf.* (5-13)) et l'on en déduit le temps caractéristique de l'amortissement collectif :

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \Rightarrow \text{Constante de temps } \frac{1}{\gamma} = \frac{2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{4}{3}\tau_b \qquad (5\text{-}22)$$

En définitive, il n'y a pas de contradiction entre le calcul sur un atome isolé au chapitre 1 et le calcul des §5.1 et 5.2 sur un système collectif à partir des équations de Bloch : l'oscillation de Rabi calculée pour chaque atome

particulier se poursuit indéfiniment, mais les retours à l'état inférieur dus aux émissions spontanées produisent progressivement des déphasages aléatoires entre les oscillations individuelles, et la somme des sinusoïdes individuelles tend vers une valeur moyenne constante au cours du temps. On comprend ainsi l'amortissement de l'oscillation collective représentée sur la figure 5.3e.

Dans le cas particulier représenté sur la figure 5.3 (résonance exacte et forte saturation), la valeur constante symptotique de la probabilité $\beta^*\beta$ vaut $1/2$, c'est-à-dire que l'onde tend à égaliser les populations moyennes des deux niveaux E_a et E_b. Mais cette valeur asymptotique peut être beaucoup plus faible si le champ $\mathcal{E}_1$ de l'onde est réduit ou s'il y a un écart de fréquence $\delta\omega$ important. Dans tous les cas, la valeur asymptotique est égale à la valeur stationnaire calculée à partir de la solution stationnaire des équations de Bloch au chapitre 3.

En définitive l'oscillation de Rabi collective peut être observée seulement transitoirement, pendant une durée limitée, de quelques τ_1 ou τ_2, suivant le brusque début de l'irradiation lumineuse ; nous verrons dans le paragraphe suivant des exemples de son observation. Mais passé ce délai, l'oscillation collective transitoire est amortie, et les mesures collectives sur l'ensemble des atomes sont conformes à la solution stationnaire des équations de Bloch, bien que chaque atome continue individuellement à subir l'oscillation de Rabi.

Nous avons choisi de représenter sur la figure 5.3e la seule variable $\overline{\beta^*\beta}$ (population de l'état excité) ; mais tout ceci est aussi vrai, bien entendu, pour les autres variables qui caractérisent les atomes étudiés.

Dans les expériences les plus courantes, où les variations d'intensité lumineuse ne sont pas trop brusques, ou bien où l'on ne dispose pas d'appareils d'enregistrement suffisamment rapides, on ne peut observer en pratique que les solutions stationnaires des équations de Bloch, même aux fortes intensités lumineuses qui provoquent les oscillations de Rabi individuelles des atomes. Nous avons vu également au § 3.2 que le modèle des probabilités de transition d'Einstein conduit au même résultat stationnaire que les équations de Bloch (on peut considérer, en quelque sorte, les probabilités de transition d'Einstein comme des valeurs moyennes constantes des probabilités de transition oscillantes des atomes individuels, lorsque leurs oscillations de Rabi ont été brouillées par les émissions spontanées).

Ceci permet d'utiliser le modèle d'Einstein dans tous les phénomènes où les variations de l'intensité lumineuse et des populations atomiques sont lentes comparées à la plus courte des deux constantes de temps τ_1 et τ_2. C'est la très courte valeur du temps τ_2 dans la plupart des lasers qui permet l'utilisation du modèle d'Einstein (ou des « rate equations ») pour la théorie simple des lasers (*cf.* partie II de cet ouvrage).

Remarque 5.3 – Nous n'avons pas parlé des processus de collisions dans ce paragraphe, bien qu'ils contribuent aussi à brouiller les oscillations de Rabi individuelles, (et concourent à réduire le temps τ_2) parce que leur prise en compte est plus complexe, et nous obligerait à distinguer plusieurs types de collisions. Il existe par exemple des collisions inélastiques, dites de « Quenching », où l'énergie interne de l'atome étudié peut être transformée en énergie de vibration ou rotation de la molécule qui le rencontre ; et dans ce cas l'atome excité retourne à l'état inférieur E_a (sans émission de photon) et nous pourrions utiliser la même représentation que celle de la figure 5.3. Mais la plupart des collisions produisent des modifications temporaires extrêmement brèves des valeurs d'énergie E_a et E_b, c'est-à-dire de l'écart de fréquence $\delta\omega$; ce sont ces changements temporaires très brefs de $\delta\omega$ qui produisent, à des instants aléatoires, des changements de phase, dont l'amplitude est aussi aléatoire. Ce processus a pour effet de brouiller beaucoup plus rapidement les oscillations de Rabi individuelles (τ_2 très court) sans modifier notablement les populations atomiques (τ_1 peu modifié) (*cf.* chapitre 13).

Remarque 5.4 – Un autre aspect de la figure 5.3 mérite un commentaire plus approfondi : c'est la différence entre l'intervalle moyen de deux émissions spontanées successives sur les diagrammes individuels et la constante de temps de l'amortissement collectif sur le diagramme (e). Ce résultat peut paraître surprenant. En effet, si les sinusoïdes sont interrompues avec un déphasage aléatoire, on calcule facilement que leur somme est amortie avec une constante de temps égale à l'intervalle moyen entre deux interruptions. Mais dans le cas présent (émission spontanée seule), toutes les sinusoïdes redémarrent après l'interruption avec la même phase. On a remarqué que les interruptions les plus nombreuses d'après (5-21) se situent dans la partie haute des sinusoïdes interrompues ; c'est-à-dire que les sinusoïdes interrompues sont en majorité remplacées par de nouvelles sinusoïdes qui sont presque en opposition de phase. Ce phénomène contribue à brouiller beaucoup plus rapidement les oscillations individuelles et explique la décroissance plus rapide de l'oscillation collective.

Le fait que le brouillage des oscillations de Rabi individuelles conduise au même résultat que les équations de Bloch peut être vérifié par simulation des sauts quantiques aléatoires sur ordinateur (réf. [2]). Cette simulation est cependant un peu plus compliquée qu'il n'y paraît à première vue. La représentation des « histoires » des atomes sur la figure 5.3 par des simples sinusoïdes de Rabi est en effet une simplification : le fait qu'on n'ait pas observé de photon spontané entre deux sauts quantiques successifs du même atome apporte une information supplémentaire sur cet atome ; c'est l'équivalent d'une « mesure » dont la connaissance modifie la description de son état quantique ; et il faut écrire une légère correction aux oscillations de Rabi (qui n'étaient qu'une prévision avant mesure ; *cf.* réf. [2]). En tenant compte de cette correction la simulation sur ordinateur permet de retrouver exactement la solution des équations de Bloch.

La correction, dont nous venons de parler, devient faible et négligeable lorsque la fréquence de Rabi Ω_1 devient très grande ($\Omega_1\tau_2 \gg 1$). Ceci nous autorise à calculer, dans cette hypothèse, une estimation approchée de la pente de la tangente d'amortissement de la courbe 5.3-(e) au voisinage de l'origine des temps. En l'absence d'émission spontanée, la somme de toutes les sinusoïdes individuelles

s'écrirait

$$S(t) = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}\cos\Omega_1 t$$

En fait la somme $S(t)$ des sinusoïdes individuelles doit s'écrire :

$$S(t) = \frac{N}{2} - A(t)\cos\Omega_1 t$$

où $A(t)$ est une fonction décroissante à partir de $A(0) = N/2$.

Nous nous plaçons à un instant $t_0 \ll \tau_b$; en utilisant (5-21) nous sommes capables de calculer le nombre des sinusoïdes interrompues entre t_0 et $t_0 + \delta t$:

$$\delta N = N\frac{1}{2\tau_b}(1 - \cos\Omega_1 t_0)\,\delta t$$

pour chacune de ces sinusoïdes individuelles, nous devons remplacer le terme $\cos\Omega_1 t$ par $\cos\Omega_1(t - t_0)$. La variation produite sur la somme $S(t)$ vaut donc :

$$\begin{aligned}\delta S &= -\delta N\left[\frac{\cos\Omega_1(t-t_0)}{2} - \frac{\cos\Omega_1 t}{2}\right] \\ &= -\frac{\delta N}{2}\left[\cos\Omega_1 t\cos\Omega_1 t_0 + \sin\Omega_1 t\sin\Omega_1 t_0 - \cos\Omega_1 t\right] \\ \delta S &= -\frac{\delta N}{2}\left[\cos\Omega_1 t(\cos\Omega_1 t_0 - 1) + \sin\Omega_1 t\sin\Omega_1 t_0\right]\end{aligned}$$

le terme en $\sin\Omega_1 t$ montre que la sinusoïde globale $S(t)$ pourrait se trouver légèrement déphasée et déformée. En fait, l'hypothèse $\Omega_1\tau_b \gg 1$ nous autorise à calculer la valeur moyenne de la correction δS en faisant varier t_0 sur une période $2\pi/\Omega_1$ de l'oscillation de Rabi. Il est alors facile de montrer que l'amplitude $(\delta N/2)\sin\Omega_1 t_0$ se moyenne alors à zéro :

$$\left\langle \frac{\delta N}{2}\sin\Omega_1 t_0 \right\rangle = \frac{N\delta t}{4\tau_b}\left(\langle\sin\Omega_1 t_0\rangle - \langle\sin\Omega_1 t_0\cdot\cos\Omega_1 t_0\rangle\right) = 0$$

Nous calculons donc la variation δA de l'amplitude $A(t)$ du terme en $\cos\Omega_1 t$

$$\delta A = \frac{\delta N}{2}(\cos\Omega_1 t_0 - 1) = -\frac{N\delta t}{4\tau_b}(1 - \cos\Omega_1 t_0)^2$$

en remplaçant δN par l'expression calculée plus haut. Tenant compte du fait qu'au temps $t_0 \ll \tau_b$ l'amplitude $A(t)$ est voisine de $N/2$, nous pouvons écrire de manière approchée :

$$-\frac{1}{A}\cdot\frac{\delta A}{\delta t} \simeq +\frac{1}{2\tau_b}(1 - \cos\Omega_1 t_0)^2 = \frac{1}{2\tau_b}(1 + \cos^2\Omega_1 t_0 - 2\cos\Omega_1 t_0)$$

Pour que cette décroissance d'amplitude ait une réelle signification physique, il faut faire sa valeur moyenne en faisant varier t_0 sur une période de l'oscillation :

$$-\frac{1}{A}\left\langle\frac{\delta A}{\delta t}\right\rangle = \frac{1}{2\tau_b}\left(1 + \langle\cos^2\Omega_1 t_0\rangle - 2\langle\cos\Omega_1 t_0\rangle\right) = \frac{1}{2\tau_b}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4\tau_b} = \gamma$$

en tenant compte des valeurs moyennes $\langle\cos^2\Omega_1 t_0\rangle = 1/2$ et $\langle\cos\Omega_1 t_0\rangle = 0$, on retrouve bien la constante d'amortissement γ calculée avec les équations de Bloch.

5.4 Observation expérimentale de l'oscillation collective

Remarquons d'abord que l'oscillation de Rabi à résonance ou l'oscillation de Rabi généralisée, hors résonance, apparaissent aussi bien si l'on mesure la variation des populations atomiques M ou l'absorption de l'onde incidente proportionnelle à $|v|$.

Les conditions d'observation de ces phénomènes transitoires dépendent au contraire de conditions assez strictes qui découlent des calculs précédents :

a) nécessité d'irradier les atomes de manière brutale : c'est-à-dire que l'intensité de l'onde doit passer de la valeur zéro à une valeur importante dans une durée inférieure aux constantes de temps τ_1 et τ_2 qui caractérisent ces atomes ;

b) possibilité d'enregistrer la grandeur mesurée avec une rapidité comparable ; c'est-à-dire que le résultat d'une mesure doit être obtenu en une durée qui soit une faible fraction de ces mêmes temps τ_1 et τ_2 ;

c) nécessité d'une fréquence de Rabi assez élevée pour que l'on observe plusieurs périodes de l'oscillation $T = 2\pi/\Omega_1$ avant son amortissement c'est-à-dire pendant une durée de l'ordre des deux temps caractéristiques τ_1 et τ_2. Pour simplifier la discussion, on peut remplacer ces deux temps par leur moyenne géométrique $\sqrt{\tau_1\tau_2}$; ce qui conduit à la condition : $\Omega_1\sqrt{\tau_1\tau_2} \gg 1$ ou encore $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gg 1$. L'intensité de l'onde doit être assez importante pour saturer très largement la transition.

Ces conditions sont beaucoup plus faciles à réaliser pour les transitions en radiofréquence, parce que les temps de relaxation τ_1 et τ_2 qui interviennent dans ce domaine de fréquence sont généralement beaucoup plus longs (valeurs typiques : 1 milliseconde, voire 1 seconde) que les durées de vie spontanée 10^{-9} à 10^{-7} seconde qui sont de règle dans les transitions optiques. Au surplus, les développements techniques des générateurs de radio ou de radar permettent, depuis l'après-guerre 1939–1945, de réaliser facilement des intensités suffisantes pour saturer les transitions. Il n'est donc pas étonnant que l'observation de transitoires collectifs conformes à la figure 5.1 ait été faite pour la première fois par Torrey dès 1949 dans des expériences de Résonance Magnétique en basse fréquence, où l'on enregistre sur l'oscillographe en fonction du temps, la puissance de l'onde incidente qui est absorbée par les spins des protons dans un échantillon d'eau (χ'' ou $|v|$) (réf. [1]). Ces transitoires en Résonance Magnétique sont à la fois des applications des calculs de ce chapitre 5 et un prolongement du chapitre 4.

Nous reproduisons sur la figure 5.4 des transitoires de Résonance Magnétique tout à fait analogues à ceux de Torrey, enregistrés sur une vapeur de l'isotope 199 du mercure, qui possède un spin nucléaire 1/2 comme les protons de l'eau (réf. [3] et [4]). Dans le cas d'une vapeur à très faible pression, le nombre de spins est extrêmement réduit par rapport à un échantillon liquide (dans le rapport 10^{-6} ou 10^{-9}) l'absorption de l'onde radio devient

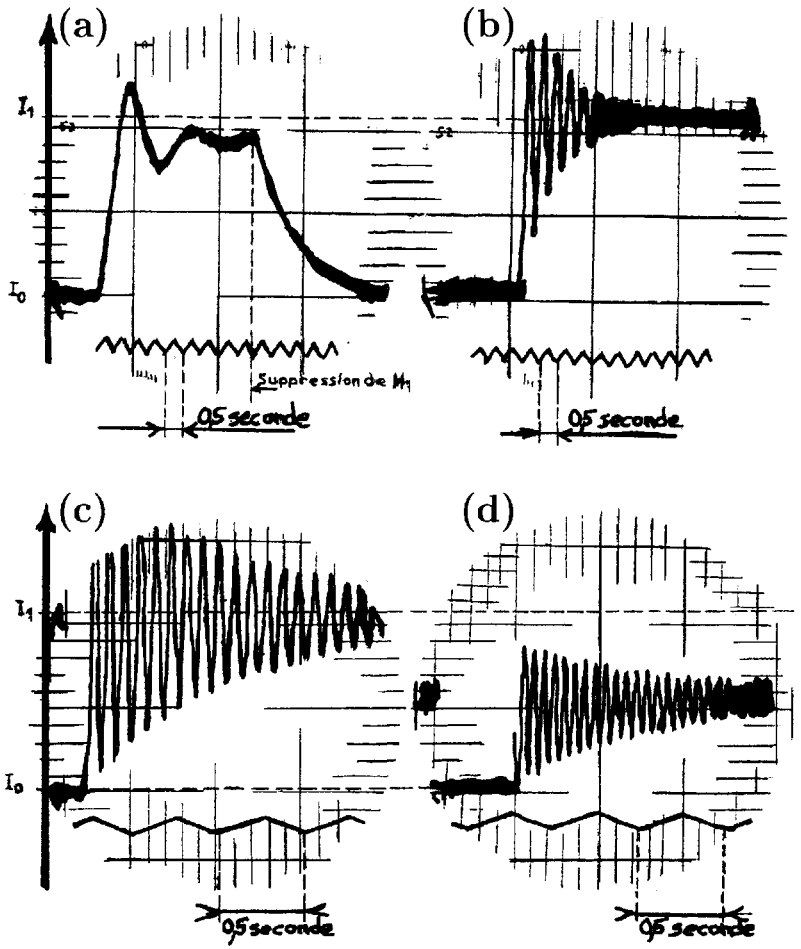


FIG. 5.4 – *Observation des transitoires en radiofréquence (Résonance Magnétique Nucléaire de l'isotope 199 du mercure) – La vapeur atomique est sondée optiquement, et on mesure l'intensité lumineuse réémise par les atomes, qui est proportionnelle à la population d'un seul des deux sous-niveaux Zeeman* $m = \pm 1/2$. *Un signal triangulaire de* 0.5 *seconde donne l'échelle de temps qui a été dilatée sur les enregistrement (c) et (d). Chaque enregistrement est obtenu à l'application brusque de l'onde radio avec une intensité croissante de (a) à (b) puis (c). Les trois enregistrements (a), (b) et (c) sont obtenus à la résonance exacte* ($\delta\omega = 0$). *L'enregistrement (d) est obtenu avec la même intensité que (c) mais avec un écart à résonance* $\delta\omega/2\pi \simeq 11Hz \simeq \Omega_1/2\pi$.

impossible à mesurer directement. Mais la méthode de pompage optique en lumière polarisée permet de mesurer la différence des populations m des deux niveaux E_+ et E_- correspondant à des spins orientés en sens opposés (sous-niveaux Zeeman $\pm 1/2$).

Dans cette expérience de double résonance, on utilise la lumière de résonance optique comme instrument de mesure pour observer l'évolution temporelle des populations des deux sous-niveaux Zeeman sous l'action résonnante d'une onde radioélectrique. Dans le cas particulièrement simple du mercure 199, les règles de sélection optiques (fondées sur la conservation du moment cinétique) font que la lumière polarisée circulairement ne peut interagir qu'avec un seul des deux états de spins opposés E_+ et E_- (chacun des sens de rotation opposés de la polarisation interagit avec un état de spin opposé : E^+ pour l'un des sens de rotation, E^- pour l'autre sens). Lorsque la vapeur est éclairée en lumière résonnante polarisée circulairement, elle réémet spontanément une lumière de fluorescence (ou de résonance optique) dont l'intensité est proportionnelle au nombre des atomes excités, c'est-à-dire aussi au nombre des atomes dans l'état du spin qui permet l'interaction avec la lumière. L'intensité de fluorescence, mesurée avec une cellule photoélectrique (ou un photomultiplicateur) est enregistrée sur l'écran d'un oscillographe cathodique ; elle indique les variations en fonction du temps de la population d'un seul état de spin sous l'action de l'onde radioélectrique de fréquence résonnante ($\omega = |\gamma| B_0 = (E_+ - E_-)/\hbar$) ou quasi résonnante. On observe bien l'oscillation de Rabi collective, dont la fréquence Ω_1 croît avec l'intensité de l'onde radio. Elle est amortie avec une constante de temps exponentielle $2\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)$ qui est ici de l'ordre de la seconde ; on atteint ainsi une mesure des temps de relaxation τ_1 et τ_2 qui caractérisent l'évolution spontanée de l'orientation des spins dans les phénomènes aléatoires de collisions.

Ce type d'expérience, courant dans le domaine des ondes radio, est beaucoup plus difficile dans le domaine des ondes lumineuses, et ceci pour deux raisons :

1) Compte tenu de la très courte durée des états excités optiques (couramment 10^{-9} à 10^{-7} seconde) il faut disposer d'une intensité lumineuse exceptionnelle pour réaliser la condition de forte saturation $\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \gg 1$. Seuls des lasers assez puissants permettent de l'obtenir.

2) Une autre difficulté tient à la réalisation de la condition de résonance pour la fréquence optique dans un gaz, compte tenu de l'importance de l'effet Doppler-Fizeau (alors que cet effet est le plus souvent négligeable dans le domaine des radiofréquences). En effet, chaque atome du gaz ayant une vitesse d'agitation thermique dont la composante sur la direction Oz du faisceau laser est v_z, voit dans son propre repère la fréquence ω du laser décalée de $\delta\omega_L = (v_z/c)\omega_L$. Seuls sont en interaction forte avec la lumière les atomes ou les molécules dont la vitesse v_z vérifie la condition de résonance :

$$\omega_L + \delta\omega_L = \omega_L \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

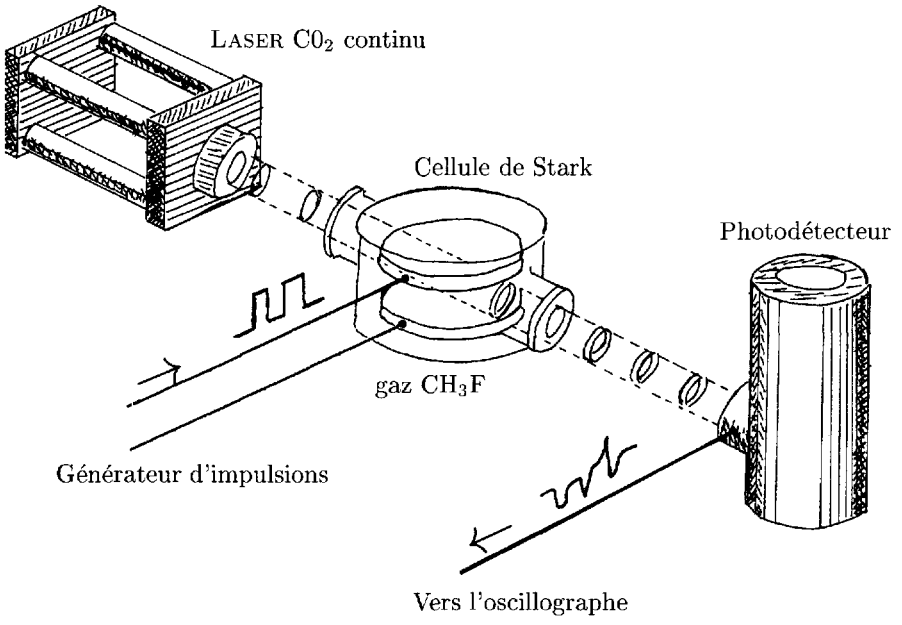


FIG. 5.5 – *Dispositif expérimental pour l'observation des transitoires optiques dans les molécules de CH_3F (d'après Brewer et Shoemaker [5, 6] avec la permission de l'American Physical Society). Le faisceau lumineux Infrarouge issu du laser à CO_2, parallèle à l'axe $0z$, joue un double rôle :*

1) il produit le transitoire lorsque l'application brusque d'un champ électrique dans la cellule de Stark met en résonance une nouvelle classe de vitesse v'_z ;
2) son absorption à travers la cellule de Stark permet de détecter l'évolution des molécules de cette classe de vitesse v'_z entre les deux niveaux d'énergie concernés.

on dit que ces atomes constituent la classe de vitesse v_z. La proportion des atomes « résonnants », appartenant à la classe de vitesse v_z est déterminée grossièrement par le rapport entre la largeur naturelle de la raie optique et sa largeur Doppler, déterminée par la théorie cinétique des gaz (*cf.* §13.3) : cette proportion est généralement comprise entre 1/100 et 1/1000 pour les fréquences ω_L visibles, mais elle peut monter à 10 % pour les fréquences ω_L de l'infrarouge moyen.

L'expérience réalisée en 1971 par Brewer et Shœmaker est dans ce domaine I-R ; elle utilise un laser à CO_2, au voisinage de la longueur d'onde $\lambda = 9.7\mu m$, en résonance avec une transition de rotation-vibration des molécules d'une vapeur de fluorure de méthyle CH_3F (*cf.* Fig. 5.5 ; réf. [5] et [6]). Pour l'interprétation simple de l'expérience, il est nécessaire que l'intensité de l'onde

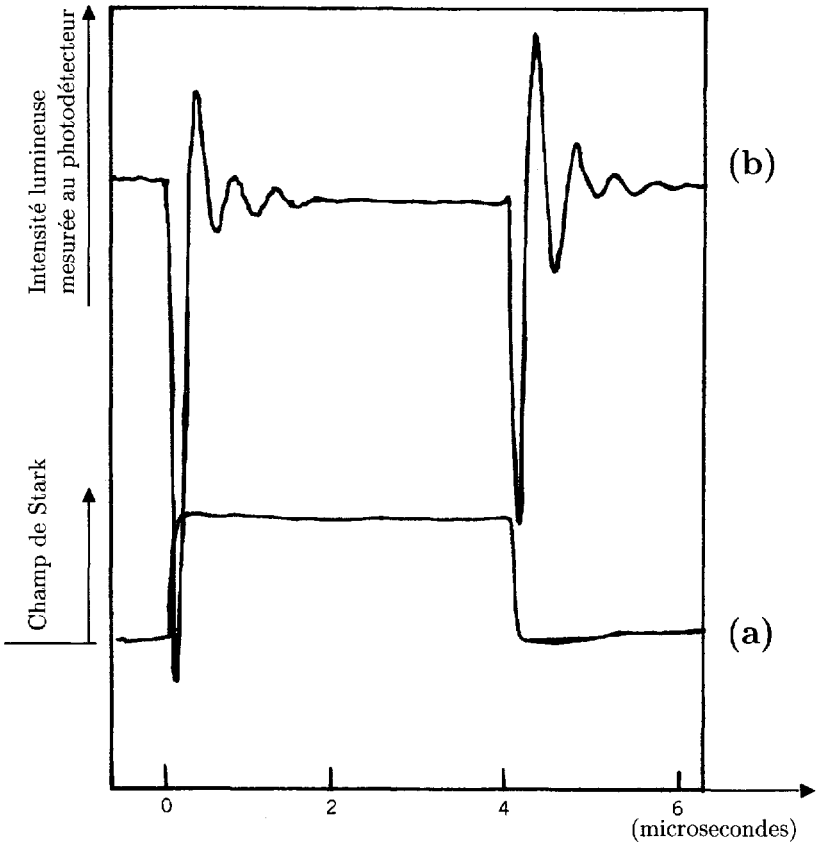


FIG. 5.6 – *Transitoires optiques enregistrés en fonction du temps dans l'expérience schématisée sur la figure 5.5. (a) champ électrique appliqué entre les deux disques horizontaux de la cellule de Stark (créneau de 35 volt/cm) ; (b) intensité du faisceau lumineux Infra-Rouge au photodétecteur après traversée de la cellule de Stark. On observe l'oscillation de la transparence de la vapeur après chaque variation brutale du champ électrique. La classe de vitesse qui devient résonnante (v'_z à la montée du créneau ; v_z à la descente) est saturée ($\Omega_1 \tau \simeq 5$) (d'après la réf. [6], avec la permission de l'American Institute of Physics).*

lumineuse reste constante après son application brutale ; et ceci est difficile à réaliser sur le laser lui-même (on produit facilement des impulsions laser ; mais l'intensité lumineuse varie progressivement au cours de ces impulsions). Brewer et Shœmaker travaillent donc avec une intensité lumineuse constante, et réalisent l'équivalent de l'irradiation brutale en modifiant brutalement la condition de résonance : la vapeur est placée entre deux électrodes planes parallèles permettant l'application brutale d'un champ électrique qui par effet

Stark modifie instantanément la valeur de l'écart énergétique $E_b - E_a$. Après l'application du champ électrique, se trouvent brusquement en résonance avec le laser les molécules d'une nouvelle classe de vitesse v'_z, qui auparavant étaient pratiquement sans interaction avec le laser ; ces molécules de la classe de vitesse v'_z se trouvent alors dans les conditions des calculs du §5.1.

On mesure avec un photodétecteur l'intensité lumineuse du faisceau transmis à travers la vapeur CH_3F ; c'est-à-dire que l'intensité absorbée (proportionnelle à $-v$ ou χ'') est soustraite à l'intensité incidente constante. L'intensité transmise, enregistrée en fonction du temps sur la figure 5.6 varie donc comme v ou $-\chi''$ (*cf.* Fig. 5.1) : l'oscillation de Rabi collective des molécules se traduit par une oscillation périodique de la vapeur entre un état de plus grande absorption et un état de plus grande transparence. Lorsqu'on coupe le champ électrique Stark après $4\mu s$, ce sont les molécules de la classe de vitesse initiale v_z qui sont remises brutalement en condition de résonance et subissent à leur tour l'oscillation de Rabi collective. Les deux phénomènes transitoires enregistrés sur la figure 5.6 sont donc produits par des molécules différentes.

On mesure aussi sur ces enregistrements la constante d'amortissement de l'oscillation de Rabi, de l'ordre de $0{,}5\mu s$. En fait, on ne peut pas faire une interprétation très précise de cet amortissement, parce que les signaux enregistrés sont déformés par les contributions des molécules quasi résonnantes, dont les vitesses sont voisines de v'_z ou de v_z, et dont les fréquences de Rabi généralisées (*cf.* §5.2) sont légèrement plus élevées. Ces contributions de fréquences différentes tendent à brouiller plus vite l'oscillation de Rabi des molécules résonnantes. Pour effectuer des expériences plus quantitatives sur ces transitoires optiques, il faut utiliser des méthodes d'observation plus sophistiquées permettant de supprimer les déplacements de fréquence Doppler.

En conclusion, l'observation expérimentale de l'oscillation de Rabi collective ne fait que confirmer les calculs de l'interaction quantique entre l'onde électromagnétique et les atomes ou molécules, effectués au chapitre 1 ou au début de ce chapitre. Mais le brouillage naturel de la phase des oscillations individuelles par les phénomènes aléatoires (émission spontanée, collisions, relaxation, ...), que nous avons essayé d'analyser plus finement au §5.3, conduit dans tous les cas à un état limite moyen conforme à la solution stationnaire des équations de Bloch, dont nous avons vu, au chapitre 3, l'équivalence avec le modèle des probabilités d'Einstein.

Celles-ci peuvent donc être considérées comme des probabilités moyennes, équivalentes aux résultats de la mécanique quantique, si la durée d'amortissement (ordre de grandeur de la plus courte des constantes de temps τ_1 et τ_2) est nettement plus courte que les autres temps caractéristiques du système étudié, et en particulier le temps nécessaire pour effectuer une observation ou une mesure sur ce système.

Bibliographie

[1] H.C. Torrey, Phys. Rev. **76**, 1059 (1949).

[2] H.B. Plenio et P.L. Knight, Rev. of Mod. Phys. **70**, 101 (1998).

[3] B. Cagnac, Annales de Physique **6**, 467 (1961).

[4] C. Cohen-Tannoudji et A. Kastler, Optical Pumping *in* Progress in Optics, (edited by Wolf) vol. **V**, 30 (1966).

[5] R.G. Brewer et R.L. Shœmaker, Phys. Rev. Lett. **27**, 631 (1971).

[6] R.G. Brewer, Physics Today, mai 1977, page 50.

Chapitre 6

Impulsions courtes de l'onde électromagnétique

LES CALCULS et les expériences exposés dans ce chapitre sont une autre manière de vérifier, indirectement, l'oscillation de Rabi. Mais ce chapitre permet d'introduire une notion nouvelle : l'importance de la durée d'interaction entre l'onde et les atomes. On y décrit en effet des expériences, souvent réalisées, où l'onde électromagnétique n'est appliquée à l'atome que pendant une durée limitée τ très inférieure aux temps d'amortissement τ_1 et τ_2 de l'oscillation de Rabi. Cette condition $\tau \ll \tau_1, \tau_2$ définit le régime d'impulsions courtes.

Nous avons vu au chapitre 5 que les transitoires oscillants décroissent avec la constante d'amortissement $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)$. La double condition du régime d'impulsion courte peut encore s'écrire :

$$\boxed{\gamma\tau \ll 1} \tag{6-1}$$

En pratique, cette durée limitée τ peut être imposée par le fonctionnement impulsionnel de générateurs d'onde très puissants ou bien par le passage des atomes d'un jet atomique à travers un faisceau lumineux de diamètre limité. Nous traiterons essentiellement le cas où l'intensité de l'onde est constante pendant la durée τ de l'impulsion, c'est-à-dire encore le cas d'« impulsions carrées » (*cf.* Fig. 6.1a) ; mais ce ne sera pas exclusif (*cf.* §6.2).

Dans ce type d'expériences, il est impossible d'effectuer des mesures pendant la durée trop brève de l'impulsion. On peut seulement mesurer l'état du système après l'impulsion : lorsque l'atome n'est plus irradié par l'onde, les populations atomiques évoluent avec les constantes de temps τ_1 et τ_2, très longues devant τ ; on a alors le temps de faire une mesure avant que cette évolution ne soit importante. On peut ainsi, en pratique, mesurer par exemple la grandeur $m(\tau)$ à la fin de l'impulsion.

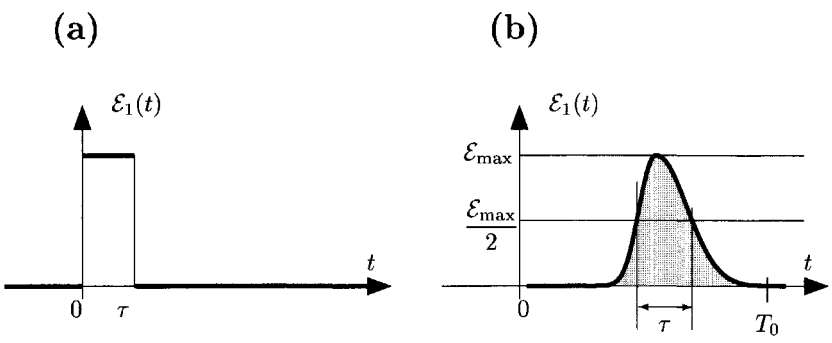


FIG. 6.1 – *Impulsions lumineuses mesurées en un point donné fixe. (a) Impulsion carrée ; (b) impulsion plus réaliste pour les durées τ ultracourtes (l'aire d'impulsion est égale à la surface grise).*

6.1 Impulsions carrées résonnantes à très forte intensité

La condition de forte intensité signifie que la fréquence Ω_1 de l'oscillation de Rabi est assez élevée pour que sa période $T_1 = 2\pi/\Omega_1$ soit de l'ordre de la durée de l'impulsion ; c'est-à-dire $\Omega_1\tau \gtrsim 1$. Compte tenu de la condition (6-1) on est pratiquement dans des conditions de forte saturation ($\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gg 1$) où les valeurs stationnaires m_S et v_S sont voisines de zéro.

Les grandeurs mesurées après l'impulsion $m(\tau)$ et $v(\tau)$ sont données par les formules (5-6) et (5-7) dans des conditions où $m_S \simeq 0$, $v_S \simeq 0$ et $\gamma \simeq 0$ (amortissement négligeable). Elles sont représentées sur la figure 5.1, où l'on a noté trois cas particuliers simples.

a) Si $\Omega_1\tau = \pi/2$ (impulsion de $\pi/2$), la différence des populations $m(\tau)$ s'annule, mais au contraire la polarisation atomique $v(\tau)$ prend la valeur extrême $-m_0$.

b) Si $\Omega_1\tau = \pi$ (impulsion de π), c'est la polarisation $v(\tau)$ qui reprend la valeur zéro, tandis que la différence de population $m(\tau)$ prend la valeur $-m_0$ opposée à sa valeur initiale : on a réalisé l'inversion des populations $\overline{\alpha^*\alpha}$ et $\overline{\beta^*\beta}$ des deux états atomiques E_a et E_b.

c) Si $\Omega_1\tau = 2\pi$ (impulsion de 2π, c'est-à-dire d'une durée égale à une période de Rabi), les grandeurs $m(\tau)$ et $v(\tau)$ reprennent pratiquement leurs valeurs initiales. Tout se passe comme si l'on n'avait rien fait.

Les impulsions de type a) et b) sont utilisées couramment pour mesurer séparément les temps de relaxation τ_1 et τ_2 lorsqu'ils sont inégaux. En effet, l'observation de l'oscillation de Rabi collective amortie permet de mesurer

seulement la moyenne des constantes d'amortissement $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)$; ceci provient du fait que l'action de l'onde électromagnétique mélange en permanence les variables $m(t)$ et $v(t)$ qui sont amorties avec des constantes différentes. Après une impulsion, au contraire, l'absence d'onde permet à chaque variable d'évoluer séparément vers sa valeur d'équilibre (m_0 pour $m(t)$; 0 pour $v(t)$) avec sa propre constante de temps (τ_1 pour $m(t)$; τ_2 pour $v(t)$). En effet, les équations différentielles de Bloch ne sont plus couplées entre elles quand $\Omega_1 = 0$.

Après une impulsion $\pi/2$ (type a) par exemple, la polarisation atomique $v(t)$ a pris sa valeur extrême et se met à décroître avec la constante de temps τ_2 (réf. [1]). Après une certaine durée T en l'absence d'onde (dans le noir s'il s'agit de la lumière), on applique à nouveau l'onde pour mesurer $v(\tau + T)$ et l'on recommence l'expérience pour diverses valeurs de la durée T. Il importe bien sûr que les impulsions de ces diverses expériences soient parfaitement reproductibles. Après une impulsion π (type b) au contraire, la polarisation $v(\tau)$ est redevenue nulle et ne risque plus d'évoluer ; mais la différence des populations $m(\tau)$ s'est inversée et on peut mesurer la constante de temps τ_1 de retour à la valeur opposée. Nous décrirons dans la partie III d'autres expériences où l'on utilise ces impulsions.

Les méthodes impulsionnelles sont maintenant utilisées de façon très systématique en Résonance Magnétique aussi bien pour l'analyse chimique que pour le diagnostic médical. La technique d'I.R.M. (Imagerie par Résonance Magnétique) utilisée dans les hopitaux consiste à mesurer ainsi les temps de relaxation des noyaux d'hydrogène (toujours présents dans l'eau et les molécules organiques) séparément en chaque point de la zone étudiée du corps humain ; la traduction en noir et blanc des valeurs numériques de τ_2 ou τ_1 permet d'obtenir les images.

Remarque 6.1 – Pour faciliter la compréhension des approximations faites dans les impulsions très courtes quasi résonnantes, on peut utiliser la représentation du vecteur de Bloch dans l'espace introduite au chapitre 4 (*cf.* Fig. 4.1). Cette utilisation du vecteur de Bloch de module unité et de composantes (u, v, m) dans le repère tournant $OXYz$ est possible chaque fois que l'on peut négliger les amortissements parce que la durée de l'étude est très inférieure à τ_1 et τ_2.

Nous avons vu au §4.5 que les équations de Bloch dans le repère tournant (en Résonance Magnétique) peuvent s'écrire sous forme vectorielle (4-20)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle}{\mathrm{d}t}\right)_{\substack{\text{Repère}\\ \text{tournant}}} = (\vec{\omega_1} + \vec{\omega_0} - \vec{\omega}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle = (\vec{\omega_1} - \delta\vec{\omega}) \wedge \langle\vec{\mathfrak{M}}\rangle$$

La transposition en optique est représentée, sur la figure 6.2, avec le vecteur $\vec{\Omega} = \vec{\Omega_1} - \vec{\delta\omega}$, dans le cas particulier des impulsions très intenses et très courtes :

$$\Omega_1 \approx \frac{1}{\tau} \gg \frac{1}{\tau_1} \text{ et } \frac{1}{\tau_2} \approx \Delta\omega_{1/2} \simeq \delta\omega \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 \gg \delta\omega$$

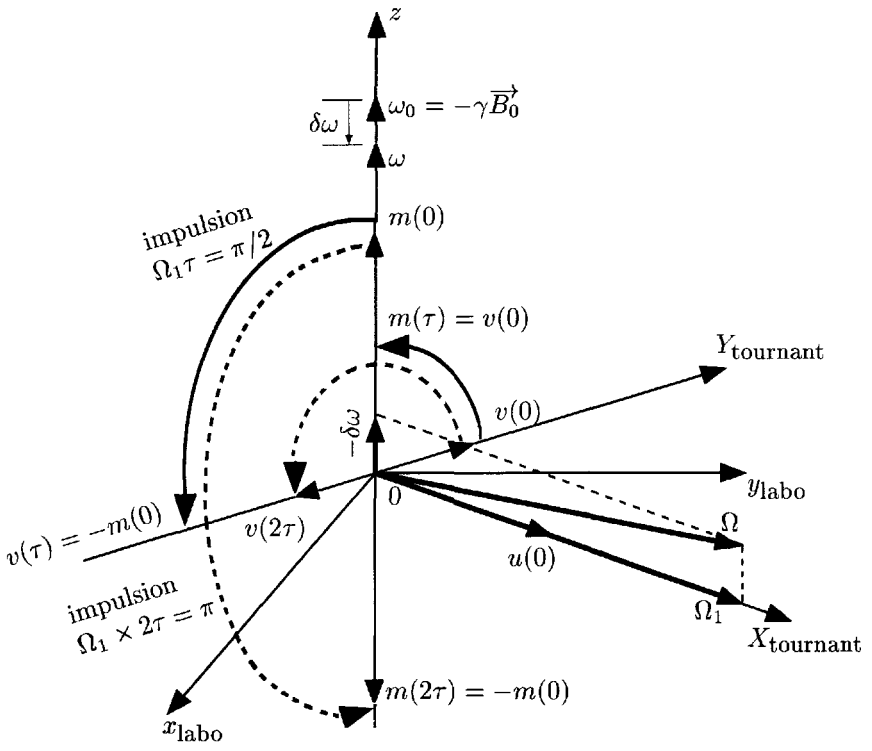


FIG. 6.2 – *Évolution dans l'espace du vecteur de Bloch, dans le cas d'impulsions très intenses, de très courtes durées τ où*

$$\Omega_1 \simeq \frac{1}{\tau} \gg \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2} \text{ et } |\delta\omega|$$

La rotation du vecteur de Bloch autour d'un axe $\vec{\Omega}$ pratiquement confondu avec l'axe OX du repère tournant, laisse la variable u inchangée. On a représenté par des arcs en traits pleins une rotation d'angle $\Omega_1\tau = \pi/2$, et par des arcs en tiretés une rotation d'angle $\Omega_1 \times 2\tau = \pi$.

La direction du vecteur $\vec{\Omega} = \vec{\Omega_1} - \vec{\delta\omega}$ reste pratiquement confondue avec celle de l'axe OX tournant ; et le mouvement du vecteur de Bloch optique dans ce repère peut être considéré comme très voisin d'une rotation d'axe OX et d'angle égal à $\Omega_1\tau$. On retrouve de façon géométrique les résultats du calcul.

6.2 Généralisation au cas d'impulsions résonnantes non carrées

Dans la pratique expérimentale, lorsque la durée d'impulsion τ est trop courte, il devient difficile de réaliser les impulsions carrées de la figure 6.1a, et le champ électrique $\mathcal{E}_1(t)$ est en fait variable pendant l'impulsion (*cf.* Fig. 6.1b). Nous pourrons cependant généraliser les résultats du paragraphe précédent en utilisant une nouvelle manière de résoudre les équations différentielles de Bloch, tenant compte de la condition (6-1).

Si l'amortissement est négligeable, nous pouvons pendant la durée de l'impulsion utiliser les équations de Bloch sous la forme (2-11) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \delta\omega\, v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\delta\omega\, u - \Omega_1 m \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \Omega_1 v \end{aligned}\right\}$$

Dans le cas résonnant ($\delta\omega = 0$) ces équations se réduisent pratiquement à deux seulement puisque la première équation donne alors : $u =$ constante $= 0$. En l'absence d'amortissement, il est commode d'utiliser le vecteur de Bloch de composantes u, v, m introduit au chapitre 4, car dans ce cas le vecteur de Bloch d'une collection d'atomes présente les mêmes propriétés que le vecteur de Bloch d'un atome isolé, à savoir que son module est constant :

$$u^2 + v^2 + m^2 = m_0^2 \; ; \quad \text{et si } \delta\omega = 0, \text{ alors } v^2 + m^2 = m_0^2$$

($m_0 = 1$ pour un atome isolé ; pour une collection d'atomes m_0 peut dépendre de la manière dont ils ont été préparés). On peut alors définir un angle $\theta(t)$ tel que :

$$m(t) = m_0 \cos\theta(t) \quad \text{et} \quad v(t) = -m_0 \sin\theta(t) \tag{6-2}$$

et les deux équations de Bloch restantes permettent d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m_0 \cos\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\Omega_1 m = -\Omega_1 m_0 \cos\theta \\ &\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -m_0 \sin\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Omega_1 v = -\Omega_1 m_0 \sin\theta \\ &\text{soit } \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Omega_1(t) = \frac{d_{ab}}{\hbar}\mathcal{E}_1(t). \end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

Nous intégrons l'équation différentielle en θ à partir de l'instant zéro de démarrage de l'impulsion ; nous en déduisons l'angle θ_0 et les variables atomiques

correspondantes à l'instant T_0 de la fin de l'impulsion :

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \int_0^{T_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{d_{ab}}{\hbar}\int_0^{T_0} \mathcal{E}_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{d_{ab}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_1(t)\,\mathrm{d}t \\ m(T_0) &= m_0\cos\theta_0 \quad \text{et} \quad v(T_0) = -m_0\sin\theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

Il est courant d'étendre à l'infini les limites de l'intégrale θ_0 pour représenter les cas d'impulsions à démarrage et extinction progressifs ; ces limites infinies signifient des limites très grandes par rapport à la durée τ qui caractérise l'impulsion. On voit que les variables atomiques v et m à la fin de l'impulsion sont indépendantes de la forme exacte de l'interaction transitoire subie pendant l'impulsion, et ne dépendent que de l'intégrale du champ électrique sur la durée de l'impulsion ; cette intégrale est représentée par la surface délimitée par la courbe $\mathcal{E}_1(t)$ de la figure 6.1b.

Nous pouvons alors reprendre la discussion du paragraphe précédent en remplaçant le produit $\Omega_1\tau$ par l'angle θ_0 défini en (6-4) et que l'on appelle aire d'impulsion (*cf.* chapitre 17) :

a) impulsion $\pi/2$ si $\theta_0 = \pi/2$: la différence de population $m(T_0)$ est devenue nulle après l'impulsion et la composante de la polarisation atomique prend sa valeur extrême $v(T_0) = -m_0$. C'est un moyen, dans les expériences, de créer une forte polarisation atomique capable d'émettre, à son tour, une onde électromagnétique intense (*cf.* chapitre 18) ;

b) impulsion π si $\theta_0 = \pi$: la polarisation $v(T_0)$ reprend une valeur nulle ; mais la différence de population $m(T_0) = -m_0$ est inversée ;

c) impulsion 2π : les deux variables $v(T_0) = v(0) = 0$ et $m(T_0) = m_0$ reprennent leurs valeurs initiales, comme s'il ne s'était rien passé. Cela permet de comprendre pourquoi une impulsion 2π isolée peut se propager dans un milieu matériel plus facilement que d'autres impulsions (*cf.* chapitre 17).

Remarque 6.2 – Les calculs restent encore relativement simples dans les situations quasi résonnantes, où l'écart à résonance $\delta\omega$ est non nul mais reste faible devant le paramètre Ω_1, parce que, dans l'équation donnant $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, le terme $\delta\omega u$ reste négligeable devant le terme $\Omega_1 m$:

$$|\delta\omega| \ll |\Omega_1(t)| \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \simeq -\Omega_1(t)m \Rightarrow v(\delta\omega, t) \simeq v(0,t) = -m_0\sin\theta(t) \tag{6-5}$$

Les solutions résonnantes (6-3) restent approximativement valables pour $v(t)$ et $m(t)$. Ayant calculé l'expression *approchée* de $v(t)$, nous pouvons la reporter dans l'équation $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, et nous en déduisons :

$$u(\delta\omega, t) = \delta\omega\int_0^t v(\delta\omega, t)\,\mathrm{d}t \simeq -m_0\delta\omega\int_0^t \sin\theta(t)\,\mathrm{d}t \qquad (|\delta\omega| \ll \Omega_1) \tag{6-6}$$

$|\sin\theta|$ étant toujours inférieur à l'unité, nous en déduisons une limite supérieure de la valeur de u à la fin T_0 de l'impulsion :

$$\left.\begin{aligned} &|u(\delta\omega, T_0)| < m_0|\delta\omega|T_0 \\ &\text{en fait } |\delta\omega| \ll \Omega_1 \approx \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad |u(\delta\omega, T_0)| \approx m_0|\delta\omega|\tau \ll m_0 \end{aligned}\right\} \tag{6-7}$$

Lorsque l'on s'éloigne de l'approximation (6-5) ($|\delta\omega| \approx \Omega_1$), les calculs deviennent plus compliqués et nous nous limiterons à l'hypothèse des impulsions carrées.

6.3 Impulsions carrées hors résonance. Élargissement de la résonance par réduction de la durée d'interaction

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la réponse atomique en fonction de la fréquence de l'onde. Ceci nous oblige à revenir aux impulsions carrées pour pouvoir utiliser les résultats du chapitre 5 ($\Omega_1 =$ constante).

Nous supposons toujours que la fréquence de Rabi Ω_1 reste assez rapide par comparaison avec l'amortissement. Nous supposons aussi l'égalité des deux temps d'amortissement τ_1 et τ_2

$$\Omega_1 \gg \gamma \quad \text{et} \quad \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{\gamma} \tag{6-8}$$

En effet, nous avons trouvé, dans la remarque 5.2, à la fin du §5.2, des solutions analytiques relativement simples, parce que dans ce cas le coefficient C de l'exponentielle réelle est nul. Cela nous permettra une analyse mathématique plus facile des phénomènes ; mais du fait de la condition (6-1), les conséquences physiques que nous en tirons sont indépendantes de l'existence ou non de cette exponentielle réelle, et ces idées physiques peuvent être considérées comme générales.

Supposons par exemple que l'on mesure la population du niveau d'énergie supérieure au bout du temps τ. Utilisant la remarque 5.2, nous pouvons utiliser les formules (5-20) pour calculer cette population :

$$\beta^*\beta(\tau) = \frac{1 - m(\tau)}{2} = \frac{1 - m_0}{2} + \frac{m_0 - m(\tau)}{2}$$

Il sera commode d'utiliser la partie variable de la population, divisée par m_0 :

$$P(\tau) = \frac{1}{m_0}\left[\beta^*\beta(\tau) - \frac{1 - m_0}{2}\right] = \frac{m_0 - m(\tau)}{2m_0} \tag{6-9}$$

soit

$$P(\tau) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2 + \gamma^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-\gamma\tau}\left(\cos\Omega\tau + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega\tau\right)\right]$$

Dans les expériences d'optique, $m_0 = 1$, et la quantité $P(t)$ se confond avec la population. Dans le cas des expériences en radiofréquence, m_0 est souvent inférieur à l'unité, mais la présence du terme constant $(1 - m_0)/2$ ne change rien à la discussion de la partie variable de la population $\beta^*\beta(\tau)$.

Nous considérons τ comme fixé maintenant, et nous nous intéressons à la dépendance en fonction de la fréquence ω de l'onde, qui est contenue dans

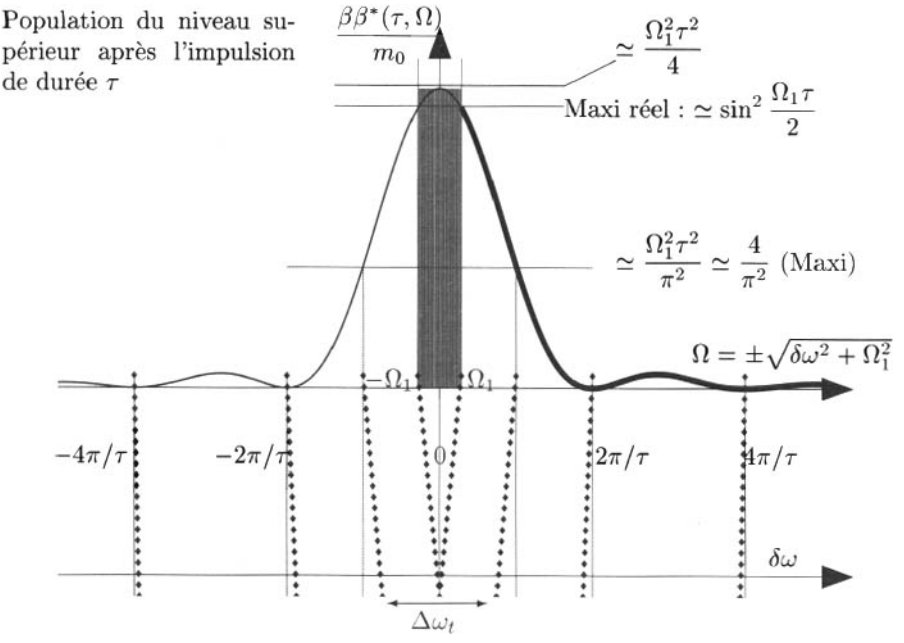


FIG. 6.3 – *Impulsion hors résonance. Population normalisée calculée après l'impulsion de durée τ, en fonction du paramètre théorique $\Omega = \pm\sqrt{\delta\omega^2+\Omega_1^2}$ (formule (6-10) ; figure tracée dans le cas où $\Omega_1\tau \simeq 1$ et $m_0 = 1$). La région centrale de la figure est grise parce qu'elle est dénuée de sens physique. Les valeurs négatives de Ω permettent de faire la correspondance avec les valeurs négatives de l'écart à résonance $\delta\omega$. Cette correspondance entre les valeurs de Ω et celles de $\delta\omega$, sur l'axe horizontal inférieur, est indiquée par les tiretés épais légèrement obliques.*

le paramètre $\Omega = \sqrt{\delta\omega^2+\Omega_1^2}$. Pour trouver simplement l'allure des phénomènes, nous utiliserons les approximations permises par les hypothèses (6-1) et (6-8) : (6-1) $\gamma\tau \ll 1$ permet de négliger l'amortissement : $\mathrm{e}^{-\gamma t} \simeq 1$; (6-8) $\Omega_1 \gg \gamma$, et donc $\Omega \gg \gamma$ permet de négliger le terme en γ/Ω, ainsi que γ^2 devant Ω^2 :

$$P(\tau,\Omega) \simeq \frac{1}{2}\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2+\gamma^2}(1-\cos\Omega t) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2+\gamma^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \simeq \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \qquad (6\text{-}10)$$

On a représenté sur la figure 6.3 la variation de l'expression approchée, à droite, en fonction du paramètre Ω. Cette courbe ressemble à la courbe classique des problèmes de diffraction. Elle s'annule chaque fois que $\Omega\tau/2 = N\cdot\pi$

(N entier), soit $\Omega\tau = N \cdot 2\pi$; l'interprétation en est simple à la lumière du cas c) du paragraphe précédent : à chaque période de l'oscillation de Rabi (ici généralisée), le système revient à son état initial, comme si rien ne s'était passé.

À la valeur centrale $\Omega = 0$, on obtient une forme indéterminée du type $0/0$ qui est ici facile à lever avec l'approximation classique du sinus :

$$P(\tau, 0) \simeq \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2 = \frac{\Omega_1^2 \tau^2}{4}$$

En fait, le point $\Omega = 0$ est sans intérêt puisque en réalité le paramètre Ω ne peut jamais s'annuler, et seule la partie de cette courbe pour $\Omega \geq \Omega_1$ (en traits épais) a une réelle signification physique. Tant que $\Omega_1\tau \leq \pi$, on obtient un maximum réel au centre de la résonance ($\delta\omega = 0$, $\Omega = \Omega_1$) facile à calculer :

$$P(\tau, \Omega_1) = \frac{1}{1 + \dfrac{\gamma^2}{\Omega_1^2}} \cdot \sin^2 \frac{\Omega_1\tau}{2} \simeq \sin^2 \frac{\Omega_1\tau}{2}$$

(l'approximation est justifiée par la condition (6-8)). La plus haute valeur de ce maximum $P(\tau, \Omega_1) \simeq 1$ est obtenue pour $\Omega_1\tau = \pi$.

Pour discuter la correspondance entre le paramètre Ω et l'écart en fréquence $\delta\omega$, nous adoptons l'hypothèse

$$\Omega_1\tau \leq 1 \tag{6-11}$$

Pour représenter cette correspondance sur la figure 6.3, nous avons dessiné en dessous de l'axe horizontale Ω un autre axe horizontal des écarts de fréquence $\delta\omega$. Les traits, légèrement obliques, en pointillés épais indiquent la correspondance entre les valeurs de Ω et les valeurs positives de $\delta\omega$. Pour les valeurs négatives de $\delta\omega$, par symétrie, nous pouvons utiliser la partie négative de l'axe Ω, bien qu'elle n'ait pas de sens physique. Le résultat obtenu pour la partie centrale de la courbe en fonction de $\delta\omega$ est représenté sur la figure 6.5b.

Il est facile de vérifier, avec l'hypothèse (6-11), que, aux valeurs assez fortes de l'écart $\delta\omega$, la différence entre $\delta\omega$ et Ω devient négligeable : $|\delta\omega| \geq \dfrac{\pi}{\tau}$ entraîne $\delta\omega \simeq \Omega$ avec une erreur inférieure à 10 %. Ceci nous permet de retenir comme largeur totale du signal transitoire sur l'échelle horizontale de la fréquence circulaire : $\Delta\omega_t \simeq 2\pi/\tau$, ou en fréquence vraie $\Delta\nu_t \simeq 1/\tau$; à comparer avec la largeur trouvée pour la solution stationnaire (Fig. 3.2) : en fréquence circulaire $\Delta\omega_S \simeq 2/\tau_2 = 2\gamma$, ou en fréquence vraie $\Delta\nu_S \simeq 1/\pi\tau_2 = \gamma/\pi$.

Compte tenu de l'hypothèse (6-1) $\gamma\tau \ll 1$ on voit que le signal transitoire est considérablement élargi par rapport au signal stationnaire. Ce phénomène n'est qu'une manifestation supplémentaire des inégalités de Heisenberg : l'atome ne « voit » l'onde que pendant la courte durée τ ; en d'autres termes, la transformée de Fourier de cette onde sinusoïdale limitée dans le temps s'étale sur un intervalle de l'échelle des fréquences déterminé par l'inverse $1/\tau$ de sa durée. **Cet élargissement en fréquence des phénomènes de résonance s'observe dans toutes les expériences où la durée d'interaction est trop courte.**

6.4 Évolution libre de la polarisation dans le noir

Ce paragraphe a pour but de préparer le paragraphe suivant sur les franges de Ramsey ; mais il présente aussi son utilité d'un autre point de vue : il permet de préciser ce qui a été dit qualitativement au début de ce chapitre sur la possibilité de mesurer les grandeurs atomiques à la fin de l'impulsion parce que la lenteur de leur évolution, dans le noir (en optique, ou en l'absence d'onde en général), donne le temps suffisant pour une mesure. Nous écrivons donc les équations différentielles de Bloch (3-1) dans le cas particulier où l'intensité de l'onde est nulle, c'est-à-dire $\Omega_1 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau_2}u + \delta\omega \cdot v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\delta\omega \cdot u - \frac{1}{\tau_2}v \\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \frac{m_0 - m}{\tau_1} \end{aligned}\right\} \tag{6-12}$$

à la résonance exacte, $\delta\omega = 0$ (c'était le cas dans le premier paragraphe de ce chapitre), nous retrouvons bien les trois équations différentielles indépendantes (2-20) qui représentent le retour vers zéro de la grandeur $(m - m_0)$ avec la constante de temps τ_1 et des grandeurs u et v avec la constante de temps τ_2. Les trois grandeurs m, u et v évoluent lentement après l'impulsion.

Le problème est plus complexe *hors résonance* ($\delta\omega \neq 0$) : rien n'est changé pour la différence des populations m ; mais les deux équations en u et v restent couplées entre elles. Un moyen simple pour les résoudre est de faire apparaître la polarisation complexe $u - iv$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u - iv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - i\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_2}(u - iv) + i\delta\omega(u - iv) = \left(-\frac{1}{\tau_2} + i\delta\omega\right)(u - iv) ; \tag{6-13}$$

la solution générale de cette équation différentielle à coefficients constants est immédiate :

$$u(t)-iv(t) = (u_0-iv_0)\mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{\tau_2}+i\delta\omega\right)t} = (u_0-iv_0)\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\left(\cos\delta\omega t+i\sin\delta\omega t\right) \tag{6-14}$$

où u_0 et v_0 sont les valeurs initiales de $u(t)$ et $v(t)$ à l'instant initial $t = 0$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient séparément les deux fonctions réelles :

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\left(u_0\cos\delta\omega t + v_0\sin\delta\omega t\right) \\ v(t) &= \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\left(-u_0\sin\delta\omega t + v_0\cos\delta\omega t\right) \end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

(Si nous avions choisi la convention $u + iv$ pour la polarisation complexe, nous aurions trouvé une exponentielle complexe $\left(-\frac{1}{\tau_2} - i\delta\omega\right)$ qui nous aurait donné exactement les mêmes formules réelles (6-15).) Ces solutions n'existent bien sûr que s'il existe une polarisation atomique initiale non nulle. Or, la polarisation atomique n'est obtenue que grâce au mélange des deux états propres $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ de l'atome sous l'action de l'onde électromagnétique, Il faut donc d'abord irradier les atomes pendant une impulsion courte τ, et les valeurs $u(\tau)$ et $v(\tau)$ obtenues à la fin de cette impulsion constituent les valeurs initiales u_0 et v_0 pour l'évolution en l'absence d'onde qui suit cette impulsion.

On voit que dans le cas non résonnant, une oscillation avec la fréquence angulaire $\delta\omega = \omega - \omega_0$ se superpose à l'amortissement. On peut alors calculer la polarisation atomique donnée par la formule (2-5) :

$$\langle D_x\rangle = d_{ab}[u(t)\cos\omega t - v(t)\sin\omega t]$$

Les formules classiques de trigonométrie permettent de faire apparaître la différence angulaire $(\omega t - \delta\omega t) = \omega_0 t$, soit :

$$\langle D_x\rangle = d_{ab}\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}[u_0\cos\omega_0 t - v_0\sin\omega_0 t] \tag{6-16}$$

c'est-à-dire que, dans le noir, la polarisation atomique oscille à la fréquence propre ω_0 de l'atome, résultat prévisible.

On aurait pu faire un autre raisonnement en utilisant la représentation dans le plan complexe de la figure 2.1 : le vecteur complexe qui représente la polarisation atomique tourne avec la vitesse angulaire $-\delta\omega = \omega_0 - \omega$ par rapport aux axes tournants u et v, c'est-à-dire qu'il tourne avec la vitesse angulaire ω_0 par rapport aux axes fixes U et V (on voit que le passage en représentation « tournante » n'est pas adapté à l'étude de l'évolution libre dans le noir, alors qu'il est tout à fait commode pour étudier l'interaction avec l'onde).

Cette oscillation dans le noir à la fréquence ω_0 de la polarisation atomique engendre dans les équations de Maxwell une onde émise par les atomes à la fréquence circulaire ω_0. Nous y reviendrons dans la partie III de cet ouvrage. En tout cas, lorsque nous parlons d'évolution lente après une impulsion électromagnétique, il s'agit seulement des populations atomiques, ou bien du module du dipôle atomique $\langle D_x \rangle$.

6.5 Cas de deux impulsions cohérentes successives (Ramsey). Explication approchée

Les phénomènes décrits dans ce paragraphe ont un caractère moins fondamental que ceux des paragraphes précédents. Mais cette technique de deux impulsions successives cohérentes a de nombreuses utilisations en physique atomique et dans ses applications métrologiques, en particulier dans les horloges atomiques.

La figure 6.4 illustre la variation temporelle de l'onde appliquée aux atomes : il s'agit de deux impulsions carrées de même durée τ et de même amplitude $\mathcal{E}_1$ (ou Ω_1) séparées par une durée T dans le noir. Pour représenter la cohérence de l'onde entre les deux impulsions, on a superposé en trait pointillé l'oscillation continue du générateur d'onde : on voit que l'onde $\mathcal{E}_1 \cos(\omega t + \varphi)$ pendant la seconde impulsion est la continuation sans rupture de phase de l'onde $\mathcal{E}_1 \cos(\omega t + \varphi)$ pendant la première impulsion : c'est cette propriété qui fait dire que les deux impulsions sont cohérentes (conservation de la phase φ entre les deux impulsions).

Dans ces expériences, on mesure l'état du système atomique après la fin de la seconde impulsion. Il nous faut donc calculer les évolutions de l'atome au cours de ces trois étapes successives et les raccorder entre elles en écrivant les conditions limites aux deux instants frontières τ et $T + \tau$: c'est-à-dire que les valeurs calculées à la fin de chacune des deux premières étapes servent de valeurs initiales pour l'étape suivante.

Du fait que les deux impulsions sont cohérentes, la représentation « tournante » liée à l'onde est la même pour la première impulsion et pour la deuxième impulsion. Ceci nous permet d'effectuer le calcul des trois étapes successives en utilisant cette représentation « tournante » unique, où les variables u et v ne changent pas de définition. Le fait d'utiliser cette représentation tournante unique est une manière d'exprimer dans le calcul la cohérence des deux impulsions.

Pour mieux mettre en lumière l'origine physique du phénomène étudié, nous commencerons par faire le calcul dans le cas où les durées τ et T sont toutes les deux très courtes devant les temps d'amortissement τ_1 et τ_2 ; c'est-à-dire que nous considérons la constante d'amortissement γ comme quasiment nulle ; et par la suite seulement, nous étudierons l'effet de l'amortissement.

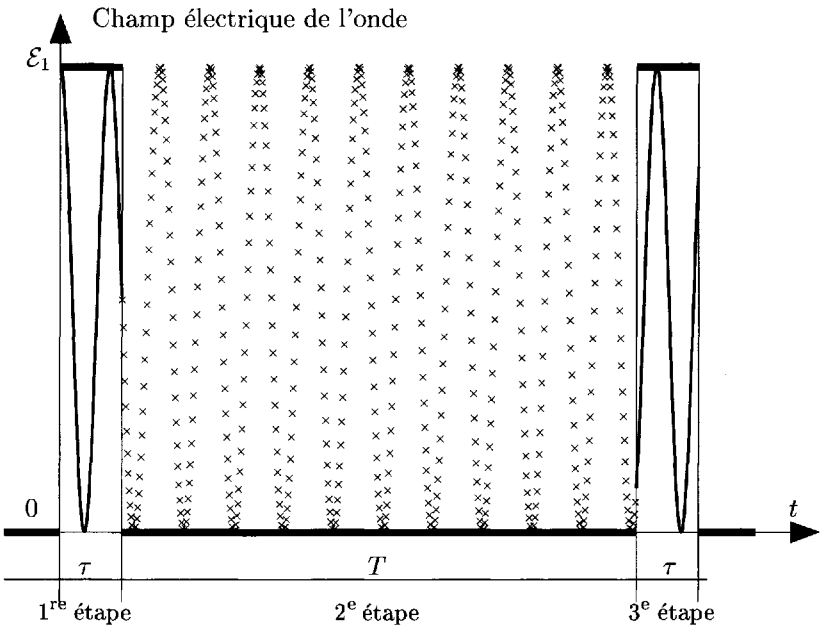


FIG. 6.4 – *Les deux impulsions* cohérentes *de l'expérience de Ramsey. Variation (en fonction du temps) de :*
(1) l'amplitude du champ appliqué aux atomes : $\mathcal{E}_1$ ou zéro (traits épais) ;
(2) l'oscillation continue du générateur d'ondes en $\cos\omega t$ (en croisillés) ;
(3) le champ appliqué aux atomes $\mathcal{E}_x(t) = \mathcal{E}_1 \cos\omega t$ pendant les deux impulsions (traits pleins fins) ;
(Pour la clareté de la figure, on a représenté une sinusoïde de très basse fréquence ; dans les expériences réelles, chaque impulsion τ contient un nombre beaucoup plus important de périodes de l'onde électromagnétique.)

L'hypothèse $\gamma \simeq 0$ permet de simplifier l'écriture des formules (5-20) pour calculer les grandeurs atomiques à la fin de la première impulsion

$$\left.\begin{aligned} u(\tau) &\simeq -m_0 \frac{\Omega_1 \delta\omega}{\Omega^2}(1-\cos\Omega\tau) = -2m_0 \frac{\Omega_1 \delta\omega}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \\ v(\tau) &\simeq -m_0 \frac{\Omega_1}{\Omega}\sin\Omega\tau \\ m_0 - m(\tau) &\simeq m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}(1-\cos\Omega\tau) = 2m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}17)$$

Au cours de la deuxième étape, il faut écrire l'invariance de $m(t)$ et l'oscillation sinusoïdale de $u(t)$ et $v(t)$ selon les formules (6-15) ; on obtient à la fin

de cette seconde phase :

$$\left.\begin{aligned} u(\tau+T) &= u(\tau)\cos\delta\omega T + v(\tau)\sin\delta\omega T \\ v(\tau+T) &= -u(\tau)\sin\delta\omega T + v(\tau)\cos\delta\omega T \\ m_0 - m(\tau+T) &= m_0 - m(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}18)$$

La solution générale de $m(t)$ au cours de la troisième étape est la même que celle de la première étape ; mais les constantes d'intégration dépendent des conditions initiales (6-18), c'est-à-dire de la phase finale $\delta\omega T$ de l'oscillation dans le noir de la polarisation atomique. Avant de faire un calcul un peu fastidieux, une étude simple permet de trouver l'allure de la solution $m(T+2\tau)$ à la fin de la troisième étape :

• si $\delta\omega T = N \cdot 2\pi$ (N entier), les valeurs initiales des trois variables u, v et m au début de la troisième étape sont rigoureusement identiques aux valeurs finales de la première étape, c'est-à-dire que cette troisième étape se comporte comme la suite continue de la première étape : tout se passe comme si les atomes subissaient une interaction continue pendant la durée 2τ ; et ceci permet d'écrire la solution pour la variable $P(t)$ introduite en (6-9) pour représenter la population :

$$P(T+2\tau) = \frac{m_0 - m(T+2\tau)}{2m_0} = \frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2}(1-\cos 2\Omega\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega\tau \qquad (6\text{-}19)$$

On a représenté sur la figure 6.5a les variations, en fonction de l'écart de fréquence $\delta\omega$, de l'expression (6-19). C'est la courbe tiretée. Seuls les sept points encadrés d'un cercle correspondant à $\delta\omega T = 2N\pi$ ont une signification. On a représenté par comparaison sur la figure 6.5b la population atomique à la fin de la première étape correspondant à la dernière des équations (6-17) ; c'est une reproduction de la partie centrale de la figure 6.3 : la courbe tiretée (a) est deux fois plus étroite et quatre fois plus haute que la courbe (b).

Pour les autres valeurs de la phase $\delta\omega T$, la valeur initiale du paramètre $v(\tau+T)$ sera modifiée en sorte que la seconde interaction viendra contrecarrer plus ou moins fortement la première interaction.

• Si $\delta\omega T = \pi + N \cdot 2\pi$, l'action contraire est maximale puisque $v(\tau+T) = -v(\tau)$. Un raisonnement approché permet de montrer que le résultat à la fin de la troisième étape est alors pratiquement nul : puisque nous avons supposé l'amortissement γ négligeable, nous pouvons supprimer dans les équations différentielles de Bloch tous les termes d'amortissement, c'est-à-dire que ces équations différentielles se réduisent aux équations (2-10) ou (2-11) calculées avant l'introduction des perturbations aléatoires. Ce système d'équations différentielles simplifiées jouit d'une propriété de symétrie supplémentaire : il est invariant dans les changements de signe simultanés de v en $-v$ et de t en $-t$ (renversement du sens du temps).

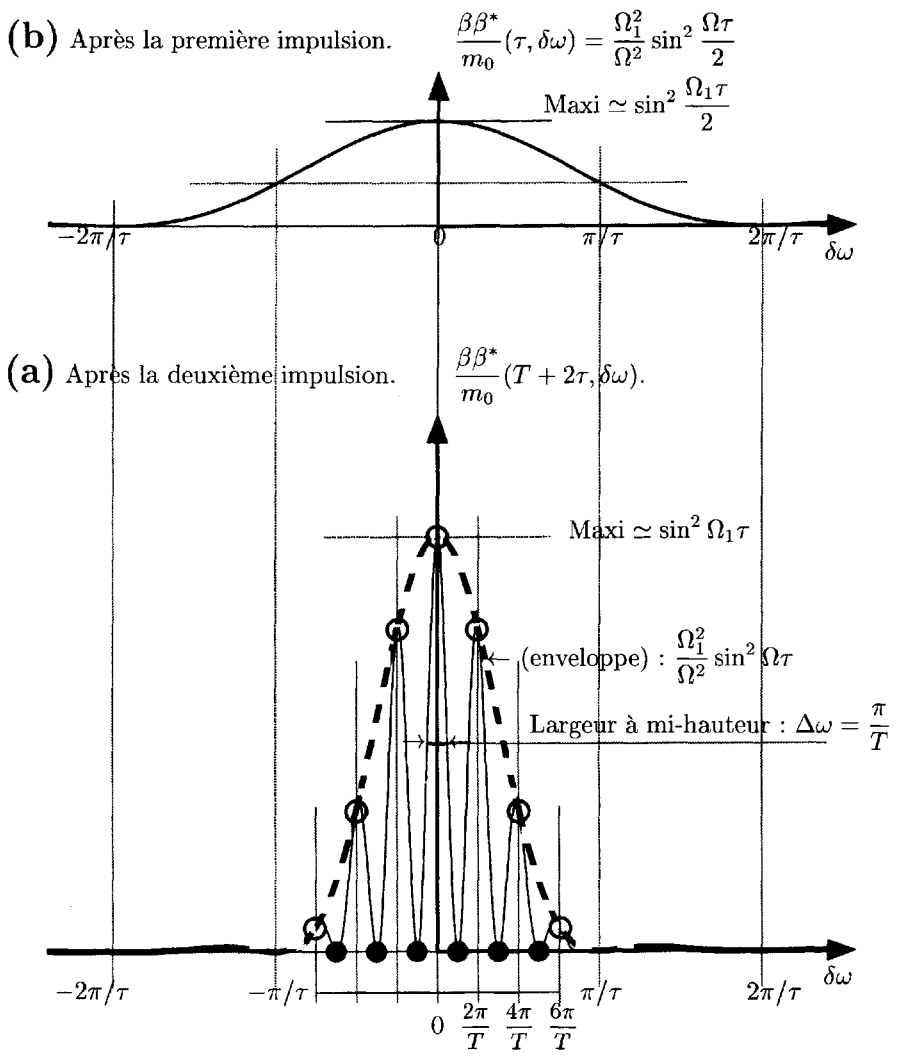


FIG. 6.5 – *Variation avec l'écart de fréquence $\delta\omega$ de la population de l'état supérieur E_b : (a) après la deuxième impulsion ; (b) après la première impulsion, pour comparaison (on a choisi $m_0 = 1$; cette figure résulte d'un calcul approché).*

Les conditions initiales de la troisième étape sont alors identiques aux conditions finales de la première étape en ce qui concerne les variables u et m :

$$m(T+\tau) = m(\tau) \quad \text{et} \quad u(T+\tau) \simeq 0 \simeq u(\tau)$$

(c'est là l'approximation, valable si $\delta\omega \ll \Omega_1$) mais la valeur initiale de v est opposée à la valeur finale de la première étape ; en inversant le sens du temps dans les fonctions de la première étape, on obtient donc une solution adaptée à la troisième étape, et qui aboutit au bout de la durée τ aux valeurs initiales de la première étape

$$m(T+2\tau) \simeq m_0, \quad u(T+2\tau) \simeq u(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(T+2\tau) \simeq v(0) = 0$$

La troisième étape dans ce cas détruit complètement l'acquis de la première étape et l'on obtient une population quasi nulle pour l'état excité : ce sont les six points, intermédiaires en fréquence, représentés sur la figure 6.5a sur l'axe horizontal.

Nous justifions ainsi l'allure de la courbe en trait plein, que nous allons bientôt calculer, et qui peut être représentée *de manière approchée* par la formule :

$$P(T+2\tau) \simeq \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega\tau \frac{1+\cos\delta\omega T}{2} \tag{6-20}$$

En définitive, l'interférence entre l'oscillation propre de la polarisation atomique dans le noir, à la fréquence circulaire ω_0, et l'oscillation de l'onde à la fréquence ω crée sur l'axe des fréquences des « franges d'interférence » espacées d'un écart de fréquence $2\pi/T$.

Le pic central de ce système de « franges » a une largeur à mi-hauteur $\Delta\omega = \pi/T$, liée à la durée T pendant laquelle le système atomique a été observé, beaucoup plus étroite que la largeur $2\pi/\tau$ correspondant à une impulsion de durée τ ou la largeur π/τ correspondant à une impulsion de durée 2τ. En d'autres termes : la cohérence de l'onde entre les impulsions des étapes 1 et 3 nous oblige à les considérer comme une interaction unique, dont la durée totale est supérieure à T. Nous verrons l'application à des expériences de métrologie dans le paragraphe 6.7.

6.6 Calcul exact des franges de Ramsey

6.6.1 Calcul de la population après la deuxième impulsion, en l'absence d'amortissement

On ne tient pas compte de l'amortissement ; mais on tient compte de la valeur exacte (non nulle) de la variable $u(\tau)$ en (6-17). L'évolution de $m(t)$ au cours de la troisième étape se fait suivant la solution générale écrite au chapitre précédent en (5-17). Les conditions (6-8) permettent deux simplifications : l'égalité de τ_1 et τ_2 permet d'utiliser la solution stationnaire $m_0 - m_S$ écrite en (5-19) ; et $r = \gamma \simeq 0$ nous permet d'écrire la solution sous la forme :

$$m(t') - m_S = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} [A\cos\Omega t' + B\sin\Omega t' + C] \tag{6-21}$$

soit encore

$$m(t') - m_0 = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \left[A \cos \Omega t' + B \sin \Omega t' + C - 1 \right]$$

où $t' = t - (\tau + T)$ correspond à une échelle de temps décalée débutant avec la troisième étape de l'interaction, et où les trois constantes A, B, C dépendent des conditions initiales (6-18) en $t' = 0$, ou $t = \tau + T$;

$$\left.\begin{aligned} m(\tau + T) - m_0 = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}(A + C - 1) = -m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} 2 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2} \\ \text{soit } C - 1 = -2 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2} - A \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}22)$$

Les valeurs initiales u et v en (6-18), calculées à l'aide de (6-17), permettent ensuite, en utilisant les équations de Bloch simplifiées (2-10), de calculer les deux dérivées successives de $M(t')$:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t'} = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega} \left(-A \sin \Omega t' + B \cos \Omega t' \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t'^2} = -m_0 \Omega_1^2 \left(A \cos \Omega t' + B \sin \Omega t' \right)$$

On en déduit à « l'instant initial » $t' = 0$ (soit $t = \tau + T$) :

- $$\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{\tau+T} = m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega} B = \Omega_1 v(\tau + T)$$
$$= m_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega} \left[\frac{\delta\omega}{\Omega} 2 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2} \sin \delta\omega T - \sin \Omega\tau \cos \delta\omega T \right]$$

soit

$$\begin{aligned} B &= \frac{\delta\omega}{\Omega} 2 \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \sin \delta\omega T - \sin \Omega\tau \cos \delta\omega T \\ &= 2 \sin \frac{\Omega\tau}{2} \left[\frac{\delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sin \delta\omega T - \cos \frac{\Omega\tau}{2} \cos \delta\omega T \right] \end{aligned} \quad (6\text{-}23)$$

- $$\left.\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\tau+T} = -m_0 \Omega_1^2 A = \Omega_1 \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{\tau+T} = -\Omega_1^2 m(\tau + T) - \Omega_1 \delta\omega u(\tau + T)$$

soit

$$A = \frac{m(\tau + T)}{m_0} + \frac{\delta\omega}{\Omega_1} \cdot \frac{u(\tau + T)}{m_0} \quad \text{ou } A - 1 = \frac{m(\tau + T) - m_0}{m_0} + \frac{\delta\omega}{\Omega_1} \cdot \frac{u(\tau + T)}{m_0}$$

$$1 - A = 2 \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} + 2 \frac{\delta\omega^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \cos \delta\omega T + \frac{\delta\omega}{\Omega} \sin \Omega\tau \sin \delta\omega T \quad (6\text{-}24)$$

Ayant terminé le calcul des coefficients A, B et C, nous pouvons utiliser (6-21) pour calculer la population de l'état d'énergie supérieure lorsque $t = T + 2\tau$ et $t' = \tau$ *à la fin de la troisième étape*. Nous retiendrons seulement la partie variable de la population, divisée par m_0, déjà introduite en (6-9) :

$$P(T+2\tau) = \frac{m_0 - m(T+2\tau)}{2m_0} = -\frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2}\left[A\cos\Omega\tau + B\sin\Omega\tau - 2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} - A\right]$$

$$P(T+2\tau) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\left[2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} + A(1-\cos\Omega\tau) - B\sin\Omega\tau\right] \tag{6-25}$$

$$\begin{aligned} P(T+2\tau) &= \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\left[(1+A)\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} - B\sin\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\Omega\tau}{2}\right] \\ &= \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[2 + (A-1) - B\,\mathrm{cotan}\,\frac{\Omega\tau}{2}\right] \end{aligned} \tag{6-26}$$

En remplaçant $(A-1)$ par (6-24) et B (6-23), on obtient :

$$\begin{aligned} P(T+2\tau) = {} & \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\times \\ & \left[1 - \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} + \frac{\delta\omega^2}{\Omega^2}\cos\delta\omega T\right)\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} - \frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\Omega\tau}{2}\sin\delta\omega T\right. \\ & \left. + \cos^2\frac{\Omega\tau}{2}\cos\delta\omega T - \frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\Omega\tau}{2}\sin\delta\omega T\right] \end{aligned}$$

sous le crochet, nous remplaçons $\dfrac{\Omega_1^2}{\Omega^2} = 1 - \dfrac{\delta\omega^2}{\Omega^2}$:

$$\boxed{\begin{aligned} P(T+2\tau) = {} & \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[\cos^2\frac{\Omega\tau}{2}(1+\cos\delta\omega T)\right. \\ & \left. + \frac{\delta\omega^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}(1-\cos\delta\omega T) - \frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\Omega\tau\sin\delta\omega\tau\right] \end{aligned}} \tag{6-27}$$

■ pour $\delta\omega T = N \cdot 2\pi$, les deux derniers termes entre crochets sont nuls, et l'on retrouve **les sommets des pics** :

$$P(T+2\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\cos^2\frac{\Omega\tau}{2}(1+\cos\delta\omega T) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega\tau$$

■ pour $\delta\omega T = \pi + N \cdot 2\pi$, le terme principal est nul, le dernier terme aussi ; il reste pour les **minimums** :

$$P(T+2\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \times 2\frac{\delta\omega^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2} \simeq 0 \text{ si } \delta\omega \ll \Omega_1 \tag{6-28}$$

L'approximation de la formule (6-20) et de la figure 6.5 est valable pour le pic du centre et éventuellement ses voisins. C'est le pic central qui est important dans les expériences pour faire une mesure précise de la fréquence centrale de la résonance ; la précision est d'autant meilleure que ce pic est plus fin, c'est-à-dire la durée T dans le noir est plus longue.

Remarque 6.3 – Dans son travail original en 1950, Ramsey calcule $P(T+2\tau)$ par une autre méthode en calculant directement les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ de la fonction d'onde (1-5). Il obtient le résultat (réf. [2] ou [3]) :

$$P(T+2\tau) = 4\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[\cos\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\delta\omega T}{2} - \frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\sin\frac{\delta\omega T}{2}\right]^2 \qquad (6\text{-}29)$$

On peut montrer facilement l'équivalence avec le calcul par les équations de Bloch (6-27) en développant le carré du crochet.

$$P(T+2\tau) = 4\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[\cos^2\frac{\Omega\tau}{2}\cos^2\frac{\delta\omega T}{2} + \frac{\delta\omega^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\sin^2\frac{\delta\omega T}{2} - 2\frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\Omega\tau}{2}\cos\frac{\delta\omega T}{2}\sin\frac{\delta\omega T}{2}\right]$$

il suffit de remplacer $\cos^2\dfrac{\delta\omega T}{2} = \dfrac{1+\cos\delta\omega T}{2}$ et $\sin^2\dfrac{\delta\omega T}{2} = \dfrac{1-\cos\delta\omega T}{2}$, etc. pour retrouver (6-27).

6.6.2 Effet de l'amortissement

Pour augmenter la précision, on a intérêt à allonger au maximum la durée T de la deuxième étape dans le noir, qui peut alors devenir comparable aux temps d'amortissement τ_1 et τ_2. Nous supposons en revanche que la durée τ des deux impulsions reste toujours très courte. Il suffit donc de calculer l'effet de l'amortissement pendant la deuxième étape, en remplaçant les quantités (6-18) calculées au temps $\tau + T$ par des quantités amorties :

$$\left.\begin{aligned} u(\tau+T) &= [u(\tau)\cos\delta\omega T + v(\tau)\sin\delta\omega T]\,\mathbf{e}^{-\gamma T} \\ v(\tau+T) &= [-u(\tau)\sin\delta\omega T + v(\tau)\cos\delta\omega T]\,\mathbf{e}^{-\gamma T} \\ m_0 - m(\tau+T) &= [m_0 - m(\tau)]\,\mathbf{e}^{-\gamma T} = m_0\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\,\mathbf{e}^{-\gamma T} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}30)$$

On en déduit les nouvelles constantes d'intégration A', B' et C' :
(6-22) devient

$$A' + C' - 1 = -2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\mathbf{e}^{-\gamma T}, \text{ soit } C' - 1 = -2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\mathbf{e}^{-\gamma T} - A'$$

de (6-23) on déduit que B' est multiplié par $\mathbf{e}^{-\gamma T}$: $B' = B\cdot\mathbf{e}^{-\gamma T}$

de (6-24) on déduit que $1-A$ est multiplié par $\mathbf{e}^{-\gamma T}$: $1-A' = (1-A)\cdot\mathbf{e}^{-\gamma T}$
On peut alors transformer (6-25) en :

$$P(T+2\tau) = \frac{1}{2}\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\left[2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\mathbf{e}^{-\gamma T} + A'(1-\cos\Omega\tau) - B'\sin\Omega\tau\right] = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[\mathbf{e}^{-\gamma T} + A' - B'\operatorname{cotan}\frac{\Omega\tau}{2}\right] \tag{6-31}$$

$$P(T+2\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left[1+\mathbf{e}^{-\gamma T} + \mathbf{e}^{-\gamma T}(A-1) - \mathbf{e}^{-\gamma T}B\operatorname{cotan}\frac{\Omega\tau}{2}\right] \tag{6-32}$$

Comparé à la formule (6-26) tout le crochet est multiplié par $\mathbf{e}^{-\gamma T}$ à l'exception du coefficient 2 qui est remplacé par $\left(1+\mathbf{e}^{-\gamma T}\right) = \left(1-\mathbf{e}^{-\gamma T}\right) + 2\mathbf{e}^{-\gamma T}$; on obtient alors :

$$P(T+2\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}2\sin^2\frac{\Omega\tau}{2}\left\{\frac{1-\mathbf{e}^{-\gamma T}}{2} + \mathbf{e}^{-\gamma T}[\text{ancien crochet de 6-27}]\right\} \tag{6-33}$$

La courbe de variation comporte des « franges d'interférence » d'allure semblable mais d'amplitudes amoindries qui se superposent à une large bosse analogue à la figure 6.5b. On peut évaluer le contraste des franges voisines du centre en comparant l'amplitude des franges avec la valeur moyenne du signal (on suppose $\Omega\tau < 1$, c'est-à-dire la valeur maximum du crochet voisine de 2) :

$$\frac{\text{Maxi} - \text{Mini}}{\text{Maxi} + \text{Mini}} \simeq \frac{2\mathbf{e}^{-\gamma T}}{2\mathbf{e}^{-\gamma T} + 2\dfrac{1-\mathbf{e}^{-\gamma T}}{2}} = \frac{2\mathbf{e}^{-\gamma T}}{1+\mathbf{e}^{-\gamma T}} \tag{6-34}$$

Ce contraste, qui vaut 1 pour les faibles valeurs de T, descend à 0,54 pour $\gamma T = 1$, à environ 0,25 pour $\gamma T = 2$, et à 0,1 pour $\gamma T = 3$. En fait il n'est pas intéressant d'allonger beaucoup la durée T au-delà de la durée $1/\gamma$ de l'amortissement naturel ; car la diminution de l'amplitude du signal fait alors décroître la précision de mesure davantage que le gain dû au rétrécissement des pics d'interférence (le contraste est diminué si $\Omega\tau$ est de l'ordre de 1 ou supérieur ; pour $\Omega\tau = \pi/2$ la valeur maximum du crochet est 1 ; la formule se simplifie et le contraste vaut $\mathbf{e}^{-\gamma T}$).

6.7 Application aux expériences de physique atomique et de métrologie

La méthode des deux impulsions successives a été proposée par Ramsey en 1950 pour améliorer la précision des mesures de fréquences atomiques dans

les expériences où l'on irradie un jet atomique avec des micro-ondes ou des hyperfréquences (réf. [2]).

Dans le cas de transitions hyperfréquences, conformément à la loi d'Einstein (8-4), la probabilité d'émission spontanée est très faible. L'utilisation d'un jet atomique, à l'intérieur d'une chambre à vide, permet de soustraire les atomes aux perturbations habituellement provoquées par les collisions dans une vapeur. On obtient au total un coefficient d'amortissement γ très faible et donc la possibilité théorique d'observer des courbes de résonance de très faible largeur en fréquence, à condition que la durée d'observation des atomes soit suffisamment longue (*cf.* §6.3).

En fait, pour obtenir une intensité assez forte de ces ondes hyperfréquences, on les concentre spatialement dans des guides d'onde, ou mieux encore dans des cavités résonnantes, où leur amplitude est augmentée. L'extension spatiale de l'onde est alors limitée à une dimension de l'ordre de la demi-longueur d'onde ; et la précision de mesure de la fréquence de résonance est limitée par le temps de transit τ à travers le guide d'onde des atomes de vitesse v_{at}, soit $\tau \sim \lambda / v_{at}$. On en déduit une largeur relative en fréquence relativement importante :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{1}{\nu\tau} \sim \frac{1}{\nu}\frac{v_{at}}{\lambda} = \frac{v_{at}}{c} \sim 10^{-6} \text{ à } 10^{-5} \quad \text{(jet à température ordinaire).} \tag{6-35}$$

Mais on travaille alors dans des conditions où $\gamma\tau \ll 1$; et pour réduire la largeur des raies, Ramsey fait passer le jet atomique successivement dans deux cavités, alimentées symétriquement par le même guide d'onde, afin d'assurer la même phase du champ électrique dans ces deux cavités, conformément au schéma de la figure 6.6. Soit l la distance entre les deux cavités ; chaque atome du jet subit alors deux impulsions courtes du rayonnement séparées par une durée dans le noir (micro-onde) $T = l/v_{at}$; on réalise ainsi les hypothèses du paragraphe précédent.

Les premières expériences de ce type utilisaient, pour l'observation des transitions, une technique analogue à celle des expériences de Rabi décrites au §1.4 : un premier dispositif du genre Stern et Gerlach, au début du jet, sélectionne les atomes appartenant à un seul état a ou b – ensuite on produit les transitions dans la cavité double de Ramsey – enfin un second dispositif du genre Stern et Gerlach sélectionne à nouveau un état atomique. La variation du nombre d'atomes détectés au bout du jet atomique indique l'existence de transitions entre les deux états atomiques. La figure 6.6 représente les expériences plus récentes où l'on met à profit les nouveaux lasers à semiconducteurs accordables et facilement maniables : au début du jet c'est le pompage optique du faisceau lumineux qui prépare les atomes dans l'état voulu ; à la fin du jet une détection optique permet de détecter un seul des deux états.

Nous reproduisons sur la figure 6.7 le résultat d'une expérience de franges de Ramsey, utilisant les techniques de Rabi (réf. [8]). La détection des atomes

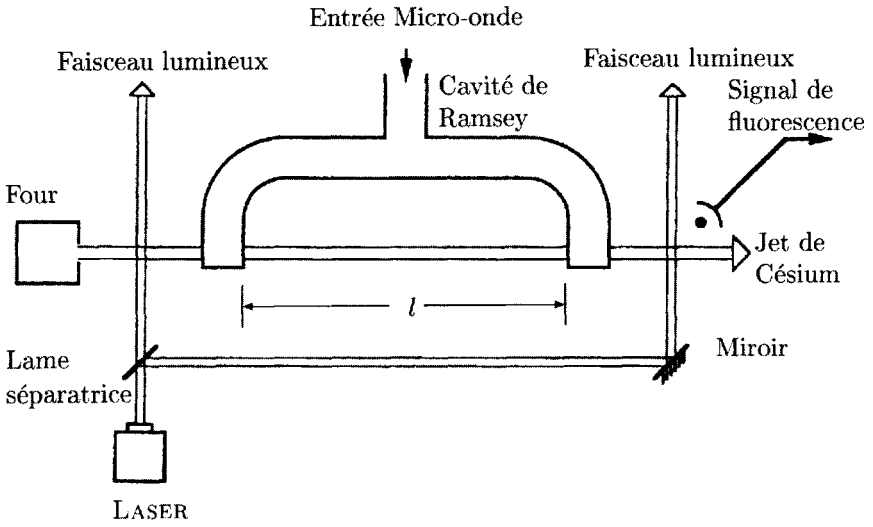


FIG. 6.6 – *Schéma simplifié d'un standard de fréquence (horloge atomique) à jet de Césium utilisant une cavité de Ramsey avec deux extrémités symétriques pour produire la transition micro-onde à 9 192,631 77 MHz (c'est la parfaite symétrie de la cavité qui assure l'identité de la phase de l'onde dans les deux régions d'interaction). Un faisceau laser interagit aussi deux fois avec le jet de Césium mais dans deux rôles différents (préparer les atomes dans le bon niveau d'énergie avant la cavité ; permettre la détection optique après la cavité).*

métastables d'Hélium à la fin du jet est particulièrement facile parce que chaque atome dépose l'importante énergie d'environ 20eV lorsque la collision sur le détecteur le fait revenir à l'état fondamental. On produit la transition entre les deux sous-niveaux de l'état métastable à la fréquence de 1,607 GHz. On observe les « franges d'interférence » prédites dans le calcul au sommet d'une large bosse. La largeur 0,5 MHz de cette grosse bosse correspond à l'inverse de la durée du temps de transit τ de quelques microsecondes. Le rapport de contraste $\dfrac{\text{Maxi} - \text{Mini}}{\text{Maxi} + \text{Mini}}$ est d'environ $1/2$; et la période des franges de 0,04 MHz correspond à une durée entre les impulsions $T \simeq 0,14$ msec. Mais l'amplitude des franges latérales à droite comme à gauche du centre diminue avec l'écart de fréquence beaucoup plus rapidement que nous ne l'avons calculé (formule (6-27) et (6-29)). Ceci vient du fait que les vitesses v_{at} des différents atomes ne sont pas égales ; elles se répartissent selon la statistique de Maxwell-Boltzmann autour de la valeur la plus probable ; la durée T mesurée correspond à cette vitesse la plus probable. Mais la variation de la durée T selon les atomes produit un rapide brouillage des franges d'interférence lorsque $|\delta\omega|$ croît et dépasse $2\pi/T$. Ce brouillage n'est pas gênant puisque seule

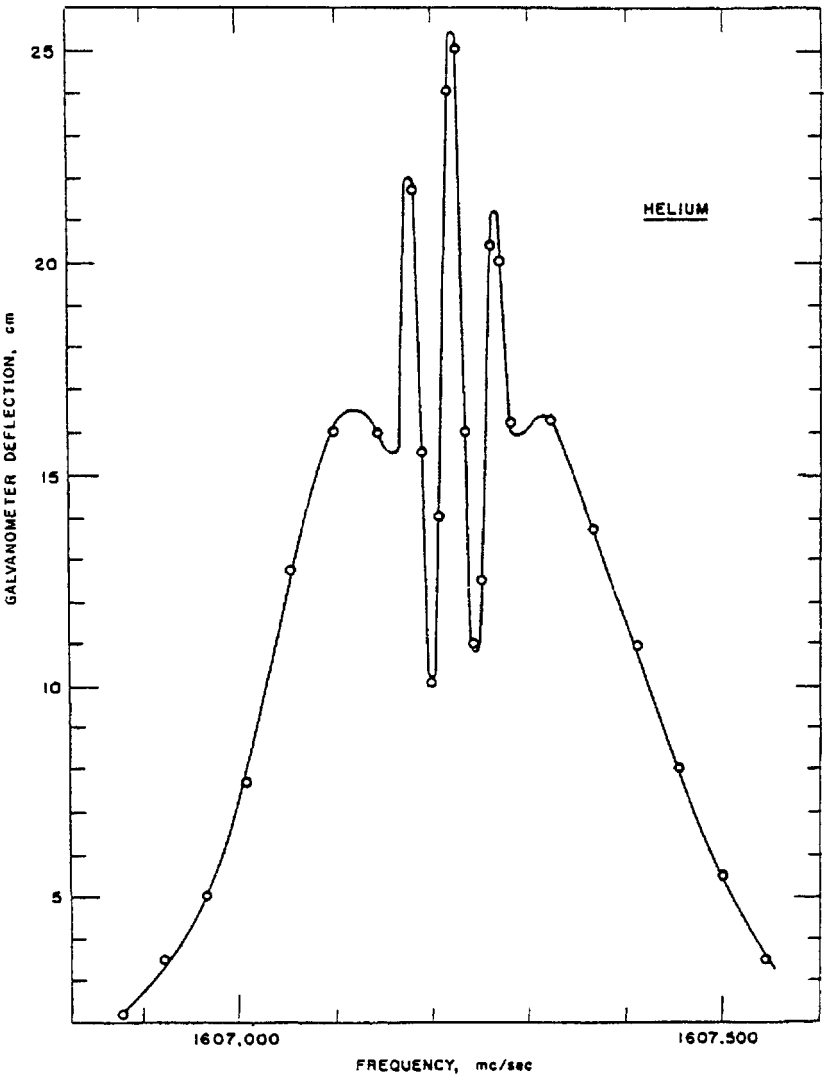


FIG. 6.7 - *Enregistrement expérimental des franges de Ramsey sur un jet atomique d'atomes d'Hélium métastables He^* (cf. référence [3]). L'onde hyperfréquence à 1,607 GHz qui produit la transition entre les deux sous-niveaux de He^* est envoyée dans deux cavités symétriques que les atomes traversent en une durée $\tau \simeq 10\mu s$. Le trajet entre les deux cavités est environ 15 fois plus long $T \simeq 15\tau$, expliquant un rapport inverse entre la largeur des franges et la largeur de la grosse bosse. Les fluctuations de la durée T d'un atome à l'autre à cause de leurs vitesses différentes brouillent les franges latérales (d'après la réf. [8], avec la permission d'Academic Press).*

la frange centrale est importante pour la mesure de fréquence. On note que l'exactitude de la position en fréquence de cette frange centrale dépend de manière critique de l'égalité des phases de l'onde dans les deux cavités. Cette figure 6.7 peut être considérée comme une double illustration des inégalités de Heisenberg $\delta E \cdot \delta t \gtrsim \hbar$, soit $\delta\omega \cdot \delta t \gtrsim 1$: les largeurs en fréquence respectives de la grosse bosse et des fines franges d'interférence révèlent les deux durées d'interaction caractéristiques de cette expérience τ et T.

Cette méthode des franges de Ramsey est utilisée de manière systématique dans les **horloges atomiques** qui fournissent depuis plusieurs décades une mesure du temps plus précise que les observations astronomiques. Une horloge atomique est, pour l'essentiel, un standard de fréquence atomique, c'est-à-dire un générateur d'onde dont la fréquence est asservie à rester au centre d'une transition atomique. Il suffit de compter les périodes de l'oscillation électrique pour le transformer en horloge. Avant 1967 l'unité de temps, la seconde, était définie à partir du mouvement annuel de la terre autour du soleil et d'observations astronomiques ; depuis 1967 la Conférence Générale des Poids et Mesures a adopté une nouvelle définition atomique de la seconde : c'est la durée de 9 192 631 770 périodes de la transition entre les deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium (isotope 133 Cs).

Les standards de fréquence à Césium utilisent tous la méthode de Ramsey sur des jets atomiques ; les premiers fabriqués utilisaient la technique de Rabi. On a développé maintenant des dispositifs conformes à la figure 6.6, où la préparation des atomes avant l'interaction hyperfréquence puis la détection se font de manière optique (réf. [4]). Suivant leur encombrement (longueur l entre les deux cavités) et leur degré de sophistication, ces standards de fréquence possèdent des stabilités relatives en fréquence $\delta\nu/\nu$ de l'ordre de 10^{-13} à 10^{-12}.

La limite de stabilité et de précision de ces standards est déterminée par la largeur de la frange centrale, c'est-à-dire par la durée T entre les deux interactions, liée à la vitesse atomique la plus probable, voisine de 300 m/s pour des atomes de Cs issus d'une vapeur à environ 400° K (température nécessaire pour la vaporisation).

Des progrès importants apparaissent en ce domaine grâce au développement récent des techniques utilisant des lasers pour ralentir et piéger des atomes dans l'espace. On ne peut pas utiliser directement en métrologie les atomes piégés quasi immobiles, parce qu'ils sont perturbés par les faisceaux lumineux qui servent à les maintenir dans le piège. Mais on peut utiliser les atomes extrêmement ralentis que l'on fait sortir d'un piège, par exemple, dans une fontaine atomique (réf. [5]).

La figure 6.8 représente le schéma d'une telle **fontaine atomique** de Césium, utilisée pour un standard de fréquence (réf. [6] et [7]). C'est un tube à vide de hauteur totale comprise entre 1 et 2 mètres. Dans la partie basse de l'appareil, on a réalisé un piège magnéto optique (M.O.T., Magneto Optical Trap) comportant une bobine de champ magnétique et six faisceaux laser,

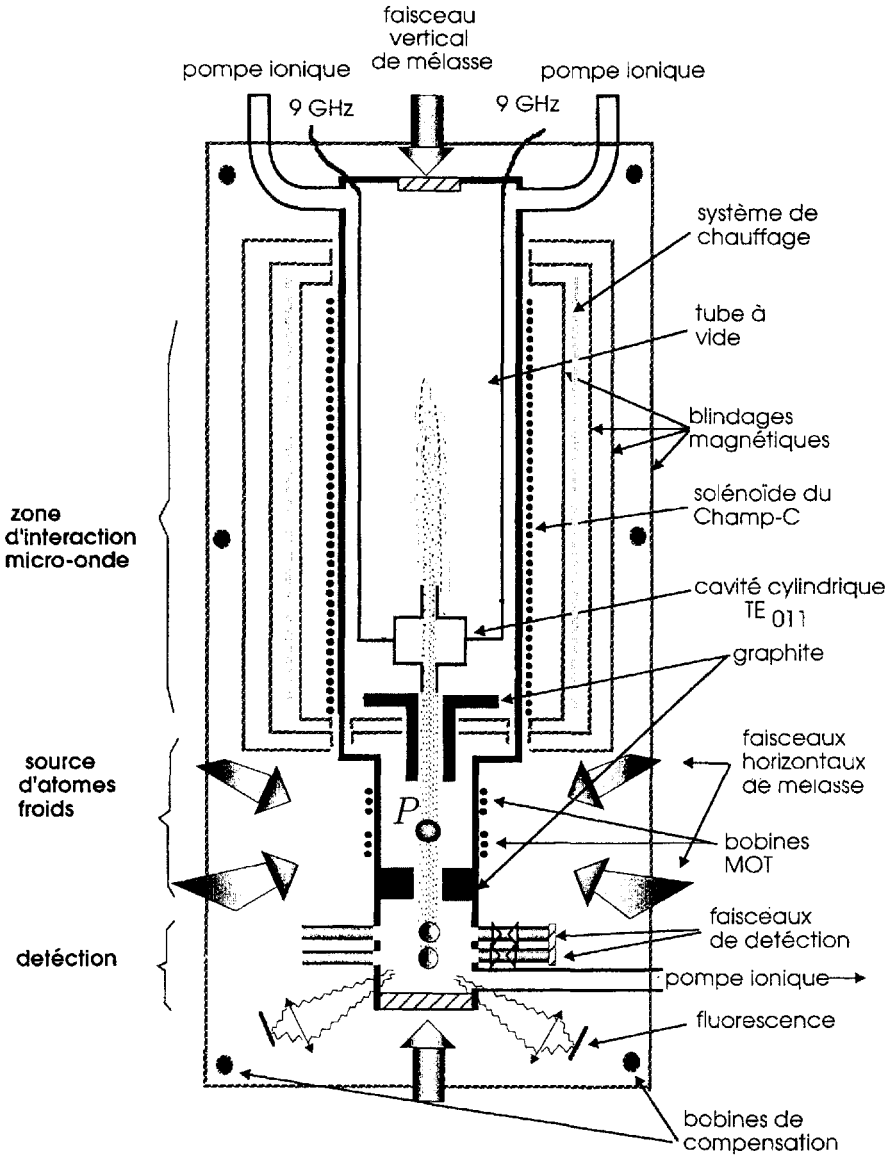


FIG. 6.8 – *Schéma de la fontaine atomique (référence [7]). La petite sphère P représente la « mélasse », nuage d'atomes de Cs quasi immobiles, au centre du piège (M.O.T. en anglais) avant la séquence de lancement vers le haut.*

deux à deux opposés, dirigés suivant les axes d'un trièdre trirectangle (ce sont les grosses flèches grises de la figure : deux verticales, et quatre horizontales, qui ont été représentées en perspective). Une séquence délicate de variation

contrôlée des fréquences précises des lasers permet d'obtenir au point P, centre du piège, un nuage d'atomes de Cs quasi immobiles couramment appelé « mélasse ». (Le principe d'action des faisceaux laser repose sur les échanges de quantité de mouvement entre atomes et photon ; mais l'explication détaillée sort du cadre de ce chapitre.)

Un léger décalage des fréquences des deux faisceaux verticaux dérègle le piège et lance le nuage vers le haut avec une vitesse initiale contrôlée v_0 de l'ordre de quelques mètres par seconde : les atomes montent, sont ralentis par la force de pesanteur puis redescendent comme les gouttes d'eau dans un jet d'eau ou une fontaine verticale. La formule classique des mouvements de chute libre ($z = v_0 t - gt^2/2$) permet de calculer, en fonction de v_0, la hauteur atteinte, de l'ordre du mètre ainsi que la durée T de la montée et du retour en descente, de l'ordre de la seconde. Une cavité hyperfréquence, accordée à la fréquence du Cs, est placée dans le bas de la fontaine atomique. Les atomes subissent donc deux impulsions d'hyperfréquence, l'une en montant, l'autre en descendant, séparées par une durée T, cent fois plus longue environ que dans les classiques jets atomiques. L'observation des transitions ainsi produites se fait dans le bas de l'appareil grâce à une détection optique (signal de fluorescence).

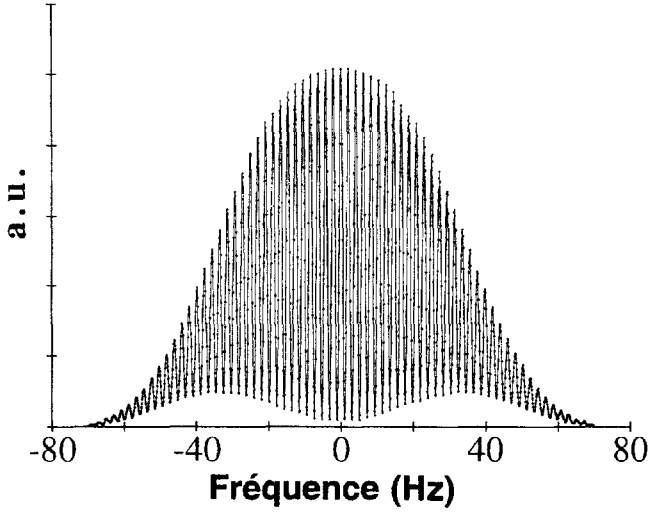


FIG. 6.9 – *Franges de Ramsey enregistrées grâce à la fontaine atomique de la figure 6.8 (référence [7]). Le nuage d'atomes étant lancé vers le haut avec une vitesse bien déterminée, la durée T entre les deux interactions dans la cavité hyperfréquence (à la montée puis à la descente) est identique pour tous les atomes, et les franges fines ne sont pas brouillées, contrairement aux expériences sur jet atomique (Fig. 6.7).*

La figure 6.9 montre les franges de Ramsey enregistrées en faisant varier la fréquence de l'onde dans la cavité. Les fluctuations des vitesses atomiques dans le nuage initial sont très faibles ; et de ce fait le nuage lancé verticalement est quasiment monocinétique, assurant la même durée T entre les impulsions subies par tous les atomes. On échappe ainsi au brouillage de la figure 6.7 et l'on peut vérifier en détail la formule (6-27) : on voit bien (en particulier) que les minima (6-28) ne sont voisins de zéro qu'au centre de la courbe, lorsque $\delta\omega$ est voisin de zéro, et qu'ils s'écartent de l'axe horizontal comme $\frac{\delta\omega^2}{\Omega^2} = \frac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2 + \Omega_1^2}$. La largeur totale d'une frange égale à 2Hz, correspond bien à la durée entre les deux passages dans la cavité ($T = 0,5$ seconde). Avec des raies aussi fines, on peut envisager des horloges de stabilités relatives $\Delta\nu/\nu$ meilleures que 10^{-14}, atteignant probablement 10^{-15}.

Bibliographie

[1] E.L. Hahn, Phys. Rev. **77**, 297 (1950).

[2] N.F. Ramsey, Phys. Rev. **78**, 695 (1950).

[3] N.F. Ramsey, Molecular Beams (Oxford University Press, 1955).

[4] C. Audoin, Metrologia **29**, 113 (1992).

[5] M. Kasevich, E. Riis, S. Chu et R. De Vœ, Phys. Rev. Lett. **63**, 612 (1989).

[6] A. Clairon, G. Santarelli, S. Guellati et W.D. Phillips, Europhysics Letters, **16**, 165 (1991).

[7] A. Clairon et alii, Bulletin du B.N.M. (avril 1996).

[8] H.E. Radford, Radiofrequency and Microwave Spectroscopy, page 124, in Atomic and Electron Physics, Vol. 4B Free Atoms, edited by V.W. Hughes and H.L. Schultz (Academic Press, 1967).

Chapitre 7

Champs électromagnétiques intenses

DANS CE CHAPITRE, nous entreprenons de décrire les perturbations apportées aux atomes par une irradiation intense. Nous avons vu au chapitre 3 que, même en dehors de la résonance, la traversée d'une vapeur atomique suffisamment dense modifie la propagation d'un faisceau lumineux, du fait de la partie réelle χ' de la susceptibilité de la vapeur, ou de son indice de réfraction $n_r = 1 + \chi'/2$, qui gardent des valeurs importantes en dehors de l'intervalle de fréquence où l'absorption est mesurable (*cf.* §3.3).

Si les atomes modifient le faisceau lumineux incident non résonnant, on s'attend à ce que réciproquement le faisceau lumineux puisse modifier l'état de l'atome non résonnant, par une sorte de généralisation du principe des actions réciproques, habituel en mécanique.

Pour calculer cet effet, nous supposerons que le champ $\mathcal{E}_1$ de l'onde est très grand, en sorte que le hamiltonien d'interaction H_I de l'onde avec l'atome joue un rôle beaucoup plus important que ceux de toutes les autres interactions subies par l'atome. Ceci permet dans une première approximation de calculer l'action de H_I seule en négligeant dans un premier temps les autres interactions, suivant le procédé habituel de la méthode des perturbations. En ce qui concerne l'émission spontanée et les collisions, cette hypothèse s'écrit

$$\Omega_1 = \mathcal{E}_1 \frac{d_{ab}}{\hbar} \gg \frac{1}{\tau_1}, \ \frac{1}{\tau_2} \tag{7-1}$$

Nous partirons toujours des calculs commencés au chapitre 1. Nous les poursuivrons en utilisant des méthodes un peu plus complexes, mais tout à fait classiques pour les systèmes d'équations linéaires comme ceux de la mécanique quantique.

7.1 Le hamiltonien dans la Représentation « Tournante »

Nous réutilisons l'intégralité du §1.2. Nous avons appliqué l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien total $(\mathrm{H}_0+\mathrm{H}_I)$ à la fonction d'onde ou vecteur d'état (1-5) :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle$$

Nous avons fait l'approximation séculaire (on néglige des termes en $\mathbf{e}^{\pm 2i\omega t}$) puis le changement de variable (1-10) :

$$\alpha(t) = a(t)\mathbf{e}^{+i\frac{E_a}{\hbar}t} \quad \text{et} \quad \beta(t) = b(t)\mathbf{e}^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\mathbf{e}^{i\omega t}$$

et ceci nous a permis d'obtenir le système différentiel (1-13) :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\beta$$
$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha + i\delta\omega\beta$$

Nous avions fait la remarque que ce choix des nouvelles variables α et β était équivalent au passage dans une Représentation « Tournante » où l'on choisissait deux nouveaux vecteurs de base (1-14) :

$$|\varphi_\alpha\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,|\psi_\alpha\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_\beta\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,\mathbf{e}^{-i\omega t}\,|\psi_b\rangle$$

Nous continuerons maintenant le calcul en nous plaçant délibérément dans cette Représentation Tournante (R.T.) : nous écrirons à présent l'état du système en le projetant sur les vecteurs de base précédents :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\varphi_\alpha\rangle + \beta(t)\,|\varphi_\beta\rangle \tag{7-2}$$

Dans cette base (R.T.), on considère $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$ comme fixes ; et l'on peut écrire une nouvelle équation ressemblant à l'équation de Schrödinger :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\right]_{\mathrm{R.T.}} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,|\varphi_\alpha\rangle + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,|\varphi_\beta\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}\,|\varphi\rangle \tag{7-3}$$

où l'opérateur $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ joue le rôle d'un hamiltonien dans le Repère Tournant.

Noter que la dérivée par rapport au temps de $|\psi(t)\rangle$ dans cette base (R.T.) est différente de la dérivée dans la base initiale des vecteurs $|\psi_a\rangle$ et $\psi_b\rangle$, base dans laquelle $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$ dépendent du temps. On peut faire l'analogie avec les changements de référentiels en mécanique : on écrit la loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen ; le passage à un autre référentiel en rotation par rapport au précédent conduit à une loi du mouvement modifiée, la dérivée temporelle d'un vecteur n'y ayant pas la même expression.

La substitution dans l'équation (7-3) des dérivées $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$ par leurs expressions tirées du système différentiel (1-13), à coefficients constants, permet d'obtenir par identification la matrice représentant l'opérateur $\mathcal{H}_{RT}$, dont les éléments sont aussi des constantes :

$$\frac{1}{i\hbar}\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} = \begin{pmatrix} 0 & i\dfrac{\Omega_1}{2} \\ i\dfrac{\Omega_1}{2} & i\delta\omega \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{\mathrm{RT}} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\Omega_1}{2} \\ \dfrac{\Omega_1}{2} & \delta\omega \end{pmatrix} \tag{7-4}$$

Tout l'intérêt de la Représentation Tournante est précisément de conduire à un hamiltonien à coefficients constants ; et, comme il est habituel en mécanique quantique, il est commode pour utiliser un tel hamiltonien de commencer par le diagonaliser.

Nous cherchons donc les vecteurs propres (de composantes α_p et β_p) et les valeurs propres $\lambda\hbar$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, tels que :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} \left|\varphi_{\mathrm{propre}}\right\rangle = \lambda\hbar \left|\varphi_{\mathrm{propre}}\right\rangle, \quad \text{avec} \quad \left|\varphi_{\mathrm{propre}}\right\rangle = \alpha_p \left|\varphi_\alpha\right\rangle + \beta_p \left|\varphi_\beta\right\rangle \tag{7-5}$$

soit en projetant l'équation ci-dessus sur les vecteurs de base $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_1}{2}\beta_p &= \lambda\alpha_p \\ -\frac{\Omega_1}{2}\alpha_p - \delta\omega\beta_p &= \lambda\beta_p \end{aligned}\right\} \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha_p}{\beta_p} = -\frac{\Omega_1/2}{\lambda} = -\frac{\lambda+\delta\omega}{\Omega_1/2} \tag{7-6}$$

on en tire l'équation aux valeurs propres :

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 + \lambda\delta\omega - \frac{\Omega_1^2}{4} = 0 \\ &\text{solutions : } \lambda_\pm = -\frac{\delta\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2} = -\frac{\delta\omega}{2} \pm \frac{\Omega}{2} \end{aligned}\right\} \tag{7-7}$$

On a représenté sur la figure 7.1a la variation des deux racines λ_+ et λ_- en fonction de l'écart à la résonance $\delta\omega$: ce sont les deux branches d'une hyperbole ayant pour asymptotes l'axe horizontal et une bissectrice des axes de coordonnées. On voit que la racine λ_+ est toujours positive tandis que l'autre racine λ_- est toujours négative.

Il nous reste à déterminer les vecteurs propres en calculant leurs composantes α_p et β_p. Compte tenu de la condition de normalisation $\alpha_p^2 + \beta_p^2 = 1$, nous pouvons définir un angle θ tel que $\alpha_p = \cos\theta$, $\beta_p = -\sin\theta$. (signe $-$ parce que α/β est de signe opposé à λ). On en déduit grâce à (7-7) :

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{\Omega_1/2} = \frac{\Omega_1/2}{\lambda+\delta\omega} \\ \operatorname{cotan} 2\theta &= \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{\delta\omega}{\Omega_1} \end{aligned}\right\} \tag{7-8}$$

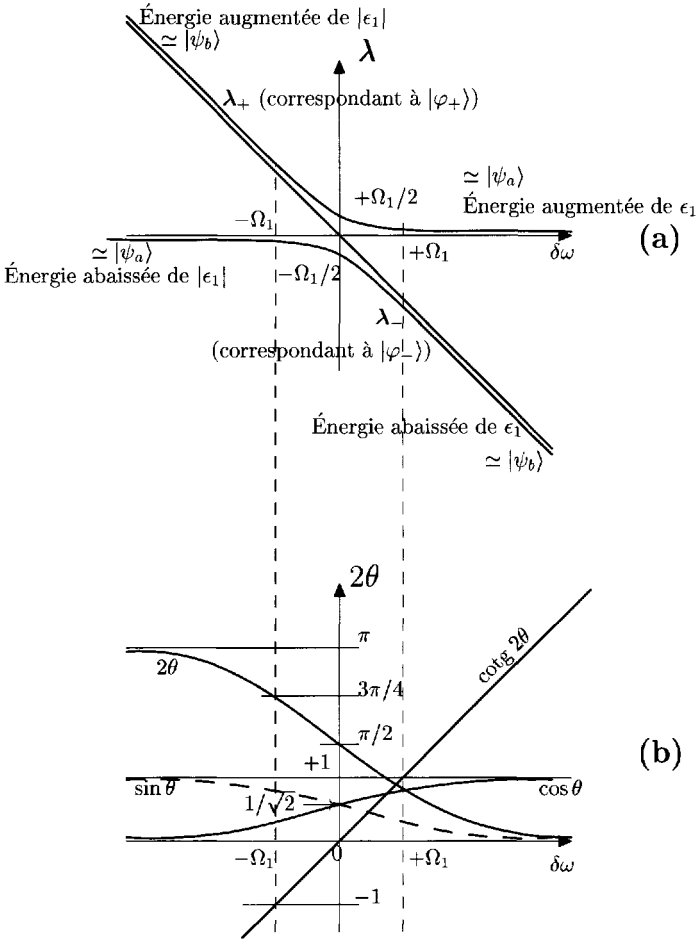


FIG. 7.1 – *Diagonalisation du hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ dans la Représentation Tournante ; (a) valeurs propres en fonction de l'écart à résonance $\delta\omega$; (b) détermination des vecteurs propres (*$\sin\theta$ *et* $\cos\theta$ *sont les composantes sur les vecteurs de base).*

Pour chaque valeur de $\delta\omega$, on obtient deux valeurs de l'angle 2θ différentes de π, c'est-à-dire deux valeurs pour l'angle lui-même, différant de $\pi/2$, et dont les sinus et cosinus sont croisés ; c'est-à-dire que nous choisissons un angle θ, compris entre 0 et $\pi/2$, qui correspond à λ_+ ($\sin\theta$ et $\cos\theta$ positifs),

et l'angle $(\theta - \pi/2)$ correspond à λ_-. On en déduit les deux fonctions propres orthogonales :

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_+\rangle &= \cos\theta\,|\varphi_\alpha\rangle - \sin\theta\,|\varphi_\beta\rangle \\ |\varphi_-\rangle &= \sin\theta\,|\varphi_\alpha\rangle + \cos\theta\,|\varphi_\beta\rangle \end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

On a représenté sur la figure 7.1b la variation avec l'écart de fréquence $\delta\omega$ de cotan 2θ (une droite), de l'angle 2θ et des sinus et cosinus. Inversement, on peut en déduire la décomposition de n'importe quel état sur $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$ grâce à :

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_\alpha\rangle &= \cos\theta\,|\varphi_+\rangle + \sin\theta\,|\varphi_-\rangle \\ |\varphi_\beta\rangle &= -\sin\theta\,|\varphi_+\rangle + \cos\theta\,|\varphi_-\rangle \end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

Nous savons que les fonctions propres du hamiltonien $\mathcal{H}_{RT}$ représentent des états stationnaires de la pseudo-équation de Shrödinger (7-3), c'est-à-dire que leur évolution temporelle s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_+(t)\rangle &= \mathbf{e}^{-i\lambda_+ t}\,|\varphi_+(0)\rangle = \mathbf{e}^{-i\lambda_+ t}\,(\cos\theta\,|\varphi_\alpha\rangle - \sin\theta\,|\varphi_\beta\rangle) \\ |\varphi_-(t)\rangle &= \mathbf{e}^{-i\lambda_- t}\,|\varphi_-(0)\rangle = \mathbf{e}^{-i\lambda_- t}\,(\sin\theta\,|\varphi_\alpha\rangle + \cos\theta\,|\varphi_\beta\rangle) \end{aligned}\right\} \tag{7-11}$$

Sachant que tout état du système peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$, nous avons ainsi obtenu une solution générale pour décrire l'évolution du système obéissant à (7-3). Nous allons étudier deux cas particuliers dans les paragraphes suivants.

7.2 Cas non résonnant « déplacements lumineux » ou effet Stark dynamique

Nous nous plaçons maintenant dans les cas très largement non résonnants. Compte tenu de l'élargissement de puissance en Ω_1 calculé pour les solutions stationnaires (*cf.* §3.4), si nous voulons que les probabilités de transition soient nulles, il faut que l'écart à la résonance soit encore beaucoup plus large que Ω_1 ; et en nous rappelant la condition (7-1) nous écrivons :

$$|\delta\omega| \gg \Omega_1 \gg \frac{1}{\tau_1},\ \frac{1}{\tau_2} \tag{7-12}$$

Dans ces conditions très éloignées de la résonance où $|\delta\omega| \gg \Omega_1$, on peut faire un calcul approché de la racine carrée :

$$\sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2} = |\delta\omega|\sqrt{1 + \frac{\Omega_1^2}{\delta\omega^2}} \simeq |\delta\omega|\left(1 + \frac{\Omega_1^2}{2\delta\omega^2}\right) = |\delta\omega| + \frac{\Omega_1^2}{2|\delta\omega|}$$

on en déduit les solutions approchées suivant le signe de $\delta\omega$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{pour } \delta\omega \gg \Omega_1 & \left\{\begin{array}{l}\lambda_+ \simeq \varepsilon_1 = \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} \\ \lambda_- \simeq -(\delta\omega + \varepsilon_1)\end{array}\right. \\ \text{pour } \delta\omega \ll -\Omega_1, & \left\{\begin{array}{l}\lambda_+ \simeq -(\delta\omega + \varepsilon_1), \\ \lambda_- \simeq \varepsilon_1\end{array}\right. \end{array}} \tag{7-13}$$

(le petit écart de fréquence ε_1 a le signe de $\delta\omega$; on note le croisement des expressions approchées entre λ_+ et λ_- selon le signe de $\delta\omega$).

1) $\delta\omega > 0 \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta \simeq 1 \\ \sin\theta \simeq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|\varphi_+\rangle \simeq |\varphi_\alpha\rangle \\ |\varphi_-\rangle \simeq |\varphi_\beta\rangle\end{cases}$ et les états propres de $\mathcal{H}_{\text{RT}}$ sont de manière approchée :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } \lambda_+ \simeq \varepsilon_1 & |\varphi_+(t)\rangle \simeq \mathbf{e}^{-i\varepsilon_1 t}\,|\varphi_\alpha\rangle \\ \text{pour } \lambda_- \simeq -(\delta\omega + \varepsilon_1), & |\varphi_-(t)\rangle \simeq \mathbf{e}^{i(\delta\omega + \varepsilon_1)t}\,|\varphi_\beta\rangle \end{array}\right\}$$

2) $\delta\omega < 0 \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta \simeq 0 \\ \sin\theta \simeq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|\varphi_+\rangle \simeq -|\varphi_\beta\rangle \\ |\varphi_-\rangle \simeq |\varphi_\alpha\rangle\end{cases}$ et les états propres de $\mathcal{H}_{\text{RT}}$ sont de manière approchée :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } \lambda_+ \simeq -(\delta\omega + \varepsilon_1), & |\varphi_+(t)\rangle \simeq -\mathbf{e}^{i(\delta\omega + \varepsilon_1)t}|\varphi_\beta\rangle \\ \text{pour } \lambda_- \simeq \varepsilon_1 & |\varphi_-(t)\rangle \simeq \mathbf{e}^{-i\varepsilon_1 t}\,|\varphi_\alpha\rangle \end{array}\right\}$$

les expressions littérales des états propres $|\varphi_+(t)\rangle$ et $|\varphi_-(t)\rangle$ permutent quand on change le signe de l'écart à résonance $\delta\omega$. Mais attention ! ce ne sont pas tout à fait les mêmes vecteurs propres, parce que le signe de $\varepsilon_1 = \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega}$ change aussi avec le signe de $\delta\omega$.

En définitive, bien qu'ayant fait le calcul dans la représentation tournante, il nous est très facile de revenir maintenant dans la représentation normale, de vecteurs de base $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$: on peut dire **de manière approchée** que le hamiltonien $(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)$ a deux états propres, qui peuvent s'écrire sans avoir à tenir compte du signe de $\delta\omega$:

$$\left.\begin{array}{l} |\psi'(t)\rangle \simeq \mathbf{e}^{-i\varepsilon_1 t}|\varphi_\alpha\rangle = \mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_a}{\hbar} + \varepsilon_1\right)t}\,|\psi_a\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t}\,|\psi_a\rangle \\ |\psi''(t)\rangle \simeq \mathbf{e}^{i(\delta\omega + \varepsilon_1 t)}|\varphi_\beta\rangle = \mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_b}{\hbar} - \varepsilon_1\right)t}\,|\psi_b\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t}\,|\psi_b\rangle \end{array}\right\} \tag{7-14}$$

(en tenant compte de (1-14) et (1-12) $\delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - \dfrac{E_b - E_a}{\hbar}$), tels que

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)\,|\psi'(t)\rangle \simeq E'_a\,|\psi'(t)\rangle = E'_a\,\mathbf{e}^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t}\,|\psi_a\rangle & \text{avec } E'_a = E_a + \hbar\epsilon_1 \\ (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)\,|\psi''(t)\rangle \simeq E''_b\,|\psi''(t)\rangle = E''_b\,\mathbf{e}^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t}\,|\psi_b\rangle & \text{avec } E''_b = E_b - \hbar\epsilon_1 \end{array}\right\} \tag{7-15}$$

Ces deux états propres sont proches des états de base $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$, mais s'en distinguent par des valeurs modifiées de l'énergie, les déplacements d'énergie étant égaux à $\pm\hbar\varepsilon_1$. Les nouvelles valeurs de l'énergie E'_a et E''_b sont rapprochées si $\delta\omega$ et donc ε_1 sont positifs ; elles sont écartées au contraire si $\delta\omega$ et ε sont négatifs.

La réalité de ces déplacements d'énergie peut être vérifiée en faisant agir une deuxième onde électromagnétique de faible intensité que nous indexerons avec l'indice 2 :

$$\left.\begin{array}{l}\text{de champ } \mathcal{E}_2 \ll \mathcal{E}_1 \Longrightarrow \text{fréquence de Rabi } \Omega_2 = \mathcal{E}_2\dfrac{d_{ab}}{\hbar} \ll \Omega_1 \\ \text{de fréquence } \omega_2 \text{ proche de la résonnance} \Longrightarrow \omega_2 - \omega_0 \approx 0\end{array}\right\} \qquad (7\text{-}16)$$

Nous appellerons H_2 le hamiltonien correspondant à cette seconde interaction. Le hamiltonien total du système étudié est donc maintenant $(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I + \mathrm{H}_2)$ mais l'interaction H_2 étant beaucoup moins forte que la première interaction H_I, nous pouvons utiliser un calcul de perturbation, dans lequel nous commençons par calculer la solution correspondant aux interactions principales $(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_I)$, valable lorsque $\Omega_2 = 0$. Cette solution nous la connaissons déjà ; c'est une combinaison linéaire des deux états propres (7-14) :

$$|\psi(t)\rangle = A\,|\psi'(t)\rangle + B\,|\psi''(t)\rangle$$

où A et B sont des constantes dépendant des conditions initiales. Lorsque Ω_2 n'est plus nul, nous cherchons la solution du hamiltonien total par la méthode de variations des constantes en cherchant des solutions de la forme

$$|\psi(t)\rangle = A(t)\,|\psi'(t)\rangle + B(t)\,|\psi''(t)\rangle = \underbrace{A(t)\mathrm{e}^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t}}_{a(t)}|\psi_a\rangle + \underbrace{B(t)\mathrm{e}^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t}}_{b(t)}|\psi_b\rangle \qquad (7\text{-}17)$$

on pourra encore utiliser les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ en projection sur $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle$$

En utilisant (7-15) et (7-17) au second membre de l'équation de Schrödinger, on obtient

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = (\mathrm{H}_0+\mathrm{H}_I)\,|\psi(t)\rangle + \mathrm{H}_2\,|\psi(t)\rangle \simeq E'_a a(t)\,|\psi_a\rangle + E''_b b(t)\,|\psi_b\rangle + \mathrm{H}_2\,|\psi(t)\rangle$$

Pour le hamiltonien H_2 nous n'avons qu'à transposer avec l'indice 2 toutes les formules écrites pour H_I au début du chapitre 1 ; et en projetant sur les deux vecteurs de base $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$:

$$\left.\begin{array}{l} i\hbar\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \simeq a(t)E'_a - b(t)\hbar\Omega_2\cos\omega_2 t \\ i\hbar\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} \simeq b(t)E''_b - a(t)\hbar\Omega_2\cos\omega_2 t \end{array}\right\} \qquad (7\text{-}18)$$

Ces deux équations sont la transposition avec l'onde numéro 2 des équations (1-6) et (1-7) écrites avec l'onde numéro 1 au début du chapitre 1 ; nous somme ainsi ramenés au problème précédent, avec pour seule différence que les énergies modifiées E'_a et E''_b remplacent les énergies initiales E_a et E_b. Tous les calculs de la fin du chapitre 1, ou du chapitre 2, peuvent donc être repris à condition de définir maintenant pour la fréquence ω_2 un écart $\delta\omega_2$ tel que :

$$\delta\omega_2 = \omega_2 - \frac{E''_b - E'_a}{\hbar} = \omega_2 - \left(\frac{E_b - E_a}{\hbar} - 2\varepsilon_1\right) = \omega_2 - (\omega_0 - 2\varepsilon_1) \quad (7\text{-}19)$$

L'action résonnante de l'onde numéro 2 sera maximum pour $\delta\omega_2 = 0$, c'est-à-dire pour une fréquence ω_2 légèrement différente de la fréquence normale de résonance ω_0. L'onde résonnante de faible intensité permet de tester ou de sonder le système atomique en le perturbant au minimum, et met ainsi en évidence les modifications apportées au système par l'onde intense non résonnante.

Dans les expériences effectivement réalisées, on préfère généralement utiliser une onde-sonde de fréquence ω_2 complètement différente de la première fréquence ω ; c'est-à-dire que l'onde-sonde est choisie en résonance avec une autre transition vers un troisième niveau d'énergie E_c, en sorte que $\omega_2 \simeq \frac{E_c - E_a}{\hbar}$ par exemple. Dans le calcul correspondant il faut alors définir un écart de fréquence :

$$\delta\omega_2 = \omega_2 - \frac{E_c - E'_a}{\hbar} = \omega_2 - \left(\frac{E_c - E_a}{\hbar} - \varepsilon_1\right) \quad (7\text{-}19\text{bis})$$

en supposant que le niveau E_c n'est pas perturbé de manière significative. Si le niveau E_c est aussi légèrement perturbé, il faudra bien sûr en tenir compte également.

Ces déplacements des niveaux d'énergie sous l'action d'une irradiation électromagnétique intense sont appelés suivant les auteurs « effet Stark dynamique » ou « déplacement lumineux » (en anglais : « light-shifts »). Ils ont été observés dans les années 1950, d'abord dans le domaine hyperfréquence ou radiofréquence (références [1] et [2]). Mais des phénomènes analogues sous l'action d'une irradiation lumineuse étaient observés dans les mêmes années lors de la mise au point des premiers standards d'hyperfréquences à pompage optique et à détection optique. Ces « déplacements lumineux » étaient alors expliqués dans le cadre du modèle d'« atome habillé par la lumière » développé par Claude Cohen-Tannoudji. Ce modèle qui quantifie le rayonnement est indispensable pour expliquer l'ensemble des phénomènes d'interaction entre photons et atomes. Mais les déplacements lumineux sont produits par de très fortes intensités, pour lesquelles la notion de champ électrique prend une signification réelle ; et c'est pourquoi nous pouvons en donner une première approche par un raisonnement semi-classique, utilisant la notion de champ électrique.

7.3 Observation expérimentale des déplacements lumineux

Nous choisissons de décrire deux expériences assez différentes dans lesquelles on observe des déplacements de niveaux créés par une forte irradiation lumineuse. Dans les deux cas l'observation se fait à une fréquence ω_2 très différente de la fréquence ω de l'onde intense qui provoque les déplacements ; c'est-à-dire qu'on utilise pour l'observation une seconde transition vers un troisième niveau, à partir de l'un des deux niveaux perturbés de la première transition.

1) *Détection sur une transition radiofréquence du déplacement faible créé par une source lumineuse classique.* C'est l'expérience de démonstration effectuée en 1962 par Claude Cohen-Tannoudji sur une vapeur de l'isotope 199 du mercure (réf. [3, 4, 5]). La figure 7.2 représente la partie utile du diagramme d'énergie de l'isotope Hg 199 : le niveau fondamental E_0 (notation spectroscopique 6^1S_0) a un spin électronique nul ; mais le spin nucléaire $I = 1/2$ donne lieu dans le champ $\overrightarrow{B_0}$ à deux sous-niveaux Zeeman $m_I = \pm 1/2$ entre lesquels on peut produire des transitions (de Résonance Magnétique Nucléaire) avec une fréquence radio assez basse $\omega_2/2\pi$ de quelques kHz. Le premier niveau excité, de notation spectroscopique 6^3P_1, possède un spin électronique $J = 1$; le couplage entre spin électronique et spin nucléaire conduit à la séparation entre deux niveaux hyperfins de spin total $F = 1/2$ ou $F = 3/2$. Nous n'avons représenté en E_1 que le plus bas en énergie ($F = 1/2$) qui se décompose dans le champ $\overrightarrow{B_0}$ en deux sous-niveaux Zeeman $m_F = \pm 1/2$. Les accolades de la figure 7.3 symbolisent une dilatation locale de l'échelle d'énergie permettant de séparer les sous-niveaux Zeeman qui sinon resteraient confondus dans l'épaisseur du trait E_0 ou du trait E_1 ; l'inversion du signe de leur énergie entre E_0 et E_1 tient au fait qu'il s'agit de spins électroniques pour E_1 tandis qu'ils sont purement nucléaires pour E_0 (l'autre niveau hyperfin $F = 3/2$ est nettement plus élevé en énergie et, de ce fait, il ne contribue à cette expérience que pour des termes correctifs, que nous négligerons ici totalement).

Entre les deux niveaux E_0 et E_1 il y a possibilité de transitions radiatives en lumière ultraviolette à la longueur d'onde $\lambda = 253,7$ nm. Mais entre sous-niveaux Zeeman, l'élément de matrice du hamiltonien d'interaction H_I, c'est-à-dire encore la probabilité de transition dépend de la polarisation de la lumière. Et dans cette expérience, on choisit de n'utiliser que des faisceaux lumineux polarisés circulairement.

La figure 7.3 décrit le dispositif expérimental : la vapeur est soumise au champ magnétique constant $\overrightarrow{B_0}$, et les faisceaux lumineux utilisés se propagent parallèlement à ce champ $\overrightarrow{B_0}$; ils sont polarisés circulairement par les polariseurs P. On appelle σ^+ la polarisation pour laquelle le champ électrique $\mathcal{E}$ de l'onde tourne dans le sens du courant magnétisant (sens trigonométrique

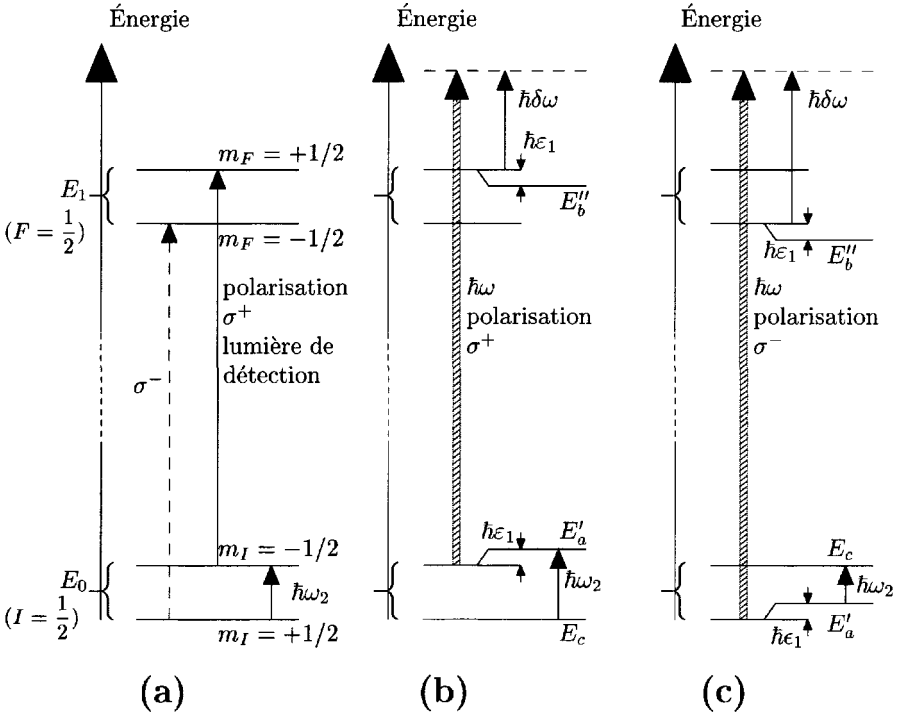


FIG. 7.2 – *Diagramme d'énergie partiel de l'isotope 199 du mercure : transition du niveau fondamental E_0 (notation spectroscopique 6^1S_0) au premier niveau hyperfin E_1 ($F = 1/2$) du premier état excité (notation spectroscopique 6^3P_1) à la longueur d'onde U.V. $\lambda = 253,7nm$. Dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ chacun de ces deux niveaux est subdivisé en deux sous-niveaux Zeeman correspondant aux deux orientations opposées $\pm 1/2$ des moments cinétiques. (a) Diagramme normal (sous faible irradiation) montrant la transition polarisée circulairement σ^+ utilisée pour la détection de la population du sous-niveau $m_I = -1/2$. (b) Déplacements des sous-niveaux d'énergie $m_I = -1/2$ et $m_F = +1/2$ sous l'action d'une irradiation intense non résonnante ($\delta\omega > 0$) de polarisation σ^+. (c) Déplacements des deux autres sous-niveaux $m_I = +1/2$ et $m_F = -1/2$ dans le cas d'une polarisation σ^-, tournant en sens opposé.*

autour de la direction $\overrightarrow{B_0}$) et σ^- la polarisation correspondant au sens de rotation opposé.

Le calcul des éléments de matrice (*cf.* chapitre 19) conduit aux classiques règles de sélection entre sous-niveaux Zeeman (de nombres quantiques

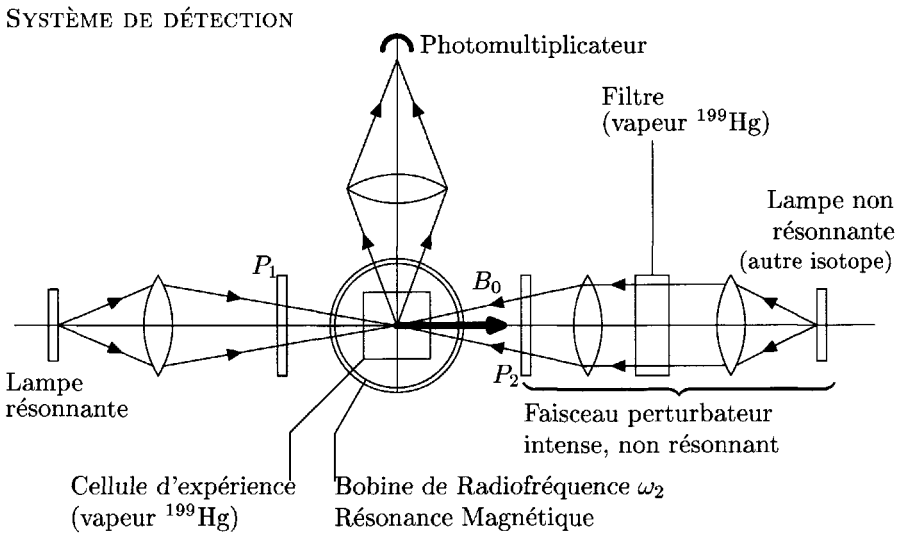


FIG. 7.3 - *Dispositif expérimental pour la mise en évidence des « déplacements lumineux » de niveaux d'énergie (on n'a pas représenté les bobines qui produisent le champ magnétique constant $\overrightarrow{B_0}$). Les deux faisceaux lumineux incidents traversent des systèmes polariseurs P_1 et P_2 qui leur communiquent des polarisations circulaires.*

magnétiques m_F dans le niveau supérieur E_1 et m_I dans le niveau inférieur E_0)

$$\text{en polarisation } \sigma^+, m_F - m_I = +1$$
$$\text{en polarisation } \sigma^-, m_F - m_I = -1$$

(ces règles ne font qu'exprimer la conservation du moment cinétique, si l'on se souvient qu'un photon σ^+ possède une composante de moment cinétique égale à $+\hbar$ dans la direction de $\overrightarrow{B_0}$, et qu'un photon σ^- possède le moment cinétique opposé).

Ainsi le faisceau de détection résonnant et de polarisation σ^+ n'excite que les atomes du sous-niveau $m_I = -1/2$. L'intensité de la lumière de fluorescence, réémise par les atomes excités, et recueillie sur un photomultiplicateur (Fig. 7.3), est donc proportionnelle à la population de ce sous-niveau $m_I = -1/2$. C'est ce qui permet d'observer la résonance magnétique entre les sous-niveaux $m_I = \pm 1/2$ à la fréquence $\omega_2/2\pi$. C'est ainsi qu'ont été obtenus les transitoires, oscillant à la fréquence de Rabi, présentés sur la figure 5.4 au chapitre 5.

Mais les règles de sélection, qui s'appliquent au faisceau de détection, s'appliquent aussi bien au faisceau perturbateur non résonnant représenté sur la partie droite de la figure 7.3. Ce faisceau est émis par une autre lampe

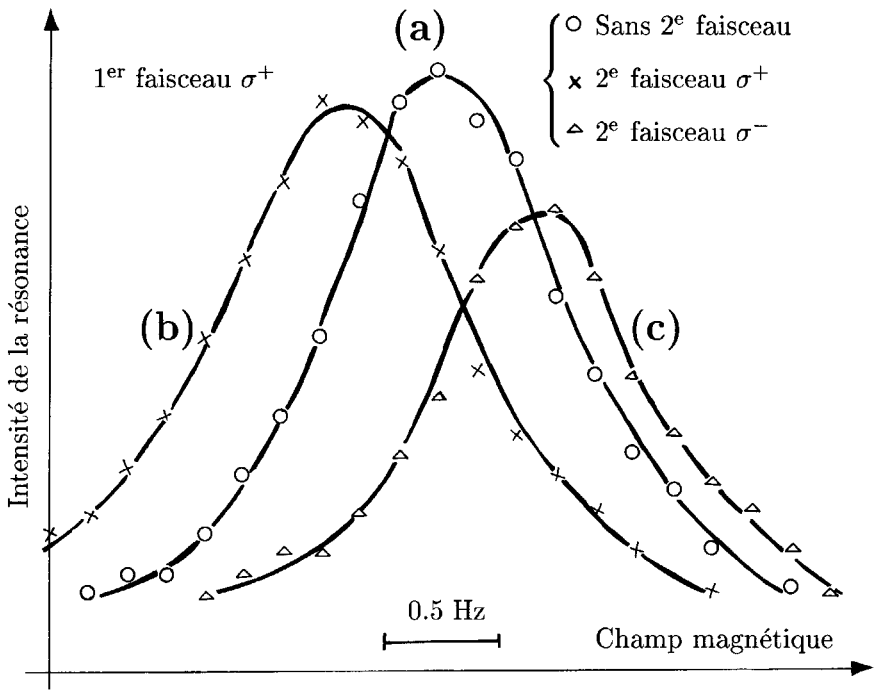


FIG. 7.4 – *Mise en évidence des déplacements lumineux. Résonance hertzienne entre les deux sous-niveaux de Zeeman $m_I = \pm 1/2$ de l'état fondamental de ^{199}Hg. Détection optique selon schéma de la figure 7.3. La fréquence hertzienne est fixe et on balaye le champ magnétique (axe horizontal). (a) Résonance normale en l'absence de faisceau perturbateur. (b) Résonance perturbée par un faisceau non résonnant polarisé σ^+. (c) Résonance perturbée par un faisceau non résonnant polarisé σ^- (réf. [3]).*

à mercure remplie avec un autre isotope qui émet une fréquence ω légèrement supérieure à celle de la transition $E_0 \rightarrow E_1$: l'écart $\delta\omega = \omega - \dfrac{E_1 - E_0}{\hbar}$ est supérieur à la largeur de raie Doppler (la faible quantité de lumière résonnante qui pourrait provenir de cette deuxième lampe, due aux impuretés isotopiques ou aux atomes de très grande vitesse, est éliminée par absorption dans un filtre de vapeur 199 Hg). Compte tenu des règles de sélection, si le polariseur P_2 produit une polarisation circulaire σ^+, seuls les sous-niveaux $m_I = -1/2$ et $m_F = +1/2$ sont perturbés (*cf.* diagramme d'énergie 7.2b) ; si au contraire P_2 produit la polarisation σ^-, seuls les sous-niveaux $m_I = 1/2$ et $m_F = -1/2$ sont perturbés (*cf.* diagramme d'énergie 7.2c). La transition de radiofréquence $\omega_2/2\pi$ permet de sonder la perturbation des sous-niveaux inférieurs.

La figure 7.4 reproduit les courbes expérimentales obtenues en enregistrant l'intensité de fluorescence en fonction du champ magnétique B_0, tout en maintenant constante la fréquence $\omega_2/2\pi = 5$ kHz : la courbe centrale (a) est la résonance normale en l'absence de faisceau perturbateur. La courbe (b) est obtenue avec une perturbation en lumière σ^+ ; elle est décalée vers les faibles valeurs de B_0 parce qu'il faut compenser l'augmentation de la fréquence centrale (Fig. 7.2b) par une baisse de champ magnétique pour retrouver le centre de la résonance. La courbe (c) est obtenue avec un faisceau non résonnant σ^- ; elle est décalée vers les fortes valeurs du champ B_0 parce qu'il faut compenser par une hausse de champ magnétique la diminution de la fréquence centrale du diagramme 7.2c. Le déplacement des courbes de résonance, mesuré en fréquence, est de l'ordre de 0,4 à 0,5 Hz ; c'est bien l'ordre de grandeur attendu avec ces faisceaux lumineux issus de lampes à décharge traditionnelles et dont l'intensité se mesure en dizaines de milliwatts par cm^2.

2) *Détection sur une transition visible spontanée du déplacement produit par un laser infrarouge en impulsion.* L'expérience effectuée par P. Platz en 1971 tire parti de la mise au point des lasers de puissance en impulsion pour réaliser un déplacement de fréquence optique de plusieurs GigaHertz, largement supérieur à la largeur Doppler des raies spectrales (réf. [6]). Il utilise encore l'atome de mercure dont la figure 7.5 représente une partie plus vaste du diagramme d'énergie. L'idée est d'utiliser le voisinage entre la longueur d'onde 11.287 Å de la transition entre les deux états excités 7^3S_1 et 7^3P_2 et la longueur d'onde d'environ 10 600 Å du laser à ions Nd^{+++}.

Pour observer la perturbation de ces niveaux 7^3S_1 ou 7^3P_2, encore faut-il qu'il existe des atomes dans ces niveaux assez fortement excités. L'observation est donc faite dans une lampe à mercure analogue à celles qui étaient utilisées dans l'expérience précédente : ce sont de petits disques creux en verre, remplis de vapeur de mercure, et excités sans électrodes par une décharge hyperfréquence (ici les effets observés étant moins fins, on peut utiliser le mélange ordinaire des isotopes du mercure naturel). Il suffit d'envoyer la lumière du laser à travers la lampe et d'observer la lumière spontanée émise par la lampe sur une des raies spectrales issues du niveau excité 7^3S_1 ; on choisira la raie verte à 5 461 Å bien caractéristique des spectres du mercure (transition de 7^3S_1 vers 6^3P_2 ; *cf.* Fig. 7.5).

La seule difficulté de l'expérience (mais elle est de taille !) réside dans la nécessité de faire l'analyse spectrale de cette raie verte pendant la courte durée de quelques nanosecondes de l'impulsion laser. Dans ce but, on commence par isoler la région verte du spectre avec un filtre interférentiel et l'on envoie cette lumière verte à travers un étalon de Pérot et Fabry suivi d'une lentille à assez longue focale ; avec une source lumineuse ordinaire, on observe dans le plan focal les classiques anneaux d'interférence correspondant à chaque longueur d'onde. Pour l'expérience présente, on place dans ce plan focal un séparateur de longueurs d'onde constitué par plusieurs miroirs annulaires concentriques (de même centre que les anneaux d'interférence) et ayant

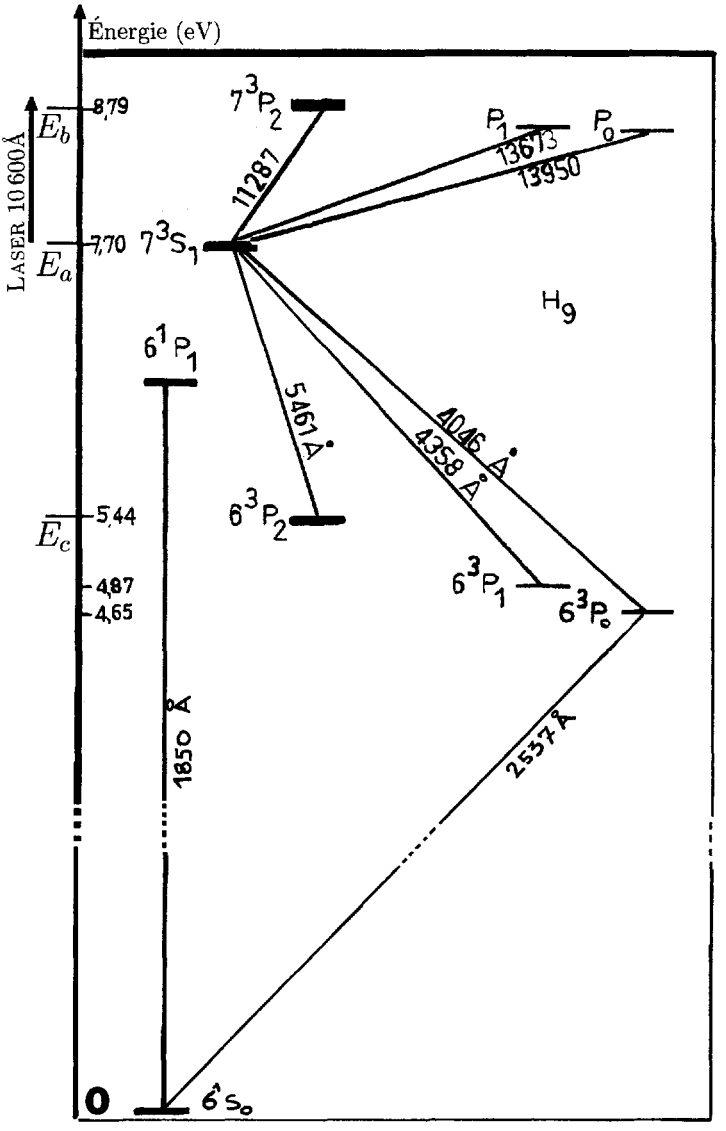


FIG. 7.5 – *Spectre du mercure simplifié, montrant les 2 niveaux E_a (7^3S_1) et E_b (7^3P_2) perturbés par une irradiation non résonnante à 10 600Å avec un laser très puissant en impulsion (réf. [6]). La perturbation du niveau E_a (7^3S_1) est observée grâce à l'analyse spectrale de la lumière verte émise en fluorescence vers le niveau E_c (6^3P_2) (on voit également sur ce diagramme la raie des résonances à 2 537Å utilisé dans l'expérience précédente pour exciter l'état fondamental 6^1S_0).*

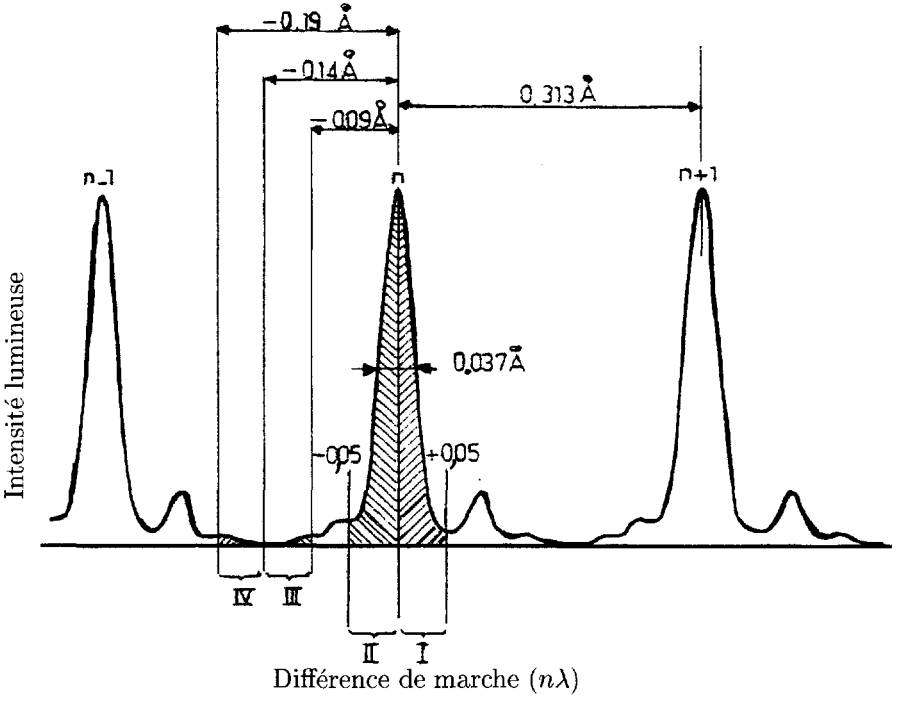


FIG. 7.6 – *Enregistrement du profil de la raie verte du Hg à 5 461 Å (mercure naturel) obtenu à l'aide d'un balayage de la pression dans l'enceinte de Pérot-Fabry. Disposition des canaux I-IV à faible résolution spectrale (réf. [6]).*

des surfaces égales. Ces miroirs sont orientés dans des directions légèrement différentes et renvoient la lumière vers des photomultiplicateurs distincts. Ainsi chaque photomultiplicateur mesure l'intensité d'une bande de longueur d'onde différente.

La figure 7.6 explique ce fonctionnement. Elle représente un enregistrement du profil de la raie verte du mercure naturel par balayage de pression dans les conditions ordinaires de fonctionnement de la lampe (c'est-à-dire que l'on modifie le chemin optique interne du Pérot-Fabry d'analyse par variation de la pression d'air dans l'enceinte étanche où il est enfermé). Les raies satellites à droite et à gauche proviennent d'isotopes minoritaires, et l'essentiel de la lumière est émise dans une raie centrale dont la largeur (0,037 Å, soit en fréquence 3,5 GHz) reflète à la fois les écarts d'énergie entre différents isotopes et la température élevée dans la décharge. Sur l'axe horizontal des longueurs d'onde, sont indiquées les quatre bandes de fréquence I, II, III et IV qui seront envoyées sur des photomultiplicateurs distincts par les miroires annulaires séparateurs de longueur d'onde. L'expérience consiste à enregistrer en fonction

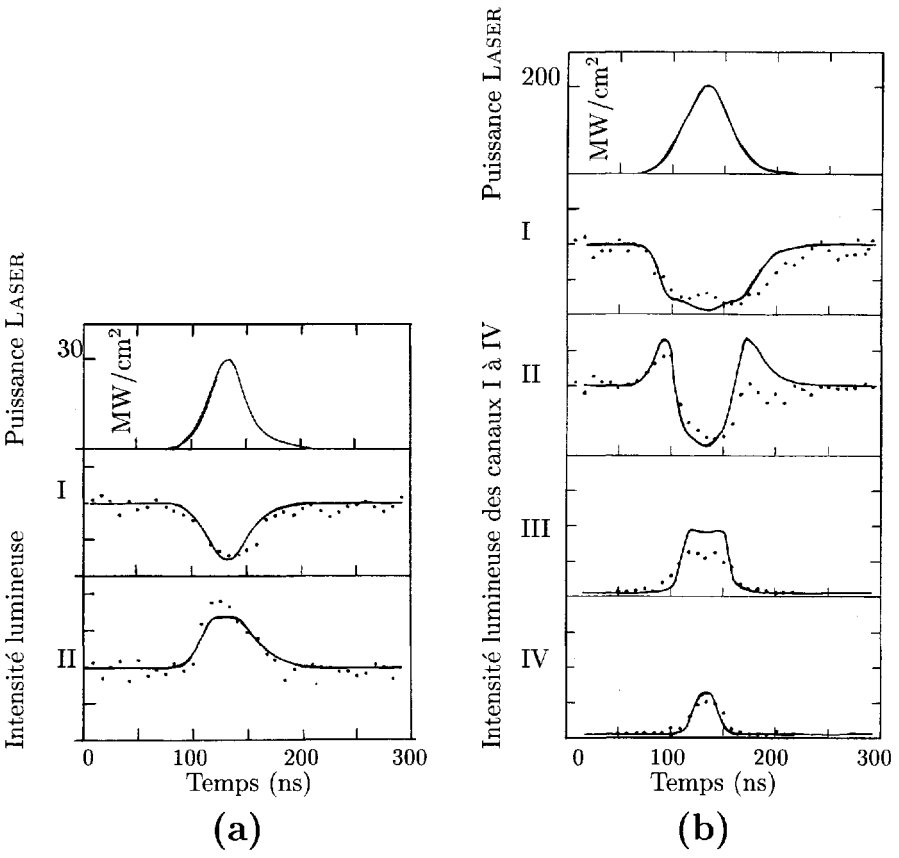


FIG. 7.7 – *Déplacement lumineux dans une lampe spectrale perturbée par un laser en impulsion non résonnant. On enregistre en fonction du temps l'impulsion du laser non résonnant à 1,06 μm (courbe supérieure) ainsi que la lumière verte autour de 5 461 $\AA$ émise par la lampe dans chacun des quatre canaux spectraux (I, II, III, IV) défini sur la figure 7.6. (a) L'intensité maximum du faisceau perturbateur est de 30 MW/cm^2; on observe le transfert de lumière verte du canal I vers le canal II. La lumière reçue sur les canaux III et IV reste négligeable. (b) L'intensité maximum du faisceau perturbateur est de 200 MW/cm^2. Les points sont expérimentaux (échantillonnage temporel). Les lignes sont des simulations théoriques (réf. [6]).*

du temps le signal de chaque photomultiplicateur au moment où l'impulsion laser traverse la lampe.

La figure 7.7 reproduit les enregistrements effectués en fonction du temps. On enregistre simultanément l'intensité de l'impulsion laser dont la durée

(à mi-hauteur) varie de 30 à 50 nanosecondes : ce sont les courbes supérieures de chacun des enregistrements 7.7a et 7.7b. Pour les enregistrements 7.7a l'intensité maximum du faisceau laser dans la lampe est de 30 MW/cm^2 : l'intensité du canal I tombe presque à zéro tandis que l'intensité du canal II est presque doublée, montrant que le maximum de la raie spectrale s'est déplacé au milieu de la bande II ; on n'a pas représenté les canaux III et IV qui restent à zéro. Sur ces enregistrements les points sont expérimentaux (moyennes des circuits à échantillonnage sur cinq impulsions laser), les traits continus résultent de calculs de simulation prenant en compte l'intensité du laser.

Les enregistrements 7.7b sont effectués avec une intensité maximale bien supérieure de 200 MW/cm^2. Dans le début de l'impulsion laser le maximum du spectre spontané passe dans la bande II ; puis il se déplace dans la bande III au maximum de l'impulsion, ce qui représente un déplacement 5 à 6 fois supérieur au précédent. Un dépouillement plus soigné des résultats expérimentaux permet de vérifier que le déplacement est proportionnel à l'intensité du faisceau laser dans la lampe. On vérifie aussi le signe de ce déplacement en conformité avec les formules théoriques du paragraphe précédent : la longueur d'onde spontanée diminue, c'est-à-dire que la fréquence spontanée augmente ; cela correspond donc à une augmentation de l'énergie du niveau 7^3S_1 (ε_1 positif) en accord avec le fait que la longueur d'onde laser est inférieure à celle de la transition $7^3S_1 \rightarrow 7^3P_2$ (fréquence laser supérieure, c'est-à-dire $\delta\omega$ positif).

7.4 Cas résonnant doublet Autler-Townes

Les deux expériences décrites ci-dessus nous ont permis de tester la réalité des corrections en énergie calculées dans le §7.1 (*cf.* Fig. 7.1) en diagonalisant le hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ dans la représentation « tournante ». Mais nous nous sommes restreints dans les deux paragraphes précédents aux cas où l'écart à résonance $\delta\omega$ est assez grand, conformément à la condition (7-12) adoptée au début du paragraphe théorique 7.2 ; c'est-à-dire que sur le diagramme de diagonalisation 7.1a nous avons exclu de fait la partie centrale, et nous nous sommes limités aux bords (droit ou gauche), là où les deux arcs d'hyperbole sont très voisins de leurs asymptotes. Cette limitation nous a permis de simplifier l'écriture des états propres du système, qui sont alors très voisins des états non perturbés $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$.

On peut se poser aussi la question de la signification de la partie centrale du diagramme 7.1a. Les expériences effectuées par Autler et Townes en 1955 dans le domaine des hyperfréquences ont démontré la réalité de ces corrections énergétiques sur l'ensemble du diagramme (réf. [1]) ; nous pouvons en donner une idée en nous limitant au cas exactement résonnant ($\delta\omega = 0$).

Dans ce cas l'angle θ vaut $\frac{\pi}{4}$ et les expressions (7-9) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_\alpha\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_\beta\rangle \qquad \text{avec } \lambda_+ = +\frac{\Omega_1}{2} \\ |\varphi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_\beta\rangle \qquad \text{avec } \lambda_- = -\frac{\Omega_1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{7-20}$$

ou inversement

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_-\rangle \\ |\varphi_\beta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_+\rangle \end{aligned}\right\} \tag{7-20bis}$$

Comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe 7.1, tout état du système peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$, et sa dépendance temporelle est obtenue grâce à (7-11), en tenant compte des valeurs de λ_+ et λ_- ci-dessus :

$$\left.\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= A\mathbf{e}^{-i\frac{\Omega_1}{2}t}|\varphi_+\rangle + B\mathbf{e}^{+i\frac{\Omega_1}{2}t}|\varphi_-\rangle \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}}\mathbf{e}^{-i\frac{\Omega_1}{2}t}(|\varphi_\alpha\rangle - |\varphi_\beta\rangle) + \frac{B}{\sqrt{2}}\mathbf{e}^{+i\frac{\Omega_1}{2}t}(|\varphi_\alpha\rangle + |\varphi_\beta\rangle) \end{aligned}\right\} \tag{7-21}$$

Il suffit de remplacer les états de base $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$ de la représentation tournante par leurs expressions (1-14) pour revenir à la représentation normale :

$$\left.\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[& A\mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_a}{\hbar}+\frac{\Omega_1}{2}\right)t}|\psi_a\rangle + B\mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_a}{\hbar}-\frac{\Omega_1}{2}\right)t}|\psi_a\rangle \\ & -A\mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_b}{\hbar}+\frac{\Omega_1}{2}\right)t}|\psi_b\rangle + B\mathbf{e}^{-i\left(\frac{E_b}{\hbar}-\frac{\Omega_1}{2}\right)t}|\psi_b\rangle\Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{7-22}$$

(nous avons utilisé $\delta\omega = 0$ c'est-à-dire $\frac{E_a}{\hbar} + \omega = \frac{E_b}{\hbar}$) soit encore :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[A\mathbf{e}^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t}|\psi_a\rangle + B\mathbf{e}^{-i\frac{E''_a}{\hbar}t}|\psi_a\rangle - A\mathbf{e}^{-i\frac{E'_b}{\hbar}t}|\psi_b\rangle + B\mathbf{e}^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t}|\psi_b\rangle\right] \tag{7-23}$$

Nous voyons que les états propres initiaux $|\psi_\alpha\rangle$ et $|\psi_\beta\rangle$ du hamiltonien H_0 sont remplacés chacun par deux états très voisins dont les énergies sont légèrement modifiées :

$$\left.\begin{aligned} E'_a &= E_a + \frac{\hbar\Omega_1}{2} \text{ et } E''_a = E_a - \frac{\hbar\Omega_1}{2} \text{ d'une part,} \\ E'_b &= E_b + \frac{\hbar\Omega_1}{2} \text{ et } E''_b = E_b - \frac{\hbar\Omega_1}{2} \text{ d'autre part,} \end{aligned}\right\} \tag{7-24}$$

Tout se passe comme si l'état $|\psi_a\rangle$ d'énergie E_a était remplacé par deux niveaux d'énergie voisins séparés de $E'_a - E''_a = \hbar\Omega_1$ et de même pour l'état $|\psi_b\rangle$ avec la même séparation $E'_b - E''_b = \hbar\Omega_1$.

Par analogie avec le paragraphe 7.2, nous pouvons introduire une expression semblable à (7-23) dans la recherche de solution de l'équation de Schrödinger en présence d'une onde sonde de faible intensité et dont la fréquence ω_2 est voisine de $(E_c - E_b)/\hbar$, par exemple, où E_c est un troisième niveau d'énergie supposé non perturbé. On obtient la résonance pour l'onde sonde lorsque $\hbar\omega_2 = E_c - E'_b$ ou $\hbar\omega_2 = E_c - E''_b$. La résonance unique $\hbar\omega_2 = E_c - E_b$ en l'absence de la première onde est changée en deux résonances très voisines, séparées par l'écart $\hbar\Omega_1$, qu'on appelle le doublet Autler-Townes. Ce doublet est observable bien évidemment à condition seulement que la pulsation de Rabi Ω_1 de la première onde soit très supérieure à la largeur de la résonance à la fréquence ω_2.

Les expériences d'Autler et Townes ont été faites sur des molécules présentant plusieurs niveaux d'énergie voisins, qui sont tous perturbés, ce qui complique l'interprétation. Nous présentons un exemple d'expérience plus simple avec des fréquences optiques (réf. [7]). La figure 7.8 représente une partie du diagramme d'énergie de l'atome de sodium utilisé dans cette expérience. L'onde intense perturbatrice est fournie par un laser à colorant accordable réglé exactement sur la fréquence centrale de la raie D_2 à 5 890 Å entre le niveau fondamental $3^2S_{1/2}$ et le niveau excité $3^2P_{3/2}$ (en toute rigueur du niveau hyperfin $F = 2$ du fondamental vers le niveau hyperfin $F = 3$ de l'état excité). L'onde sonde est fournie par un deuxième laser à colorant de longueur d'onde variable au voisinage de $\lambda_2 = 2\pi c/\omega_2 = 6\,162$ Å, correspondant à la transition entre le niveau E_b $(3^2P_{3/2})$ et un troisième niveau E_c $(5^2S_{1/2})$. On détecte les atomes excités au niveau E_c par l'onde sonde en observant la lumière de fluorescence réémise dans la cascade $5^2S_{1/2} \rightarrow 4^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$; la première transition de cette cascade est dans l'infrarouge lointain et elle est difficile à détecter, mais la seconde transition de cette cascade à 3 302 Å est dans l'ultraviolet et est très facile à séparer de la lumière parasite des deux lasers.

On s'affranchit de la largeur Doppler en utilisant un jet atomique de sodium bien collimaté, et en envoyant les faisceaux laser perpendiculairement au jet atomique. L'onde intense à fréquence fixée forme sur le jet une tache focale de 1 mm^2, où sa puissance de 10 milliwatts crée une intensité de 1 W/cm^2. Le faisceau sonde est focalisé en une tache plus petite au centre de la tache focale du premier faisceau de telle façon que le volume sondé soit soumis à un éclairement à peu près uniforme de la part du premier faisceau.

La figure 7.9 montre les courbes expérimentales obtenues lorsqu'on enregistre l'intensité U.V. à 3 302 Å (c'est-à-dire le nombre d'atomes excités en $5^2S_{1/2}$) en fonction de la fréquence $\omega_2/2\pi$ du laser sonde. L'échelle des fréquences est donnée par les marqueurs enregistrés dans le bas de chaque courbe qui sont espacés de 37,5 MHz. Les courbes (a), (b) et (c) sont

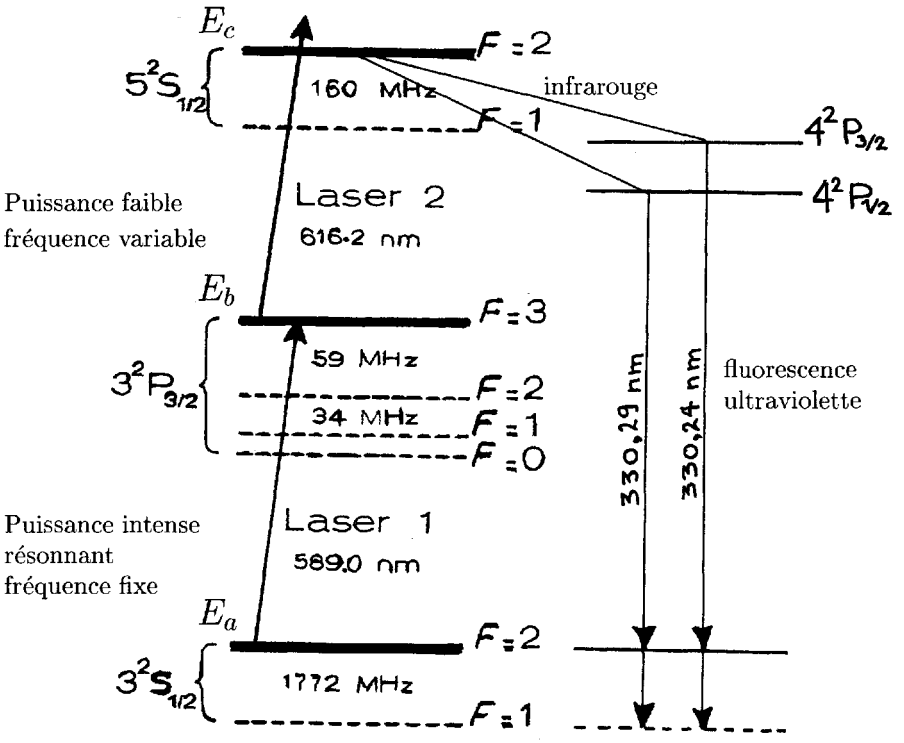


FIG. 7.8 – *Diagramme d'énergie du sodium qui schématise l'expérience du doublet Autler-Townes optique (les accolades verticales représentent une dilatation locale de l'échelle d'énergie pour représenter des sous-niveaux du sodium, qui ne sont pas utilisés dans l'expérience, mais dont le voisinage peut être cause de légers écarts par rapport aux prévisions du modèle théorique simple que nous avons développé).*

enregistrées avec des intensités décroissantes du premier faisceau résonnant de fréquence fixe, de 1 Watt/cm^2, 1/3 Watt/cm^2 et 1/10 Watt/cm^2. La courbe (c) est la courbe normalement observée dans une excitation par échelons : on observe la seconde transition centrée sur la fréquence $(E_c - E_b)/h$. Les courbes (a) et (b) obtenues avec des puissances lumineuses plus élevées montrent les deux résonances déplacées symétriquement par rapport à la fréquence centrale et séparées par la fréquence de Rabi $\Omega_1/2\pi$, qui forment le doublet Autler-Townes. (La dissymétrie entre les deux résonances du doublet provient du voisinage trop proche de l'autre sous-niveau hyperfin $F = 2$ dans l'état excité $3^2P_{3/2}$). On vérifie bien un rapport de l'ordre de $\sqrt{3} \simeq 1,7$ entre les écarts des deux maxima mesurés sur la figure (a) et sur la figure (b), qui sont obtenus avec des puissances lumineuses dans un rapport 3.

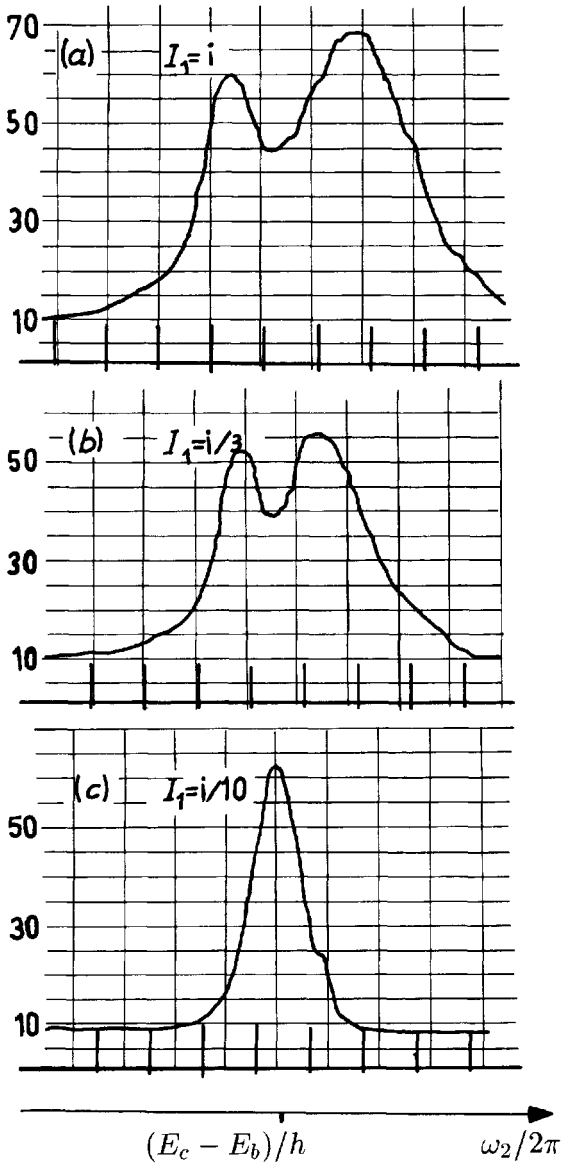


FIG. 7.9 – *Enregistrement expérimental du doublet Autler-Townes optique (selon le schéma de la figure 7.8). On enregistre l'intensité de la fluorescence U.V. en fonction de la fréquence du laser n° 2. (a) Intensité du laser n° 1 résonnant 1 W/cm^2. (b) Intensité du laser n° 1 résonnant divisée par 3. (c) Intensité du laser n° 1 résonnant divisée par 10 (d'après la réf. [7], avec la permission de l'Institute of Physics).*

7.5 Oscillation de Rabi à résonance

Il s'agit là d'un exercice pour nous familiariser avec la mécanique quantique. Nous vérifions que la solution générale obtenue au paragraphe précédent nous permet de retrouver les mêmes résultats que ceux obtenus plus simplement au chapitre 1 (§1.3). Par souci de simplicité, nous nous restreignons d'abord au cas résonnant $\delta\omega = 0$. Les vecteurs propres de $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$ sont donnés par (7-20) au paragraphe précédent.

Nous prenons la même hypothèse qu'au §1.3, c'est-à-dire qu'à l'instant zéro, avant l'application de l'onde, l'atome est dans l'état propre $|\psi_\alpha\rangle$ ou $|\varphi_\alpha\rangle$, soit, en utilisant (7.20bis) :

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_-\rangle \tag{7-25}$$

Ceci nous donne la décomposition de l'état du système projeté sur les deux états stationnaires, qui correspond aux valeurs $A = B = 1/\sqrt{2}$ dans la solution générale (7.21).

Pour interpréter physiquement cette solution, nous exprimons $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$ en fonction de $|\varphi_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle$, en utilisant (7-20) :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}^{-i\frac{\Omega_1}{2}t}(|\varphi_\alpha\rangle - |\varphi_\beta\rangle) + \mathbf{e}^{+i\frac{\Omega_1}{2}t}(|\varphi_\alpha\rangle + |\varphi_\beta\rangle)\right] \tag{7-26}$$

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle\,\frac{\mathbf{e}^{i\frac{\Omega_1}{2}t} + \mathbf{e}^{+i\frac{\Omega_1}{2}t}}{2} + |\varphi_\beta\rangle\,\frac{\mathbf{e}^{i\frac{\Omega_1}{2}t} - \mathbf{e}^{-i\frac{\Omega_1}{2}t}}{2}$$

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle\cos\frac{\Omega_1 t}{2} + |\varphi_\beta\rangle\, i\sin\frac{\Omega_1 t}{2} \tag{7-27}$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu en (1-18) et (1-20), dans le cas particulier $\delta\omega = 0$: les amplitudes de probabilité oscillent avec la fréquence $\Omega_1/2$, donc les probabilités et les populations évoluent avec la fréquence double Ω_1 (*cf.* Fig. 1.2a). Le système repasse à intervalles réguliers soit dans l'état $|\varphi_\beta\rangle$, soit dans l'état $|\varphi_\alpha\rangle$.

Nous avons ainsi calculé dans ces deux paragraphes 7.4 et 7.5 deux expressions différentes (7-23) et (7-27) du même état $|\psi(t)\rangle$ du système atomique perturbé par une irradiation lumineuse résonnante intense. Nous avons interprété la première expression comme un dédoublement des niveaux d'énergie, tandis que nous retrouvons dans la deuxième l'oscillation de Rabi habituelle. Ces deux expressions pourraient sembler contradictoires, mais il n'en est rien ; elles sont en fait **complémentaires** : elles sont vraies simultanément toutes les deux. Mais selon le type d'expérience réalisée, et en fonction de la mesure effectuée sur le système, c'est l'une ou l'autre qui nous fournit l'explication la plus simple.

Remarque 7.1 – Le calcul est à peine plus compliqué dans le cas général ; en effet, d'après (7-10) :

$$|\varphi(0)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle = \cos\theta\,|\varphi_+\rangle + \sin\theta\,|\varphi_-\rangle$$

ceci conduit à la solution en fonction du temps :

$$|\psi(t)\rangle = \cos\theta \mathbf{e}^{-i\lambda_+ t} \underbrace{|\varphi_+\rangle}_{\cos\theta|\varphi_\alpha\rangle - \sin\theta|\varphi_\beta\rangle} + \sin\theta \mathbf{e}^{-i\lambda_- t} \underbrace{|\varphi_-\rangle}_{\sin\theta|\varphi_\alpha\rangle + \cos\theta|\varphi_\beta\rangle}$$

(d'après (7-9))

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle \left(\cos^2\theta \mathbf{e}^{-i\lambda_+ t} + \sin^2\theta \mathbf{e}^{-i\lambda_- t}\right) + |\varphi_\beta\rangle \sin\theta\cos\theta \left(\mathbf{e}^{-i\lambda_- t} - \mathbf{e}^{-i\lambda_+ t}\right)$$

on remplace λ_+ et λ_- par leurs valeurs (7-7) :

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_\alpha\rangle\, \mathbf{e}^{i\frac{\delta\omega}{2}t} \left(\cos^2\theta \mathbf{e}^{-i\frac{\Omega}{2}t} + \sin^2\theta \mathbf{e}^{+i\frac{\Omega}{2}t}\right) + |\varphi_\beta\rangle \underbrace{\mathbf{e}^{i\frac{\delta\omega}{2}t} \frac{\sin(2\theta)}{2} \left(\mathbf{e}^{i\frac{\Omega}{2}t} - \mathbf{e}^{\frac{-i\Omega}{2}t}\right)}_{\beta(t)}$$

on en déduit la composante sur $|\varphi_\beta\rangle$:

$$\left.\begin{aligned} \beta(t) &= \mathbf{e}^{i\frac{\delta\omega}{2}t} \sin(2\theta) \cdot i \cdot \sin\frac{\Omega}{2}t \\ \text{d'après (7-8)} \qquad &\Rightarrow \sin(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\Omega_1}{\Omega} \end{aligned}\right\} \tag{7-28}$$

(on a d'abord transformé $\tan\theta = 2\lambda_+/\Omega_1 = (\Omega - \delta\omega)/\Omega_1$). On retrouve bien la formule (1-20).

Remarque 7.2 – Cette oscillation de Rabi à relativement haute fréquence Ω se retrouve aussi dans le calcul de la polarisation atomique $\langle D_x \rangle$ (*cf.* (2-5) et (2-3)).

On comprend ainsi qu'il puisse y avoir dans la polarisation atomique des termes de battement entre la fréquence optique ω et la fréquence de Rabi Ω, donnant lieu à l'observation, dans la lumière diffusée, de trois composantes spectrales de fréquences respectives $\omega + \Omega$, ω, $\omega - \Omega$ (*cf.* Fig. 7.10).

Cette expérience, réalisée en 1977 (réf. [8]), utilise les mêmes niveaux d'énergie déjà représentés sur la figure 7.8 (transition $3^2S_{1/2}(F = 2, m_F = 2) \rightarrow 3^2P_{3/2}(F = 3, m_F = 3)$; réf. [8]). Mais dans cette nouvelle expérience, également réalisée sur un jet atomique de sodium, on n'utilise que le laser n°1 dont la fréquence ν_L est encore réglée au voisinage de la résonance (le laser n°2 est supprimé). La mesure se fait en collectant la lumière diffusée réémise par les atomes excités dans une direction perpendiculaire au jet atomique (pour éliminer l'effet Doppler) et en analysant la fréquence de cette lumière avec un interféromètre de Pérot et Fabry de grande finesse

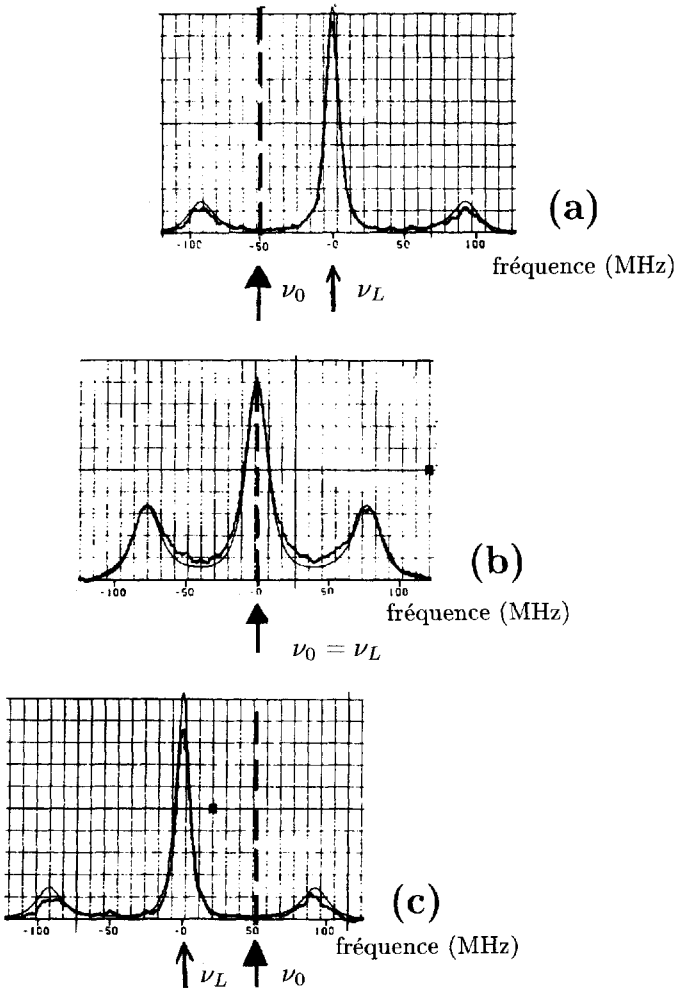


FIG. 7.10 – *Le triplet de fluorescence observé sur un jet atomique de sodium éclairé à angle droit par un laser à colorant d'intensité* $0,64\ W/cm^2$ *(correspondant à* $\Omega_1/2\pi = 78\ MHz$*) et de fréquence* ν_L*. La lumière de fluorescence émise à angle droit du laser et du jet atomique (suppression des déplacements Doppler) est analysée en fréquence à l'aide d'un interféromètre Pérot-Fabry de grande finesse :*
(b) : à résonance ($\nu_L = \nu_0$ *atomique) on observe les raies latérales à* $\nu_0 \pm \Omega_1/2\pi$ *; (a) et (c) : hors résonance (*$|\nu_0 - \nu_L| = 50\ MHz$*) on observe les raies latérales moins intenses, écartées de* $\Omega/2\pi = \sqrt{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}\,/2\pi$ *; (en trait fin les courbes théoriques calculées en tenant compte de la fonction de convolution avec le profil d'appareil de l'interféromètre) (d'après la réf. [8], avec la permission de l'American Physical Society).*

(en sorte que la largeur de son pic d'Airy soit inférieure à la largeur naturelle du niveau excité du sodium). Le résultat enregistré dans cette mesure, en fonction du désaccord $\delta\nu = \nu - \nu_L$ est reproduit sur la figure 7.10.

C'est la polarisation atomique oscillante qui fonctionne comme source d'onde dans les équations de Maxwell, et permet de calculer la lumière diffusée par les atomes (*cf.* partie III, chapitre 18). Comme nous l'avons calculé au chapitre 2, la polarisation atomique $\langle D_x \rangle$ est modulée à la fois à la fréquence optique du laser ν_L et à la fréquence de Rabi $\Omega/2\pi$; et le calcul fait apparaître les fréquences de battement $\nu_L + \Omega/2\pi$ et $\nu_L - \Omega/2\pi$. On observe bien le triplet de fluorescence prévu par la théorie. Cet enregistrement a été tracé avec une intensité lumineuse au centre du faisceau laser égale à $0,64$ W/cm^2, ce qui permet de calculer une fréquence de Rabi $\Omega_1/2\pi = 78$ MHz en bon accord avec l'enregistrement central (b) réalisé à résonance ($\nu_L = \nu_0$ et $\Omega = \Omega_1$). Les enregistrements (a) et (c) sont tracés avec un écart à résonance $|\nu_L - \nu_0| \simeq 50$ MHz, et l'écartement des raies latérales est augmenté en conséquence. Lorsque l'écart $|\delta\omega|$ devient très supérieur à Ω_1, les trois fréquences $\omega_L - \Omega, \omega_L, \omega_L + \Omega$ deviennent voisines de ω_0, ω_L et $2\omega_L - \omega_0$ (dans cet ordre si $\omega_0 < \omega_L$, dans l'ordre inverse si $\omega_L < \omega_0$). Nous ne donnons que l'allure générale du phénomène ; on prendra garde que le calcul exact de ce phénomène suppose que l'on traite quantiquement l'émission spontanée (*cf.* le livre « Photons et atomes (Processus d'interaction) » *op. cit.*).

7.6 Effet Bloch-Siegert et approximation séculaire (en Résonance Magnétique)

Dans ce dernier paragraphe, nous traitons des champs intenses en Résonance Magnétique ; sa lecture fait suite à la fois au §7.2 de ce chapitre et au chapitre 4 dans son ensemble.

Nous avons vu au §4.4 que l'on peut faire agir sur les moments magnétiques atomiques soit un champ magnétique linéaire sinusoïdal $\overrightarrow{B}(t) = 2B_1 \cos\omega t \vec{e}_x$, soit un véritable champ tournant $\overrightarrow{B'} = B_1 \overrightarrow{e_X}$ de module constant B_1 et tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω (*cf.* Fig. 4.2 ; le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_X}$ appartient au repère tournant).

Nous avons aussi montré que les équations différentielles de Bloch sont les équations exactes de l'interaction avec le champ tournant ; et toutes les solutions calculées à partir des équations de Bloch ne s'appliquent rigoureusement que dans le cas d'un champ magnétique tournant. Dans la plupart des expériences, il est plus facile en pratique d'utiliser un champ linéaire sinusoïdal $\overrightarrow{B}(t)$ de direction fixe.

Mais le calcul simple de l'interaction suppose que l'on fasse alors l'approximation séculaire ; et l'on peut se demander si la validité de cette approximation reste suffisante lorsque l'amplitude B_1 du champ alternatif devient très forte.

Bloch et Siegert ont répondu à cette question dès 1940 en faisant un calcul de mathématique rigoureux (réf. [9]), mais par une méthode tellement complexe et abstraite qu'il semble impossible d'en donner une interprétation utile à la compréhension (de nombreux auteurs citent ce résultat sans justification en se gardant de faire quelque commentaire). Le déplacement de la fréquence centrale de la résonance calculé par Bloch et Siegert s'explique, en fait, à l'aide des calculs approchés des §7.1 et 7.2.

L'approximation séculaire consiste à négliger complètement le champ $\overrightarrow{B''}$ tournant en sens opposé de $\overrightarrow{B'}$, et à tenir compte seulement du champ $\overrightarrow{B'}$ tournant dans le sens de la rotation de Larmor, et qui est fixe dans le repère tournant $OXYz$. Au contraire le champ $\overrightarrow{B''}$ tourne dans le repère $OXYz$ avec une vitesse angulaire double, égale à -2ω ; ce champ tournant se comporte donc comme un champ tout à fait non résonnant avec un écart à la résonance $\delta\omega \backsimeq -2\omega$, qui transforme les états propres du hamiltonien d'interaction suivant les formules (7-13) et (7-15) en deux états d'énergies légèrement décalées :

$$\left.\begin{aligned} E'_a &= E_a + \hbar\varepsilon_1 = E_a + \hbar\frac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = E_a - \hbar\frac{\Omega_1^2}{8\omega} \\ E''_b &= E_b - \hbar\varepsilon_1 = E_b - \hbar\frac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = E_b + \hbar\frac{\Omega_1^2}{8\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}29)$$

Comme nous sommes en Résonance Magnétique, conformément aux notations du chapitre 4, il faudrait remplacer Ω_1 défini à partir du champ électrique $\mathcal{E}_1$ par ω_1 défini à partir de l'amplitude B_1 du champ magnétique ($\Omega_1 = -\omega_1 = \gamma B_1$).

Le champ $\overrightarrow{B'}$ tournant dans le sens de Larmor se comporte comme l'onde résonnante ω_2 de la formule (7-19) au §7.2, c'est-à-dire que la fréquence centrale de la résonance ne sera plus ω_0 mais :

$$\frac{E''_b - E'_a}{\hbar} = \frac{E_b - E_a}{\hbar} + \frac{\Omega_1^2}{4\omega} = \omega_0 + \frac{\Omega_1^2}{4\omega} \backsimeq \omega_0 + \frac{\Omega_1^2}{4\omega_0} = \omega_0\left[1 + \left(\frac{B_1}{2B_0}\right)^2\right] \qquad (7\text{-}30)$$

On retrouve bien le léger déplacement de fréquence vers le haut, qui avait été calculé par Bloch et Siegert. La grande précision en fréquence des expériences de résonance permet effectivement de vérifier ce déplacement même pour des valeurs relativement faibles du rapport B_1/B_0. Des déplacements importants peuvent être observés en basse fréquence dans des champs statiques B_0 de faible valeur.

Bibliographie

[1] S.H. Autler et C.H. Townes, Phys. Rev. **100**, 703 (1953).

[2] J. Winter, Thèse. Annales de Physique Paris (1959).

[3] C. Cohen-Tannoudji, Annales de Physique **7**, 423 (1962).

[4] C. Cohen-Tannoudji et A. Kastler, Optical pumping, in Progress in Optics, Vol. V (1966) p. 64.

[5] A. Kastler, Physics Today (septembre 1967) p. 34.

[6] P. Platz, J. Phys. France **32**, 773 (1971).

[7] J.L. Picqné et J. Pinard, J. Phys. B **9**, L77 (1976).

[8] R.E. Grove, F.Y. Yu et S. Ezekiel, Phys. Rev. A **15**, 227 (1977).

[9] F. Bloch et A. Siegert, Phys. Rev. **57**, 522 (1940).

Partie II

Fonctionnement des lasers dans le modèle des probabilités de transition

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

CETTE DEUXIÈME partie de l'ouvrage est indépendante de la première, et peut être abordée directement par les lecteurs qui ont besoin de connaître rapidement des idées générales sur le fonctionnement des lasers sans utiliser la mécanique quantique. En effet, cette deuxième partie est entièrement fondée sur le modèle phénoménologique introduit par Einstein, pour décrire les interactions entre le rayonnement électromagnétique et les atomes, en 1917 avant l'invention de la mécanique quantique. Ce modèle fait l'hypothèse de probabilités par unité de temps qui conduisent à des équations d'évolution des populations atomiques, appelées « rate equations » dans les ouvrages de langue anglaise ; ce qui pourrait se traduire par « équations des vitesses d'évolution ». Nous utilisons parfois l'expression condensée « équations de probabilités » pour rappeler les hypothèses sur lesquelles elles sont fondées. Nous avons montré dans la partie I au chapitre 3 de quelle manière ce modèle d'Einstein permet de retrouver certains résultats de la mécanique quantique et nous avons précisé au chapitre 5 les limites de validité de ce modèle. (Il faut que les variations d'intensité lumineuse se produisent sur une échelle de temps plus longue que le temps de brouillage τ_2 des « cohérences atomiques » u et v.) Le modèle phénoménologique permet dans cette partie II de calculer les échanges d'énergie entre les atomes et l'onde électromagnétique et de comprendre les idées de base concernant les lasers. Enfin, nous traitons dans la partie III l'étude plus précise des mécanismes d'émission d'ondes et des caractéristiques de ces ondes.

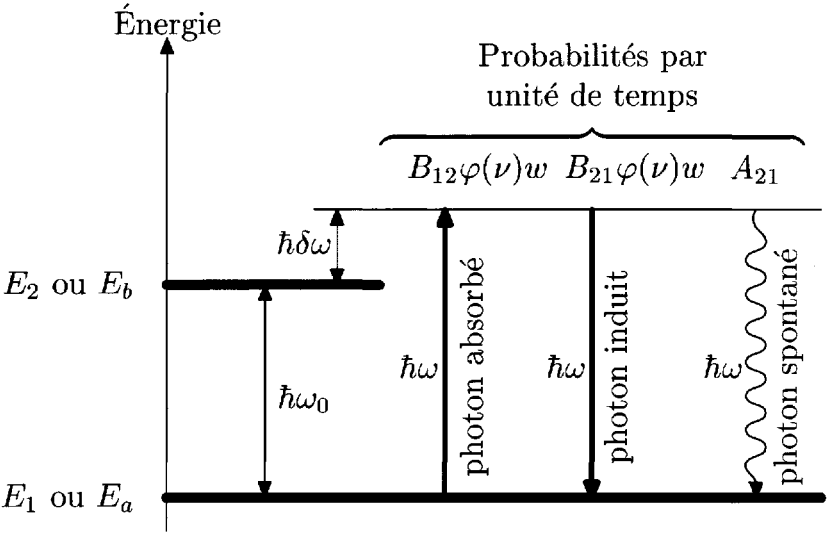


FIG. 8.0 – *Niveaux d'énergie du système atomique étudié et probabilités par unité de temps des transitions radiatives (dans le cas d'une excitation lumineuse, la conservation de l'énergie exige que les photons spontanés aient la même énergie que les photons absorbés, au recul de l'atome près (cf. chapitre 18)).*

Chapitre 8

L'amplification d'une onde de lumière

8.1 Les équations d'évolution des populations atomiques, coefficients d'Einstein

AU DÉBUT DE CETTE PARTIE II de l'ouvrage, nous devons pour préciser nos notations rappeler rapidement les hypothèses introduites par Einstein en 1917 pour représenter dans le cadre des idées quantiques l'interaction entre les ondes et les atomes (référence [1]). On définit les probabilités de transition de trois processus qui contribuent à modifier les populations atomiques : n_a nombre d'atomes (par unité de volume) dans le niveau d'énergie E_a ou E_1, et n_b nombre d'atomes (par unité de volume) dans le niveau d'énergie supérieur E_b ou E_2. Chaque processus est défini à partir de la vitesse avec laquelle les atomes quittent leur état actuel, c'est-à-dire à partir d'une dérivée $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ négative ; d'où le signe $-$ dans toutes les définitions des **probabilités par unité de temps** correspondantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Émission } \textbf{spontanée} \text{ (\textit{cf.} §2.3) (répartie dans toutes les directions de l'espace)} & -\dfrac{1}{n_b}\dfrac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21} = \dfrac{1}{\tau_b} \\ \text{Interaction avec une onde incidente (transitions \textbf{induites} ou \textbf{stimulées} par l'onde)} & \begin{cases} \text{absorption} & -\dfrac{1}{n_a}\dfrac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = B_{12}\varphi(\nu)w \\ \text{émission} & -\dfrac{1}{n_b}\dfrac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = B_{21}\varphi(\nu)w \end{cases} \end{array}\right\} \quad (8\text{-}1)$$

- $\varphi(\nu)$ est la forme de raie normalisée (à la surface unité) telle que $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 1$; la fonction $\varphi(\nu)$ est maximale pour la fréquence de résonance $\nu = \dfrac{E_b - E_a}{h}$; la largeur de cette courbe sur l'échelle des

fréquences dépend à la fois de propriétés intrinsèques de l'atome, et de l'environnement expérimental des atomes. La mécanique quantique permet de calculer la fonction $\varphi(\nu)$ (*cf.* §3.2 et Fig. 3.1) ;

- $w = \varepsilon_0 \mathcal{E}_1^2/2$ est la densité d'énergie par unité de volume dans le faisceau lumineux ;

- les coefficients d'Einstein B_{12} et B_{21} sont liés par la relation classique :

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_b}{g_a} \tag{8-2}$$

où g_a et g_b sont les poids statistiques des niveaux d'énergie E_a et E_b, c'est-à-dire les nombres d'états quantiques distincts correspondant à la même valeur d'énergie, qu'on appelle aussi degré de dégénérescence. (Dans le cadre de la partie I, problème à 2 niveaux, on a fait l'hypothèse de deux états atomiques isolés, non dégénérés : $g_a = g_b = 1$; dans cette partie II nous resterons dans le cas général où g_a et g_b peuvent être différents.) La symétrie des échanges d'énergie entre l'onde et les atomes, de l'onde vers les atomes, mais aussi des atomes vers l'onde, apparaît bien, au chapitre 1, dans le calcul de mécanique quantique le plus simple (*cf.* Fig. 1.2a). En 1917 Einstein avait à sa disposition seulement la théorie classique de l'électron élastiquement lié, qui fait apparaître la même symétrie ; et cette symétrie lui paraissait tellement évidente qu'il n'avait pas jugé bon de donner un nom particulier à ce phénomène d'émission d'énergie sous l'action de l'onde incidente. Le vocable d'« émission induite » ou d'« émission stimulée » n'apparaît pas dans le mémoire de 1917 : l'absorption et l'émission induite sont les deux faces symétriques d'une même interaction entre les atomes et l'onde incidente.

De cette interaction résulte un échange d'énergie parfaitement réversible entre les atomes et l'onde, qui se produit tour à tour aussi bien dans un sens que dans le sens opposé (le calcul peut être effectué aussi bien classiquement que quantiquement). *Les photons produits par l'émission stimulée viennent donc renforcer l'énergie de l'onde incidente, dont ils ne se distinguent pas.* C'est un mérite d'Einstein dans son mémoire de 1917 d'avoir calculé, outre le bilan d'énergie, le bilan des échanges de quantité de mouvement entre les atomes et l'onde dans une expérience ; et il a montré que ce bilan peut être équilibré seulement en attribuant aux photons émis sous l'action de l'onde un vecteur quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ parallèle à la direction du faisceau lumineux ($|\overrightarrow{p}| = h\nu/c = h/\lambda$), à la différence des photons d'émission spontanée (A_{21}) dont les vecteurs $\overrightarrow{p}$ sont dirigés dans toutes les directions de l'espace.

Dans une expérience réelle où l'on irradie des atomes avec une onde, les trois processus décrits au §8.1 se produisent simultanément, et il faut ajouter leurs effets pour calculer la variation globale des populations atomiques.

Il ne faut pas oublier que les atomes qui quittent un état atomique dans une transition quantique arrivent automatiquement dans l'autre état ; et la variation pendant une seconde de chaque population est obtenue en comptant à la fois tous les atomes qui quittent ce niveau et tous ceux qui y arrivent par transition à partir de l'autre niveau :

$$\left.\begin{array}{rcccccc} \dfrac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} & = & -A_{21}n_b & - & B_{21}\varphi(\nu)w\,n_b & + & B_{12}\varphi(\nu)w\,n_a \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ \dfrac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} & = & +A_{21}n_b & + & B_{21}\varphi(\nu)w\,n_b & - & B_{12}\varphi(\nu)w\,n_a \end{array}\right\} \qquad (8\text{-}3)$$

(on a symbolisé par des flèches entre ces deux équations les transferts d'atomes quittant chaque état pour transiter vers l'autre état).

On vérifie que $\dfrac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_a + n_b) = 0$, ce qui assure la conservation du nombre total d'atomes par unité de volume $n = n_a + n_b$.

En définitive, les équations de définition (8-1) doivent toujours être utilisées simultanément, sous la forme (8-3), et ne peuvent en aucun cas être utilisées séparément. Ces équations (8-3) sont valides dans toute expérience limitée au seul processus d'interaction des atomes avec une onde lumineuse. Si d'autres processus interviennent (collisions, décharges électriques...), il faut ajouter aux équations (8-3) des termes supplémentaires qui les représentent.

Relation entre les coefficients A et B

Nous renvoyons aux ouvrages classiques de thermodynamique pour la démonstration donnée par Einstein de la relation entre les coefficients A_{21} et B_{21} de l'émission spontanée et de l'émission induite :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \qquad (8\text{-}4)$$

(la démonstration utilise le fait que la fonction $\varphi(\nu)$ est normée à la surface unité, ce qui permet de la faire disparaître du résultat). Cette relation peut être retrouvée de manière indépendante dans les calculs de mécanique quantique où l'on recherche directement A_{21} (*cf.* chapitre 19).

La relation (8-4) avec le coefficient B_{21} diffère par un facteur 3 de la relation semblable écrite en (3-9) avec le coefficient B (sans indice) dans le cadre du modèle à deux états quantiques. L'explication détaillée en sera donnée au chapitre 19 ; mais, pour éviter toute confusion, il est important de saisir l'origine de cette différence.

Lorsque nous calculons les probabilités de transition dans le cas général entre niveaux dégénérés (au chapitre 19) nous sommes obligés de décomposer cette transition globale en un certain nombre de transitions partielles, limitées chacune aux échanges entre un seul sous-niveau du niveau inférieur E_a

numéroté (i) et un seul sous-niveau du niveau supérieur E_b numéroté (s). Dans ce calcul entre deux états quantiques (chacun des sous-niveaux est non dégénéré), la symétrie de l'interaction électromagnétique conduit à deux coefficients égaux pour les probabilités des transitions induites par l'onde : en absorption $B(i \to s) = B(s \to i)$ en émission.

La probabilité spontanée ainsi calculée $A(s \to i)$ n'est que partielle, puisqu'elle ne concerne que la fraction des émissions spontanées conduisant au seul sous-niveau (i) du niveau inférieur E_a ; et l'on obtient la relation (3-9) entre cette probabilité partielle $A(s \to i)$ et les deux coefficients égaux $B(i \to s)$ et $B(s \to i)$.

On distinguera alors deux types d'expériences :

1) Dans les quelques cas particuliers où l'on isole effectivement une transition particulière entre deux sous-niveaux seulement (*cf.* remarque 3.1 à la fin du §3.2), c'est la relation (3-9) qui est valide ; mais les coefficients A et B sont appliqués aux populations des deux seuls sous-niveaux concernés.

2) Dans le cas le plus courant, où plusieurs transitions partielles (i, s) sont produites simultanément par la même onde incidente, il faut additionner les probabilités spontanées partielles $A(s \to i)$ et écrire un système complexe d'équation d'évolution couplées entre elles.

Une grande simplification apparaît *si l'on fait l'hypothèse d'égalité des populations des différents sous-niveaux de chaque niveau* : tous les sous-niveaux (s) du niveau E_b ont la même population égale à n_b/g_b ; tous les sous-niveaux (i) du niveau E_a ont la même population égale à n_a/g_a. La sommation des équations d'évolution des populations des sous-niveaux de E_b conduit à une équation d'évolution globale pour la population *totale* n_b du niveau E_b ; et de même on obtient une équation d'évolution globale pour la population *totale* n_a du niveau E_a. Ce sont les équations différentielles (8-3), dans lesquelles les coefficients d'Einstein B_{21} et B_{12} sont des coefficients moyennés respectivement sur les sous-niveaux (s) de E_b et les sous-niveaux (i) de E_a. On obtient alors la relation (8-2) entre les deux coefficients B_{12} et B_{21} et la relation d'Einstein (8-4) entre A_{21} et B_{21} (*cf.* chapitre 19). On note que l'hypothèse simplificatrice d'égalité des populations des sous-niveaux de même énergie est évidemment vérifiée dans l'équilibre thermodynamique étudié par Einstein. C'est moins évident dans le fonctionnement d'un laser ; mais cela reste une hypothèse raisonnable en première approximation.

Ce sont ces coefficients d'Einstein, moyennés, que nous utilisons dans toute la partie II de cette ouvrage, pour calculer l'évolution des populations *totales* des niveaux d'énergie E_b et E_a avec les probabilités (8-1).

8.2 Sections efficaces d'interaction. Différence pondérée des populations

Il est souvent commode de caractériser l'intensité d'un faisceau lumineux par le flux de photons Φ transportés en une seconde, qui est relié de manière très simple à la puissance P transportée dans ce faisceau lumineux, de section droite S (*cf.* Fig. 8.1a) :

$$\boxed{P = Scw = \Phi h\nu \quad \text{soit} \quad w = \varepsilon_0 \frac{\mathcal{E}_1^2}{2} = \frac{P}{Sc} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\Phi}{S}} \tag{8-5}$$

(l'intensité lumineuse d'un faisceau peut être caractérisée au choix par une des quatre quantités proportionnelles w, $\mathcal{E}_1^2$, P/S et Φ/S).

Si l'on utilise le **flux de photons**, il est commode de remplacer les coefficients B_{12} et B_{21} d'Einstein par les **sections efficaces** d'interaction entre les atomes et l'onde. La section efficace est une manière imagée de représenter la probabilité d'interaction : tout se passe comme si chaque atome de l'état inférieur E_a arrêtait tous les photons qui traversent une petite surface σ centrée sur cet atome ; les photons étant répartis sur la section S du faisceau, la vraie probabilité (sans dimension) pour qu'un atome absorbe un photon est égale au rapport σ/S.

Dans une expérience de courte durée δt, $\Phi\delta t$ photons sont passés à travers un milieu absorbant de même section S et d'épaisseur l (*cf.* Fig. 8.1b)

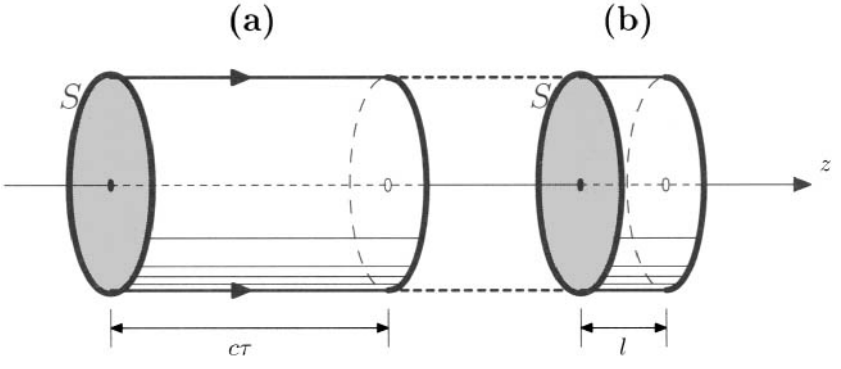


FIG. 8.1 – *(a) Le faisceau lumineux de puissance P et de section S pendant la durée τ remplit un volume de longueur $c\tau$. L'énergie $P\tau$ transportée pendant cette durée se répartit dans le volume $Sc\tau$ avec la densité $w = \dfrac{P\tau}{Sc\tau}$.*
(b) Le faisceau lumineux de section S traverse un milieu matériel d'épaisseur l contenant n_a atomes par unité de volume. Nombre d'atomes concernés $N = n_a Sl$.

contenant $N = n_a Sl$ atomes absorbants ; le nombre de photons absorbés, et d'atomes excités, vaut :

$$|\delta N| = N\frac{\sigma}{S}\Phi\delta t \quad \text{avec} \quad N = n_a Sl \tag{8-6}$$

La section efficace dépend bien sûr de la fréquence ν de l'onde ; il faut aussi distinguer la section efficace $\sigma_{12}(\nu)$ d'absorption des atomes du niveau E_a et la section efficace $\sigma_{21}(\nu)$ d'émission des atomes du niveau E_b. En divisant $|\delta N|$ par $N\delta t$, et en faisant tendre δt vers zéro, on obtient la probabilité par unité de temps d'absorption.

$$\boxed{-\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{n_a}\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = \sigma_{12}(\nu)\frac{\Phi}{S} = B_{12}\varphi(\nu)w = B_{12}\varphi(\nu)\frac{h}{\lambda}\frac{\Phi}{S}} \tag{8-7}$$

On en déduit la relation entre coefficients d'Einstein et sections efficaces (on ferait un raisonnement symétrique sur les atomes du niveau E_b avec B_{21}) :

$$\left.\begin{aligned} &\text{absorption par les atomes du niveau } E_a : \ \sigma_{12}(\nu) = \frac{h}{\lambda}B_{12}\varphi(\nu) \\ &\text{émission par les atomes du niveau } E_b : \quad \sigma_{21}(\nu) = \frac{h}{\lambda}B_{21}\varphi(\nu) \end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

Nous revenons maintenant aux équations différentielles d'évolution (8-3). En effectuant des mises en facteur dans les équations (8-3), nous faisons apparaître avec les signes + ou − la même quantité $(B_{21}n_b - B_{12}n_a)$. Cette quantité jouera un rôle fondamental dans toute l'étude des lasers et c'est pourquoi au lieu d'utiliser la différence des populations n_a et n_b, nous utiliserons comme variable une quantité différente D, que nous appellerons la **différence pondérée des populations**, définie par :

$$\boxed{D = n_b - \frac{B_{12}}{B_{21}}n_a = n_b - \frac{g_b}{g_a}n_a \quad \text{avec} \quad n = n_a + n_b} \tag{8-9}$$

Par combinaison linéaire des deux équations (8-9), nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} n_b\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) &= D + n\frac{B_{12}}{B_{21}} \\ n_a\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) &= n - D \end{aligned}\right\} \tag{8-10}$$

Par combinaison linéaire des deux équations différentielles (8-3), nous obtenons la *dérivée de la différence pondérée* :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} - \frac{B_{12}}{B_{21}}\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = -A_{21}\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)n_b - B_{21}\varphi(\nu)w\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)D$$

et en remplaçant n_b par son expression tirée de (8-10) :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\Big[A_{21} + (B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)w\Big]D - A_{21}\frac{B_{12}}{B_{21}}n = -\frac{1}{T_{\mathrm{ir}}}(D - D_S) \quad (8\text{-}11)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{en posant : } T_{\mathrm{ir}} &= \frac{1}{A_{21} + (B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)w} \\ D_S &= -nA_{21}\frac{B_{12}}{B_{21}}T_{\mathrm{ir}} = -n\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot \frac{A_{21}}{A_{21} + (B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)w} \\ &= -n\frac{g_b}{g_a} \cdot \frac{1}{1 + \tau_b(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)w} \end{aligned}\right\} \quad (8\text{-}12)$$

Si les atomes, initialement dans le noir, sont brusquement irradiés, la différence pondérée évolue suivant une loi exponentielle de constante de temps T_{ir} :

$$\boxed{D(t) = D_S + \big(D(0) - D_S\big)\,\mathrm{e}^{-t/T_{\mathrm{ir}}}} \quad (8\text{-}13)$$

où la valeur initiale dans le noir est $D(0) = -\dfrac{g_b}{g_a}n$ et D_S est la valeur constante, stationnaire, pratiquement atteinte au bout d'un temps assez long.

On a représenté sur la figure 8.2 quelques courbes typiques de variation de $D(t)$ suivant différentes valeurs de la densité d'énergie w, supposée constante à partir de $t = 0$.

On note que la différence pondérée, avec le signe que nous avons choisi, reste ici toujours négative. Ce signe a été choisi en fonction des phénomènes étudiés ultérieurement.

Remarque 8.1 – Beaucoup d'expériences de spectroscopie sont effectuées en mesurant seulement la solution asymptotique stationnaire D_S en fonction de la fréquence ν de l'onde incidente. On note dans la formule (8-12) que la forme de raie expérimentalement observée (D_S en fonction de ν) dépend de l'intensité lumineuse w (élargissement et saturation) bien que l'on fasse pour les probabilités (8-1) l'hypothèse d'une « forme de raie » normalisée $\varphi(\nu)$ indépendante de l'intensité lumineuse (*cf.* Fig. 3.1 et formule (3-6)). Nous ne reprenons pas ici les études de forme de raie, détaillées au chapitre 3.

8.3 La saturation à forte intensité lumineuse

On voit sur la figure 8.2 que plus l'intensité w est forte, plus l'asymptote se rapproche de l'axe horizontal des temps. Si l'intensité w croît indéfiniment, $T_{\mathrm{ir}} \longrightarrow 0$ et $D_S \to 0$; l'asymptote vient se confondre avec l'axe des temps ; tout ceci conformément à la formule (8-12) donnant la différence pondérée stationnaire. Mais quelle que soit l'intensité lumineuse, *la différence pondérée D reste toujours négative.* Il est intéressant de considérer la manière dont

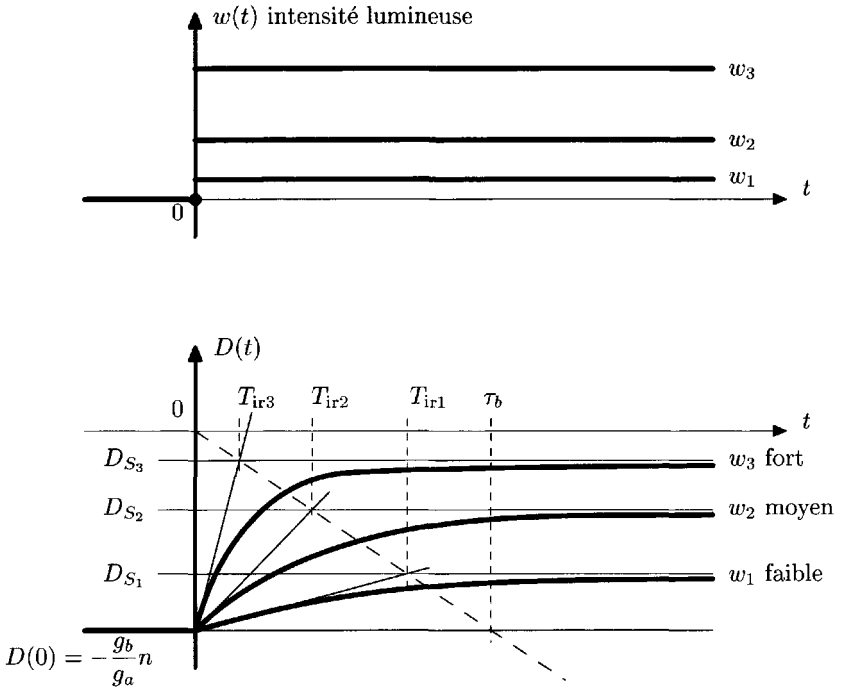


FIG. 8.2 – *Le diagramme supérieur représente la variation brusque d'intensité lumineuse au temps zéro. Le diagramme inférieur représente l'évolution temporelle de la différence pondérée des populations $D(t)$ après cette brusque irradiation au temps 0. On montre facilement que la tangente à l'origine coupe l'asymptote au point d'abscisse $t = T_{\rm ir}$. Selon la formule (8-12), la valeur stationnaire D_S correspondant à l'asymptote horizontale est proportionnelle au produit $A_{21}T_{\rm ir} = T_{\rm ir}/\tau_b$. On en déduit que les points d'intersection des tangentes à l'origine avec les asymptotes correspondantes sont alignés sur une droite passant par l'origine.*

la valeur asymptotique D_S varie avec l'intensité lumineuse. Puisque D est toujours négatif, on a choisi sur la figure 8.3 de représenter la variation de $|D_S|$ donnée par (8-12) en fonction de l'intensité w. On voit que pour des intensités assez fortes $|D_S|$ est proche de zéro et ne varie pratiquement plus quand on augmente encore l'intensité. C'est le phénomène de saturation. Ce phénomène est lié à la non-linéarité de la loi de variation de $|D_S|$ avec w ; cette non-linéarité est utilisée dans des méthodes modernes de spectroscopie laser, appelées méthodes de saturation ; la non-linéarité est déjà visible pour des intensités moyennes. Mais dans les expériences anciennes (avant les lasers), on ne disposait que de sources lumineuses monochromatiques d'intensités

assez faibles, et sur la figure 8.3 on restait pratiquement dans la zone proche de $w = 0$ ($w \ll w_{\text{sat}}$) où la courbe est presque confondue avec sa tangente. On appelle intensité de saturation w_{sat} celle pour laquelle la différence a varié de la moitié du maximum possible, soit

$$D_S(w_{\text{sat}}) = \frac{D(0)}{2} = -\frac{1}{2} n \frac{g_b}{g_a}$$

On en déduit au centre de la résonance ($\nu = \nu_0$) :

$$\boxed{w_{\text{sat}} = \frac{A_{21}}{(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu_0)}} \tag{8-14}$$

ou encore

$$B_{12}\varphi(\nu_0)w_{\text{sat}} + B_{21}\varphi(\nu_0)w_{\text{sat}} = A_{21}$$

c'est-à-dire que, avec l'intensité de saturation, au centre de la résonance, la somme des deux probabilités induites par le rayonnement (absorption et émission) est égale à la probabilité d'émission spontanée. On retrouve bien la même définition de la saturation que celle de la formule (3-17) obtenue à partir des solutions stationnaires de Bloch (*cf.* §3.5). Compte tenu du rapport des coefficients B_{12} et B_{21}, l'équation ci-dessus peut se réécrire sous la forme :

$$B_{21}\varphi(\nu_0)w_{\text{sat}}\left(1 + \frac{g_b}{g_a}\right) = A_{21}$$

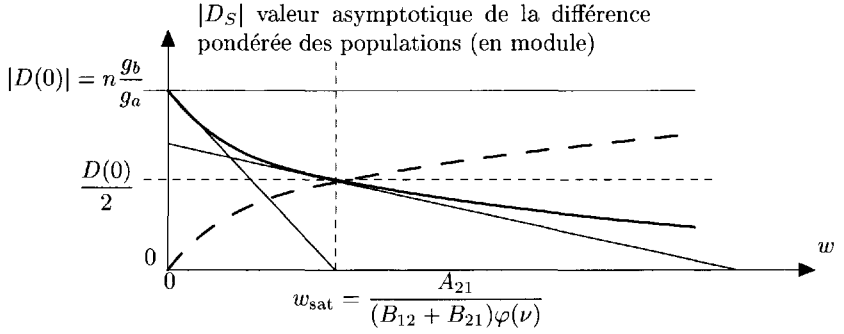


FIG. 8.3 – *Phénomène de saturation aux fortes intensités lumineuses. La valeur asymptotique de la différence pondérée des populations tend vers 0 quand l'intensité lumineuse croît indéfiniment. La différence étant négative, on représente en trait plein la valeur absolue $|D_S|$. La courbe en tireté, symétrique par rapport à l'horizontale $D(0)/2$, représente : $|D(0)| - |D_S| = D_S - D(0) = D_S + n\frac{g_b}{g_a} = \left(1 + \frac{g_b}{g_a}\right)(n_b)_S$.*

et l'on en déduit une idée physique importante : dès que l'intensité lumineuse w est supérieure à $w_{\text{sat}}(1 + g_b/g_a)$, le nombre des émissions stimulées devient supérieur au nombre des émissions spontanées. Autrement dit, l'intensité de saturation, multipliée par le coefficient $1 + g_b/g_a$ constitue une frontière séparant les intensités faibles où l'émission spontanée est prédominante, des intensités fortes où l'émission stimulée est prédominante. L'intensité de saturation peut encore être utilisée pour réécrire, sous une forme simplifiée, la différence stationnaire et la constante de temps de l'exponentielle :

$$\left.\begin{aligned} D_S(w) &= -n \times \frac{g_b}{g_a} \times \frac{1}{1 + \dfrac{w}{w_{\text{sat}}}} = D(0) \times \frac{1}{1 + \dfrac{w}{w_{\text{sat}}}} \\ \frac{1}{T_{\text{ir}}} &= A_{21}\left(1 + \frac{w}{w_{\text{sat}}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}15)$$

On retrouve le « paramètre de saturation » sans dimension $w/w_{\text{sat}} = \Omega_1^2 \tau_1 \tau_2$ déjà défini en (3-18) au §3.5.

On a ajouté sur la figure 8.3 une courbe en tireté (symétrique par rapport à l'horizontale $|D(0)|/2$) qui représente la quantité :

$$|D(0)| - |D_S| = D_S - D(0) = D_S + n\frac{g_b}{g_a} = \left(1 + \frac{g_b}{g_a}\right)(n_b)_S$$

(en utilisant (8-10)). Cette courbe en tireté est donc *proportionnelle* à la population n_b stationnaire du niveau excité (si $g_b = g_a$ il faut diviser par deux, pour obtenir cette population). Les deux courbes de la figure 8.3 ont la même forme que celles de la figure 3.4c.

Remarque 8.2 – Il peut être commode dans certaines études de généraliser l'expression (8.14) à une fréquence ν différente de la résonance ν_0. On peut alors définir une énergie de saturation généralisée à la fréquence ν sur les ailes de la raie (qui est supérieure à w_{sat} de (8.14)) et un paramètre de saturation généralisé qui est inférieur à (3-18) ; *cf.* (18-15).

8.4 Coefficient d'absorption généralisé. L'inversion des populations, condition d'amplification

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes intéressés à la variation des populations atomiques. Dans ce nouveau paragraphe, nous nous intéressons aux expériences où l'on mesure l'intensité du faisceau lumineux avant et après traversée d'un milieu absorbant selon le schéma de la figure 8.1. L'emploi de la section efficace est la méthode la plus commode pour relier le nombre de photons absorbés au nombre d'atomes excités : nous avons vu au §8.1 que la vraie probabilité d'absorption d'un photon par un seul atome

est le rapport sans dimension σ/S ; et nous en avons déduit l'expression (8-6) pour le nombre d'atomes excités dans une expérience de courte durée τ, qui est égal au nombre de photons absorbés (τ remplace ici δt) :

$$|\delta N| = N\frac{\sigma}{S}\Phi\tau \quad \text{avec} \quad N = n_a S l$$

Nous en déduisons la variation *relative* du nombre de photons au cours de la traversée du milieu absorbant :

$$\sigma n_a l = \frac{|\delta N|}{\Phi\tau} = \frac{|\delta(\Phi\tau)|}{\Phi\tau} = \frac{|\delta\Phi|}{\Phi}$$

Cette relation n'est valable que si l'épaisseur l est assez faible (pour éviter que certains atomes situés à droite du volume Sl ne soient masqués par d'autres atomes situés à gauche, à l'entrée du même volume). Il faut donc faire tendre l vers zéro ; il faut tenir compte aussi du fait que la variation du nombre de photons est négative :

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\delta\Phi}{l} \longrightarrow -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \sigma(\nu)n_a = K(\nu) \qquad (8\text{-}16)$$

On retrouve ainsi le classique coefficient d'absorption $K(\nu)$, qui a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Dans les expériences anciennes (avant les lasers), où l'on ne disposait que de faibles intensités lumineuses monochromatiques, n_a restait toujours voisin du nombre total d'atomes n ; on pouvait confondre n_a et n et écrire $K(\nu) \approx \sigma(\nu)n$. Le coefficient $K(\nu)$ étant indépendant de l'épaisseur traversée z on pouvait, dans un milieu optiquement épais, intégrer l'équation différentielle (8-16) en z, et trouver la variation de l'intensité en fonction de l'épaisseur z traversée :

$$w(z) = w(0)\,\mathbf{e}^{-K(\nu)z} \qquad (8\text{-}17)$$

Si nous voulons des expressions plus générales, nous devons tenir compte de la différence entre n_a et n ; mais nous devons aussi tenir compte des photons qui sont rendus au faisceau lumineux par émission induite des atomes du niveau supérieur E_b, avec la probabilité d'absorption σ_{21}/S qui est différente de la probabilité σ_{12}/S pour les atomes du niveau E_a :

$$|\delta N| = \sigma_{12}(\nu)n_a l\Phi\tau - \sigma_{21}(\nu)n_b l\Phi\tau$$

Les photons d'émission spontanée ne sont pas comptabilisés puisqu'ils ne sont pas échangés avec l'onde incidente (la fraction d'entre eux qui sont émis dans la direction du faisceau incident est tout à fait négligeable).

Nous en déduisons :

$$\boxed{-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \sigma_{12}(\nu)n_a - \sigma_{21}(\nu)n_b = -\sigma_{21}(\nu)D = K(\nu)} \qquad (8\text{-}18)$$

C'est ce coefficient d'absorption généralisé qui doit être utilisé pour un calcul exact (nous trouvons là aussi une justification du choix de la variable D). De cette expression de $K(\nu)$, nous tirons deux conséquences :

1. puisque la différence pondérée D reste toujours négative, le coefficient K reste toujours positif et donc l'intensité du faisceau lumineux est toujours décroissante. Autrement dit, le terme $\sigma_{12}n_a$, représentant l'absorption, reste toujours supérieur au terme $\sigma_{21}n_b$ représentant le gain d'énergie par émission induite ;

2. l'émission induite cependant compense en partie la diminution d'intensité créée par l'absorption des atomes au niveau E_a. Cette compensation est d'autant plus importante que l'intensité est plus forte et augmente la population n_b en même temps qu'elle diminue la population n_a. Nous avons vu qu'aux fortes intensités la différence D devient petite et peut être voisine de zéro. Donc le coefficient d'absorption $K(\nu)$ diminue pour les très fortes intensités : *un milieu fortement éclairé devient moins absorbant que le même milieu faiblement éclairé.* Des expériences ont été effectivement réalisées entre les deux guerres mondiales avec des sources lumineuses classiques de très fortes intensités ; et l'on a pu vérifier cette diminution du coefficient d'absorption aux fortes intensités lumineuses (laboratoire de Ladenburg à Berlin dans les années trente ; *cf.* réf. [2] et [3]). Des expériences réalisées avec des faisceaux laser de très fortes intensités mettent en évidence des coefficients d'absorption extrêmement faibles : on parle de *transparence induite* par les fortes intensités lumineuses.

Pour augmenter la population excitée n_b aux dépens de la population n_a, on pourrait aussi jouer sur la température. On sait en effet qu'à l'équilibre thermique, dans un milieu à température absolue T, le rapport des populations des deux niveaux d'énergie E_a et E_b est donné par la loi de Boltzmann :

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{g_b}{g_a}\mathbf{e}^{-\dfrac{E_b - E_a}{kT}} = \frac{g_b}{g_a}\mathbf{e}^{-\dfrac{h\nu_0}{kT}} \tag{8-19}$$

En plaçant les atomes dans un four à une température extrême telle que $kT \gg h\nu_0$ (ce serait possible pour une fréquence ν_0 de micro-onde ; ce serait difficile pour une fréquence ν_0 optique, à moins de se placer dans une étoile) on augmenterait notablement la population excitée n_b, et l'on pourrait peut-être tendre vers une valeur de la fonction exponentielle proche de l'unité ; mais cette valeur serait toujours inférieure à 1 ; c'est-à-dire que de toute façon :

$$\frac{n_b}{n_a} < \frac{g_b}{g_a} \quad \text{et donc} \quad D = n_b - \frac{g_b}{g_a}n_a < 0 \tag{8-20}$$

En définitive dans les expériences normales, que l'on irradie les atomes, ou bien qu'on les chauffe fortement, la différence pondérée des populations D

peut être amenée à une valeur proche de zéro, mais elle obéit toujours à l'inégalité (8-20) et reste négative.

C'est en 1954 que le Professeur Townes de l'Université Cobumbia à New York publie le premier article où il propose une méthode pour inverser l'inégalité (8-20) dans le cas d'une transition micro-onde de la molécule d'ammoniac (réf. [4] et [5]). Si l'on réalise cette *inversion des populations* par rapport aux conditions normales, c'est-à-dire que l'on produit une *différence pondérée D positive*, alors le coefficient d'absorption $K(\nu)$ est négatif ; l'exposant de l'exponentielle dans la formule de variation d'intensité (8-18) est positif, et l'exponentielle est supérieure à 1 : à la sortie du milieu atomique l'intensité $w(l)$ est supérieure à l'intensité incidente $w(0)$. L'intensité de l'onde est augmentée au lieu d'être atténuée. En d'autres termes, si l'inversion des populations est réalisée, le terme d'émission stimulée $\sigma_{21} n_b$ dans l'expression (8-18) devient supérieur au terme d'absorption $\sigma_{12} n_a$; c'est-à-dire que l'augmentation d'énergie de l'onde à partir du réservoir d'énergie des atomes excités E_b est plus importante que la diminution d'énergie par absorption des atomes du niveau inférieur E_a. Au total, l'onde qui traverse le milieu, voit son énergie augmentée : c'est une véritable *amplification de l'onde électromagnétique.*

8.5 Les processus d'inversion ou de pompage

Nous voulons ici donner une idée des procédés (sans pouvoir les décrire en détail) qui permettent de créer ces situations anormales où il y a une inversion des populations, et que l'on caractérise souvent sous le terme de « température négative » (*cf.* référence [6]). En effet, pour que le résultat recherché, $D > 0$, soit obtenu à partir de la loi de Boltzmann (8-19), il faut que l'exposant de l'exponentielle soit positif ; et ce résultat est obtenu en remplaçant la température T par une quantité négative. Cette « température négative » est sans rapport avec la température globale de l'échantillon, qui sera toujours positive ; elle ne concerne que les deux niveaux particuliers E_a, E_b que l'on réussit à porter en dehors de l'équilibre thermique. Les procédés utilisés sont essentiellement de trois types.

8.5.1 Le tri sur jet atomique ou moléculaire

Le premier procédé proposé par Townes est relativement simple du point de vue conceptuel, mais il est limité aux transitions radio ou micro-ondes, pour lesquelles la probabilité spontanée A_{21} est toujours très faible. Cela ressort de la loi (8-4) démontrée par Einstein par un raisonnement thermodynamique et confirmée ensuite par les calculs de mécanique quantique ; selon cette loi la probabilité A_{21} varie comme le cube de la fréquence ν de l'onde. Les longueurs d'onde des micro-ondes se mesurent en centimètres alors que les longueurs d'onde optiques se mesurent en micromètre ou fractions de

micromètre ; c'est-à-dire qu'elles sont dans un rapport de l'ordre de 10^4, conduisant à un rapport 10^{12} pour les probabilités A_{21}. Les probabilités A_{21} courantes en optique sont comprises entre 10^6 sec^{-1} et 10^9 sec^{-1}, correspondant à des durées de vie spontanée τ_b comprises entre la microseconde et la nanoseconde (de 10^{-9} s à 10^{-6} s). S'il faut multiplier par le facteur 10^{12}, on obtient en micro-ondes des durées de vie supérieures à des milliers de secondes, très largement supérieures aux durées de vol des atomes ou molécules dans les expériences de jet atomique, qui sont de quelques millisecondes à la dizaine de millisecondes.

La molécule de gaz ammoniac NH_3, dans son état fondamental, existe dans deux états distincts séparés par une transition à la fréquence $\nu = 23,870$ GHz ($\lambda \approx 1,25$ cm), entre lesquels elle se répartit selon la loi de Boltzmann (à température ordinaire $T = 300$ K, $h\nu \ll kT$). Soumises à un champ électrique, ces molécules NH_3 deviennent polaires et possèdent alors un moment dipolaire électrique ; celui-ci soumis à un gradient de champ électrique subit une force de translation (de la même manière qu'un moment magnétique soumis à un gradient de champ magnétique dans l'expérience de Stern et Gerlach). La différence des moments électriques des deux états considérés de la molécule NH_3, conduit à des forces de translation différentes. Le jet moléculaire de NH_3, sous vide, passe entre des barres métalliques portées à des potentiels différents qui créent un fort gradient de champ électrique et sépare les trajectoires des molécules selon leur état initial a ou b. Les molécules à l'état inférieur a sont piégées tandis que les molécules à l'état supérieur b pénètrent dans un guide d'onde où se propage l'onde de radar à 23,870 GHz, dont on observe effectivement l'amplification (réf. [4] et [5]).

Townes a donné à ce premier appareil le nom de M.A.S.E.R. : Microwave Amplifier by Stimulated Emission of Radiation. Le même procédé de tri sur jet atomique sert à construire les classiques masers à hydrogène à la fréquence de 1,420 GHz (il faut d'abord dissocier les molécules du gaz en atomes, par une décharge par exemple ; ensuite les deux niveaux hyperfins de l'atome sont séparés par le gradient de champ magnétique d'un aimant hexapolaire).

Si ce premier processus de tri sur jet atomique est conceptuellement très simple, sa mise en œuvre comporte des techniques délicates et encombrantes qui rendent parfois difficile son utilisation pratique. Des amplificateurs maser ont été réellement utilisés dans certaines expériences, du fait de leur très grande sélectivité en fréquence (par exemple pour les premières transmissions de télévision par satellite) ; mais ils utilisent d'autres processus d'inversion plus faciles à mettre en œuvre techniquement.

8.5.2 Irradiation avec une autre onde électromagnétique sur une autre transition

Nous avons vu au §8.2 qu'il est impossible de réaliser une inversion de population ($D > 0$) entre deux niveaux d'énergie E_a et E_b en les irradiant avec

leur fréquence de résonance $\nu = \dfrac{E_b - Ea}{h}$. Les procédés d'inversion utilisant une irradiation doivent donc nécessairement utiliser d'autres fréquences, en résonance avec d'autres niveaux. On les appelle couramment procédés de pompage, par généralisation de l'image proposée par Kastler en 1950 (réf. [7]) : on fait passer les atomes ou molécules de l'état E_a à l'état E_b en passant par un autre état intermédiaire, de la même façon qu'une pompe à eau fait monter les molécules d'eau d'un réservoir A à un autre réservoir B, plus élevé, en passant à travers le corps de pompe.

Pompage d'une transition hertzienne avec une autre transition hertzienne. Maser à trois niveaux

L'idée en a été proposée indépendamment par Basov et Prokhorov en 1955 (réf. [8]) et par Bloembergen en 1956 (réf. [9]) (cette différence de date a valu à Basov et Prokhorov de partager le prix Nobel avec Townes en 1964, tandis que Bloembergen l'a obtenu quelques années plus tard, en 1981, conjointement avec Schawlow).

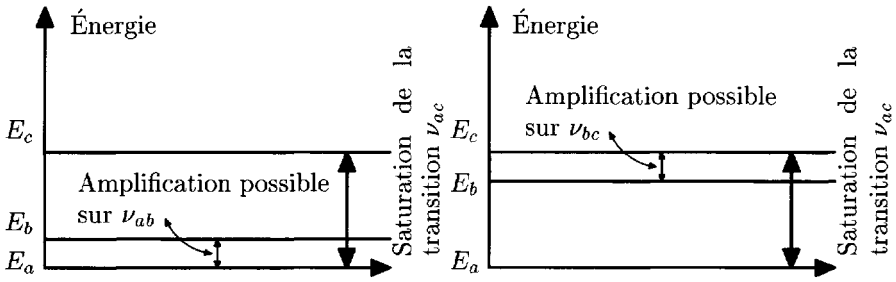
On suppose que le système étudié possède trois niveaux d'énergie : $E_a < E_b < E_c$, séparés par des transitions hertziennes ou de micro-ondes. Si la température de l'échantillon n'est pas très basse ($T \gtrsim$ quelques dizaines de Kelvin), les différences d'énergie $h\nu_{ab} = E_b - E_a$ et $h\nu_{bc} = E_c - E_b$ sont inférieures à l'énergie thermique kT, c'est-à-dire que le module de l'exposant des exponentielles de Boltzmann est nettement inférieur à l'unité et autorise un développement limité au premier ordre ; on peut donc écrire à l'équilibre thermique :

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_c}{n_b} &= \mathbf{e}^{-\frac{h\nu_{bc}}{kT}} \approx 1 - \frac{h\nu_{bc}}{kT} \quad \text{ou} \quad n_c = n_b\left(1 - \frac{h\nu_{bc}}{kT}\right) \\ \frac{n_a}{n_b} &= \mathbf{e}^{+\frac{h\nu_{ab}}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu_{ab}}{kT} \quad \text{ou} \quad n_a = n_b\left(1 + \frac{h\nu_{ab}}{kT}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

(pour simplifier l'exposé nous supposons les poids statistiques égaux ; on généraliserait très facilement avec des poids inégaux).

Le pompage consiste à irradier à très forte intensité la transition $a-c$ entre les niveaux les plus distants de façon à atteindre la saturation (*cf.* §8.3) ; c'est-à-dire que l'on obtient de nouvelles populations n'_a et n'_c pratiquement égales. Ceci est fait très rapidement en sorte que les processus de retour à l'équilibre thermique n'aient pas le temps d'agir ; c'est-à-dire que la population n_b ne varie pas, et que la somme des deux populations a et c reste constante ; on en déduit

$$n'_a \approx n'_c \approx \frac{n'_a + n'_c}{2} = \frac{n_a + n_c}{2} = n_b\left[1 + \frac{h\nu_{ab} - h\nu_{bc}}{2kT}\right] \tag{8-22}$$



(a) Maser à 3 niveaux ($\nu_{ab} < \nu_{bc}$) **(b)** Maser à 3 niveaux ($\nu_{ab} > \nu_{bc}$)

FIG. 8.4 – *Maser à trois niveaux, en hyperfréquence (a) cas $\nu_{ab} < \nu_{bc}$; (b) cas $\nu_{ab} > \nu_{bc}$.*

Deux cas distincts peuvent alors se produire (*cf.* Fig. 8.4) :

1. si $\nu_{ab} < \nu_{bc}$, c'est-à-dire si le niveau intermédiaire E_b est plus proche du bas que du haut, le crochet est inférieur à 1, alors on obtient $n'_a < n_b$; on a réalisé l'inversion des populations entre les deux niveaux les plus bas E_a et E_b ;

2. si au contraire, le niveau intermédiaire est plus proche du haut que du bas, c'est-à-dire $\nu_{ab} > \nu_{bc}$, le crochet est supérieur à l'unité. On obtient alors $n'_c > n_b$; on a réalisé l'inversion entre les deux niveaux les plus hauts E_b et E_c.

De façon générale en saturant la transition entre les niveaux les plus espacés, on inverse les populations entre les deux niveaux les plus rapprochés.

Pompage optique d'une transition hertzienne

C'est le pompage optique proposé pour la première fois par Kastler en 1950 (réf. [7]). Sous sa forme originale, ce processus était fondé sur les échanges de moment cinétique entre les atomes et la lumière polarisée circulairement (dont chaque photon transporte un moment cinétique $\hbar$; à la différence de la lumière polarisée rectiligne qui n'a pas de moment cinétique). Lorsque la lumière polarisée donne son moment cinétique aux atomes, elle change l'orientation de leurs moments cinétiques, c'est-à-dire aussi celle de leurs moments magnétiques ; elle modifie donc les populations des sous-niveaux Zeeman de ces atomes, entre lesquels elle peut produire des inversions si les atomes sont soumis à un champ magnétique.

Mais il était facile de généraliser ce processus de pompage au cas de niveaux d'énergie hertziens ne dépendant pas d'un champ magnétique : un certain nombre d'horloges atomiques (ou standards de fréquence hertziens) récentes

utilisent un pompage optique de type Kastler pour modifier les populations des niveaux concernés (*cf.* §6.5). On a construit des masers dans lesquels l'inversion des populations est produite par pompage optique, par exemple le maser à Rubidium 87 à la fréquence de 6,835 GHz.

Pompage optique d'une transition optique

Il s'agit maintenant d'amplifier une onde lumineuse ; l'appareil ainsi construit sera donc un L.A.S.E.R : « Light Amplifier by Stimulated Emission of Radiation » (réf. [10]). Nous avons représenté sur la figure 8.5 deux schémas énergétiques typiques de ces procédés d'inversion dans les milieux condensés (solides ou liquides). Dans ces milieux condensés, les atomes ou molécules sont en interaction étroite avec leurs voisins et avec les vibrations thermiques du milieu. Ceci a pour effet de perturber les niveaux d'énergie bien séparés que l'on observe dans les atomes libres et de les remplacer par des séries de niveaux d'énergie très voisins ; et leurs écarts étant inférieurs à leurs largeurs, ils forment un continuum ou bande d'énergie. Des transitions sont possibles entre ces niveaux très voisins par échange d'énergie avec les vibrations mécaniques du milieu (énergie thermique par exemple) sans qu'aucune radiation électromagnétique ne soit absorbée ou émise ; on parle de transitions non radiatives. Le premier schéma (Fig. 8.5a) est relatif au cristal de rubis (ions Cr^{+++} dilués dans une matrice transparente d'alumine Al_2O_3) avec lequel a été construit historiquement le premier laser (réf. [11] et [12]). Les ions Cr^{+++} dans cet environnement présentent une large bande d'absorption pour la lumière verte, correspondant aux transitions du niveau fondamental E_a vers tous les niveaux E_c d'une large bande d'énergie. Les ions Cr^{+++} excités dans les niveaux E_c effectuent très rapidement des transitions non radiatives vers les niveaux inférieurs de la même bande, en rendant une part de leur énergie aux vibrations du cristal (c'est-à-dire que cette énergie se transforme en énergie d'agitation thermique dans le milieu cristallin). Toutes ces « retombées » non radiatives se terminent au bas de la bande d'énergie dans un niveau unique E_b qui lui ne peut perdre son énergie que dans une transition radiative de lumière rouge, dont la probabilité spontanée A_{21} est relativement faible. La couleur rouge du cristal de rubis, utilisé en bijouterie, provient à la fois de la suppression de la composante verte de la lumière blanche et de l'émission spontanée de la fluorescence rouge entre E_b et E_a.

Compte tenu de la largeur de la bande d'énergie E_c, une large fraction du spectre visible peut être utilisée pour exciter les ions Cr^{+++} ; et une irradiation avec une lampe flash blanche permet d'arracher à l'état fondamental E_a plus de la moitié des ions Cr^{+++}, qui se trouvent alors répartis dans tous les états E_c de la bande. Mais presque instantanément ils se retrouvent tous réunis dans l'état E_b, du bas de la bande parce que les transitions non radiatives sont extrêmement rapides, et que la durée de vie radiative du niveau E_b est au contraire assez longue. On réalise ainsi momentanément l'inversion des populations entre les niveaux E_a et E_b ; et l'on peut recommencer à chaque

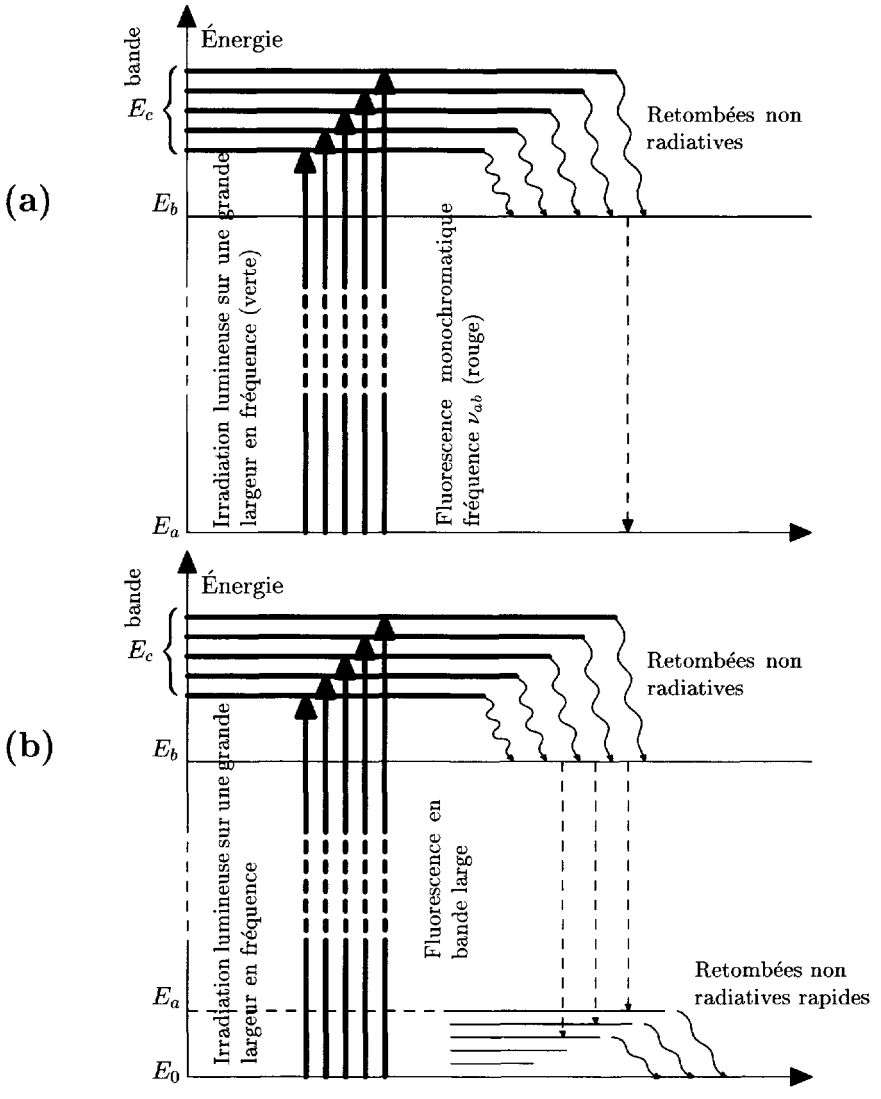


FIG. 8.5 – *Pompage optique d'une transition optique. (a) Cas particulier du rubis. (b) Colorants dilués dans un solvant ou ions dilués dans une matrice cristalline (système à quatre niveaux).*

allumage du flash. La forte intensité de lumière blanche nécessaire oblige à utiliser une lampe flash et ce procédé de pompage ne fonctionne en pratique que de manière discontinue, en impulsions successives.

Le même procédé est plus facile à utiliser avec des systèmes atomiques ou moléculaires possédant d'autres niveaux d'énergie, voisins du niveau

fondamental E_0 (*cf.* Fig. 8.5b). Nous supposons par exemple que E_0 est le niveau le plus bas d'une autre bande d'énergie. Cette nouvelle bande d'énergie, comme la précédente, a une largeur en énergie bien supérieure à l'énergie thermique kT ; et, en accord avec la loi de Boltzmann, seuls les niveaux très proches de E_0 ($E - E_0 \approx kT$) sont peuplés à l'équilibre thermique. Le processus d'excitation des niveaux proches de E_0 vers les niveaux excités de la bande supérieure utilise encore une large portion du spectre visible ; et la retombée non radiative à l'intérieur de la bande supérieure rassemble tous ces atomes excités au niveau inférieur de la bande E_b comme précédemment.

Mais à la différence du cas précédent, il existe en dessous de E_b un certain nombre de niveaux d'énergie E_a, situés dans le haut de la bande inférieure, qui sont normalement dépeuplés ; et l'inversion de population entre ces niveaux vides et le niveau E_b se trouve automatiquement réalisée, même si le nombre d'atomes excités est très inférieur à la moitié. Ce procédé de pompage dans un système à quatre niveaux (par opposition au système à trois niveaux du rubis) fonctionne donc avec des intensités lumineuses plus faibles et il est possible de le faire fonctionner en continu avec une excitation permanente en lumière blanche. Ce fonctionnement n'est possible que si les retombées non radiatives du niveau E_a vers le bas de la bande sont extrêmement rapides car le fonctionnement même de l'amplificateur peuple le niveau E_a (par les retombées radiatives stimulées de E_b) qui doit donc être vidé très rapidement. L'intérêt d'une bande continue au-dessus de E_0, c'est aussi la possibilité de choisir sur une certaine plage la fréquence amplifiée.

Le pompage optique dans les gaz à faible pression est beaucoup plus rarement utilisé. En effet, même si les molécules présentent un grand nombre de niveaux d'énergie de vibration et de rotation, ces niveaux sont parfaitement séparés et il n'y a plus de continuum d'absorption. Pour être efficace, le pompage doit être quasiment monochromatique, accordé à une transition particulière de la molécule, c'est-à-dire utiliser une source lumineuse de type laser. On l'utilise parfois comme moyen pour transférer l'inversion d'un premier laser sur une autre fréquence.

8.5.3 Collisions électroniques, atomiques ou moléculaires dans les gaz

Les collisions électroniques sont couramment utilisées dans les lampes à décharge pour porter les atomes dans les états excités d'où ils réémettent spontanément de la lumière ; ce sont par exemple les lampes à sodium couramment employées pour l'éclairage routier (pour l'atome de mercure, une grande part de cette lumière spontanée est ultraviolette et on enduit les parois de verre de la lampe de substances fluorescentes qui absorbent cet ultraviolet et réemettent de la lumière visible ; ce sont les tubes fluorescents utilisés pour l'éclairage domestique). Ces processus de collisions électrons-atomes sont complexes et constituent à eux seuls un champ de la physique

dans lequel nous ne pouvons entrer ; les probabilités d'excitation de tel ou tel niveau d'énergie dépendent de nombreux paramètres, et il peut se trouver que tel niveau excité, d'énergie assez élevée, soit peuplé davantage qu'un autre niveau excité moins élevé. La décharge seule réalise alors l'inversion entre ces deux niveaux (réf. [13]).

Cette inversion naturelle entre deux niveaux dans une décharge peut être améliorée par d'autres collisions atomiques ou moléculaires. Dans le laser à gaz carbonique (CO_2), par exemple, on utilise des collisions avec les molécules d'azote. Dans le laser Hélium-Néon, ce sont deux niveaux très excités du Néon qui sont peuplés préférentiellement grâce aux collisions avec les atomes métastables de l'hélium produits naturellement dans la décharge ; l'inversion est ainsi réalisée entre ces deux niveaux du Néon et un certain nombre de niveaux excités dont l'énergie est inférieure ; l'amplification peut être obtenue sur plusieurs longueurs d'onde visibles ou infrarouges (réf. [14]).

En conclusion, l'idée d'inverser les populations de certains niveaux atomiques, acquise en 1954, a fait rapidement tache d'huile ; et les physiciens ont rapidement trouvé de nombreuses transitions atomiques ou moléculaires permettant de construire des masers amplificateurs de micro-ondes ou des lasers amplificateurs de lumière. On est alors conduit à remplacer la notion de coefficient d'absorption (8-18) par un coefficient d'amplification, qui lui est opposé :

$$\alpha(\nu) = -K(\nu) = +\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\sigma_{21}(\nu)D \qquad (8\text{-}23)$$

Nous avons dit que des amplificateurs maser ont été utilisés pour mesurer des signaux de micro-onde extrêmement faibles à cause de la sélectivité en fréquence que leur confère la finesse des transitions atomiques et moléculaires. Mais cette performance des masers n'est possible que grâce à l'absence d'émission spontanée dans le domaine micro-onde. Dans le domaine optique, l'émission spontanée, propre aux atomes ou molécules de l'amplificateur, viendrait brouiller de façon rédhibitoire tout essai de mesure de signaux faibles. Les lasers ne peuvent pas être employés comme amplificateurs de mesure ; ils ne peuvent être utilisés que comme *amplificateurs de puissance* pour renforcer une source lumineuse déjà suffisamment intense (plus intense que leur émission spontanée interne). Cette première source lumineuse sera en pratique un laser *oscillateur* ou *générateur*, dont nous expliquons le principe dans le chapitre suivant.

Bibliographie

[1] A. Einstein, Phys. Z. **18**, 121 (1917).

[2] R. Ladenburg et H. Kopfermann, Z. Phys. **48**, 15 (1928).

[3] R. Ladenburg, Rev. Mod. Phys. **5**, 243 (1933).

[4] J.P. Gordon, H.J. Zeiger et C.H. Townes, Phys. Rev. **95**, 282L (1954).

[5] J.P. Gordon, Scientific American (décembre 1958).

[6] E.M. Purcell et R.V. Pound, Phys. Rev. **81**, 279 (1951).

[7] A. Kastter, J. Phys. Radium **11**, 255 (1950).

[8] N.G. Basov, A.M. Prokhorov, Zh. Eksp. JETP **1**, 184 (1955).

[9] N. Bloembergen, Phys. Rev. **104**, 324 (1956).

[10] A.L. Schawlow et C.H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).

[11] T.H. Maiman, Nature **187**, 493 (1960).

[12] R.J. Collins, D.F. Nelson, A.L. Schawlow, W. Bond, C.G. Garrett et W. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **5**, 303 (1960).

[13] A. Javan, Phys. Rev. Lett. **3**, 87 (1959).

[14] A. Javan, W.R. Bennett et D.R. Herriott, Phys. Rev. Lett. **6**, 106 (1961).

[15] A.L. Schawlow, Scientific American (juin 1961) et (juillet 1963).

Chapitre 9

Équations fondamentales du laser oscillateur ou générateur

9.1 Amplification et oscillation. Rôle d'une cavité résonnante

DEPUIS LE DÉBUT de la radio à l'aube du XX^{e} siècle, les électroniciens ont développé des techniques élaborées qui leur ont permis de construire des amplificateurs d'une part (pour recevoir les signaux radio) et des générateurs ou oscillateurs d'autre part (pour entretenir le courant dans les antennes d'émission). Une méthode fréquemment utilisée pour fabriquer un oscillateur est d'utiliser une boucle de réaction (feedback) qui renvoie à l'entrée d'un amplificateur tout ou partie de son signal de sortie (*cf.* Fig. 9.1) : si l'amplitude et la phase de la tension alternative, renvoyée à l'entrée par la boucle de réaction, sont correctes, le système entre en auto-oscillation, et produit une tension alternative en l'absence de tout signal externe.

Dans le cas d'amplification d'une onde, le meilleur moyen de produire une réaction importante est d'utiliser une cavité résonnante, accordée à la fréquence utile, dans laquelle l'onde est réfléchie de manière à se retrouver en phase avec elle-même (interférences constructives produisant une onde stationnaire de forte intensité). Lorsque Townes construit son premier maser en 1954, il lui suffit d'envoyer les molécules triées non plus dans un simple guide d'onde, mais dans une cavité, accordée à la fréquence moléculaire, pour engendrer dans cette cavité une onde à cette fréquence, en l'absence de toute onde incidente ; il réalise alors le premier maser **oscillateur**, engendrant une micro-onde (réf. [1]). L'intérêt de ce nouveau type de générateur est que sa fréquence est contrôlée avec une précision extrême par la transition atomique $E_b - E_a = h\nu$. La stabilité et la précision de ce nouveau générateur étaient tellement supérieures à celles des générateurs de micro-onde courants, que,

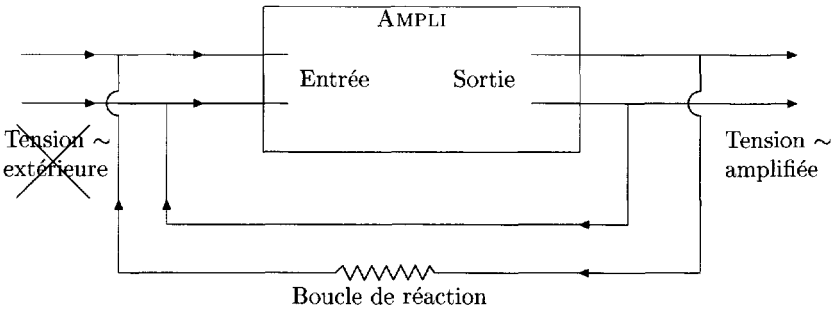


FIG. 9.1 – *Principe de construction d'un oscillateur à partir d'un amplificateur, grâce à une boucle de réaction. Si la boucle de réaction est bien réglée, ce système fabrique une tension alternative en l'absence de toute tension extérieure à l'entrée de l'amplificateur (que l'on a donc symboliquement rayée).*

pour les évaluer, Townes fut obligé de construire un second maser oscillateur, auquel il put comparer le premier.

Le maser à Hydrogène et le maser à Rubidium fournissent de la même façon des oscillateurs extrêmement stables et précis, utilisés en métrologie.

Dans l'article de 1958 où Townes et Schawlow étudient la généralisation du maser à l'optique (réf. [2]), ils proposent d'utiliser comme cavité optique le traditionnel interféromètre de Pérot et Fabry formé de deux miroirs plans parallèles (*cf.* Fig. 9.2) (ou parfois sphériques, *cf.* chapitre 16) semi-réfléchissants, dont les coefficients de réflexion R_A et R_B sont proches de l'unité (mais inférieurs à l'unité : *cf.* réf. [3]). Les calculs présentés dans les livres d'optique, rappelés à la fin du prochain paragraphe, concernent le faisceau lumineux transmis vers l'avant, ou bien réfléchi vers l'arrière. On s'intéresse ici à l'espace intérieur à la cavité, entre les deux miroirs, où l'on veut mettre les atomes : l'onde y subit des réflexions successives sur le miroir B à l'aller, puis sur le miroir A au retour, puis à nouveau sur B, etc., formant toute une série d'ondelettes aller et retour. Le déphasage entre deux ondelettes aller successives vaut $\varphi = 2\pi\dfrac{2l}{\lambda}$. Si $l = N\dfrac{\lambda}{2}$, toutes les ondelettes aller sont en phase et leur interférence constructive forme une onde Aller globale intense (et par suite un faisceau transmis intense dans le cas de l'interféromètre) ; dans le cas contraire l'interférence destructive des différentes ondelettes ne permet pas l'établissement d'une onde de longueur d'onde λ à l'intérieur de la cavité (et par suite pas de lumière transmise non plus). Si la cavité est donc accordée à la longueur d'onde λ des atomes amplificateurs ($E_b - E_a = h\nu = hc/\lambda$), l'onde en effectuant un grand nombre d'allers et retours sur les atomes réalise la réaction nécessaire pour transformer l'amplificateur en oscillateur. En utilisant les hypothèses du chapitre précédent, nous calculerons les échanges

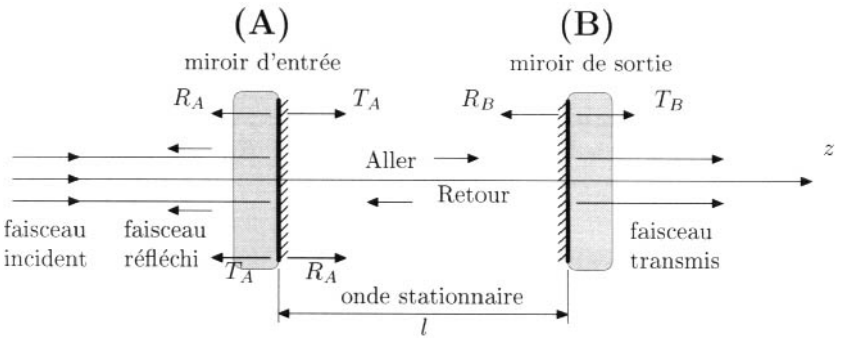


FIG. 9.2 – *Cavité de Pérot et Fabry. Elle est accordée à la longueur d'onde* λ, *lorsque la longueur* l *séparant les miroirs vaut* $N\frac{\lambda}{2}$ *(*N *entier).*

d'énergie entre l'onde et les atomes, dont les populations sont supposées inversées ($D > 0$).

L'hypothèse fondamentale des calculs de la partie II est que la longueur l de la cavité résonnante est toujours ajustée pour que la cavité soit accordée à la longueur d'onde atomique λ. Dans ces conditions, toutes les ondelettes formées par les réflexions successives, et qui se propagent dans le même sens, sont en phase et leurs amplitudes s'ajoutent simplement pour calculer l'onde Aller globale et l'onde Retour globale se propageant dans la cavité. Nous raisonnerons essentiellement dans la suite sur ces deux ondes globales Aller et Retour. Le calcul des déphasages entre les ondelettes, lorsque la fréquence incidente externe varie, est au contraire fondamental pour comprendre le rôle de l'interféromètre de Pérot et Fabry comme moyen d'analyse spectrale ; c'est pourquoi il sera rappelé dans la Remarque 9.1, à la fin du paragraphe suivant. La cavité possède de nombreuses longueurs d'onde résonnantes voisines ($l = N\frac{\lambda}{2} = (N+1)\frac{\lambda'}{2} = (N+2)\frac{\lambda''}{2}$) ; nous supposons pour l'instant que une seule de ces longueurs d'onde résonnantes peut être amplifiée par les atomes.

9.2 Constante de temps et coefficient de qualité d'une cavité

Nous rappelons ici, dans le cas particulier du Pérot-Fabry, les propriétés classiques des cavités résonnantes qui sont utiles pour notre calcul. Il s'agit donc pour l'instant d'une cavité vide d'atomes qui est irradiée par un faisceau lumineux accordé conformément à la figure 9.2 : il s'établit dans la cavité un système d'onde stationnaire d'intensité très supérieure à celle de l'onde incidente à cause de l'accumulation d'énergie créée par la superposition des

ondelettes successives qui sont en accord de phase. Nous appelons W_{cav}, l'énergie de l'onde interne à la cavité qui peut se calculer en intégrant dans le volume de la cavité la densité volumique d'énergie $w_A(x, y, z)$ de l'onde Aller et la densité volumique $w_R(x, y, z)$ de l'onde Retour ; ces deux densités étant presque égales si les coefficients de réflexion R_A et R_B sont très proches de l'unité :

$$W_{\text{cav}} = \iiint [w_A(x, y, z) + w_R(x, y, z)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$
$$= \iiint [w_{\text{cav}}(x, y, z)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \quad (9\text{-}1)$$

w_{cav} étant la densité *moyenne* de l'onde stationnaire résultante (moyennée sur une longueur $\delta z = \lambda$) :

$$w_{\text{cav}} = w_A + w_R \simeq 2w_A \simeq 2w_R \quad (9\text{-}2)$$

En fait, l'onde stationnaire, résultant de la superposition des deux ondes progressives opposées Aller et Retour, présente des nœuds et des ventres et sa densité d'énergie varie sinusoïdalement avec une période $\dfrac{\lambda}{2}$ en fonction de la position z sur l'axe perpendiculaire aux miroirs. On montre que sa valeur, moyennée en z, est égale à la somme des densités des deux ondes progressives.

Que devient cette énergie W_{cav} si l'on interrompt brusquement le faisceau incident avec un obturateur acousto-optique ou électro-optique ? elle ne disparaît pas instantanément puisque l'onde intérieure continue à être réfléchie par les deux miroirs A et B ; mais elle est diminuée à chaque réflexion du fait que les miroirs ne sont pas parfaitement réfléchissants. Le calcul exact de ce phénomène est facile si nous raisonnons sur la durée $\delta t = 2l/c$ d'un tour complet de l'onde dans la cavité (un Aller et un Retour).

Pendant la durée δt, la totalité de l'onde interne à la cavité subit une réflexion et une seule sur chacun des miroirs A et B. Le coefficient de réflexion R est défini en énergie, c'est-à-dire que l'énergie réfléchie est égale à l'énergie incidente multipliée par R ; et l'énergie perdue est égale à l'énergie incidente multipliée par $(1 - R)$. On en déduit la variation de l'énergie de l'onde sur un tour complet de la cavité :

$$\delta W_{\text{cav}} = -\left[(1 - R_A) + (1 - R_B)\right] W_{\text{cav}} \qquad \text{pendant } \delta t = \frac{2l}{c} \quad (9\text{-}3)$$

ou encore la variation relative divisée par δt :

$$-\frac{1}{W_{\text{cav}}} \cdot \frac{\delta W_{\text{cav}}}{\delta t} = \left[(1 - R_A) + (1 - R_B)\right] \frac{c}{2l}$$

Nous avons fait un calcul simple sur un Aller et Retour ; mais en fait la perte d'énergie est régulière et permanente, et ceci nous autorise à passer

à l'équation différentielle (en faisant tendre δt vers zéro) :

$$\boxed{-\frac{1}{W_{\text{cav}}} \cdot \frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = [(1 - R_A) + (1 - R_B)]\,\frac{c}{2l} = \frac{1}{\tau_c}} \tag{9-4}$$

Cette quantité a la dimension de l'inverse d'un temps. Nous définissons ainsi la constante de temps de la cavité τ_c qui est égale à la durée δt d'un tour complet de cavité multipliée par le facteur $\dfrac{1}{1 - R_A + 1 - R_B} \gg 1$. Elle permet de calculer la variation temporelle de l'énergie après l'obturation du faisceau incident au temps $t = 0$:

$$W_{\text{cav}}(t) = W_{\text{cav}}(0)\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_c}} \tag{9-5}$$

l'intensité du faisceau émergent transmis à travers la cavité est proportionnelle à la densité d'énergie du faisceau Aller

$$w_{\text{trans}} = T_A w_A = T_A \frac{w_{\text{cav}}}{2} \qquad (T_A = 1 - R_A)$$

et elle est donc proportionnelle aussi à l'énergie totale dans la cavité $W_{\text{cav}}(t)$. On vérifie la loi exponentielle (9-5) en enregistrant sur un oscilloscope rapide la variation d'intensité du faisceau émergent après l'obturation du faisceau incident. Un ordre de grandeur de la constante de temps τ_c peut être calculé par exemple pour une cavité de longueur $l = 1,5$ mètre, ce qui donne $\delta t = 2l/c = 10^{-8}$ seconde. Si les coefficients de réflexion sont tous les deux égaux à 0,99, soit $(1 - R_A) = (1 - R_B) = 1/100$, on obtient $\tau_c = 0,5$ microseconde.

Cette constante de temps est reliée très simplement au coefficient de qualité sans dimension Q, utilisé couramment pour caractériser les cavités :

$$\boxed{\begin{aligned} Q = \omega\tau_c = 2\pi\frac{\tau_c}{T} &= 2\pi \frac{1}{1 - R_A + 1 - R_B} \cdot \frac{2l}{\lambda} \\ &= 2\pi \frac{W_{\text{cav}}}{\text{Énergie perdue en 1 période}} \end{aligned}} \tag{9-6}$$

où $T = 1/\nu$ est la période de l'onde sinusoïdale : on a utilisé la valeur de τ_c calculée en (9-4). Au facteur 2π près, le coefficient de qualité représente le nombre de périodes de l'onde sinusoïdale pendant la durée d'amortissement τ_c. La dernière expression à droite (définition énergétique du coefficient de qualité) s'obtient en utilisant la définition de τ_c dans l'équation différentielle (9-4) :

$$\tau_c = \frac{W_{\text{cav}}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t}\right|} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T}\tau_c = \frac{W_{\text{cav}}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t}\right| T} = \frac{W_{\text{cav}}}{\text{Énergie perdue dans la durée } T}$$

Remarque 9.1 – On peut mesurer expérimentalement le coefficient de qualité à partir de la largeur des raies d'interféromètres. C'est la raison pour laquelle nous rappelons ici rapidement les calculs classiques du champ transmis à travers l'interféromètre de Pérot et Fabry. On fait la somme des champs des ondelettes transmises successivement à chaque tour de cavité par le miroir B en utilisant la notation complexe ; le champ de chaque ondelette est obtenu en multipliant le champ incident E_{inc} par un facteur d'atténuation et un facteur de phase. On obtient le champ total transmis :

$$E_{\text{trans}} = E_{\text{inc}}\sqrt{T_A T_B}\,\mathbf{e}^{-i\frac{\varphi}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{R_A R_B}\right)^k \mathbf{e}^{-ik\varphi}\right] \tag{9-7}$$

où T_A et T_B sont les facteurs de transmission en énergie des deux miroirs ($T_A \leq 1-R_A$ et $T_B \leq 1-R_B$) ; φ est le déphasage pour 1 tour complet dans la cavité (un Aller et un Retour). Le crochet est la somme d'une série géométrique de raison $\sqrt{R_A R_B}\,\mathbf{e}^{-i\varphi}$, dont le résultat est :

$$\begin{aligned}\left|\frac{E_{\text{trans}}}{E_{\text{inc}}}\right| &= \sqrt{T_A T_B}\times\left|\frac{1}{1-\sqrt{R_A R_B}\,\mathbf{e}^{-i\varphi}}\right| \\ &= \sqrt{T_A T_B}\left|\frac{1}{1-\sqrt{R_A R_B}\cos\varphi+i\sqrt{R_A R_B}\sin\varphi}\right|\end{aligned}$$

On en déduit les rapports d'intensités :

$$\frac{w_{\text{trans}}}{w_{\text{inc}}} = \left|\frac{E_{\text{trans}}}{E_{\text{inc}}}\right|^2 = T_A T_B \frac{1}{1+R_A R_B-2\sqrt{R_A R_B}\cos\varphi}$$

ou en utilisant $\cos\varphi = 1-2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\frac{w_{\text{trans}}}{w_{\text{inc}}} = T_A T_B \frac{1}{\left(1-\sqrt{R_A R_B}\right)^2+4\sqrt{R_A R_B}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \tag{9-8}$$

À la différence des cavités laser qui sont toujours dissymétriques, les interféromètres Pérot et Fabry possèdent généralement deux miroirs symétriques ($R_A = R_B = R$). Dans le cas idéal de miroirs sans pertes ($T_A = 1-R_A$ et $T_B = 1-R_B$), on obtient la classique fonction d'Airy :

$$\frac{w_{\text{trans}}}{w_{\text{inc}}} = \frac{1}{1+\dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)} = \mathcal{A}(\varphi). \tag{9-9}$$

Cette fonction prend la valeur maximale, égale à l'unité, lorsque $\varphi = N.2\pi$. Dès que φ s'écarte un peu de ces valeurs particulières, la fonction $\mathcal{A}(\varphi)$ devient très petite devant l'unité, dans la mesure où R est voisin de 1, c'est-à-dire $\dfrac{4R}{(1-R)^2} \gg 1$.

On retrouve ainsi la forme caractéristique des pics d'Airy (*cf.* Fig. 9.3) ; l'écart $\delta\varphi_{\frac{1}{2}}$ à mi-hauteur d'un pic d'Airy est donné par :

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{A}(N.2\pi+\delta\varphi_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \\ &\text{soit } \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\delta\varphi_{\frac{1}{2}}}{2}\right)=1 \quad \text{ou} \quad \frac{1-R}{2\sqrt{R}} = \pm\sin\left(\frac{\delta\varphi_{\frac{1}{2}}}{2}\right) \simeq \pm\frac{\delta\varphi_{\frac{1}{2}}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{9-10}$$

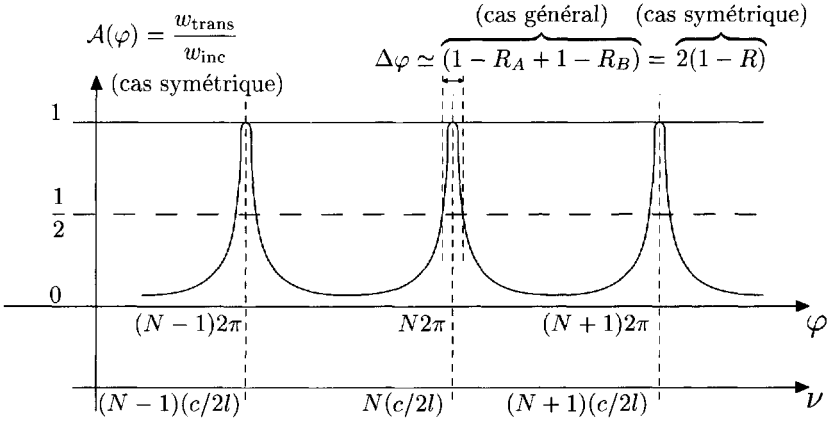


FIG. 9.3 – *Courbe d'Airy représentant l'intensité transmise à travers un interféromètre de Pérot et Fabry en fonction du déphasage φ sur un tour complet de la cavité. Compte tenu de la formule calculant le déphasage $\varphi = 2\pi \frac{2l\cos i}{\lambda}$, cette courbe peut être observée expérimentalement soit en faisant varier l'angle d'incidence i (anneaux de Pérot-Fabry), soit pour les ondes axiales ($i = 0$) en faisant varier la longueur l de la cavité ou la fréquence de l'onde $\nu = c/\lambda$. Dans ce dernier cas l'écart entre deux pics de fréquence ν_N et ν_{N+1} est très simple à calculer : $\nu_{N+1} - \nu_N = c/2l$ (inverse du temps de parcours de la cavité). La* finesse de la courbe d'Airy *est caractérisée par le rapport entre la distance entre deux pics voisins et leur largeur : $\frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi}{1 - R_A + 1 - R_B}$. Le nombre entier $N \simeq 2l/\lambda$ est l'*ordre d'interférence. *Le produit de ces deux quantités donne le coefficient de qualité $Q = N2\pi/\Delta\varphi$ (en multipliant la courbe d'Airy par $1/2T_A$, elle représente le rapport $w_{\text{cav}}/w_{\text{inc}}$ entre la densité d'énergie interne à la cavité et celle du faisceau incident.*

Dans la plupart des applications pratiques $R \simeq 1$ et donc $\sqrt{R} \simeq 1$. Cela permet de simplifier la largeur à mi-hauteur du pic d'Airy (*cf.* Fig. 9.3) :

$$\Delta\varphi = 2|\delta\varphi_{\frac{1}{2}}| \simeq 2(1 - R)$$

Expérimentalement, on fait varier le déphasage $\varphi = 2\pi\frac{2l}{\lambda}$ des ondes axiales, soit en changeant la longueur l, soit en changeant la longueur d'onde λ (ou la fréquence $\nu = c/\lambda$) ; la largeur relative observée est la même quelle que soit la variable :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \simeq \frac{\lambda}{4\pi l} 2(1 - R) = \frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega\tau_c} \qquad (9\text{-}11)$$

On a utilisé la formule (9-6) du coefficient de qualité. On retrouverait le même résultat approché dans le cas dissymétrique ($R_A \neq R_B$, cas des lasers) à partir

de la formule (9-8) ; c'est-à-dire qu'il faut remplacer $2(1-R)$ par $(1-R_A+1-R_B)$. (Calcul un peu plus compliqué ; il faut faire un développement limité par rapport aux quantités très petites $\varepsilon_A = 1-R_A$ et $\varepsilon_B = 1-R_B$.) Expérimentalement on obtient la valeur du coefficient de qualité Q en multipliant la finesse de la courbe d'Airy (rapport de la distance entre deux pics voisins à la largeur d'un pic : $\dfrac{2\pi}{\Delta\varphi} = \dfrac{2\pi}{(1-R_A+1-R_B)}$) par l'ordre d'interférence $N \simeq 2l/\lambda$.

9.3 Équation différentielle de l'énergie lumineuse. Seuil de fonctionnement

Nous calculons maintenant la variation au cours du temps de l'énergie lumineuse W_{cav} en tenant compte simultanément des pertes de la cavité étudiées au paragraphe précédent et des échanges avec les atomes étudiés au chapitre 8. Pour simplifier les calculs et faciliter la compréhension des effets physiques fondamentaux, nous supposons dans la presque totalité de la partie II que l'onde prenant naissance dans la cavité est une onde cylindrique ayant une densité d'énergie constante w_{cav} dans une section S parfaitement délimitée (il s'agit bien sûr d'une densité d'énergie moyennée, entre les nœuds et les ventres de l'onde stationnaire, sur une longueur $\delta z = \lambda$). **Cette hypothèse d'un faisceau lumineux « à bords nets »** est en contradiction avec tous les phénomènes de diffraction et en particulier avec le calcul du faisceau gaussien présenté dans la partie III ; mais les caractéristiques mêmes de ce faisceau gaussien font que l'hypothèse des bords nets est cependant valable comme première approximation (*cf.* Fig. 9.4).

Dans le cadre de cette approximation, la formule exacte (9-1) se simplifie en :

$$W_{\text{cav}} = Slw_{\text{cav}}. \tag{9-12}$$

Pour calculer les variations de l'énergie W_{cav} dues aux atomes, nous devons compter le nombre de photons échangés en utilisant deux des formules (8-1) ; nous excluons en effet le phénomène d'émission spontanée qui n'intervient pas dans ce paragraphe puisqu'il ne représente pas un échange avec l'onde. Le nombre d'atomes en interaction avec l'onde dépend du volume utile $\mathcal{V}_{\text{utile}}$ du milieu amplificateur (la partie de ce milieu, de section S, qui est traversée par l'onde) par lequel nous devons multiplier les populations n_a et n_b, définies par unité de volume. La variation de W_{cav} en une seconde est obtenue en multipliant l'énergie $h\nu$ de chaque photon par le nombre de photons réellement gagnés : différence entre les photons induits par les atomes excités E_b et les photons absorbés par les atomes à l'état inférieur E_a. Il faut ensuite soustraire l'énergie perdue par la cavité, calculée en (9-4) :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = h\nu \left[\left| \frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} \right| - \left| \frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} \right| \right] \mathcal{V}_{\text{utile}} - \frac{1}{\tau_c} W_{\text{cav}}. \tag{9-13}$$

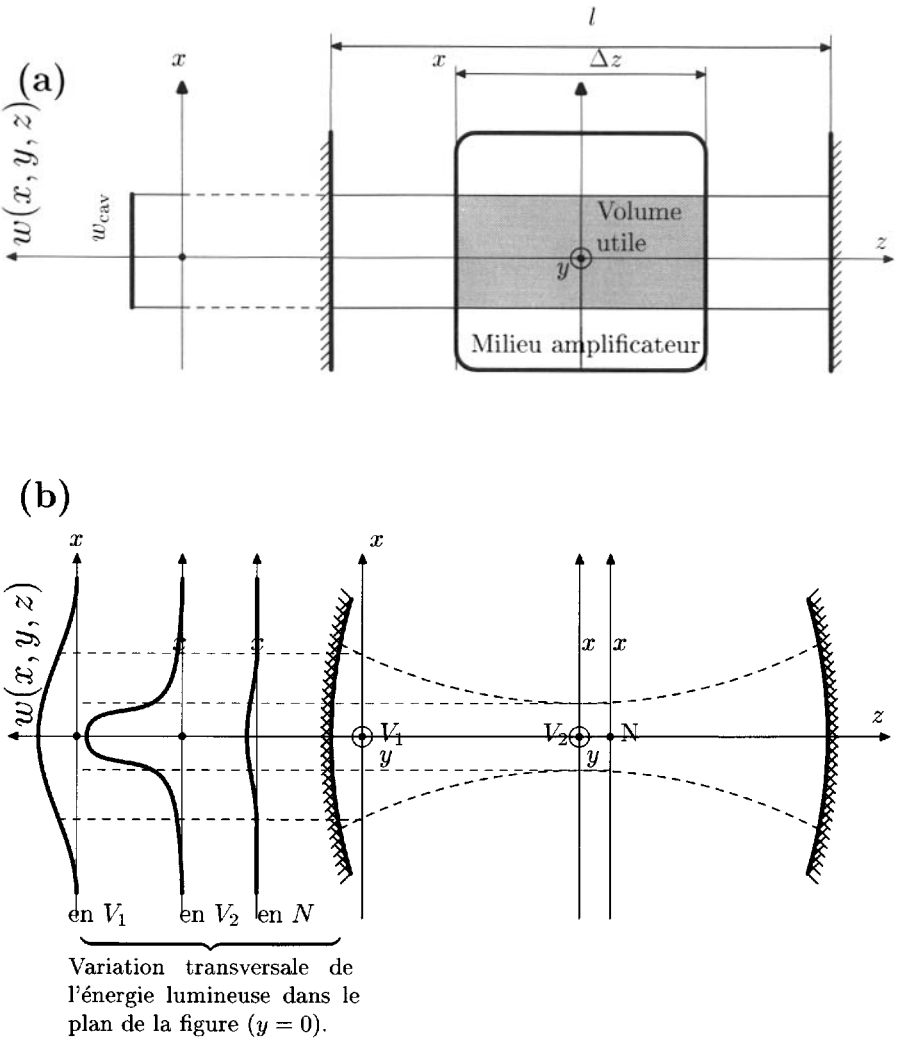


FIG. 9.4 – *Répartition de la densité d'énergie lumineuse dans la cavité optique. (a) Hypothèse du faisceau cylindrique à bords nets ; (b) schéma d'un faisceau lumineux plus réaliste (cf. chapitre 15): les coupes V et N ont été choisies respectivement en deux ventres V_1 et V_2 et en un nœud N de l'onde stationnaire.*

En utilisant les formules (8-1), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{cav}}}{\mathrm{d}t} = h\nu\varphi(\nu)w_{\mathrm{cav}}\,(B_{21}n_b - B_{12}n_a)\,\mathcal{V}_{\mathrm{utile}} - \frac{1}{\tau_c}W_{\mathrm{cav}} \qquad (9\text{-}14)$$

l'approximation (9-12) permet d'exprimer la densité w_{cav} en fonction de W_{cav}, ce qui fait apparaître le rapport sans dimension η appelé :

$$\textit{Coefficient de remplissage } \eta = \frac{\mathcal{V}_{\text{utile}}}{Sl} = \frac{S\Delta z}{Sl} = \frac{\Delta z}{l} \tag{9-15}$$

Δz étant la longueur du milieu amplificateur

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = h\nu\varphi(\nu)\left(B_{21}n_b - B_{12}n_a\right)\eta W_{\text{cav}} - \frac{1}{\tau_c}W_{\text{cav}}$$

On fait apparaître la différence pondérée $D(t)$ des populations introduite en (8-9) et l'on simplifie un peu l'écriture en utilisant la section efficace (8-8) $\sigma_{21}(\nu) = \dfrac{h\nu}{c}B_{21}\varphi(\nu)$:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = \left[\eta c\sigma_{21}(\nu)D(t) - \frac{1}{\tau_c}\right]W_{\text{cav}} \tag{9-16}$$

Il est bien évident que si la différence pondérée D est négative, la dérivée de W_{cav} est négative, et donc l'énergie lumineuse ne peut que décroître et tendre vers zéro. Nous retrouvons là la nécessité de la condition d'inversion des populations, $D > 0$, discutée au chapitre 8 : *la condition d'inversion est toujours nécessaire, mais n'est pas suffisante pour faire fonctionner un oscillateur.* En effet, pour engendrer une onde observable dans la cavité, il faut que l'énergie puisse croître à partir d'une valeur initiale très faible, c'est-à-dire que la dérivée de W_{cav} soit positive, ou encore que le crochet de la formule (9-16) soit positif :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} > 0 \implies D(t) > D_{\text{seuil}}\\ &D_{\text{seuil}} = \frac{1}{\eta\sigma_{21}(\nu)c\tau_c} = \frac{1}{\eta h\nu B_{21}\varphi(\nu)\tau_c} = \frac{1 - R_A + 1 - R_B}{\eta\sigma_{21}(\nu)2l} = \frac{2\pi}{\eta\sigma_{21}(\nu)\lambda Q}\end{aligned}} \tag{9-17}$$

la deuxième expression utilise la définition (8-8) de σ_{21} ; la troisième utilise la définition (9-4) de τ_c ; la dernière expression à droite est obtenue en utilisant la définition (9-6) du coefficient de qualité Q.

En définitive le fonctionnement d'un laser oscillateur exige la condition (9-17) plus restrictive que l'inversion des populations, et que l'on appelle condition de seuil. Cette **condition de seuil exprime la nécessité pour l'énergie provenant des atomes amplificateurs d'être supérieure aux pertes de la cavité** (réf. [1], [4]). Les pertes de la cavité étant proportionnelles à $1/\tau_c$ ou $1/Q$, il est normal que la différence-seuil soit aussi proportionnelle à $1/\tau_c$ ou $1/Q$. Une cavité de bonne qualité, ayant un Q élevé et une constante d'amortissement τ_c longue, abaisse la différence-seuil et facilite le démarrage de l'oscillateur.

Une remarque doit être faite cependant sur l'équation différentielle (9-16) : si l'énergie est initialement nulle ($W_{\text{cav}} = 0$), sa dérivée reste nulle, même si le crochet est positif ; il est donc impossible d'engendrer réellement une onde à partir de zéro. De fait l'oscillateur ne peut s'amorcer qu'à partir de l'émission spontanée inévitable des atomes amplificateurs. Le premier photon spontané que le hasard envoie dans la direction axiale Oz se comporte comme une onde d'énergie $W_{\text{cav}} = h\nu$. Cette valeur extrêmement faible suffit à assurer le « démarrage » de l'équation différentielle (9-16). (Le même problème se pose dans les amplificateurs électroniques évoqués au début de ce chapitre : c'est le mouvement thermique aléatoire des électrons dans les fils électriques, ce qu'on appelle le « bruit » électronique, qui permet le démarrage ; parce que dans l'analyse de Fourier de ce « bruit », on trouve toujours une petite composante à la fréquence ν souhaitée.)

La notion de différence-seuil des populations introduite en (9-17) est fondamentale dans la compréhension des lasers oscillateurs. Si l'on utilise la valeur de cette différence-seuil, l'équation différentielle (9-16) peut être réécrite sous une forme normalisée qui nous sera utile par la suite :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{D(t)}{D_{\text{seuil}}} - 1\right] \frac{1}{\tau_c} W_{\text{cav}}(t)} \qquad (9\text{-}18)$$

Sous cette forme normalisée, l'équation différentielle est identique pour tous les lasers. On note qu'elle contient le produit $D(t).W(t)$ des deux grandeurs caractéristiques l'une des atomes et l'autre de la cavité.

Remarque 9.2 – L'existence du produit $D(t).W(t)$ confère à cette équation des propriétés non linéaires, étudiées dans le chapitre suivant. Cette non-linéarité pose en fait des problèmes dans la démonstration même de cette formule, puisque dans (9-14) nous avons remplacé la densité d'énergie $w(z)$ en chaque point par la valeur moyenne w_{cav}. Ceci ne serait correct que dans deux cas :

a) dans une cavité en anneau, unidirectionnelle, où $w(z)$ peut être considéré comme uniforme (*cf.* chapitre 14, §14.2) ;

b) si des mouvements très rapides des atomes égalisent les populations n_a et n_b entre les différentes positions z le long de la cavité.

Dans les cas contraires, la variation de la densité d'énergie locale $w(z)$ entre les nœuds et les ventres de l'onde stationnaire provoque aussi des variations de la différence de population locale $D(z,t)$ d'un point à l'autre ; et la moyenne sur z du produit $w(z).D(z,t)$ n'est pas égale au produit des moyennes. Nous reviendrons par la suite sur ce problème (*cf.* en particulier chapitre 17). Mais dans ce chapitre et les deux suivants, nous nous limiterons à ce modèle simplifié.

Remarque 9.3 – Dans certains cas, on utilise des cavités concentriques où le faisceau lumineux est focalisé au centre ; le plus souvent l'amplification n'est importante que dans la partie centrale où le faisceau est approximativement cylindrique (*cf.* faisceau gaussien). Mais il est possible de tenir compte de la variation de

la section du faisceau S et de sa densité d'énergie w en fonction de la position z sur l'axe de la cavité. La conservation de la puissance dans le faisceau lumineux fait que le produit de ces deux quantités reste constant : $S(z).w(z) =$ Constante, indépendante de z. Ceci permettrait de généraliser les calculs de ce paragraphe, si l'on pouvait admettre que les populations atomiques sont homogénéisées dans l'espace, soit par les mouvements d'agitation thermique dans un gaz, soit par la circulation rapide d'un colorant en solution (mais c'est rarement le cas). La relation (9-12) entre l'énergie totale W_{cav} et la densité w doit être réécrite :

$$W_{\text{cav}} = \int_0^l S(z) \cdot w(z) \mathrm{d}z = (Sw) \cdot l$$

Dans l'équation différentielle (9-14), il faut réécrire le terme d'amplification sous la forme :

$$h\nu\varphi(\nu)\left(B_{21}n_b - B_{12}n_a\right) \int w(z)S(z)\mathrm{d}z = h\nu\varphi(\nu)\left(B_{21}n_b - B_{12}n_a\right)(Sw)\Delta z$$

où Δz est la longueur du milieu amplificateur. On retrouve de la même façon le coefficient de remplissage $\eta = \Delta z/l$. Si l'on veut s'affranchir de l'hypothèse des « bords nets », (*cf.* Fig. 9.4) et tenir compte de la variation dans le plan d'onde de $w(x, y, z)$, il faut généraliser la définition du coefficient de remplissage par le rapport de deux intégrales de volume analogues à (9-1), l'une calculée sur le volume total de la cavité, et l'autre sur la seule partie occupée par le milieu amplificateur (volume utile).

9.4 Comparaison avec le gain sur un tour de cavité

Compte tenu de l'importance de cette notion de seuil, nous recommençons dans ce paragraphe le calcul précédent par une méthode différente qui utilise le gain du milieu amplificateur, notion souvent utilisée dans la littérature sur les lasers. Au lieu de calculer le gain d'énergie par unité de temps, nous allons maintenant calculer le gain d'énergie pendant la durée $\delta t = 2l/c$ d'un tour complet dans la cavité (un Aller et un Retour). Pendant un tour, l'onde a traversé la longueur $\Delta z = 2\eta l$ du milieu amplificateur dont nous avons calculé le coefficient d'amplification (8-23) :

$$\alpha(\nu) = -K(\nu) = +\frac{1}{W}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \sigma_{21}(\nu)D$$

c'est-à-dire que le gain en énergie de l'onde à travers le milieu atomique serait :

$$\text{Gain atomique} = \frac{W(\text{après})}{W(\text{avant})} = \frac{W + \delta W}{W} = 1 + \frac{\delta W}{W} = \mathbf{e}^{\alpha(\nu).2\Delta z}$$

Lorsqu'ils comptent en décibels, les électroniciens utilisent en fait un logarithme du gain. Il est commode de faire de même, du fait que dans beaucoup

de lasers, le gain sur un tour est voisin de 1, c'est-à-dire que $\delta W/W \ll 1$. On définit le **gain logarithmique sur un tour** dû à l'interaction atomique :

$$\gamma_{\text{atome}} = \ln(\text{Gain atomique}) = \alpha(\nu) \cdot 2\Delta z = \alpha(\nu) \cdot 2\eta l \simeq \frac{\delta W}{W} \qquad (9\text{-}19)$$

Dans les cas d'un gain voisin de l'unité, le gain logarithmique est pratiquement égal à l'accroissement relatif $\delta W/W$. Lorsque l'onde effectue un tour dans la cavité, elle subit aussi des pertes dont nous devons tenir compte : l'énergie est multipliée par R_A après réflexion sur le miroir A et par R_B après réflexion sur le miroir B. Le gain global sur un tour s'écrit donc :

$$\text{Gain global} = \mathbf{e}^{\alpha(\nu)2\eta l} R_A R_B$$

et nous en déduisons le gain logarithmique global sur un tour :

$$\gamma_{\text{global}} = \ln(\text{Gain global}) = \alpha(\nu).2\Delta z + \ln R_A + \ln R_B$$

En développant le logarithme de $R_A = (1-\varepsilon_A)$ par rapport à la petite quantité ε_A, et de même pour R_B :

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_{\text{global}} &\simeq \alpha(\nu) \cdot 2\eta l - (1 - R_A) - (1 - R_B) \\ &= \gamma_{\text{atome}} - [1 - R_A + 1 - R_B] \simeq \frac{\delta W}{W}\end{aligned}} \qquad (9\text{-}20)$$

Le crochet $[1 - R_A + 1 - R_B]$ représente les pertes logarithmiques sur un tour. Il est bien clair que l'onde laser ne peut se former que si ce gain logarithmique global sur un tour est positif ; c'est-à-dire que le gain atomique doit être supérieur aux pertes logarithmiques, dont le module représente une valeur seuil pour ce gain atomique :

$$\gamma_{\text{atome}} = \alpha(\nu) \cdot 2\eta l = \sigma_{21}(\nu) D.2\eta l > \gamma_{\text{seuil}} = [1 - R_A + 1 - R_B] = \frac{1}{\tau_c}\frac{2l}{c} \qquad (9\text{-}21)$$

La dernière expression à droite utilise la durée d'un tour de cavité $\delta t = \dfrac{2l}{c}$, et tient compte de la formule (9-4) donnant la valeur de τ_c. On retrouve bien la différence-seuil sous la forme : $D_{\text{seuil}} = \dfrac{1 - R_A + 1 - R_B}{\eta \sigma_{21} 2l}$ (*cf.* (9-17)).

Il est souvent commode d'exprimer le gain logarithmique sur un tour en utilisant cette différence-seuil :

$$\gamma_{\text{atome}} = \eta \sigma_{21}(\nu).2lD = \frac{D}{D_{\text{seuil}}}(1 - R_A + 1 - R_B) \text{ ou } \frac{\gamma_{\text{atome}}}{\gamma_{\text{seuil}}} = \frac{D}{D_{\text{seuil}}}$$

$$\boxed{\gamma_{\text{global}} = (1 - R_A + 1 - R_B)\left(\frac{D}{D_{\text{seuil}}} - 1\right) \simeq \frac{\delta W}{W} \text{ pendant } \delta t = \frac{2l}{c}} \qquad (9\text{-}22)$$

En divisant par δt la variation globale d'énergie sur un tour δW calculée en (9-20) ou (9-22), on retrouve exactement les équations différentielles (9-16) et (9-18) que nous avions obtenues en faisant directement un raisonnement sur la durée d'une seconde. Les deux modes de raisonnement conduisent bien aux mêmes conclusions. L'intérêt de ce paragraphe était d'introduire la notion de gain logarithmique sur un tour. On notera que dans la littérature courante, on ne s'encombre pas du « logarithmique sur un tour », qui est sous-entendu.

9.5 Équations différentielles des populations. Exemples de modélisation

La variation de l'énergie lumineuse dépend des populations ; on ne peut donc pas continuer le calcul sans prendre en compte la variation des populations. Nous avons étudié au chapitre 8 les variations de population sous l'action de la lumière résonnante entre les deux niveaux E_a et E_b, et étudié quelques processus généraux dont l'action est permanente. Mais une situation nouvelle est créée maintenant par la méthode de pompage qui, nous l'avons vu, ne peut jamais se réduire aux processus précédents. Les méthodes de pompage sont extrêmement variées et il est impossible de les décrire de manière unique ; beaucoup de ces méthodes mettent en jeu un très grand nombre de niveaux d'énergie de l'atome (décharge dans les gaz par exemple) et ne peuvent être décrites simplement si l'on veut être exact. Nous ne pouvons donc rien dire qui soit vraiment général ; nous ne pouvons que choisir des cas particuliers simples, pouvant constituer des modèles décrivant de manière approchée des situations réelles.

9.5.1 Modèle à deux niveaux

Nous supposons qu'il est possible de définir une probabilité de pompage par unité de temps $\mathcal{P}$ permettant de calculer le nombre d'atomes qui quittent l'état inférieur E_a pour passer à l'état supérieur E_b :

$$\boxed{-\frac{1}{n_a}\left(\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pompage}} = \mathcal{P}} \qquad (9\text{-}23)$$

Ce modèle peut s'appliquer aussi aux cas à trois niveaux ; c'est-à-dire que nous oublions les niveaux intermédiaires par lesquels l'atome est passé avant de retomber dans E_b. Cette modélisation s'applique assez bien, par exemple, au cas du pompage du rubis (*cf.* Fig. 8.5a) dans la mesure où les retombées non radiatives à l'intérieur de la bande d'énergie excitée sont extrêmement rapides, beaucoup plus rapides que tous les autres processus en jeu.

On calcule les variations de population en ajoutant les variations du pompage (9-23) à celles décrites au début du chapitre 8 en (8-3) :

$$\left.\begin{array}{l|l} \dfrac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}t} = +(B_{21}n_b - B_{12}n_a)\varphi(\nu)w + A_{21}n_b - \mathcal{P}n_a & \times -\dfrac{B_{12}}{B_{21}} \\ \dfrac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = -(B_{21}n_b - B_{12}n_a)\varphi(\nu)w - A_{21}n_b + \mathcal{P}n_a & \times 1 \end{array}\right\} \quad (9\text{-}24)$$

On obtient encore $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_a + n_b) = 0$ et $n_a + n_b = n$ (c'est-à-dire que les niveaux intermédiaires utilisés dans le pompage à 3 niveaux sont vidés automatiquement et tellement rapidement que les atomes ne peuvent pas s'y accumuler). Le système (9-24) se réduit donc à une seule équation différentielle. On fait la combinaison linéaire indiquée près de la marge à droite :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) B_{21}\varphi(\nu)wD - A_{21}\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) n_b + \mathcal{P}\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) n_a$$

en remplaçant $n_a\left(1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}\right)$ et $n_b\left(1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}\right)$ par leurs expressions (8-10) :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\left[(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)w(t) + A_{21} + \mathcal{P}\right] D(t) + n\left(\mathcal{P} - \frac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}\right) \quad (9\text{-}25)$$

Cette équation différentielle en D dépend de l'intensité lumineuse $w(t)$, et comme l'équation différentielle de l'énergie (9-18), elle contient le produit $D(t).w(t)$. Mais elle est facilement soluble en l'absence de lumière ($w = 0$, en supprimant les miroirs) si nous supposons la probabilité de pompage constante.

Cinétique du pompage seul sans lumière ($w = 0$). C'est ce qui se produit si l'on supprime les miroirs de la cavité. Si $w = 0$, l'équation différentielle (9-25) a des coefficients constants et possède une solution exponentielle du même type que (8-12) au chapitre précédent, mais avec une autre constante de temps T_P (temps de pompage).

$$D(t) = D_P + \left[D(0) - D_P\right] \mathrm{e}^{-\frac{t}{T_P}} \text{ avec } \frac{1}{T_P} = \mathcal{P} + A_{21} \quad (9\text{-}26)$$

la valeur asymptotique D_P obtenue grâce au pompage au bout d'une assez longue durée, est calculée en annulant la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ (D_P remplace la valeur stationnaire D_S de (8-12) :

$$\text{asymptote } D_P = n \times \frac{\mathcal{P} - \left(\dfrac{B_{12}}{B_{21}}\right) A_{21}}{\mathcal{P} + A_{21}} = n\left[1 - \left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) A_{21}T_P\right] \quad (9\text{-}27)$$

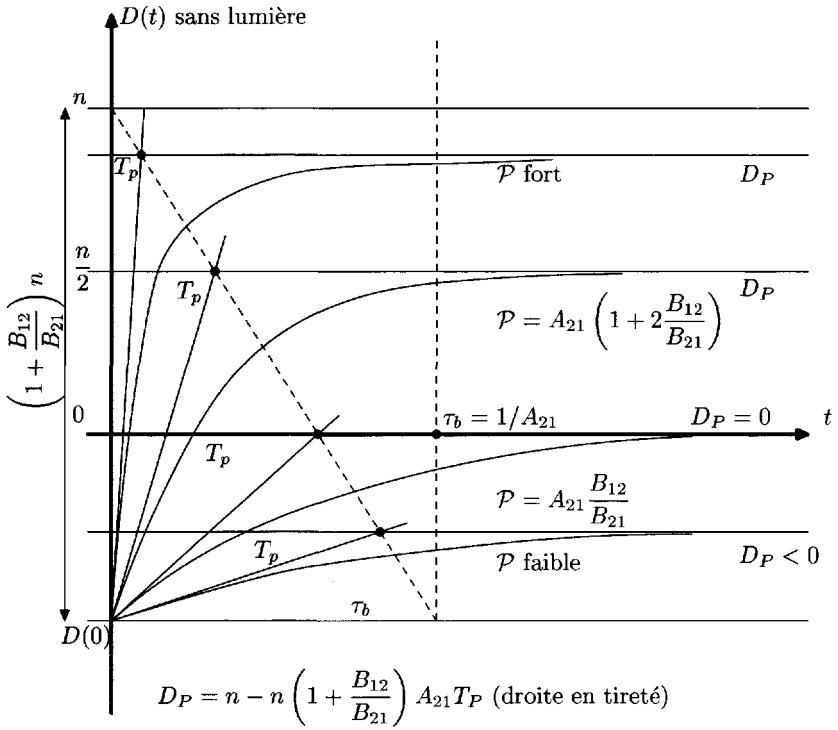


FIG. 9.5 – *Modèle à deux niveaux. Évolution temporelle de la différence pondérée de la population D sous l'action du seul pompage (sans lumière : $w = 0$). Le paramètre $\mathcal{P}$ représente la probabilité de pompage définie en (9-23). En pratique, il sera commode de représenter la force du pompage par la différence maximale D_P atteignable sur l'asymptote.*

On a représenté sur la figure 9.5 un réseau de courbes dépendant du paramètre de pompage $\mathcal{P}$. On calcule facilement que la tangente à l'origine de chaque courbe coupe son asymptote à l'instant $t = T_P$. Lorsque $\mathcal{P}$ est relativement faible, ces courbes ressemblent à celles de la figure 8.2, en ce sens que la valeur de $D(t)$ reste toujours négative. Pour réaliser l'inversion de populations $D_P > 0$ il faut $\mathcal{P} > \dfrac{B_{12}}{B_{21}} A_{21}$; on obtient alors les courbes de la partie supérieure de cette figure. Remarquons un résultat habituel de ce genre d'équation différentielle représentant l'action de deux processus antagonistes (ici le pompage, qui peuple l'état supérieur, et l'émission spontanée qui le dépeuple) : l'amplitude du phénomène résultant D_P se calcule par une soustraction des deux processus antagonistes (ici, au numérateur de la première expression de D_P, on soustrait du pompage $\mathcal{P}$ la quantité $(B_{12}/B_{21})\, A_{21}$ proportionnelle

à l'émission spontanée) tandis que la « vitesse » d'obtention du résultat $1/T_P$ se calcule en faisant la somme des « vitesses » des deux processus séparément (A_{21} et $\mathcal{P}$).

Retour au cas général ($w \neq 0$). La connaissance de cette différence asymptotique des populations D_P obtenue par pompage est un paramètre important du fonctionnement des lasers ; et il est commode d'exprimer l'équation différentielle (9-25) dans le cas général en utilisant D_P. On obtient une forme normalisée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = (\mathcal{P} + A_{21})\left[D_P - D(t)\left(1 + \frac{w(t)}{w_r}\right)\right] \quad \text{avec } w_r = \frac{\mathcal{P} + A_{21}}{(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)}} \tag{9-28}$$

l'intensité de référence w_r sépare les faibles intensités $w \ll w_r$, où le crochet et donc la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ seront positifs, des fortes intensités $w \gg w_r$ où le crochet et donc aussi la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ ont forte chance d'être négatifs. Le terme en w/w_r représente l'effet sur les populations du processus d'émission stimulée : aux faibles intensités lumineuses le pompage (représenté par D_P) peut être plus efficace que l'émission stimulée et la différence D peut continuer à croître. Mais aux fortes intensités lumineuses, l'émission stimulée est bien plus importante que le pompage et la différence D diminue. Nous étudierons les conséquences de cette équation différentielle dans les deux chapitres suivants, auxquels on peut se reporter directement.

Remarque 9.4 – Ayant décrit les phénomènes de pompage par (9-26), on pourrait alors décrire l'action de l'onde avec l'équation de Bloch. Il est clair que c'est alors le temps de pompage T_P qui jouerait le rôle du temps de relaxation τ_1 des populations dans l'équation de Bloch.

Remarque 9.5 – Nous pouvons encore imaginer une expérience où les atomes seraient soumis simultanément au pompage et à une irradiation résonnante d'intensité w constante provenant d'une source extérieure (toujours *sans* cavité). On obtiendrait alors une courbe de variation analogue à celles de la figure 9.5, et aboutissant à une valeur stationnaire D_S calculée en annulant la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$D_S = D_P \frac{1}{1 + \dfrac{w}{w_r}} \tag{9-29}$$

Par comparaison avec la figure 9.5 les asymptotes horizontales sont abaissées ; et cet abaissement est d'autant plus important que l'intensité lumineuse w est plus forte : l'asymptote se rapproche de l'axe horizontal si w devient infini. On a représenté sur la figure 9.6 la variation de cette valeur stationnaire D_S calculée en (9-29) en fonction de la densité d'énergie w, pour une valeur maximum D_P fixée. On notera la ressemblance de cette courbe avec celle de la figure 8.3, qui reflète l'analogie de la formule (9-29) avec la formule (8-15) calculée sans pompage. On observe dans les deux cas le même phénomène de saturation aux fortes intensités lumineuses, conduisant à une différence de population nulle pour w infini.

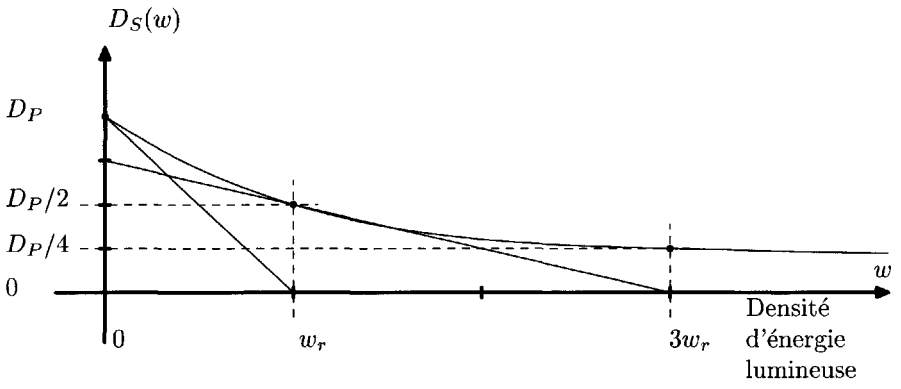


FIG. 9.6 – *La saturation en présence de pompage. Différence de population stationnaire $D_S(w)$ obtenue asymptotiquement en présence simultanément d'une irradiation lumineuse résonnante et d'un pompage (capable de produire D_P dans le noir) (*cf. *remarque 9.5).*

On peut aussi imaginer une expérience où les atomes sont d'abord soumis au pompage seul et l'écart D atteint la valeur asymptotique D_P. Ensuite seulement, on irradie les atomes avec l'intensité w et l'on provoque la diminution de l'écart D, suivant une exponentielle descendante, de D_P à D_S.

Que l'on parte d'une différence de population négative (à l'équilibre thermique) ou positive (grâce à un pompage), l'effet de l'irradiation lumineuse résonnante de forte intensité w est de faire tendre vers zéro la différence stationnaire des populations.

9.5.2 Modèle à quatre niveaux

Nous modélisons maintenant de manière simplifiée un système de pompage à quatre niveaux analogue à celui de la figure 8.5b. Mais conformément à la figure 9.7 nous supposons qu'on utilise un seul niveau E_3 comme intermédiaire pour transférer les atomes du niveau fondamental E_0 au niveau supérieur E_2 de la transition laser (entre E_2 et E_1). On définit la probabilité de pompage par unité de temps $\mathcal{P}$ des atomes de l'état fondamental vers E_3 :

$$-\frac{1}{n_0}\left(\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pompage}} = \mathcal{P}$$

Tous les autres processus, de transitions spontanées, sont représentés sur la figure 9.7.

Les processus représentés par la probabilité A_{32} entre E_3 et E_2 d'une part, par la probabilité A_{10} entre E_1 et E_0 d'autre part, peuvent être aussi bien des émissions spontanées que des transitions non radiatives à l'intérieur

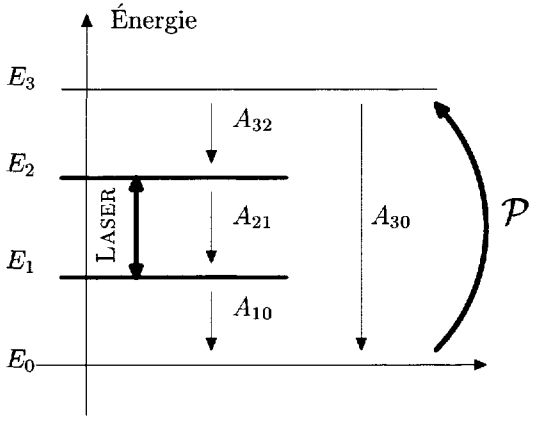


FIG. 9.7 – *Modèle de pompage à quatre niveaux (diagramme énergétique et définition des processus élémentaires).*

d'une bande d'énergie. Ils nous permettent d'écrire les dérivées des quatre populations concernées :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}t} &= -\mathcal{P}n_0 + A_{10}n_1 + A_{30}n_3 \\
\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} &= (B_{21}n_2 - B_{12}n_1)\varphi(\nu)w - A_{10}n_1 + A_{21}n_2 \\
&= B_{21}\varphi(\nu)wD - A_{10}n_1 + A_{21}n_2 \\
\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}t} &= -(B_{21}n_2 - B_{12}n_1)\varphi(\nu)w - A_{21}n_2 + A_{32}n_3 \\
&= -B_{21}\varphi(\nu)wD - A_{21}n_2 + A_{32}n_3 \\
\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t} &= +\mathcal{P}n_0 - (A_{30} + A_{32})n_3
\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}30)$$

On vérifie encore que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n_0 + n_1 + n_2 + n_3) = 0, \quad \text{ou} \quad n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = \text{Constante} = n$$

Cette relation permettrait de réduire le système à trois équations différentielles indépendantes ; mais la solution exacte de ce système de trois équations couplées n'est pas simple dans le cas général.

Il serait difficile aussi de calculer exactement la cinétique du pompage sans cavité ($w = 0$). En revanche, les populations asymptotiques obtenues par pompage au bout d'une durée assez longue ne sont pas difficiles à trouver puisqu'il suffit d'annuler les dérivées :

$$w = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (n_2)_P = \frac{A_{10}}{A_{21}}(n_1)_P$$

soit

$$D_P = (n_2)_P - \frac{B_{12}}{B_{21}}(n_1)_P = \left(\frac{A_{10}}{A_{21}} - \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)(n_1)_P = \left(1 - \frac{B_{12}}{B_{21}}\frac{A_{21}}{A_{10}}\right)(n_2)_P$$

La condition d'inversion

$$D_P > 0 \Rightarrow \frac{A_{10}}{A_{21}} > \frac{B_{12}}{B_{21}} \tag{9-31}$$

est indépendante de la vitesse de pompage $\mathcal{P}$ et ne dépend que du rapport des probabilités spontanées ; les coefficients B_{12} et B_{21} étant toujours du même ordre de grandeur, on l'interprète facilement : il faut que l'émission spontanée (A_{21}) sur la transition laser soit lente, tandis que les transitions spontanées (A_{10}) qui vident le niveau E_1 doivent être très rapides (et ceci est vrai malgré l'existence d'une retombée directe A_{30} de E_3 sur E_0 ; parce que ce qui joue c'est le « rapport de branchement » entre A_{32} et A_{30}).

$$\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (n_3)_P = \frac{\mathcal{P}}{A_{32} + A_{30}}(n_0)_P$$

$$\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (n_2)_P = \frac{A_{32}}{A_{21}}(n_3)_P = \frac{\mathcal{P}}{A_{21}\left(1 + \dfrac{A_{30}}{A_{32}}\right)}(n_0)_P$$

La condition de seuil dépend encore de $\mathcal{P}$ mais de manière moins critique ; et il existe des systèmes où on peut la réaliser avec une probabilité de pompage $\mathcal{P}$ faible par rapport à toutes les probabilités spontanées A_{ij}.

Dans l'hypothèse où $\mathcal{P}$ est très inférieur à tous les A_{ij}, on voit que les trois populations asymptotiques $(n_3)_P$, $(n_2)_P$ et $(n_1)_P$ sont de l'ordre de $\dfrac{\mathcal{P}}{A}(n_0)_P$, c'est-à-dire petites devant $(n_0)_P$. C'est-à-dire que $(n_0)_P$ reste peu différent du nombre total d'atomes n ; l'état fondamental E_0 joue le rôle d'un réservoir surabondant dont la population ne varie guère ; on peut alors raisonnablement faire l'approximation de remplacer n_0 par n dans le terme de pompage, que l'on écrit $\mathcal{P}n$ au lieu de $\mathcal{P}n_0$; c'est-à-dire que dans l'équation en $\mathrm{d}n_3/\mathrm{d}t$ le terme de pompage $\mathcal{P}n$ devient un flux d'atomes constant ; et l'on n'a plus besoin de considérer la variable n_0 , ce qui réduit à trois le nombre des variables utiles.

On voit aussi que l'équation en $\mathrm{d}n_3/\mathrm{d}t$ est alors indépendante de l'intensité lumineuse w ; c'est-à-dire qu'elle n'est pas affectée par l'émission de lumière. La population n_3, du niveau E_3 utilisé pour le pompage, garde donc une valeur constante, indépendante du fonctionnement du laser : $(n_3)_P \simeq n\dfrac{\mathcal{P}}{A_{30} + A_{32}}$.

Dans l'équation en $\mathrm{d}n_2/\mathrm{d}t$ le terme de pompage $A_{32}n_3 \simeq A_{32}(n_3)_P$ devient aussi un flux constant ; et l'on est amené à un système de deux équations différentielles seulement à deux inconnues n_1 et n_2.

Dans le cas général, revenant aux équations différentielles (9-30), il est commode d'éliminer la variable n_2 pour la remplacer par la différence pondérée D qui commande l'équation différentielle de l'énergie lumineuse (9-18) ; il suffit de faire la combinaison linéaire déjà utilisée des deux équations en $\mathrm{d}n_1/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}n_2/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -\left(1+\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)B_{21}\varphi(\nu)wD - A_{21}\left(1+\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)n_2 + A_{10}\frac{B_{12}}{B_{21}} + A_{32}n_3$$

en y substituant $n_2 = D + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}n_1$, les deux équations dérivées de n_1 et de D deviennent :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} &= +\left(B_{21}\varphi(\nu)w + A_{21}\right)D - \left(A_{10} - A_{21}\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)n_1 \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= -\left(1+\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)\left(B_{21}\varphi(\nu)w + A_{21}\right)D \\ &\quad + \left[A_{10} - A_{21}\left(1+\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)\right]\frac{B_{12}}{B_{21}}n_1 + A_{32}n_3\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}32)$$

Elles remplacent les équations dérivées de n_1 et de n_2 dans le système (9-30). Ce système est plus compliqué que l'équation différentielle unique (9-25) ou (9-28).

On rencontre des situations particulières, où le vidage du niveau E_1 est extrêmement rapide : A_{10} *très supérieur à « toutes les autres probabilités »*. Dans ces cas particuliers, la population n_1 reste toujours voisine de zéro. Et si l'on reporte $n_1 \simeq 0$ dans l'équation $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$, on retrouve une équation différentielle en D dont la structure ressemble à celle des équations (9-25) ou (9-28).

Nous étudierons dans les chapitres suivants les conséquences des équations différentielles établies dans ce chapitre 9.

Bibliographie

[1] J.P. Gordon, H.J. Zeiger et C.H. Townes, Phys. Rev. **95**, 282L (1954) ; et Phys. Rev. **99**, 1264 (1955).

[2] A.L. Schawlow et C.H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).

[3] C. Fabry et A. Pérot, Ann. Chim. Phys. **16**, 115 (1899).

[4] A. Yariv et J.P. Gordon, Proc. IEEE (1963) p. 4.

[5] W.E. Lamb Jr, Phys. Rev. **134**, 6A (1964).

Chapitre 10

Régime continu de fonctionnement

NOUS TIRONS maintenant les conséquences des équations fondamentales obtenues au chapitre précédent, sur l'évolution temporelle de l'intensité lumineuse d'un laser. Nous nous restreignons d'abord à un cas théoriquement très particulier, mais très important dans la pratique, celui où l'intensité lumineuse est constante.

10.1 Équation de l'énergie lumineuse. Populations au seuil

La puissance lumineuse utilisable, qui sort à travers le miroir de sortie d'un laser, est proportionnelle à la puissance de l'onde Aller intérieure à la cavité

$$P_{\text{Sortie}} = T_B \times P_{\text{Aller}} = T_B S c w_A = T_B S c \frac{w_{\text{cav}}}{2} \qquad (10\text{-}1)$$

où T_B est le coefficient de transmission énergétique du miroir de sortie B (*cf.* Fig. 9.2) ($T_B \leq 1 - R_B$; en pratique il y a toujours quelques pertes dans la cavité et $T_B < 1 - R_B$). La puissance de sortie est proportionnelle à l'énergie dans la cavité.

Si un laser oscillateur fonctionne en régime continu, avec une puissance de sortie constante, c'est que l'énergie accumulée dans la cavité W_{cav} est constante (et non nulle) et qu'elle a donc une dérivée nulle. Nous référant à l'équation différentielle (9-18), *équation fondamentale et identique pour tous les lasers*, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{D(t)}{D_{\text{seuil}}} - 1\right] \frac{1}{\tau_c} W_{\text{cav}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D(t) = D_{\text{seuil}} = \mathrm{C^{te}} \qquad (10\text{-}2)$$

(Lorsque nous avons établi l'équation (9-18), nous avons déjà remarqué qu'une autre solution de l'équation ci-dessus serait $W_{\text{cav}} = 0$; mais ici cette autre solution est nécessairement exclue.)

L'équation différentielle sur l'énergie lumineuse dans la cavité détermine donc la différence pondérée des populations atomiques ; et c'est la valeur au seuil. Un laser **oscillateur continu fonctionne en permanence au seuil.**

Ce résultat peut paraître surprenant au premier abord, puisque selon les analyses du chapitre 9, le démarrage de l'oscillation exige que la différence des populations produite par le pompage soit au-dessus du seuil. Mais attention ! dans le chapitre 9, nous avons considéré les populations obtenues par pompage (sans miroirs) ou alors avant que l'onde laser ne prenne naissance, c'est-à-dire quand la densité d'énergie lumineuse w_{cav} est nulle. Au contraire maintenant nous calculons la différence de populations en présence de l'onde lumineuse : lorsque l'onde prend naissance, elle provoque des processus d'émissions stimulées qui font décroître la population n_b du niveau d'énergie supérieur (c'est pourquoi dans l'équation des populations $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ (9-28), le terme en w est négatif). Autrement dit, la croissance de l'onde lumineuse s'oppose au phénomène d'inversion des populations qui lui a donné naissance, et elle tend à détruire cette inversion. Tant que la différence de populations est légèrement au-dessus du seuil, l'intensité lumineuse continue cependant à croître. Le laser se stabilise quand la différence des populations est redescendue à la valeur seuil D_{seuil} ; parce que celle-ci correspond à un équilibre dynamique où la production d'énergie par émission stimulée est exactement égale à la perte totale d'énergie de la cavité. Cette analyse peut être éclairée, dans le prochain paragraphe, en suivant l'amplification de l'onde à chacun des allers et retours successifs dans la cavité.

10.2 Raisonnement sur un tour. Gain saturé et gain non saturé

Comme au chapitre précédent, nous reprenons le même problème par une méthode différente, en raisonnant sur la durée $\delta t = 2l/c$ d'un tour de cavité au lieu de raisonner sur une seconde. Nous avons introduit au §9.4 la notion de gain logarithmique global sur la durée d'un tour de cavité, *cf.* (9-20) et (9-21) ; il permet de calculer l'accroissement relatif d'énergie :

$$\gamma_{\text{global}} = \gamma_{\text{atome}} - [1 - R_A + 1 - R_B] = \gamma_{\text{atome}} - \gamma_{\text{seuil}} \approx \frac{\delta W}{W} = \frac{\delta w}{w} \quad (10\text{-}3)$$

Lorsque l'oscillation laser démarre, l'onde initiale très faible (le premier photon) est amplifiée avec le gain maximal $\gamma_{\text{atome}} = \gamma_P$ correspondant à la différence de populations maximale D_P produite par le pompage (*cf.* §9.5). L'intensité w de l'onde s'accroît à chaque tour de cavité ; et lorsqu'elle devient assez forte, elle produit un grand nombre d'émissions stimulées qui font diminuer la différence D et donc aussi le gain γ_{atome}. Tant que le gain atomique est supérieur au gain du seuil γ_{seuil} (égal en module aux pertes logarithmiques) la variation d'énergie δW est positive et l'onde lumineuse continue à être amplifiée. Pour que celle-ci se stabilise il faut que le gain atomique γ_{atome} revienne

exactement à la valeur γ_{seuil}, c'est-à-dire que la différence des populations continue à diminuer jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur seuil D_{seuil}.

On sait calculer le gain atomique, qui est proportionnel à la différence des populations D (*cf.* (9-21) et (9-22)). On en déduit :

$$\frac{\gamma_P}{D_P} = \frac{\gamma_{\text{atome}}}{D} = \frac{\gamma_{\text{seuil}}}{D_{\text{seuil}}} = \frac{1 - R_A + 1 - R_B}{D_{\text{seuil}}} = 2\eta l \sigma_{21}(\nu) \qquad (10\text{-}4)$$

Lorsque nous avons calculé les solutions stationnaires D_S à intensité lumineuse w constante, sans pompage (8-12) ou avec pompage (9-29), nous avons vu que, de toute façon, la différence des populations D_S s'approche de zéro lorsque l'intensité w est très grande. C'est le phénomène de saturation, étudié au §8.3 sans pompage, mais qui se produit de la même façon en présence de pompage (*cf.* remarque 9.5). Les intensités lumineuses produites à l'intérieur des cavités laser sont généralement assez fortes pour que l'on puisse parler de saturation ; c'est pourquoi on utilise couramment dans le langage des spécialistes les expressions suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{gain non saturé} & \gamma_P = 2\eta l \sigma_{21}(\nu) D_P \quad (\text{au démarrage ; } w \approx 0) \\ \text{gain saturé} & \gamma_s = 2\eta l \sigma_{21}(\nu) D_{\text{seuil}} = 1 - R_A + 1 - R_B \quad (w \text{ important}) \end{array}\right\} \qquad (10\text{-}5)$$

(« gain saturé » est une autre manière de désigner le gain atomique au seuil ; nous le notons γ_s pour rappeler à la fois « seuil » et « saturé »). Ces deux paramètres importants pour le fonctionnement des lasers peuvent être mesurés expérimentalement :

- pour γ_s une évaluation peut être faite à partir des caractéristiques des miroirs ; mais si l'on veut tenir compte de toutes les pertes de la cavité, il vaut mieux mesurer la largeur du pic d'Airy comparée à la distance des pics voisins $\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{1 - R_A + 1 - R_B}{2\pi} = \dfrac{\gamma_s}{2\pi}$ (*cf.* Fig. 9.3) ;
- pour γ_P on mesure l'amplification d'un faisceau lumineux extérieur, issu d'un autre laser mais *dont l'intensité est très faible*, après avoir supprimé un des miroirs de la cavité.

10.3 Bilan stationnaire des populations. Puissance de sortie

Nous recherchons maintenant quelles sont les conséquences des résultats obtenus au début de ce chapitre sur les équations différentielles des populations : l'hypothèse d'une intensité lumineuse constante nous a imposé une différence de population D constante aussi ; sa dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ est donc nulle. Mais puisque ces équations ne sont pas générales, il nous faut distinguer suivant les modèles.

10.3.1 Modèle à deux niveaux

L'équation différentielle (9-28) devient une équation algébrique :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow D_P - D\left(1 + \frac{w_{\text{cont}}}{w_r}\right) = 0 \tag{10-6}$$

et puisque la valeur de D est imposée, égale à celle du seuil, on en déduit l'intensité lumineuse constante w_{cont} dans la cavité du laser continu :

$$\boxed{w_{\text{cont}} = w_r\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right) = \frac{\mathcal{P} + A_{21}}{(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)}\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)} \tag{10-7}$$

Nous avons ainsi déterminé la valeur de l'intensité lumineuse qui permet d'abaisser l'écart de population de sa valeur D_P, à l'allumage du laser, à la valeur stationnaire D_{seuil} en fonctionnement continu.

On note le chassé croisé remarquable de ce chapitre : c'est l'équation différentielle de l'énergie qui nous avait permis de trouver la valeur de l'écart des populations ; maintenant c'est l'équation différentielle des populations qui nous permet de trouver la valeur de la densité d'énergie.

La connaissance de cette valeur est importante car elle nous permet de calculer la puissance de sortie continue ; en reprenant la formule (10-1) du début de ce chapitre (nous supprimons l'indice B du coefficient de transmission) :

$$\boxed{P_{\text{cont}} = T \times Sc\frac{w_{\text{cont}}}{2} = T \times Sc\frac{w_r}{2}\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right) = T \times Sc\frac{w_r}{2}\left(\frac{\gamma_P}{\gamma_s} - 1\right)} \tag{10-8}$$

On vérifie que cette puissance de sortie s'annule si l'on est juste au seuil $D_P = D_{\text{seuil}}$. On comprend sur cette formule l'intérêt d'utiliser à la fois un pompage fort produisant un écart initial important D_P des populations, et une cavité de bonne qualité qui abaisse au minimum la valeur du seuil D_{seuil}. En effet si D_P est à peine supérieur au seuil, la densité d'énergie w_{cont} n'est qu'une faible portion de la densité de référence w_r. Tandis que si le rapport D_P/D_{seuil} est très supérieur à l'unité, la densité d'énergie est très supérieure à w_r (ce sont les conditions de la saturation) et la puissance de sortie disponible est très élevée.

La dernière expression (à droite) de la puissance de sortie, utilisant les gains logarithmiques γ_P et γ_s permet une vérification expérimentale de cette formule puisque nous avons vu au paragraphe précédent la possibilité de mesurer expérimentalement les valeurs du gain saturé γ_s et du gain non saturé γ_P.

Lorsqu'on étudie en pratique le fonctionnement d'un laser continu, il est généralement facile de faire varier un paramètre (intensité du courant de décharge, intensité lumineuse de la lumière de pompage) qui est grossièrement proportionnel à la probabilité de pompage $\mathcal{P}$ définie en (9-23). On peut alors

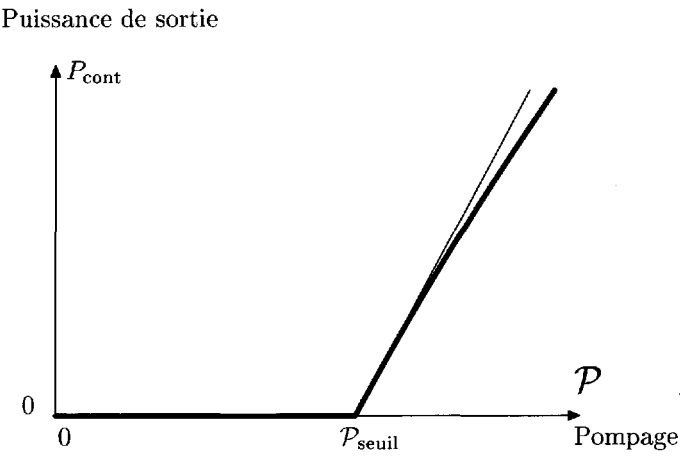


FIG. 10.1 – *Puissance sortie d'un laser continu en fonction de la probabilité de pompage* $\mathcal{P}$.

tracer expérimentalement une courbe analogue à celle de la figure 10.1 , où l'on a représenté la puissance de sortie P_{cont} en fonction de cette probabilité $\mathcal{P}$.

En reportant l'expression (9-27) de la valeur asymptotique D_P dans la formule (10-8) on obtient :

$$P_{\text{cont}} = TSc\frac{w_r}{2}\left(\frac{n}{D_{\text{seuil}}} \times \frac{\mathcal{P} - \dfrac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}}{\mathcal{P} + A_{21}} - 1\right)$$

Souvent le rapport n/D_{seuil} est beaucoup plus grand que l'unité et la valeur $\mathcal{P}_{\text{seuil}}$ qui annule la parenthèse (qui produit la différence $D_P = D_{\text{seuil}}$) est voisine de la valeur $\dfrac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}$ qui détermine l'inversion des populations. De faibles variations de $\mathcal{P}$ au-dessus de $\mathcal{P}_{\text{seuil}}$ entraînent alors une variation très rapide de la puissance P_{cont}. Cette variation est quasiment linéaire parce que seule la variation relative du numérateur $\left(\mathcal{P} - \dfrac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}\right)$ est importante, tandis que le dénominateur $(\mathcal{P} + A_{21})$ a une variation relative très faible. Bien sûr si l'on a la possibilité d'augmenter très fortement la valeur de $\mathcal{P}$, les phénomènes de saturations se font alors sentir, et l'on s'écarte de la variation linéaire.

10.3.2 Modèle à quatre niveaux

Le problème est un peu plus complexe puisque l'unique équation différentielle (9-30) est remplacée par un système de quatre équations différentielles couplées. Ce sont des équations différentielles à coefficients constants puisque par hypothèse w est constant. Si maintenant on impose à l'une des variables D d'être constante, c'est en fait impossible à réaliser sans que les autres variables ne soient aussi des constantes ; c'est-à-dire que nous devons chercher une solution stationnaire où toutes les dérivées des populations sont nulles : le système différentiel est transformé en un système d'équations algébriques linéaires permettant de calculer les valeurs de toutes les populations.

Nous supposons bien sûr que nous avons remplacé la variable n_2 par la variable D, suivant (9-32). Le système d'équations s'écrit :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}t} &= 0 = -\mathcal{P}n_0 + A_{10}n_1 + A_{30}n_3 \\
\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} &= 0 = \left(B_{21}\varphi(\nu)w + A_{21}\right)D - A_{21}\varepsilon n_1 \\
&\qquad \text{avec } \varepsilon = \frac{A_{10}}{A_{21}} - \frac{B_{12}}{B_{21}} > 0 \\
\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= 0 = -\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)\left(B_{21}\varphi(\nu)w + A_{21}\right)D \\
&\qquad + \left[A_{10} - A_{21}\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)\right]\frac{B_{12}}{B_{21}}n_1 + A_{32}n_3 \\
\frac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t} &= 0 = \mathcal{P}n_0 - \left(A_{30} + A_{32}\right)n_3 \\
n &= n_0 + n_1\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right) + D + n_3
\end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}9)$$

La cinquième équation, somme des populations, n'est pas indépendante, mais peut remplacer une des quatre autres équations, celle venant de $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ par exemple.

On voit sur ce système d'équations que le paramètre w, représentant l'intensité lumineuse résonnante, intervient seulement en facteur avec la variable D et qu'il n'intervient absolument pas dans les coefficients appliqués aux autres variables n_0, n_1, n_3. Lorsqu'on fait une combinaison linéaire de ces équations pour éliminer n_0, n_1, n_3, le résultat est de la forme :

$$\mathcal{C}_1 = \left(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 w\right)D$$

où $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont des constantes dépendant des coefficients $\mathcal{P}$, A_{ij} et B_{ij} ; c'est-à-dire que, en régime continu, l'écart des populations D dépend

de l'intensité résonnante w selon une loi simple de la forme :

$$D = \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 w} = \frac{D_P}{1 + \dfrac{w}{w_r}} \tag{10-10}$$

(nous avons remplacé $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_2$ par D_P puisque c'est la valeur de D quand $w = 0$; et $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_3$ par la notation w_r). Cette formule résulte du bilan stationnaire des populations et aurait une forme identique avec n'importe quel système de pompage. Nous généralisons ainsi dans les cas de pompage complexes, la formule déjà obtenue en (9-29) dans le cas du modèle à deux niveaux ; il est clair que la densité d'énergie de référence w_r dépend des coefficients appliqués aux autres variables n_0, n_1 et n_3, c'est-à-dire du type de pompage.

Ce résultat (10-10) s'appliquerait dans toute expérience où l'on irradierait les atomes avec une source lumineuse extérieure continue, résonnante entre deux niveaux. Elle a la même forme, en fonction de w, que l'équation (8-15) obtenue sans pompage ; la loi de saturation aux fortes intensités w est la même dans tous les cas. Nous l'appliquons ici au laser fonctionnant en régime continu ; et dans ce cas là nous savons que l'écart des populations doit être égal à celui du seuil D_{seuil}. Nous en déduisons l'intensité lumineuse dans la cavité du laser continu :

$$\boxed{w_{\text{cont}} = w_r \left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1 \right) = w_r \left(\frac{\gamma_P}{\gamma_s} - 1 \right)} \tag{10-11}$$

Nous avons ainsi généralisé à tous les types de pompage la formule (10-7) calculant l'intensité dans la cavité du laser ; et nous pouvons de même généraliser la formule (10-8) calculant la puissance utile sortant de la cavité. Il reste bien sûr à déterminer dans chaque cas particulier la densité d'énergie de référence w_r.

Remarque 10.1 – On peut, à titre d'exemple, achever le calcul exact dans le cas de notre modèle à quatre niveaux. Nous partons donc du système d'équations algébriques (10-9) et cherchons à éliminer n_0, n_1 et n_3 en évitant d'utiliser la troisième équation. On additionne la première et la quatrième équation :

$$0 = A_{10} n_1 - A_{32} n_3$$

On reporte ce résultat dans la quatrième équation :

$$\mathcal{P} n_0 = (A_{32} + A_{30})\, n_3 = A_{10} \left(1 + \frac{A_{30}}{A_{32}} \right) n_1$$

Ceci permet d'exprimer n_0 et n_3 en fonction de n_1 dans la cinquième équation :

$$n = D + n_1 \underbrace{\left[1 + \frac{B_{12}}{B_{21}} + \frac{A_{10}}{\mathcal{P}} \left(1 + \frac{A_{30}}{A_{32}} \right) + \frac{A_{10}}{A_{32}} \right]}_{\beta} = D + \beta n_1$$

On élimine n_1 en multipliant cette équation par $A_{21}\dfrac{\varepsilon}{\beta}$ et en l'additionnant à la deuxième équation :

$$n\frac{\varepsilon}{\beta}A_{21} = D\left[B_{21}\varphi(\nu)w + A_{21}\left(1+\frac{\varepsilon}{\beta}\right)\right]$$

$$\text{soit } D_P = D\left[\frac{w}{w_r}+1\right] \text{ avec } \left\{\begin{array}{rcl} D_P & = & n\dfrac{\varepsilon}{\beta+\varepsilon} \\ w_r & = & \dfrac{A_{21}}{B_{21}\varphi(\nu)}\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\beta}\right) \end{array}\right\} \qquad (10\text{-}12)$$

On retrouve la condition d'inversion, $\varepsilon > 0$, indépendante du pompage ; mais la condition de seuil ($D_P > D_{\text{seuil}}$) dépend de β et donc de $\mathcal{P}$. Si la probabilité de pompage $\mathcal{P}$ est faible, le nombre β peut être assez élevé, ce qui diminue D_P et rend plus difficile la condition de seuil ; l'intensité de référence w_r est alors très voisine de la simple quantité $A_{21}/B_{21}\varphi(\nu)$; et D_P est presque proportionnel à $\mathcal{P}$.

Application numérique à un petit laser à gaz (He-Ne par exemple). La transition laser est entre deux niveaux excités, et c'est la retombée rapide du niveau excité inférieur E_1 (A_{10} grand) qui permet l'inversion. Supposons une longueur d'onde visible $\lambda \simeq 0.6$ μm et une largeur de raie due aux collisions dans la décharge $\Delta\nu \simeq$ 100 MHz qui détermine le maximum de la courbe $\varphi(\nu_0) \simeq 1/\Delta\nu$:

$$w_r \simeq \frac{A_{21}}{B_{21}\varphi(\nu)} = \frac{8\pi h}{\lambda^3}\Delta\nu \simeq 0,7\cdot 10^{-5} \text{ J/m}^3$$

En supposant $T = 2/100$ pour la transmission du miroir et $S = 1$ mm^2 pour la section du faisceau (soit 10^{-6} m^2) :

$$P_{\text{sortie}} = TSc\frac{w_r}{2}\left(\frac{D_p}{D_{\text{seuil}}}-1\right) = 2\cdot 10^{-5} \text{ Watt}\left(\frac{D_p}{D_{\text{seuil}}}-1\right)$$

$$\frac{D_p}{D_{\text{seuil}}} \simeq 6 \quad\Longrightarrow\quad P_{\text{sortie}} \simeq 0.1 \text{ milliwatt}$$

10.4 Optimisation de la puissance de sortie

Nous discutons les conséquences de la formule (10-8) donnant la puissance de sortie du laser continu. En effet, cette formule contient deux facteurs T et D_{seuil} ayant des effets inverses, mais qui ne sont pas indépendants :

$$P_{\text{cont}} = TSc\frac{w_r}{2}\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}}-1\right) = TSc\frac{w_r}{2}\left(\frac{\gamma_P}{\gamma_s}-1\right)$$

Pour augmenter la puissance P_{cont} nous devrions augmenter la transmission T du miroir de sortie B ; mais comme $T < 1 - R_B$, ceci nous obligerait à augmenter les pertes de la cavité et donc à augmenter la différence des populations seuil D_{seuil} qui leur est proportionnelle (*cf.* (9-17)). Ceci est encore plus évident avec la seconde expression utilisant le gain saturé γ_s puisque :

$$\gamma_s = (1-R_A)+(1-R_B) \quad \textit{cf.}\ (10\text{-}5)$$

Mais l'augmentation du dénominateur, D_{seuil} ou γ_s, diminue considérablement la parenthèse et s'oppose donc à l'augmentation de puissance recherchée.

Il faut donc chercher un compromis entre ces deux facteurs contradictoires. Pour cela, nous devons analyser plus en détail les pertes de la cavité (*cf.* réf. [1]).

Jusqu'ici nous avons considéré en bloc dans le facteur $(1 - R_B)$ toutes les pertes de la cavité sur un trajet Aller de l'onde, et sous le facteur $(1 - R_A)$ toutes les pertes de la cavité sur un trajet Retour. Mais ces pertes peuvent être de natures diverses : diffraction dans la cavité, réflexions parasites sur les fenêtres, du milieu amplificateur, absorption dans le revêtement des miroirs, etc., et faisceau sortant à travers le miroir. Ce dernier, qui est fort utile pour l'utilisation de l'appareil, constitue une perte pour la cavité dans tous les calculs effectués jusqu'ici. Nous sommes donc amenés maintenant à distinguer parmi les pertes de la cavité : la perte du faisceau de sortie, qui nous est utile, et les vraies pertes, tout à fait inutiles, que nous avons énumérées auparavant. Le coefficient de transmission T représente la fraction de l'énergie de la cavité qui est perdue (de manière utile) par la cavité à chaque tour complet de l'onde, puisque pendant cette durée $\delta t = \dfrac{2l}{c}$ la totalité de l'onde a subi une réflexion et une seule sur le miroir de sortie. De la même manière, nous appellerons maintenant p la fraction de l'énergie qui est vraiment perdue (de manière inutile) par la cavité pendant chaque tour complet de l'onde, pour l'ensemble des processus énumérés plus haut (diffraction, réflexions, absorption...).

Le gain logarithmique au seuil (gain saturé) γ_s est égal à la totalité des pertes logarithmiques de la cavité sur un tour ; ce qui nous permet de l'écrire sous une nouvelle forme :

$$\gamma_s = (1 - R_A) + (1 - R_B) = T + p \tag{10-13}$$

au lieu de distinguer les pertes Aller et les pertes Retour, nous distinguons maintenant les pertes utiles dans le faisceau de sortie T et les pertes vraiment inutiles p. Ce qui nous permet d'écrire la puissance de sortie sous la forme :

$$P_{\text{cont}} = Sc\frac{w_r}{2}\underbrace{T\left(\frac{\gamma_P}{T+p} - 1\right)}_{f(T)} = Sc\frac{w_r}{2}f(T) \tag{10-14}$$

Nous cherchons maintenant quel coefficient de transmission T il faut donner au miroir de sortie pour obtenir le maximum de la fonction $f(T)$, en supposant que les pertes p sont déterminées. Nous calculons la dérivée de $f(T)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\gamma_P}{T+p} - 1\right) - T\frac{\gamma_P}{(T+p)^2} = \frac{p\gamma_P}{(T+p)^2} - 1$$

la dérivée s'annule lorsque $(T+p)^2 = p\gamma_P$ soit

$$\boxed{T_{\text{Max}} + p = \sqrt{p\gamma_P}} \tag{10-15}$$

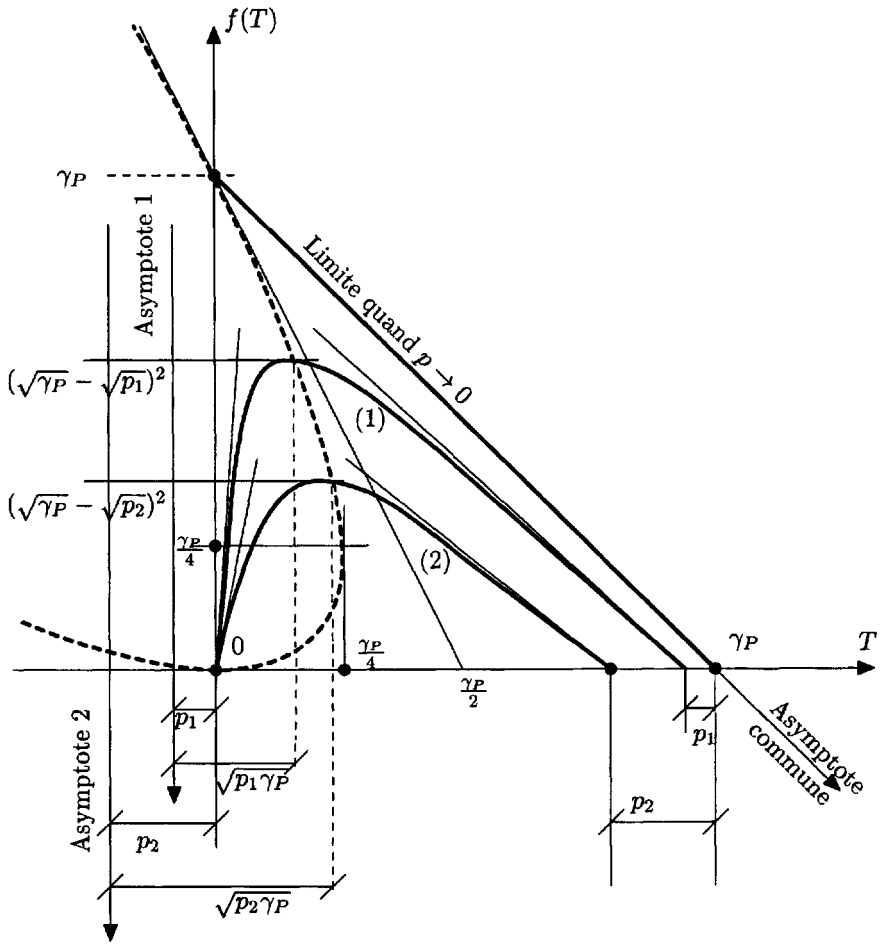


FIG. 10.2 - *Variation de la puissance de sortie du laser en fonction de la transmission du miroir de sortie, pour un pompage fixé (γ_P fixé), mais plusieurs valeurs de pertes p (ce sont des morceaux d'hyperboles ayant toute la même asymptote à 45° ($f+T=\gamma_p$) mais des asymptotes verticales distinctes $T=-p$). On démontre que le lieu des maxima est une parabole dont l'axe de symétrie est à 45° des axes T et $f(T)$; c'est la courbe en tiretés épais.*

la valeur maximale de f est $f(T_{\text{Max}}) = (\sqrt{\gamma_P} - \sqrt{p})^2$. La figure 10.2 représente les courbes de variation de $f(T)$ pour plusieurs valeurs des pertes p, la force du pompage étant fixée (gain non saturé γ_P fixé). À la valeur maximale de P_{cont} correspond à l'intérieur de la cavité une densité

d'énergie w_{cav} :

$$w_{\text{cav}} = \frac{w_r f(T)}{T} = w_r \left(\frac{\gamma_P}{T+p} - 1 \right) = w_r \left(\sqrt{\frac{\gamma_P}{p}} - 1 \right)$$

mais l'intensité maximale dans la cavité serait obtenue pour $T = 0$, lorsqu'il n'y a plus de faisceau de sortie. Les courbes de la figure 10.2 permettent de choisir le miroir le mieux approprié (valeur de T) au fonctionnement du laser (*cf.* réf. [1]).

10.5 Bilan d'énergie. Compétition entre les émissions spontanée et stimulée

Ce paragraphe n'introduit pas de notion nouvelle. Il réexamine les processus internes au milieu amplificateur afin d'en donner une image intuitive plus concrète. Nous avons traité tout ce chapitre à partir des équations différentielles établies au chapitre 9, et qui seront indispensables au chapitre 11 pour étudier les régimes de fonctionnement variables au cours du temps. *Mais dans le cas du régime continu, à la différence des régimes variables, il est nécessaire que le bilan énergétique des échanges soit équilibré à chaque instant.* Un certain nombre des résultats de ce chapitre 10 peuvent être retrouvés simplement à partir de ce bilan d'énergie instantané.

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle n°1 du chapitre 9, modèle à deux niveaux, où nous disposons de relations simples entre les populations n_a, n_b et l'écart pondéré D :

$$n_b = \frac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} \left(D + n \frac{B_{12}}{B_{21}} \right) \qquad n_a = \frac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} (n - D) \quad \textit{cf.}\ (8\text{-}10)$$

Les échanges d'énergie entre le milieu amplificateur, l'onde et l'extérieur sont mesurés en nombre de quanta d'énergie $h\nu$, et comptabilisés sur une seconde :

1. *avec le pompage seul, en l'absence de cavité*, l'énergie donnée aux atomes par le pompage doit équilibrer l'énergie rendue à l'extérieur par l'émission spontanée. Nous avons appelé D_P l'écart de populations dans ce cas

$$\left.\begin{array}{ll} \text{quanta/seconde reçus du pompage} & \mathcal{P} n_a = \mathcal{P}(n - D_P) \dfrac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} \\ \text{quanta/seconde émis spontanément vers l'extérieur} & A_{21} n_b = A_{21} \left(D_P + n \dfrac{B_{12}}{B_{21}} \right) \dfrac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} \end{array}\right\} \quad (10\text{-}16)$$

l'équilibre du bilan d'énergie donne :

$$\mathcal{P}(n - D_P) = A_{21}\left(D_P + n\frac{B_{12}}{B_{21}}\right) \quad \text{soit} \quad D_P = n\frac{\mathcal{P} - \dfrac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}}{\mathcal{P} + A_{21}} \qquad (10\text{-}17)$$

on retrouve bien la formule (9-27) ;

2. *avec la cavité, en régime continu*, les atomes rendent de l'énergie : à l'extérieur par émission spontanée et à l'onde laser par émission stimulée. Nous avons vu que l'écart de population dans ce cas est l'écart seuil D_s.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{quanta/seconde reçus du pompage} & \mathcal{P}n_a = \mathcal{P}(n - D_{\text{seuil}})\dfrac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} \\ \text{quanta/seconde émis spontanément vers l'extérieur} & A_{21}n_b = A_{21}\left(D_{\text{seuil}} + n\dfrac{B_{12}}{B_{21}}\right)\dfrac{1}{1 + \dfrac{B_{12}}{B_{21}}} \\ \text{quanta/seconde recueillis par l'onde (différence de l'émission induite et de l'absorption)} & B_{21}\varphi(\nu)wD_{\text{seuil}} \end{array}\right\} \qquad (10\text{-}18)$$

le bilan équilibré s'écrit :

$$\mathcal{P}(n - D_{\text{seuil}}) = A_{21}\left(D_{\text{seuil}} + n\frac{B_{12}}{B_{21}}\right) + \left(1 + \frac{B_{12}}{B_{21}}\right)B_{21}\varphi(\nu)wD_{\text{seuil}} \qquad (10\text{-}19)$$

soit $n\left(\mathcal{P} - \dfrac{B_{12}}{B_{21}}A_{21}\right) = D_{\text{seuil}}\left[\mathcal{P} + A_{21} + (B_{21} + B_{12})\varphi(\nu)w\right]$ ou en divisant par $(\mathcal{P} + A_{21})$ les deux membres de l'égalité :

$$D_P = D_{\text{seuil}}\left[1 + \frac{(B_{12} + B_{21})\varphi(\nu)}{\mathcal{P} + A_{21}}w\right] = D_{\text{seuil}}\left[1 + \frac{w}{w_r}\right]$$

nous retrouvons bien l'énergie de référence w_r introduite en (9-28) et rappelée en (10-7).

Tenant compte de $D_P > D_{\text{seuil}}$, la comparaison des deux bilans, (10-17) sans cavité et (10-19) dans la cavité laser, montre que l'énergie émise dans l'onde laser provient pour partie d'un accroissement de l'énergie fournie par le pompage et pour une autre partie de la diminution de l'énergie émise spontanément vers l'extérieur. L'émission stimulée, en abaissant l'écart des populations D

de D_P à D_{seuil}, diminue l'énergie perdue par émission spontanée, et transfère cette énergie dans l'onde stimulée. Attention ! on ne récupère dans le faisceau de sortie que la fraction $T/(T+p)$ de l'énergie de l'onde stimulée.

On observe bien expérimentalement cette diminution de l'émission spontanée au moment où l'onde laser s'allume dans la cavité. Mais pour l'observer facilement, il faut que la transition laser ait une largeur homogène, c'est-à-dire que la fréquence du maximum de la fonction $\varphi(\nu)$ soit la même pour tous les atomes. Dans le cas contraire, cas d'une largeur inhomogène (*cf.* §3.4 ou chapitre 13), une faible fraction des atomes seulement est en interaction avec l'onde laser et tous les autres atomes, sans interaction avec l'onde, émettent une émission spontanée constante, qui atténue la visibilité du phénomène.

Remarque 10.2 – Dans le cas du modèle n°2, à quatre niveaux, ce genre de bilan est plus difficile car il n'y a pas de relation directe simple permettant de calculer les populations n_1 et n_2 à partir du seul écart pondéré D. On trouve une solution simple dans le cas particulier, envisagé à la fin du chapitre 9, où la probabilité de pompage $\mathcal{P}$ est beaucoup plus petite que toutes les probabilités spontanées $A_{i,j}$, et où le niveau fondamental E_0 joue le rôle d'un réservoir surabondant dont la population est presque constante. Dans ces conditions le terme de pompage devient pratiquement un flux constant $\mathcal{P}n$ (nous supposons $A_{30} = 0$). Nous supposons en outre que la probabilité A_{10} qui vide l'état inférieur de la transition est beaucoup plus élevée que toutes les autres probabilités, en sorte que la population de l'état E_1 reste quasiment nulle :

$$\mathcal{P} \ll \text{ tous } A_{i,j} \text{ (sauf} A_{10}) \ll A_{10} \Longrightarrow n_1 \approx 0 \tag{10-20}$$

1. avec pompage seul en l'absence de cavité

$$\left.\begin{array}{ll} \text{quanta/seconde reçus du pompage} & \mathcal{P}n \\ \text{quanta/seconde émis spontanément} & A_{21}n_2 \approx A_{21}D = A_{21}D_P \end{array}\right\} \tag{10-21}$$

le bilan donne $D_P = n\dfrac{\mathcal{P}}{A_{21}}$ (formule compatible avec (10-12) compte tenu des hypothèses (10-20)) ;

2. avec la cavité en régime continu

$$\left.\begin{array}{ll} \text{quanta/seconde reçus du pompage} & \mathcal{P}n \quad \text{(inchangé)} \\ \text{quanta/seconde émis spontanément} & A_{21}n_2 \approx A_{21}D_{\text{seuil}} \\ \text{quanta/seconde recueillis dans l'onde} & B_{21}\varphi(\nu)wD_{\text{seuil}} \\ \quad \text{(émission induite moins absorption)} & \end{array}\right\} \tag{10-22}$$

le bilan : $\mathcal{P}n = [A_{21} + B_{21}\varphi(\nu)w]D_{\text{seuil}}$

$$\text{soit} \quad D_P = n\frac{\mathcal{P}}{A_{21}} = D_{\text{seuil}}\left[1 + \frac{B_{21}\varphi(\nu)}{A_{21}}w\right] = D_{\text{seuil}}\left[1 + \frac{w}{w_r}\right] \tag{10-23}$$

(l'intensité de référence obtenue est compatible avec la formule (10-12) compte tenu du fait que les hypothèses (10-20) entraînent $\dfrac{\varepsilon}{\beta} \approx \dfrac{\mathcal{P}}{A_{21}} \ll 1$). Dans ce cas,

l'énergie fournie par le pompage reste constante ; et l'énergie émise dans l'onde laser est intégralement prise aux dépens de la diminution de l'émission spontanée ; les deux termes du crochet 1 et w/w_r sont proportionnels respectivement à l'émission spontanée et à l'émission stimulée. La fraction de l'énergie convertie dans l'onde stimulée vaut $w/(w + w_r)$.

Bibliographie

[1] P. Laures, Phys. Lett. **10**, 61 (1964).

Chapitre 11

Régimes variables ou impulsionnels

NOUS VOULONS maintenant donner une idée des régimes de fonctionnement où l'intensité lumineuse est variable au cours du temps, en tirant les conséquences des équations différentielles établies au chapitre 9. Ces systèmes d'équations différentielles couplées peuvent donner lieu à des problèmes très complexes, car il s'agit d'équations différentielles *non linéaires*, contenant le produit $D(t)\,w(t)$ des deux variables importantes : intensité lumineuse dans la cavité $w(t)$ et écart des populations $D(t)$. Nous nous restreindrons donc au modèle n°1 de pompage à deux niveaux, qui permet de se limiter à ces deux variables w et D. Et même dans ce cadre limité, l'exposé sera le plus souvent qualitatif, car on ne peut pas trouver de solutions générales sous une forme mathématique simple.

11.1 Oscillations de relaxation, conséquence des équations non linéaires couplées

Dans l'hypothèse d'un faisceau cylindrique à « bords nets », l'équation différentielle (9-18) écrite pour l'énergie lumineuse totale dans la cavité W_{cav} peut être transposée pour la densité d'énergie $w = W_{\text{cav}}/Sl$, qui intervient dans l'équation différentielle de l'écart des populations (9-28). Nous obtenons ainsi le système couplé :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{D(t)}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)\frac{1}{\tau_c}w(t) && \text{(équation générale)} \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= (\mathcal{P} + A_{21})\left[D_P - D(t)\left(1 + \frac{w(t)}{w_r}\right)\right] && \text{(équation provenant d'un modèle simplifié)} \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}1)$$

Ces deux équations contiennent toutes les deux un terme produit des deux variables $D(t)\,w(t)$ représentant l'effet de l'émission stimulée, proportionnel à la fois à l'écart des populations $D(t)$ et à l'intensité lumineuse $w(t)$. Ce terme a des signes opposés dans les deux dérivées puisque l'émission stimulée augmente l'énergie lumineuse (signe +) mais diminue l'écart des populations (signe −).

Ce signe moins dans l'équation différentielle des populations correspond au fait que l'émission stimulée s'oppose à l'inversion de population qui lui donne naissance. Ce signe moins, joint à la non-linéarité des équations, favorise des solutions oscillantes qui sont fréquemment observées, surtout quand le pompage $\mathcal{P}$ est intense et la différence D_P est importante ($D_P \gg D_{\text{seuil}}$).

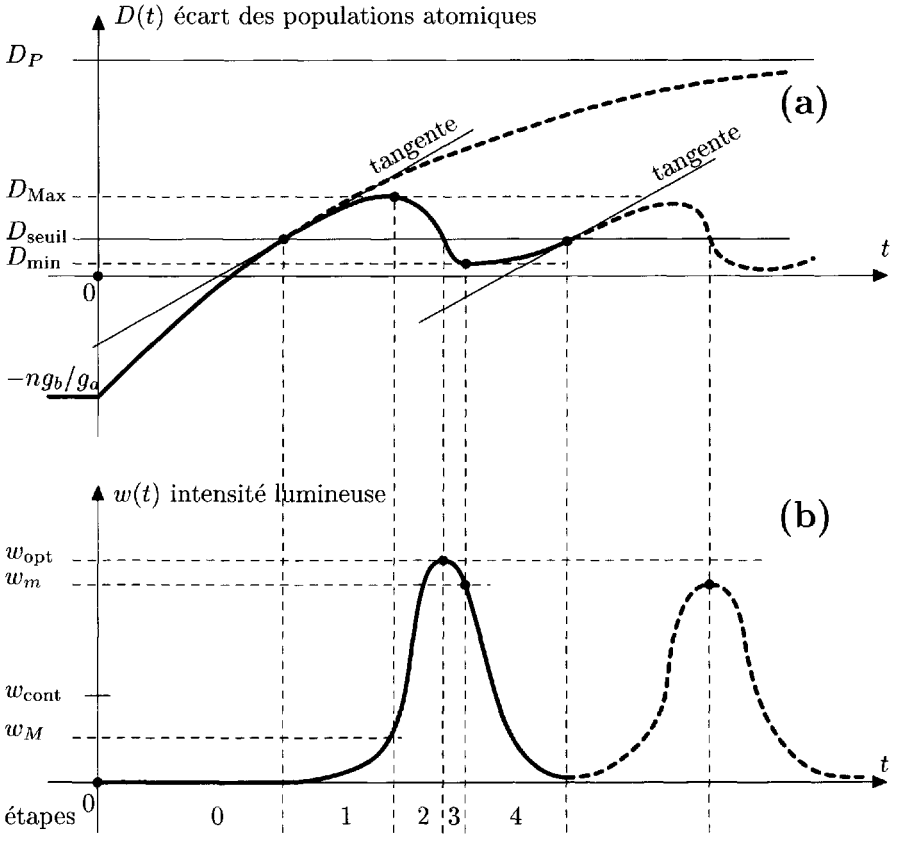
Les mathématiques ne fournissent pas de solutions générales à ces équations non linéaires ; mais si l'on connaît les valeurs numériques des paramètres, il est possible de calculer une solution numérique par intégration pas à pas. Nous allons essayer maintenant de suivre qualitativement une telle intégration pas à pas en interprétant physiquement chaque étape de cette évolution. Nous choisissons un cas où $D_P \gg D_{\text{seuil}}$ (*cf.* Fig. 11.1).

Étape 0. Nous partons d'une situation d'équilibre thermique et à l'instant zéro nous mettons en route le procédé de pompage à sa valeur $\mathcal{P}$. Il n'y a pas de lumière dans la cavité ($w = 0$). La solution $D(t)$ a été calculée au chapitre 9 formule (9-26), et a été représentée sur la figure 9.5 : l'écart $D(t)$ croît selon une exponentielle qui tend vers l'asymptote horizontale D_P. Mais cette étape s'arrête quand $D(t)$ atteint la valeur du seuil D_{seuil} (la différence avec la figure 9.5, c'est que les deux miroirs de la cavité sont en place).

Étape 1. Lorsque $D(t)$ dépasse D_{seuil}, l'amplification de lumière devient possible ; et à partir d'un premier photon spontané dirigé dans la bonne direction l'intensité $w(t)$ peut commencer à croître dans la cavité. Le début de cette croissance est extrêmement lent parce que dans la formule de la dérivée $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$, nous avons initialement le facteur extrêmement petit $w = h\nu/Sl$: $w(t)$ met un certain temps à s'écarter de sa tangente horizontale ; et corrélativement $D(t)$ continue à croître, et met un certain temps à s'écarter notablement de la courbe exponentielle de l'étape zéro (prolongée en trait tireté). Vers la fin de l'étape 1, l'intensité $w(t)$ a crû de manière significative, ce qui diminue notablement la pente $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ de l'écart des populations ; jusqu'à ce que $w(t)$ atteigne une valeur particulière w_M qui, compte tenu de la valeur de D, annule la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$, c'est-à-dire que $D(t)$ passe par une valeur maximale D_{Max} telle que :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D_P = D_{\text{Max}}\left(1 + \frac{w_M}{w_r}\right) \tag{11-2}$$

Étape 2. La dérivée de $D(t)$ est devenue négative donc $D(t)$ diminue. Cependant l'intensité $w(t)$ continue à croître puisque $D(t) > D_{\text{seuil}}$;



étape		0	1	2	3	4
D		$D < D_{\text{seuil}}$	$D > D_{\text{seuil}}$		$D < D_{\text{seuil}}$	
$\left\{\right.$	$\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$	zéro	+	+	−	−
$\left.\right\}$	w	zéro	faible ↗	↗	↘	↘
$\left\{\right.$	$\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$	+	+	−	−	+
$\left.\right\}$	D	↗	↗	↘	↘	↗

FIG. 11.1 – *Oscillation de relaxation d'un laser. Variation temporelle de l'écart des populations (a) et de l'intensité lumineuse dans la cavité (b).*

et même la dérivée de $w(t)$ continue momentanément à croître à cause du facteur w qui augmente très vite tandis que $D(t)$ au début diminue lentement. Bien sûr la diminution de $D(t)$ s'accélère et lorsque $D(t)$ repasse par la valeur seuil, la dérivée $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ s'annule ; donc l'intensité $w(t)$ dans la cavité passe par un optimum w_{opt} (nous choisissons la notation « optimum » pour éviter la confusion avec l'écart maximal D_{Max}). À la fin de cette étape 2, l'intensité $w(t)$ très grande, voisine de l'optimum, fait que le terme négatif dans la dérivée de $D(t)$ est extrêmement grand et l'emporte largement sur D_P ; c'est-à-dire que la décroissance de $D(t)$ est très rapide, avec une forte pente négative.

Étape 3. Les deux variables $D(t)$ et $w(t)$ décroissent simultanément. Au début de l'étape, la décroissance de $D(t)$ est très rapide, tandis que celle de $w(t)$ est encore lente ; mais de toute façon le produit $D(t)\,w(t)$ décroît rapidement et le terme négatif dans la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ voit sa valeur absolue diminuer jusqu'à retrouver la valeur D_P qui annule la dérivée, pour une certaine valeur w_m qui correspond à un écart minimal D_{min}, nécessairement positif, tel que :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad D_P = D_{\mathrm{min}} \left(1 + \frac{w_m}{w_r}\right) \tag{11-3}$$

Le rapprochement de cette équation avec l'équation (11-2), compte tenu de $D_{\mathrm{Max}} \gg D_{\mathrm{min}}$, entraîne que $w_M \ll w_m$ (*cf.* Fig. 11.1).

Étape 4. L'écart $D(t)$ reste inférieur au seuil, donc l'intensité lumineuse $w(t)$ continue à décroître. Au contraire l'écart $D(t)$ se remet à croître lentement d'abord, puis plus rapidement quand $w(t)$ a fortement diminué (parce que cela diminue le terme négatif dans $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$). Cette étape se termine quand $D(t)$ atteint à nouveau la valeur seuil ; c'est-à-dire qu'à ce moment là $w(t)$ passe par une valeur minimum qui sera généralement très proche de zéro.

Suite après l'étape 4. Si le minimum de $w(t)$ est vraiment nul, les conditions à la fin de l'étape 4 sont exactement les mêmes qu'au début de l'étape 1 : mêmes valeurs des deux variables D_{seuil} et $w = 0$; et par suite mêmes valeurs des dérivées (les deux tangentes à la courbe $D(t)$ sont parallèles, *cf.* Fig. 11.1). Dans ces conditions l'intégration des équations différentielles à partir de la fin de l'étape 4 donnera à nouveau une solution identique à celle de l'étape 1, puis par continuité des solutions identiques à celles des étapes 2, 3 et 4, etc. La solution est donc une oscillation périodique, mais qui se distingue parfaitement des oscillations sinusoïdales courantes par l'allure très dissymétrique de la courbe à l'intérieur de chaque période. Cette dissymétrie est une conséquence directe de la non-linéarité ; ce type d'oscillation est observé dans d'autres phénomènes physiques (mécaniques ou thermiques) et porte le nom d'oscillation de relaxation.

Si le minimum de $w(t)$ à la fin de l'étape 4 n'est pas rigoureusement nul, la solution calculée sera un peu différente tout en conservant la même allure générale qui n'est plus rigoureusement périodique, mais seulement « pseudo-périodique » (*cf.* courbe ponctuée sur la figure 11-1) ; et selon les valeurs des paramètres numériques deux cas peuvent se produire :

1. l'amplitude des oscillations s'ajuste progressivement de telle manière que la valeur minimum de $w(t)$ au début de la pseudo-période soit égale au nouveau minimum à la fin de la pseudo-période. Après quelques instants d'ajustement, la solution devient réellement périodique ;

2. l'amplitude des oscillations est régulièrement amortie ; et comme l'écart des populations $D(t)$ oscille autour de la valeur D_{seuil}, on tend vers une situation limite où $D(t)$ reste constant et égal à D_{seuil}. C'est le régime de fonctionnement continu étudié au chapitre précédent, et dont l'intensité lumineuse w_{cont} est donnée par l'équation (10-6) qui ressemble à (11-2) et (11-3) et nous permet d'écrire en les rassemblant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \\ D_P = D_{\text{Max}}\left(1 + \dfrac{w_M}{w_r}\right) = D_{\text{seuil}}\left(1 + \dfrac{w_{\text{cont}}}{w_r}\right) = D_{\text{min}}\left(1 + \dfrac{w_m}{w_r}\right)\end{array}} \qquad (11\text{-}4)$$

avec les relations d'ordre :

$$D_P > D_{\text{Max}} > D_{\text{seuil}} > D_{\text{min}} \quad \Longrightarrow \quad w_M < w_{\text{cont}} < w_m$$

En résumé, quelle que soit l'issue de ces oscillations de relaxation, on retiendra la comparaison des oscillations respectives des deux variables $D(t)$ et $w(t)$: l'intensité lumineuse $w(t)$ est toujours en retard d'une étape par rapport à l'écart des populations $D(t)$, puisque $w(t)$ passe par un maximum quand $D(t)$ est déjà en pleine décroissance avec une pente rapide ; et $w(t)$ passe par un minimum quand l'écart $D(t)$ recommence à croître de manière rapide. Par comparaison avec deux grandeurs qui auraient des oscillations sinusoïdales, on pourrait dire que $w(t)$ est déphasée par rapport à $D(t)$, avec un retard d'un quart de période, puisqu'il y a quatre étapes dans la durée d'une période (mais ici les « quarts de période » sont de durées inégales), ou encore que $w(t)$ est en « quadrature retard » par rapport à $D(t)$. Cette relation entre les deux variables $w(t)$ et $D(t)$ vient du fait que la dérivée $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ dépend de l'amplitude $D(t)$ de l'autre variable avec le signe +, tandis que la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ dépend de l'amplitude $w(t)$ avec le signe −, comme nous l'avons déjà signalé après l'écriture du système différentiel (11-1) : c'est une propriété fondamentale du phénomène d'émission stimulée, qui est indépendante des détails de chaque modèle de pompage. Les oscillations de relaxation sont

provoquées par ce retard de l'intensité $w(t)$ sur l'écart des populations $D(t)$: un pompage très intense a le temps de créer un écart $D(t)$ très important pendant la durée de ce retard. Et lorsque l'intensité devient importante, la valeur extrêmement élevée du produit $D(t)\,w(t)$ produit une émission stimulée extrêmement intense, qui vide brutalement l'état supérieur de la transition, et provoque la quasi-extinction du laser. Celui-ci se rallumera ensuite de manière plus progressive, avant de recommencer... De telles oscillations de relaxation étaient observées dès le début de l'histoire des lasers (réf. [1]).

11.2 Démarrage d'un laser continu

Nous avons vu que les oscillations de relaxation peuvent être amorties et conduire ensuite à un régime de fonctionnement continu. Mais ces oscillations de relaxation ne sont pas non plus automatiques ; elles sont souvent liées à un pompage $\mathcal{P}$ très intense ($D_P \gg D_{\text{seuil}}$). Elles dépendent aussi de tous les paramètres inclus dans les équations différentielles, et de la manière dont on déclenche le démarrage du laser. Une discussion générale n'est guère possible et nous nous contenterons de décrire deux expériences où les conditions de déclenchement sont très différentes.

11.2.1 Laser à fibre optique, dopée au Nd^{3+}, démarré par l'irradiation du pompage optique

Les fibres optiques, dopées avec des ions appropriés, sont utilisées comme amplificateurs de lumière dans les transmissions téléphoniques à grande distance, pour compenser l'atténuation du signal lumineux après propagation sur des centaines de kilomètres dans une fibre optique normale. Une telle fibre optique dopée peut aussi être utilisée comme milieu amplificateur dans un laser ; il suffit de placer des miroirs aux deux extrémités de la fibre. Le faisceau lumineux interne à la cavité se trouve confiné dans le petit diamètre de la fibre, malgré sa grande longueur (ici deux mètres), ce qui assure un parfait recouvrement du milieu amplificateur (coefficient de remplissage η voisin de l'unité). À cette longueur de la cavité correspond une durée d'aller et retour dans la cavité assez longue ($\approx$ 15 nanosecondes) qui facilite les observations en allongeant toutes les constantes de temps du problème. L'ion Nd^{3+}, dilué dans un cristal ou dans un verre, constitue un système classique à quatre niveaux, facile à pomper optiquement en lumière blanche grâce à sa large bande d'absorption (*cf.* Fig. 8.5b), et qui amplifie ou émet dans le proche infrarouge au voisinage de la longueur d'onde $\lambda = 1,08\ \mu$m. Pour pomper à l'intérieur de la fibre, il est plus facile d'utiliser un faisceau laser (lumière verte de l'Argon à $\lambda = 0,514\ \mu$m) qui entre facilement par l'extrémité de la fibre, à travers le miroir dichroïque de la cavité (réfléchissant pour $1,06\ \mu$m mais transparent pour $0,514\ \mu$m).

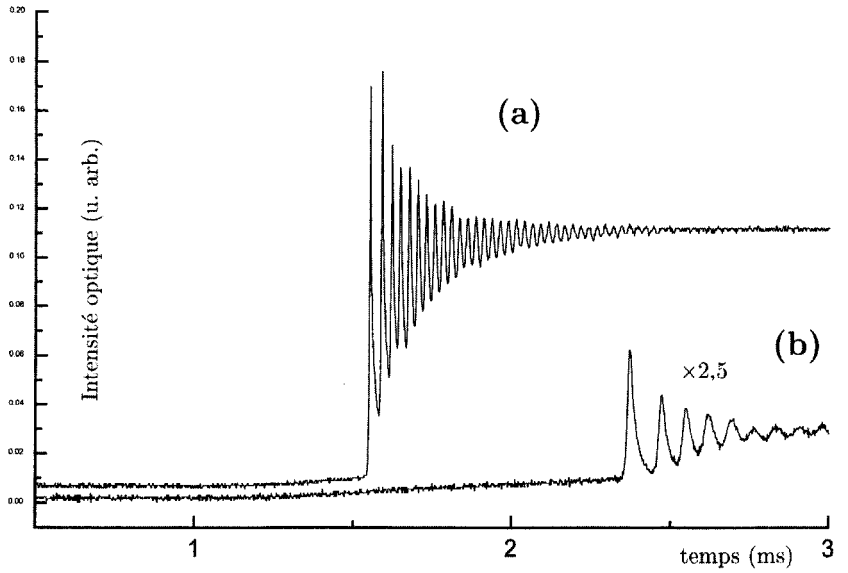


FIG. 11.2 – *Démarrage d'un laser à fibre dopée au Nd^{+++}; (a) pompage fort (b) pompage faible (l'échelle verticale est multipliée par 2,5) le pompage optique commence à l'instant zéro de l'axe des temps, situé à gauche en dehors de la figure. (Communiqué par le laboratoire de l'ENSSAT à Lannion ; cf. référence [2].)*

Dans l'expérience présente (Fig. 11.2 ; réf. [2]), on envoie brusquement la lumière de pompage à un instant connu, choisi comme instant zéro sur les enregistrements de la figure 11.2, où l'on mesure la puissance lumineuse $P(t)$ sortant du laser : on observe le temps mort nécessaire pour atteindre la différence de population seuil, avant le brusque démarrage de l'émission stimulée : ce temps mort est beaucoup plus court sur la courbe (a) enregistrée avec une forte intensité de pompage que sur la courbe (b) enregistrée avec une intensité de pompage beaucoup plus faible (la puissance $P(t)$ émise par le laser dans le cas (a) est presque dix fois supérieure à celle du cas (b) ; la courbe (b) a dû être enregistrée avec une échelle verticale fortement dilatée).

On observe ensuite les oscillations de relaxation de l'émission stimulée qui illustrent l'analyse faite dans le paragraphe précédent de ce chapitre. Ces oscillations de relaxation sont amorties assez rapidement et l'on tend vers la puissance constante du laser continu. On ne cherchera pas à interpréter de manière trop précise les courbes de la figure 11.2 ; les phénomènes complexes à l'intérieur de la fibre obligent à utiliser des modèles plus sophistiqués que celui conduisant aux formules (11-1).

11.2.2 Laser à décharge de très faible puissance démarré par déblocage instantané de la cavité

Il s'agit d'un laser Hélium-Néon standard pompé par une décharge électrique. Une expérience analogue à la précédente n'est pas possible parce que la durée d'établissement comme la durée d'extinction d'une décharge est beaucoup trop longue, de l'ordre de une milliseconde. Pour provoquer un brusque démarrage du laser, on ne peut donc pas jouer sur le pompage, mais seulement sur la cavité (réf. [3]). La décharge est allumée à très faible niveau (dix fois moins que la puissance nominale environ) pour assurer de bonnes conditions de stabilité, en particulier le fonctionnement sur un seul mode longitudinal de la cavité, c'est-à-dire une seule fréquence. Mais le fonctionnement du laser est bloqué par un écran qui occulte un des deux miroirs. Tenant compte du très faible diamètre du faisceau laser dans la cavité (inférieur à 1 mm, voire 0,1 mm) il est possible d'arracher cet écran avec une vitesse suffisante pour que la durée de dévoilement de ce diamètre soit plus petite ou du même ordre que 1 microseconde, c'est-à-dire puisse être considérée comme quasi instantanée. Mais la technique utilisée dans cette expérience ne permet pas un repérage précis de l'instant du déblocage.

La figure 11.3 représente la puissance de sortie du laser enregistrée en fonction du temps, après le déblocage de la cavité. Mais l'instant zéro de l'axe des temps est choisi un peu arbitrairement, à partir du moment où l'intensité lumineuse est assez forte pour permettre une mesure précise ; l'auteur de l'expérience précise que le déblocage de la cavité s'est produit environ 10 μs à 20 μs auparavant, sans qu'il puisse, avec précision, déterminer cet instant. Sur la figure (a), reproduite d'après la publication de l'auteur, la puissance de sortie est mesurée en coordonnée logarithmique ; alors que sur la figure (b) nous avons retracé les mêmes courbes avec une échelle linéaire normale, afin que l'œil du lecteur réalise mieux le démarrage très progressif. L'expérience a été réalisée avec deux régimes de décharge différents correspondant à des puissances de sortie du laser continu respectivement de 36 μW et 18 μW ; la durée entre l'instant de déblocage et l'instant 0 (arbitrairement choisi) est beaucoup plus longue avec la faible puissance 18 μW qu'avec la puissance supérieure 36 μW. Sur le diagramme logarithmique (a) on voit que les parties basses des deux courbes correspondantes sont rectilignes, mettant en évidence une variation exponentielle avec le temps (jusqu'à environ 1/3 de la puissance continue). Cette variation est aussi une bonne illustration des équations différentielles (11-1) dans la mesure où elles fonctionnent ici en trois temps.

1er temps. L'écran empêche la croissance de l'intensité lumineuse stimulée $w(t)$; seule fonctionne l'équation différentielle des populations ; et $D(t)$ prend rapidement sa valeur asymptotique D_P ; mais tout se passe dans le noir et l'on n'observe rien (hormis l'émission spontanée).

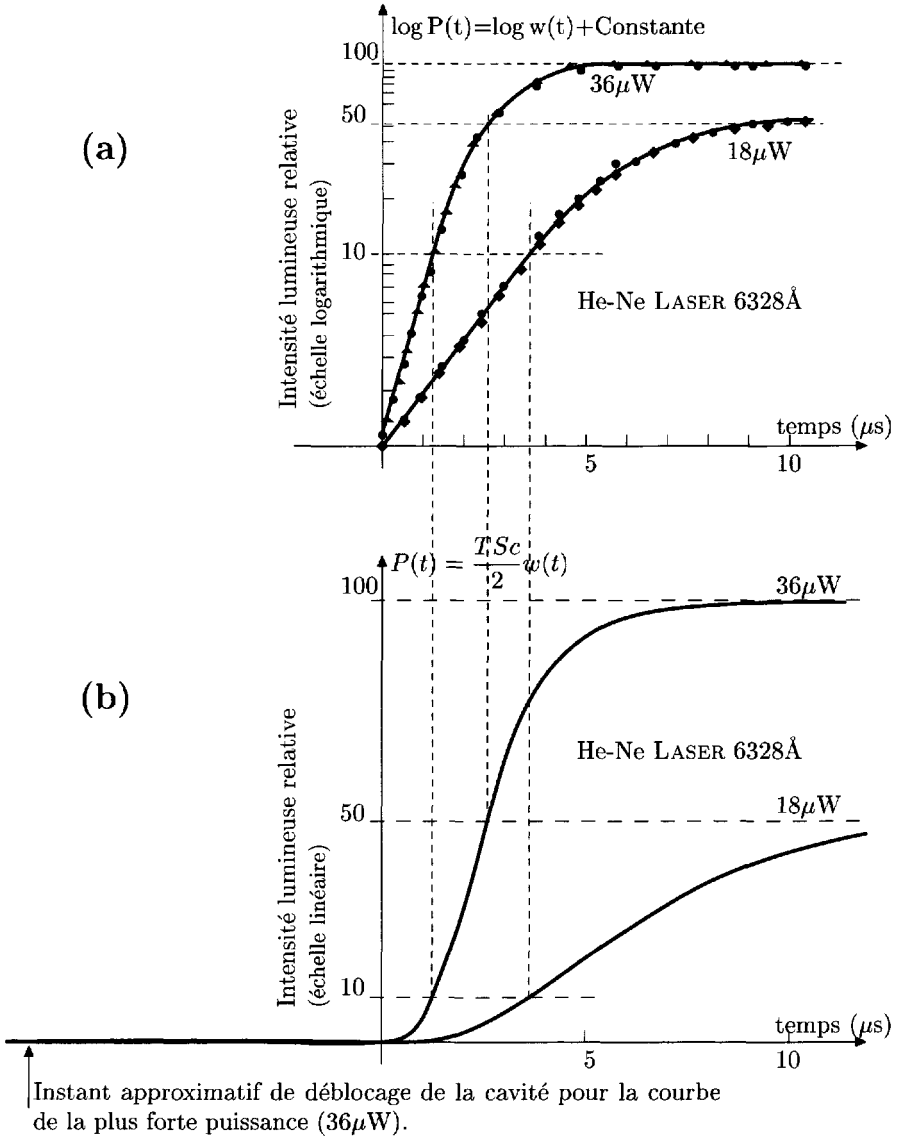


FIG. 11.3 – *Déblocage de la cavité d'un laser continu (d'après la réf. [3], avec la permission de l'American Institute of Physics).*

2e temps. Lorsqu'on retire brusquement l'écran, la différence des populations $D(t)$ est égale à D_P ; et c'est cette valeur que nous devons mettre dans l'équation différentielle de l'énergie, que l'on peut *momentanément*

considérer comme une équation à coefficient constant :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)\frac{1}{\tau_c}w(t) \qquad (11\text{-}5)$$

La croissance de $w(t)$ est donc une simple fonction exponentielle ; tant que le rapport $w(t)/w_r$ reste très inférieur à 1 et ne modifie pas de manière appréciable l'équation différentielle des populations, c'est-à-dire que $D(t)$ garde une valeur voisine de D_P. Les deux équations différentielles peuvent en pratique être considérées comme non couplées. En tenant compte du facteur $\log \mathrm{e} = 0,43$, la pente de la partie rectiligne de la courbe supérieure (36 μW) de la figure (a) permet de mesurer la constante de la loi exponentielle :

$$\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)\frac{1}{\tau_c} = 1,6 \cdot 10^{+6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

La constante de temps τ_c de la cavité est connue à partir de la mesure de largeur des courbes d'Airy de la cavité (*cf.* (9-6) et (9-11)). On a mesuré

$$\Delta\omega = 5 \cdot 10^{+6}\ \mathrm{s}^{-1} = \frac{\omega}{Q} = \frac{1}{\tau_c}$$

On en déduit

$$\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1 = 0,3 \quad \text{ou} \quad \frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} = 1,3$$

3e temps. Lorsque l'intensité lumineuse $w(t)$ dans la cavité devient trop forte, le terme en $w(t)/w_r$ n'est plus négligeable dans l'équation différentielle des populations et la différence des populations $D(t)$ décroît ; il faut alors tenir compte du couplage des deux équations différentielles. En conséquence, la dérivée de l'intensité $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ diminue ; l'intensité $w(t)$ croît moins vite et s'écarte alors de la droite initiale. Ce phénomène s'accentue progressivement et l'intensité $w(t)$ devient stationnaire égale à w_{cont}, lorsque l'écart des populations $D(t)$ est redescendu à la valeur D_{seuil}.

Les courbes de la figure 11.3 montrent bien l'apparition progressive du phénomène de saturation, lorsque l'intensité lumineuse devient importante ; la décroissance de l'écart des populations $D(t)$ fait passer le gain du milieu amplificateur de sa valeur maximale non saturée γ_P (qui correspond à D_P et à la partie rectiligne de la courbe) à sa valeur saturée γ_s (qui correspond à la différence D_{seuil} et à l'asymptote horizontale de la courbe). Nous avons vu au chapitre précédent (10-7) que

$$w_{\text{cont}} = w_r\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)$$

donc ici $w_{\text{cont}} = 0,3w_r$ (courbe supérieure 36 μW). À partir de la relation générale (10-1) entre la puissance de sortie P et la densité d'énergie dans la cavité w :

$$P_{\text{cont}} = \frac{TSc}{2} w_{\text{cont}}$$

on pourrait en déduire une mesure de la densité de référence w_r.

Nous venons d'analyser dans cette expérience une variation monotone des populations et de l'intensité lumineuse, sans oscillation. Ceci est lié à une condition exceptionnelle réalisée dans cette expérience : on utilise un pompage très affaibli, de telle sorte que la différence des populations D_P est voisine de la valeur finale D_{seuil}.

11.3 Impulsions déclenchées

Les oscillations de relaxation que nous venons d'étudier (Fig. 11.1) sont caractérisées par des phases très dissymétriques à l'intérieur de chaque période ; et ceci conduit à des maxima d'énergie très élevés mais de durée très courte que l'on observe bien sur la figure 11.2, et auxquels on donne souvent le nom d'impulsions (relaxées). Ce fonctionnement en impulsions fournit momentanément des puissances instantanées beaucoup plus importantes, parce que l'énergie disponible pendant une période (égale à la puissance continue multipliée par la période) est accumulée et émise d'un seul coup pendant une durée beaucoup plus courte. Dans un grand nombre d'expériences, on trouve un intérêt à ces puissances élevées, même si elles sont de courte durée.

Revenons alors à l'analyse schématisée sur la figure 11.1 : le maximum de puissance lumineuse observé au cours de l'oscillation provient du fait que la différence des populations $D(t)$ est montée à une valeur D_{Max} bien supérieure à celle du seuil. Mais en contrepartie on note que l'émission stimulée en prenant naissance a fait chuter $D(t)$, limitée à D_{Max}, et l'a empêchée de monter jusqu'à la valeur asymptotique possible D_P. Si l'on pouvait empêcher l'émission stimulée de démarrer tout de suite à la valeur D_{seuil}, et laisser $D(t)$ croître davantage jusqu'à la valeur D_P, on devrait alors obtenir une puissance lumineuse instantanée beaucoup plus élevée. Pour cela, il faudrait neutraliser la cavité résonnante comme dans l'expérience décrite à la fin du paragraphe précédent. Malheureusement la manipulation d'un écran mécanique (comme au paragraphe précédent) ne permet pas d'obtenir une durée de coupure assez courte pour le but poursuivi. Nous décrirons à la fin de ce paragraphe un exemple d'obturateur électro-optique plus rapide, capable de neutraliser la cavité (d'abaisser son coefficient de qualité à une très faible valeur Q_2) et de la rétablir brusquement en lui rendant son bon coefficient de qualité Q_1.

Nous analysons d'abord sur la figure 11.4 le principe de déclenchement d'une impulsion lumineuse laser intense en jouant sur le Q de la cavité (en anglais Q-switch) (réf. [4]).

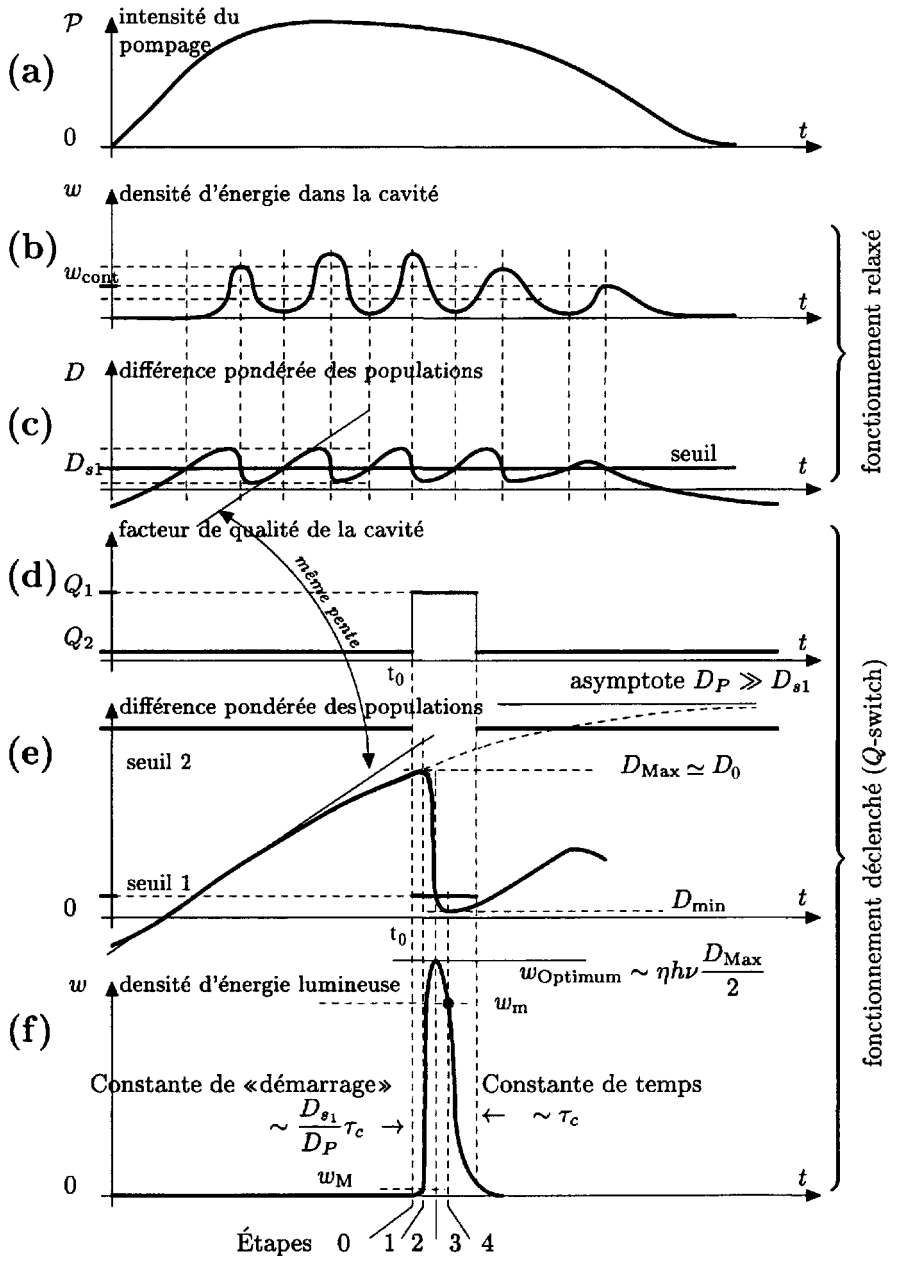


FIG. 11.4 – *Principe d'une impulsion délenchée.*

Puisque l'on cherche à obtenir les intensités extrêmement fortes, on a intérêt à utiliser des lasers où le pompage est déjà extrêmement puissant. Les pompages les plus puissants sont obtenus eux-mêmes en impulsion : l'énergie électrique arrivant continûment est stockée dans une alimentation spécialisée (le plus souvent, c'est une charge électrique dans de gros condensateurs) et se trouve délivrée d'un seul coup dans une décharge ou un éclair lumineux. C'est cette variation impulsionnelle de l'intensité du pompage $\mathcal{P}$ qui est représentée sur la figure 11.4a ; la durée de cette impulsion de pompage sera typiquement de 10 à 100 μs (constante de temps caractéristique des décharges).

La courbe (b) représente les oscillations de relaxation de l'émission laser si la cavité est stable avec sa bonne valeur Q_1 du coefficient de qualité. La courbe (c) représente la variation corrélative des populations. Ces courbes (b) et (c) sont une généralisation de la figure 11.1. La période de ces oscillations de relaxation sera couramment autour de la microseconde.

La courbe (d) représente la variation temporelle du coefficient de qualité que l'on sait produire avec l'obturateur électro-optique : on provoque un abaissement à la faible valeur Q_2 pendant tout le début de l'impulsion de pompage puis une remontée brusque à la valeur normale Q_1. L'instant t_0 de ce brusque changement est choisi au maximum du pompage $\mathcal{P}$ ou un peu après ce maximum.

La courbe (e) représente la variation que l'on peut prévoir pour la différence de population $D(t)$; nous avons vu en (9-17) que la différence des populations-seuil varie en raison inverse du coefficient de qualité de la cavité, et ceci nous permet de représenter sur le diagramme (e) les seuils de population D_{s1} et D_{s2} correspondant à Q_1 et Q_2 (D_{s1} est identique sur le diagramme (c)). Tant que $t < t_0$, la différence de populations $D(t)$ suit la courbe de pompage qui tend vers son asymptote D_P parce que cette courbe reste en dessous du seuil D_{s_2} et qu'aucune émission stimulée ne peut prendre naissance. L'intensité lumineuse reste nulle sur le diagramme (f).

À partir de l'instant t_0, la différence de population a la valeur D_0 qui se trouve d'un seul coup très au-dessus du nouveau seuil D_{s1}, déclenchant le début de l'émission stimulée ; on retrouve alors les quatre étapes successives de la figure 11.1 sur les deux diagrammes (e) et (f), mais avec des vitesses de variation beaucoup plus grandes parce que l'on part avec un rapport D_0/D_{s1} très grand. On en déduit un front de montée extrêmement raide pour l'intensité lumineuse sur le diagramme (f). La violence de cette émission stimulée fait retomber très brutalement la différence des populations $D(t)$ jusqu'à une valeur $D_{\min}$ presque nulle (compte tenu de la relation (11-4) et de l'énergie lumineuse w_m qui est encore voisine de l'optimum w_{opt}) ; il n'y a donc plus ensuite d'émission stimulée possible et la retombée de l'intensité $w(t)$ est due au déstockage des photons, qui ont rempli la cavité : loi exponentielle de constante de temps τ_c.

On peut évaluer facilement l'optimum d'énergie stockée du fait que le temps de montée très court ne laisse pratiquement pas le temps aux photons

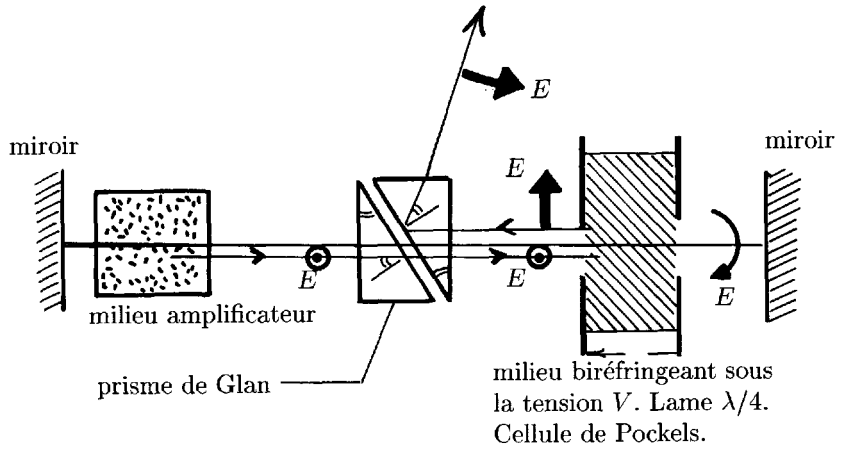


FIG. 11.5 – *Système de déclenchement intracavité utilisant une cellule de Pockels (il est bien évident que les faisceaux Aller et Retour occupent la même section droite centrée sur l'axe de la cavité ; mais pour la clarté on a représenté en dessous de l'axe un rayon Aller polarisé perpendiculaire au plan de la figure, et au-dessus de l'axe un rayon Retour polarisé dans le plan de la figure).*

de s'échapper ; les photons émis se trouvent donc stockés simultanément en presque totalité. Si les poids statistiques g_a et g_b sont égaux, chaque photon $h\nu$ émis dans l'unité de volume fait diminuer D de 2 unités (parce que n_b diminue de 1 et n_a augmente de 1) donc le nombre de photons émis à l'optimum vaut $\frac{D_0 - D_{s1}}{2}\mathcal{V}_{\text{milieu}}$ (car $D_0 \simeq D_{\text{Max}}$) ; on en déduit :

$$w_{\text{opt}} \approx \eta h\nu \frac{D_0 - D_{s1}}{2} \approx \eta h\nu \frac{D_0}{2} \quad \text{(pour } g_a = g_b\text{)} \tag{11-6}$$

En pratique la durée utile de telles impulsions déclenchées est de l'ordre de 1 à 10 nanosecondes. L'énergie couramment stockée dans les bons lasers de laboratoire est de l'ordre de 1 milliJoule, conduisant à des puissances lumineuses instantanées de 100 kW à 1 MW.

En définitive, nous voyons sur la figure 11.4 trois utilisations du mot impulsion. Nous verrons encore dans un paragraphe ultérieur un autre type d'impulsion. On se méfiera donc du mot impulsion lorsqu'il est employé seul sans autre indication.

Un exemple de système de déclenchement fréquemment utilisé (pour faire varier brusquement le coefficient de qualité de la cavité) est décrit sur la figure 11.5 : on interpose sur le trajet du faisceau lumineux entre les deux

miroirs de la cavité un prisme polariseur de Glan et une cellule de Pockels à biréfringence induite par un champ électrique.

Le prisme de Glan est couramment utilisé comme polariseur de lumière : il est formé de deux prismes identiques en quartz cristallin, naturellement biréfringent, dont la section est un triangle rectangle et qui sont accolés par leurs faces-hypothénuse (*cf.* Fig. 11.5) de façon que leur ensemble forme une lame à faces parallèles qui ne dévie pas les rayons lumineux ; mais il reste une mince couche d'air entre les deux faces obliques parallèles. L'orientation des axes cristallins du quartz a été choisie en sorte que, pour une propagation perpendiculaire à la lame à faces parallèles, les deux vibrations principales sont : le champ électrique situé dans le plan de section droite des prismes, choisi comme plan de la figure, d'une part, et le champ électrique perpendiculaire à la section droite (qui est parallèle aux faces-hypothénuse de séparation). Ces deux vibrations électriques sont transmises avec des indices de réfraction différents, conduisant à des angles limites différents pour la réflection oblique du verre sur l'air, à la séparation des deux prismes. L'angle des faces-hypothénuse (qui se retrouve comme angle d'incidence sur la face de séparation) a été choisi précisément entre les deux angles limites correspondant à ces deux vibrations principales : la vibration dans le plan de la figure, qui a le plus grand indice, est réfléchie tandis que la vibration perpendiculaire au plan de figure est transmise. L'ouverture angulaire d'un tel polariseur est faible car la différence des deux angles limites n'est pas très grande ; c'est un inconvénient pour l'optique courante, mais pas avec les faisceaux laser dont la directivité est très grande. (Inversement les polariseurs dichroïques utilisés dans l'optique courante sont prohibés avec les lasers ; car l'absorption de la composante à éliminer risquerait de les détériorer rapidement, compte tenu des fortes intensités lumineuses en jeu).

La cellule de Pockels est une lame à faces parallèles constituée d'un milieu cristallin transparent qui n'est pas naturellement biréfringent, mais qui le devient sous l'action d'un champ électrostatique. On parle de biréfringence « accidentelle » ou « induite ». On choisit l'orientation de ce cristal en sorte que ses axes principaux soient à 45° des axes principaux du prisme de Glan ; et l'on choisit la tension V entre les plaques du condensateur, créant le champ électrostatique, en sorte que les deux vibrations privilégiées soient déphasées de $\pi/4$, constituant ainsi une lame biréfringente *quart d'onde*. On sait qu'une vibration incidente à 45° des axes principaux d'une telle lame $\lambda/4$ est transformée en une onde de polarisation circulaire, symbolisée par une flèche arrondie entre la cellule de Pockels et le miroir de droite de la cavité. Cette onde polarisée circulairement est renvoyée à nouveau à travers la lame $\lambda/4$, qui la transforme en vibration rectiligne à 45° de ses axes principaux ; mais cette double traversée de la lame $\lambda/4$ (aller et retour) est équivalente à la traversée d'une lame $\lambda/2$: le déphasage de $\pi/2$ entre les deux vibrations principales produit à la sortie une vibration rectiligne perpendiculaire à la vibration rectiligne incidente. La vibration incidente ayant traversé le prisme Glan était

nécessairement perpendiculaire au plan de figure ; la vibration réfléchie, après double traversée de la cellule de Pockels, est donc dans le plan de la figure et se trouve donc ensuite réfléchie par le prisme de Glan. Tout se passe comme si l'on avait escamoté le miroir de droite de la cavité ; la cavité n'est pas fermée et la lumière ne peut pas faire un second aller et retour à travers le milieu amplificateur.

Inversement, si l'on coupe la tension V, la cellule de Pockels redevient quasi-instantanément un milieu transparent normal et la cavité se trouve instantanément fermée avec un bon coefficient de qualité Q_1 pour la vibration perpendiculaire au plan de figure. L'intérêt de ce dispositif est que la biréfringence induite est quasiment instantanée et que l'on sait produire et annuler la tension V du condensateur avec une constante de temps RC très brève de l'ordre de 1 nanoseconde (par exemple $C = 10$ pF et $R = 100\ \Omega$). Souvent on préfère appliquer la tension V (plusieurs milliers de Volts) pendant un temps court pour réaliser le créneau Q_1 de la figure 11.4d : il suffit alors d'ajouter une autre lame $\lambda/4$ permanente entre le miroir et la cellule de Pockels ; et l'on utilise la cellule de Pockels pour annuler momentanément l'effet de lame $\lambda/4$ permanente.

11.4 Calcul approché des impulsions géantes très courtes

Ce paragraphe n'apporte pas de notion nouvelle, mais il apporte une justification mathématique plus précise à la discussion qualitative du paragraphe précédent. Ce calcul repose sur une approximation simplificatrice, dont la validité est assurée par la condition essentielle à satisfaire pour produire des impulsions géantes *extrêmement courtes* : que la différence initiale des populations D_0, à l'instant t_0 du déclenchement, soit très supérieure à la différence seuil :

$$\frac{D_0}{D_{\text{seuil}}} > 100 \text{ ou } 1000 \text{ (voire d'avantage)} \qquad (11\text{-}7)$$

Cette hypothèse est essentielle pour assurer aux deux dérivées $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ des valeurs élevées provoquant des variations très rapides de $w(t)$ et $D(t)$ sous l'action de l'émission stimulée et par suite une très courte durée d'impulsion. Par comparaison avec ces variations extrêmement rapides, les effets des processus de pompage et d'émission spontanée paraissent très lents (comparer les pentes de la courbe $D(t)$ avant et après déclenchement sur la figure 11.4e), c'est-à-dire que dans l'expression (11-1) de la dérivée $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ les termes représentant le pompage et l'émission spontanée ont des valeurs numériques faibles comparées aux valeurs des termes représentant l'émission stimulée. À partir de l'instant t_0 du déclenchement *on peut pratiquement réduire la dérivée*

$\mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ *aux seuls termes d'émission stimulée* (réf. [5]) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\mathcal{P}+A_{21}}{w_r}\,D(t)w(t) &= -(B_{12}+B_{21})\,\varphi(\nu)\,D(t)\,w(t)\\ &= -\left(1+\frac{g_b}{g_a}\right)B_{21}\,\varphi(\nu)\,D(t)\,w(t)\end{aligned} \tag{11-8}$$

en tenant compte de l'expression de w_r (9-28) ou en revenant tout simplement à l'expression (9-25). Maintenant que nous nous sommes débarrassés des termes de pompage, il est plus commode de transformer $B_{21}\varphi(\nu)$ en fonction de la différence seuil (9-17) pour faire apparaître le rapport D/D_{seuil} :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} \simeq -\left(1+\frac{g_b}{g_a}\right)\frac{1}{\eta\tau_c}\frac{D(t)}{D_{\text{seuil}}}\cdot\frac{w(t)}{h\nu} \tag{11-9}$$

Ce rapport $w(t)/h\nu$ représente la densité d'énergie exprimée en nombre de photons dans l'unité de volume. Pour faire disparaître le coefficient de remplissage, il est commode de remplacer les variables w et D, relatives à l'unité de volume, par les quantités totales de photons dans la cavité ou d'atomes dans le milieu amplificateur ; de plus nous diviserons le nombre total d'atomes par le facteur $(1+g_b/g_a)$ pour faire disparaître aussi ce facteur des équations différentielles.

Nombre total de photons dans la cavité :

$$F = \frac{W_{\text{cav}}}{h\nu} = \frac{w}{h\nu}\times Sl \tag{11-10}$$

Inversion totale pondérée des atomes divisée par le facteur $\left(1+\dfrac{g_b}{g_a}\right)$:

$$\mathscr{I} = \frac{D\mathscr{V}_{\text{milieu}}}{1+\dfrac{g_b}{g_a}} = D\frac{\eta}{1+\dfrac{g_b}{g_a}}\times Sl = \left(\frac{g_a}{g_a+g_b}n_b - \frac{g_b}{g_a+g_b}n_a\right)\eta Sl \tag{11-11}$$

Cette inversion pondérée $\mathscr{I}$ *représente en fait la réserve d'énergie du milieu amplificateur, exprimée en nombre de photons* : $\mathscr{I}$ diminue de une unité chaque fois que l'émission stimulée augmente d'un photon l'énergie de l'onde électromagnétique. On obtient alors les deux équations différentielles suivantes, qui remplacent les équations (11-1) par suppression des termes de pompage ; elles ne sont valables que dans le cadre de l'hypothèse (11-7), que nous transposons facilement avec les nouvelles variables ($\mathscr{I}_s$ représente la valeur de $\mathscr{I}(t)$ au seuil, correspondant à D_{seuil}) :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_c}\frac{\mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_s}F\\ &\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau_c}\left(\frac{\mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_s}-1\right)F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\tau_c}F\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&\text{condition}\ \frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s} > 100\\ &\text{de validité}\end{aligned} \tag{11-12}$$

La validité de ce système différentiel approché est restreinte à des conditions bien précises (11-7) ; mais en revanche ce système présente l'avantage de s'appliquer indistinctement à tous les lasers, quel que soit leur processus de pompage ; puisqu'il ne reste plus dans les équations que les termes de cavité et d'émission stimulée qui sont identiques pour tous (réf. [5]).

Ce système différentiel conserve la difficulté essentielle due à la non-linéarité ; mais sa simplification nous permet néanmoins de trouver des solutions partielles, par exemple une expression relativement simple de F en fonction de $\mathscr{I}$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mathscr{I}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathrm{d}t}} = -1 + \frac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}(t)} \tag{11-13}$$

La solution de cette équation différentielle par rapport à la variable $\mathscr{I}$ est très simple :

$$F(t) - F_0 = \big(\mathscr{I}_0 - \mathscr{I}(t)\big) + \mathscr{I}_s \ln \frac{\mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_0} = \big(\mathscr{I}_0 - \mathscr{I}(t)\big) - \mathscr{I}_s \ln \frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}(t)} \tag{11-14}$$

les constantes d'intégration $\mathscr{I}_0$ et F_0 sont les valeurs initiales des deux variables à l'instant t_0 du déclenchement choisi comme origine des temps : $\mathscr{I}_0$ est extrêmement grand, alors que F_0 se réduit à quelques photons d'émission spontanée (émis dans l'angle solide d'acceptance du faisceau laser et qui ne se sont pas encore échappés de la cavité) et pourra être le plus souvent négligé. Le premier terme $\mathscr{I}_0 - \mathscr{I}$ de l'expression (11-14) représente tous les photons produits par émission stimulée et le second terme en ln représente les photons qu'il faut retrancher parce qu'ils se sont échappés de la cavité.

La dérivée de la fonction F, qu'elle soit calculée par rapport à t (11-12) ou par rapport à $\mathscr{I}$, (11-13) s'annule pour $\mathscr{I} = \mathscr{I}_s$ (fin de l'étape 2 sur les diagrammes (e) et (f) de la figure 11.4). Nous en déduisons la valeur optimum du nombre de photons dans la cavité :

$$F_{\mathrm{opt}} = \mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}_s - \mathscr{I}_s \ln \frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s} \approx \mathscr{I}_0 \left[1 - \frac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0}\left(1 + \ln \frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s}\right)\right] \tag{11-15}$$

Pour la limite inférieure de la condition (11-7), soit $\mathscr{I}_0/\mathscr{I}_s = 100$, tenant compte de $\ln 100 \approx 2/0,43 \approx 4,6$, on voit que le terme correctif sous le crochet est d'environ 5 %. Pour $\mathscr{I}_0/\mathscr{I}_s = 1000$, le terme correctif est inférieur à 1 %. Nous confirmons donc le résultat approché, calculé pour l'intensité optimum w_{opt} dans le paragraphe précédent ($F_{\mathrm{opt}} \approx \mathscr{I}_0$).

Si nous reportons maintenant l'expression de F (11-14) dans l'équation différentielle en $\mathscr{I}$ (11-12), nous obtenons une équation différentielle en $\mathscr{I}$

et t seulement :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau_c}\frac{\mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_s}\left[\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t) - \mathscr{I}_s \ln\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}(t)}\right] \\ &= -\left(\frac{1}{\tau_c}\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s}\right)\mathscr{I}(t)\left[\frac{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_0} - \frac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0}\ln\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}(t)}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}16)$$

Nous avons mis $\mathscr{I}_0$ en facteur pour discuter plus facilement l'ordre de grandeur des deux termes du crochet ; ce faisant nous faisons apparaître une nouvelle constante de temps beaucoup plus courte que τ_c :

$$\tau' = \tau_c \frac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0} \qquad (11\text{-}17)$$

avec laquelle nous écrivons :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau'} = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathscr{I}(t)\left[\dfrac{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_0} - \dfrac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0}\ln\dfrac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}(t)}\right]} \approx -\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}(t)(\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t))}\mathrm{d}\mathscr{I} \qquad (11\text{-}18)$$

dans la mesure où nous avons le droit de négliger le terme en logarithme dans le crochet. Aux instants proches de t_0 quand $\mathscr{I}(t)$ est voisin de $\mathscr{I}_0$ on peut écrire le développement limité du logarithme et l'on montre que le terme en logarithme est une faible correction en $\dfrac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0} < \dfrac{1}{100}$ par rapport au premier terme du crochet. Lorsque $\mathscr{I}(t)$ décroît, cette correction devient plus importante ; mais nous avons vu qu'à l'instant t_{opt} de l'optimum de $F(t)$ cette correction n'est encore que de 5 %. L'expression approchée à droite de la formule (11-18) est donc valable pour décrire le début de l'impulsion tant que $t \leqslant t_{\mathrm{opt}}$ et $\mathscr{I}(t) \geqslant \mathscr{I}_s$. Une transformation simple permet alors l'intégration :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau'} = -\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_0 + F_0}\left[\frac{1}{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)} + \frac{1}{\mathscr{I}(t)}\right]\mathrm{d}\mathscr{I} \approx -\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)} - \frac{\mathrm{d}\mathscr{I}}{\mathscr{I}(t)} \qquad (11\text{-}19)$$

en choisissant l'origine des temps à l'instant t_0 du déclenchement, nous en déduisons :

$$\frac{t}{\tau'} = \ln\frac{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)}{F_0} - \ln\frac{\mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}_0} = \ln\left[\frac{\mathscr{I}_0}{F_0} \times \frac{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}(t)}\right] \quad (t \leqslant t_{\mathrm{opt}}) \qquad (11\text{-}20)$$

(il était important de garder F_0 à côté de $\mathscr{I}_0$ pour éviter la divergence du premier des deux logarithmes à l'instant initial quand $\mathscr{I}(t) = \mathscr{I}_0$). On en déduit que

$$\frac{\mathscr{I}_0 + F_0 - \mathscr{I}(t)}{\mathscr{I}(t)} = \frac{\mathscr{I}_0 + F_0}{\mathscr{I}(t)} - 1 = \frac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathrm{e}^{t/\tau'} \quad \text{soit} \quad \mathscr{I}(t) = \frac{\mathscr{I}_0 + F_0}{1 + \dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathrm{e}^{t/\tau'}} \qquad (11\text{-}21)$$

en reportant dans (11-14) :

$$F(t) \approx (\mathscr{I}_0 + F_0)\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'}}\right) - \mathscr{I}_s \ln\left(1 + \frac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'}\right)$$

d'où

$$F(t) \approx \frac{F_0\mathbf{e}^{t/\tau'}}{1 + \dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'}} - \frac{\mathscr{I}_s F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'} = F_0\mathbf{e}^{t/\tau'}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'}} - \frac{\mathscr{I}_s}{\mathscr{I}_0}\right) \tag{11-22}$$

(cette expression utilise le développement limité du logarithme et suppose donc $\dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'} < 1$). On obtient bien au début de l'impulsion une croissance extrêmement rapide de l'intensité lumineuse avec la constante de temps τ' beaucoup plus courte que τ_c. Cette croissance commence à se ralentir quand le terme $\dfrac{F_0}{\mathscr{I}_0}\mathbf{e}^{t/\tau'} < 1$, au dénominateur, devient égal à 1, c'est-à-dire quand $\mathscr{I}(t) = \mathscr{I}_0/2$ et $F(t) \approx \mathscr{I}_0/2$. $F(t)$ passe à sa valeur optimum lorsque $\mathscr{I}(t) = \mathscr{I}_s$, c'est-à-dire à un instant t_{opt} que nous pouvons calculer grâce à (11-20) :

$$t_{\text{opt}} \approx \tau' \ln\left(\frac{\mathscr{I}_0}{F_0} \times \frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s}\right) = \tau'\left(\ln\frac{\mathscr{I}_0}{F_0} + \ln\frac{\mathscr{I}_0}{\mathscr{I}_s}\right) \tag{11-23}$$

Les estimations possibles pour $\ln\dfrac{\mathscr{I}_0}{F_0}$ peuvent atteindre plusieurs dizaines, mais restent certainement inférieures à la centaine. Compte tenu de la définition de τ' (11-17) et de la condition (11-7) on en déduit que $t_{\text{opt}} < \tau_c$.

Lorsque $t > t_{\text{opt}}$, l'approximation faite en négligeant le logarithme ln dans (11-18) n'est plus valable. On pourrait trouver une nouvelle approximation pour intégrer (11-18). Mais il nous suffira de remarquer que $\mathscr{I}(t)$ tend très rapidement vers zéro ; dès que $\mathscr{I}(t) \leqslant \mathscr{I}_s/10$ (c'est-à-dire d'après (11-14) dès que $F(t)$ est redescendu à environ 90 % de sa valeur optimum), l'équation différentielle en F de (11-12) se réduit pratiquement (avec une erreur inférieure à 10 %) à :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{1}{\tau_c}F \tag{11-24}$$

c'est-à-dire que l'on retrouve la décroissance de $F(t)$ en $\mathbf{e}^{-t/\tau_c}$ qui caractérise l'échappement des photons de la cavité.

Nous avons ainsi démontré, avec des approximations justifiées, toutes les propriétés caractéristiques énoncées au paragraphe précédent et illustrées sur la figure 11.4.

En conclusion de ces quatre premiers paragraphes, rappelons que leurs résultats sont fondés sur le couple d'équations différentielles (11-1), qui lui-même est une conséquence du modèle phénoménologique, dont la validité est liée à la solution stationnaire des équations de Bloch. Ces équations supposent donc que les variations d'intensité lumineuse sont assez lentes pour permettre d'atteindre, au moins approximativement, cette solution stationnaire ; ceci nécessite une variation relative d'intensité faible pendant la durée τ_2 du temps de relaxation transversal ou temps de cohérence de l'interaction onde-atome. C'est la faible valeur de ce temps τ_2 dans la plupart des lasers courants qui justifie ces quatre paragraphes, pour décrire des impulsions de quelques nanosecondes.

Pour des durées plus longues de τ_2, il serait indispensable de revenir aux équations de Bloch et à l'oscillation de Rabi qui en est la conséquence.

Dans le paragraphe suivant, nous étudierons des impulsions lumineuses mille fois plus courtes (≈ 1 picoseconde). Mais dans ce nouveau paragraphe, nous n'utiliserons pas les équations différentielles (11-1). C'est une propriété intrinsèque de la cavité résonnante qui permettra d'expliquer leur obtention.

11.5 Impulsions ultra courtes en blocage de modes

Ce type de fonctionnement est très différent de tous ceux que nous avons décrits précédemment. En effet, dans toutes les descriptions et les calculs précédents, nous avons fait l'hypothèse que l'onde lumineuse prenait naissance sur une seule fréquence, correspondant à un seul pic d'Airy de la cavité Pérot-Fabry ; c'est ce que l'on appelle un fonctionnement sur un seul mode de la cavité, ou encore un fonctionnement monomode. Ce fonctionnement monomode n'est pas aussi évident qu'il pourrait sembler, lorsque le milieu atomique est capable d'amplifier sur une certaine largeur en fréquence (*cf.* §8.5, Fig. 8.5b) ; nous expliquerons au chapitre 14 les techniques qui permettent de l'obtenir.

Dans ce paragraphe au contraire nous envisageons *un fonctionnement simultané sur plusieurs modes de la cavité dans le cas d'un milieu amplificateur à bande large* ; soit $\Delta\nu_{\text{ampli}}$ la largeur de cette bande de fréquence. Nous appelons ν_0 la fréquence du mode de la cavité située au milieu de la bande $\Delta\nu_{\text{ampli}}$ (*cf.* Fig. 11.6). Les fréquences laser possibles s'écrivent facilement sachant que l'écart entre deux fréquences voisines est égal à l'inverse du temps de parcours de la cavité $2l/c$:

$$\nu_k = \nu_0 + k\frac{c}{2l} \tag{11-25}$$

avec k entier positif ou négatif (*cf.* légende de la figure 9.3). Nous supposons donc qu'il existe $N/2$ fréquences inférieures à ν_0 et symétriquement $N/2$

fréquences supérieures à ν_0, remplissant la bande $\Delta\nu_{\text{ampli}}$, en sorte que :

$$\Delta\nu_{\text{ampli}} \approx N\frac{c}{2l} \tag{11-26}$$

Nous écrivons le champ de l'onde stationnaire numéro k avec la notation imaginaire :

$$E_k(z,t) = a_k(z)\mathbf{e}^{i2\pi\left(\nu_0 + k\frac{c}{2l}\right)t}\,\mathbf{e}^{i\varphi_k}$$

où $a_k(z)$ est l'amplitude qui varie sinusoïdalement en fonction de la position z (nœuds et ventres dans la cavité) et φ_k est la phase de l'onde stationnaire indépendante de z. Le champ laser total créé dans cette cavité s'écrit donc :

$$E_{\text{total}}(z,t) = \sum_k E_k(z,t) = \mathbf{e}^{i2\pi\nu_0 t}\sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} a_k(z)\mathbf{e}^{ik\pi\frac{c}{l}t}\,\mathbf{e}^{i\varphi_k} \tag{11-27}$$

Si les phases φ_k de tous ces modes sont aléatoires, on ne peut rien dire de plus. *Mais si tous ces modes sont bloqués sur la même phase* $\varphi_k = 0$, quel que soit k, il devient possible de calculer la somme. Une difficulté vient du fait que les nœuds et les ventres des diverses ondes stationnaires ne coïncident pas, sauf les deux nœuds communs sur les deux miroirs aux extrémités de la cavité. Nous nous placerons donc sur le premier ventre V_1 du mode ν_0, à la distance $\lambda_0/4$ du miroir ; compte tenu du fait que $\Delta\nu_{\text{ampli}}/\nu_0$ est de l'ordre de quelques pour cent, le premier ventre de chacun des autres modes coïncide avec V_1 avec la même précision. Cela nous permet *en ce point* d'attribuer à chaque mode son amplitude maximale ; et dans un but de simplification, nous supposons que ces amplitudes maximales sont toutes égales à la même valeur a ; la somme (11-27) devient alors celle d'une progression géométrique dont la raison vaut $\mathbf{e}^{i\pi\frac{c}{l}t}$:

$$E_{\text{total}}(V_1,t) = a\mathbf{e}^{2\pi i\nu_0 t}\,\frac{\mathbf{e}^{i\left(\frac{N}{2}+1\right)\pi\frac{c}{l}t} - \mathbf{e}^{-i\frac{N}{2}\pi\frac{c}{l}t}}{\mathbf{e}^{i\pi\frac{c}{l}t} - 1}$$

$$= a\mathbf{e}^{2\pi i\nu_0 t}\,\frac{\mathbf{e}^{i\left(\frac{N+1}{2}\right)\pi\frac{c}{l}t} - \mathbf{e}^{-i\left(\frac{N+1}{2}\right)\pi\frac{c}{l}t}}{\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{2}\frac{c}{l}t} - \mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{2}\frac{c}{l}t}}$$

la seconde expression étant obtenue en divisant haut et bas par $\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{2}\frac{c}{l}t}$, on reconnaît alors les expressions complexes des sinus :

$$E_{\text{total}}(V_1,t) = a\frac{\sin(N+1)\pi\frac{c}{2l}t}{\sin\pi\frac{c}{2l}t}\mathbf{e}^{i2\pi\nu_0 t} = A(t)\mathbf{e}^{i2\pi\nu_0 t} \tag{11-28}$$

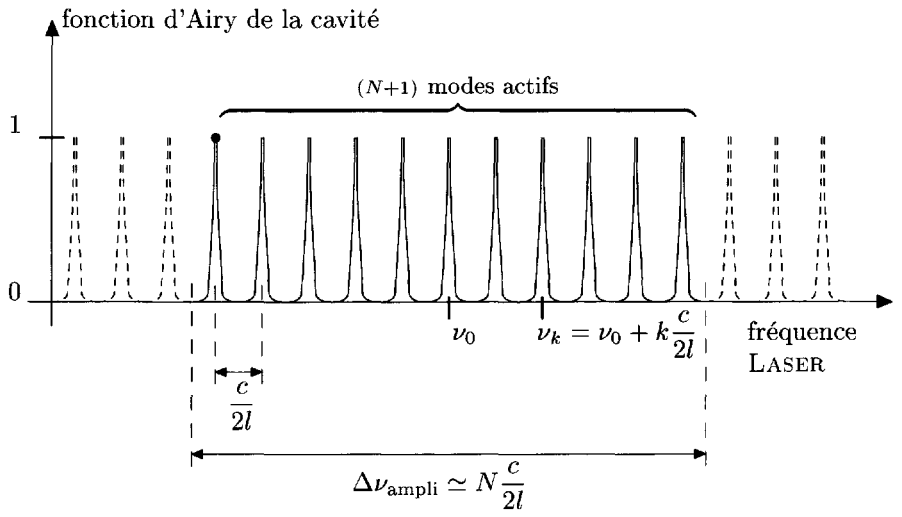


FIG. 11.6 – *Fonction d'Airy de la cavité laser. Seuls sont actifs les modes qui tombent dans la bande du milieu amplificateur. Les* $(N+1)$ *gros points représentent l'analyse de Fourier en fréquence de l'onde laser :* $(N+1)$ *fréquences de même amplitude* a.

Le résultat est une onde sinusoïdale à la fréquence centrale ν_0, dont l'amplitude $A(t)$ varie périodiquement au cours du temps. Ceci n'a rien de très surprenant si nous nous souvenons du calcul du battement de deux ondes sinusoïdales de fréquences voisines, où l'on obtient une sinusoïde à la fréquence moyenne, dont l'amplitude est modulée à la fréquence de leur différence. Ici nous faisons « battre » $N+1$ fréquences dont les différences sont toutes des multiples de la même fréquence $c/2l$; et nous retrouvons cette fréquence $c/2l$ dans la modulation de l'amplitude résultante.

Nous avons représenté sur la figure 11.7a une période de l'amplitude $A(t)$ (trait tireté). Les maxima sont obtenus lorsque le sinus du dénominateur devient nul, c'est-à-dire pour les valeurs de t zéro ou multiples de la durée $2l/c$ d'un tour dans la cavité. La hauteur des maxima $(N+1)a$ est obtenue facilement en résolvant une forme indéterminée classique du type zéro/zéro. La fonction $A(t)$ s'annule ensuite pour toutes les valeurs de t multiples de $\frac{1}{N+1} \times \frac{2l}{c}$ (période du numérateur). Le premier maximum secondaire ne vaut que 20 % environ des maxima principaux.

Nous avons représenté en trait plein sur la même figure le carré de l'amplitude, qui représente l'intensité lumineuse : on voit que les maxima secondaires sont tout à fait négligeables (le plus élevé vaut 4 % des maxima principaux). La largeur des pics principaux peut être caractérisée par les points situés

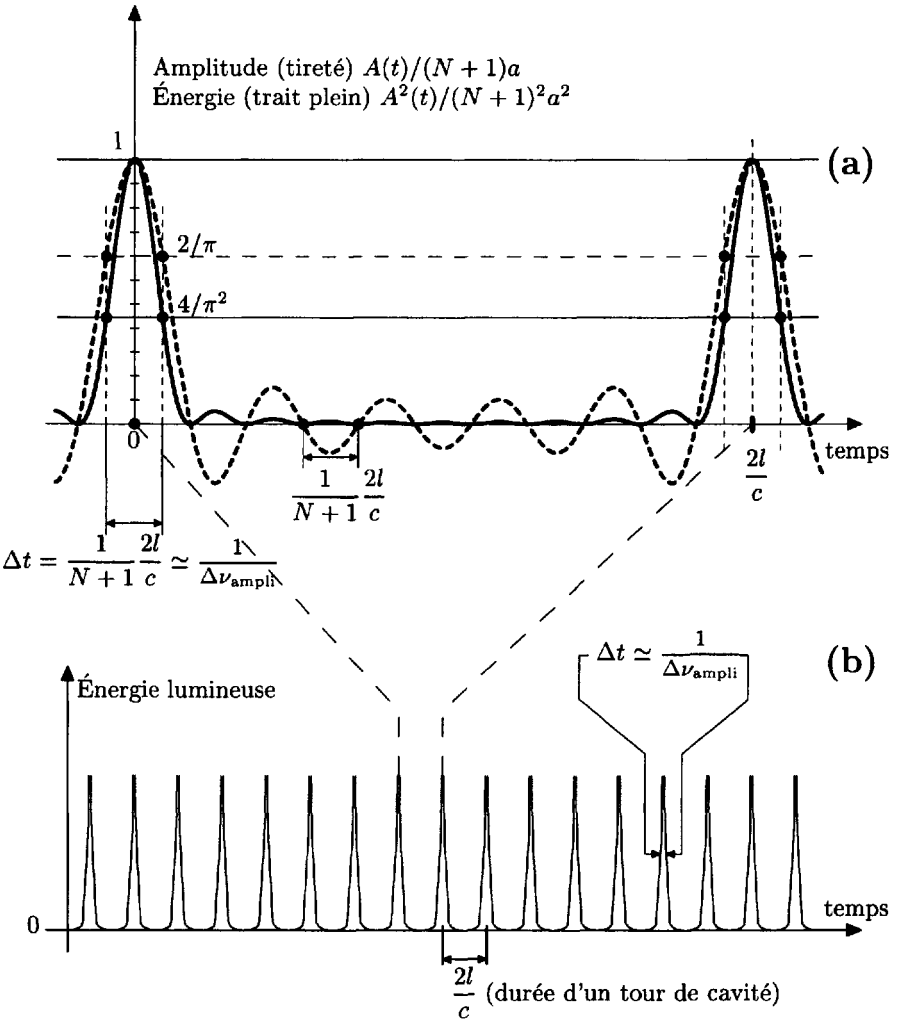


FIG. 11.7 – *Impulsions en Modes Bloqués. (a) Détail d'une période $2l/c$ (durée d'un tour de cavité); en tireté l'amplitude $A(t)$ de la formule (11-28), en trait plein l'intensité proportionnelle à $A(t)^2$. (b) Train d'impulsions répétitives représenté avec une échelle de temps rétrécie. Sa durée totale est la durée de fonctionnement du laser. Pour tracer la figure, on a choisi $N = 10$.*

à l'intervalle de temps $\delta t = \frac{1}{N+1}\frac{l}{c}$, égal à la demi-période du numérateur, et pour lesquels $A^2(t)$ vaut moins que la moitié du maximum. On en déduit

la largeur totale des pics :

$$\Delta t = 2\delta t = \frac{1}{N+1}\frac{2l}{c} \approx \frac{1}{\Delta\nu_{\text{ampli}}} \tag{11-29}$$

Nous avons calculé l'onde résultante (11-28) en un point V_1 très proche du miroir de sortie de la cavité. Au coefficient de transmission près du miroir, nous retrouverons donc une onde semblable dans le faisceau de sortie. On obtient ainsi un train périodique d'impulsions très courtes représenté sur la figure 11.7b, la largeur temporelle de chacune de ces impulsions est égale à leur écart divisé par le nombre des modes actifs de la cavité $N+1$, c'est-à-dire encore à l'inverse de la largeur totale en fréquence $\Delta\nu_{\text{ampli}}$ de l'ensemble des modes superposés. Ceci est une propriété classique des transformées de Fourier, la figure 11.7 étant la transformée de Fourier temporelle des $N+1$ modes en fréquence de la figure 11.6.

Sans doute, dans la pratique, la courbe de réponse du milieu amplificateur n'est pas une fonction carrée comme nous l'avons supposé en considérant comme égales toutes les amplitudes a_k des $N+1$ modes. Mais une variation progressive des amplitudes avec la fréquence ν_k ne change rien aux résultats importants du calcul précédent : périodicité $2l/c$ des impulsions et largeur $\Delta t \approx 1/\Delta\nu_{\text{ampli}}$.

Tout ce calcul repose au contraire de manière essentielle sur l'hypothèse de la cohérence de phase des différents modes. Plusieurs procédés peuvent être utilisés pour réaliser ce blocage des modes sur la même phase :

1. Le plus simple consiste à insérer dans la cavité laser, tout contre l'un des deux miroirs, **une mince couche d'absorbant saturable** bien choisi (réf. [6] et [7]). En fait la saturation est une propriété commune à tous les milieux absorbants (*cf.* §8.3) et nous avons vu au §8.4 que la saturation peut se traduire par une quasi-transparence du milieu absorbant, induite par les très fortes intensités lumineuses. Si les phases des N modes sont aléatoires, l'intensité de l'onde résultante, de l'ordre de Na^2, est trop faible pour que la saturation soit importante, et l'absorption importante diminue le gain global sur un tour de cavité à un niveau inférieur au seuil. Si au contraire les N modes sont bloqués sur la même phase, l'intensité de l'onde résultante vaut $(Na)^2$, comme nous venons de le rappeler dans le calcul ci-dessus ; elle est multipliée par N (c'est-à-dire couramment 100 ou 1000) et la saturation devient assez importante pour provoquer le phénomène de quasi-transparence induite. Le gain global sur un tour devient alors supérieur au seuil.

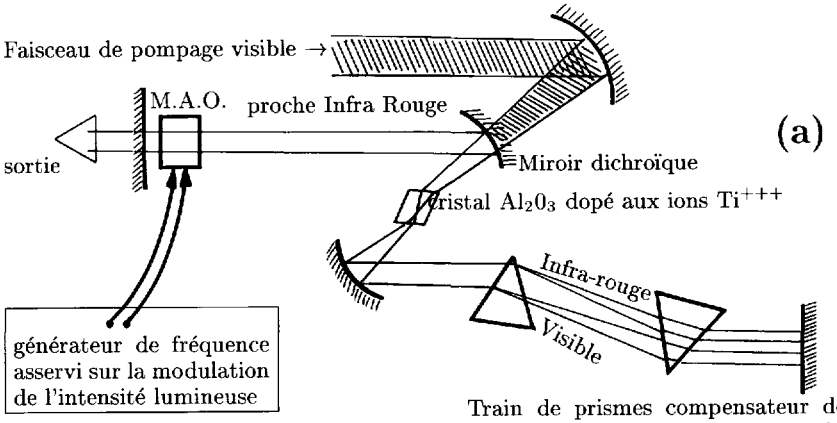
   Dans ce dernier raisonnement, ce n'est plus la transformée de Fourier en fréquence de la figure 11.6 qui est importante, mais la transformée de Fourier temporelle de la figure 11.7 : l'impulsion très courte et très intense fait des allers et retours dans la cavité de telle sorte qu'elle revient régulièrement, avec la période $2l/c$, sur le miroir de sortie,

produisant dans le faisceau de sortie le train d'impulsions périodiques de la figure 11.7b. Son amplitude particulièrement intense au ventre V_1 (presque commun aux ondes stationnaires) où l'on a placé l'absorbant, provoque la transparence induite pendant la courte durée de l'impulsion et permet le fonctionnement de ce régime particulier de modes bloqués en phase. L'absorbant saturable peut être n'importe quelle couche mince de colorant en solution. Dans le cas du proche Infra-Rouge, il est commode d'utiliser une mince couche d'absorbant semi-conducteur déposé sur la face d'un miroir.

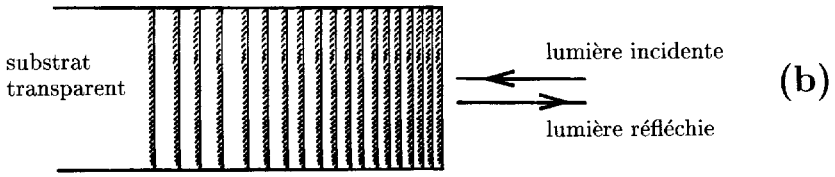
2. Une autre méthode souvent utilisée pour forcer le blocage des modes est d'insérer dans la cavité un **Modulateur Acousto-Optique** (M.A.O.) : milieu transparent couplé à un transducteur piézoélectrique capable d'engendrer des ondes sonores d'assez haute fréquence (plusieurs dizaines, voire la centaine de MHz ; *cf.* réf. [8]). La propagation de l'onde dans la cavité est ainsi perturbée à cette fréquence, et elle ne se fait de manière satisfaisante que pendant une courte fraction de cette période : le gain de l'onde sur un tour devient supérieur au seuil à condition seulement que le blocage des modes produise une impulsion pendant cette fraction de période. Ceci suppose bien sûr que la fréquence du M.A.O. soit égale à la fréquence $c/2l$ de circulation de l'impulsion dans la cavité (en fait cela peut encore marcher si la fréquence imposée au M.A.O. est un sous-multiple de la fréquence $c/2l$ de la cavité). Pour conserver l'accord des deux fréquences, il faut asservir le générateur d'ondes acoustiques sur la modulation de la lumière laser, mesurée avec une cellule photoélectrique.

3. Une troisième méthode de blocage des modes utilise la *non-linéarité de l'indice de réfraction du cristal amplificateur* qui émet la lumière. La très forte intensité de l'impulsion laser, du fait qu'elle n'est pas homogène spatialement, crée un gradient d'indice de réfraction à symétrie cylindrique, qui est équivalent momentanément (à l'instant du passage de l'impulsion) à une lentille. Si l'on règle la cavité en tenant compte de cette lentille, seul le mode impulsionnel peut s'y propager de manière satisfaisante. C'est le **blocage de mode par lentille de Kerr** (réf. [9]).

En pratique on obtient couramment des durées d'impulsions variant de quelques picosecondes au dixième de picoseconde (on parle alors de 100 femtosecondes) selon la largeur spectrale de la bande d'amplification. On obtient ainsi des impulsions mille fois plus courtes environ que les impulsions déclenchées du paragraphe précédent. Mais il doit être bien clair que cette recherche de durées d'impulsions très courtes est accompagnée d'une perte de la définition précise de la fréquence lumineuse. Dans une expérience où l'on part d'un laser à colorant émettant dans le visible (le jaune par exemple) ; lorsqu'on le fait passer au fonctionnement en modes bloqués, on voit nettement à l'œil



Train de prismes compensateur de la dispersion spectrale dans le cristal (les basses fréquences moins déviées traversent une épaisseur plus grande du second prisme et sont donc retardées par rapport aux hautes fréquences plus déviées ; il faut calculer soigneusement la distance des deux prismes).



Les grandes fréquences (de λ plus courtes) sont réfléchies par les couches plus serrées disposées en surface et pénètrent moins profondément dans le miroir que les basses freéquences (de λ plus longues) qui sont réfléchies par les couches plus espacées disposées en profondeur.

FIG. 11.8 – *Laser à titane saphir pour impulsions ultracourtes à blocage de modes. (a) Exemple de configuration de cavité. Le faisceau de pompage provenant d'un laser continu vert est focalisé dans le cristal amplificateur en passant à travers un miroir sphérique dichroïque de la cavité. Les deux miroirs concaves de la cavité laser sont calculés pour adapter la zone focale de la lumière laser (autour de* $\lambda = 0.8\mu m$*) à la zone focale du faisceau de pompage. L'entrée et la sortie de lumière du cristal se font à l'incidence de Brewster afin de supprimer les pertes partielles par réflexion. Le blocage des modes peut être produit par l'effet de lentille non linéaire (effet Kerr) dans le cristal ; mais son réglage délicat fait le plus souvent préférer un Modulateur Acousto-Optique (M.A.O.) ou une couche d'absorbant saturable sur le miroir de sortie. (b) Structure (très dilatée en épaisseur) des miroirs à multicouches d'espacement variable, permettant de compenser la dispersion spectrale dans le cristal.*

la couleur pâlir et blanchir parce que, pour ce faire, on élargit le spectre des fréquences émises.

Dans cette recherche des très courtes durées d'impulsions, une cause importante de limitation provient de la dispersion du milieu amplificateur : les vitesses de groupe légèrement différentes des diverses composantes spectrales tendent à élargir la durée de l'impulsion, dont la composition spectrale est alors légèrement différente au début et à la fin de l'impulsion. On peut compenser ce phénomène en ajoutant, dans la cavité, des éléments dispersifs de signe opposé : ce peut être une combinaison de prismes (réf. [9]) ou bien des miroirs à multicouches d'espacement variable, qui réfléchissent à des profondeurs différentes les diverses composantes spectrales (réf. [10] ; Fig. 11.8). Avec une compensation très soignée et un milieu amplificateur à très large bande comme l'ion Ti^{+++} dans le saphir Al_2O_3 (spectre possible de $\lambda = 0,9\ \mu$m, soit $\nu \approx 300$ THz, à $\lambda = 0,74\ \mu$m, soit $\nu \approx 400$ THz, c'est-à-dire $\Delta\nu_{\text{ampli}} \approx 100$ THz $= 10^{14}$Hz), on peut obtenir des impulsions de durée τ inférieure à 10^{-14} s $= 10$ femtosecondes (réf. [11]).

11.6 Dilatation et compression d'impulsion

Les lasers à blocage de modes sont couramment utilisés comme point de départ dans les expériences où l'on désire produire des puissances instantanées très élevées. On amplifie ensuite l'intensité de cette première impulsion en lui faisant traverser plusieurs amplificateurs successifs. Il est nécessaire alors d'isoler une seule de ces impulsions initiales afin que toute l'énergie disponible dans les amplificateurs se déverse dans la même impulsion unique. Le temps mort $2l/c$ entre deux impulsions successives, de l'ordre de la nanoseconde, est assez long pour permettre le fonctionnement d'un obturateur électro-optique courant (la cellule de Pockels décrite au §11.3, par exemple) qui s'ouvre pour l'impulsion choisie et se ferme avant que l'impulsion suivante n'arrive.

Mais on rencontre d'autres problèmes au niveau des amplificateurs eux-mêmes : ce sont en fait des milieux amplificateurs sans cavité qui sont pompés en impulsion juste au moment du passage de l'impulsion laser à amplifier ; mais le gain en un passage n'est jamais très élevé, et durant la courte durée d'une picoseconde l'amplificateur n'a le temps d'émettre qu'une faible partie de l'énergie qu'il a emmagasinée. L'énergie excédentaire est donc perdue pour l'impulsion laser ; mais plus grave, elle provoque des effets nuisibles, parce qu'elle est émise de manière spontanée puis amplifiée par le milieu, ce qui lui communique une certaine directivité ; elle vient alors se mélanger pour partie au faisceau laser dont elle détruit les caractéristiques. Autrement dit, on n'amplifie avec qualité et avec un bon rendement que des impulsions laser pas trop courtes, dont la durée est comparable à la durée de l'impulsion de pompage de l'amplificateur, en pratique autour de la nanoseconde.

Pour amplifier les impulsions très courtes on est ainsi conduit à les allonger ou à les dilater temporellement, à condition de pouvoir les recomprimer

temporellement après l'amplification pour leur rendre leur courte durée initiale. On utilise pour cela la dispersion spectrale de certains dispositifs optiques : la dilatation ou l'étalement d'une impulsion se produit naturellement lors de la traversée d'un milieu transparent à cause de la variation d'indice de réfraction en fonction de la fréquence lumineuse.

Généralement les hautes fréquences (vers le bleu) correspondent à un indice plus élevé et se propagent plus lentement que les basses fréquences (vers l'infrarouge). Après traversée de quelques dizaines ou centaines de mètres de fibre optique, on obtient une impulsion très allongée, dont le début est composé essentiellement de basses fréquences tandis que la fin est composée de hautes fréquences (en fait il faut faire le calcul sur la dispersion de la vitesse de groupe dans la fibre). *Cette impulsion allongée à la nanoseconde est donc affectée d'un glissement de fréquence* (en anglais « chirped pulse ») mais elle peut être amplifiée avec un bon rendement dans les traversées successives de plusieurs amplificateurs classiques (dont l'impulsion de pompage dure environ 1 nanoseconde).

Pour retrouver les caractéristiques temporelles initiales, après amplification, il faut *comprimer cette impulsion à glissement de fréquence*, en utilisant précisément cette variation de fréquence. Le système de deux réseaux de diffraction identiques et parallèles, représenté sur la figure 11.9a, permet, à l'inverse de la fibre optique, de retarder les basses fréquences par rapport aux hautes fréquences, et de remettre à peu près en coïncidence toutes les composantes spectrales (réf. [12]).

En effet la formule classique du réseau de diffraction relie l'angle d'incidence i et l'angle de diffraction i' de la longueur d'onde λ, en fonction du pas a du réseau (distance périodique des traits gravés) :

$$a\,(\sin i + \sin i') = k\lambda \qquad (k \text{ entier}) \tag{11-30}$$

(cette formule est algébrique, avec un réseau par réflexion, à condition de compter i et i' comme positifs du même côté de la normale au réseau ; en effet la réflexion spéculaire, ou ordre $k = 0$, commun à toutes les λ, correspond à $i' = -i$). D'après cette formule algébrique, les basses fréquences (grandes λ) sont diffractées dans des angles i' supérieurs à ceux des hautes fréquences (petites λ) ; c'est bien ce qui est indiqué sur la figure.

Les rayons diffractés par le premier réseau tombent sur le second réseau parallèle au premier avec l'incidence i' et, puisque le pas a est le même, d'après (11-30) ils sont diffractés sous l'angle initial i, et se retrouvent tous parallèles. Mais les basses fréquences (grandes λ) ont utilisé une zone du second réseau qui est plus en arrière et ont donc pris du retard par rapport aux hautes fréquences (petites λ). Ce retard temporel dépend bien sûr des angles i et i', mais son ordre de grandeur est la dimension du réseau divisé par la vitesse c de la lumière. Pour récupérer un retard de l'ordre de 1 nanoseconde, il faut utiliser un réseau de 30 à 40 cm de longueur.

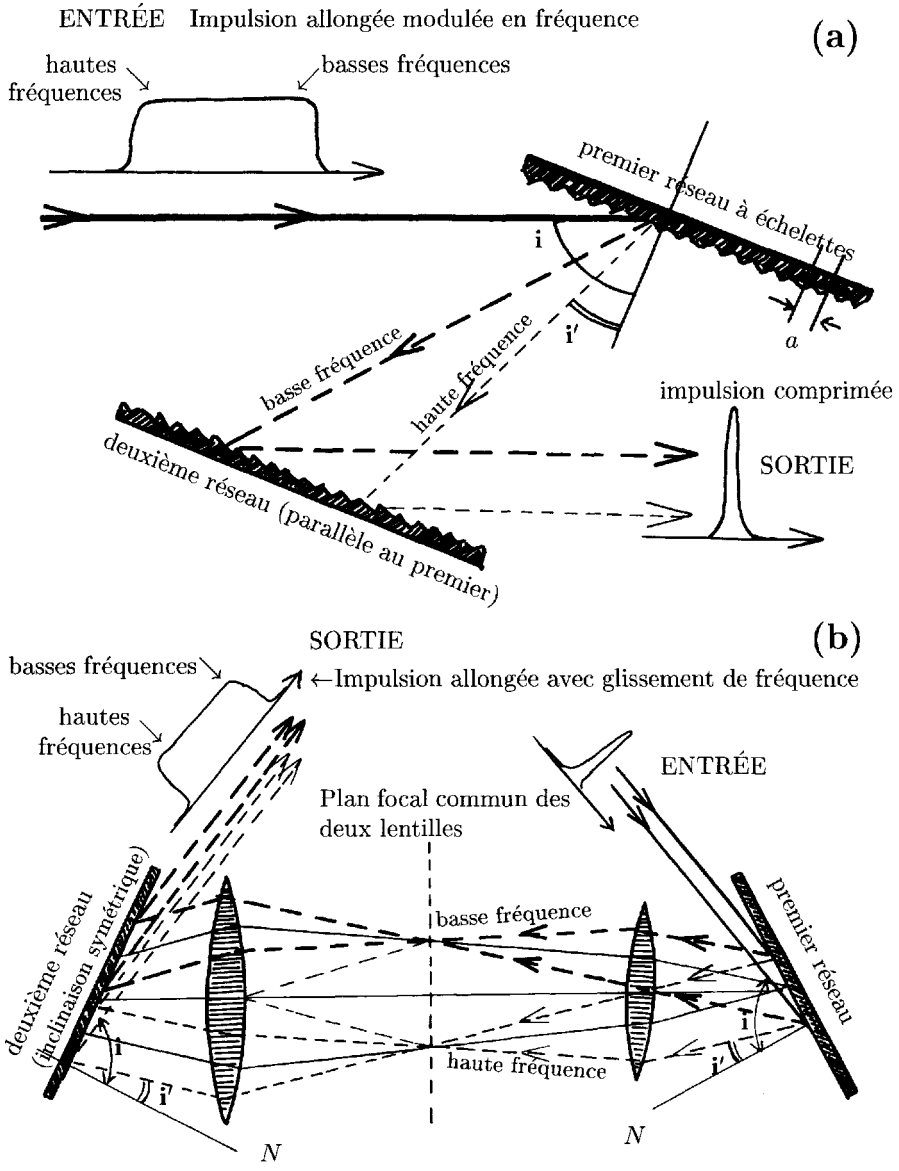


FIG. 11.9 – *(a) Compresseur d'impulsion modulée en fréquence (tous les rayons de la même fréquence sont parallèles ; on n'en a représenté qu'un). (b) Allongement d'une impulsion courte et sa modulation en fréquence.*

Ce système de compensation entre la dispersion d'une fibre et la dispersion du double réseau est effectivement utilisé pour l'amplification d'impulsions très courtes. Mais ce système rencontre une certaine limitation, dans la course aux durées très courtes, du fait que la dispersion de la vitesse de propagation ne varie pas de manière identique sur toute la gamme de fréquence utile dans la fibre et dans le système du double réseau. De ce fait, la compensation du glissement de fréquence n'est pas parfaite pour l'ensemble des composantes spectrales.

Nous présentons sur la figure 11.9b un exemple de système proposé pour *remplacer la fibre optique dans l'opération de dilatation de l'impulsion* et qui utilise aussi deux réseaux de diffraction (réf. [13]). Mais cette fois-ci on a placé entre les deux réseaux un système afocal formé de deux lentilles de même distance focale et dont les foyers coïncident : c'est un système télescopique de grandissement 1 qui transforme un faisceau incident parallèle (venant de la droite sur la figure) en un faisceau émergent parallèle aussi, et faisant le même angle avec l'axe optique des deux lentilles. Le deuxième réseau est incliné symétriquement du premier réseau par rapport à l'axe optique, et le faisceau émergent le frappe avec un angle d'incidence i' égal à l'angle de diffraction i' sur le premier réseau ; compte tenu de la formule (11-30), le faisceau est donc diffracté par le deuxième réseau avec un angle de diffraction i égal à l'angle d'incidence i sur le premier réseau. Tous les faisceaux lumineux des diverses fréquences sont donc renvoyés par le deuxième réseau dans la même direction, faisant l'angle i avec la normale N au réseau.

Mais on voit bien sur la figure une conséquence de la focalisation de chaque fréquence en un point différent du plan focal commun des deux lentilles : il s'en suit un déplacement latéral des faisceaux des diverses fréquences. Et dans la mesure où le deuxième réseau est placé assez proche de la deuxième lentille, ce déplacement latéral entraîne un chemin optique plus court pour les basses fréquences que pour les hautes fréquences. On a ainsi réalisé une impulsion dilatée temporellement où les basses fréquences sont en avance sur les hautes fréquences, comme avec la fibre. L'avantage de ce nouveau système sur la fibre optique est que sa dispersion spectrale est liée aux formules du réseau et varie de la même manière que la dispersion spectrale du système de compression formé de deux réseaux parallèles. En conséquence, on peut obtenir une meilleure compensation sur l'ensemble des composantes spectrales ; et il est possible de réaliser des facteurs de compression et de dilatation temporelles $\times 10\,000$ ou $\times 100\,000$, et parfaitement compensés. Il existe d'autres variantes de ce système de dilatation d'impulsions par réseaux.

Ces techniques sont utilisées pour concentrer l'énergie de chaînes amplificatrices très puissantes dans des durées très courtes et obtenir des puissances instantanées extrêmement élevées, auxquelles correspondent des amplitudes du champ électrique $\mathcal{E}_1$ exceptionnelles, permettant d'étudier des phénomènes nouveaux. En concentrant l'énergie de 1 millijoule d'un laser de laboratoire courant dans une durée de 1 picoseconde, on obtient une puissance

de 10^9 watts = 1 Gigawatt (c'est la puissance d'une très grosse centrale électrique thermonucléaire ; mais qui, elle, fournit cette puissance en permanence). Dans les centres de recherche spécialisés, une impulsion de 1 Joule pendant une durée de 1 nanoseconde correspond aussi à une puissance de 1 Gigawatt ; mais compressée en 1 picoseconde elle correspond à une puissance de 1 Térawatt. Et si l'on produit 10 Joules compressés dans une durée cent fois inférieure de 10 femtosecondes, on obtiendra 1000 Térawatts = 1 Pétawatt = 10^{15} watts.

Bibliographie

[1] R.J. Collins, D.F. Nelson, A.L. Schawlow, W. Bond, C.B.G. Garrett et W. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **5**, 303 (1960).

[2] M. Le Flohic, P.L. François, J.Y. Allain, F. Sanchez et G.M. Stefan, IEEE J. Quantum Elect. **27**, 1910 (1991).

[3] G.K. Born, Appl. Phys. Lett. **12**, 46 (1968).

[4] F.J. Mc Clung et R.W. Hellwarth, J. Appl. Phys. **33**, 828 (1962).

[5] W.G. Wagner et B.A. Lengyel, J. Appl. Phys. **34**, 2042 (1963).

[6] H. Mocker et R.J. Collins, Appl. Phys. Lett. **7**, 270 (1965).

[7] A.J. De Maria Proc. I.E.E.E. **57**, 3 (1969).

[8] L.E. Hargrove, R.L. Fork et M.A. Pollack, Appl. Phys. Lett. **5**, 4 (1964).

[9] D.E. Spence, P.N. Kean et W. Sibbet, Opt. Lett. **16**, 42 (1991).

[10] R. Szipöcs, K. Ferencz, C. Spielmann et F. Krausz, Opt. Lett. **19**, 201 and 204 (1994).

[11] G.A. Mourou, C.P.J. Barty et M.D. Perry, Phys. Today (janvier 1998).

[12] E.B. Treacy, IEEE J. Quantum Elect. **5**, 454 (1969).

[13] O.E. Martinez, IEEE J. Quantum Elect. **23**, 59 et 1385 (1987).

Chapitre 12

Divers types de lasers

NOUS AVONS déjà donné au §8.5 une idée des méthodes de pompage utilisées pour réaliser l'inversion des populations. Ces méthodes de pompage constituent un critère important de classification des divers types de lasers utilisés dans la pratique. Un autre critère de classification réside dans la nature du milieu amplificateur ; un élément déterminant pour la construction des lasers est en particulier l'état physique de ce milieu : gazeux, liquide ou solide. En effet, un paramètre important qui figure dans toutes les équations de cette deuxième partie est le nombre d'atomes ou molécules par unité de volume ; et son ordre de grandeur est très différent entre les gaz d'une part et les milieux condensés (liquide ou solide) d'autre part. Nous expliquons ainsi les subdivisions de ce chapitre.

Cette revue des divers lasers existant couramment dans les laboratoires et les industries ne saurait évidemment être exhaustive ; et certainement une part d'arbitraire apparaîtra dans le choix des types de lasers moins courants. Au surplus cette revue peut se trouver rapidement démodée si de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés apparaissent dans les années qui viennent. Constatons cependant qu'après une évolution et un enrichissement très rapide au cours des années 1960 à 1980, cette liste est restée relativement stable au cours de la dernière décade. L'essentiel en est résumé dans les deux tableaux 12.1 et 12.5 de ce chapitre.

12.1 Gaz pompés par décharge électrique

Les décharges électriques dans les gaz fonctionnent généralement bien pour des pressions de gaz comprises entre 0,1 et 10 torr. À la pression de 10 torrs (= 1/76 atmosphère $\sim$ 1300 pascals), la densité du gaz est environ 10^{-2} de celle de l'air, soit 10^{-5} de celle d'un milieu condensé. À cette faible valeur du nombre d'atomes par unité de volume correspondent des gains par unité de longueur (ou coefficients d'amplification) $\alpha = \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}z$ relativement faibles ; et il est

indispensable de disposer d'une grande longueur Δz du milieu amplificateur pour atteindre un gain $\gamma = \alpha \cdot 2\Delta z$ assez fort sur un Aller et Retour de cavité (*cf.* (9-19)). Ceci explique la forme allongée de tous les lasers à gaz (*cf.* Fig. 12.1).

Pour économiser l'énergie consommée dans la décharge, il est recommandé de limiter le volume de gaz pompé au volume effectivement rempli par l'onde lumineuse, c'est-à-dire de limiter la décharge à la section S de l'onde lumineuse (en pratique c'est le diamètre des faisceaux gaussiens calculés au chapitre 15). Ceci conduit, pour les lasers de faible puissance, à enfermer le gaz dans un mince tube capillaire dont le diamètre varie typiquement entre 1 et 2 mm. Dans les lasers plus puissants la nécessité d'un refroidissement efficace oblige à utiliser un volume de gaz supérieur et une surface de paroi supérieure ; il faut alors confiner la décharge par une série de pastilles trouées et alignées (*cf.* Fig. 12.1c). La tenue en température de ces pastilles et de leur scellement à la paroi est un problème technique important des lasers à Argon ou Krypton ionisés.

Nous n'avons pas représenté sur la figure 12.1 la variété des formes d'électrodes utilisées, ni les réservoirs de gaz (ou ballasts) employés pour compenser la perte de gaz par inclusion dans la paroi sous l'effet de la décharge. La décharge réalise l'inversion entre certains niveaux d'énergie très excités, qui sont peuplés préférentiellement, et les niveaux excités inférieurs du même atome. L'émission de lumière se fait donc aux longueurs d'ondes caractéristiques des raies spectrales correspondant à ces niveaux, avec une possibilité de réglage réduite à la largeur Doppler de ces raies spectrales. Dans un grand nombre de cas, la même décharge permet de fonctionner sur plusieurs longueurs d'ondes ; c'est alors la construction de la cavité optique qui permet de sélectionner la longueur d'onde choisie. Les deux procédés les plus couramment utilisés pour cela sont :

1. l'utilisation de miroirs dichroïques dont le coefficient de réflexion n'est voisin de l'unité que pour la seule longueur d'onde choisie ;

2. si l'on veut pouvoir changer plus facilement cette longueur d'onde, un simple prisme permet de couder l'axe optique de la cavité (*cf.* Fig. 12.1d) ; et la longueur d'onde de travail peut être changée en modifiant l'inclinaison du prisme ou du miroir voisin.

Le tableau 12.1 indique les longueurs d'onde des lasers à décharge les plus courants sur lesquelles les émissions laser sont les plus intenses. On a également indiqué sur ce tableau les puissances lumineuses P couramment produites, en distinguant le fonctionnement continu (*cf.* chapitre 10) ou impulsionnel (*cf.* chapitre 11). Dans le fonctionnement impulsionnel, une autre donnée importante est le taux de répétition des impulsions, qui permet de calculer la puissance moyenne du laser. Ce taux de répétition est fréquemment voisin de la centaine d'impulsions par seconde, mais il y a des exceptions : le laser à cuivre par exemple est intéressant par son taux de répétition rapide de 10 kHz

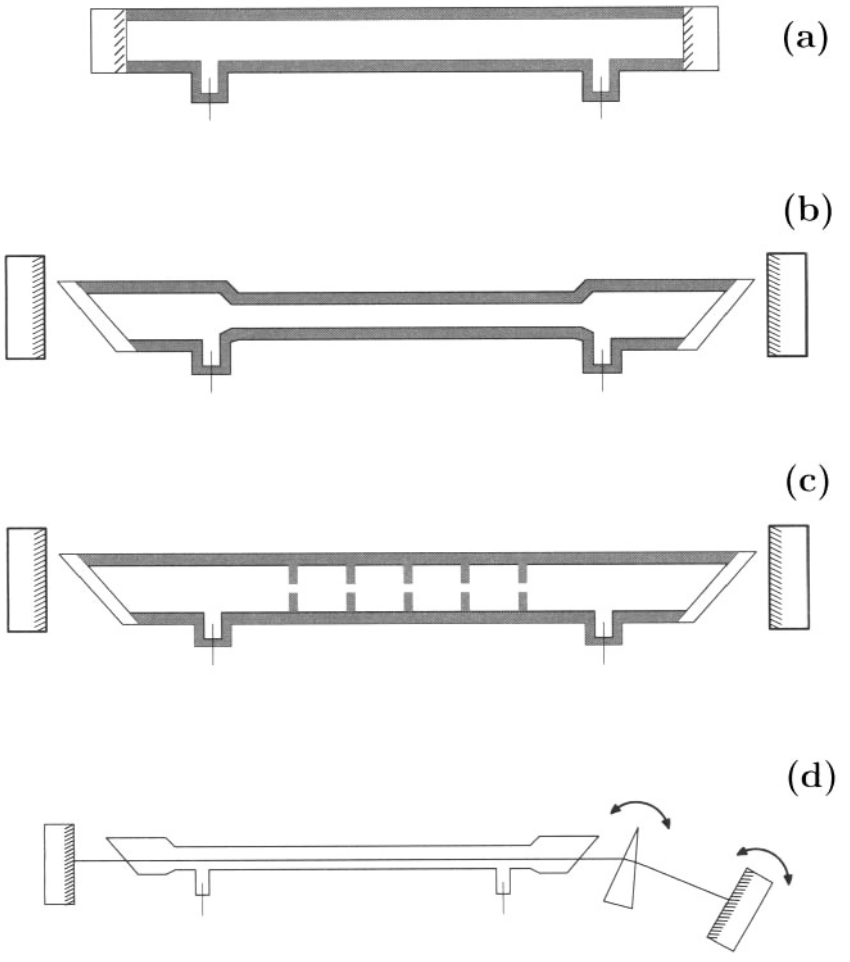


FIG. 12.1 – *Divers tubes de lasers à gaz.*

(a) et (b) : Décharge confinée par tube capillaire :
(a) Miroirs adhérés directement sur le tube, qui constitue l'armature de la cavité optique.
(b) Tube indépendant de la cavité optique, terminé par deux fenêtres à l'incidence de Brewster (pour une transmission sans perte) et permettant un réglage plus fin pour lasers métrologiques.
(c) Tube plus large pour lasers de puissance (autorisant un plus grand volume de gaz et une plus grande surface de refroidissement). La décharge est confinée par des pastilles en carbone ou en céramique.
(d) Cavité optique coudée avec un prisme, permettant la sélection de longueur d'onde en modifiant l'inclinaison du prisme ou du miroir.

TAB. 12.1 – ***Lasers à décharge dans les gaz*** *et leurs performances courantes (entre parenthèses appareils exceptionnels) – ρ désigne le rendement énergétique global entre le faisceau lumineux et la consommation électrique.*

	Atomes émetteurs	λ	continu P	ρ	impulsion $P \times \delta t = W$
	excimères exciplexes	U.V. ou bleu (*cf.* tableau 12.2)	//	1%	10MW × 20ns = 0.2J (400MW × 25ns = 10J)
	N_2	0,337μm	//		200kW × 5ns = 1mJ (1MW × 5ns = 5mJ)
Vapeur métal	Cu-Ne	0,510μm 0,578μm	//	1%	1MW × 20ns = 20mJ (répétition rapide ~ 10kHz)
	Pb-Ne	0,723μm	//		
— ions —	Ar^+	0,476μm 0,488μm 0,514μm	10W (100W)	0,03%	//
	Kr^+	0,521μm 0,568μm 0,647μm	10W	0,03%	//
	Cd-He	0,325μm 0,441μm	50mW		//
	Ne-He	0,633μm 1,15μm 3,39μm	50mW		//
	CO	~ 5μm	1kW	10%	(6MW × 80μs = 500J)
	CO_2-N_2	raies entre 9μm – 11μm	10kW (500kW)	20%	10MW × 1μs = 10J (10TW × 1ns = 10^4J)
	H_2O HCN	raies entre 28μm – 118μm 337μm	100mW		

TAB. 12.1 – (suite). *Caractéristiques et utilisations.*

Caractéristiques	Utilisations
U.V. ou bleu rendement acceptable impulsions seulement puissant	Industrie : photochimie sélective { dissociation (gravure, marquage) { polymérisation pompage de colorants bleus ou verts
U-V proche impulsion seulement puissance moyenne	Pompage de colorants bleus et verts
Vert rendement acceptable impulsions seulement puissant	Pompage industriel des colorants Séparation isotopique
Vert puissant en continu rendement très faible	Pompage des colorants (jaunes, orangés, rouges) Métrologie Spectacles
Rouge Puissant en continu Rendement très faible	Pompage des colorants (du proche I-R) Métrologie Spectacles
Bleu et proche U-V continu faible puissance	Procédés photochimiques
Rouge et I-R continu faible puissance	Alignement Optique interférentielle Métrologie. Standard de λ
I-R lointain Très bon rendement continu et impulsion très puissant	Industrie mécanique { Soudure, perçage, découpage { Traitement thermique Chirurgie Métrologie. Standard de λ Pompage de molécules $\Rightarrow$ I-R lointain
I-R lointain	Laboratoire Raccordement Optique-Micro-ondes

(en le multipliant par l'énergie d'une impulsion $W = 0,02$ Joule, on obtient la puissance moyenne $\overline{P} = W \times 10\,000$ Hz $= 200$ watts. Inversement certains lasers très puissants ne permettent que des taux de répétition de 10 Hz à 1 Hz pour laisser le temps de recharger l'alimentation électrique de décharge ou de refroidir le tube à décharge. On a également indiqué pour certains lasers leur rendement énergétique ρ, rapport entre l'énergie lumineuse fournie et l'énergie électrique consommée à la prise de courant. Nous ajoutons maintenant des renseignements spécifiques sur certains de ces lasers.

1) **Le laser Hélium-Néon** est le second à avoir été mis au point historiquement, juste après le laser à rubis. C'est le Néon qui est l'atome actif émetteur de lumière ; mais le pompage de deux niveaux particuliers du Néon est favorisé par leur presque coïncidence avec les deux niveaux excités métastables de l'Hélium (*cf.* Fig. 12.2), les écarts d'énergie correspondants sont du même ordre de grandeur que l'énergie thermique à température ordinaire ($T = 300$ K) soit : $kT \approx 1/40$ eV ≈ 200 cm^{-1}. Dans les collisions Ne-He* (métastable) les variations d'énergie cinétique des deux atomes permettent d'apporter l'énergie manquante ou d'absorber l'énergie excédentaire, et ceci permet le transfert de l'énergie interne d'excitation entre l'atome d'Hélium, qui retourne à l'état fondamental, et l'atome de Néon qui se trouve porté à la configuration excitée 5s ou 4s. Les conditions optimales de pompage sont obtenues dans un mélange de gaz où il y a quatre fois plus d'Hélium que de Néon.

Malheureusement, il est impossible d'augmenter le gain optique de ces lasers en forçant le courant de décharge, parce qu'on produit alors la destruction des niveaux métastables de l'Hélium. Avec les tubes courts (30 à 40 cm) on obtient une puissance de quelques milliwatts ; il faut allonger de manière importante le tube à décharge (2 mètres) pour obtenir une puissance lumineuse de plusieurs dizaines de milliwatts.

La figure 12.2 indique les diverses transitions sur lesquelles on peut observer l'émission laser. La plus courante est la raie rouge à 6 328 Å ; la raie verte à 5 434 Å est de faible intensité et est plus rarement utilisée. Les raies infrarouges de 1,15 μm et 3,39 μm sont fréquemment utilisées en métrologie. On a aussi indiqué sur la figure 12.2 quelques transitions visibles vers la configuration 3s ; leur existence est importante pour vider les niveaux inférieurs des transitions laser et maintenir ainsi l'inversion des populations. (Les anciennes notations de Paschen pour les niveaux d'énergie sont indiquées sur la colonne de droite parce qu'elles sont encore utilisées par certains auteurs.) Le laser He-Ne rend encore beaucoup de services, mais pour les usages très courants (alignement, essais) il est de plus en plus remplacé par des lasers à semi-conducteurs, qui émettent dans le rouge.

2) **Les lasers à Argon ionisé et Krypton ionisé** continuent d'être largement utilisés malgré leur efficacité très faible ($\rho = 0,03$ %) parce que ce sont les seuls lasers primaires capables de fournir une puissance continue de la dizaine de watts en lumière visible : le vert et le bleu pour Ar^+, le rouge

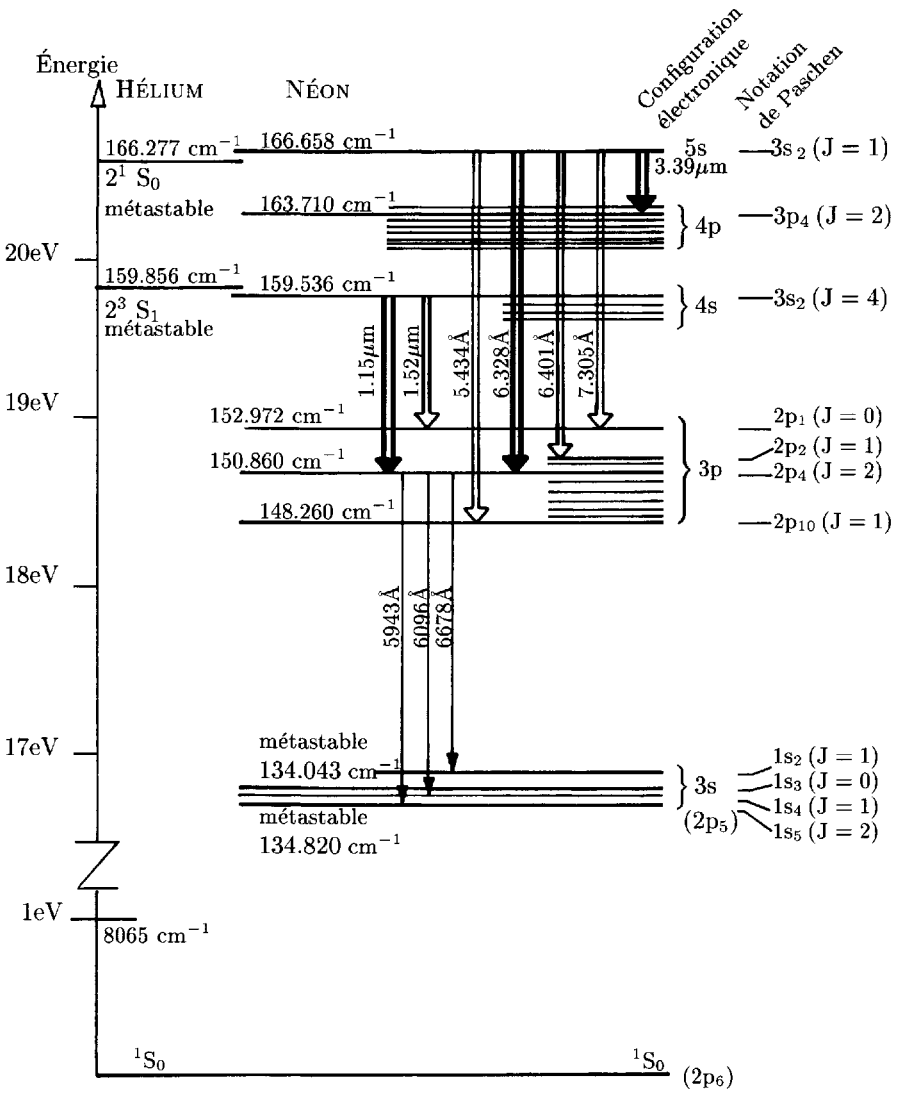


FIG. 12.2 – *Niveaux d'énergie comparés de l'Hélium et du Néon. Les flèches doubles épaisses représentent les transitions pouvant donner lieu à émission laser.*

pour Kr^+. Ceci est obtenu au prix d'une puissance électrique consommée de 30 KW, et d'un courant d'eau de refroidissement à fort débit, puisque la presque totalité de cette énergie se transforme en chaleur et doit être évacuée.

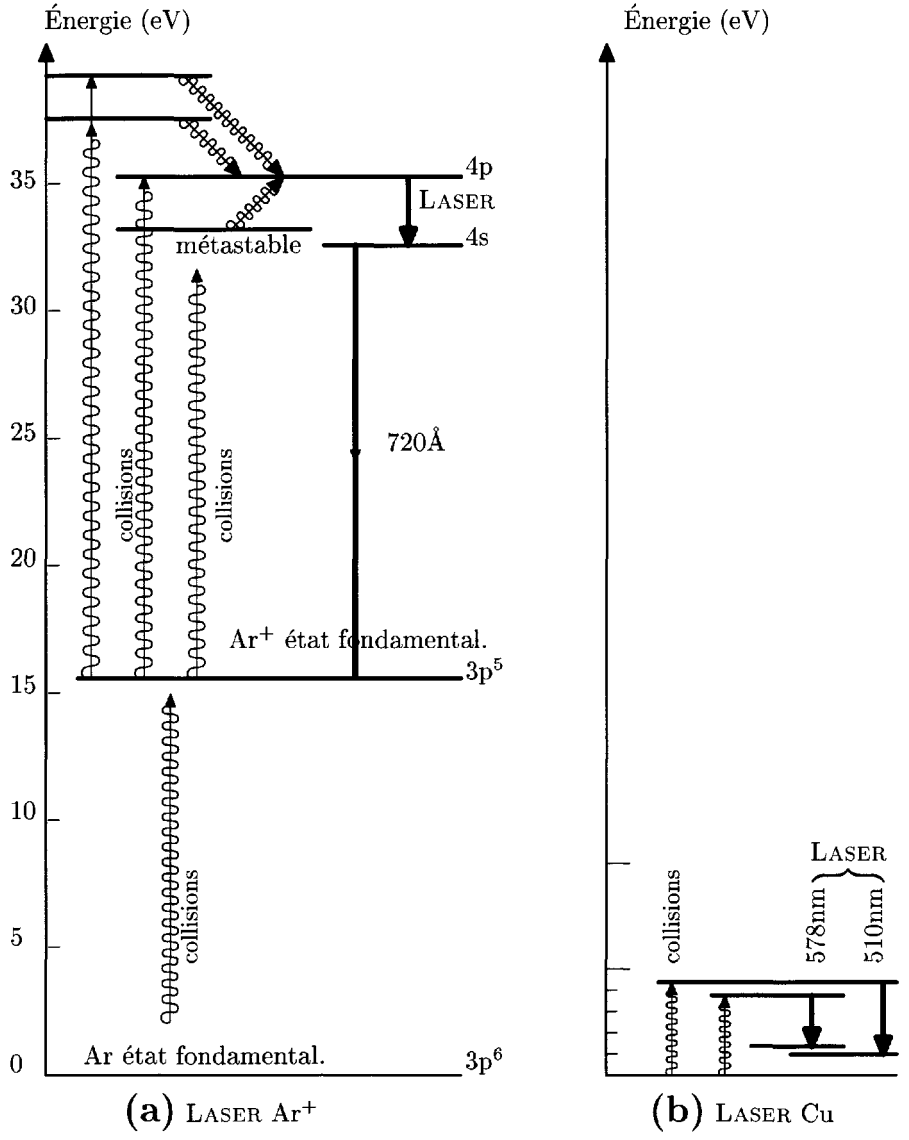


FIG. 12.3 – *Comparaison des schémas énergétiques d'excitation du laser Argon ionisé et du laser cuivre.*

La figure 12.3a représente le schéma énergétique d'excitation de l'ion Argon et explique en grande partie ce faible rendement énergétique puisque l'énergie du photon laser ne représente que 1/15 à 1/20 de l'énergie mise en jeu dans

le processus de pompage. La multiplicité des processus d'excitation avec leurs diverses constantes de temps permet le fonctionnement continu.

Indépendamment de leur usage courant à des fins spectaculaires, ces deux lasers restent indispensables pour le pompage optique de lasers accordables en fonctionnement continu lorsque la bande d'absorption des cristaux dopés ou des solutions de colorants utilisés tombe dans le vert ou dans le rouge (*cf.* §12.4). En modifiant la décharge et les miroirs d'un laser à Ar^+ on peut aussi produire des faisceaux ultraviolets, de moindre puissance, utiles pour le pompage de certains colorants fluorescents dans le bleu.

3) **Le laser à cuivre** est le plus utilisé des lasers à vapeur métallique à cause d'un rendement énergétique acceptable ($\rho = 1$ %) et de sa gamme de longueur d'onde (jaune-vert). Le premier laser à vapeur métallique mis au point, le laser à plomb émet dans une gamme de longueur d'onde moins utile à la limite du rouge et de l'infrarouge.
Le schéma énergétique de la figure 12.3b permet de comprendre à la fois :

1. le rendement énergétique bien supérieur à celui de l'Argon ionisé (l'énergie d'excitation est moins du double de celle des photons émis ;

2. l'impossibilité de fonctionnement en régime continu (le peuplement direct du niveau excité par les collisions ne permet pas une alimentation régulière).

L'intérêt de ce laser réside dans la possibilité d'une forte cadence de répétition des impulsions, dépassant 10 kHz, et permettant d'obtenir une puissance moyenne de 200 watts, vingt fois supérieure à la puissance continue du lasers Ar^+, dans la même gamme de longueur d'onde.

La construction du laser à cuivre pose de délicats problèmes techniques pour réaliser la coexistence sur le même tube de trois conditions difficiles à concilier : température élevée de la vapeur de cuivre, haute tension de la décharge électrique ($\sim$10 kV) et étanchéité du circuit de refroidissement, indispensable pour évacuer les 99 % de l'énergie électrique qui ne sont pas transformés en lumière. Ces problèmes ont été résolus pour permettre son application à la séparation isotopique (pompage de colorants qui produisent l'excitation résonnante d'un seul isotope, suivie de son ionisation spécifique).

4) **Le laser à azote** N_2 a été très répandu dans les années 1970-1980 parce que son rayonnement dans l'U.V. proche convient bien au pompage optique de nombreux colorants. Il ne fonctionne qu'en impulsions.

Le diagramme d'énergie de la figure 12.4 concernant la molécule N_2 est typique d'une molécule diatomique symétrique. Nous rappelons rapidement la construction en trois étapes de ces diagrammes d'énergie moléculaires :

1. on représente l'énergie d'interaction calculée entre les deux atomes en fonction de la distance de séparation r de leur noyaux ; les diverses courbes correspondent à divers états d'excitation des atomes ; pour

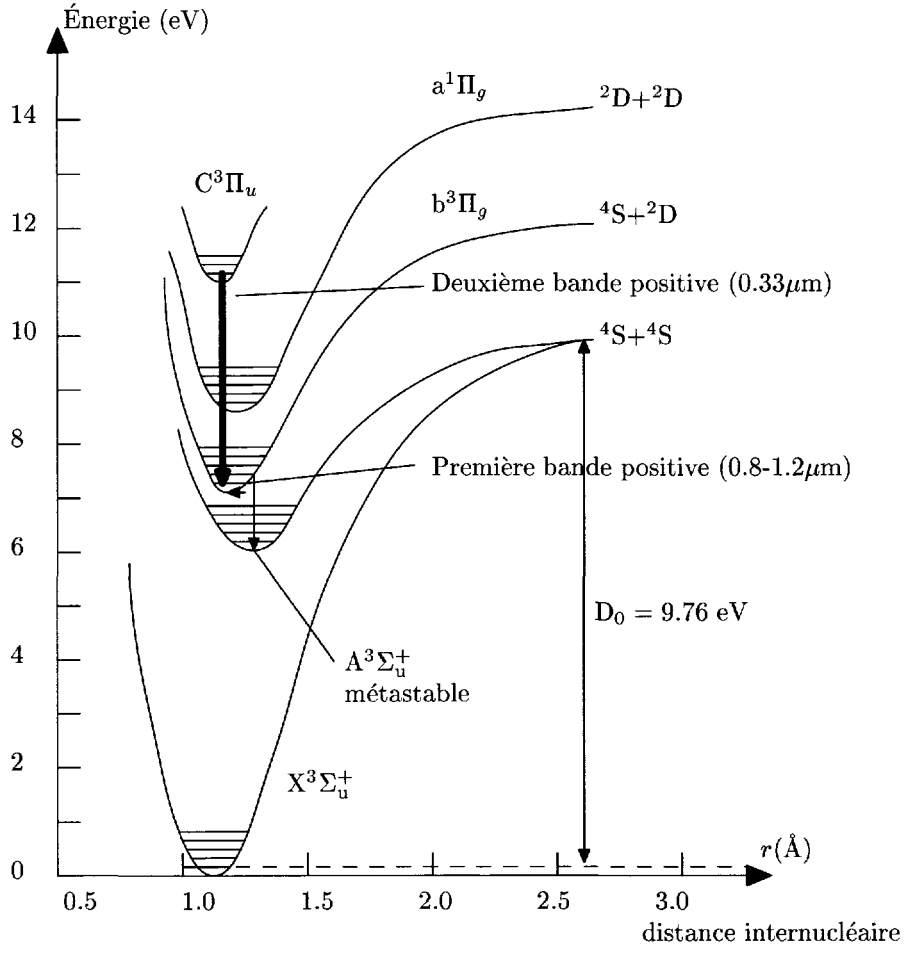


FIG. 12.4 – *Diagramme énergétique de la molécule d'azote montrant la transition du laser à Azote à 0.33μm.*

les courbes les plus basses, il s'agit d'un atome N à l'état fondamental et d'un autre à l'état excité. Le minimum de chacune de ces courbes de potentiel pour une valeur particulière de la distance $r_{\min}$ (ici entre 1,1 et 1,3 Å selon les courbes) est précisément ce qui fait l'existence de la molécule : état stable d'énergie minimum lorsque les deux atomes sont à la distance $r_{\min}$. L'écart d'énergie potentielle entre le minimum de la courbe et son asymptote horizontale pour r très grand représente l'énergie de liaison de la molécule ;

2. à ce premier calcul, il faut ajouter le fait que la distance r peut osciller autour de la valeur $r_{\min}$ dans un mouvement de vibration l'un par rapport à l'autre des deux atomes N. Le calcul quantique de ce phénomène d'oscillation est très voisin du calcul de l'oscillateur harmonique quantique, dans la mesure où au voisinage de son minimum, la courbe d'énergie a une forme voisine de celle d'une parabole : on calcule des niveaux d'énergie de vibration, quasi-équidistants, représentés par des segments de droite horizontaux à l'intérieur de chacun des minima des courbes d'énergie potentielle (la longueur horizontale de chaque segment correspond approximativement à l'extension du mouvement d'oscillation de la distance r) ;

3. les molécules sont également entraînées dans des mouvements de rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe interatomique r. La théorie quantique de ces rotateurs moléculaires, mettant en jeu les propriétés quantiques des moments cinétiques, permet de calculer des sous-niveaux d'énergie de rotation dont les écarts sont beaucoup plus faibles que ceux des niveaux de vibration de l'alinéa précédent, mais qui sont inégaux entre eux (les écarts successifs entre sous-niveaux de rotation voisins croissent proportionnellement au nombre quantique de moment cinétique J du rotateur). Ces écarts sont trop faibles pour être représentés sur le diagramme de la figure 12.4 ; mais chacun des niveaux de vibration de cette figure doit être en réalité remplacé par une série de sous-niveaux très serrés.

Heureusement les règles de sélection limitent le nombre des transitions radiatives possibles entre tous ces niveaux de rotation-vibration. Néanmoins la transition électronique de la molécule N_2 entre deux courbes de potentiel est remplacée par une série de transitions de fréquences voisines mais bien distinctes entre de nombreux niveaux de rotation-vibration. On observe dans le spectre des molécules des bandes de fréquence occupées par un grand nombre de raies spectrales voisines mais distinctes (on ne confondra donc pas ces bandes moléculaires de raies discrètes avec les bandes continues des milieux condensés).

Pour des raisons énergétiques, le niveau de vibration le plus bas de l'état excité a plus de chance d'être peuplé dans la décharge ; et c'est de lui qu'est issue la transition laser à 0,337 μm dans le proche U.V.

5) **Le laser à gaz carbonique** CO_2 est le laser le plus utilisé dans l'industrie et mérite qu'on s'y attarde un peu même si sa molécule triatomique conduit à des phénomènes plus compliqués. Par ailleurs, l'explication de son fonctionnement est simplifiée du fait que l'on reste dans l'état électronique fondamental de la molécule ; l'équivalent pour la molécule d'azote serait d'utiliser uniquement la courbe de potentiel la plus basse de la figure 12.4 et de considérer seulement les niveaux de vibration dessinés dans son minimum et les transitions de faible énergie entre ces niveaux de vibration voisins. La plus

grande complexité de la molécule triatomique conduit à distinguer plusieurs modes de vibration principaux qui sont schématisés sur la figure 12.5a :

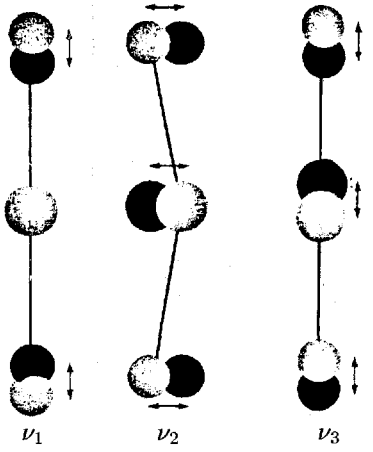
- *l'élongation symétrique* où les deux atomes O se rapprochent ou s'éloignent symétriquement de l'atome C central ; à la fréquence $\nu_1 = 4,16 \cdot 10^{13}$ Hz soit $h\nu_1 = 0,172$ eV ;
- *la courbure de la molécule*, où les deux atomes ne restent plus alignés avec l'atome C central ; à la fréquence $\nu_2 = 2,00 \cdot 10^{13}$ Hz soit $h\nu_2 = 0,083$ eV ;
- *l'élongation dissymétrique*, où un atome O se rapproche du centre C pendant que l'autre atome O s'en éloigne, et réciproquement ; à la fréquence $\nu_3 = 7,05 \cdot 10^{13}$ Hz soit $h\nu_3 = 0,292$ eV.

Le mode de vibration le plus général sera caractérisé par les nombres de quanta d'énergie v_1, v_2 et v_3 correspondant à ces trois modes principaux, et il sera dénoté par le symbole (v_1, v_2, v_3). En négligeant les écarts à l'oscillateur harmonique, son énergie pourra s'écrire en première approximation $E(v_1, v_2, v_3) = v_1.h\nu_1 + v_2.h\nu_2 + v_3.h\nu_3$.

La figure 12.5b représente les premiers niveaux de vibration de la molécule CO_2, correspondant à ces trois modes principaux. L'échelle ayant été dilatée par rapport à la figure 12.4, il est possible sur cette nouvelle figure de représenter les sous-niveaux d'énergie de rotation, inégalement espacés, au-dessus de chaque niveau de vibration. On a représenté aussi à côté des niveaux de vibration du CO_2 le premier niveau de vibration ($v = 1$) de la molécule d'azote. La quasi-coïncidence entre ce niveau de l'azote et le niveau (0,0,1) du CO_2 explique pourquoi le mélange d'azote avec le gaz carbonique (en parts à peu près égales) favorise le peuplement sélectif de ce niveau de vibration (0,0,1) et par suite les émissions laser aux longueurs d'onde de 10,6 μm vers le niveau (1,0,0) ou 9,4 μm vers le niveau (0,2,0). L'addition d'un peu d'Hélium (atome léger et rapide) provoque des collisions qui accélèrent la relaxation des deux niveaux inférieurs vers l'état fondamental.

Lorsqu'on utilise le laser à CO_2 dans les laboratoires, on peut, grâce au réglage de la cavité optique, sélectionner les fréquences des diverses transitions entre les sous-niveaux de rotation du niveau de vibration supérieur (0,0,1) et les sous-niveaux de rotation des deux niveaux de vibration inférieurs (1,0,0) et (0,2,0). On peut ainsi obtenir l'émission laser sur plus de 100 raies distinctes, réparties entre 9 μm et 11 μm de longueur d'onde. Ce « peigne » de longueurs d'onde est précieux pour la métrologie dans cette portion de l'infrarouge.

Pour augmenter les plages de longueur d'onde disponibles, on peut augmenter la pression du gaz de décharge afin de produire un élargissement par collisions des raies spectrales (*cf.* chapitre 13). L'augmentation de la densité du gaz qui en résulte augmente le gain optique du milieu amplificateur et permet de réduire les dimensions du laser.



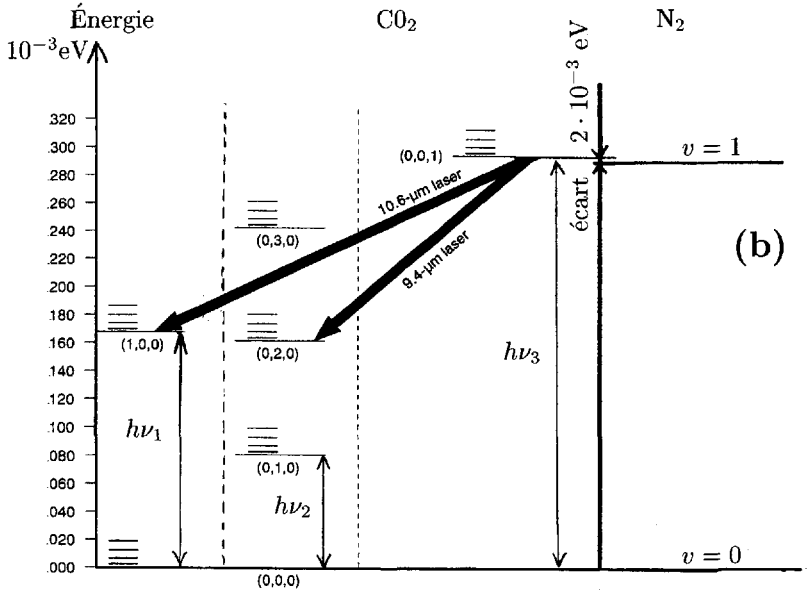


FIG. 12.5 – *Les niveaux de vibration et de rotation de la molécule CO_2.*

(a) Représentation des trois modes principaux de vibration ;

- *ν_1 élongation symétrique ;*
- *ν_2 courbure ;*
- *ν_3 élongation dissymétrique.*

(b) Diagramme d'énergie de vibration-rotation de CO_2, comparé à celui de N_2.

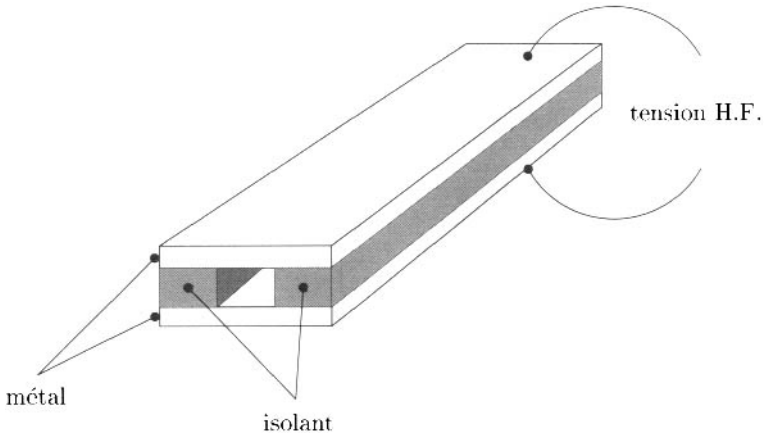


FIG. 12.6 – *Schéma de principe d'un laser guide d'onde (on n'a pas représenté les deux miroirs collés aux extrémités du tube rectangulaire).*

On arrive ainsi au concept du laser **guide d'onde** schématisé sur la figure 12.6 : deux plaques de métal épaisses, séparées par deux baguettes plates d'isolant, forment une chambre allongée de quelques millimètres carrés de section contenant le mélange gazeux sous une pression de 1 à 10 atmosphères. La tension Haute Fréquence appliquée entre ces deux plaques permet d'entretenir la décharge dans cet espace confiné. L'élargissement par collisions devient du même ordre de grandeur que la séparation entre les raies et permet de couvrir la presque totalité de la plage de longueur d'onde entre 9 et 11 μm. La dénomination de guide d'onde est liée au mode de propagation de la lumière dans cette cavité optique complètement fermée, qui utilise la réflexion totale de la lumière sur les deux parois isolantes. Ces modes guidés sont très différents des modes gaussiens des chapitres 15 et 16. Cette technique de laser guide d'onde a permis de fabriquer des appareils miniaturisés délivrant 20 watts et servant aux chirurgiens de bistouri laser.

La valeur exacte de la longueur d'onde est sans importance dans les nombreuses applications industrielles, où le laser à CO_2 est apprécié pour son rendement énergétique exceptionnel. Il est devenu un outil de choix dans l'industrie mécanique pour percer, découper, souder ou pour réaliser des traitements thermiques superficiels (sans déformer les pièces à traiter). De nombreux appareils de puissance comprise entre 1 kW et 10 kW sont offerts au choix des ingénieurs.

On construit, pour des besoins spécifiques, des lasers exceptionnellement puissants fournissant des centaines de kilowatts. Pour parvenir à de telles performances, on utilise un mélange gazeux sous relativement forte pression (il faut alors utiliser une pré-ionisation, permettant d'amorcer une décharge

Haute Fréquence) ; et l'on le fait circuler à grande vitesse transversalement à la cavité optique pour éliminer très rapidement les molécules retombées aux niveaux inférieurs (1,0,0) ou (0,2,0) et leur donner le temps de se refroidir et de relaxer à l'état fondamental. On parle de laser de type T.E.A. (Transverse Excitation Atmospheric).

Avant de terminer ce paragraphe, nous signalons le tableau 12.3 (page 254) qui indique les ordres de grandeurs des paramètres physiques dans les lasers les plus courants.

12.2 Excimères ou Exciplexes

Bien qu'ils utilisent une excitation par collisions et soient déjà recensés sur le tableau 12.1, nous donnons une place à part aux lasers à Excimères parce qu'ils ne peuvent fonctionner qu'à haute pression, ne peuvent se contenter des simples décharges du paragraphe précédent et doivent être construits de manière assez différente.

Nous avons montré sur la figure 12.4 le diagramme d'énergie d'une molécule diatomique symétrique N_2 que l'on pourrait appeler encore molécule dimère puisqu'elle est formée par la liaison de deux parties identiques (les deux atomes d'azote) ; et nous avons expliqué que le creux des courbes de potentiels est précisément ce qui permet de maintenir la liaison chimique entre les deux parties de cette molécule dimère. Par comparaison avec la figure 12.4, nous montrons sur la figure 12.7 le diagramme d'énergie d'une molécule dimère qui peut se former entre un atome excité A^* et un autre atome A à l'état fondamental (pour la distance $r_{\min}$ de ces deux atomes) ; mais au contraire si les deux atomes sont tous les deux à l'état fondamental, la courbe de potentiel calculée n'a pas de minimum à distance r finie ; c'est-à-dire que les deux atomes à l'état fondamental se repoussent et évoluent spontanément vers l'état d'énergie minimale où ils sont éloignés l'un de l'autre. La molécule dimère existe à l'état excité A^*A mais pas à l'état fondamental AA ; et la contraction de « excited dimer » a conduit au nom d'« excimer », ou en français excimère, pour ce type de molécule.

Nous avons expliqué à plusieurs occasions que la durée de l'émission laser est conditionnée par la disparition rapide des atomes ou molécules qui, après l'émission stimulée d'un photon, se retrouvent au niveau inférieur E_1 de la transition laser et contribuent alors à réduire l'inversion des populations créée par le pompage. Il faut que ce niveau inférieur E_1 soit lui-même un état excité de courte durée de vie (laser Ne-He par exemple) ou bien il faut évacuer rapidement les molécules de CO_2 pour obtenir des émissions très intenses. Les molécules excimères représentent, de ce point de vue, un cas idéal puisque l'état inférieur de la transition se dissocie de lui-même extrêmement rapidement.

La difficulté en revanche est de produire ces molécules excimères : lorsqu'on produit un atome A^* excité, il faut qu'il rencontre un atome A avant qu'il

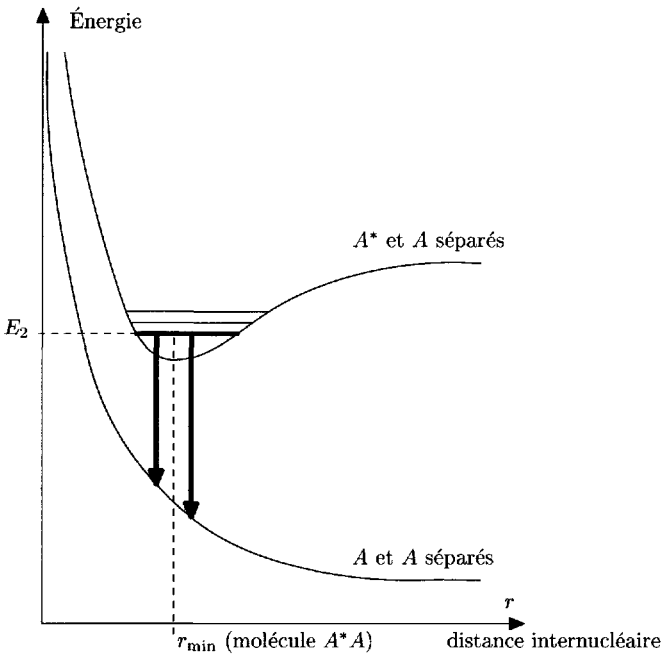


FIG. 12.7 – *Diagramme d'énergie d'une molécule excimère A^*A montrant la transition laser.*

ne se soit désexcité par émission spontanée, c'est-à-dire encore que le temps moyen entre collisions soit du même ordre de grandeur que la durée de vie de l'état excité A*. Ceci oblige à utiliser un gaz sous une haute pression de plusieurs atmosphères, où les décharges traditionnelles ne fonctionnent plus.

En pratique les lasers à excimères sont souvent construits en deux parties :

a) un générateur électrostatique de plusieurs centaines de kilovolts qui accélère des électrons sous vide ;

b) des électrons de haute énergie traversent une fine membrane parallèle à l'axe optique du laser (en ne perdant qu'une faible fraction de leur énergie) et pénètrent ainsi transversalement dans le gaz à haute pression, où leur profondeur de pénétration est suffisante pour produire l'excitation dans tout le volume utile. D'autres appareils utilisent une préionisation et une décharge Haute Fréquence comme dans les lasers CO_2 de forte puissance.

Le tableau 12.2 indique les diverses longueurs d'onde produites par les véritables excimères (molécules symétriques) ou les exciplexes (molécules dissymétriques) obtenus dans des mélanges gazeux. Ces longueurs d'onde ne sont pas définies avec exactitude et peuvent être accordées sur un petit intervalle de l'ordre du nanomètre, comme le montre le diagramme d'énergie

TAB. 12.2 – *Longueurs d'onde des lasers à excimères ou exciplexes.*

Excimères	λ (μm)	Exciplexes	λ (μm)
Ar_2	0,126	ArCl	0,175
Kr_2	0,147	ArF	0,193
F_2	0,158	KrCl	0,222
Xe_2	0,173	KrF	0,248
Cl_2	0,258	ClF	0,285
Br_2	0,290	XeBr	0,282
I_2	0,343	XeCl	0,308
		XeF	0,351 0,483
		HgI	0,443
		HgBr	0,502
		HgCl	0,558

de la figure 12.7. En effet, l'émission d'un photon est instantanée et se produit donc pour une distance internucléaire r donnée, sans que les atomes aient le temps de bouger (c'est le principe de Franck Condon). La molécule à l'état excité, même dans l'état de vibration le plus bas, oscille légèrement ; et selon l'instant, la distance internucléaire r peut avoir une valeur légèrement différente, conduisant à une énergie différente du photon émis.

Les lasers à excimères ou exciplexes sont utilisés industriellement parce qu'ils fournissent des puissances appréciables dans une gamme d'ultraviolet (proche ou lointain), produisant des effets photochimiques, sélectifs selon les matériaux ; ces effets peuvent être destructifs par cassure de liaisons chimiques (perçage, gravure) ou constructifs par polymérisation. On peut aussi signaler le laser HgBr dont la couleur bleu-vert est celle qui se propage le mieux dans l'eau.

TAB. 12.3 – *Paramètres caractéristiques de lasers courants (ordres de grandeur).*

	Décharge dans les gaz			Milieux condensés		
Type de LASER	He-Ne	Ar^+	CO_2	Rubis ou Nd	Colorants	semi-conducteurs
$1/A = \tau_1$ (sec)	10^{-8}	10^{-8}	$0.2^{(*)}$	10^{-3}	10^{-8}	10^{-9}
$\varphi(\nu_0) = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{hom}}}$ ou τ_2 (sec)	10^{-8}	10^{-8}	$(4{,}4 \times 10^7/\text{Torr})^{-1}$	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
$\frac{1}{\Delta\nu_{\text{inhom}}}$ ou T_2^* (sec)	10^{-10}	$10^{-10}/3$	$(3{,}14 \times 10^8)^{-1}$	10^{-10}	10^{-13}	—
Section efficace d'émission σ_{21} $(\text{cm})^2$	10^{-12}	10^{-12}	10^{-15}	3×10^{-20}	3×10^{-16}	10^{-15}
Densité atomique n (cm^{-3})	10^9	10^{10}	10^{14}	10^{19}	10^{15}	10^{18}
Coefficient d'amplification α opposé du coefficient d'absorption K	10^{-3}	10^{-2}	0,1	0,3	3	50
Longueur typique l (cm)	10	10^2	10^2	10	0,1	3×10^{-2}

Gain log. à vide (sur 1 tour) $\gamma_0 = \alpha l$ ou $2\alpha l$.

$^{(*)}$ mais le temps de pompage par collisions est $\sim 0{,}4 \times 10^{-2}$ sec.

12.3 Pompage optique ou chimique dans les gaz

Nous rassemblons dans ce paragraphe divers procédés de pompage qui ont été étudiés dans les gaz mais n'ont pas conduit à des applications courantes comme ceux des deux paragraphes précédents. Ils sont résumés sur le tableau 12.4.

Le pompage chimique est une idée séduisante, mais qui ne semble pas avoir abouti jusqu'à présent à des applications réelles. Le pompage optique est réellement indispensable dans les milieux condensés (liquide ou solide) où l'on ne dispose guère d'autres méthodes de pompage ; et l'efficacité ou la commodité de ce pompage optique tient à une propriété spécifique des milieux condensés : l'existence de larges bandes continues d'énergie, que l'on ne trouve pas dans les gaz. L'utilisation du pompage optique dans les gaz est donc tout à fait exceptionnelle.

12.3.1 Pompage optique résonnant de vibrations moléculaires

Le schéma de principe de ce procédé est indiqué sur les diagrammes d'énergie de la figure 12.8, qui est à comparer avec le diagramme d'énergie du laser CO_2 (Fig. 12.5) : on représente deux niveaux de vibration d'une molécule et les sous-niveaux de rotation qui leur correspondent (il n'y a donc ici aucune excitation électronique). Compte-tenu des écarts inégaux entre les sous-niveaux de rotation, on obtient un grand nombre de transitions à fréquences différentes entre les sous-niveaux de rotation de la vibration excitée et les sous-niveaux de rotation du niveau fondamental de vibration (formant une bande de raies discrètes).

On a choisi une molécule dont une bande de raies d'absorption tombe dans la gamme des 10 μm du laser CO_2. Comme d'autre part le laser CO_2 est capable d'émettre plus de 100 fréquences différentes, la probabilité de trouver une coïncidence entre une des raies d'absorption de cette molécule et une des raies d'émission du CO_2 est assez importante ; et l'expérience montre que l'on trouve de telles coïncidences (que l'on peut aussi favoriser en déplaçant les raies avec un effet Stark par application d'un champ électrique). Les trois schémas de la figure 12.8 supposent que l'on a trouvé une telle coïncidence avec un sous-niveau de départ d'énergie assez basse pour pouvoir être peuplé par agitation thermique. L'irradiation avec le laser CO_2 permet alors de peupler sélectivement un sous-niveau de rotation du niveau de vibration supérieur par excitation résonnante. On crée ainsi l'inversion de population entre ce niveau d'arrivée et les niveaux inférieurs.

TAB. 12.4 – *Pompage optique et chimique dans les gaz.*

Pompage chimique	λ	P continu	Impulsion $P \times \delta t = W$
$H_2O_2 \rightarrow 2ClH + 0_2^*$ puis $0_2^* + I \rightarrow I^*$	$1{,}3\mu m$	8KW	
$F + H_2 \rightarrow H + HF^*$ raies $H + F_2 \rightarrow F + HF^*$ entre	$2{,}7\mu m$ $3{,}2\mu m$	1KW (2MW)	
DF^* raies entre	$3{,}5\mu m$ $4{,}1\mu m$		
HBr^* raies entre	$4{,}0\mu m$ $4{,}6\mu m$		
Photo-dissociation (avec λ_p)			
$INa \rightarrow I + Na^*$ $\lambda_p \lesssim 0{,}22\mu m$	$0{,}59\mu m$		
$R\text{-}CN \rightarrow R + CN^*$ $\lambda_p \lesssim 0{,}15\mu m$	$1{,}09\mu m$		
$CF_3I \rightarrow CF_3 + I^*$ $\lambda_p \lesssim 0{,}27\mu m$	$1{,}3\mu m$		(100GW × 1ns = 100J)
Excitation résonnante par LASER $C0_2$ (*cf.* Figure 12.8)			
NH_3 raies entre	$50\ \mu m$ $300\mu m$		
$CH_2{=}CHCl$ $CH_2{=}CHBr$ $CH_2{=}CHF$ $CH_2{=}CHCN$ $CH_2{=}CF_2$ CH_3Br CH_3I CH_3F CH_30H raies entre	$120\ \mu m$ $2400\mu m$	10mW	1KW × 1μs = 1mJ

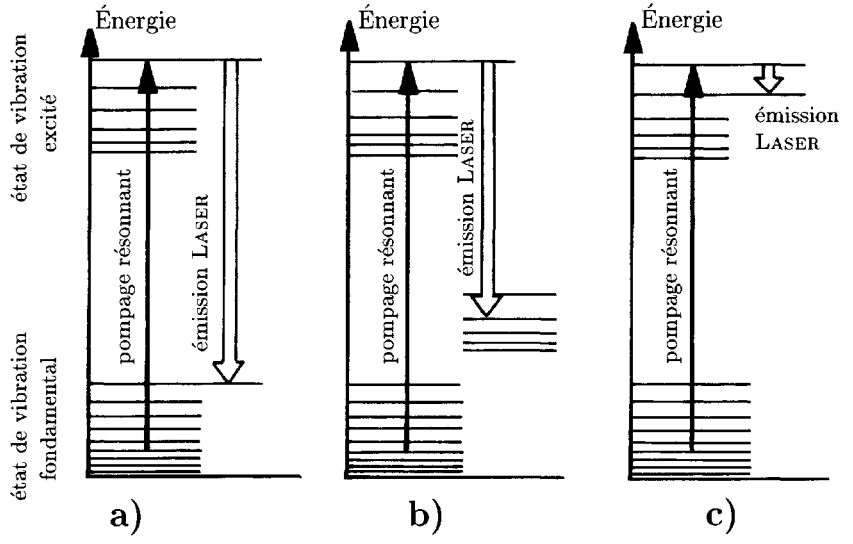


FIG. 12.8 – *Pompage optique des lasers moléculaires infrarouges (schémas énergétiques).*

a) Pompage et émission dans le même état vibrationnel, mais dans des niveaux rotationnels distincts ;

b) pompage et émission dans deux états vibrationnels distincts ;

c) émission sur une transition de rotation pure en I-R lointain.

Les divers schémas de la figure 12.8 représentent les diverses émissions laser possibles :

a) retour à un sous-niveau de rotation très excité du niveau de vibration de départ (il faut qu'il soit assez élevé en énergie pour que l'agitation thermique ne le peuple que de manière négligeable) ;
b) retour vers un autre niveau de vibration intermédiaire ;
c) retour vers un sous-niveau de rotation voisin du niveau de vibration excité. On obtient alors une très faible fréquence de transition, c'est-à-dire une très grande longueur d'onde, dans les centaines de μm, voire le millimètre.

Le tableau 12.4 (page 256) donne une idée des types de molécules utilisées, ammoniaque, halogénures de vinyle, fluoroéthylène ou halogénures de méthyle. Ces lasers sont utilisés au laboratoire pour permettre des études dans la zone de longueur d'onde millimétrique, intermédiaire entre le domaine de l'optique et le domaine des micro-ondes (qui relève des techniques de la radio et de l'électronique). Ils fournissent de nombreuses longueurs d'onde, différentes de celles obtenues avec les lasers à décharge à H_2O ou à HCN.

12.3.2 Production de molécules excitées par photodissociation ou réaction chimique

Ces deux méthodes relèvent d'une idée commune, qui n'est pas sans rapport avec les lasers à excimères : produire des molécules directement à l'état excité dans un milieu gazeux, où ces mêmes molécules n'existent pas encore, ce qui permet de réaliser directement l'inversion des populations.

Le tableau 12.4 indique des exemples de photodissociations produisant directement molécules, radicaux ou atomes à l'état excité. Mais pour ce faire, il faut utiliser une lumière appartenant à un Ultra-Violet déjà lointain. Les expériences sont généralement effectuées avec de puissants flashes au Xénon dont on utilise réellement 1 % seulement de la lumière produite, puisque le proche U.V. et le visible ne servent à rien. L'utilisation de flashes fait que ce procédé ne fonctionne qu'en impulsions. Le laser à iode a donné lieu à des réalisations spectaculaires en laboratoires industriels ; mais le faible rendement limite l'intérêt de ces réalisations.

Il existe un autre laser à iode produisant le même rayonnement à 1,3 μm mais où l'iode excité est produit à partir d'une réaction chimique en cascade à partir d'eau oxygénée et de chlore (le rendement efficace de cette réaction chimiluminescente est dû à la longue durée de vie de l'oxygène moléculaire excité, ainsi qu'à la longue durée de vie de l'iode atomique excité qui donne le temps d'accumuler une population suffisante).

L'idée du pompage chimique est d'utiliser des réactions chimiques très fortement exothermiques et dans lesquelles l'énergie excédentaire peut être transformée en énergie interne des atomes ou molécules. Nous donnerons plus de détails sur le laser à acide fluorhydrique qui a été l'un des plus étudiés. On remarque que chacune des deux réactions indiquées utilise l'un des deux composants sous forme atomique H ou F ; un mélange des deux gaz H_2 et F_2 ne conduit pas à la réaction chimiluminescente parce que la dissociation des deux molécules H_2 et F_2 consomme trop d'énergie. Il faut démarrer les réactions en produisant un peu de fluor atomique par dissociation de la molécule SF_6 dans une décharge ; ensuite chacune des réactions produit l'espèce atomique H ou F qui permet d'entretenir l'autre réaction. Leur bilan énergétique s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} F+H_2 \rightarrow H+HF+ \text{ 132 kJ/mole soit 1,4 eV pour 1 vraie molécule} \\ H+F_2 \rightarrow F+HF+ \text{ 400 kJ/mole soit 4,1 eV pour 1 vraie molécule} \end{array}\right\}$$

(il faut diviser les kilojoules par le nombre d'Avogrado, puis les transformer en électron-Volt soit 1 kJ/mole $\simeq 1/100$ eV).

Ces énergies sont nettement supérieures à celle du premier niveau vibrationnel excité à 0,45 eV (correspondant à un photon de $\lambda = 2,7\mu$m). En fait un peu plus de la moitié de l'énergie de réaction est transformée en énergie d'excitation vibrationnelle des molécules HF, qui se répartissent entre plusieurs niveaux vibrationnels.

Nous avons comparé ces lasers chimiques avec les lasers à excimères sous l'aspect de la production directe de molécules excitées. Mais une différence importante, par rapport aux excimères, c'est que les molécules produites sont stables à l'état fondamental ; il faut donc les évacuer rapidement pour maintenir l'inversion des populations.

Ces lasers chimiques peuvent fonctionner en continu ou en impulsion de longue durée à condition que l'alimentation en gaz frais et l'évacuation des gaz « brûlés » soit assurée avec de très fort débits. On produit des puissances lumineuses de 1 kilowatt dans des expériences de laboratoire ; mais on peut monter au Mégawatt dans des modèles industriels étudiés à des fins militaires. Il serait tentant à des fins militaires de pouvoir produire d'aussi fortes puissances sans être relié à une source d'énergie électrique, uniquement à partir des réservoirs portés sur un véhicule. Mais il n'est pas certain que ce type de procédé soit réellement maîtrisable de façon pratique.

12.4 Pompage optique en milieu condensé. Lasers accordables

On se référera au tableau 12.5 pour la liste des lasers correspondants. En dehors des semi-conducteurs (étudiés au paragraphe suivant), le pompage optique est la seule méthode applicable, de manière générale, dans les milieux condensés, solides ou liquides. Le principe de ce pompage optique a déjà été expliqué au chapitre 8. L'explication est la même pour les ions dilués dans des matrices cristallines (concentration courante 10^{-2} à 10^{-3}) ou les colorants organiques dilués à des concentrations comparables dans divers solvants.

La figure 12.9 reprend cette explication qui utilise les larges bandes formant un continuum d'énergie obtenues lorsque de nombreux niveaux d'énergie très voisins sont assez élargis pour se recouvrir les uns les autres (les phonons de l'agitation thermique remplacent les niveaux de rotation – vibrations moléculaires du paragraphe précédent) ; mais l'explication utilise aussi les transitions non radiatives avec émission de phonons acoustiques entre ces niveaux très proches. Ces transitions non radiatives jouent un rôle essentiel puisque ce sont elles qui ramènent en un niveau unique au bas de la bande d'énergie excitée tous les atomes qui ont été portés à un niveau quelconque de cette bande par l'irradiation lumineuse.

Concernant l'émission de lumière à partir de ce niveau inférieur de la bande excitée, la figure 12.9 distingue trois cas de figure :

a) transition unique de retour à l'état fondamental ; c'est le cas du rubis, cristal d'alumine Al_2O_3 (parfaitement transparent quand il est pur) dopé avec des ions Cr^{+++} qui lui donnent sa couleur rouge. Bien qu'il ait été le premier laser à exister, ce n'est pas un cas idéal car ce système « à trois niveaux » oblige à réaliser l'inversion entre le niveau excité et le niveau fondamental. L'excitation peut fonctionner sur une large plage

TAB. 12.5 – *Pompage optique ou électrique de milieux condensés. Lasers accordables et leurs performances courantes – ρ désigne le rendement énergétique global (cf. tableau 12.1).*

Atomes émetteurs	λ	Continu P	ρ	Impulsion $P \times \delta t = W$
Solutions de colorants				
Vingtaine de colorants usuels	0,35μm-1μm (*cf.* tableau 12.6)	1W	0,1% à 0,01%	100KW × 1μs = 0,1J 10MW × 10ns = 0,1J (1GW × 0,1μs = 100J)
Cristaux et verres dopés				
Al_2O_3-Cr^{+++} rubis	0,69μm	//	0,1%	10MW × 10ns = 0,1J
$BeAl_2O_4$-Cr^{+++} alexandrite	0,7μm-0,82μm	1W	1%	10MW × 10ns = 0,1J
LiSAF-Cr^{+++}	0,76μm-1,0μm	1W	1%	10MW × 10ns = 0,1J
Al_2O_3-Ti^{+++}	0,66μm-1,18μm	1W	1%	10MW × 10ns = 0,1J
Verre-Nd^{+++}	1,05μm-1,06μm			(10TW × 1ns = 10^4J)
YAG-Nd^{+++}	1,06μm	1W	1%	100MW × 10ns = 1J
Verre-Er (fibre)	1,53μm-1,56μm	10mW		
Centres colorés dans les cristaux				
LiF (F_2^+)	0,82μm-1,1μm	1W		
NaF (F_2^+)	$\sim$ 1,1μm	1W		
KF (F_2^+)	1,2μm-1,5μm	1W		
NaCl (F_2^+)	1,4μm-1,75μm	1W		
KCl-Tl	$\sim$ 1,5μm	1W		
NaCl-OH	1,42μm-1,85μm	1W		
KCl-Li	2,0μm-2,5μm	1W		
Pompage par courant électrique				
semi-conducteurs	6,35μm-1,5μm	10mW à 10W		

TAB. 12.5 - (suite). *Caractéristiques et utilisations.*

Caractéristiques	Utilisations
Solutions de colorants	
Visible proche I-R Continu et impulsion	Photochimie Recherche de poluants (LIDAR) Spectroscopie
Cristaux et verres dopés	
Rouge Impulsion seulement Puissance moyenne	Premier LASER (historique) Télémétrie
(Devenus moins utiles depuis l'apparition de Al_2O_3-Ti^{+++})	
Rouge et proche I-R Vaste plage de λ Continu et impulsion	Laboratoire Spectroscopie Holographie ultra-rapide
Proche I-R Rendement acceptable Pompé par flash (puissant en impulsion) puissance moyenne en continu	Industrie : microformage, marquage Chirurgie Doublage de fréquence ⇒ Vert (pompage de colorants)
I-R- moyen en fibre optique	Amplificateur en ligne-Télécommunication
Centres colorés dans les cristaux	
I-R proche et moyen (plage non couverte par cristaux stables et colorants) Puissance moyenne (stabilité réduite)	Laboratoires Spectroscopie Métrologie
Semi-conducteurs (pompés par courant électrique)	
miniaturisés Rouge I-R	Télécommunications Laboratoires : spectroscopie, pièges à atomes Industrie : tous dispositifs de contrôle, alignements

TAB. 12.6 – *Quelques colorants pour* laser *dans le domaine visible.*

Nom	Poids moléculaire	Gamme de longueur d'onde en nanomètres	Longueur d'onde au gain maximum en nanomètres
Polyphényl 2	542	363-410	383
Stilbène 1	569	391-435	415
Stilbène 3	435	409-465	435
Coumarine 102	255	460-515	477
Coumarine 30	347	485-535	518
Coumarine 6	350	506-558	535
Rhodamine 110	367	528-580	540
Rhodamine 6G	479	570-640	593

de fréquence dans le vert, et utiliser ainsi une fraction importante de la lumière blanche d'un flash ; c'est ce qui permet d'exciter simultanément plus de la moitié des ions Cr^{+++}. Mais ce laser ne peut fonctionner qu'en impulsion ;

b) transition unique de retour à un niveau intermédiaire distinct du fondamental. C'est le principe du laser « à quatre niveaux » qui fonctionne bien s'il existe un processus de relaxation spontanée rapide ramenant au niveau fondamental les ions de ce niveau intermédiaire. C'est le cas du laser à Néodyme ou laser à YAG, dont les ions Nd^{+++} sont dilués dans la matrice d'un Grenat d'Yttrium et d'Aluminium (Y-Al-Garnet), et qui émet dans le proche I-R à 1,06 μm de longueur d'onde. Il est couramment pompé par flash et fonctionne en impulsions ; mais il peut aussi être pompé par des lampes blanches brillantes pour un fonctionnement continu. Le rendement acceptable de ce laser ($\rho \approx 2$ %) en a fait un laser industriel courant, destiné à de nombreux usages. La forte puissance de ses impulsions permet de réaliser avec un très bon rendement (environ 30 %) le doublage de sa fréquence dans un cristal non linéaire ; il est donc aussi utilisé comme source impulsionnelle de lumière verte à la longueur d'onde moitié de 0,53 μm. Le remplacement du cristal YAG par un verre fait diminuer le rendement énergétique ; mais il permet de fabriquer

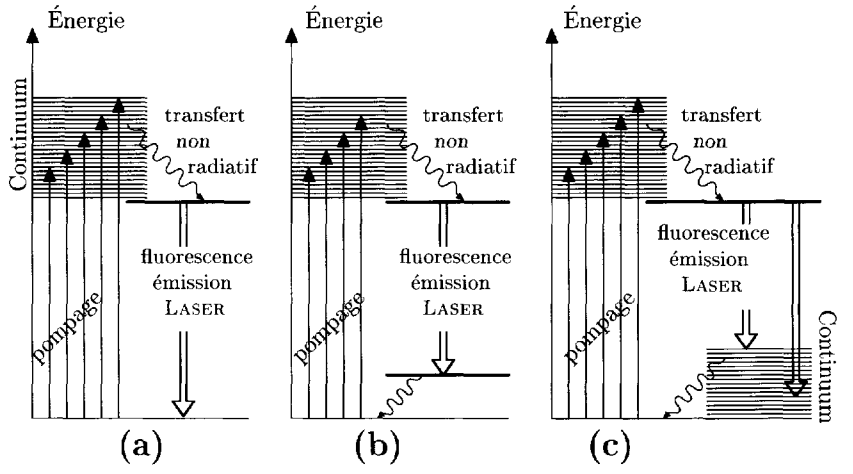


FIG. 12.9 – *Pompage optique de colorants ou d'ions dilués dans une matrice solide (schémas énergétiques). (a) Système à deux niveaux ; (b) système à quatre niveaux ; (c) système accordable.*

des échantillons de grand volume pour la construction de très gros lasers de puissance exceptionnelle (impulsion de centaines de Joules) ;

c) les cas que l'on a cherché à exploiter davantage sont ceux où le niveau fondamental lui-même comporte une large bande d'énergie, beaucoup plus large que l'énergie d'agitation thermique à température ordinaire ($T = 300$ K soit $kT \simeq 1/40$ eV $\simeq 200$ cm^{-1}) ; de telle sorte que seule la partie basse de cette bande fondamentale est peuplée. La partie haute de cette bande fondamentale, normalement dépeuplée, permet le fonctionnement suivant le schéma du laser « à quatre niveaux ». Mais on peut choisir le niveau de retombée dans la partie haute de la bande (en changeant les caractéristiques de la cavité optique) et donc accorder sur une certaine plage la longueur d'onde du laser. Ce schéma (c) représente tous les autres lasers indiqués sur le tableau 12.5.

Pour mieux illustrer ce fonctionnement des **lasers accordables**, on a reproduit sur la figure 12.10 des spectres caractéristiques du phénomène de fluorescence qui est utilisé dans ces lasers. On a choisi deux cas particuliers :

a) le cristal de saphir (Al_2O_3) dopé au Titane (ions Ti^{+++}) ;
b) la solution de Rhodamine 6G.

Chacune des figures (a) et (b) comporte deux courbes représentant deux expériences différentes faites sur le même échantillon :

• pour la courbe en trait plein, on envoie une lumière monochromatique à travers l'échantillon et l'on mesure son absorption ; en faisant varier pas à pas la longueur d'onde incidente λ, on enregistre l'absorption en fonction de λ ;

• pour la courbe en trait tireté, on éclaire en lumière blanche l'échantillon, qui réémet alors spontanément la lumière de fluorescence suivant le schéma de la figure 12.9c. Un spectrographe permet d'enregistrer, en fonction de sa longueur d'onde, l'intensité lumineuse émise en fluorescence (on a choisi un axe horizontal linéaire en énergie, c'est-à-dire aussi en $1/\lambda$; et dans ces conditions l'échelle n'est pas linéaire en λ).

La largeur de la courbe d'absorption (en trait plein) correspond à la largeur en énergie de la bande excitée ; la largeur de la courbe d'émission (en tireté) correspond à la largeur de la bande fondamentale. Le décalage entre les maxima des deux courbes d'absorption et d'émission représente la valeur moyenne de l'énergie perdue sous forme des transitions non radiatives, et qui passe en chaleur dans l'échantillon. On comprend pourquoi dans les lasers puissants, il est nécessaire de refroidir l'échantillon. Cette nécessité de refroidissement limite la cadence de répétition des lasers en impulsions. Dans le cas des solutions de colorants, le refroidissement est effectué en faisant circuler très rapidement la solution. On a représenté sur chacune des figures (a) et (b) la zone de longueur d'onde où le fonctionnement laser est possible ; cette zone commence du côté des petites longueurs d'onde au moment où l'absorption devient nulle. La Rhodamine 6G (cas b) est considérée comme un cas où cette zone de fonctionnement est relativement large ; on voit donc que le saphir dopé au Titane (cas a) est tout à fait exceptionnel.

Pour le pompage de tous ces lasers on peut utiliser bien sûr des flashes en lumière blanche pour un fonctionnement en impulsions ; l'utilisation de lampes blanches en continu est plus délicate. Mais dans les deux cas, on préférera souvent utiliser un autre laser, dont la longueur d'onde tombe au voisinage du maximum de la courbe d'absorption, parce que la cohérence du faisceau de pompage permet facilement de régler sa dimension et sa position de manière à ce qu'il coïncide avec le volume utile du milieu émetteur. Le gain obtenu grâce à ce réglage peut compenser largement le prix du laser primaire. Les deux lasers illustrés par la figure 12.10 peuvent être pompés efficacement en continu avec la raie verte (0,514 μm) du laser à Argon ionisé. En impulsion on peut utiliser le laser à Néodyme doublé en fréquence (0,53 μm) ; mais pour une installation industrielle, on obtient un meilleur rendement global avec le laser à cuivre (0,51 μm).

Dans l'utilisation des lasers accordables, un problème important est la construction de la cavité permettant de sélectionner la longueur d'onde choisie ; nous l'étudierons au chapitre suivant. Nous terminons ce paragraphe avec quelques explications sommaires sur les centres colorés.

Les centres colorés dans les cristaux sont des défauts fabriqués artificiellement par diverses techniques et qui leur communiquent des propriétés optiques différentes. Ces défauts sont, en gros, de deux types principaux :

1. en soumettant un cristal à un flux de particules accélérées ou à une irradiation aux rayons X, on crée des lacunes dans le réseau cristallin.

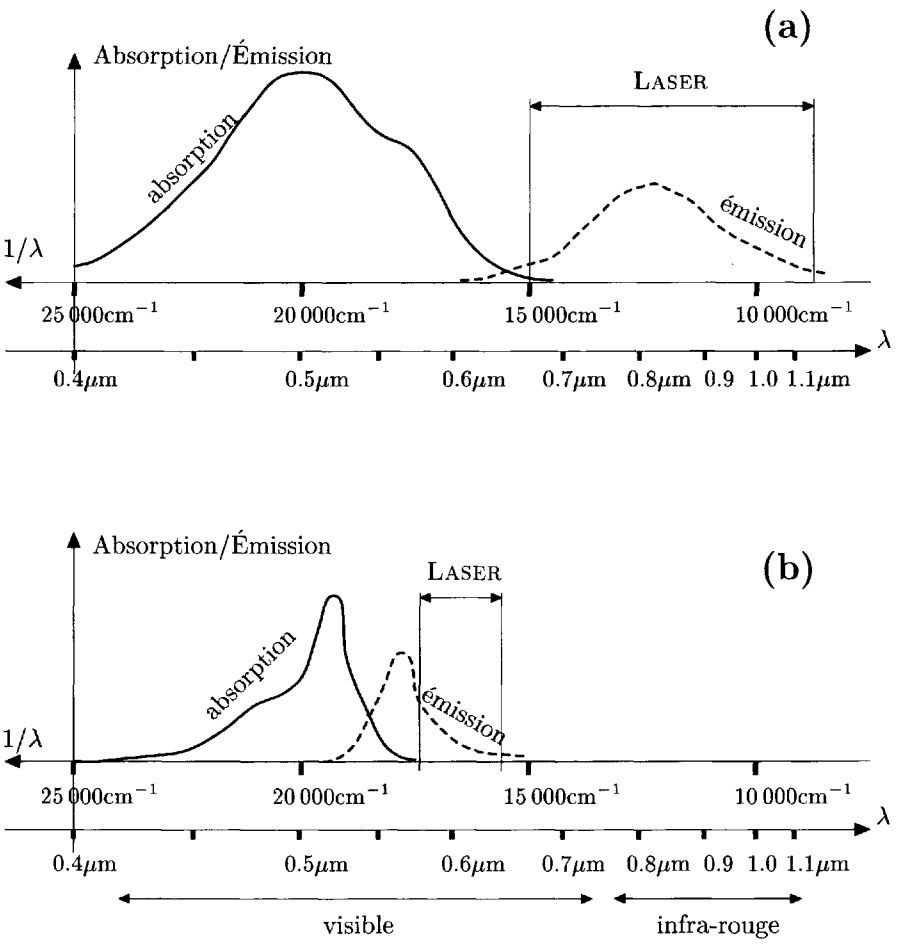


FIG. 12.10 – *Spectres d'absorption (trait plein) et d'émission (trait tireté). (a) Cristal de saphir (Al_2O_3) dopé avec des ions Titane ; (b) solution de Rhodamine 6G.*

En un nœud du réseau, d'où l'on a arraché un ion négatif, il manque une charge électrique $-e$; donc tout se passe comme s'il y avait en trop en ce nœud une charge électrique $+e$. Un électron peut alors être attiré par cette charge $+e$ et « tourner autour » (selon les lois de la mécanique quantique bien sûr) comme un électron autour d'un proton dans un atome d'hydrogène ; c'est ce qu'on appelle un centre F. On peut calculer les niveaux d'énergie et les transitions optiques de ce centre F. Lorsque deux lacunes sont voisines l'une de l'autre, la charge électrique

équivalente à l'ensemble vaut $+2e$; si un seul électron « tourne autour » de cette charge, c'est un centre F_2^+, dont les propriétés optiques sont un peu différentes de celles du centre F. Compte tenu de l'environnement de la matrice cristalline, les propriétés optiques relèvent du schéma énergétique de la figure 12.9c et permettent l'accord en longueur d'onde ;

2. au lieu de créer des lacunes, on peut inversement ajouter des inclusions à l'intérieur du cristal. On peut par exemple, dans un autoclave, entourer le cristal, avec une vapeur métallique, qui diffusera partiellement à travers les mailles du réseau cristallin. Certains atomes de cette vapeur iront se fixer dans des sites interstitiels où ils formeront une charge supplémentaire $+e$, qui pourra elle aussi attirer un électron ; et les transitions de cet électron donneront au cristal de nouvelles propriétés optiques.

On trouve sur le tableau 12.5 une liste de tels centres colorés qui émettent dans l'infrarouge lorsqu'ils sont pompés avec des longueurs d'onde du visible ou du très proche I.R (laser Nd^{+++} à 1,06 μm par exemple). Ces centres colorés sont fragiles et doivent être stabilisés en refroidissant le cristal à la température de l'azote liquide, ce qui complique leur utilisation. Certains d'entre eux sont détruits petit à petit par l'irradiation lumineuse. Leur utilisation est donc parfois un peu délicate. Mais ils sont néanmoins indispensables dans certaines expériences de laboratoire pour fournir la longueur d'onde précise dont on a besoin dans le proche infrarouge, puisque les colorants organiques accordables n'émettent pas de longueurs d'onde supérieures à 1 μm.

12.5 Lasers à semi-conducteurs

Leur compréhension suppose qu'on se remette en mémoire quelques propriétés des électrons libres en mouvement dans le réseau cristallin du semi-conducteur (*cf.* Fig. 12.11) : ce qui différencie un semi-conducteur d'un métal conducteur, c'est la présence d'une bande d'énergie interdite lorsqu'on calcule les énergies possibles des électrons dans le réseau ; la hauteur de cette bande d'énergie interdite, encore appelée « gap », est bien supérieure à l'énergie thermique kT, et les électrons ne peuvent la franchir spontanément sans un apport d'énergie extérieur.

Dans un semi-conducteur intrinsèque (très pur) la bande de valence, située en dessous du gap, offre un nombre de places suffisant pour tous les électrons du réseau cristallin et la bande de conduction au-dessus du gap est vide. Mais les électrons disponibles remplissent exactement toutes les places disponibles dans la bande de valence qui est absolument pleine. En l'absence de place vacante, les électrons ne peuvent pas s'y déplacer. Le semi-conducteur intrinsèque est quasiment isolant. Si l'on l'irradie avec une lumière dont les photons $h\nu$ sont égaux ou supérieurs à l'énergie du gap, (*cf.* diagramme a)), on peut arracher des électrons à la bande de valence et les porter dans la bande

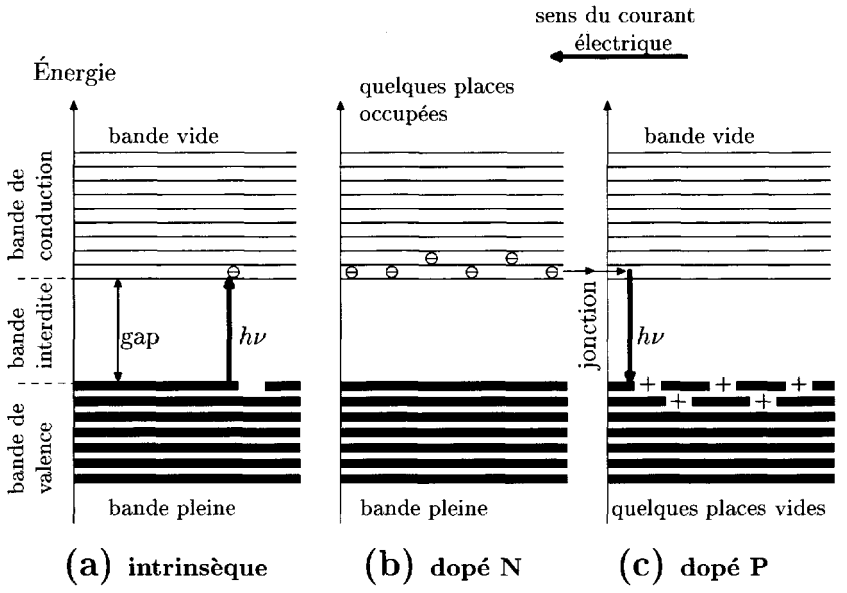


FIG. 12.11 – *Schéma symbolique des bandes d'énergie des électrons dans un semi-conducteur, et de leur taux d'occupation.*

de conduction, où ils peuvent se déplacer ; c'est le phénomène de photoconduction par création de paires électron-trou.

Les semi-conducteurs utilisés en électronique pour fabriquer diodes et transistors sont en pratique volontairement dopés avec des impuretés :

• le semi-conducteur de type N est dopé avec les atomes donneurs d'électrons excédentaires (diagramme b); sa bande de conduction n'est plus vide, et il est conducteur.

• le semi-conducteur de type P est dopé avec des atomes accepteurs d'électrons (diagramme c) qui diminuent le nombre d'électrons dans la bande de valence et y créent donc des places libres appelées « trous positifs » qui permettent aux électrons de se déplacer. Pour calculer la conduction de ce semi-conducteur de type P il est en fait plus simple de calculer le déplacement des trous positifs beaucoup moins nombreux.

Les diodes couramment utilisées en électronique sont réalisées par la jonction entre deux semi-conducteurs de types opposés P et N. Si l'on porte le côté P à une tension négative par rapport au côté N, on repousse les électrons proches de la jonction ; et de même les trous positifs du côté P sont repoussés par la tension positive du côté N ; aucune charge électrique ne peut franchir la jonction. Le courant peut passer en sens opposé si le côté P est à une tension positive par rapport au côté N et attire ainsi ses électrons : les électrons

passent de N vers P (on produit aussi une intensité positive de courant de P vers N).

Lorsque le courant passe de P vers N, les électrons venant du milieu N et arrivant dans la bande de conduction du milieu P ne sont pas en équilibre statistique et ils vont retomber dans les trous positifs de P (qui se dirigent au contraire vers N) en libérant une énergie égale à la largeur de la bande interdite (gap). Dans certains cas, l'énergie excédentaire est rendue sous forme de photons $h\nu$ égaux au gap ; ce sont les *diodes électroluminescentes*, utilisées depuis de nombreuses années pour la signalisation ou l'affichage.

Ce qui est nouveau depuis les années 1970, c'est la possibilité de stimuler cette émission de photons qui se produit spontanément dans les diodes électroluminescentes. De fait la lumière à fréquence ν traversant le semi-conducteur P au voisinage de la jonction peut être absorbée par les processus de création de paires électron-trou et elle peut être amplifiée si elle stimule la recombinaison avec les trous positifs des électrons arrivant du milieu N. En calculant le bilan de l'absorption et de l'amplification, on trouve une condition de seuil sur la densité des électrons provenant du milieu N, c'est-à-dire sur l'intensité du courant traversant la diode.

La figure 12.12 donne le schéma d'une des premières diodes-laser fabriquée industriellement ; le matériau semi-conducteur utilisé est de l'arséniure de Gallium dont le « gap » vaut 1,4 eV, correspondant à une longueur d'onde de 0,85 μm. La complexité du dessin ne doit pas faire oublier que l'ensemble forme une petite « puce » de moins de 1 millimètre. Cette structure en multicouche est destinée à améliorer le fonctionnement.

- On reconnaît au milieu des cinq couches de semi-conducteurs la couche active de GaAs dopé P d'où sort le cône de lumière, et sa face inférieure qui constitue la jonction avec un semi-conducteur dopé N.
- L'épaisseur de la couche active a été réduite à 0,2 μm par une autre couche de semi-conducteur $Ga_{1-x}Al_x$, dont le gap est un peu supérieur, et qui empêche les électrons provenant du milieu N de diffuser trop loin, renforçant ainsi la densité électronique dans la couche active.
- De même on a concentré le courant électrique (de P vers N; donc les électrons de N vers P) sur une bande de 10 μm de large seulement, pour augmenter la densité de courant dans la partie utile de la couche active.
- Les deux couches de $Ga_{1-x}Al_xAs$ (celle du haut dopée P, celle du bas dopée N) jouent aussi un autre rôle, de confinement de la lumière : leur indice de réfraction, supérieur à celui de la couche active, provoque la réflexion totale de la lumière émise, qui se propage en mode guidé.
- Une métallisation sur les deux faces avant et arrière achève la réalisation de la cavité optique. Parcourue par un courant d'une fraction d'Ampère, une telle diode-laser fournit une puissance lumineuse de quelques milliwatts. On gagne encore en efficacité en utilisant pour la couche active une structure dite enterrée qui permet de confiner la lumière aussi dans le plan de la couche, qui forme alors un véritable guide d'onde.

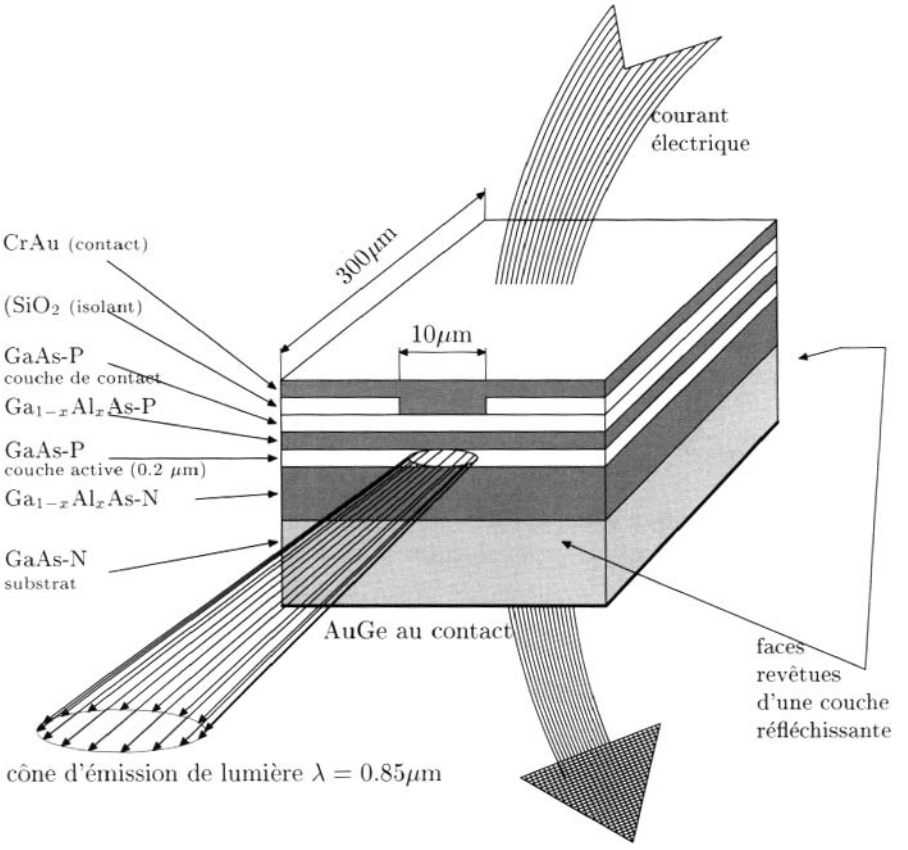


FIG. 12.12 – *Laser à semi-conducteur.*

La longueur d'onde émise peut être modifiée en changeant de matériau pour modifier la valeur du gap. Avec InGaAsP comme couche active et InP comme couche de confinement, on peut émettre dans l'infrarouge plus lointain, qui se propage mieux en fibre optique, entre les longueurs d'onde de 1,3 μm et 1,5 μm. Avec une couche active en AlGaAs et des couches de confinement encore plus riches en Aluminium, on peut émettre de la lumière visible dans le rouge.

On trouve à prix modique dans le commerce des diodes fournissant plusieurs milliwatts dans le rouge entre 0,670 μm et 0,635 μm et utilisables dans de nombreux dispositifs industriels. Pour des modèles plus sophistiqués, on obtient quelques watts dans le rouge et une centaine de watts dans l'infrarouge proche. La recherche est très active en ce domaine, en particulier pour essayer d'étendre la gamme de longueurs d'onde dans le visible vers l'orangé,

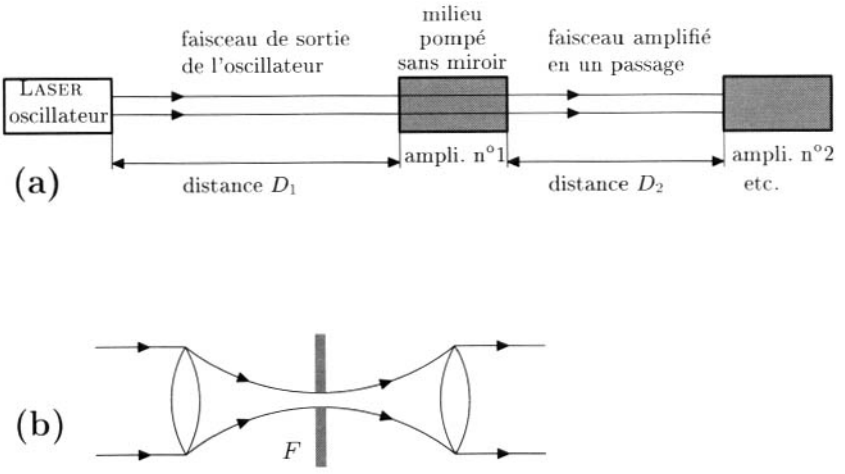


FIG. 12.13 – *Utilisation d'amplificateurs de puissance. (a) Début d'une chaîne d'amplification ; (b) filtrage spatial entre deux amplificateurs de très forte puissance.*

le vert et le bleu. Ce paragraphe est sans doute celui qui risque d'être le plus rapidement démodé.

12.6 Chaînes d'amplificateurs pour les fortes puissances

Nous avons signalé dans les paragraphes précédents les lasers industriels (par exemple à CO_2) produisant des kilowatts lumineux en vue de chauffer ou découper des matériaux. Pour obtenir de telles puissances, on travaille avec des milieux très fortement pompés où le coefficient d'amplification α est élevé. Mais de ce fait il n'est pas possible de limiter l'oscillation laser à une seule fréquence ni à un seul mode de la cavité laser et la cohérence du faisceau lumineux en est fortement dégradée ; ce qui est sans importance pour les applications industrielles courantes, tant que la directivité est suffisante pour assurer une focalisation correcte.

Mais pour les études scientifiques ou les applications à certaines techniques de pointe, il est nécessaire de garder une parfaite cohérence du faisceau laser, c'est-à-dire une seule fréquence et un seul mode de la cavité. On doit alors utiliser des lasers oscillateurs moins puissants ; mais rien n'interdit ensuite d'amplifier la puissance du faisceau lumineux issu de ce premier laser oscillateur en lui faisant traverser ensuite un amplificateur ou plusieurs amplificateurs successifs (*cf.* Fig. 12.13a).

Le laser amplificateur fonctionnant en un seul passage peut accepter un coefficient d'amplification α nettement supérieur à celui de l'oscillateur. On doit cependant respecter aussi une limitation de ce coefficient d'amplification pour des raisons analogues à celles rencontrées dans l'oscillateur : en effet on ne peut pas éviter que le faisceau lumineux utile soit accompagné, à faible niveau, d'un peu de lumière spontanée provenant de l'oscillateur, ou de la première couche de l'amplificateur lui-même, à sa face d'entrée. Il faut que l'amplification de cette lumière spontanée reste assez modeste en comparaison de l'amplification de la lumière utile. En plaçant l'amplificateur à une distance D_1 suffisamment grande de l'oscillateur (en pratique de l'ordre du mètre) on réduit très fortement la lumière spontanée provenant de l'oscillateur, qui est beaucoup moins directive que la lumière cohérente utile. Rien n'empêche d'utiliser ensuite un second amplificateur de lumière, à condition que sa distance D_2 du premier amplificateur soit assez grande aussi pour éliminer la plus grande part de lumière spontanée provenant du premier amplificateur, etc. On est ainsi conduit à construire des chaînes d'amplificateurs successifs de plus en plus puissants : trois est un nombre courant dans les installations de laboratoire, mais on peut arriver à une douzaine dans des installations spéciales de très forte puissance.

Dans les installations de forte puissance, on améliore le filtrage spatial en plaçant un diaphragme percé d'un trou de diamètre approprié (calcul de la tache de diffraction) au foyer commun de deux lentilles successives : la première focalise très finement la lumière cohérente utile ; la seconde lui rend son parallélisme (*cf.* Fig. 12.13b). Dans le cas de puissances extrêmes, le diaphragme doit être placé sous vide pour éviter que la concentration d'énergie au foyer ne provoque une étincelle ou un claquage de l'air ambiant qui bien sûr absorberait l'énergie lumineuse.

Pour illustrer ce paragraphe, la figure 12.14 reproduit le schéma d'un appareil commercial de la marque Quantel regroupant sur le même bâti (d'environ 1,5 mètre de long) un laser oscillateur à colorant (n° 1) suivi de trois lasers amplificateurs successifs (numérotés 2, 3 et 4). La longue chaîne de plusieurs mètres qui est nécessaire pour réaliser le filtrage spatial entre les divers lasers a dû être repliée en trois faisceaux parallèles (partie basse de la figure). La partie haute de la figure montre le trajet du faisceau lumineux de pompage (issu d'un autre laser en impulsions courtes de quelques nanosecondes) sur lequel quatre miroirs successifs de coefficients de réflexion ajustés prélèvent la quantité de lumière adaptée à chaque étage : le miroir 1 prélève 4 % pour pomper l'oscillateur n° 1 ; les miroirs 2 et 3 prélèvent respectivement 12 % et 30 % pour pomper les amplificateurs n° 2 et n° 3 ; le miroir 4 totalement réfléchissant envoie les 54 % d'énergie restants dans le dernier amplificateur n° 4. Ces pourcentages d'énergie de pompage reflètent les puissances lumineuses croissantes délivrées par les cellules de colorant successives. Le repliement du

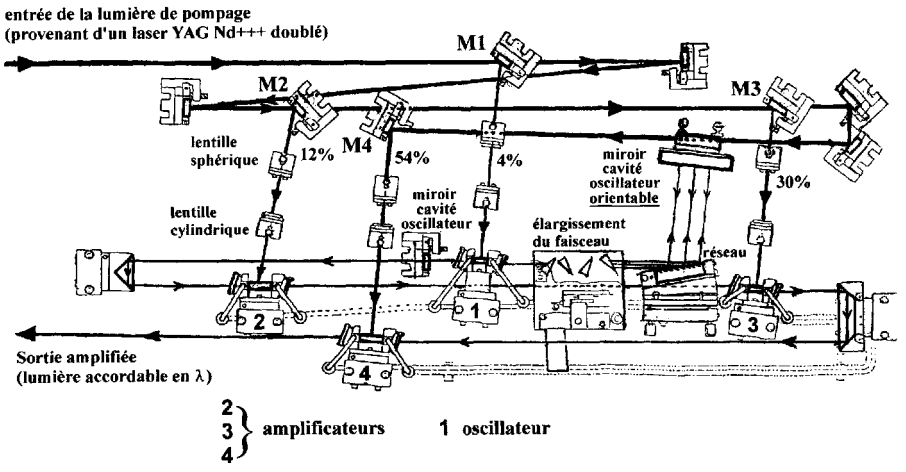


FIG. 12.14 – *Laser à colorant accordable (n° 1) suivi de trois amplificateurs (n° 2, 3 et 4) de marque Quantel.*

faisceau de pompage (partie haute de la figure) est indispensable pour que les impulsions de pompage dans chacun des lasers successifs soit synchronisées avec l'arrivée de l'impulsion de lumière utile à amplifier dans chacun d'eux.

Pour les lasers en continu ou en impulsions longues, il existe une solution alternative aux chaînes d'amplificateurs, à savoir la **synchronisation par injection** d'un premier laser oscillateur bien contrôlé dans un second laser oscillateur plus puissant. Il faut bien sûr que la fréquence et le mode spatial du faisceau lumineux injecté coïncident de manière assez précise avec un mode possible du second laser ; l'apport d'énergie de l'injection permet au second laser de fonctionner légèrement au-dessous de son seuil normal ; et dans ces conditions tous les autres modes possibles du second laser sont en dessous du seuil normal et ne peuvent donc pas prendre naissance (*cf.* §14.4).

Remarque 12.1 – Nous terminons ce chapitre par une dernière remarque concernant le laser à électrons libres. Nous n'en parlerons pas en détail parce qu'il relève d'une problématique complètement différente des autres lasers. Sans doute peut-on faire une théorie quantique du laser à électrons libres ; mais elle n'apporte rien d'important parce que le système physique qui émet l'onde n'est pas quantifié. En fait, à peu près tous les effets observés peuvent être calculés à partir de la théorie classique électromagnétique basée sur la force de Lorentz et les équations de Maxwell.

En effet, le laser à électrons libres est l'analogue (mais avec des électrons ultra-relativistes issus d'un accélérateur à très haute énergie) des générateurs d'ondes hyperfréquence tels que les magnétrons et les klystrons, et il peut être considéré comme un klystron optique.

On utilise un champ magnétique qui change de sens périodiquement dans l'espace, et appelé onduleur parce qu'il communique aux électrons une trajectoire légèrement ondulante ; c'est la faible composante transverse de leur vitesse qui permet de coupler les électrons avec le champ électrique transverse d'une onde électromagnétique qui se propage dans le même sens que la vitesse principale des électrons. Suivant la phase relative de l'onde et de la vitesse transverse, les électrons sont accélérés ou freinés, ce qui a pour conséquence de les rassembler en petits paquets séparés ; et cette mise en paquets renforce l'émission d'onde par les électrons. Compte tenu des lois relativistes, cette émission est dirigée dans la direction de la vitesse principale des électrons avec la même directivité que celle des faisceaux lasers habituels.

La fréquence de l'onde émise dépend de la période spatiale de l'onduleur et de l'énergie d'accélération des électrons. Une onde de fréquence appropriée peut être amplifiée par son interaction avec les paquets d'électrons en mouvement (et en ce sens on peut parler d'émission stimulée) mais l'énergie de l'onde est prise aux dépens de l'énergie cinétique non quantifiée des électrons (qui sont freinés bien sûr).

Chapitre 13

Fréquence de l'oscillation laser

DANS LA PLUPART des applications industrielles des lasers signalées dans le chapitre précédent (tableaux 12.1 et 12.5), on utilise essentiellement la directivité du faisceau laser qui permet d'envoyer l'énergie lumineuse à distance, sans qu'elle se disperse, puis de la concentrer en une tache focale de très petite dimension où l'on obtient ainsi une densité d'énergie très importante. On peut être amené à choisir telle ou telle gamme de fréquence, c'est-à-dire à changer de laser en fonction des propriétés du matériau à travailler ; mais la fréquence exacte du rayonnement est généralement sans aucune importance.

Il existe aussi des applications où le contrôle de la fréquence de l'onde lumineuse est primordial. Dans tous les procédés de mesure utilisant des contrôles interférométriques, il est essentiel que la lumière soit rigoureusement monochromatique et les lasers permettent d'obtenir une monochromaticité bien supérieure à celle de toutes les sources lumineuses conventionnelles. Enfin, dans de nombreuses applications scientifiques au laboratoire la valeur exacte de la fréquence doit être adaptée avec précision au problème étudié.

La fréquence de l'oscillation maser ou laser dépend à la fois de la résonance atomique ou moléculaire des systèmes émetteurs et des résonances de la cavité optique, c'est la relation entre ces résonances que nous étudions dans le premier paragraphe. Dans les deux paragraphes suivants, nous donnons quelques idées des processus d'élargissement homogène et d'élargissement inhomogène des résonances atomiques et moléculaires, avant de les utiliser à la fin de ce chapitre pour comprendre les processus qui permettent d'obtenir une oscillation rigoureusement monochromatique.

13.1 Résonances de cavité et résonance atomique. Mode pulling

L'oscillation maser ou laser utilisant à la fois la résonance atomique du milieu amplificateur et une résonance de la cavité électromagnétique, il est

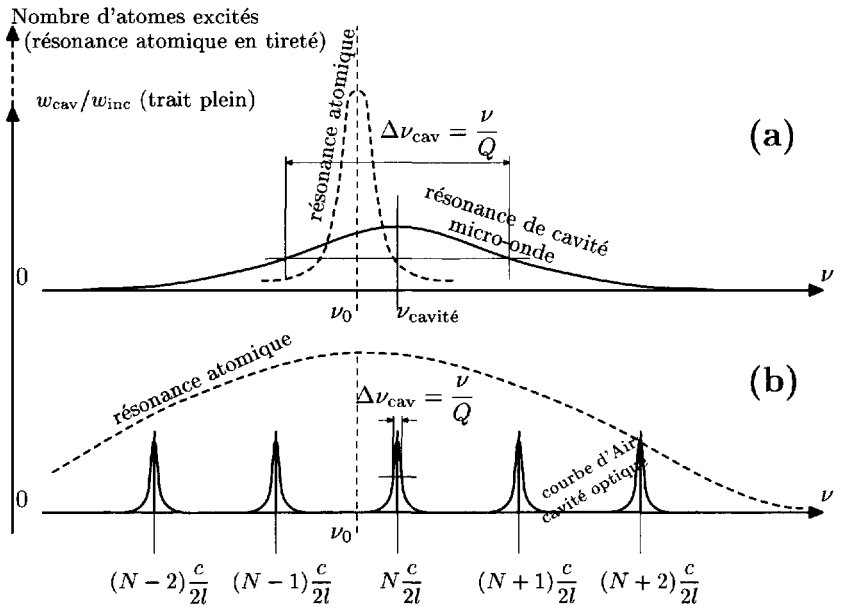


FIG. 13.1 – *Résonance de cavités et résonance atomique (centrée en ν_0) représentées en fonction de la fréquence ν du rayonnement électromagnétique incident. (a) Cas du maser en microondes ; (b) cas du laser en ondes lumineuses (les fréquences des pics de la fonction d'Airy, reproduites de la figure 9.3, sont calculées pour une cavité vide). Entre les deux figures (a) et (b), les échelles de fréquence sont multipliées par un facteur de 10^3 à 10^5.*

indispensable que les fréquences de ces deux résonances coïncident dans les limites de leurs largeurs respectives. De ce point de vue, la situation se présente très différemment dans le cas du maser ou du laser, qui sont comparés sur la figure 13.1. On se rappellera que la fréquence atomique centrale ν_0 est dans le cas du maser (a) 10^4 ou 10^5 fois plus petite que dans le cas du laser (b), et les échelles de fréquence des deux parties (a) et (b) de la figure 13.1 sont dans un rapport du même ordre de grandeur.

Dans le cas (a) *des micro-ondes*, la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ est du même ordre de grandeur que les dimensions de la cavité (autour du centimètre ou du décimètre) ; et de ce fait la fréquence de résonance de la cavité dans cette gamme de fréquence est souvent unique (s'il y en a plusieurs, elles sont très espacées). Il faut donc calculer les dimensions de la cavité pour que cette fréquence de résonance tombe au voisinage de la fréquence atomique ; il faut ensuite prévoir un système de déformation de la cavité permettant de faire varier sa fréquence de résonance pour l'amener en coïncidence avec la fréquence atomique ν_0. La résonance atomique (ou moléculaire) est généralement plus

étroite que la résonance de cavité, parce que dans cette gamme de fréquence, la probabilité d'émission spontanée de la transition atomique devient très faible, comme nous l'avons déjà signalé au §8.5, et l'élargissement Doppler éventuel est également fortement réduit.

Dans le cas (b) *de l'onde lumineuse*, la longueur d'onde est beaucoup plus petite que la longueur l de la cavité optique Pérot-Fabry, et c'est pourquoi la courbe d'Airy, calculée au chapitre 9 (Fig. 9.3) et reproduite sur la figure 13.1b, présente de nombreuses résonances séparées par un intervalle de fréquence $c/2l$ variant couramment entre 100 MHz et 500 MHz (lorsque l varie de 150 cm à 30 cm). La résonance atomique est généralement plus large que cet intervalle de fréquence (dans les lasers à gaz visibles, la largeur Doppler est d'environ 1 Ghz = 1000 MHz). On trouve donc toujours au moins une résonance de cavité coïncidant avec la résonance atomique. Le problème rencontré généralement est d'empêcher que l'oscillation laser se fasse sur plusieurs fréquences simultanément ou bien qu'elle saute aléatoirement d'une fréquence à une autre ; nous reviendrons sur ce problème dans la suite de ce chapitre.

13.1.1 Correction des fréquences de résonance d'une cavité pleine

Dans ce paragraphe, nous supposerons que l'oscillation laser est monochromatique, à la fréquence d'un seul pic de la fonction d'Airy (généralement le plus proche du centre ν_0 de la résonance atomique) ; et nous cherchons la correction qu'il faut appliquer au calcul de la fréquence d'Airy lorsque la cavité contient le milieu amplificateur au lieu d'être vide (hypothèse du calcul du chapitre 9). En effet le milieu amplificateur a un certain indice de réfraction n_r ; et si nous appelons $\lambda = c/\nu$ la longueur d'onde de la lumière dans le vide, la longueur d'onde dans le milieu d'indice n_r vaut λ/n_r (puisqu'il faut y remplacer la vitesse c par c/n_r). Or la condition de résonance de la cavité repose toujours sur un nombre entier de longueurs d'onde dans un Aller et Retour de cavité, mais il faut distinguer la partie pleine de la cavité de longueur ηl (η coefficient de remplissage (*cf.* chapitre 9)), où la longueur d'onde vaut λ/n_r, et la partie vide, de longueur $(1-\eta)l$, où la longueur d'onde vaut λ. Pour écrire la condition de résonance, il est plus simple de remplacer la longueur de la partie pleine par le « chemin optique » équivalent $n_r\eta l$ et de compter des longueurs d'onde toutes égales à λ :

$$N\lambda = N\frac{c}{\nu} = 2l(1-\eta) + 2n_r\eta l = 2l[1+\eta(n_r-1)] \qquad N \text{ entier} \qquad (13\text{-}1)$$

En permutant ν et $2l$ entre la deuxième et la dernière expression :

$$N\frac{c}{2l} = \nu[1+\eta(n_r-1)] = \nu\left[1+\eta\frac{\chi'}{2}\right] \qquad (13\text{-}2)$$

la dernière expression est obtenue en utilisant l'approximation classique des milieux dilués $n_r = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1+\chi'} \approx 1+\chi'/2$. On en déduit la fréquence

corrigée :

$$\nu = N\frac{c}{2l} - \frac{\nu}{2}\eta\chi' = N\frac{c}{2l} + \frac{\nu}{2}\eta\delta\omega\tau_2\chi'' = N\frac{c}{2l} + \nu\pi\tau_2\delta\nu\eta\chi'' \qquad (13\text{-}3)$$

la dernière expression s'obtient en utilisant une relation classique entre les deux susceptibilités réelle et imaginaire $\chi' = -\delta\omega\tau_2\chi''$, que nous avons démontrée au chapitre 3 à partir des solutions stationnaires des équations de Bloch (*cf.* formules (3-12)). Pour le calcul du terme correctif, qui est petit, on peut y remplacer ν par ν_0 qui est très proche.

On se rappelle que dans un milieu amplificateur, dont les populations ont été inversées, on a aussi inversé les signes des susceptibilités atomiques, c'est-à-dire que χ'' est négatif. On en déduit que la correction à la fréquence de résonance (comparée à la fréquence $Nc/2l$ de la cavité vide) est de signe opposé à l'écart $\delta\nu = \nu - \nu_0$ entre la fréquence de l'onde et la fréquence atomique centrale ν_0. La figure 13.2 aide à discuter le signe de cette correction :

a) si la fréquence ν de l'onde est supérieure à la fréquence atomique ($\delta\nu > 0$) cette correction est négative, et la fréquence de résonance de la cavité pleine est inférieure à celle de la cavité vide ;

b) si la fréquence ν est inférieure à la fréquence atomique ν_0 ($\delta\nu < 0$), alors la correction est positive ; et la fréquence de résonance de la cavité pleine est supérieure à celle de la cavité vide.

Dans les deux cas, le mode résonnant de la cavité se trouve tiré vers la fréquence atomique ν_0 : c'est le phénomène de « mode pulling ».

La courbe (c) de la figure 13.2 représente la variation avec la fréquence de la susceptibilité réelle χ' d'un milieu inversé en tenant compte du fait que la constante χ_0'' est négative (formules (3-12) et figure 3.2bis). Le changement de signe de χ' lorsque la fréquence ν passe par la valeur ν_0 permet de faire la même discussion à partir de la première expression de la formule (13-3) utilisant χ' : correction négative aux hautes fréquences (cas (a), χ' positif) - correction positive aux basses fréquences (cas (b), χ' négatif).

Remarque 13.1 – Dans la démonstration ci-dessus nous avons utilisé l'approximation des milieux dilués pour la relation entre l'indice n_r et la susceptibilité χ'. Cette approximation est valable immédiatement dans les lasers à gaz. Dans le cas des milieux condensés, il est facile de la généraliser : on écrit l'indice de réfraction $n_r = n_0 + \delta n$ en distinguant la contribution n_0 de la matrice cristalline ou du solvant liquide qui est une constante, et la contribution δn des ions ou des molécules de colorant dilués dans le milieu condensé qui dépend de la susceptibilité χ' des atomes actifs et qui reste une quantité petite devant 1. Le développement limité doit être fait autour de la valeur n_0 au lieu de 1, ce qui complique un peu les formules ; mais on parvient aux mêmes conclusions générales.

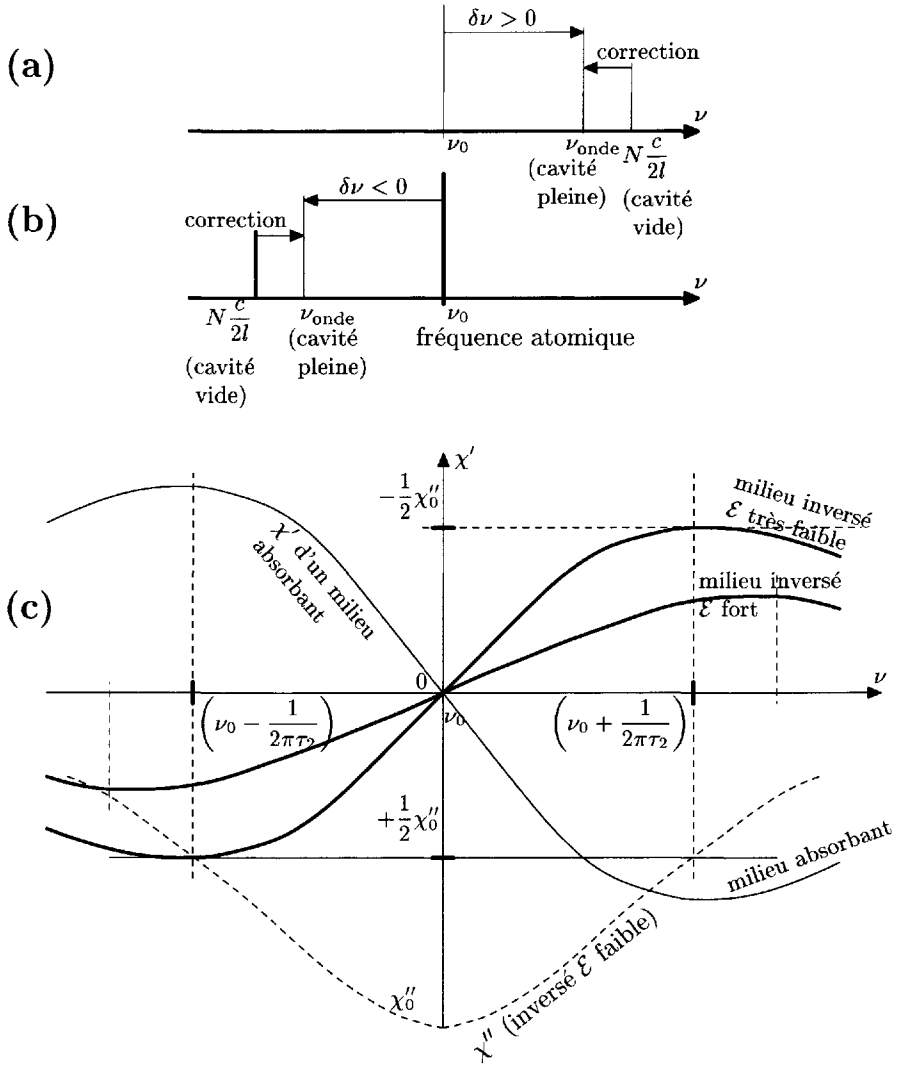


FIG. 13.2 – *« Mode pulling » dans l'émission laser. Comparée à la fréquence de la cavité vide $N\frac{c}{2l}$, la fréquence émise subit une correction qui la tire vers la fréquence atomique ν_0. (a) Cas $\delta\nu = \nu - \nu_0 > 0$; (b) cas $\delta\nu = \nu - \nu_0 < 0$; (c) explication par la variation avec la fréquence de la susceptibilité réelle χ' d'un milieu inversé (émetteur), en trait gras, qui est de signe opposé à celle d'un milieu absorbant, en trait fin. (On a ajouté en trait tireté la susceptibilité imaginaire χ'' du milieu inversé.)*

13.1.2 Cas d'un laser en régime continu

Dans le cas d'un laser en régime continu, il est possible d'en dire plus sur la valeur de cette correction de fréquence. Nous avons vu au chapitre 10 qu'en régime continu, un laser fonctionne en permanence dans les conditions du seuil, où le gain d'énergie de l'amplificateur atomique est égal aux pertes de la cavité.

Or le gain de l'amplificateur atomique peut s'exprimer en fonction de la susceptibilité imaginaire χ'' ; dans la remarque 3.2 à la fin du paragraphe 3.3, nous avons utilisé l'indice complexe $n_r + i\kappa \simeq (1 + \chi'/2) + i\chi''/2$ pour rappeler le calcul du coefficient d'absorption K (*cf.* (3-13)) qui se transforme en coefficient d'amplification α dans un milieu inversé où χ'' est négatif (*cf.* formule (8-23)) :

$$\alpha = \frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -K = -\frac{\omega}{c}\chi'' = -\frac{2\pi}{\lambda}\chi'' \tag{13-4}$$

Au chapitre 9 nous en avons déduit le gain logarithmique sur un Aller et Retour dans la cavité de l'amplificateur atomique, formule (9-19) :

$$\frac{\delta W}{W} \approx \gamma_{\text{atome}} = \alpha.2\Delta z = \alpha.2\eta l = 2\pi\frac{2l}{\lambda}(-\eta\chi'')$$

La condition de seuil (égalité des gains et des pertes sur un tour de cavité) permet d'écrire (*cf.* formule (10-5) du gain saturé) en régime continu :

$$\gamma_{\text{atome}} = \gamma_s = (1 - R_A) + (1 - R_B) = \frac{1}{\tau_c}\frac{2l}{c} = \frac{2\pi}{Q}.\frac{2l}{\lambda}$$

(on se reportera aux formules (9-4) et (9-6) de définition du coefficient de qualité Q). La comparaison de ces deux expression du gain atomique conduit dans le cas du régime continu à la formule très simple :

$$\boxed{-\eta\chi'' = \frac{1}{Q}} \tag{13-5}$$

En reportant cette valeur de χ'' dans la formule (13-3), on calcule la correction à la résonance de cavité :

$$\nu - N\frac{c}{2l} = -\delta\nu\pi\tau_2\frac{\nu}{Q} = (\nu_0 - \nu)\pi\tau_2\frac{\nu}{Q} \tag{13-6}$$

On retrouve les signes opposés de la correction de cavité et de l'écart à la résonance atomique, illustrés sur la figure 13.2. Cette formule peut être réécrite sous une autre forme plus facile à retenir, si l'on note que :

$\frac{\nu}{Q} = \Delta_{\text{cav}}$ est la largeur d'un mode de cavité (*cf.* formule (9-11))

$\frac{1}{\pi\tau_2} = \Delta_{\text{atome}}$ est la largeur en fréquence de la résonance atomique ; (*cf.* formule (3-14))

$$\boxed{\frac{\nu - \nu_{\text{cav. vide}}}{\Delta_{\text{cav}}} = \frac{\nu_{\text{atome}} - \nu}{\Delta_{\text{atome}}}} \quad \text{avec } \nu_{\text{cav. vide}} = N\frac{c}{2l} \tag{13-7}$$

Cette expression de la correction de mode pulling figurait déjà dans les premiers articles sur les masers (référence [1]). Elle montre que la fréquence d'oscillation, c'est-à-dire la résonance de cavité pleine se trouve la plus proche de celle de ces deux résonances qui est la plus étroite. Dans les conditions courantes pour les lasers (au contraire des masers) c'est la résonance de cavité qui est la plus étroite, et la fréquence d'oscillation est plus proche de la résonance de cavité vide. **La précision ultime de la fréquence du laser est donc liée principalement à la résonance de cavité, c'est-à-dire à la longueur l de la cavité optique**, et non pas à la fréquence atomique ν_0. Lorsqu'on a besoin, dans les laboratoires, de fréquences bien stabilisées, il faut contrôler la longueur l de la cavité et la corriger en permanence pour la maintenir constante, malgré les vibrations mécaniques et les dilatations thermiques.

Dans la pratique expérimentale, ces dispositifs de contrôle et de stabilisation de longueur ne sont jamais parfaits ; les vibrations mécaniques ne peuvent pas être totalement éliminées. Il en résulte un résidu de « tremblement » de fréquence (« jitter » en anglais ; *cf.* §14.5) qui limite la précision de la fréquence du laser. C'est pourquoi nous n'avons pas jugé indispensable de présenter l'évaluation des limites quantiques théoriques de cette précision de fréquence (réf. [1], [2] et [8]).

Remarque 13.2 – Dans le calcul ci-dessus, nous aurions pu raisonner sur une seconde au lieu d'un Aller et Retour. Sachant que la durée d'un Aller et Retour vaut $\delta t = 2l/c$, le nombre d'Aller et Retour en une seconde vaut $1/\delta t = c/2l$. En multipliant par ce nombre le gain sur un tour, on obtient le gain relatif par seconde :

$$\frac{1}{W}\frac{\delta W}{\delta t} = \alpha 2\eta l \frac{1}{\delta t} = \alpha\eta c = -\frac{2\pi c}{\lambda}\eta\chi'' = -\omega\eta\chi''$$

en comparant aux pertes de la cavité par seconde, formule (9-4) :

$$\frac{1}{W}\frac{\delta W}{\delta t} = -\frac{1}{\tau_c} = -\frac{\omega}{Q}$$

La somme de ces deux quantités doit être nulle en régime continu ; ce qui redonne bien la formule (13-5).

Une troisième façon de retrouver la même formule est d'utiliser l'expression détaillée de χ'' calculée à partir des équations de Bloch en (3-12) :

$$\chi'' = \frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\tau_2\frac{nm_0}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} = \frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\tau_2\frac{nm_S}{1+\delta\omega^2\tau_2^2} = \frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\frac{\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}(n_a-n_b)_S$$

en utilisant l'expression stationnaire m_S (3-3) de la variable $m = (n_a - n_b)/n$. En utilisant (3-7), (3-8) et (8-8) on obtient :

$$\chi'' = B\hbar\varphi(\nu)(n_a-n_b)_S = \sigma(\nu)\frac{\lambda}{2\pi}(n_a-n_b)_S \tag{13-8}$$

Puisque le laser continu fonctionne en permanence au seuil, nous pouvons remplacer la différence de population par son expression au seuil (9-17) :

$$D_{\text{seuil}} = (n_b - n_a)_S = \frac{2\pi}{\eta\sigma(\nu)\lambda Q}$$

On obtient alors $\chi'' = -1/\eta Q$ conformément à (13-5).

13.2 Élargissement homogène par collisions

La figure 13.3a représente un processus de collision cinétique (au sens de la théorie cinétique des gaz) dans lequel les vitesses des deux atomes ou molécules sont modifiées et leurs trajectoires incurvées (il peut arriver qu'une partie de l'énergie cinétique des atomes soit transférée en énergie interne de l'un d'entre eux ; on parle alors de collision inélastique). On utilise aussi le terme de collisions pour des processus d'interaction à distance un peu plus longue, dans lesquels les trajectoires des deux partenaires ne sont pratiquement pas modifiées (*cf.* Fig. 13.3b) mais où les états internes des deux atomes sont perturbés par cette interaction passagère assez rapprochée. Cette perturbation peut porter par exemple sur des transferts d'énergie interne entre les atomes ou molécules (*quenching*, échange de métastabilité...) ou sur des changements d'orientation des moments cinétiques (collisions dépolarisantes) ou sur de simples modifications momentanées des niveaux d'énergie. C'est à ces dernières que nous nous intéresserons ici.

13.2.1 Calcul des probabilités de collisions, vitesse relative et section efficace

Pour calculer les probabilités de ces collisions sur un atome particulier A, il est habituel de raisonner dans un repère lié à cet atome A, qui devient ainsi une cible immobile soumise au bombardement de tous les autres atomes P considérés comme des projectiles. Dans ce nouveau repère, la vitesse du projectile P est égale à la vitesse relative :

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_P - \vec{v}_A \tag{13-9}$$

Sur la figure 13.3, nous avons représenté la position relative des deux atomes A et P à un instant t_0 avant la collision. Nous avons construit la vitesse relative de P dans le repère $A(t_0)$; ce qui nous permet de tracer en traits tiretés, dans ce repère, la trajectoire rectiligne initiale D de l'atome P avant la collision. Cette droite D en traits tiretés constitue la trajectoire de P dans le cas b) (collision à plus longue distance sans modification des vitesses) ; mais elle n'est qu'une asymptote de cette trajectoire dans le cas a). Dans les deux cas, la distance minimum d entre l'atome A et la droite D est ce qu'on appelle le « paramètre d'impact » de la collision. Le paramètre d'impact dans le cas b) est 10 à 100 fois supérieur à celui du cas a).

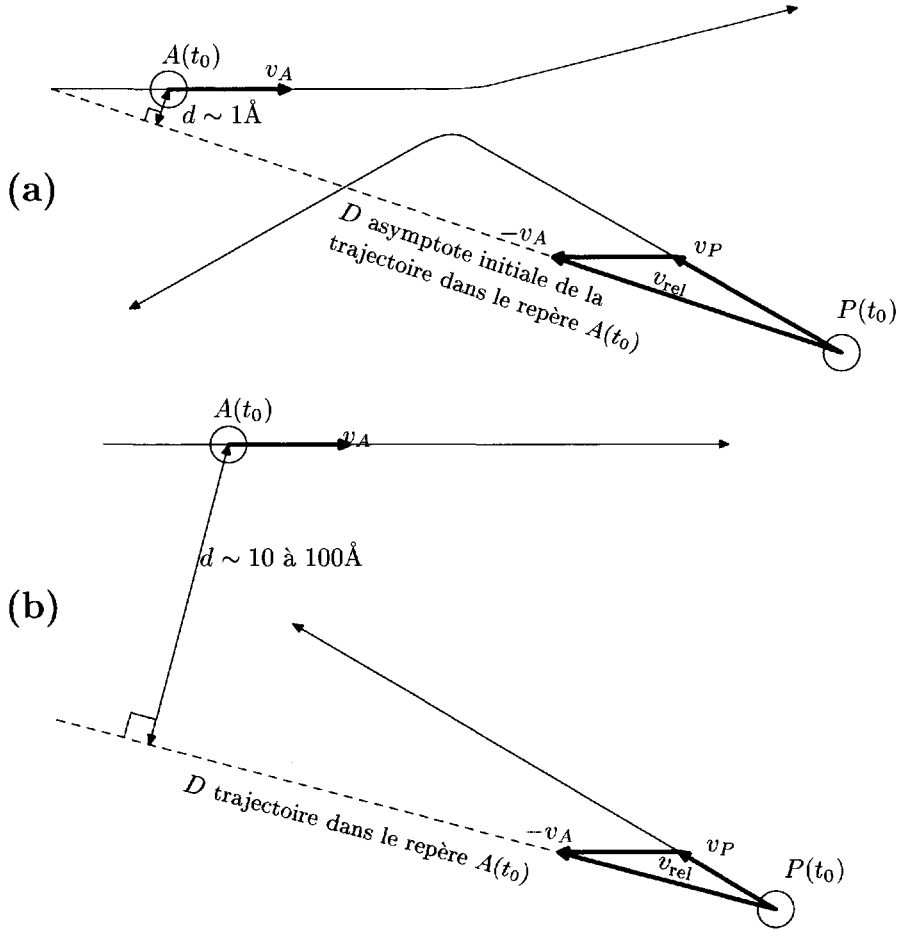


FIG. 13.3 – *Collisions atomiques ou moléculaires. (a) Collision cinétique modifiant les vitesses des deux atomes A et P ; (b) interaction à plus longue distance, sans effet sur les trajectoires rectilignes, mais qui peut modifier les états internes des atomes.*

Un calcul de mécanique quantique effectué dans le repère A permet de calculer la perturbation apportée à l'atome A en fonction de la distance AP ; tenant compte du mouvement de P, on en déduit la perturbation apportée à l'atome A, en fonction du temps et dépendant du paramètre d'impact d. Certains processus se produisent automatiquement si la distance d est inférieure à une certaine valeur d_{Max} et seulement si $d < d_{\text{Max}}$; c'est-à-dire que le processus se produit chaque fois que l'asymptote D de la trajectoire du projectile P traverse un cercle de centre A et rayon d_{Max}, dont la surface vaut $\sigma = \pi d_{\text{Max}}^2$.

Cette surface représente la section efficace de ce processus, au sens où cette notion a été introduite au chapitre 8 ; pour généraliser la formule (8-7), nous introduisons le nombre d'atomes P par unité de volume n_P ; nous pouvons alors écrire la probabilité par unité de temps pour que l'atome A subisse ce processus particulier :

$$\frac{1}{N}\left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \sigma\frac{\Phi}{S} = \sigma n_P \overline{v}_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{T_c} \tag{13-10}$$

Cette quantité ayant les dimensions de l'inverse d'un temps peut être écrite comme l'inverse d'un temps T_c appelé temps de collision ; c'est le temps moyen qui s'écoule entre deux collisions successives sur l'atome A.

On a calculé le flux de projectiles par unité de surface Φ/S en fonction de la densité volumique des projectiles n_P et de leur vitesse *moyenne* $\overline{v}_{\mathrm{rel}}$ dans le repère A où nous effectuons ce calcul :

$$\frac{\Phi}{S} = n_P \overline{v}_{\mathrm{rel}} \tag{13-11}$$

(Pour démontrer cette formule, il faut calculer séparément les contributions des projectiles ayant différentes directions de leur vecteur vitesse, contributions qui s'additionnent facilement grâce à la répartition isotrope des vitesses $\overrightarrow{v}_P$ et $\overrightarrow{v}_A$ dans un gaz.)

Tous les processus de collision, bien sûr, ne sont pas définis de manière aussi précise, et ne dépendent pas du seul paramètre d'impact d ; il faut alors calculer la section efficace en faisant une moyenne des probabilités correspondant aux diverses valeurs de la distance d.

Remarque 13.3 – La théorie cinétique des gaz permet d'en dire un peu plus sur la vitesse relative moyenne : lorsqu'on fait la somme des vecteurs $-\overrightarrow{v}_A$ et $\overrightarrow{v}_P$, il est facile de montrer que les composantes sur le vecteur $\overrightarrow{v}_A$ de tous les vecteurs $\overrightarrow{v}_P$ possibles se moyennent à zéro ; tandis que les composantes perpendiculaires à $\overrightarrow{v}_A$ doivent être prises en compte. On démontre ainsi qu'en valeur moyenne tout se passe comme si $\overrightarrow{v}_A$ et $\overrightarrow{v}_P$ étaient perpendiculaires :

$$\overline{v}_{\mathrm{rel}} = \sqrt{(\overline{v}_{\mathrm{A}})^2 + (\overline{v}_P)^2} = \overline{v}_{\mathrm{A}}\sqrt{1+\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_P}} = \overline{v}_P\sqrt{1+\frac{m_P}{m_{\mathrm{A}}}} \tag{13-12}$$

Attention ! Sous la première racine carrée, il s'agit des carrés des vitesses linéaires moyennes $\overline{v}_{\mathrm{A}}$ et $\overline{v}_P$ des deux types d'atomes, et non pas des vitesses quadratiques moyennes. Ces vitesses sont respectivement proportionnelles à $1/\sqrt{m}$, où m est la masse de chaque atome ; on en déduit donc les expressions suivantes. S'il s'agit de collisions des atomes A entre eux (A et P identiques), on obtient $\overline{v}_{\mathrm{rel}} = \overline{v}_{\mathrm{A}}\sqrt{2}$.

On peut encore utiliser la formule classique de la vitesse moyenne en fonction de la vitesse quadratique moyenne, et l'exprimer en fonction de la température

absolue T du gaz :

$$\overline{v_A} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v_A^2}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\frac{3k_BT}{m_A}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{k_BT}{m_A}} \quad (k_B \text{ constante de Boltzmann}) \tag{13-13}$$

Cette vitesse moyenne est couramment comprise entre 100 m/s et 1000 m/s.

Remarque 13.4 – On prendra garde à ne pas confondre le temps de collision T_c défini en (13-10) avec la durée de chaque collision, c'est-à-dire la durée pendant laquelle le projectile P interagit fortement avec l'atome A. On peut estimer que l'interaction est réellement forte pendant que le projectile parcourt la distance $2d$, autour du point de moindre approche (c'est-à-dire que la distance AP est inférieure à $d\sqrt{2}$). La durée de collision est alors de l'ordre de $2d/\overline{v}_{\text{rel}} \sim 20\text{Å}/(100\text{m/s}) = 2 \cdot 10^{-11}$ seconde ; c'est normalement beaucoup plus court que la durée moyenne T_c entre deux collisions successives.

On introduit parfois en théorie cinétique, dans le cas d'un seul type d'atomes (A et P identiques) le libre parcours moyen $l = \overline{v}.T_c = \overline{v}_{\text{rel}}T_c/\sqrt{2} = 1/n\sigma\sqrt{2}$.

13.2.2 Application aux transitions optiques résonnantes

La méthode d'analyse décrite au paragraphe précédent s'applique à divers types de collisions produisant des effets de nature différente. Nous cherchons maintenant à décrire l'effet sur les atomes des collisions à longue distance (Fig. 13.3b) sans modification des vitesses atomiques. Ces collisions de type (b) sont beaucoup plus nombreuses que les collisions cinétiques (a), et l'atome subit un grand nombre de collisions de type (b) entre deux changements de vitesse (a).

On peut calculer en mécanique quantique la perturbation apportée aux niveaux d'énergie de l'atome A par la présence d'un autre atome P à très courte distance. Cette perturbation varie rapidement avec la distance. Pour chaque trajectoire particulière du projectile P (caractérisée par sa vitesse v_{rel} et son paramètre d'impact d ; *cf.* Fig. 13.3b), on peut donc calculer la différence d'énergie de la transition étudiée $E_b - E_a = \hbar\omega_0(t)$ en fonction du temps.

Nous savons que l'interaction électromagnétique entre l'onde $\mathcal{E}_1 \cos\omega t$ et l'atome A dépend essentiellement de l'écart à résonance $\delta\omega = \omega - \omega_0$. La collision produit donc une variation momentanée mais importante de cet écart à résonance $\delta\omega(t) = \omega - \omega_0(t)$. Pour calculer l'effet produit, nous utilisons le fait qu'il s'agit d'une variation très forte pendant une durée très courte (*cf.* Fig. 13.4).

La fréquence ω de l'onde étant fixée, nous pouvons conserver sans problème le changement de variable utilisé au chapitre 1 (passage en représentation « tournante ») et le système d'équations différentielles (1-13) :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\beta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = i\frac{\Omega_1}{2}\alpha + i\delta\omega(t)\beta$$

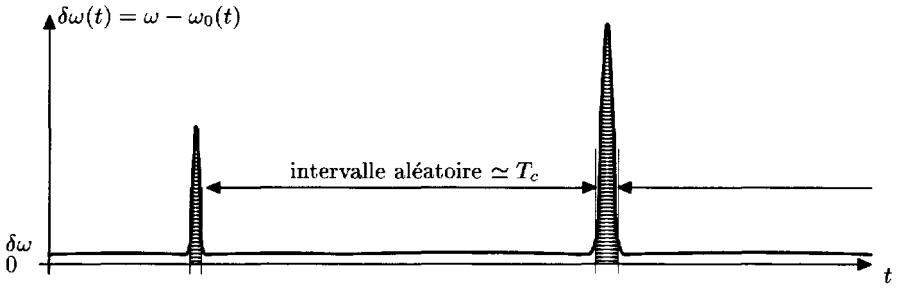


FIG. 13.4 – *Variation aléatoire de l'écart à résonance $\delta\omega(t)$ due aux collisions (on a représenté deux collisions successives ; la seconde collision produit un écart $\delta\omega$ plus important parce que son paramètre d'impact d est supposé plus court).*

Pendant la très courte durée $t_2 - t_1$, $|\delta\omega(t)| \gg \Omega_1$ ce qui nous autorise à négliger Ω_1 devant $\delta\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \approx 0 \quad \text{soit } \alpha(t_2) \approx \alpha(t_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \approx i\delta\omega(t)\beta \quad \text{soit } \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta} = i\delta\omega(t)\mathrm{d}t$$

et en intégrant sur le temps :

$$\ln\frac{\beta(t_2)}{\beta(t_1)} \approx i\int_{t_1}^{t_2}\delta\omega(t)\mathrm{d}t = i\varphi \qquad \text{ou } \beta(t_2) \approx \beta(t_1)\mathrm{e}^{i\varphi} \tag{13-14}$$

L'effet de la collision est donc de provoquer sur la variable quantique β (mais pas sur α) un saut de phase φ, égal à l'intégrale de $\delta\omega(t)$ (proportionnel à l'aire hachurée des pics de la figure 13.4) ; et l'on parle de **collisions déphasantes**. Ce saut de phase se répercute en fait directement sur l'oscillation du dipôle atomique ; *cf.* (2-5) ; il dépend de la vitesse v_{rel} et du paramètre d'impact d ; sa valeur est donc aléatoire, mais elle est d'autant plus grande que le paramètre d est plus petit. En utilisant la valeur moyenne de la vitesse v_{rel}, on calcule une distance d_1, en dessous de laquelle le saut de phase φ est supérieur à 1 radian, ce qui assure le brouillage complet des coefficients $\beta_i(t)$ correspondant aux divers atomes numérotés par l'indice i. La surface $\sigma_1 = \pi d_1^2$ représente l'ordre de grandeur de la section efficace du processus de brouillage des variables croisées collectives :

$$\overline{\alpha^*\beta} = \frac{1}{N}\sum_i \alpha_i^*\beta_i \quad \text{et} \quad \overline{\beta^*\alpha} = \frac{1}{N}\sum_i \beta_i^*\alpha_i$$

qui ont été définies au chapitre 2. Mais on note que ce processus n'affecte en rien les variables de population $\overline{\alpha\alpha^*}$ et $\overline{\beta\beta^*}$ puisque le déphasage φ s'élimine

dans le calcul de $\overline{\beta\beta^*}$. Nous avons là l'exemple d'un processus dont seul le formalisme quantique peut rendre compte correctement. En effectuant soigneusement les calculs statistiques de moyenne sur toutes les trajectoires possibles, on calcule rigoureusement une probabilité $1/T_c$ d'annulation des termes croisés sous l'action des collisions déphasantes (donc de la moyenne des dipôles atomiques oscillants), telle que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\alpha^*\beta} = -\frac{1}{T_c}\overline{\alpha^*\beta}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\beta^*\alpha} = -\frac{1}{T_c}\beta^*\alpha, \text{ ou } \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\overline{u}}{T_c} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\overline{v}}{T_c} \tag{13-15}$$

En définitive le retour à zéro des variables quantiques croisées s'effectue sous l'action de deux processus aléatoires indépendants : les collisions déphasantes étudiées ci-dessus avec la probabilité $1/T_c$ et l'émission spontanée écrite en (2-19) au chapitre 2 avec la probabilité $1/2\tau_b$. On démontre en statistique que leurs probabilités s'additionnent, ce qui nous permet d'écrire la relaxation transversale sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{1}{2\tau_b} + \frac{1}{T_c}\right)\overline{u}; \quad \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{1}{2\tau_b} + \frac{1}{T_c}\right)\overline{v} = -\frac{1}{\tau_2}\overline{v} \tag{13-16}$$

Nous avons ainsi la possibilité de calculer exactement la probabilité de relaxation transversale $1/\tau_2$ introduite en (2-20) et utilisée dans toute la suite.

Cette expression de la probabilité $1/\tau_2$ s'applique en particulier aux largeurs calculées en fonction de la fréquence (largeur totale à mi-hauteur) :

- soit pour la forme de raie normalisée $\varphi(\nu)$ des probabilités d'Einstein (3-7) représentée sur la figure 3.1 :

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{2}{\tau_2}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{\pi\tau_2} = \frac{1}{2\pi\tau_b} + \frac{1}{\pi T_c} \tag{13-17}$$

- soit pour la courbe expérimentale de résonance $m_0 - m_S$ (3-4) représentée sur la figure 3.2 :

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{2}{\tau_2}\sqrt{1+\Omega_1^2\tau_1\tau_2}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu_{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi\tau_b} + \frac{1}{\pi T_c}\right)\sqrt{1+\Omega_1^2\tau_1\tau_2}$$

Cet élargissement par collision $1/\pi T_c$ est proportionnel à la densité du gaz, c'est-à-dire à sa pression. L'ordre de grandeur courant est de 1 à 10 MHz pour une pression de 1 Torr (soit $10^5/760 \simeq 131$ Pascal).

13.3 Élargissement inhomogène. Classes d'atomes. Classes de vitesses

Le problème dont nous parlons ici est beaucoup plus simple et évident que celui du paragraphe précédent. Il faut cependant distinguer deux types de situations assez différentes, bien qu'elles relèvent de la même problématique.

13.3.1 Classes d'atomes dans un environnement inhomogène

On rencontre ce phénomène dans toutes les expériences où l'échantillon macroscopique étudié n'est pas parfaitement homogène ; et les différents atomes se trouvent placés dans des environnements différents dont l'interaction contribue à changer légèrement les valeurs de leurs niveaux d'énergie.

Le cas le plus simple se rencontre en Résonance Magnétique (*cf.* chapitre 4) : la différence d'énergie entre les sous-niveaux magnétiques est proportionnelle à l'amplitude du champ magnétique $\overrightarrow{B}(x, y, z)$ existant en chaque point x, y, z de l'espace. Même en choisissant des configurations très symétriques pour les bobines ou les aimants qui créent le champ magnétique, et en utilisant des échantillons de petite dimension, on ne peut éviter que le champ magnétique varie légèrement d'un point à l'autre ; c'est-à-dire que la fréquence atomique centrale de la résonance $(E_a - E_b)/h = \nu_c(x, y, z)$ varie aussi avec la position x, y, z de l'atome considéré.

Un phénomène analogue se produit lorsqu'on étudie la résonance optique d'un ion dilué dans une matrice cristalline. Il est bien établi que chaque ion se trouve soumis à un champ cristallin représentant l'action de ses proches voisins ; et les propriétés de symétrie de ce champ cristallin permettent d'expliquer ses niveaux d'énergie optiques. Mais la matrice cristalline n'est jamais parfaitement homogène, d'autant plus qu'elle est perturbée par la présence des « impuretés » ioniques diluées ; et de ce fait les valeurs d'énergie des ions diffèrent légèrement d'un site à l'autre de la matrice cristalline. C'est-à-dire que la fréquence atomique centrale ν_c de la transition optique de ces ions varie de manière aléatoire, en fonction du site microscopique occupé par chacun d'eux. Nous avons décrit à la fin du paragraphe 3.4 des expériences où l'on réussit à irradier une seule molécule dans un échantillon ; et dans ce cas on peut observer le déplacement en fréquence de la courbe de résonance (Fig. 3.3) selon le site de la molécule observée.

Mais dans les expériences courantes, on irradie un très grand nombre des atomes ou molécules de l'échantillon ; et pour expliquer la forme de la raie de résonance, il faut connaître la répartition statistique des valeurs des fréquences centrales ν_c de tous les atomes. Nous appellerons $F(\nu_c)$ la fonction de répartition statistique normée à l'unité : dans un échantillon contenant N atomes (ou ions) le nombre d'atomes δN_c dont la fréquence de résonance centrale est comprise entre ν_c et $\nu_c + \delta\nu_c$ vaut :

$$\delta N_c = N.F(\nu_c)\delta\nu_c \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty F(\nu_c)\mathrm{d}\nu_c = 1 \qquad (13\text{-}18)$$

Cette classe d'atomes (c) interagit avec une onde lumineuse de fréquence ν proportionnellement à la fonction $\varphi(\delta\nu) = \varphi(\nu - \nu_c)$ de la figure 3.1, calculée dans la formule (3-7) ; c'est-à-dire que le nombre d'atomes excités par unité

de temps dans cette classe vaut d'après (8-1) :

$$\left|\frac{\mathrm{d}(\delta N_c)}{\mathrm{d}t}\right| = B_{12} w \varphi(\nu - \nu_c).\delta N_c = (N B_{12} w)\varphi(\nu - \nu_c) F(\nu_c)\delta\nu_c \qquad (13\text{-}19)$$

Le nombre total d'atomes excités, c'est-à-dire aussi de photons absorbés en 1 seconde, est obtenu en additionnant les contributions de toutes les classes (c) :

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \sum_c \left|\frac{\mathrm{d}(\delta N_c)}{\mathrm{d}t}\right| &= (N B_{12} w)\int_0^\infty \mathrm{d}\nu_c \varphi(\nu - \nu_c) F(\nu_c) \\ &= N B_{12} w \Phi(\nu) \\ \text{avec } \Phi(\nu) &= \int_0^\infty \mathrm{d}\nu_c \varphi(\nu - \nu_c) F(\nu_c) \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}20)$$

(Attention ! dans ce calcul de produit de convolution, nous faisons varier la fréquence centrale ν_c que nous considérons habituellement comme constante, et nous maintenons fixe la fréquence ν de l'onde, qui est habituellement considérée comme une variable).

On a représenté sur la figure 13.5 en (a) la fonction de répartition statistique $F(\nu_c)$ et en (b) en fonction de la fréquence ν de l'onde, le nombre d'atomes excités de deux classes particulières ν_c' et ν_c''. Les deux points noirs à la fréquence particulière ν représentent les contributions des deux classes à cette fréquence ; il faut faire la même opération pour toutes les autres classes pour calculer la valeur $\Phi(\nu)$ du produit de convolution.

Les deux fonctions $\varphi(\nu - \nu_c)$ et $F(\nu_c)$ étant normées à l'unité, on démontre que leur produit de convolution $\Phi(\nu)$ est aussi normé à l'unité :

$$\int_0^\infty \Phi(\nu)\mathrm{d}\nu = 1 \qquad (13\text{-}21)$$

On a superposé à la figure 13.5a une courbe en tireté représentant le produit de convolution $\Phi(\nu)$ avec la même échelle de fréquence : la courbe $\Phi(\nu)$ est plus large que la courbe $F(\nu_c)$ et elle délimite la même surface unité, elle est donc plus basse en son maximum.

Le calcul effectué en (13-20) reflète bien les observations effectuées en spectroscopie, lorsqu'on mesure l'absorption du faisceau lumineux de fréquence ν à la traversée d'un mince échantillon de matière, ou bien le nombre de photons réémis en fluorescence par l'échantillon, tant que l'intensité du faisceau lumineux incident reste assez faible. Aux fortes intensités approchant ou dépassant la saturation, le calcul des phénomènes observés devient plus compliqué : d'une part, il faut utiliser les solutions de Bloch à la place de $\varphi(\nu)$; d'autre part, l'addition des phénomènes sur les diverses classes d'atomes n'est pas aussi simple parce que la saturation (effet non linéaire en fonction du champ) joue davantage sur les classes voisines de la résonance ($\nu_c \approx \nu$) que sur les autres plus éloignées de la résonance.

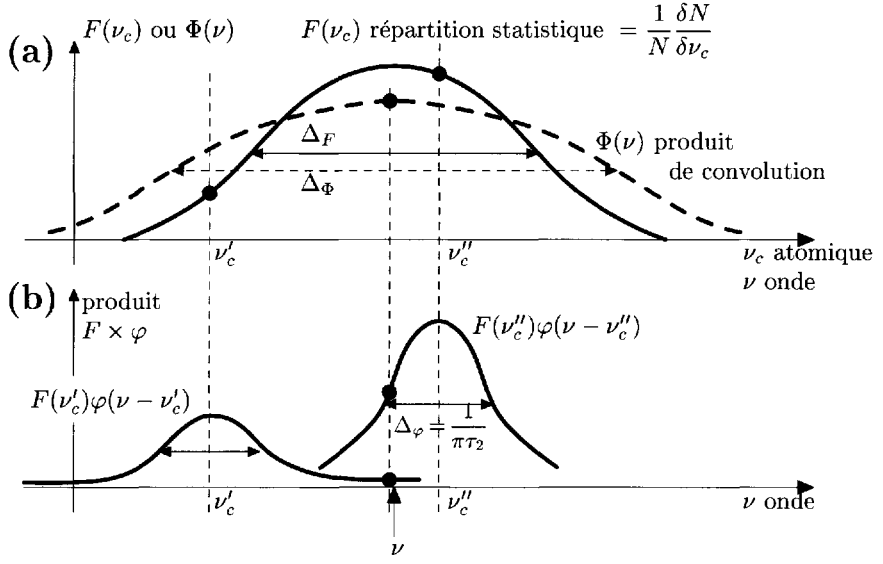


FIG. 13.5 – *Élargissement inhomogène.*

(a) Comparaison de la répartition statistique $F(\nu_c)$ des fréquences centrales ν_c des différents atomes avec le produit de convolution $\Phi(\nu)$ défini en (13-20).

(b) Contribution à l'interaction lumineuse de deux classes d'atomes particulières de fréquences centrales ν'_c et ν''_c en fonction de la fréquence ν de l'onde lumineuse. Les deux gros points noirs représentent les contributions des deux classes pour la fréquence ν particulière indiquée par la flèche.

Remarque 13.5 – (Sur le produit de convolution) – Lorsque les deux fonctions φ et F à convoluer sont deux fonctions lorentziennes, *cf.* formule (3-7), leur produit de convolution $\Phi(\nu)$ est une lorentzienne dont la largeur est la somme des largeurs des deux courbes φ et F. Lorsque les deux fonctions φ et F sont deux fonctions gaussiennes, leur produit de convolution Φ est aussi une gaussienne dont la largeur Δ_Φ est la somme quadratique des deux gaussiennes initiales Δ_φ et Δ_F :

$$\Delta_\Phi = \sqrt{(\Delta_\varphi)^2 + (\Delta_F)^2} \quad \text{(cas des gaussiennes)}$$

Dans le cas le plus fréquent en pratique, où φ est lorentzienne et F gaussienne, il n'y a pas de règle générale. Les fonctions de convolution correspondantes sont appelées « profils de Voigt » et sont tabulées numériquement dans les ouvrages spécialisés.

Remarque 13.6 – Dans les problèmes où il est plus commode de travailler avec la fréquence circulaire $\omega = 2\pi\nu$, on peut définir une fonction de répartition

statistique $G(\omega_c)$ pour la classe d'atomes de largeur $\delta\omega_c = 2\pi\delta\nu_c$, soit

$$\delta N_c = N.G(\omega_c).\delta\omega_c \quad \text{avec} \int_0^\infty G(\omega_c)\mathrm{d}\omega_c = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi G(\omega_c) = F(\omega_c) \quad (13\text{-}22)$$

puisque le nombre d'atomes δN_c est le même dans les deux formules (13-22) et (13-18).

13.3.2 Effet Doppler dans un gaz (inhomogénéité dynamique)

L'effet Doppler-Fizeau, ou variation de fréquence provoquée par le mouvement, est un phénomène bien connu, qui est important dans les gaz. Il produit une inhomogénéité dynamique et délocalisée, un peu différente de l'inhomogénéité statique et localisée du paragraphe précédent. Nous rappelons les formules de l'effet Doppler.

Si une onde électromagnétique de fréquence ν dans le laboratoire se propage parallèlement à la direction de l'axe Oz, et est reçue dans un repère se déplaçant avec une vitesse de composante v_z sur l'axe Oz, elle est vue dans ce repère avec la fréquence apparente $\nu_{\text{app}}(v_z) = \nu(1 - v_z/c) = \nu - v_z/\lambda$. (Si $v_z > 0$, le récepteur s'éloigne de l'émetteur et la fréquence apparente est diminuée ; si $v_z < 0$ le récepteur s'approche de l'émetteur et la fréquence apparente est augmentée.)

Pour chaque atome, dans son repère propre, la condition de résonance est identique ; et on en déduit sa fréquence centrale $\nu_c(v_z)$ dans le laboratoire :

$$\nu_{ab} = \frac{E_b - E_a}{h} = \nu_{\text{app}}(v_z) = \nu_c(v_z)\left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \quad (13\text{-}23)$$

On en déduit la relation entre la fréquence centrale et la vitesse de la classe d'atomes

$$\nu_c(v_z) = \frac{\nu_{ab}}{1 - \dfrac{v_z}{c}} \approx \nu_{ab}\left(1 + \frac{v_z}{c}\right) = \nu_{ab} + \frac{v_z}{\lambda} \quad \text{ou } v_z \approx \lambda\Big[\nu_c(v_z) - \nu_{ab}\Big] \quad (13\text{-}24)$$

(Pour λ on prendra la longueur d'onde des atomes de vitesse nulle $\lambda = c/\nu_{ab}$)
La répartition statistique des atomes de fréquence centrale ν_c est calculée facilement à partir de la répartition statistique des composantes de vitesse dans un gaz à température absolue T, connue sous le nom de loi de Maxwell. Le nombre de particules, dont la vitesse est comprise entre v_z et $v_z + \delta v_z$ vaut :

$$\delta N = N f(v_z).\delta v_z \quad \text{avec} \begin{cases} f(v_z) = \dfrac{1}{u\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\dfrac{v_z^2}{2u^2}} \text{ et } \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(v_z)\mathrm{d}v_z = 1 \\ u^2 = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m_A} = \overline{v_z^2} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} v_z^2 f(v_z)\mathrm{d}v_z \end{cases} \quad (13\text{-}25)$$

(k_B constante de Boltzmann ; m_A masse vraie d'un atome) le facteur $\sqrt{2\pi}$ dans l'expression de $f(v_z)$ est nécessaire pour la normalisation. On utilise l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. (On prendra garde à ne pas confondre u avec la vitesse quadratique moyenne, qui est définie pour la vitesse totale obtenue en faisant la somme des trois composantes $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3u^2 = 3k_BT/m$). Le nombre d'atomes calculé en (13-25) est aussi le nombre d'atomes de fréquence centrale $\nu_c(v_z)$ sur une largeur $\delta\nu_c = \delta v_z/\lambda$, soit :

$$\delta N = N.f(v_z)\delta v_z = N.F(\nu_c)\delta\nu_c \quad \text{avec } \delta v_z = \lambda\delta\nu_c \tag{13-26}$$

La classe de vitesse $(v_z, \delta v_z)$ devient donc, pour la transition optique, une classe de fréquence centrale $(\nu_c, \delta\nu_c)$ dont la loi de répartition statistique, définie en (13-18), s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} F(\nu_c) = \lambda f(v_z) = \lambda f\Big(\lambda(\nu_c - \nu_{ab})\Big) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\nu_c-\nu_{ab})^2}{2D^2}} \\ \text{avec } D^2 = \frac{u^2}{\lambda^2} = \frac{k_BT}{m_A\lambda^2} = \frac{RT}{M\lambda^2} = \overline{(\nu_c - \nu_{ab})^2} \end{aligned}\right\} \tag{13-27}$$

(D écart quadratique moyen en fréquence, m_A masse d'un atome vrai ; M masse atomique, R constante des gaz parfaits). On a représenté sur la figure 13.6b cette courbe de répartition statistique en fonction de l'écart de fréquence $(\nu_c - \nu_{ab}) = v_z/\lambda$). La même courbe peut être interprétée comme classe de fréquence ou classe de vitesse, à un facteur de normalisation près.

La théorie cinétique des gaz nous a ainsi permis de calculer, dans le cas des gaz, la loi de répartition en classes de fréquence. Mais attention ! ces classes de fréquence (ou de vitesse) n'ont pas la même stabilité que les classes de fréquence définies en milieu condensé solide ou liquide ; en effet, les collisions cinétiques dans le gaz modifient les vitesses des atomes et mélangent rapidement les atomes appartenant à ces diverses classes. Heureusement, nous avons vu que les sections efficaces cinétiques σ_{cin} sont bien inférieures aux sections efficaces des collisions déphasantes (*cf.* §13.2) et permettent de calculer des temps de collision $T_{\text{cin}} = 1/n\sqrt{2}\sigma_{\text{cin}}$ beaucoup plus longs que ceux des collisions déphasantes. En pratique, ces temps entre collisions cinétiques sont généralement beaucoup plus longs que le temps de relaxation transversal τ_2 des équations de Bloch (c'est de τ_2 qu'il faut tenir compte parce que, en présence de collisions, il est plus court que τ_1). Cette condition $T_{\text{cin}} \gg \tau_2$ permet à l'interaction électromagnétique d'atteindre la solution stationnaire de Bloch avant que la vitesse de l'atome ait été à nouveau modifiée (*cf.* chapitre 5) ; elle nous donne le droit de traiter l'effet Doppler comme un élargissement inhomogène, parce que, après chaque modification de fréquence, sa valeur reste stable assez longtemps (pendant toute la durée entre deux collisions cinétiques, de l'ordre de T_c). Au contraire, les collisions déphasantes, étudiées

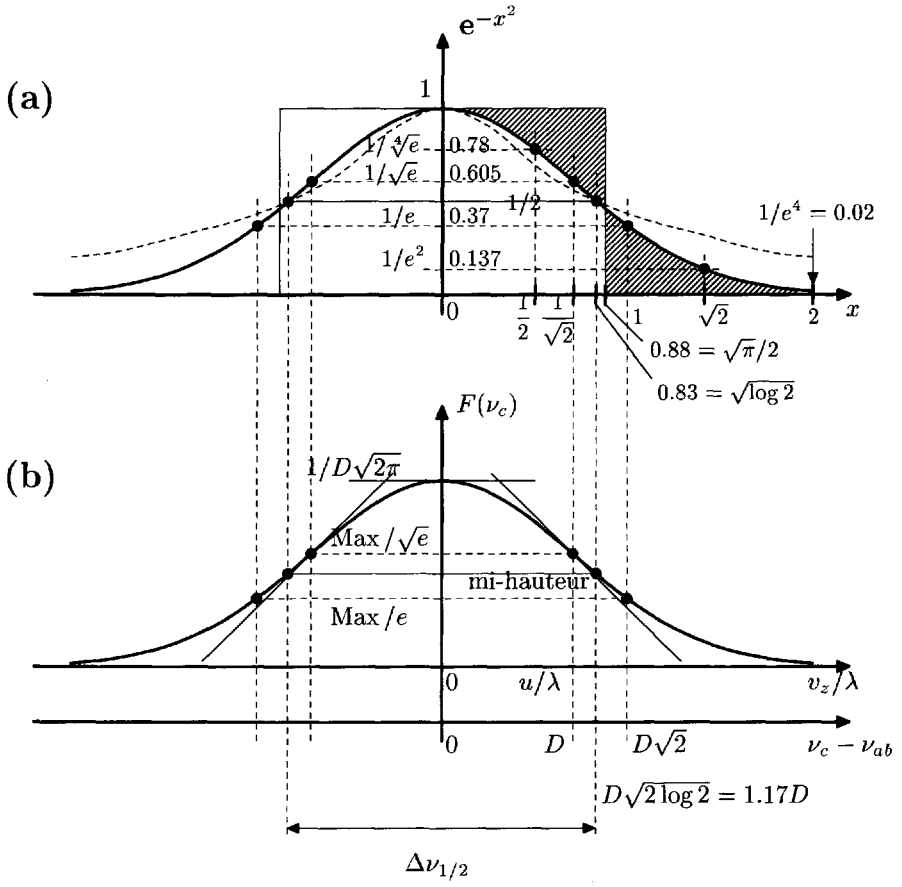


FIG. 13.6 – *Élargissement Doppler.*

(a) Courbe de Gauss $\mathbf{e}^{-x^2}$ *en fonction de la variable sans dimension* x. *La surface délimitée par cette courbe est égale à* $\sqrt{\pi}$; *elle est égale à celle du rectangle de hauteur* 1 *compris entre les deux valeurs* $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ *(les deux surfaces hachurées sont égales). En tireté une courbe lorentzienne ayant la même largeur à mi-hauteur.*

(b) Répartition statistique maxwellienne $F(\nu_c)$ *de la formule (13-27) (la surface est normée à l'unité).*

au paragraphe précédent, provoquent des modifications de fréquence dont la durée est beaucoup trop courte (il s'agit alors de la durée de collision $\approx 10^{-11}$ seconde) pour relever de la présente description.

Remarque 13.7 – (Sur les largeurs de raie Doppler) – Pour faciliter l'utilisation de la courbe $F(\nu_c)$, nous avons rappelé sur la figure 13.6a les relations mathématiques caractérisant la courbe de Gauss e^{-x^2} en fonction du paramètre sans dimension x.

L'écart quadratique moyen en fréquence D est égal à l'écart de fréquence $(\nu_c - \nu_{ab})$ à la hauteur $1/\sqrt{e}$ du maximum. Conventionnellement, on utilise le plus souvent la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ qui correspond à un écart de fréquence $D\sqrt{2\ln 2}$, soit :

$$\Delta\nu_{1/2} = 2D\sqrt{2\ln 2} = 2\frac{u}{\lambda}\sqrt{2\ln 2} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{2\frac{k_B T}{m_A}\ln 2} \qquad (13\text{-}28)$$

La courbe gaussienne tombe très rapidement à zéro sur les ailes (on a indiqué sur la figure (a) le point $(x = 2)$ où elle tombe à $1/e^4 \approx 1/50$). Ceci permet dans des évaluations d'ordre de grandeur de remplacer la courbe gaussienne par un rectangle de surface équivalente. On voit sur la figure (a) que la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ est, à 5 % près, égale à la largeur de ce rectangle.

Cette largeur doppler varie bien sûr avec les conditions expérimentales (température et masse atomique) ; mais cette variation est limitée par le fait qu'on doit calculer une racine carrée. Un ordre de grandeur facile à retenir dans le domaine des rayonnements visibles ($\lambda \approx 0.5$ μm) est $\Delta\nu_{1/2} \approx 1$ GHz $= 1000$ MHz. C'est environ 100 fois plus large que les largeurs homogènes courantes en spectroscopie visible ; et lorsqu'on fait le produit de convolution $\Phi(\nu)$, sa largeur à mi-hauteur Δ_Φ est à peine supérieure à la largeur Doppler Δ_F; *cf.* figure 13.5.

Cependant dans des expériences particulières où l'on travaille avec un grand écart à la résonance $\nu - \nu_{ab} \gg \Delta\nu_{1/2}$ (tel que la courbe de Gauss soit pratiquement égale à zéro), on observe encore des effets notables parce que les courbes lorentziennes $\varphi(\nu - \nu_c)$ décroissent sur les ailes de manière beaucoup plus lente. Pour illustrer cet effet, on a superposé à la gaussienne de la figure 13.6a une courbe lorentzienne en pointillé ayant la même largeur à mi-hauteur. Tous les profils de Voigt, calculés par convolution, ont une forme lorentzienne dans la partie lointaine de leurs ailes.

Remarque 13.8 – Représentation de la largeur inhomogène par un temps de relaxation transversal — Nous avons vu au §13.2 que les collisions déphasantes ont pour conséquence une diminution du temps de relaxation transversal τ_2 dans les équations de Bloch, (*cf.* formules (13-16)). Nous en avons déduit un élargissement de la forme de raie normalisée $\varphi(\nu)$ qui représente les probabilités de transition (*cf.* (13-17)) :

$$\Delta\nu_{12} = \frac{1}{\pi\tau_2} = \frac{1}{2\pi\tau_b} + \frac{1}{\pi T_c} \quad \text{ou} \quad \Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_b} + \frac{2}{T_c}$$

Dans le langage courant, certains auteurs transposent ces formules au cas de l'élargissement inhomogène, et définissent ainsi un « temps de relaxation transversal inhomogène » τ_{inhom} défini à partir de la largeur à mi-hauteur de la répartition statistique :

$$\left(\Delta\omega_{1/2}\right)_{\text{statistique}} = \frac{2}{\tau_{\text{inhom}}} = \frac{1}{T_2^*}$$

Il est vrai que la largeur à mi-hauteur de la répartition statistique représente, en quelque sorte, une probabilité de brouillage des variables atomiques moyennes $\overline{u}$

et $\overline{v}$, due aux fluctuations de l'écart à résonance $\delta\omega_c$ des diverses catégories d'atomes ; et cette notion peut être utilisée sans doute pour des estimations rapides d'ordre de grandeur.

Mais les calculs des produits de convolution (13-20) montrent que ces probabilités, étant définies de manière différente des précédentes, ne permettent pas d'appliquer la loi d'addition des probabilités indépendantes (la largeur d'un produit de convolution dans le cas général n'est pas la somme des largeurs des deux courbes de départ) ; et les phénomènes discutés dans les deux paragraphes suivants sont la preuve expérimentale de la nécessité absolue de bien distinguer les rôles des processus homogènes d'une part et des processus inhomogènes d'autre part.

C'est la raison pour laquelle nous préférons ne pas employer la notation T_2^* couramment utilisée pour représenter l'inverse de la largeur de raie dans les cas des fortes inhomogénéités.

13.4 « Hole burning », conséquence des classes d'atomes

La fonction de convolution $\Phi(\nu)$, introduite au paragraphe précédent, permet de représenter en première approximation les processus subis par l'onde lumineuse en interaction avec l'échantillon matériel ; on peut dire qu'elle reflète assez bien le « point de vue » de l'onde lumineuse. Mais inversement, on peut essayer de s'intéresser au « point de vue » des atomes de l'échantillon : il suffit de revenir à la figure 13.5 pour se rendre compte que les atomes de la classe de fréquence ν_c'' sont beaucoup plus sensibles à l'interaction de l'onde que ceux de la classe de fréquence ν_c', et seront donc excités en beaucoup plus grande proportion. Ce phénomène a des conséquences dans les expériences et nous oblige à développer davantage maintenant le « point de vue » des atomes selon leur catégorie.

Nous avons écrit en (13-19) la « vitesse d'excitation » pour les atomes de la classe $(\nu_c, \delta\nu_c)$; en divisant (13-19) par δN_c on obtient la probabilité d'excitation. Nous pouvons reprendre, pour cette catégorie particulière, tous les calculs du début du chapitre 8 et calculer leur répartition, à l'équilibre stationnaire, entre les deux états d'énergie E_a et E_b ; c'est-à-dire que nous distinguons dans le nombre δN_c d'atomes de cette classe le nombre δN_{ca} qui sont dans l'état d'énergie E_a et le nombre δN_{cb} qui sont dans l'état d'énergie E_b, et nous définissons des fonctions de répartition différentes $F_a(\nu_c)$ et $F_b(\nu_c)$ pour ces deux sous-catégories.

$$\delta N_c = \delta N_{ca} + \delta N_{cb} \text{ avec } \begin{cases} \delta N_{ca} = N.F_a(\nu_c)\delta\nu_c \\ \\ \delta N_{cb} = N.F_b(\nu_c)\delta\nu_c \end{cases} \tag{13-29}$$

soit $F(\nu_c) = F_a(\nu_c) + F_b(\nu_c)$
(F_a et F_b séparément ne sont pas normées à l'unité ; conformément à la formule (13-18), c'est leur somme qui est normée à l'unité.) Ces fonctions

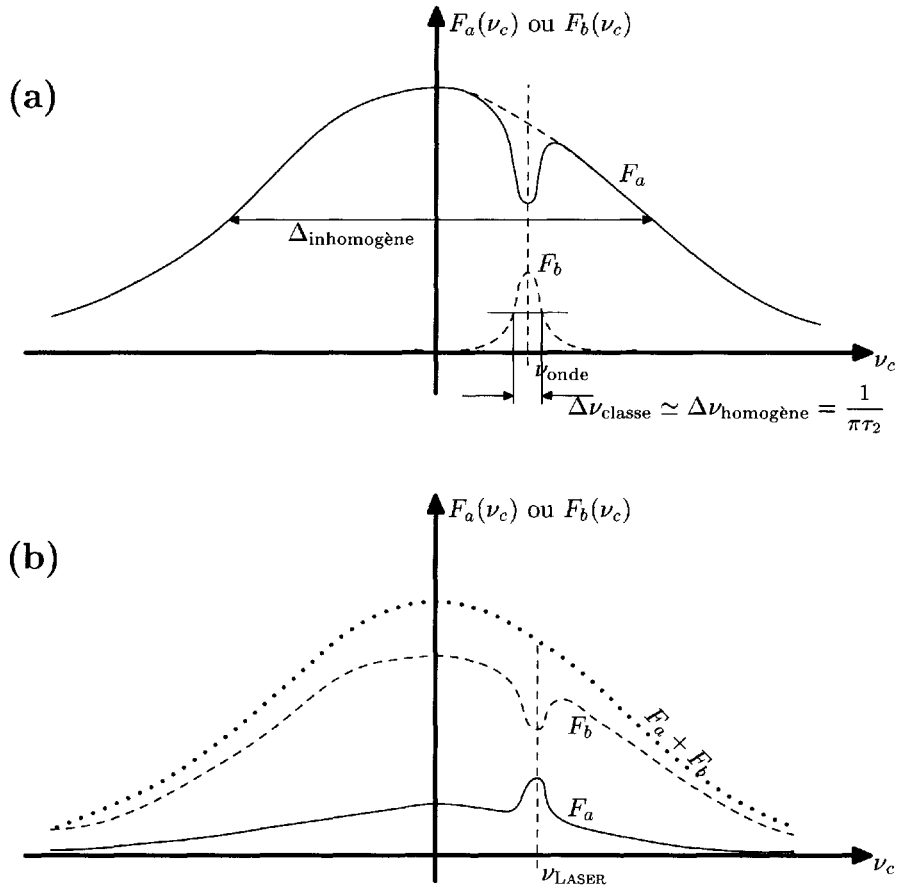


FIG. 13.7 – *Hole burning. Répartition statistique en fréquence centrale ν_c des atomes selon qu'ils sont à l'état inférieur E_a (trait plein) ou à l'état excité E_b (en tireté).*

(a) expérience de spectroscopie : on irradie avec un faisceau incident de fréquence ν_{onde} des atomes qui sont initialement à l'état fondamental E_a ;

(b) les populations atomiques sont inversées par un processus de pompage permettant une émission laser à la fréquence ν_{laser}.

de répartition distinctes F_a et F_b sont utilisées dans toutes les figures de ce paragraphe et des paragraphes suivants.

La figure 13.7a représente le résultat d'une expérience de spectroscopie où les atomes sont tous initialement dans l'état fondamental E_a avant qu'on ne les irradie avec un faisceau lumineux de fréquence ν_{onde}. Une forte proportion

des atomes de la classe de fréquence $\nu_c = \nu_{\text{onde}}$ sont excités à l'état E_b, formant un trou dans la courbe de répartition statistique F_a de l'état fondamental E_a (Hole burning). La largeur en fréquence de ce trou est en ordre de grandeur la largeur $1/\pi\tau_2$ de la raie homogène $\varphi(\nu - \nu_c)$.

Lorsqu'on augmente l'intensité lumineuse du faisceau incident, le trou s'élargit un peu et sa profondeur s'accroît. Aux très fortes intensités lumineuses se produit le phénomène de saturation, où la profondeur du trou se stabilise : dans le cas d'égalité des poids statistiques ($g_a = g_b$) à mi-hauteur ($F_a = F_b$) de la somme $F_a + F_b$ représentée en pointillés fins. Le trou continue à s'élargir, mais très lentement selon la loi de l'élargissement de puissance étudiée au chapitre 3. En pratique, si la largeur inhomogène est bien supérieure à la largeur homogène ($\Delta\nu_{\text{inhomo}} \gg 1/\pi\tau_2$), l'expérience ne concerne qu'une faible fraction des atomes.

La figure 13.7b s'interprète de la même manière, mais elle s'applique à des atomes dont les populations sont inversées par pompage. On fait l'hypothèse, généralement vérifiée, que l'efficacité du pompage est la même pour toutes les classes d'atomes. On a supposé que l'échantillon atomique est placé dans une cavité optique permettant une émission laser à la fréquence ν_{laser}. Cette émission laser provoque aussi un trou dans la courbe de répartition statistique F_b de l'état supérieur E_b de la transition. Dans le cas d'un laser en régime continu, le trou de la répartition F_b et le pic de la répartition F_a se stabilisent en sorte que la différence des populations des atomes concernés par l'interaction soit égale à celle du seuil (*cf.* chapitre 10). C'est un calcul délicat puisqu'il faut faire une intégrale sur une petite portion de l'axe ν_c en tenant compte de l'interaction décroissante de $\varphi(\nu_{\text{laser}} - \nu_c)$; mais en ordre de grandeur on peut admettre que la classe d'atomes en interaction forte avec l'onde laser a une largeur $\delta\nu_c$ voisine de la largeur homogène $1/\pi\tau_2$:

$$N(F_b - F_a)\delta\nu_c \approx N(F_b - F_a)\frac{1}{\pi\tau_2} \approx D_{\text{seuil}} \qquad \text{(13-30)}$$

Dans ce cas encore, si la largeur inhomogène est bien supérieure à la largeur homogène, seule une faible fraction des atomes participe à l'émission laser. On n'utilise donc qu'une faible partie de l'énergie de pompage communiquée à l'ensemble des atomes. Ce phénomène de « hole burning » a été mis en évidence dès le début des premiers lasers (référence [3]).

Dans une cavité optique linéaire, l'onde laser forme une onde stationnaire avec des ventres et des nœuds d'intensité. La discussion illustrée par la figure 13.7b est faite évidemment aux ventres de l'onde stationnaire ; mais aux nœuds de l'onde stationnaire, les deux courbes de répartition F_a et F_b gardent leur forme régulière. *Le hole burning dans la répartition de fréquence F_a est aussi un hole burning* **spatial** *qui n'existe qu'aux ventres de la cavité.*

13.5 Cas des gaz en cavités : résonance de saturation et Lamb-dip

La discussion du paragraphe 13.4 ci-dessus s'applique aussi à un échantillon gazeux, mais à condition seulement que les atomes interagissent avec un seul faisceau lumineux de direction et sens uniques. C'est en effet la condition pour que la correspondance entre classes d'atomes et classes de vitesses, utilisée sur la figure 13.6b, soit biunivoque. Si au contraire, il existe plusieurs sens de propagation (comme dans une cavité optique linéaire), le problème se complique et mérite une analyse plus fine.

Nous commençons par discuter le cas plus simple d'une expérience de spectroscopie où le faisceau lumineux est réfléchi sur lui-même avec un miroir et traverse donc deux fois l'échantillon gazeux dans le sens Aller des z positifs, puis dans le sens Retour vers les z négatifs (ce pourrait être à l'intérieur d'une cavité Pérot-Fabry, entre ses deux miroirs). Dans ces conditions la figure 13.7a doit être remplacée par la figure 13.8a qui comporte trois axes horizontaux distincts :

- le premier est un axe des vitesses (mesurées en unités de fréquence : v_z/λ) puisque ce sont elles qui définissent véritablement les classes d'atomes ;
- le second axe horizontal représente la correspondance entre la vitesse v_z et la fréquence centrale ν_c pour l'interaction avec le faisceau Aller dirigé vers les z positifs ; c'est une simple transposition de la figure 13.6b.
- En ce qui concerne l'interaction avec le faisceau Retour, de sens opposé au précédent, l'inversion de signe de l'effet Doppler fait que la relation fréquence-vitesse est aussi changée de signe :

$$\text{pour l'Aller } \nu_c - \nu_{ab} = \frac{v_z}{\lambda}\text{; pour le Retour } \nu_c - \nu_{ab} = -\frac{v_z}{\lambda} \qquad (13\text{-}31)$$

On voit alors que la même fréquence ν_{onde} interagit avec deux classes de vitesse différentes (opposées en signe) selon qu'il s'agit du faisceau Aller ou du faisceau Retour : les deux faisceaux opposés créent deux trous symétriques dans la répartition de vitesse. (Alors que dans un milieu condensé, où aucune considération de vitesse n'intervient, les deux faisceaux interagissent avec les mêmes atomes.)

Lorsqu'on effectue une expérience de spectroscopie, on fait varier la fréquence de l'onde incidente sur toute la plage de fréquence correspondant à la largeur inhomogène autour de la fréquence atomique ν_{ab} et l'on mesure soit l'intensité absorbée, soit l'intensité réémise en fluorescence. Lorsque la fréquence de l'onde passe par la valeur atomique exacte ν_{ab}, les deux trous symétriques dans la répartition de vitesse se confondent ; c'est-à-dire que les deux faisceaux Aller et Retour interagissent alors avec la même classe de vitesse nulle. Il se produit alors un phénomène différent : cette unique classe de vitesse est soumise à une intensité lumineuse double.

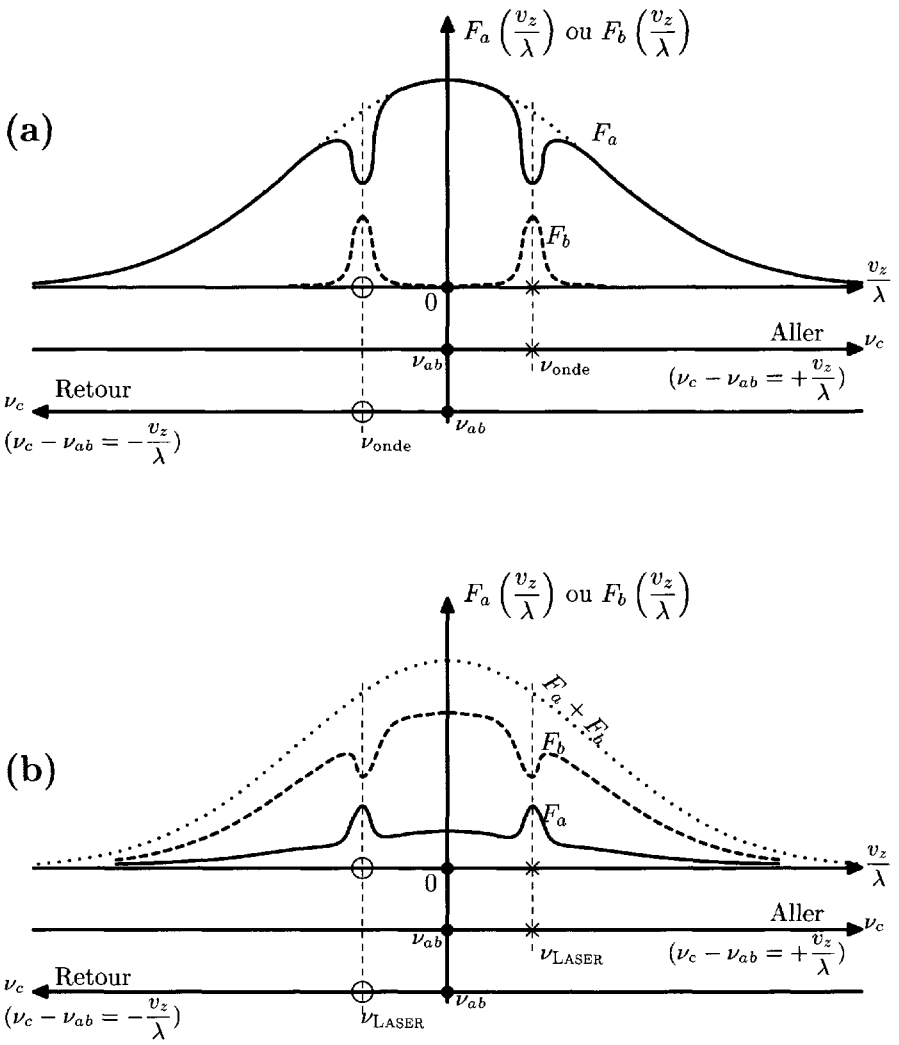


FIG. 13.8 - *Gaz en interaction avec deux faisceaux opposés de même fréquence.*

(a) Expérience de spectroscopie ;

(b) cas où les populations sont inversées par pompage-émission laser.

Nous avons signalé au §8.3 comme au §3.5 la non-linéarité des solutions stationnaires (des équations phénoménologiques au chapitre 8 comme des solutions de Bloch au chapitre 3), non-linéarité qui conduit à la saturation. Nous l'avons illustrée par les figures 8.3 et 3.4c, où les courbes en trait

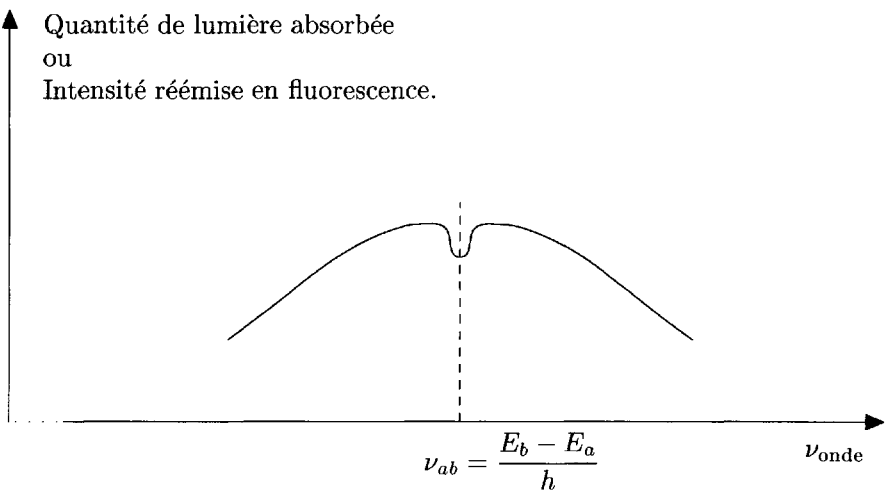


FIG. 13.9 – *Résonance de saturation dans un gaz, irradié par deux faisceaux lumineux opposés, de même fréquence. On observe une courbe d'allure semblable pour la puissance émise par un laser à gaz ; on l'appelle alors Lamb-dip.*

tireté représentent la variation de la population n_b de l'état excité. Il est bien clair sur ces figures que le doublement de l'intensité lumineuse entraîne une augmentation beaucoup plus faible du nombre d'atomes excités, c'est-à-dire aussi du nombre des photons absorbés par le gaz. Dans l'expérience de spectroscopie, lorsque la fréquence de l'onde passe par la valeur atomique ν_{ab}, on réduit de moitié le nombre d'atomes concernés (une classe de vitesse au lieu de deux) en doublant l'intensité de leur irradiation : si l'interaction était linéaire avec l'intensité, les deux phénomènes se compenseraient l'un l'autre ; la non-linéarité fait que nombre total d'atomes excités, et celui des photons absorbés diminue. La figure 13.9 montre l'allure de la courbe expérimentale tracée en fonction de la fréquence ν_{onde} : on observe autour de la fréquence atomique ν_{ab} un pic en creux dont la largeur est du même ordre de grandeur que celle des trous dans les répartitions de vitesse des figures 13.7 et 13.8, c'est-à-dire de l'ordre de la largeur homogène. Compte-tenu du rapport, (souvent de l'ordre de cent) entre la largeur inhomogène et la largeur homogène, ces résonances de saturation permettent d'augmenter considérablement la précision des mesures spectroscopiques développées à partir de 1970 ; elles ont complètement renouvelé le champ de la spectroscopie (réf. [4] et [5]).

La figure 13.8b explique le fonctionnement d'un laser à gaz, et elle est obtenue à partir de la figure 13.7b en ajoutant les correspondances entre les vitesses v_z des atomes et les fréquences de l'onde suivant qu'il s'agit du faisceau Aller ou du faisceau Retour. On voit que deux classes de vitesses opposées

participent à l'émission de la même fréquence ν_{laser} ; et cette émission laser crée donc deux trous symétriques dans la répartition de vitesse F_b de l'état excité E_b.

On peut faire varier la fréquence d'émission laser en modifiant la longueur de cavité. Lorsque la fréquence d'émission passe par la valeur atomique exacte ν_{ab}, il se produit le même phénomène que dans l'expérience précédente de spectroscopie : réduction de moitié du nombre d'atomes émetteurs (une classe de vitesse au lieu de deux) mais doublement de l'intensité lumineuse agissant sur eux (interaction avec les deux faisceaux Aller et Retour, au lieu d'un seul : Aller ou Retour). Les équations de l'émission stimulées sont parfaitement symétriques de celles de l'absorption ; et leur non-linéarité conduit aussi à une saturation : le nombre total des transitions stimulées de E_b vers E_a diminue, c'est-à-dire aussi la puissance émise par le laser.

Lorsqu'on enregistre la puissance du faisceau laser en fonction de la fréquence, on observe une courbe analogue à celle de la figure 13.9 avec un pic étroit en creux lorsqu'on passe par la fréquence atomique ν_{ab}. Historiquement, ce creux dans la puissance émise du laser a été observé et expliqué par Lamb avant les résonances de saturation ; et il porte le nom de **Lamb-dip**. Il peut être utilisé, au prix d'un asservissement de la longueur de cavité, pour stabiliser la fréquence d'un laser à la fréquence atomique exacte (réf. [6] et [7]).

Remarque 13.9 – L'explication des résonances de saturation dans les expériences de spectroscopie est assez simple parce que, dans ces expériences, on travaille avec une intensité constante du faisceau lumineux incident. L'explication exacte du Lamb-dip avec un laser est un peu plus délicate puisque l'intensité lumineuse du faisceau lumineux interne à la cavité se modifie quand on fait varier la fréquence. L'explication nous oblige à revenir aux équations du chapitre 9, où nous calculons le gain logarithmique du faisceau lumineux se propageant dans le milieu laser. Mais si la fréquence n'est pas au centre de la raie atomique inhomogène, nous devons distinguer l'écart de populations D_{A} de la classe de vitesse en interaction avec le faisceau Aller et l'écart de populations D_{R} de la classe de vitesse en interaction avec le faisceau Retour et nous pouvons calculer séparément le gain à l'Aller et le gain au Retour (*cf.* 9-19) :

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{\text{Aller}} &= \alpha_{\text{A}}(\nu)\Delta z = \sigma_{21}(\nu)D_{\text{A}}\Delta z = \sigma_{21}(\nu)D_{\text{A}}\eta l \\ \gamma_{\text{Retour}} &= \alpha_{\text{R}}(\nu)\Delta z = \sigma_{21}(\nu)D_{\text{R}}\Delta z = \sigma_{21}(\nu)D_{\text{R}}\eta l\end{aligned}\right\}$$

Nous en déduisons le gain sur un tour de cavité :

$$\gamma_{\text{atome}} = \gamma_{\text{Aller}} + \gamma_{\text{Retour}} = \sigma_{21(\nu)}\eta l(D_{\text{A}} + D_{\text{R}}) = \sigma_{21}(\nu)2\eta l\frac{D_{\text{A}} + D_{\text{R}}}{2} \qquad (13\text{-}32)$$

Par comparaison avec la formule (9-21) nous voyons que le gain atomique sur un tour est obtenu en remplaçant l'écart de population habituel D par la demi-somme des écarts de population des deux classes d'atomes concernées.

Nous savons (chapitre 10) que le laser en fonctionnement continu travaille au seuil, en sorte que le gain d'énergie atomique compense exactement les pertes

de cavité ; soit :

$$\gamma_{\text{atome}} = \gamma_s = 1 - R_A + 1 - R_B = 2\eta l \sigma_{21}(\nu).D_{\text{seuil}} \quad (cf.\ (10\text{-}5))$$

Compte tenu de la symétrie des deux classes de vitesse, nous pouvons faire l'hypothèse que les deux écarts de population D_A et D_R sont égaux et nous obtenons :

$$D_A = D_R = D_{\text{seuil}} = \frac{1 - R_A + 1 - R_B}{2\eta l \sigma_{21}(\nu)} \quad cf.\ (9\text{-}17)$$

En définitive l'écart de populations des deux classes de vitesse distinctes est égal à celui d'une classe unique, centrée sur la fréquence atomique. La non-linéarité de la saturation intervient dans la relation entre l'écart de population et l'intensité lumineuse dans la cavité. Nous avons appelé w la densité d'énergie moyenne de l'onde stationnaire, c'est-à-dire que les densités d'énergie respectives du faisceau Aller et du faisceau Retour sont égales à la moitié $w/2$ (*cf.* 9.2). Si nous appliquons les formules du modèle de pompage à deux niveaux (9-28) et (9-29) aux classes de vitesses séparées en interaction avec l'onde Aller et avec l'onde Retour, nous devons les écrire avec $w/2$ à la place de w

$$D_A = D_R = D_P \frac{1}{1 + \dfrac{w}{2w_r}} = D_{\text{seuil}} \text{ soit } \frac{w}{w_r} = 2\left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right) \qquad (13\text{-}33)$$

Au contraire pour une classe unique centrée à la fréquence atomique, nous conservons la formule (9-29) :

$$D = D_P \frac{1}{1 + \dfrac{w}{w_r}} \quad \text{soit } \frac{w}{w_r} = \left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)$$

c'est-à-dire que la densité d'énergie w totale de l'onde et donc la puissance du faisceau laser vaudrait la moitié de la valeur (13-33). Nous utilisons le conditionnel parce que le raisonnement que nous faisons ici est très grossier : en réalité w_r dépend de la fréquence par $\varphi(\nu)$ (*cf.* 9-28) et $\sigma_{21}(\nu)$ varie aussi comme $\varphi(\nu)$, il faut donc effectuer de délicates intégrales en fréquence pour un calcul rigoureux et ceci tend à diminuer l'importance réelle du creux du Lamb-dip. Nous renvoyons à l'ouvrage de Lamb pour de tels calculs ; suivant les conditions sur le pompage et le rapport des largeurs, la hauteur relative du Lamb-dip peut varier de quelques pour cent à un maximum de l'ordre de 30 % (réf. [8]).

Remarque 13.10 – (Disparition du hole burning spatial dans les gaz) – Compte tenu du déplacement de fréquence Doppler, si l'on raisonne dans le repère d'un atome (de vitesse v_z non nulle), il ne peut être en interaction qu'avec le faisceau Aller ou avec le faisceau Retour, mais pas avec les deux puisque dans ce repère leurs fréquences sont différentes ; cet atome n'est donc pas sensible à l'onde stationnaire et pour lui il n'y a ni nœuds ni ventres de l'onde lumineuse.

On peut aussi raisonner dans le repère du laboratoire, où l'atome se déplace d'une longueur $\delta z = v_z.\tau_2$ pendant la durée τ_2 de l'interaction lumineuse ; τ_2 est le temps de relaxation transversale qui détermine la largeur de la raie homogène $\Delta\nu = 1/\pi\tau_2$. On suppose que la lumière est en interaction avec deux classes de vitesse bien

séparées, c'est-à-dire que leur déplacement de fréquence Doppler est grand devant la largeur homogène, soit en supposant v_z positif et en utilisant (13-24) :

$$\left.\begin{aligned} & \nu_c - \nu_{ab} = \frac{v_z}{\lambda} \gg \Delta\nu_{\text{homogène}} = \frac{1}{\pi\tau_2} \\ \text{ou} \quad & \frac{\delta z}{\lambda} = \frac{v_z\tau_2}{\lambda} \gg \frac{1}{\pi} \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}34)$$

C'est-à-dire que pendant la durée de l'interaction lumineuse, l'atome parcourt une distance δz bien supérieure à la distance $\lambda/4$ entre un nœud et un ventre ; et il moyenne donc l'intensité lumineuse entre les nœuds et les ventres : il passe trop vite pour avoir le temps de les « voir ».

13.6 Compétition de modes dans les lasers à gaz

Dans la plupart des explications données jusqu'ici, nous avons admis par souci de simplicité que le laser fonctionnait sur une seule fréquence. Nous avons cependant rappelé au début de ce chapitre la fonction d'Airy de la cavité optique (Fig. 13.1) qui détermine un peigne de fréquences, également espacées, pour lesquelles la cavité est résonnante. En fait l'oscillation laser peut prendre naissance pour toutes les fréquences de ce peigne, tombant dans la largeur de la raie atomique. Nous cherchons maintenant à en tenir compte de manière plus précise.

Pour cela, nous reprenons sur la figure 13.10a les schémas de la figure 13.8b comportant deux axes de fréquence opposés pour le faisceau Aller et le faisceau Retour dans la cavité : le même peigne de fréquences (numérotées 1, 2, 3, 4 et 5) apparaît sur ces deux axes à des positions symétriques par rapport à l'axe central correspondant à la fréquence atomique ν_{ab}. Pour chacune des fréquences numérotées 2,3 et 4 nous avons représenté les deux classes de vitesses opposées en interaction avec l'onde laser (les fréquences numérotées 1 et 5 sont trop éloignées de la fréquence atomique ν_{ab} pour permettre une émission laser).

Par rapport à la figure 13.8b, nous avons fait une autre modification : au lieu de représenter séparément les répartitions statistiques F_b et F_a des deux niveaux d'énergie E_b et E_a, nous avons représenté simplement la différence $(F_b - F_a)$ qui est proportionnelle à l'écart des populations inversées, c'est-à-dire encore au gain logarithmique atomique γ_{atomique} sur un tour de cavité. Si le laser atteint un fonctionnement continu, les écarts de population concernés reviennent au seuil ; et nous avons évalué grossièrement en (13-30) la condition de seuil pour $(F_b - F_a)$; cette valeur est reportée sur la figure 13.10.

On visualise ainsi sur la figure 13.10a les six classes de vitesse (deux à deux opposées) qui permettent d'émettre simultanément les trois fréquences numérotées 2, 3 et 4. Ces trois ondes sont émises indépendamment les unes des autres par des atomes distincts et n'ont donc aucune interaction entre elles.

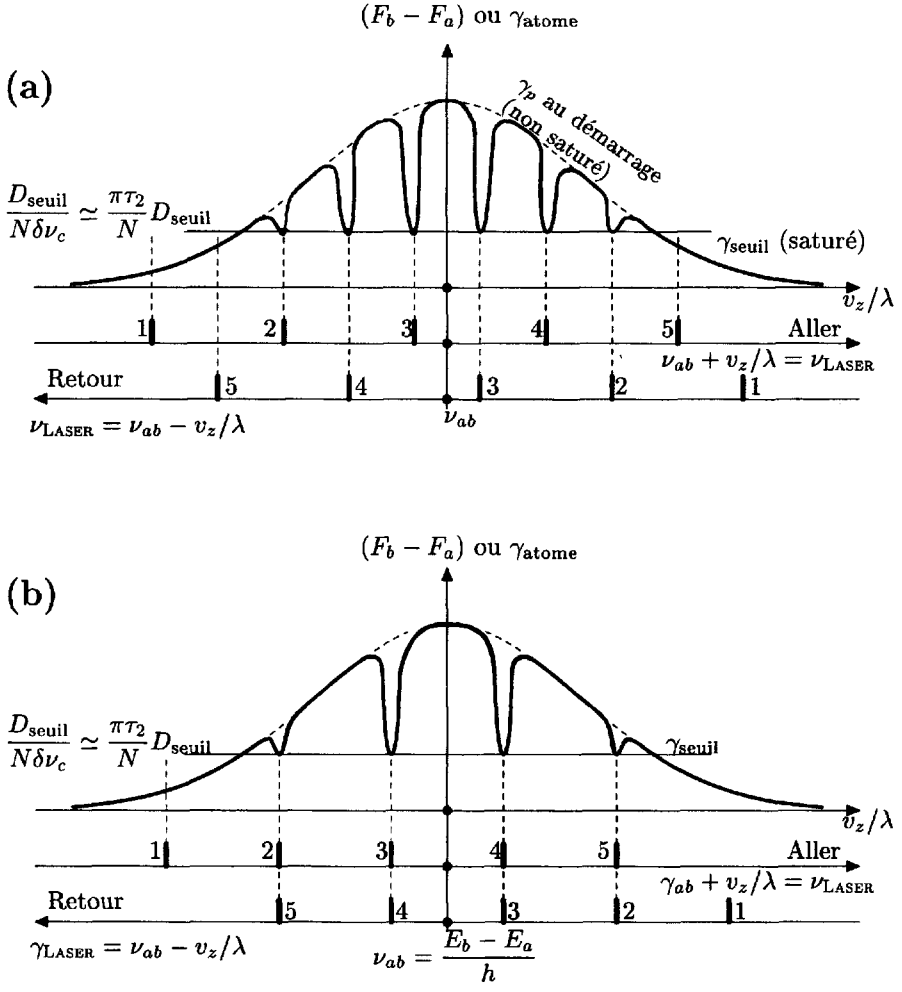


FIG. 13.10 – *Fonctionnement d'un laser à gaz. Cas où la largeur homogène est beaucoup plus étroite que la largeur Doppler. Sur chacun des axes de fréquence des faisceaux Aller et Retour on a marqué le peigne des fréquences des maxima de la fonction d'Airy de la cavité.*

(a) Cas quelconque sans compétition de modes ;

(b) cas particulier où le peigne de fréquences de la fonction d'Airy est symétrique par rapport à la fréquence atomique ν_{ab}.

Nous pouvons calculer la puissance émise sur chacune d'entre elles en utilisant les formules du chapitre 10 ; sans doute faut-il, pour un calcul exact, effectuer

une intégrale sur une petite portion de l'axe des fréquences (ou des vitesses v_z/λ) ; mais les portions de l'axe des fréquences correspondant à chacune sont suffisamment séparées pour permettre trois calculs indépendants. On dit encore que ces trois modes de la cavité ne sont pas en compétition entre eux.

Remarque 13.11 – Reprenant les notions introduites au chapitre 10 formule (10-5), on peut dire que la courbe en cloche de Maxwell $(F_b - F_a)$ est proportionnelle au gain atomique γ_P lorsqu'on supprime la cavité optique, ou bien au démarrage du laser lorsque l'intensité de l'onde laser est encore négligeable ; c'est ce qu'on appelle le gain non saturé. Tandis que la droite horizontale représente le gain au seuil ou gain saturé γ_s.

Par opposition, la figure 13.10b représente une situation où les modes sont en compétition. On l'obtient lorsque, faisant varier très légèrement la longueur de cavité, on fait glisser le peigne de fréquences de manière à le rendre symétrique par rapport à la fréquence atomique centrale ν_{ab}. On voit alors que les deux classes de vitesses opposées interagissent avec le faisceau Aller d'un mode de cavité mais aussi avec le faisceau Retour du mode symétrique ; c'est-à-dire que les mêmes atomes de ces deux classes peuvent échanger leur énergie avec deux modes distincts de fréquences différentes. L'énergie qui est donnée à l'un des modes ne peut pas être donnée à l'autre ; on dit que ces deux modes sont en compétition. Les deux équations différentielles régissant la variation temporelle des intensités lumineuses des deux modes sont alors très fortement couplées et conduisent à des solutions très instables.

Les raisonnements faits ci-dessus supposent que la largeur homogène est très inférieure à la largeur Doppler. Mais si l'on élargit la courbe de réponse homogène $\varphi(\nu-\nu_0)$, par exemple en augmentant la pression du gaz (*cf.* §13.2), on élargit les classes de vitesse ; et il peut arriver que les ailes des courbes homogènes qui les représentent commencent à se recouvrir (*cf.* Fig. 13.11a) ; c'est-à-dire que certains atomes peuvent être alors en interaction simultanée avec deux modes ; il existe alors une compétition partielle entre ces modes.

Lorsque la compétition est suffisamment forte entre deux modes non symétriques, elle tend à favoriser le mode dont le gain est *a priori* le plus élevé et à éteindre celui de faible gain. Pour en donner l'idée, nous discutons maintenant le cas limite où la largeur homogène est égale, voire supérieure, à la largeur Doppler (Fig. 13.11b). Dans ce cas, tous les atomes du milieu amplificateur interagissent avec tous les modes possibles d'oscillation laser à l'intérieur de la largeur Doppler.

La courbe de répartition statistique en vitesses $(F_b - F_a)$, produite par le pompage, est la même que dans les cas précédents de la figure 13.10. Cette courbe a la forme maxwellienne de la figure 13.6, dans la mesure où l'efficacité du pompage est supposée indépendante de la vitesse des atomes. (Cette courbe peut être éventuellement contrôlée par une étude spectroscopique du milieu amplificateur placé en dehors de la cavité optique, ce qui empêche l'émission laser.) Lorsque l'émission laser se produit dans la cavité

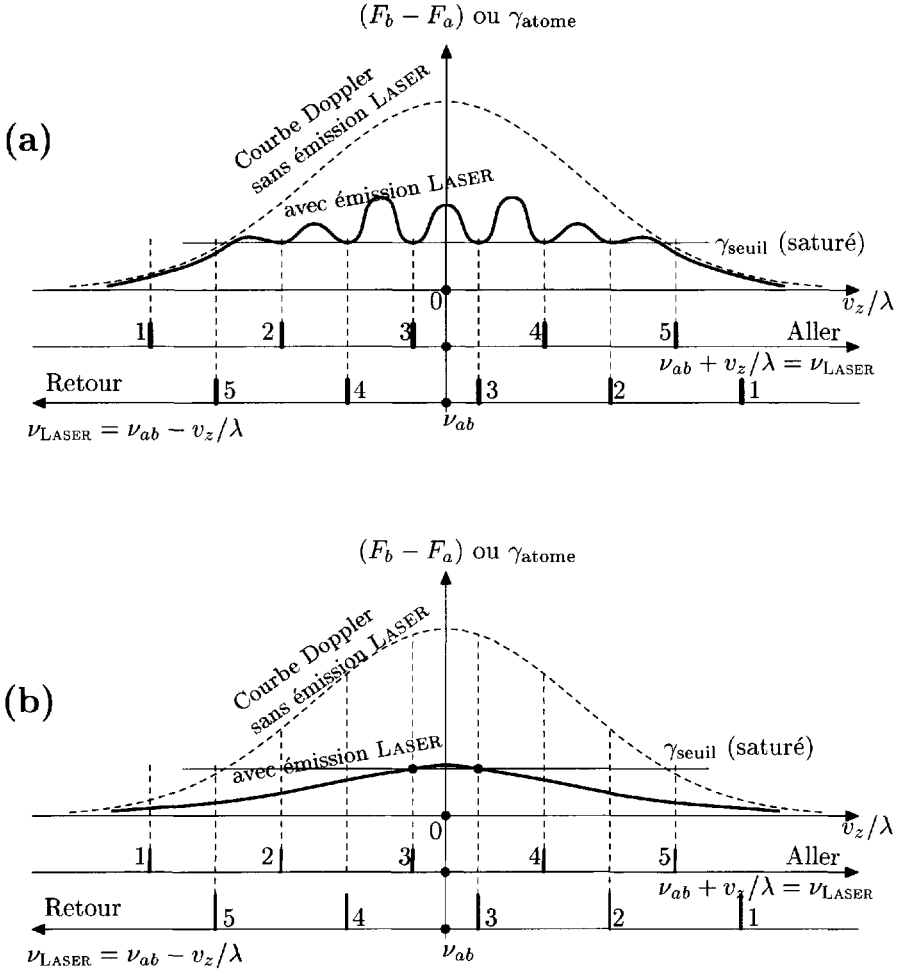


FIG. 13.11 – *Fonctionnement d'un laser à gaz, avec compétition des modes.*

(a) Compétition partielle (largeur homogène $\simeq$ 10 à 20 % de la largeur Doppler) ;

(b) compétition totale (largeur homogène $\simeq$ largeur Doppler).

optique, il faut soustraire une courbe ayant grossièrement l'allure de la courbe homogène $\varphi(\nu - \nu_c)$, mais qui est aussi large que la courbe initiale ; le résultat est une courbe en cloche aplatie comme celle tracée en trait plein sur la figure 13.11b. Le laser peut s'allumer momentanément sur plusieurs modes simultanément dans la mesure où le gain initial sur ces différents modes

(courbe en tireté) est supérieur à celui du seuil. Mais lorsque la puissance émise sur le mode le plus central (celui qui est n° 3 sur la figure) augmente, la diminution de l'écart des populations $(F_b - F_a)$ tend à ramener le gain sur ce mode à la valeur seuil γ_s. Compte tenu de la forme en cloche de la courbe de répartition, le gain sur les modes latéraux est alors nécessairement au-dessous de la valeur seuil. Ces modes latéraux s'éteignent donc très rapidement et ne peuvent plus se réallumer. *La compétition entre les modes permet donc l'oscillation sur une seule fréquence.*

Pour cette discussion, nous avons privilégié les lasers à gaz, parce que leur courbe d'élargissement inhomogène (Doppler) est bien établie et qu'il est facile de modifier leur largeur homogène en changeant la pression du gaz. Mais l'analyse développée dans ce §13.6 peut être généralisée au cas des lasers à milieu condensé ; si leur largeur homogène est très grande (τ_2 très court), la compétition de modes y est importante, et elle favorise le fonctionnement monomode sur une seule fréquence.

Bibliographie

[1] J.P. Gordon, H.J. Zeiger et C.H. Townes, Phys. Rev. **99**, 1264 (1955).

[2] A.L. Schawlow et C.H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).

[3] W.R. Bennett Jr, Appl. Opt. Suppl. **1**, 24 (1962) ; Phys. Rev. Lett. **8**, 12 (1962).

[4] C. Bordé, C.R. Acad. Sci. Paris, **271**, 371 (1970) ; ou bien M. Ouhayoun et C. Bordé, C.R. Acad. Sci. Paris, **274**, 411 (1972).

[5] T.W. Hänsch, I.S. Shahin et A.L. Schawlow, Phys. Rev. Lett. **27**, 707 (1971) ; T.W. Hänsch, M.D. Levenson, A.L. Schawlow et P. Toschek, Phys. Rev. Lett. **26**, 946 (1971).

[6] R.A. McFarlane, W.R. Bennett Jr, W.E. Lamb Jr, Appl. Phys. Lett. **2**, 10 (1963).

[7] A. Szöke et A. Javan, Phys. Rev. **145**, 137 (1966).

[8] M. Sargent, M.O. Scully et W.E. Lamb Jr, Laser Physics (Addison-Wesley, 1977).

Chapitre 14

Techniques de contrôle des fréquences laser

POUR LES APPLICATIONS scientifiques des lasers, où l'on doit ajuster la fréquence de l'onde lumineuse, un gros progrès a été réalisé dans le début des années 1970 (soit une dizaine d'années après les premiers lasers) la mise au point des lasers accordables en fréquence. Nous avons signalé, dans la revue des types de laser au chapitre 12, ceux qui permettent ce choix de la fréquence. Ce sont généralement des cristaux dopés d'impuretés choisies ou des solutions de colorants, qui possèdent de larges bandes de fluorescence (grande largeur en fréquence, *cf.* Fig. 12.10) et qui sont capables d'entretenir l'émission stimulée dans une grande partie de cette bande de fréquence. Nous voulons au début de ce chapitre expliquer comment on choisit et l'on contrôle leur fréquence d'émission.

14.1 La première sélection de fréquence d'un laser accordable

Nous avons déjà indiqué dans le premier paragraphe du chapitre 12 l'importance du rôle de la cavité optique dans la détermination de la fréquence de fonctionnement d'un laser C'est en construisant une cavité optique adaptée à une seule fréquence que l'on peut imposer à un milieu amplificateur à large bande d'émettre sur cette fréquence particulière. La figure 14.1 montre des exemples de telles cavités.

14.1.1 Train de prismes

Nous avions déjà vu au chapitre 12 comment un petit prisme placé dans la cavité permet de choisir les diverses raies spectrales d'un laser à gaz (*cf.* Fig. 12.1) dont les fréquences sont naturellement espacées. Pour

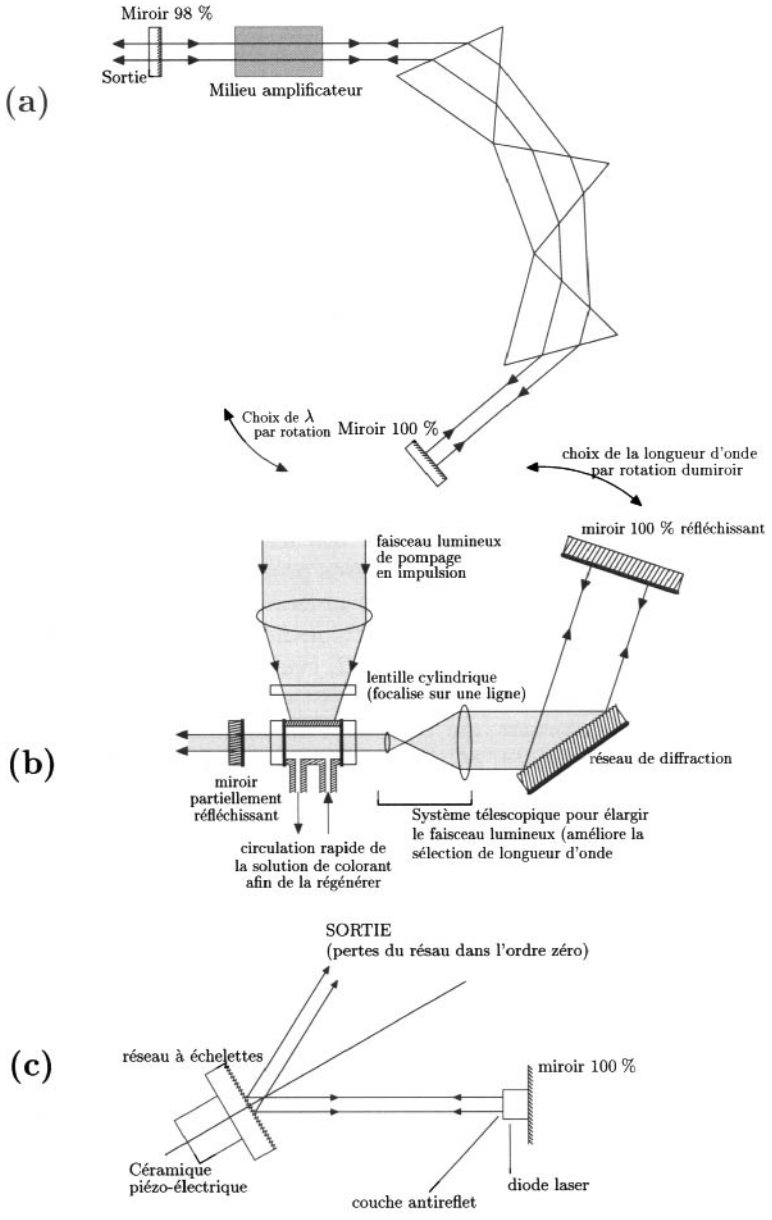


FIG. 14.1 – *Sélection de fréquence dans un laser accordable.*
(a) Par un train de prisme ;
(b) par un réseau à échelettes avec un colorant pompé en impulsion ;
(c) par un réseau à échelettes formant une cavité externe avec une diode laser.

sélectionner une fréquence dans un continuum, il faut disposer d'un pouvoir dispersif beaucoup plus important ; il est nécessaire d'utiliser des prismes plus gros, voire d'en utiliser plusieurs successivement, comme sur la figure 14.1a. Certains lasers sont construits avec un semblable *train de prismes*, après lequel le faisceau est renvoyé sur lui-même par un miroir orthogonal. Le changement de la fréquence ou la longueur d'onde sélectionnée se fait par rotation du miroir ; mais pour produire des changements importants, il faut aussi jouer sur les angles des trois prismes, ce qui est un peu compliqué.

14.1.2 Réseau de diffraction

Dans beaucoup de lasers on préfère obtenir le même pouvoir dispersif d'un seul coup en utilisant un réseau de diffraction. Ceci est possible grâce à la fabrication en série, à prix modéré, de bons réseaux par réflexion, à échelettes orientées permettant d'obtenir une luminosité directionnelle intense suivant l'angle de l'ordre d'interférence utile (« blaze » en anglais). Cette condition est essentielle pour réduire les pertes de la cavité optique incorporant le réseau, et lui garder un coefficient de qualité Q élevé (utile pour abaisser le seuil de fonctionnement).

La figure 14.1b représente le schéma d'un laser à colorant utilisant un tel réseau de diffraction : la fréquence laser est déterminée par l'angle du miroir qui reçoit la lumière venant du colorant et diffractée par le réseau ; ce miroir renvoie la lumière sur elle-même, vers le réseau, où elle est diffractée une seconde fois dans la direction du faisceau incident (on utilise la symétrie, à l'aller et au retour, de la formule de diffraction déjà rencontrée en (11-30)). La cavité est donc bien fermée pour cette fréquence particulière.

Le système télescopique de deux lentilles confocales, inséré entre les deux parties de la cavité optique, sert à élargir le faisceau lumineux entre son passage dans le colorant amplificateur (l'efficacité du pompage exige un faible volume utile du colorant) et son passage sur le réseau ; on démontre en effet dans les calculs de diffraction que le pouvoir dispersif du réseau est proportionnel au nombre total de traits du réseau, c'est-à-dire à la longueur utilisée du réseau.

Il s'agit ici d'un laser en impulsions pompé optiquement par les impulsions lumineuses venant d'un autre laser à fréquence fixe. On a choisi ici un pompage transversal (à angle droit du faisceau laser dans la cavité optique) ; et un jeu de lentilles (sphérique et cylindrique) permet de concentrer la lumière de pompage sur le volume utile, mince et allongé, du colorant.

Une autre utilisation courante du réseau est schématisée sur la figure 14.1c. On a choisi dans ce cas une configuration où l'angle de diffraction est égal en module à l'angle d'incidence sur le réseau, de sorte que la lumière de fréquence sélectionnée est renvoyée sur elle-même par le réseau à échelettes (ceci est symbolisé sur le dessin par des échelettes perpendiculaires au faisceau lumineux ; mais ce n'est qu'un symbole car, à cette échelle, les traits du

réseau ne sont pas discernables). Ce réseau joue le rôle d'un miroir, accordé en fréquence, qui ferme la cavité optique externe, de quelques centimètres de longueur, dans laquelle fonctionne une diode laser. Contrairement au schéma habituel des diodes lasers (*cf.* Fig. 12.12) cette diode n'a été revêtue d'une couche réfléchissante que sur une seule de ses faces ; sur la face opposée au contraire il est bon de déposer une couche antireflet. Pour réduire encore les pertes de la cavité externe ainsi formée, on utilise les pertes naturelles du réseau dans l'ordre zéro (lumière réfléchie, comme elle le serait par le plan du réseau) comme faisceau de sortie de la cavité. Le réglage de tels lasers est délicat car, outre l'angle du réseau, il faut ajuster la température de la diode et l'intensité du courant électrique de pompage ; mais une fois le réglage trouvé, il reste à peu près stable.

Remarque 14.1 – On doit noter le caractère exceptionnel de la diode laser montée en cavité externe avec un réseau (*cf.* Fig. 14.1c) où il est possible, non sans difficultés, d'obtenir un fonctionnement monomode. Cette propriété exceptionnelle peut être expliquée par deux raisons principales :

1. on peut obtenir le fonctionnement de la diode laser dans une large bande de fréquence en modifiant sa température et l'intensité du courant de pompage. Mais lorsqu'on fixe une température et une densité de courant particulières, la bande de fréquence possible est beaucoup plus réduite ;
2. les constantes de temps de relaxation des électrons pompés dans la bande de conduction sont extrêmement courtes, conduisant à des largeurs homogènes importantes qui favorisent la compétition de modes sur une large bande (*cf.* §13.6). Cette compétition des modes voisins est aussi favorisée par le fait que le milieu amplificateur est collé contre un des miroirs de la cavité, dans une zone où les nœuds et les ventres des fréquences voisines coïncident à peu près (*cf.* §14.2 sur les cavités en anneau).

On notera aussi que les cavités externes de diodes lasers sont de petites dimensions (quelques centimètres) au moins dix fois inférieures à celles des lasers accordables à colorants ou à cristaux ; et les modes de cavité sont donc aussi dix fois plus espacés.

14.1.3 Filtre de Lyot

Bien que l'on fabrique couramment des réseaux dont l'efficacité dans l'angle de diffraction choisi atteint 90 à 95 %, il reste quelques pour cent de pertes qui constituent un handicap important dans la construction des lasers accordables *en régime continu* (à colorants ou à cristaux dopés), si l'on veut en obtenir la puissance maximum (*cf.* chapitre 10). C'est pourquoi dans la plupart des lasers accordables en régime continu, on évite d'utiliser un réseau. Le système de sélection le plus fréquemment utilisé est alors un filtre de Lyot. Il s'agit en fait d'une adaptation complexe du simple filtre de Lyot original (réf. [1]). Le laser représenté sur la figure 14.3 (dans le §14.2) comporte un de ces nouveaux filtres de Lyot, composé de trois lames cristallines d'épaisseurs différentes, parallèles et inclinées par rapport au faisceau laser suivant l'angle de Brewster

(de manière à supprimer les pertes par réflexion partielle de la polarisation rectiligne dans le plan d'incidence du faisceau laser). Une simple rotation de ce filtre permet de modifier la fréquence (la couleur) qui est transmise sans perte (ref. [2]).

La sélection de fréquence réalisée par l'un quelconque des trois procédés indiqués ci-dessus est suffisante pour de nombreuses applications. Mais généralement la petite bande de fréquence ainsi permise pour le fonctionnement laser contient encore un grand nombre de modes longitudinaux (pics d'Airy) de la cavité. La fréquence du laser n'est pas déterminée de manière parfaite et, suivant la nature de la compétition de mode, le laser peut fonctionner simultanément sur plusieurs modes (plusieurs fréquences) ou sauter irrégulièrement d'un mode à l'autre. Nous expliquons dans les paragraphes suivants comment il est possible d'obtenir un fonctionnement monomode.

Remarque 14.2 – Nous expliquons ci-dessous le **principe du filtre de Lyot.** Le simple filtre de Lyot original (réf. [1]) est constitué d'une lame cristalline biréfringente placée entre deux polarisateurs parallèles, orientés à 45° des lignes neutres de la lame cristalline. La lumière polarisée rectiligne est transformée par la traversée de la lame en une lumière dont la polarisation dépend du déphasage φ entre les deux vibrations principales (parallèles aux lignes neutres de la lame) dû à la différence de leurs indices de réfraction n_e et n_o. Ce déphasage dépend aussi de l'épaisseur e de la lame et de la longueur d'onde λ ($\varphi = 2\pi e(n_e - n_o)/\lambda$) : la polarisation peut être elliptique (plus ou moins aplatie), ou circulaire (lame quart d'onde) ou rectiligne

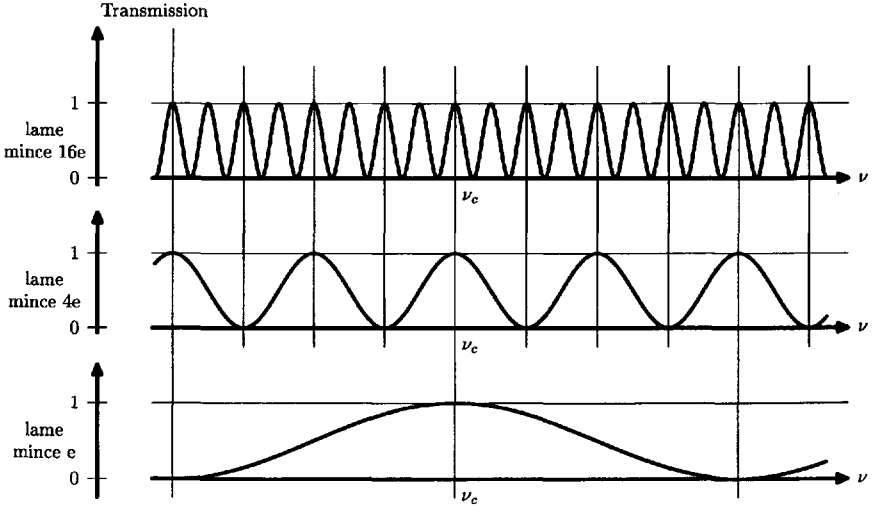


FIG. 14.2 – *Spectres cannelés transmis à travers trois filtres Lyot, dont les lames cristallines ont des épaisseurs différentes dans le rapport 1, 4 et 16 (en abscisse, la fréquence de la lumière).*

à angle droit (lame demi-onde) ou rectiligne identique à la vibration incidente (lame onde). La transmission de cette polarisation à travers le second polarisateur conduit à une intensité lumineuse variant suivant la longueur d'onde, entre 100 % et zéro (le noir total).

Si l'on envoie de la lumière initialement blanche à travers ce filtre, et qu'on l'analyse avec un spectroscope, on obtient un spectre cannelé où les fréquences transmises (cannelures brillantes du spectre) et les fréquences non transmises (cannelures noires du spectre) sont régulièrement espacées en fréquence (*cf.* Fig. 14.2). L'écart périodique entre les cannelures $\Delta\nu = c/e(n_e - n_o)$ varie en raison inverse de l'épaisseur de la lame : une lame épaisse produit un grand nombre de cannelures très fines mais très serrées ; tandis qu'une lame mince produit un petit nombre de cannelures très larges espacées. En utilisant successivement trois lames d'épaisseurs croissantes, mais possédant chacune une cannelure brillante centrée sur la fréquence centrale choisie ν_c, on peut ainsi combiner la sélectivité en fréquence de la mince cannelure centrale de la lame épaisse avec l'extinction de toutes les fréquences latérales par les deux autres lames plus minces ; *cf.* Figure 14.2. On notera que pour le fonctionnement du laser, il n'est pas nécessaire de produire l'extinction complète des fréquences indésirées ; il suffit de les atténuer suffisamment pour qu'elles passent en dessous du seuil.

Si l'on réalise un triple filtre tel que nous venons de le décrire, il est clair que la fréquence permise ν_c dépend de l'épaisseur e choisie et ne peut plus être changée. L'adaptation du filtre de Lyot au laser (Bloom 1974 ; référence [2]) a consisté à travailler avec une incidence oblique sur les lames cristallines (nous avons noté plus haut l'intérêt de l'angle d'incidence de Brewster) ; le calcul du filtre devient nettement plus complexe parce qu'il faut alors calculer l'angle du faisceau réfracté à l'intérieur de la lame et la valeur de l'indice le long de cette direction. Mais on obtient en revanche un avantage essentiel : lorsqu'on tourne la lame dans son plan, on modifie l'orientation de ses lignes neutres avec le faisceau réfracté et donc aussi l'indice de réfraction de ce faisceau. On modifie donc le calcul de la phase sans changer l'épaisseur de la lame ; une simple rotation du filtre dans son plan (sans modifier l'incidence de Brewster) permet ainsi de changer la longueur d'onde sélectionnée.

14.2 Cavité en anneau unidirectionnelle

Nous avons parlé au §13.4 du « hole burning » dans les classes d'atomes et nous avons représenté sur la figure 13.7 ces creux dans la répartition statistique des atomes « brûlés » par l'interaction avec la lumière ; nous avions aussi signalé à la fin de ce paragraphe que ce phénomène a aussi un aspect spatial, puisqu'il se produit aux ventres de l'onde stationnaire mais pas aux nœuds où l'interaction est négligeable. Ce phénomène spatial a une conséquence néfaste dans la recherche d'un fonctionnement monomode, qui nous préoccupe maintenant.

En effet, les positions des nœuds et des ventres d'une onde stationnaire varient suivant la longueur d'onde : les nœuds de deux longueurs d'onde voisines λ_1 et λ_2 coïncident à peu près entre eux lorsqu'on est proche des miroirs qui ferment les deux bouts de la cavité, mais ils se décalent progressivement

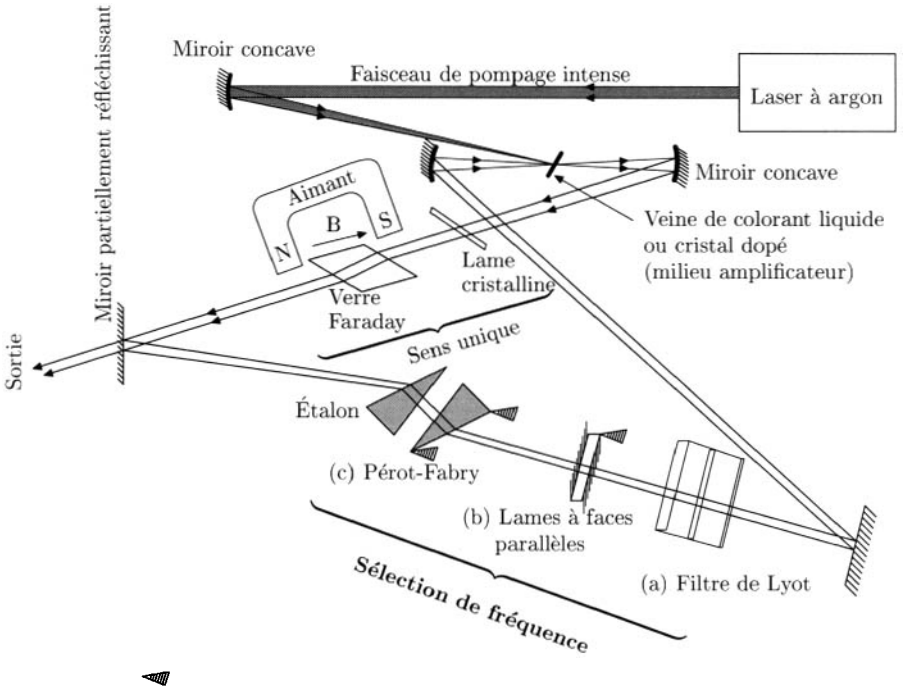


FIG. 14.3 – *Schéma d'un laser accordable monomode fonctionnant en régime continu (en pratique le filtre de Lyot (a) travaille sous-incidence oblique).*

lorsqu'on s'éloigne des miroirs ; et dans le milieu de la cavité on trouve des zones où ils sont décalés d'environ $\lambda/4$ c'est-à-dire où les ventres de λ_1 coïncident à peu près avec les nœuds de λ_2 et réciproquement. Quelle que soit la position du milieu amplificateur (sauf à être collé contre le miroir) lorsqu'il fonctionne à la longueur d'onde λ_1, on peut trouver un autre mode de longueur d'onde λ_2 voisine dont les ventres coïncident avec les nœuds de λ_1 à l'intérieur du milieu. Ces deux modes λ_1 et λ_2 sont pratiquement émis par des atomes différents, localisés en des points distincts ; ils ne sont donc pas en compétition, et rien ne les empêche de fonctionner simultanément sans se gêner l'un l'autre. En d'autres termes, l'énergie de pompage déposée dans le milieu aux nœuds de λ_1, n'est pas consommée par l'émission de λ_1 et reste disponible pour l'émission de λ_2. Pour un fonctionnement monomode, il faut donc ajouter à l'intérieur de la cavité un élément extrêmement sélectif séparant λ_2 de λ_1.

Le problème serait beaucoup plus facile à résoudre si l'on pouvait travailler dans une onde progressive d'intensité constante dans l'espace, et dont l'émission consommerait l'énergie de pompage déposée en tout point

du milieu. C'est la raison pour laquelle les lasers accordables utilisent fréquemment des cavités en anneau (*cf.* Fig. 14.3). Rien n'empêche *a priori* que la cavité en anneau soit parcourue par deux ondes tournant en sens opposés ; c'est en fait ce qui se produit normalement lorsqu'on utilise une telle cavité.

Mais on sait construire dans la cavité en anneau un *dispositif de sens unique* qui empêche l'onde de tourner dans les deux sens. Un tel dispositif est schématisé sur la figure 14.3. Il utilise une lame à face parallèle d'un verre spécial, sensible à l'effet Faraday. L'effet Faraday est un effet de polarisation rotatoire artificiel induit par un champ magnétique : lorsqu'il est soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ parallèle à la direction du faisceau lumineux (un aimant permanent de taille moyenne suffit), ce verre Faraday provoque la rotation de la polarisation rectiligne de la lumière autour du champ magnétique ; l'angle de cette rotation est proportionnel au champ B et le sens de la rotation est défini par rapport au vecteur champ $\overrightarrow{B}$, indépendamment du sens de propagation du faisceau lumineux.

Le sens de rotation de l'effet Faraday est donc déterminé différemment du sens de rotation de la polarisation rotatoire naturelle dans un cristal qui dépend au contraire du sens de propagation du faisceau lumineux (le sens de la rotation naturelle de polarisation est défini par rapport au sens de propagation de la lumière). Comme on peut le voir sur la figure 14.3, les faisceaux laser traversent successivement le verre Faraday et une lame cristalline possédant la propriété de polarisation rotatoire naturelle. Dans le verre Faraday, les deux faisceaux Aller et Retour subissent la même rotation de polarisation ; dans la lame cristalline les deux faisceaux subissent des rotations opposées d'angles $\pm\alpha$. Dans ces conditions pour l'un des faisceaux lumineux, les deux rotations s'ajoutent ; pour l'autre faisceau, les deux rotations se retranchent ; en choisissant la valeur du champ B et l'épaisseur du verre Faraday, on s'arrange à ce qu'elles se compensent exactement, en sorte que la polarisation de ce faisceau reste inchangée par la traversée du dispositif de sens unique. La polarisation de l'autre faisceau se propageant en sens opposé, subit au contraire une rotation notable 2α ; la composante utile du champ électrique de l'onde se trouve réduite par le facteur $\cos 2\alpha$, son intensité par le facteur $\cos^2 2\alpha$, et cette perte d'intensité est suffisante pour la faire passer au-dessous du seuil laser. On obtient ainsi le fonctionnement en sens unique ; et l'on vérifie facilement, en inversant le sens de l'aimant et du champ B, que l'on inverse aussi le sens de parcours de la cavité optique par l'onde laser.

Dans ces cavités en anneau unidirectionnelles, l'onde progressive (renforcée par les tours successifs, en phase) a une intensité constante. La disparition des nœuds et des ventres provoque la compétition entre modes de fréquences voisines et facilite l'obtention du fonctionnement monomode.

Remarque 14.3 – Des cavités en anneau (triangulaires ou carrées) sont fabriquées industriellement pour construire les gyroscopes lasers. Si la cavité est sur un véhicule en rotation, la relativité permet de démontrer que l'onde qui tourne

dans le sens de la rotation du véhicule voit la longueur de cavité un peu augmentée, tandis que l'onde qui tourne en sens opposé voit la longueur de cavité un peu diminuée. Pour respecter la condition de résonance de la cavité (périmètre $L = k\lambda$) les deux fréquences propres des deux ondes tournant en sens opposé se décalent légèrement l'une par rapport à l'autre ; et l'on mesure leur fréquence de battement, proportionnelle à la vitesse de rotation du véhicule.

14.3 Interféromètres en cascade dans un laser accordable monomode

Le principe de la méthode utilisée, pour sélectionner un seul mode de la cavité laser, s'inspire de celle déjà exposée au §14.1 et sur la figure 14.2 pour construire le filtre de Lyot. Compte tenu de la présélection décrite en 14.1, on peut envisager d'intercaler, à l'intérieur de la cavité laser, un interféromètre de Pérot et Fabry assez mince pour que l'écart de deux pics d'Airy voisins soit assez important, et qu'un seul d'entre eux soit transmis dans le maximum de la présélection. Si les couches réfléchissantes de ce Pérot-Fabry sont très performantes, lui conférant une finesse exceptionnelle (on arrive à plusieurs centaines), la largeur de son pic d'Airy n'est pas supérieure de beaucoup (2 à 3 fois peut-être) à l'intervalle de deux modes voisins de la cavité laser ; ce qui permet d'assurer la suprématie d'un seul d'entre eux.

En fait, on n'obtient de très grandes finesses avec les interféromètres Pérot et Fabry qu'en réalisant des couches fortement réfléchissantes qui absorbent une fraction faible mais non négligeable de l'intensité lumineuse et réduisent notablement la transmission au maximum de son pic d'Airy. C'est pourquoi en pratique on préfère utiliser des interféromètres successifs, qui sont chacun séparément nettement moins sélectifs, mais dont le pouvoir de transmission global (dans leur maximum commun) est nettement supérieur. C'est suivant ce principe qu'est construit le laser en anneau schématisé sur la figure 14.3, fonctionnant en régime continu, et que nous décrivons maintenant de façon plus détaillée.

Avant d'expliquer la sélection de fréquence, nous décrivons d'abord la forme de cavité et le système de pompage. Le pompage optique du milieu amplificateur à large bande est effectué à partir d'un laser à gaz primaire à fréquence fixe (Argon ionisé) fournissant plusieurs watts de lumière dans le vert. Pour abaisser le seuil du laser accordable, on a intérêt à concentrer cette puissance lumineuse sur un petit volume du milieu amplificateur ; c'est pourquoi elle est focalisée avec un miroir concave. Mais il faut aussi que le volume pompé coïncide avec le volume utile du milieu amplificateur dans la cavité du laser accordable ; la cavité en anneau comporte donc deux miroirs concaves confocaux et le milieu amplificateur est placé au foyer commun de ces deux miroirs (plus exactement au « waist » de la cavité qui remplace le foyer de l'optique géométrique ; *cf.* chapitre 15). Pour assurer la coïncidence approximative du « waist » du faisceau de pompage et du « waist »

de la cavité optique, le faisceau de pompage doit couper le faisceau interne à la cavité sous un angle aussi faible que possible, en passant au ras d'un miroir concave de la cavité. (Pour assurer une meilleure coïncidence des deux « waist », on utilise parfois pour la cavité un miroir concave dichroïque, transparent pour la lumière de pompage ; et celle-ci peut alors être envoyée exactement dans l'axe du faisceau interne à la cavité.) Le repliement de la cavité en forme de 8 permet de travailler avec des angles d'incidence faibles sur les miroirs concaves, et par suite de réduire les aberrations géométriques au foyer.

Nous avons déjà expliqué le dispositif de sens unique (au §14.2), et nous expliquons maintenant la sélection de fréquence, qui est effectuée par trois éléments successifs :

a) présélection par un filtre de Lyot (lui-même formé de trois lames *cf.* §14.1 et Fig. 14.2) ;

b) affinement par une lame à faces parallèles d'épaisseur $b \approx 1$ mm environ, et dont les faces ont reçu une couche faiblement réfléchissante. Elle se comporte comme un interféromètre de faible sélectivité. L'épaisseur de cette lame est constante, mais en l'inclinant légèrement autour de la position perpendiculaire au faisceau laser, on déplace ses fréquences de transmission pour en accorder une à la valeur choisie (formule en $b \cos i$ du Pérot-Fabry) ;

c) un véritable Pérot-Fabry comportant une lame d'air d'épaisseur $e \approx 1$cm environ, et variable grâce à des cales céramiques piézo-électriques (le fait que les lames du Pérot-Fabry aient une forme de prismes est un détail technique : le faisceau laser pénètre dans la lame à l'incidence de Brewster évitant ainsi toute perte par réflexion partielle ; mais ensuite il est parfaitement perpendiculaire aux faces réfléchissantes de la cavité).

La figure 14.4 explique le principe de cette sélection : la courbe supérieure de la figure représente la bande de fluorescence du milieu amplificateur. Immédiatement en dessous, la courbe (a_1) représente avec la même échelle de fréquence les maxima de transmission du triple filtre de Lyot : seul celui du milieu correspondra à un gain suffisant pour permettre l'émission laser.

La courbe (a_2) représente la même chose que (a_1) avec une échelle de fréquence multipliée par 10. Cela permet de la comparer avec la courbe (b_1) qui représente la transmission de la mince lame à face parallèle d'épaisseur b. L'intervalle de fréquence entre ses pics d'Airy vaut $c/2b \approx 150$ GHz ; on règle son inclinaison pour qu'un de ces pics tombe au centre du pic de transmission du filtre de Lyot ; on voit que les deux pics voisins tombent trop loin dans les ailes de la courbe de réponse du filtre de Lyot.

La courbe (b_2) représente la même chose que (b_1) avec une échelle de fréquence multipliée encore par 10 (c'est-à-dire par 100 depuis le haut de la figure). Cela permet de la comparer avec la courbe (c_1) qui représente les pics d'Airy du Pérot-Fabry d'épaisseur $e \approx 1$ cm. L'intervalle entre ces pics

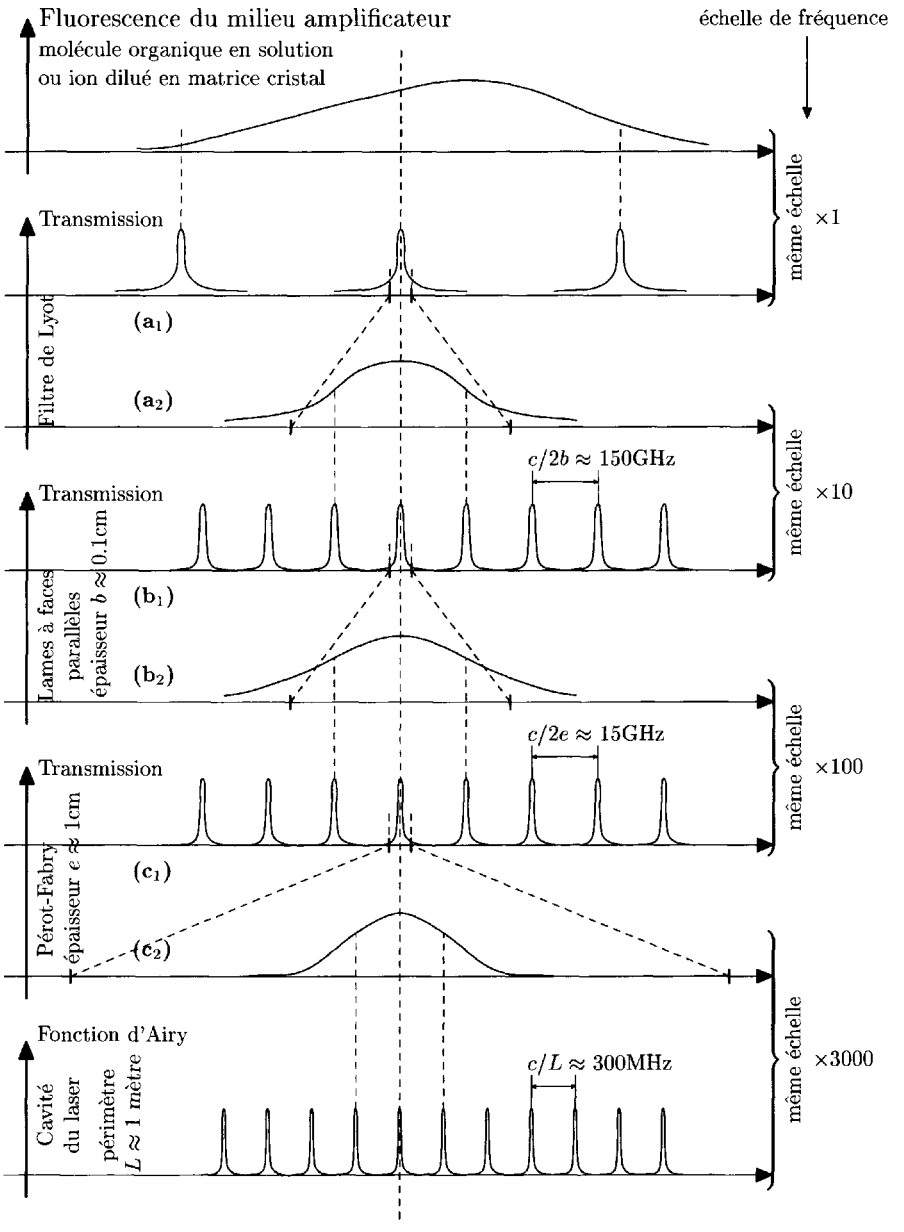


FIG. 14.4 – *Sélection de fréquence dans un laser accordable monomode.*

vaut $c/2e \approx 15$ GHz. On règle l'épaisseur e en sorte qu'un de ces pics tombe au maximum du large pic de la courbe (b_2) ; on voit que les fréquences des deux pics voisins étant sur les ailes du large pic (b_2) seront trop fortement atténuées.

La courbe (c_2) enfin représente la même chose que (c_1) avec une échelle de fréquence multipliée par 30 (c'est-à-dire par 3000 en comparaison avec le haut de la figure). Cela permet de la comparer avec les pics d'Airy de la grande cavité en anneau, dont l'intervalle $c/L \approx 300$ MHz est déterminé à partir de son périmètre L, supposé de l'ordre du mètre. Il faut encore régler très finement la longueur L pour qu'un de ces pics tombe au centre du large pic de la courbe (c_2). Le mode ainsi sélectionné de la grande cavité sera le seul sur lequel l'oscillation laser pourra être entretenue.

Si l'on veut balayer facilement la fréquence du laser monomode, en tournant le filtre de Lyot (a), on doit mettre au point des systèmes d'asservissement permettant aux éléments sélectifs suivants (lame mince (b), Pérot-Fabry (c), et grande cavité) de suivre en restant tous centrés les uns par rapport aux autres. Ce n'est pas simple, mais on sait faire.

14.4 Synchronisation par injection

Ces techniques de sélection de fréquence nécessitent l'introduction dans la cavité optique d'un grand nombre d'obstacles supplémentaires qui, même réalisés avec soin, augmentent inévitablement les pertes de la cavité, élèvent son seuil et diminuent la puissance disponible. Si d'autre part on veut utiliser ces techniques avec des procédés de pompage très puissants, elles risquent de ne pas bien fonctionner parce que le gain trop élevé des modes voisins (affaiblis mais non supprimés) restera supérieur au seuil. C'est pourquoi les lasers monomode seront de puissance faible ou moyenne ; et, si nécessaire, il faudra ensuite les amplifier (*cf.* §12.6).

Nous avions expliqué au §12.6 la construction de chaînes d'amplificateur de puissance à plusieurs étages par la difficulté d'amplifier un faisceau lumineux de manière importante en un seul étage sans le polluer par des émissions parasites sur d'autres fréquences. Si l'on veut amplifier fortement d'un seul coup, il vaut mieux utiliser un second laser oscillateur et synchroniser sa fréquence sur celle du premier laser de faible puissance en injectant dans le second le faisceau issu du premier (les processus de compétition de modes à l'intérieur du second laser oscillateur lui donnent un avantage sur un laser amplificateur). Pour que la synchronisation soit efficace, il faut respecter deux conditions :

1. le premier faisceau laser doit être transformé (suivant les techniques exposées au §15.7) pour s'adapter parfaitement au faisceau gaussien existant à l'intérieur de la cavité du second laser (*cf.* chapitre 16) ;

2. la fréquence du premier laser, maître, doit être bien centrée sur un pic d'Airy de la cavité du second laser, esclave (c'est aussi la condition pour que toute l'énergie du faisceau maître pénètre à l'intérieur de la cavité esclave).

Si ces conditions sont bien respectées, un laser maître de l'ordre du milliWatt peut synchroniser un laser esclave de plusieurs watts voire dizaines de watts (il s'agit alors de diodes lasers) ; ou bien un laser maître de 10 à 100 milliwatts peut synchroniser un laser esclave de dizaines ou centaines de kilowatts (il s'agit alors de colorants ou de cristaux). La synchronisation fonctionne bien dans la mesure où la largeur homogène du milieu émetteur est assez grande, permettant une forte compétition entre les modes (*cf.* chapitre 13) : si le laser esclave fonctionne en impulsion, l'onde à la bonne fréquence prend naissance, à partir de l'intensité pré-existante, beaucoup plus rapidement que celles des autres modes et elle les prend de vitesse, en épuisant l'énergie du pompage avant qu'ils n'aient eu le temps de croître de manière appréciable. Si le laser esclave fonctionne en régime continu, l'apport d'énergie permanent, provenant du laser maître, lui permet de fonctionner avec une différence des populations légèrement au-dessous de son seuil normal ; les autres modes se trouvent donc aussi au-dessous du seuil normal, sans bénéficier d'un apport d'énergie spécifique.

Remarque 14.4 – Le laser esclave aura préférentiellement une cavité en anneau, parce que la suppression des nœuds et des ventres permettra d'extraire toute l'énergie déposée dans le milieu émetteur par le pompage ; ceci permet d'augmenter notablement l'intensité du faisceau qui en est issu. On notera qu'il n'est pas nécessaire de construire un dispositif à sens unique dans le laser esclave, parce que c'est l'onde injectée qui déterminera le sens de parcours dans la cavité esclave (le mode correspondant au parcours en sens opposé sera pris de vitesse en impulsion, ou bien en dessous du seuil en régime continu).

Remarque 14.5 – Si le laser esclave est pompé en impulsions, on observe cependant un léger écart de fréquence entre le faisceau issu du laser maître, et le faisceau impulsionnel issu de l'esclave. Mais ce n'est pas un défaut de synchronisation ; c'est la modification du chemin optique de la lumière dans la cavité sous l'action du pompage. En effet, le pompage, en modifiant les populations atomiques, modifie aussi la susceptibilité χ' et l'indice de réfraction n_r du milieu émetteur (*cf.* §13.1 mode pulling), l'onde de faible intensité, provenant du laser maître, mais enfermée dans la cavité esclave, voit le périmètre optique $n_r L$ de la cavité changer brusquement au moment de l'impulsion de pompage. Ce changement rapide de chemin optique provoque un léger changement de fréquence par effet Doppler, exactement de la même manière qu'une onde réfléchie sur un miroir mobile. C'est donc l'onde maître, enfermée dans la cavité esclave qui voit sa fréquence changer juste avant d'induire l'émission du laser esclave. Dans le cas d'un pompage par flash, on observe des écarts de fréquence de plusieurs MégaHertz. Ce n'est pas très important comparé à la fréquence optique qui se mesure en centaines de TéraHertz (quelques 10^{14} Hz) ; mais c'est appréciable dans les expériences de métrologie (réf. [3]).

14.5 Asservissements sur une raie fine. Standards de fréquence et de longueur

Quelle que soit la manière dont on a obtenu l'oscillation monomode d'un laser, il n'en reste pas moins que sa fréquence reste définie de manière ultime par sa longueur de cavité qui définit la fréquence du mode choisi ($2l = N\lambda$ pour une cavité linéaire ; $L = N\lambda$ pour un anneau ; *cf.* §13.1).

14.5.1 Le « jitter » en fréquence

Une des causes d'imprécision de la fréquence d'un laser réside dans les vibrations mécaniques des miroirs de sa cavité, qui provoquent des fluctuations rapides de sa longueur. Les fluctuations correspondantes de la fréquence laser, désignées couramment sous le terme anglais de « jitter » (agitation, tremblement, avec une nuance d'anxiété quand il s'agit de quelqu'un), ont une amplitude de l'ordre de la dizaine de MHz. La vitesse de ces fluctuations est déterminée par le spectre des fréquences acoustiques (entre 50 Hz et 100 kHz).

Pour supprimer ce jitter, ou tout au moins le réduire considérablement, on utilise parfois une cavité Pérot-Fabry de grande longueur et de construction monobloc (miroirs adhérés optiquement sur un tube séparateur en verre spécial, à faible coefficient thermique) à l'abri des courants d'air et des variations thermiques (voire sous vide). Cette cavité très stable est extérieure au laser, mais on y envoie une petite fraction du faisceau lumineux ; une électronique d'asservissement, passant par des céramiques piézo-électriques, corrige la position des miroirs de la cavité laser en sorte que la lumière reste en permanence sur un pic d'Airy de la longue cavité stable (la longueur est essentielle parce qu'on divise par l'ordre d'interférence N les vibrations résiduelles des miroirs).

14.5.2 Asservissement sur une raie de saturation

Le procédé précédent est très efficace contre le jitter mais ne résout pas les problèmes de dérives à long terme de la fréquence du laser. Pour obtenir un standard de longueur l'onde ou de fréquence parfaitement stable, il faut asservir le laser sur une raie spectrale atomique ou moléculaire très fine. On a utilisé parfois la stabilisation sur le Lamb-dip (*cf.* §13.5), mais ce n'est pas idéal parce que le milieu amplificateur du laser, perturbé par le processus de pompage, n'est pas d'une stabilité absolue. Au surplus il y a contradiction entre la finesse de raie recherchée pour l'asservissement et l'élargissement utile pour améliorer la compétition de modes (*cf.* §13.6).

Il est donc préférable d'asservir la fréquence du laser sur une raie spectrale d'une vapeur placée dans une autre cellule à l'abri des perturbations du pompage. Les premiers standards étant réalisés à partir de lasers à gaz, il était indispensable d'utiliser une vapeur de référence moléculaire ; en effet

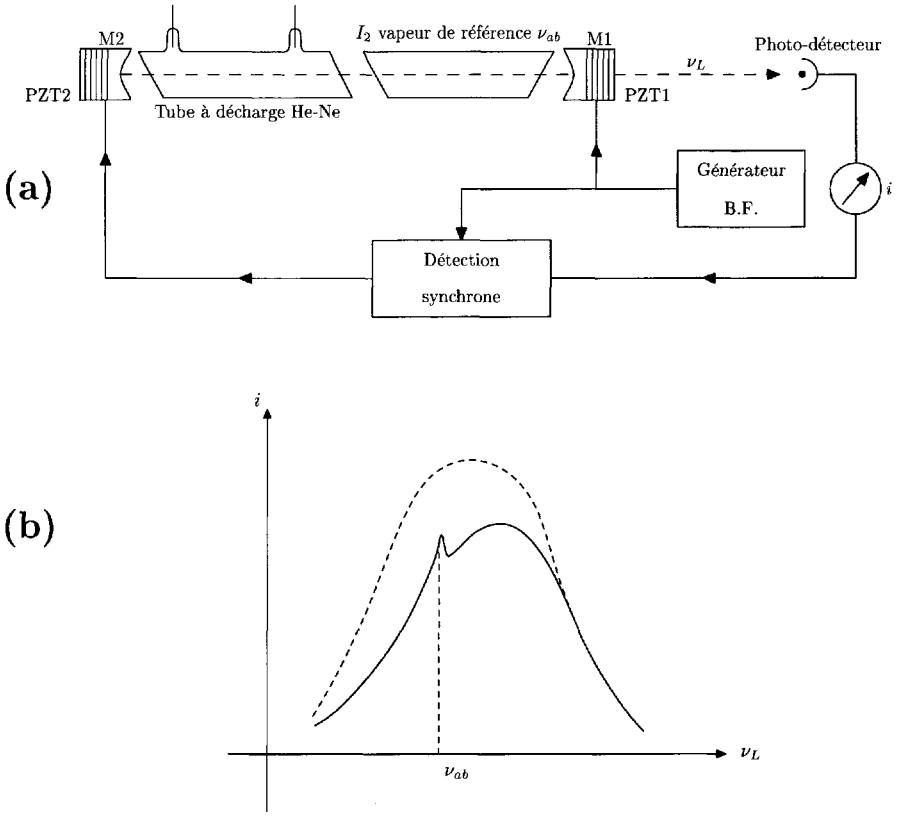


FIG. 14.5 – *Laser stabilisé par cellule d'absorption interne à la cavité. (a) Schéma de l'appareil ; (b) courbe enregistrant la puissance émise par le laser en fonction de la fréquence ν_L, c'est-à-dire de la longeur de cavité.*

les phénomènes quantifiés de vibration et de rotation dans les molécules multiplient par un facteur de plusieurs centaines (voire milliers) le nombre de leurs niveaux d'énergie et raies spectrales. Ce grand nombre de raies spectrales a permis de trouver les coïncidences approchées indispensables entre raies du laser et raies de la vapeur de référence. La vapeur de référence peut être placée sur le faisceau laser à l'extérieur, ou bien à l'intérieur même de la cavité laser, ce qui permet de réaliser des montages plus compacts et faciles à transporter.

La figure 14.5a représente le schéma d'un laser hélium–néon stabilisé à la longueur d'onde rouge $\lambda = 633$ nm sur une cellule de vapeur d'iode I_2 placée à l'intérieur de la cavité laser. Sur la figure 14.5b on voit l'enregistrement de l'intensité lumineuse du faisceau laser mesuré par une cellule photoélectrique en fonction de la fréquence ν_L du laser, qui est en fait déterminée par

la longueur l de la cavité : en trait tireté c'est la courbe observée sans vapeur d'iode (il suffit de la condenser sur la paroi à température assez basse) ; en trait plein c'est la courbe observée en présence de vapeur d'iode. On remarque deux faits significatifs :

1. la puissance du laser est abaissée sur une partie de la courbe par l'absorption de lumière dans la vapeur d'iode. Cette absorption est décentrée parce que la fréquence centrale ν_{ab} de la molécule d'iode I_2 ne coïncide pas exactement avec la fréquence centrale du Néon. Comme la molécule d'iode est lourde (I = 127) et sa cellule relativement froide, tandis que le Néon est léger (Ne = 20) et chauffé par la décharge, la largeur Doppler de la raie de l'iode est inférieure à celle du Néon ; ceci explique qu'une aile de la raie du Néon ne soit pratiquement pas absorbée ;

2. la vapeur d'iode est traversée par deux faisceaux lumineux de sens opposés qui sont absorbés par deux classes de vitesses symétriques (§13.3). Lorsque la fréquence du laser passe par la valeur centrale ν_{ab} de l'iode, les deux classes de vitesse se confondent en une seule classe de vitesse nulle et la non-linéarité de l'interaction diminue l'absorption totale (§13.5). Cette résonance de saturation apparaît donc comme une augmentation d'intensité du laser. Mais ce pic d'intensité est relativement mince parce que sa largeur est déterminée par la largeur naturelle de la molécule d'iode, environ 5 MHz, cent fois inférieure à la largeur Doppler.

On asservit la longueur l de la cavité de manière à ce que sa fréquence ν_L reste centrée sur cet étroit pic ν_{ab} : une première céramique PZT_1 déplace très légèrement et sinusoïdalement le miroir M_1 de la cavité. Si l'on est bien au maximum du pic, le signal de la cellule photoélectrique varie à la fréquence double. La détection synchrone mesure ce signal et commande le miroir M_2 par l'intermédiaire de la céramique PZT_2 de façon à rester au maximum du signal.

Cet appareil a été pendant trente années (depuis 1969 ; *cf.* réf. [4]) l'étalon universel de longueur d'onde utilisé par les laboratoires pour la lumière visible ; et il joue toujours un rôle important. A côté de lui se sont développés deux autres étalons pour d'autres régions du spectre :

- dans l'infrarouge moyen, le laser Hélium Néon encore, mais à la longueur d'onde $\lambda = 3,39\ \mu$m, stabilisé sur une raie du méthane CH_4 (réf. [5] et [6]) ;

- dans l'infrarouge lointain, le laser à gaz carbonique CO_2, stabilisé d'abord sur la molécule CO_2 elle-même, mais maintenant avec une meilleure précision sur la molécule de tétroxyde d'Osmium OsO_4 (réf. [7] et [8]).

Ces deux derniers étalons utilisent des raies moléculaires beaucoup plus fines que celles de l'iode, et leur précision relative en fréquence atteint des valeurs meilleures que 10^{-10}, de l'ordre de 10^{-11}.

14.5.3 La mesure directe des fréquences optiques

Le gain en précision obtenu grâce à ces techniques de lasers asservis a permis des progrès immenses en métrologie. Le pas le plus important a été franchi en 1972-1973 lorsque Evenson, Petersen et leurs collaborateurs ont réussi à mesurer simultanément la longueur d'onde et la fréquence du même laser Helium-Néon à $\lambda = 3,39\ \mu$m, asservi sur CH_4. La mesure précise de longueur d'onde était faite suivant les méthodes interférométriques traditionnelles de comparaison de longueurs d'onde, pour mesurer son rapport avec l'unité de longueur de l'époque, la longueur d'onde de la raie $2p_{10} - 5d_5$ du Krypton 86. Mais ce qui était nouveau c'était la mesure de fréquence totalement indépendante généralisant dans l'infrarouge les procédés de comparaison de fréquences utilisés dans le domaine hyperfréquence, à l'aide de multiplications de fréquence (harmoniques) et de différences (battements). Ainsi la fréquence du laser était directement rapportée à la fréquence étalon du jet de Césium qui sert à définir l'étalon de temps (*cf.* §6.7). On en déduisait d'un seul coup la mesure de la vitesse de la lumière $c = \lambda\nu$ avec une précision d'un mètre par seconde, pulvérisant d'un facteur 100 les mesures précédentes de c (réf. [9] et [10]).

La précision de l'étalon de longueur de la raie du Krypton était alors complètement dépassée ; et en 1983 le Bureau international des poids et mesures (B.I.P.M.) décidait de définir l'unité de longueur en imposant à la vitesse de la lumière une valeur exacte dont les neuf premiers chiffres coïncident avec la valeur mesurée par Evenson et ses collègues, soit :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s, exact par définition}$$

Cette définition ramène l'étalon de longueur à l'étalon de temps et a pour conséquence que tous les lasers stabilisés (et mesurés) sont maintenant simultanément des standards de longueur et des standards de fréquence optique.

Dans les mesures courantes au laboratoire, les interféromètres classiques (Michelson, Pérot-Fabry) de grande longueur L restent d'une utilisation plus facile et plus rapide pour comparer deux longueurs d'ondes (qui sont dans le rapport des ordres d'interférence puisque $L = N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2$). Mais au-delà de la précision relative 10^{-9} ou 10^{-10}, des effets parasites (comme la pénétration plus ou moins grande des ondes dans l'épaisseur des miroirs, par exemple) rendent ces mesures illusoires. Pour la précision métrologique ultime il faut effectuer des comparaisons directes de fréquences.

En établissant une nouvelle chaîne de fréquence entre l'infrarouge lointain du laser à CO_2 et le visible (rouge) du laser He-Ne stabilisé sur l'iode, la même équipe du National Bureau of Standards réussissait à mesurer directement la fréquence de cet étalon en lumière rouge (réf. [11]).

Pour donner une idée plus précise de ces techniques de mesure de fréquence, nous reproduisons sur la figure 14.6 le schéma d'une *chaîne de fréquence* construite dans les caves du jardin de l'Observatoire, à Paris, pour

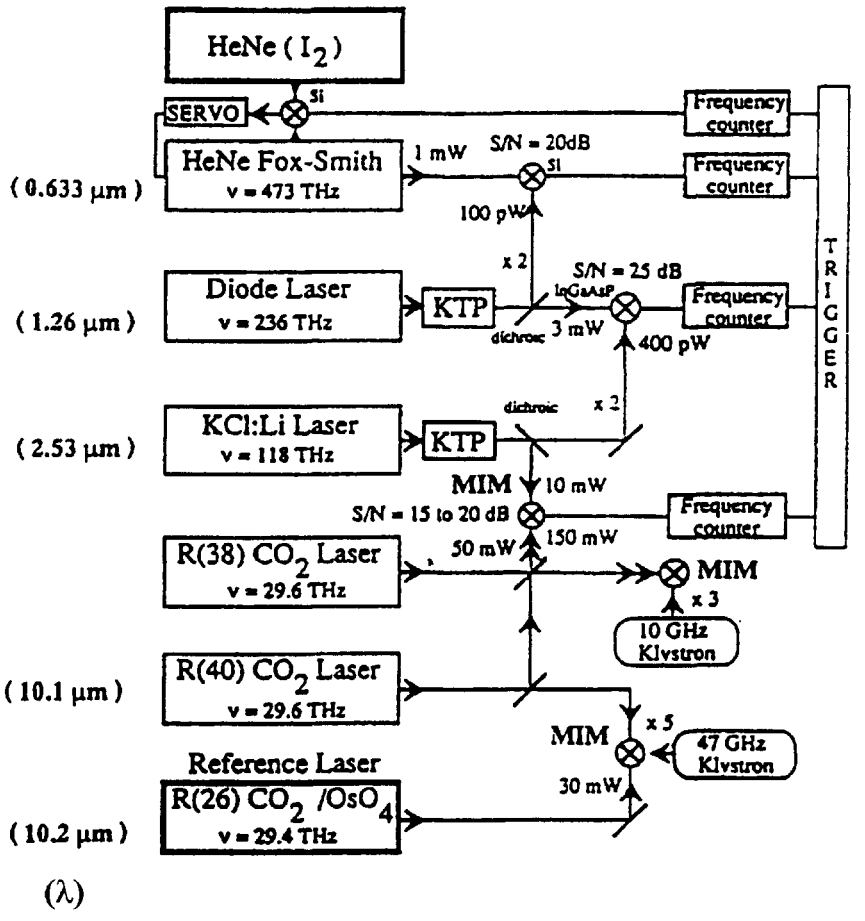


FIG. 14.6 – *Chaîne de fréquence destinée à comparer les fréquences :*

du laser He-Ne stabilisé sur l'iode (en haut du schéma)
du laser à CO_2 stabilisé sur OsO_4 (en bas du chéma)

(Observatoire de Paris ; d'après la ref. [12], avec la permission d'Elsevier Science).

relier la fréquence du laser He-Ne stabilisé sur l'iode ($\lambda = 0,633$ μm rouge) et celle du laser à CO_2 stabilisé sur la molécule OsO_4 ($\lambda = 10,2$ μm) dans l'infrarouge lointain (bien sûr il existe une chaîne de complexité équivalente pour relier le laser à CO_2 à l'étalon de fréquence à jet de Césium à 9 Ghz qui définit l'unité de temps). Cette chaîne a permis d'obtenir la mesure la plus précise en fréquence du laser He-Ne stabilisé sur l'iode (réf. [12]).

Pour la compréhension du schéma 14.6, il faut préciser que les cristaux de KTP sont des cristaux non linéaires produisant l'harmonique 2 des faisceaux infrarouges qui les traversent ; il faut que ces faisceaux infrarouges soient assez puissants (100 mW à 1 Watt) pour produire quelques milliwatts de l'harmonique 2. On utilise pour les produire deux lasers accordables (diode à $1,26$ μm et centre coloré à $2,53$ μm). Les diodes MIM (Metal-Insulator-Metal) sont fabriquées avec un fil de tungstène à pointe effilée en contact avec une mince couche isolante déposée sur une plaque de Nickel : elles permettent de détecter les battements à basse fréquence entre les faisceaux laser ou micro-onde focalisés sur la pointe. Les deux diodes MIM les plus basses (sur le schéma) servent à imposer des écarts de fréquence connus entre les trois lasers à CO_2. La diode MIM la plus haute dans le schéma détecte le battement entre le laser à centre coloré et une fréquence proche du quatrième harmonique du laser à CO_2 (en réalité l'harmonique 3 du laser stabilisé sur la raie R40, additionné avec la fréquence du laser stabilisé sur la raie R38). Cette combinaison est choisie parce que ensuite son harmonique 4 tombe à une fréquence très proche de celle du laser He-Ne.

Des recherches sont actuellement en cours dans les laboratoires spécialisés de métrologie pour développer de nouveaux standards optiques à partir de raies atomiques ou ioniques choisies pour leurs largeurs naturelles particulièrement étroites. Ces très faibles largeurs naturelles ne peuvent être exploitées que grâce aux méthodes éliminant la largeur Doppler (résonances de saturation, résonances à 2 photons de faisceaux opposés, ou ions piégés).

14.6 Cohérence temporelle et spatiale

Ayant terminé la description technique des lasers, nous devons maintenant entrer dans la description précise des ondes qu'ils émettent, ce qui constitue la troisième partie de cet ouvrage. Mais auparavant, il nous a semblé utile, dans une première approche qualitative, de caractériser la propriété essentielle qui distingue les sources laser des autres sources de lumière ; cette propriété est généralement dénommée par le terme de « cohérence ».

Le mot de cohérence est utilisé en physique, de manière très générale, chaque fois que l'on compare des grandeurs qui sont soumises, dans le problème étudié, à des variations sinusoïdales en fonction d'une des variables (ce sera souvent la variable temps, mais pas uniquement). Ces grandeurs sont dites cohérentes entre elles s'il existe une relation de phase précise entre leurs variations sinusoïdales. Si la relation entre ces phases n'est pas déterminée de manière précise et peut fluctuer d'une mesure à l'autre de manière aléatoire, on dit que ces deux grandeurs sont incohérentes entre elles.

Nous avons rencontré, par exemple, aux chapitres 1 et 2 des grandeurs atomiques comme les amplitudes de probabilité des fonctions d'onde $a(t)$ et $b(t)$, ou $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, pour lesquelles nous avons calculé des variations sinusoïdales cohérentes, en fonction du temps. Ceci nous a conduit à parler d'états

atomiques cohérents pour un atome (*cf.* §1.4).

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle = \alpha(t)\,|\varphi_a\rangle + \beta(t)\,|\varphi_b\rangle$$

Mais nous avons vu aussi que les collisions ou le phénomène d'émission spontanée pouvaient changer la relation de phase entre les amplitudes $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ d'un atome et $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ d'un autre atome, qui deviennent alors incohérentes entre elles. Lorsque nous avons introduit les variables produits, moyennées sur l'ensemble des atomes, au chapitre 2, nous avons noté le comportement différent des variables de populations $\overline{\alpha^*\alpha}$ et $\overline{\beta^*\beta}$, qui sont insensibles aux relations de phase entre les amplitudes de probabilité, et les variables croisées $\alpha^*\beta$, $\beta^*\alpha$ qui en dépendent très directement, et tendent vers zéro lorsque les interactions aléatoires détruisent la cohérence entre les atomes. C'est pourquoi ces variables croisées $\alpha^*\beta$ et $\beta^*\alpha$ sont parfois appelées « cohérences atomiques ».

Nous appliquons maintenant cette notion de cohérence à l'onde électromagnétique d'un faisceau de lumière. Cette onde est caractérisée par un vecteur champ électrique dépendant de l'espace et du temps, régi par les équations de Maxwell. Ces équations, dans de nombreux cas, conduisent pour chaque composante à des solutions quasi sinusoïdales qui, en notation complexe, peuvent s'écrire sous la forme :

$$E(x,y,z,t) = E(\vec{r},t) = \mathcal{E}(\vec{r},t)\,\mathbf{e}^{i[\vec{k_0}\cdot\vec{r} - \omega_0 t - \varphi(\vec{r},t)]} \qquad (14\text{-}1)$$

où $|\vec{k_0}| = \omega_0/c$; l'amplitude réelle $\mathcal{E}$ ne dépend que très lentement de l'espace et du temps ; de même la phase $\varphi(\vec{r},t)$ peut dépendre aussi de l'espace et du temps, mais *très lentement* par comparaison avec les deux premiers termes du crochet $\omega_0 t$ et $\vec{k_0}\cdot\vec{r}$; c'est-à-dire que l'on observe réellement une solution sinusoïdale avec une très bonne approximation, momentanément (sur un intervalle de temps court) ou localement (sur une courte distance) parce que la variation correspondante de la phase φ est négligeable.

En pratique, la variation de la phase $\varphi(\vec{r},t)$ peut être très différente selon que l'on choisit de faire varier le temps ou bien les variables d'espace x, y, z. C'est pourquoi on est conduit à distinguer :

– *la cohérence temporelle* entre les champs électriques mesurés en deux instants différents t et t' au même point P, $E(P,t)$ et $E(P,t')$;

– *la cohérence spatiale* entre les champs électriques mesurés en deux points différents P et Q au même instant t ; c'est-à-dire que l'on compare les phases des champs $E(P,t)$ et $E(Q,t)$.

Si nous nous contentions des définitions précédentes, nous ne pourrions éviter l'imbrication de ces deux notions, du fait que l'onde se propage dans l'espace. Pour y voir plus clair, nous appliquons ces notions au cas des expériences d'optique où l'on utilise des faisceaux lumineux directifs qui se propagent parallèlement à la direction d'un axe Oz (c'est le cas avec les lasers en particulier) ; on parle de **faisceaux lumineux paraxiaux**, comme celui

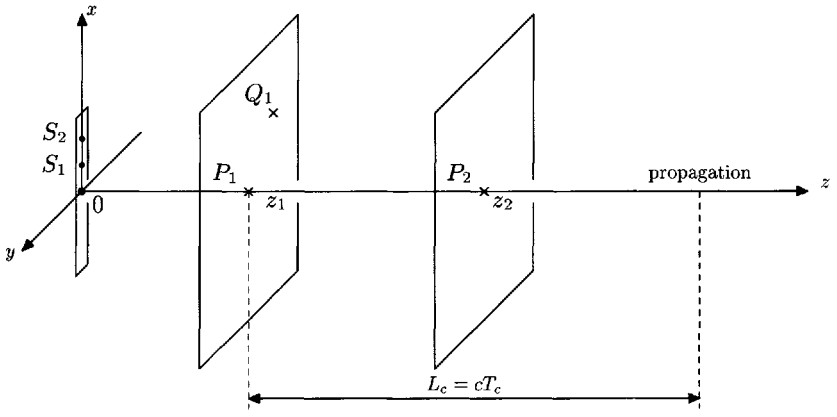


FIG. 14.7 – *Cohérence spatiale et temporelle dans le cas d'un faisceau lumineux paraxial. La cohérence entre les deux points P_1 et P_2 situés sur l'axe de propagation $0z$ dépend de la durée de cohérence T_c ($|(z_2 - z_1| < L_c = cT_c$); elle relève de la cohérence temporelle. On réserve le terme de cohérence spatiale à la comparaison des phases des ondes entre deux points P_1 et Q_1 situés dans le même front d'onde.*

que nous avons représenté sur la figure 14.7 en dessinant deux plans d'onde particuliers, perpendiculaires à l'axe Oz aux points P_1 et P_2. L'équation (14-1) peut alors être simplifiée en :

$$E(\overrightarrow{r},t) = \mathcal{E}(\overrightarrow{r},t)\mathrm{e}^{i[k_0 z - \omega_0 t - \varphi]} = \mathcal{E}(\overrightarrow{r},t)\mathrm{e}^{-i[\omega_0(t - z/c) + \varphi(\overrightarrow{r},t)]} \tag{14-2}$$

Notion de cohérence temporelle : On analyse le champ électrique au point P_1 en fonction du temps. La cohérence temporelle se maintient tant que la phase $\varphi(P_1,t)$ reste à peu près constante. On peut définir qualitativement *la durée de cohérence temporelle* T_c comme la durée *moyenne* au bout de laquelle la phase φ a varié de 1 radian en valeur absolue :

$$\overline{|\varphi(P_1,t+T_c) - \varphi(P_1,t)|} \simeq 1 \text{ radian (moyenne sur } t) \tag{14-3}$$

En pratique, on observera au point P_1 une onde cohérente sur des intervalles de temps suffisamment courts, tels que

$$|t' - t| < T_c. \tag{14-4}$$

Si l'on veut comparer l'onde entre les points P_1 et P_2 on se souvient que, dans la propagation sur une dimension, l'onde qui arrive en P_2 à l'instant t est celle qui, grosso-modo, passait en P_1 à l'instant $t - \dfrac{z_2 - z_1}{c}$; c'est-à-dire

qu'en première approximation on retrouve en P_2 à l'instant actuel t la phase qui existait en P_1 à l'instant passé $\left(t - \dfrac{z_2 - z_1}{c}\right)$:

$$\varphi(P_2, t) \simeq \varphi\left(P_1, t - \frac{z_2 - z_1}{c}\right). \tag{14-5}$$

Comparer $\varphi(P_2, t)$ et $\varphi(P_1, t)$ au même instant en deux points distincts de l'axe Oz se ramène donc à la comparaison des phases entre deux instants différents au même point P_1 ; la cohérence entre les points P_1 et P_2 situés sur l'axe de propagation se déduit de la cohérence temporelle en un seul de ces points. Les ondes en P_1 et P_2 sont cohérentes si :

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{c}\right| < T_c \quad \text{soit } |z_2 - z_1| < L_c = cT_c \tag{14-6}$$

On définit ainsi à partir de la durée de cohérence T_c une *longueur de cohérence L_c, parallèle à la direction de propagation*, qui est une autre manière de caractériser la cohérence temporelle. La cohérence entre les points P_1 et P_2 est considérée comme associée à la cohérence temporelle ; on l'exclut de la cohérence spatiale ; on réserve le terme de cohérence spatiale pour la comparaison de la phase de l'onde entre deux points (comme P_1 et Q_1 sur la figure 14.7) qui sont situés dans un même plan d'onde perpendiculaire à la direction de propagation.

Dans les formules comme (14-1) ou (14-2), des variations de phase sont équivalentes à des variations de la fréquence « instantanée » égale à $(\omega_0 + \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)$. Ce sont donc les *fluctuations de fréquence ou la superposition de plusieurs fréquences dans les sources lumineuses* qui déterminent la cohérence temporelle d'une onde ; si $\Delta\omega_S$ est la largeur spectrale de la source lumineuse, ces différentes fréquences se trouvent déphasées de 1 radian au bout d'une durée T_c telle que :

$$|\Delta\omega_S| \times T_c \approx 1 \text{ radian, soit } T_c \approx 1/\Delta\omega_S \tag{14-7}$$

Cette relation (14-7) peut être exprimée de manière différente en introduisant l'énergie $E = \hbar\omega$ des photons transporteés par l'onde. La largeur spectrale $\Delta\omega_s$ produit une indétermination de la valeur de la fréquence ω, c'est-à-dire aussi une indétermination ΔE sur l'énergie des photons :

$$|\Delta E| = \hbar|\Delta\omega_s| \quad \Rightarrow \quad |\Delta E| \cdot T_c = \hbar|\Delta\omega_s|T_c \approx \hbar$$

on retrouve ainsi avec le temps de corrélation T_c la quatrième relation de Heisenberg, appliquée aux photons.

Les meilleures sources spectrales en spectroscopie traditionnelle étaient limitées par la largeur Doppler $\Delta\nu_D \approx (v/c)\nu_0 \approx 1$ GHz dans le visible en tenant compte de $v/c \approx$ quelques 10^{-6}. On en déduit un temps de cohérence

$T_c \approx 1$ nanoseconde et une longueur de cohérence $L_c \approx 0,3$ mètre. Dans les anciens interféromètres, il ne fallait pas que la différence de longueur des chemins optiques dépasse cette valeur, pour conserver une bonne visibilité des franges d'interférence.

Dans un laser soigneusement construit et protégé des vibrations, on obtient couramment des fluctuations de fréquence $\Delta\nu_S \approx 1$ MHz, correspondant à un temps de cohérence $T_c \approx 1$ microseconde et une longueur de cohérence $L_c \approx$ 300 mètres. Dans le cas de lasers hautement stabilisés pour la métrologie, avec $\Delta\nu_S \approx$ 1KHz, on parvient à $T_c \approx$1 milliseconde, voire plus.

La notion de cohérence spatiale est donc réservée à la comparaison des phases de l'onde entre des points situés dans le même front d'onde perpendiculaire à la direction de propagation (*cf.* P_1 et Q_1 sur la figure 14.7).

En transposant la formule (14-3) du domaine des temps à celui des variables d'espace x et y on peut définir, par exemple, *des largeurs de cohérence dans le front d'onde* a_c et b_c comme les distances au bout desquelles les phases φ ont en moyenne varié de 1 radian en valeur absolue :

$$\left.\begin{aligned}\overline{|\varphi(x,y,z,t) - \varphi(x+a_c,y,z,t)|} &\simeq 1 \text{ radian (moyenne sur } x)\\ \overline{|\varphi(x,y,z,t) - \varphi(x,y+b_c,z,t)|} &\simeq 1 \text{ radian (moyenne sur } y)\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}8)$$

On observera des ondes cohérentes en P_1 et Q_1 si leurs distances selon Ox et Oy sont suffisamment faibles :

$$|\Delta x_1| < a_c \quad \text{et} \, |\Delta y_1| < b_c \qquad (14\text{-}9)$$

Le rectangle de côtés a_c et b_c pourra être appelé *aire de cohérence.*

De façon symétrique avec la cohérence temporelle, la cohérence spatiale est limitée par les fluctuations (ou incertitudes) sur le vecteur d'onde $\vec{k}$ qui produisent des fluctuations du terme de phase $\vec{k} \cdot \vec{r}$. Soit Δk_x l'intervalle sur lequel la composante k_x du vecteur d'onde peut fluctuer, on obtient symétriquement à (14-7) :

$$|\Delta k_x| \cdot a_c \approx 1 \text{ radian} \qquad (14\text{-}10)$$

Si l'on applique ce résultat à la quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ des photons, on obtient une indétermination de largeur Δp_x sur la composante p_x du vecteur quantité de mouvement :

$$|\Delta p_x| = \hbar|\Delta k_x| \quad \Rightarrow \quad |\Delta p_x| \cdot a_c = \hbar|\Delta k_x| \cdot a_c \approx \hbar$$

on retrouve ainsi la première relation de Heisenberg, appliquée au photons.

Dans les expériences d'interférence avec les sources lumineuses traditionnelles, c'est l'étendue spatiale de la source qui détermine la cohérence spatiale de l'onde à une certaine distance de la source. De fait avec une source rigoureusement ponctuelle, on obtiendrait une cohérence spatiale parfaite ; mais

l'intensité lumineuse serait alors nulle. Il faut donc accepter une certaine étendue de la source ; ce sont les différences des chemins optiques entre les deux points P_1 et Q_1 du front d'onde et le point S_1 de la source d'une part, le point S_2 de la source d'autre part, qui conduisent à calculer un déphasage $\delta\varphi_1$ entre les ondes résultantes en P_1 et Q_1. On utilise le plus souvent des sources en forme de fentes comme celle figurée sur la figure 14.7 : à la longueur de la fente (ici dans la direction Ox) correspond une largeur de cohérence a_c extrêmement petite dans la direction x ; mais à la très faible largeur de la fente (dans la direction Oy) correspond une largeur de cohérence b_c relativement élevée dans la direction Oy, permettant d'observer des phénomènes d'interférence dans la direction de Oy.

En revanche dans un laser en fonctionnement monomode, tous les atomes du milieu amplificateur émettent leur énergie dans l'onde de ce mode unique, et la cohérence spatiale est maximale. Bien que les atomes émetteurs soient répartis dans un volume assez vaste, l'onde produite a la même cohérence spatiale que celle émise par une source classique ponctuelle. Nous verrons néanmoins au chapitre suivant comment les ondes de cohérence spatiale maximale restent soumises aux relations d'indétermination de Heisenberg. Celles-ci n'empêchent pas de transformer ce faisceau lumineux avec une lentille ou un miroir sphérique afin d'obtenir au choix :

– en utilisant les grandes distances focales d'un télescope, un faisceau de relativement grand diamètre (1 mètre) mais quasi parallèle, dont l'ouverture angulaire est réduite à 10^{-6} radian. C'est utilisé pour produire des échos de lumière sur la lune ou sur des nuages polluants, beaucoup plus proches.

– en utilisant les très courtes focales d'un microscope, de concentrer toute l'énergie du faisceau en une tache, quasi ponctuelle. La dimension de cette tache ne peut pas cependant être inférieure à la longueur d'onde λ ; c'est suffisant pour obtenir localement les très fortes densités d'énergie nécessaires au perçage à la découpe ou à la gravure, et plus généralement à l'usinage des matériaux.

Ce sont ces deux possibilités, conséquences de la cohérence spatiale, qui sont employées dans la plupart des applications courantes des lasers.

Dans ce dernier paragraphe de la partie II, nous n'avons fait qu'esquisser qualitativement ces propriétés de cohérence, à l'aide des notions standard de physique générale et sans support mathématique spécifique. L'utilisation des fonctions de corrélation permet d'en dire un peu plus, et de définir des cohérences partielles ; mais on prendra garde que le langage des corrélations ne s'applique que dans les cas où le système physique relève d'une description statistique standard. Lorsque la cohérence spatiale d'un laser est détruite par le mélange de plusieurs modes, les fonctions de corrélation spatiales ne permettent pas une analyse appropriée : on ne peut pas se dispenser de l'analyse de ces modes (*cf.* partie III).

Fonction de corrélation temporelle

Les vibrations mécaniques, qui font fluctuer la longueur de cavité et provoquent le « jitter » en fréquence du laser (§14.5.1), relèvent au contraire le plus souvent des descriptions statistiques standard. Nous ajoutons quelques indications sur le traîtement mathématique plus rigoureux, dans le cas de la cohérence temporelle seulement, ce qui permet d'alléger l'écriture en ne mentionnant plus les variables d'espace.

Pour effectuer ces comparaisons des phases du champ à l'instant t et du champ à un instant postérieur $t+\tau$, l'analyse statistique utilise le formalisme mathématique plus général des *fonctions de corrélation*, qui peut s'appliquer aux fluctuations de toute nature : il consiste à faire le produit du champ complexe à l'instant $(t+\tau)$ et du conjugué du champ complexe à l'instant t, puis d'en calculer la valeur moyenne en faisant varier t sur une longue durée T

$$\overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, E^*(t)\cdot E(t+\tau) \tag{14-11}$$

la durée T sur laquelle on fait la moyenne doit être beaucoup plus longue que les temps caractéristiques des fluctuations. *On admet alors que sa valeur est indépendante de l'instant zéro choisi pour la calculer et de la durée T, tant que T est assez grand.*

Si le champ électrique peut être représenté par des expressions analogues à (14-1) ou (14-2), appliquées en un point fixe, avec une fréquence ω_0 fixe et une phase $\varphi(t)$ variable (c'est-à-dire que l'on sait représenter les fluctuations de fréquence sous forme de fluctuations de phase), on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} E^*(t)\cdot E(t+\tau) &= \mathcal{E}(t)\cdot\mathcal{E}(t+\tau)\mathbf{e}^{-i\omega_0\tau}\,\mathbf{e}^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]} \\ \overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)} &= \mathbf{e}^{-i\omega_0\tau}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\mathcal{E}(t)\cdot\mathcal{E}(t+\tau)\mathbf{e}^{-i\delta\varphi(\tau,t)} \\ &= \mathbf{e}^{-i\omega_0\tau}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\mathcal{E}(t)\cdot\mathcal{E}(t+\tau)[\cos\delta\varphi(\tau,t) - i\sin\delta\varphi(\tau,t)] \end{aligned} \tag{14-12}$$

en introduisant l'écart $\delta\varphi(\tau,t) = \varphi(t+\tau)-\varphi(t)$.

On voit que l'intégrale de la formule (14-12) dépend très directement des écarts de phase $\delta\varphi(\tau,t)$ sur lesquels nous avions raisonné précédemment.

Pour s'affranchir de l'intensité de l'onde on divise l'expression (14-11) par l'intensité moyenne $\overline{\mathcal{E}(t)^2}$; et l'on obtient la *fonction de corrélation normalisée* :

$$g(\tau) = \frac{\overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)}}{\overline{\mathcal{E}(t)^2}} = \frac{\overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)}}{\overline{E^*(t)\cdot E(t)}} \tag{14-13}$$

Si l'écart de temps τ est assez court pour que les phases n'aient pas changé ; $\delta\varphi(\tau,t) \simeq 0$ quel que soit t, alors le module de la fonction de corrélation

normalisée $|g(\tau)| \simeq g(0) = 1$. Ce module diminue et tend habituellement vers zéro lorsque l'écart de temps τ s'allonge indéfiniment. On remarque encore une propriété de symétrie, si l'on change le signe de τ : $g(-\tau) = g^*(\tau)$, soit encore $|g(-\tau)| = |g(\tau)|$.

L'intérêt de cette définition (14-11) c'est qu'elle est reliée très simplement à la transformée de Fourier $A(\omega)$ du champ $E(t)$, telle que :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, A(\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t} \text{ avec } A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, E(t)\mathbf{e}^{+i\omega t} \quad (14\text{-}14)$$

La théorie de Fourier s'applique à des fonctions de carré sommable, ce qui n'est pas le cas d'une fonction sinusoïdale de durée infinie. En pratique une expérience réelle a toujours une durée finie, entre un instant de départ 0 et un instant final T ; cela permet de calculer en pratique l'amplitude de Fourier à la fréquence ω par une intégrale de durée finie

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, E(t)\cdot \mathbf{e}^{+i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} \mathrm{d}t\, E(t)\mathbf{e}^{+i\omega t} \quad (14\text{-}15)$$

Lorsque dans une expérience réelle on calcule effectivement une transformée de Fourier par ordinateur, il suffit de faire le calcul pendant une durée T assez longue, permettant de bien moyenner toutes les fluctuations de la fonction $E(t)$, c'est-à-dire la durée T évoquée plus haut pour la définition de la fonction de corrélation. (En se limitant à une durée T plus courte que la durée d'expérience, on produit sur la transformée $A(\omega)$ un petit élargissement $\Delta\omega \approx 1/T$; il suffit que cet élargissement $1/T$ soit très inférieur à la largeur réelle de la fonction spectrale $A(\omega)$.)

En utilisant l'amplitude de Fourier (14-15) nous pouvons calculer l'intensité à la fréquence ω :

$$|A(\omega)|^2 = A^*(\omega)\cdot A(\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\, E^*(t)\mathbf{e}^{-i\omega t}\cdot E(t')\mathbf{e}^{+i\omega t'}$$

ou en introduisant la différence $\tau = t' - t$:

$$|A(\omega)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathbf{e}^{i\omega\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\, E^*(t)\cdot E(t+\tau)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathbf{e}^{i\omega\tau}\int_{0}^{T}\mathrm{d}t\, E^*(t)E(t+\tau)$$

Le changement des bornes d'intégration est possible si T est la durée de l'expérience. Mais on peut ensuite utiliser l'hypothèse adoptée, que la définition (14-11) est indépendante de la durée T :

$$|A(\omega)|^2 = \frac{T}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathbf{e}^{i\omega\tau}\cdot\overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)} \quad (14\text{-}16)$$

Comparons avec l'expression de la transformée de Fourier (14-15) ; au facteur numérique $T/2\pi$ près, l'intensité spectrale à la fréquence ω est égale à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation ; c'est-à-dire que, inversement, la fonction de corrélation est la transformée de Fourier de l'intensité spectrale (en toute rigueur : fonction de répartition spectrale de l'intensité lumineuse) :

$$\overline{E^*(t)\cdot E(t+\tau)} = \frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, |A(\omega)|^2\, \mathbf{e}^{-i\omega\tau} \qquad (14\text{-}17)$$

Pour supprimer le facteur numérique $2\pi/T$, il suffit d'inroduire *l'intensité spectrale normalisée* $G(\omega)$ (normée à la surface unité), qui est alors la transformée de Fourier de la fonction de corrélation normalisée $g(\tau)$ introduite en (14-13)

$$G(\omega) = \frac{|A(\omega)|^2}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, |A(\omega)|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, g(\tau)\, \mathbf{e}^{i\omega\tau} \qquad (14\text{-}18)$$

L'intégrale de $|A(\omega)|^2$ au dénominateur peut être calculée dans (14-17) avec $\tau = 0$, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à $g(0) = 1$).

Ce résultat nous confirme bien que les fluctuations de fréquence et les fluctuations de phase produisent des effets de même nature, qui sont intrinsèquement liés entre eux, et exprimés ensemble dans la fonction de corrélation.

Nous terminons en donnant comme exemples les deux cas les plus fréquemment utilisés.

a) Dans le cas d'une fréquence fixe ω_0 dont les trains d'onde sont interrompus de manière aléatoire (*cf.* problèmes des collisions §13.2.2) le spectre de fréquence normalisé est lorentzien :

$$\left.\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad \text{(écart à mi-hauteur } \gamma) \\ \text{transformée de Fourier : } g(\tau) &= \mathbf{e}^{-i\omega_0\tau}\,\mathbf{e}^{-\gamma|\tau|} \\ \text{soit } |g(\tau)| &= \mathbf{e}^{-\gamma|\tau|} = \mathbf{e}^{-|\tau|/\tau_c} \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}19)$$

le module est représenté par une double exponentielle symétrique et dont le maximum au centre $g(0) = 1$ est anguleux. On définira généralement le temps de corrélation $\tau_c = 1/\gamma$.

b) Les phénomènes de hasard sont souvent représentés par des fonctions gaussiennes (*cf.* élargissement Doppler §13.3.2). Le spectre de fréquence

normalisé, autour de la fréquence moyenne ω_0, peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha^2}} \quad \text{(écart quadratique moyen } \alpha) \\ \text{transformée de Fourier : } g(\tau) &= \mathbf{e}^{-i\omega_0\tau}\,\mathbf{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau^2} \\ \text{soit : } |g(\tau)| &= \mathbf{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\tau^2} \end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}20)$$

On retrouve le fait classique que la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne.

Bibliographie

[1] B. Lyot, C. R. Acad. Sci. **197**, 1593 (1933) et Ann. Astrophys. **7**, 31 (1944).

[2] A. Bloom, J. Opt. Sc. Am. **64**, 447 (1974).

[3] F. Tréhin, F. Biraben, B. Cagnac et G. Grynbery, Optics Commun. **31**, 76 (1979).

[4] G.R. Haines et C.R. Dahlstrom, Appl. Phys. Lett. **14**, 362 (1969).

[5] V.N. Lisityn et V.P. Chebotaev, JETP **54**, 419 (1968).

[6] R.L. Barger et J.L. Hall, Phys. Rev. Lett. **22**, 4 (1969).

[7] O.N. Kompanets, A.R. Kukudzanov, V.S. Letokhov, V.G. Minugin et E.L. Michailov, JETP **69**, 32 (1975).

[8] A. Clairon, A. Van Lerberghe, C. Bréant, C. Salomon, G. Camy et C. Bordé, J. Phys. France **42**, C8 (1981).

[9] K.M. Evenson, J.S. Wells, F.R. Petersen, B.L. Danielson, G.W. Day, R.L. Barger et J.L. Hall, Phys. Rev. Lett **29**, 1346 (1972).

[10] K.M. Evenson, J.S. Wells, F.R. Petersen, B.L. Danielson et G.W. Day, Appl. Phys. Lett. **22**, 192 (1973).

[11] A.D. Jennings, C.R. Pollock, C.R. Petersen, R.E. Drullinger, K.M. Evenson, J.S. Wells, J.S. Hall et H.P. Layer, Optics Lett. **8**, 136 (1983).

[12] O. Acef, J.J. Zondy, M. Abed, D.G. Rovera, A.H. Gérard, A. Clairon, P. Laurent, P. Mallerioux et P. Junear, Optics Commun. **97**, 29 (1993).

Partie III

Calcul des ondes émises

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Dans cette troisième partie nous nous souvenons que la lumière émise par les lasers est une onde électromagnétique, qui se propage dans l'espace, caractérisée par un vecteur champ électrique dépendant de l'espace et du temps. Nous cherchons donc à déterminer la configuration spatiale de ces ondes électromagnétiques, qui sont régies par les équations de Maxwell et les équations de propagation qui en sont la conséquence.
Dans le début de cette troisième partie nous déterminons *a priori* l'allure des solutions possibles pour les rayons lumineux issus des lasers (chapitre 15) ou pour les ondes qui se forment dans les cavités optiques (chapitre 16). Il s'agit de calculs d'optique ondulatoire et d'électromagnétisme qui sont totalement indépendants des deux premières parties de cet ouvrage, parce que nous utilisons alors les équations de Maxwell sans second membre. Le couplage avec la première partie de cet ouvrage n'apparaît qu'aux chapitres 17 et 18, lorsque nous utilisons au second membre des équations de Maxwell la polarisation atomique calculée dans la première partie.
Ces deux chapitres 17 et 18 utilisent des méthodes de résolution des équations de Maxwell complètement différentes, qui se trouvent mieux adaptées à tel ou tel type de problèmes. Ces deux chapitres sont donc très largement indépendants et peuvent être lus dans n'importe quel ordre, en fonction des problèmes qui intéressent le lecteur, à l'exception du paragraphe 17.1 qui constitue une introduction commune aux deux chapitres.

Dans les deux premières parties le champ électrique de l'onde intervenait dans nos calculs essentiellement sous la forme de son amplitude $\mathcal{E}_1$ qui permet de calculer la fréquence de Rabi $\Omega_1 = d_{ab}\mathcal{E}_1/\hbar$ (première partie) ou bien la densité d'énergie de l'onde $w = \varepsilon_0\mathcal{E}_1^2/2$ (deuxième partie) ; nous avons alors réservé la lettre majuscule E pour désigner les niveaux d'énergies E_a et E_b de l'atome. Dans cette troisième partie les niveaux d'énergie interviennent très peu et nous reprenons la notation E pour désigner le champ électrique variable dans l'espace et le temps $\overrightarrow{E}(x, y, z, t)$.
Nous avons encore un autre problème de notation : lorsque nous parlons du rayon caractéristique des faisceaux lumineux gaussiens, nous avons gardé la notation w utilisée par la quasi-totalité des auteurs (à cause du rayon minimum w_0 qui constitue le « waist » du faisceau). Nous évitons donc dans cette partie III d'utiliser la densité d'énergie (ou bien nous l'écrivons $\varepsilon_0\mathcal{E}_1^2/2$) ; et nous parlerons de l'intensité lumineuse P/S, proportionnelle au carré de l'amplitude du champ $\mathcal{E}_1^2$.

Chapitre 15

Le faisceau gaussien en espace libre

LORSQUE nous représentons des faisceaux de lumière par des rayons lumineux rectilignes, nous savons que nous utilisons un concept lié à l'approximation de l'optique géométrique, dont la validité est limitée à l'utilisation de diaphragmes de dimensions très grandes devant la longueur d'onde. Cette approximation est suffisante pour la description de la plupart des instruments d'optique courants (loupes, microscopes, lunettes ou téléscopes) mais la haute qualité de cohérence des faisceaux laser, jointe à leur finesse souvent inférieure au millimètre, fait que l'on atteint les limites de l'optique géométrique, et l'expérimentateur est obligé d'en tenir compte.

15.1 Approximation des ondes sphériques paraxiales

Dans le vide, ou espace libre, chaque composante cartésienne du champ électrique de l'onde lumineuse obéit à l'équation d'onde :

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \tag{15-1}$$

Si l'on recherche les solutions à variables d'espace et de temps séparés, de la forme :

$$F(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z)\Psi(t)$$

l'équation (15-1) conduit à l'égalité de deux expressions l'une ne dépendant que des variables d'espace et l'autre seulement du temps ; elles sont alors nécessairement constantes :

$$\frac{1}{\mathcal{E}}\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -k^2 \quad \text{(constante négative)}$$

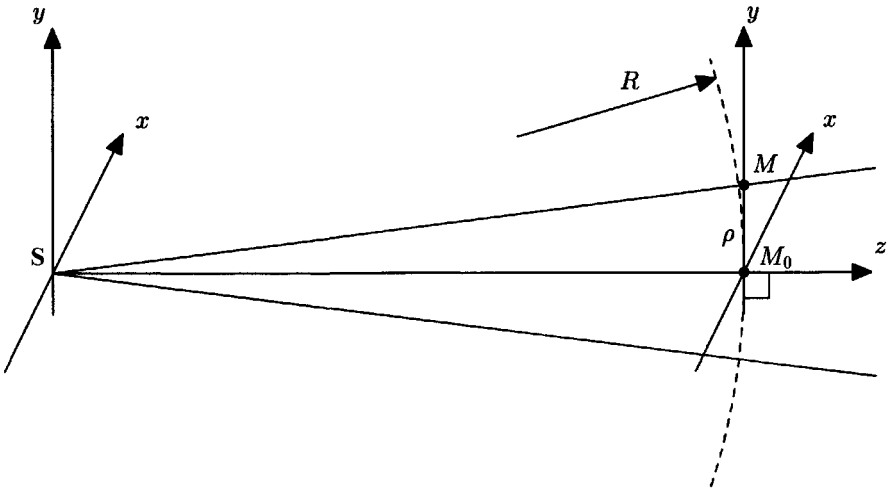


FIG. 15.1 – *Pinceau lumineux sphérique paraxial.*

Le choix d'une constante positive conduirait pour $\Psi(t)$ à des exponentielles réelles, non bornées, qui ne peuvent donc représenter un champ électrique réel ; prendre au contraire la constante négative conduit aux fonctions périodiques $\Psi(t) = \mathbf{e}^{\pm i\omega t}$ avec $\omega = kc$, donc à des ondes monochromatiques.

On obtient alors l'équation aux dérivées partielles pour la partie spatiale, qui est l'amplitude complexe du champ :

$$\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0 \qquad \text{(équation de Helmholtz)} \tag{15-2}$$

Des solutions particulières de cette équation sont les « ondes sphériques » d'origine arbitraire, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}(r) = C\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r} \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

soit pour la composante d'intérêt du champ électrique (ici E_x) :

$$E_x(x,y,z,t) = \mathcal{E}(x,y,z)\mathbf{e}^{-i\omega t} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(x,y,z) = C\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r} \tag{15-3}$$

Nous désirons représenter avec une telle onde un mince pinceau lumineux, pratiquement parallèle à l'axe z (Fig. 15.1) et dont le diamètre reste très faible en sorte que dans la région d'intérêt :

$$|x| \text{ et } |y| \ll |z| \qquad \text{(condition paraxiale)} \tag{15-4}$$

Cette condition (15-4) nous autorise à faire un développement limité, pour $z > 0$, de la distance $r = |\overrightarrow{SM}|$ de la source S en fonction des deux variables très petites $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ par rapport à 1 :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = z\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}} \simeq z\left[1+\frac{x^2+y^2}{2z^2}+\cdots\right] \\ &= z+\frac{x^2+y^2}{2z}+\cdots = z+\frac{\rho^2}{2z}+\cdots \end{aligned} \qquad (15\text{-}5)$$

en introduisant la distance ρ à l'axe Sz du point M (dans le plan perpendiculaire à Sz, $\rho^2 = x^2+y^2$).

Il est clair que nous ne ferons pas une grosse erreur en remplaçant r par z au dénominateur de la formule (15-3) du champ électrique. Le problème est en revanche plus délicat pour le terme de phase $\mathbf{e}^{ikr}$:

- $\mathbf{e}^{ikz}$ représente le déphasage entre le point M_0 sur l'axe et la source S ;
- $\mathbf{e}^{ik\frac{\rho^2}{2z}}$ représente en première approximation le déphasage entre la sphère centrée au point S, de rayon $SM_0 = z$ et le point $M(x,y,z)$ dans le plan perpendiculaire à Sz en M_0.

Les termes non pris en compte dans le développement limité (15-5) sont de l'ordre de $\frac{\rho^4}{8z^3}$; ils sont vraiment négligeables si le déphasage correspondant est très inférieur à 1 radian, soit $k\frac{\rho^4}{8z^3} = \frac{2\pi}{8}\frac{\rho^4}{\lambda z^3} \ll 1$, ou encore :

$$\left(\frac{\rho}{z}\right)^3 \ll \frac{\lambda}{\rho} \qquad \text{(condition de validité de l'approximation paraxiale)} \quad (15\text{-}6)$$

Deux exemples de dimensions usuelles nous montreront que la condition de validité de cette approximation est aisément réalisée : (avec la même longueur d'onde $\lambda = 1$ μm (proche du visible)) :

$$\begin{cases} \rho = 1 \text{ cm et } z = 1 \text{ m} \Longrightarrow \left(\frac{\rho}{z}\right)^3 = 10^{-6} \text{ et } \frac{\lambda}{\rho} = 10^{-4} \\ \rho = 1 \text{ mm et } z = 10 \text{ cm} \Longrightarrow \left(\frac{\rho}{z}\right)^3 = 10^{-6} \text{ et } \frac{\lambda}{\rho} = 10^{-3} \end{cases}$$

En définitive nous pourrons écrire localement une telle solution des équations d'onde pour l'amplitude complexe du champ définie en (15-3) :

$$\boxed{\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{C}{z}\mathbf{e}^{ikz}\,\mathbf{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} = A(z)\mathbf{e}^{ikz}\,\mathbf{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2R}}} \qquad (15\text{-}7)$$

avec une amplitude A dépendant de z ; la deuxième écriture a pour rôle de rappeler que z est le rayon de courbure R de l'onde sphérique.

Ce dernier résultat nous sera très utile dans la suite. En effet, il est rare qu'un problème réel puisse être représenté par une seule source ponctuelle. Mais une onde paraxiale d'axe Oz possède des surfaces d'onde (surfaces équiphase) à symétrie de révolution autour de Oz ; et ces surfaces d'onde, au voisinage de l'axe, sont presque équivalentes (avec une excellente approximation) à des surfaces sphériques. Considérons la surface d'onde coupant l'axe en $M_0(0,0,z)$ et de rayon de courbure $R(z)$ en M_0 ; le point S de la figure 5.1 ne représente plus alors une source ponctuelle, mais le centre de cette sphère équivalente, qui s'écarte de la surface d'onde par des termes du quatrième ordre seulement en $|x|/R$ et $|y|/R$; on dit que la sphère est surosculatrice en M_0 à la surface d'onde.

Ainsi l'onde en M possède par rapport à l'onde en M_0 un déphasage dû à la différence de chemin $SM - SM_0$; c'est le même calcul qu'en (15-5) en remplaçant z par $R(z)$. Une onde paraxiale doit donc comporter dans son expression un facteur de phase de la même forme que l'expression de droite de (15-7).

Notons que cette propriété de sphère surosculatrice est à la base de l'approximation de Gauss dans l'étude des systèmes centrés en optique géométrique, qui, à un point objet source sur l'axe, fait correspondre un point image qui n'est autre que le centre de la sphère surosculatrice à la surface d'onde après traversée du système centré.

La solution onde sphérique (15-3) nous a permis d'obtenir une expression générale de la phase dans une onde paraxiale ; mais elle présente un défaut majeur : elle n'est pas paraxiale et si l'on la tronque arbitrairement en largeur, elle n'est plus solution de l'équation d'onde. Quelle forme faut-il choisir pour décrire valablement la répartition transversale de l'amplitude de l'onde, ou de son intensité ? Nous répondons à cette question dans les paragraphes suivants.

15.2 Limitation gaussienne de l'étendue du front d'onde

La formule (15-7) présente une lacune : rien n'y indique une limitation de largeur du faisceau lumineux en x et y. Pour représenter la réalité du mince pinceau lumineux représenté sur la figure 15.1, il faut ajouter une variation de l'amplitude en fonction de la distance ρ à l'axe Oz, qui tende vers zéro assez rapidement dès que ρ devient grand. La pratique expérimentale montre que l'on n'obtient jamais de faisceaux lumineux à bords rigoureusement nets ; et lorsqu'on veut limiter un faisceau lumineux avec un diaphragme à bords nets, le phénomène de diffraction conduit à calculer et à observer une variation progressive d'intensité lumineuse à l'emplacement de l'ombre du diaphragme.

Avant de développer des calculs, nous choisissons dans ce paragraphe une approche expérimentale. La figure 15.2a représente un enregistrement en fonction du rayon ρ (distance à l'axe de révolution) de l'intensité lumineuse dans le faisceau lumineux issu d'un laser à HCN, à la longueur d'onde $\lambda = 337\ \mu$m (la longueur d'onde exceptionnellement grande conduit à une grande largeur du faisceau lumineux, qui facilite l'enregistrement). Cette courbe est remarquablement bien représentée par une fonction gaussienne que nous écrivons sous la forme :

$$I(\rho, z) = I_0(z)\mathbf{e}^{-2\frac{\rho^2}{w^2}}. \tag{15-8}$$

L'intensité étant proportionnelle au carré du champ électrique, on peut aussi écrire pour le module du champ :

$$\boxed{|\mathcal{E}(\rho, z)| = \mathcal{E}_0(z)\mathbf{e}^{-\frac{\rho^2}{w^2}} = \mathcal{E}_0(z)\mathbf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}} \tag{15-9}$$

Nous introduisons ainsi un paramètre w qui caractérise l'extension transversale de l'amplitude du champ. Ces fonctions gaussiennes possèdent un maximum très plat au centre ($\rho = 0$) et tombent très rapidement vers zéro lorsque ρ devient supérieur à la constante w. La gaussienne représentant l'intensité est plus étroite que celle représentant la variation du champ ; pour $\rho = w/\sqrt{2}$, l'intensité est divisée par $e \simeq 2,718$; pour $\rho = w$, elle est divisée par $e^2 \simeq 7,39$ et le champ seulement par e.

On a superposé à la courbe expérimentale en trait plein, la courbe en pointillé plus large représentant la variation du champ électrique $|\mathcal{E}(\rho)|$. On a ainsi pu mesurer sur l'enregistrement en taille réelle le rayon gaussien $w = 10,5$ mm. Il est fréquent avec des longueurs d'onde visibles, 500 fois plus courtes, d'obtenir des valeurs du rayon gaussien w inférieures au millimètre, voire au dizième de millimètre.

Quelques calculs supplémentaires permettent de mieux caractériser la répartition gaussienne.

Pour calculer la puissance δP transportée dans la section δS du faisceau, on utilise le flux du vecteur de Poynting moyenné sur le temps :

$$\frac{\delta P}{\delta S} = \overline{\left|\vec{E} \wedge \vec{H}\right|} = \overline{E \cdot \frac{E}{\mu_0 c}} = \varepsilon_0 c\overline{E^2} = \varepsilon_0 c\frac{\mathcal{E}^2}{2} \qquad \text{(densité d'énergie} \times c\text{)} \tag{15-10}$$

Le flux à travers un cercle de rayon a centré sur Oz

$$P(a) = \iint \varepsilon_0 c\frac{\mathcal{E}^2}{2}\mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{\rho=a} \varepsilon_0 c\frac{\mathcal{E}^2(\rho)}{2}2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \varepsilon_0 c\frac{\mathcal{E}_0^2}{2}\int_{\rho=0}^{\rho=a} \mathbf{e}^{-2\frac{\rho^2}{w^2}}\frac{\pi w^2}{2}\frac{4\rho\,\mathrm{d}\rho}{w^2} = \left(\varepsilon_0 c\frac{\mathcal{E}_0^2}{2}\right)\frac{\pi w^2}{2}\int \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

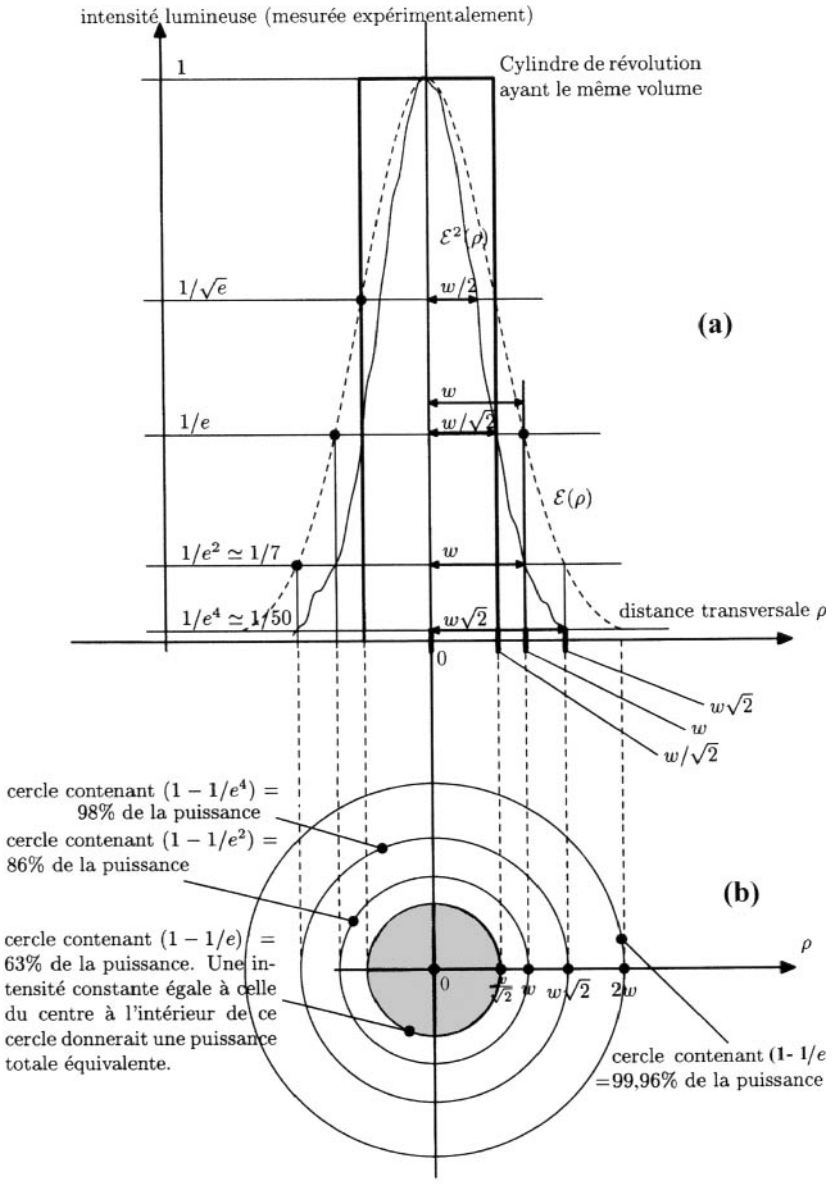


FIG. 15.2 – *(a) Enregistrement du profil d'intensité d'un faisceau gaussien, en fonction de la distance ρ à son axe de révolution. On a superposé en traits tiretés le profil du champ $|\mathcal{E}(\rho)|$. (b) Cercles caractéristiques du faisceau. (L'enregistrement (a) provient du Laboratoire des Dispositifs infrarouges de l'université P.-et-M. Curie.)*

en utilisant la variable $u = \dfrac{2\rho^2}{w^2}$; l'intégration est immédiate

$$P(a) = \left(\varepsilon_0 c \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}\right) \frac{\pi w^2}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\dfrac{2a^2}{w^2}}\right) \tag{15-11}$$

la puissance totale (pour a infini) vaut $P = \left(\varepsilon_0 c \dfrac{\mathcal{E}_0^2}{2}\right) \dfrac{\pi w^2}{2}$.

$\varepsilon_0 c \dfrac{\mathcal{E}_0^2}{2}$ représente l'intensité au centre (Puissance par unité de surface) ; une intensité constante égale à celle du centre dans un cercle de rayon $w/\sqrt{2}$ transporterait la même puissance totale P.

On a tracé sur la figure 15.2b ce cercle de rayon $w/\sqrt{2}$, qui contient en réalité 63 % de la puissance totale et trois autres cercles auxquels est appliquée la formule (15.11). Avec un cercle de rayon $2w$, on perd $1/\mathrm{e}^8$ de la puissance totale, c'est-à-dire moins d'un millième.

On a parfois besoin aussi de caractériser cette répartition gaussienne par son rayon quadratique moyen :

$$\overline{\rho^2} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \rho^2 \mathrm{e}^{-2\frac{\rho^2}{w^2}} 2\pi\rho \mathrm{d}\rho}{\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\frac{\rho^2}{w^2}} 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho} = \frac{\dfrac{\pi w^4}{4}\displaystyle\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\dfrac{\pi w^2}{2}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u} = \frac{w^2}{2} \qquad \text{soit } \sqrt{\overline{\rho^2}} = \frac{w}{\sqrt{2}}$$

(on obtient la valeur 1 pour l'intégrale du numérateur, après une classique intégration par parties).

On en déduit les valeurs quadratiques moyennes des coordonnées transversales :

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \frac{\overline{x^2 + y^2}}{2} = \frac{\overline{\rho^2}}{2} = \frac{w^2}{4} \quad \text{soit } \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\overline{y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\overline{\rho^2}} = \frac{w}{2}\cdot \tag{15-12}$$

Dans les paragraphes suivants, nous justifierons théoriquement cette solution gaussienne ; et ceci nous permettra de trouver la manière dont elle se propage le long du faisceau paraxial.

15.3 Rappel de la résolution des équations d'onde par la méthode de Kirchhoff

Il nous a semblé intéressant de rappeler, dans ce paragraphe, le lien entre les équations de Maxwell en électromagnétisme et les solutions intégrales utilisées par Kirchhoff, qui nous serviront dans les démonstrations relatives

aux faisceaux gaussiens. Mais ce paragraphe peut être sauté en première lecture ; il suffira d'admettre la formule de Kirchhoff (15-17) encadrée à la fin de ce paragraphe.

Les équations fondamentales des ondes électromagnétiques sont bien sûr les équations de Maxwell. Mais celles-ci mélangent champ électrique $\overrightarrow{E}$ et champ magnétique ; et lorsqu'on sépare les deux champs on obtient pour chacun d'entre eux les *équations de propagation* classiques de la forme :

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \text{fonction des densités de charge et de courant}$$

La fonction $F(x, y, z, t)$ peut représenter n'importe quelle composante cartésienne de $\overrightarrow{E}$ ou $\overrightarrow{B}$. (Démonstration rappelée au chapitre 17, §17.2).

Le second membre de cette équation est fondamental : ce sont bien les charges et les courants, ou leurs dérivées, qui sont sources des ondes électromagnétiques émises par des antennes, par des atomes, ou par des électrons en mouvement. Mais en cours de propagation l'onde traverse des régions vides de l'espace où le second membre est nul. L'idée des méthodes comme celle de Kirchhoff, couramment utilisée en optique, est d'étudier la propagation de l'onde dans un volume limité de l'espace qui ne contient aucune source et où le second membre est partout nul ; on obtient ainsi des solutions plus simples, mais qui dépendent bien sûr des conditions aux limites imposées sur la surface S qui limite le volume d'intégration. L'équation de propagation devient identique à (15-1) :

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ à l'intérieur de la surface } S$$

Si l'on se limite aux *solutions à variables d'espace et de temps séparées*, l'équation (15-1) conduit à l'équation d'Helmholtz (15-2) :

$$\Delta \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = 0 \text{ à l'intérieur de la surface } S$$

On connaît déjà des solutions simples de cette équation aux dérivées partielles, ce sont les solutions « ondes sphériques » véritables (non limitées en direction comme nous avons tenté de le faire au §15.1) ne dépendant que de la distance r à une origine P quelconque, mais pas des angles. Nous appellerons $g(r)$ une telle fonction sphérique indépendante des angles. Le laplacien se réduit alors à sa partie radiale :

$$\Delta g = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rg) = -k^2 g \quad \Longrightarrow rg = \mathbf{e}^{\pm ikr} \text{ ou } g = \frac{\mathbf{e}^{\pm ikr}}{r}$$

(Notons que cette solution onde sphérique présente une divergence au point P choisi comme origine.) On peut alors retrouver la solution de Kirchhoff en utilisant la formule de Green, qui s'applique à deux fonctions quelconques f

et g, mais que nous appliquerons à la fonction g onde sphérique ci-dessus et à la solution générale f de l'équation d'Helmholtz que nous recherchons.

Démontrons rapidement la formule de Green : en écrivant les composantes du vecteur $f\overrightarrow{\operatorname{grad} g}$, on vérifie facilement que :

$$\operatorname{div}\left(f\overrightarrow{\operatorname{grad} g}\right) = f\Delta g + \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad} g}$$
$$\operatorname{div}\left(g\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right) = g\Delta f + \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad} g} \quad \text{symétriquement}$$

par différence $\operatorname{div}\left(f\overrightarrow{\operatorname{grad} g} - g\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right) = f\Delta g - g\Delta f$.

On en déduit la formule de Green :

$$\left.\begin{aligned}&\iiint (f\Delta g - g\Delta f)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \oiint\left(f\overrightarrow{\operatorname{grad} g} - g\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\right)\cdot\vec{N}_{\text{sort}}\mathrm{d}S = \oiint\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}13)$$

On a utilisé la classique formule d'Ostrogradsky qui transforme l'intégrale de volume d'une divergence en un flux sortant de la surface ; $\vec{N}_{\text{sort}}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante, et l'on définit les dérivées par rapport à la normale de la surface :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \overrightarrow{\operatorname{grad} f}\cdot\vec{N}_{\text{sort}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial n} = \overrightarrow{\operatorname{grad} g}\cdot\vec{N}_{\text{sort}} \qquad (15\text{-}14)$$

Nous appliquons maintenant la formule de Green (15-13) avec $g = \dfrac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}$ (origine en P) et f la solution que nous recherchons. Ces deux fonctions étant solutions de (15-2), en remplaçant les laplaciens par $-k^2 g$ et $-k^2 f$, on voit que le premier membre de la formule de Green est nul, soit :

$$0 = \iint_{S+\Sigma}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \qquad (15\text{-}15)$$

mais à cause de la divergence de g au point P, nous sommes obligés d'exclure ce point du volume d'intégration en imaginant une petite sphère Σ de centre P et rayon très petit ε. Notre volume d'intégration sera alors l'espace compris entre les deux surfaces S et Σ (*cf.* Fig. 15.3).

Nous écrivons d'abord l'intégrale de surface sur la sphère Σ dont nous calculons séparément les deux termes :

- $\displaystyle\iint_\Sigma g\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}S = \iint \frac{\mathrm{e}^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S$; dans cette expression, l'élément intégrant varie comme $1/\varepsilon$ tandis que la surface totale intégrée varie comme $4\pi\varepsilon^2$. On en déduit que l'intégrale varie comme ε et tend vers zéro quand on fait tendre ε vers zéro.

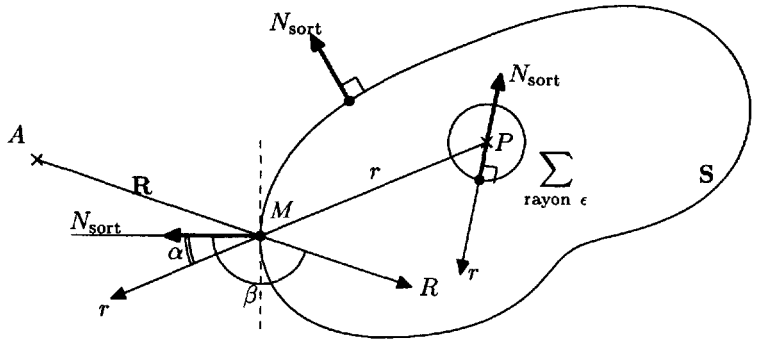


FIG. 15.3 – *Volume d'intégration de la méthode de Kirchhoff entre S et Σ, qui ne contient aucune source d'onde. A est une source d'onde, extérieure à ce volume (Atome ou Antenne).*

- Pour le calcul du second terme de l'intégrale sur Σ, nous remarquons que ε pouvant être choisi aussi petit que l'on veut, la variation de la fonction f sur la distance ε peut être rendue négligeable ; ceci permet de sortir f de l'intégrale :

$$\iint_\Sigma f\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}S \simeq f(P)\iint_\Sigma \frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}S = f(P)\iint_\Sigma -\frac{\partial g}{\partial r}\,\mathrm{d}S$$
$$= f(P)\iint\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{ik}{\varepsilon}\right)\mathbf{e}^{ik\varepsilon}\,\mathrm{d}S \simeq f(P)\,(4\pi - 4\pi ik\varepsilon)\,\mathbf{e}^{ik\varepsilon}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, l'exponentielle $\mathbf{e}^{ik\varepsilon} \to 1$, et le second terme de la parenthèse tend vers zéro ; il reste $4\pi f(P)$; soit en faisant passer cette expression au premier membre de l'équation (15-15) :

$$-4\pi f(P) = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = \iint_S \left(f\cos\alpha\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r}\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

l'angle α entre la normale sortante et le rayon vecteur apparaît en conséquence de la formule (15-14) quand nous projetons la normale sur le rayon vecteur qui porte le gradient de g. Dans la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = \left(ik - \dfrac{1}{r}\right)g$, il est possible de négliger $\dfrac{1}{r}$ devant $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ parce que $r = PM \gg \lambda$.

Nous obtenons :

$$\boxed{4\pi f(P) \simeq \iint_S \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial n} - ik\cos\alpha f\right)\mathrm{d}S} \qquad (15\text{-}16)$$

Nous avons réussi à faire ce qui était annoncé : calculer la solution $f(P)$ en tout point intérieur à S à partir de la connaissance des conditions aux limites, valeurs de f et de $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ en tous les points de la surface S qui limite le volume d'intégration. Dans cette intégrale la fonction onde sphérique e^{ikr}/r se retrouve en facteur du terme de surface qui est dans la parenthèse ; on peut considérer la parenthèse comme l'amplitude d'une source d'onde ponctuelle placée en chaque point M de la surface S et énoncer le principe de Kirchhoff : l'onde existant au point P est la résultante de toutes les ondes sphériques émises par des sources ponctuelles fictives placées sur la surface S. Ce principe est le point de départ de tous les calculs de diffraction en optique.

Pour l'application du principe de Kirchhoff, c'est-à-dire de la formule (15-16), à un calcul effectif, il faut faire des hypothèses sur les valeurs de $f(M)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial n}(M)$. Dans le cas par exemple d'une source d'onde placée au point A (Atome ou Antenne microscopique) à la distance $AM = R$ (*cf.* Fig. 15.3), on écrira par exemple :

$$f(M) = \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \cos\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R} = \cos\beta\left(ik - \frac{1}{R}\right)f$$

où β est l'angle entre le rayon vecteur R et la normale $\overrightarrow{N}_{\text{sort}}$. Là encore on pourra négliger $\dfrac{1}{R}$ devant $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; et l'on écrira par exemple :

$$\boxed{4\pi f(P) = \iint_S \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} f(M)ik\,(\cos\beta - \cos\alpha)\,\mathrm{d}S} \qquad (15\text{-}17)$$

Les points M qui apportent la contribution la plus importante à l'intégrale sont les plus voisins de la droite (AP) parce que leurs interférences seront plus constructives (la partie rapidement variable de la fonction à intégrer $\mathrm{e}^{ikr}.\mathrm{e}^{ikR} = \mathrm{e}^{ik(r+R)}$ est stationnaire au voisinage de la droite AP) ; pour ces points particuliers $\cos\alpha \simeq 1$ et $\cos\beta \simeq -1$.

15.4 Application de la méthode de Kirchhoff à un faisceau paraxial : stabilité de la solution gaussienne

Nous appliquons la méthode de Kirchhoff à un mince faisceau lumineux paraxial, d'axe moyen Oz.

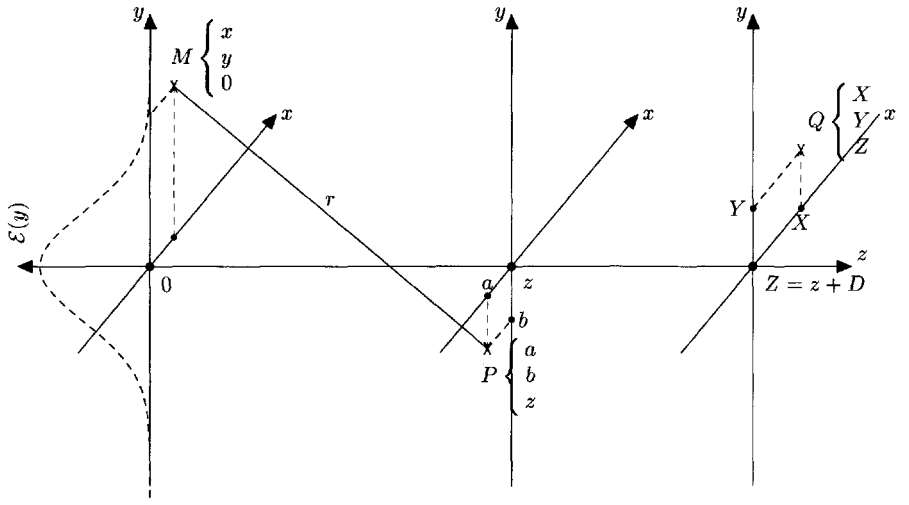


FIG. 15.4 – *Faisceau paraxial gaussien d'axe* $0z$ *montrant le plan origine* $z = 0$ *du point* M*, le plan* z *du point* P *et leurs coordonnées. (On a superposé sur la gauche de la figure, la courbe en pointillé représentant le profil gaussien de l'amplitude du champ* $\mathcal{E}(y)$ *le long de l'axe* Oy *dans le plan* $z = 0$*.)*

Nous supposons que les sources d'onde sont du côté des z négatifs et nous choisissons le plan $z = 0$ comme surface S pour appliquer les formules de Kirchhoff. Nous supposons connue l'amplitude complexe $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(x, y, 0)$ du champ créé dans ce plan par les sources. Nous utilisons la méthode de Kirchhoff pour calculer le champ électrique dans le plan transversal à la distance z. Nous appelons a et b les coordonnées x et y du point courant P dans ce plan (*cf.* Fig. 15.4). Pour une onde paraxiale, les angles α et β de la formule (15-17) (*cf.* Fig. 15.3) restent toujours voisins respectivement de 0 et de π, ce qui nous permet d'écrire :

$$\cos\alpha \simeq 1 \text{ et } \cos\beta \simeq -1$$

L'application de la formule (15-17) permet le calcul de l'amplitude complexe du champ en P :

$$\mathcal{E}(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \mathcal{E}(M)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{avec } r = PM \tag{15-18}$$

L'approximation de l'onde sphérique paraxiale (*cf.* §15.1), appliquée avec $r = MP$, nous permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \simeq \frac{1}{z} \mathrm{e}^{ikz}\, \mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}[(x-a)^2 + (y-b)^2]} \tag{15-19}$$

En reportant cette expression (15-19) dans (15-18), on obtient la relation fondamentale de l'optique paraxiale :

$$\mathcal{E}(a,b,z) = \left(-\frac{ik}{2\pi z}\right) \mathbf{e}^{ikz} \iint \mathcal{E}(x,y,0)\mathbf{e}^{i\frac{k}{2z}\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15-20}$$

En faisant référence à la théorie de la diffraction, ce résultat relève de ce qui est appelé la « diffraction de Fresnel » ; il est donc valable pour des points proches de M.

Nous appliquons ce résultat en prenant comme hypothèse de départ que dans le plan $z = 0$ l'onde est plane (c'est-à-dire que la phase du champ électrique est indépendante de x et y) mais que en revanche la distribution d'amplitude est gaussienne :

$$\text{Pour } z = 0 \ : \ E(M,t) = E(x,y,0,t)$$
$$= \left(\mathcal{E}_0 \mathbf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}}\right) \mathbf{e}^{-i\omega t} = \mathcal{E}(M)\mathbf{e}^{-i\omega t} \tag{15-21}$$

Nous appelons w_0 le rayon gaussien de cette distribution pour rappeler qu'elle est valide dans le plan $z = 0$.

Nous posons :

$$\varepsilon = \frac{k}{2z} \text{ et } \gamma_0 = \frac{1}{w_0^2} \tag{15-22}$$

pour faciliter le calcul que nous devons faire maintenant sur l'intégrale donnant $\mathcal{E}(P)$:

$$\mathcal{E}(P) = -\mathcal{E}_0 \frac{i\varepsilon}{\pi} \mathbf{e}^{ikz} \iint \mathbf{e}^{-\gamma_0(x^2+y^2)+i\varepsilon[(x-a)^2+(y-b)^2]} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Nous transformons d'abord l'exposant de l'exponentielle :

$$-\gamma_0(x^2+y^2) + i\varepsilon\left[x^2+y^2-2(ax+by)+a^2+b^2\right]$$
$$= -(\gamma_0 - i\varepsilon)(x^2+y^2) - i2\varepsilon(ax+by) + i\varepsilon(a^2+b^2)$$

Nous pouvons sortir de l'intégrale le facteur exponentiel qui ne dépend pas de x ni de y, soit :

$$\mathcal{E}(P) = -\mathcal{E}_0 \frac{i\varepsilon}{\pi} \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{i\varepsilon(a^2+b^2)}$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-(\gamma_0 - i\varepsilon)(x^2+y^2)}\, \mathbf{e}^{-i2\varepsilon(ax+by)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15-23}$$

Nous reconnaissons dans l'intégrale la transformée de Fourier à deux dimensions d'une gaussienne. On utilise le résultat d'analyse mathématique valable pour β complexe à condition que la partie réelle de β soit positive (pour assurer la convergence de l'intégrale à l'infini) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-\beta x^2}\, \mathbf{e}^{-iux}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, \mathbf{e}^{-\frac{u^2}{4\beta}} \qquad (\mathrm{Re}\beta > 0) \tag{15-24}$$

En posant $u = 2\varepsilon a$, $v = 2\varepsilon b$, et $\beta = \gamma_0 - i\varepsilon$ on obtient alors pour l'intégrale double de (15-23) l'expression :

$$\frac{\pi}{\beta}\mathbf{e}^{-\frac{u^2}{4\beta}}\, \mathbf{e}^{-\frac{v^2}{4\beta}} = \frac{\pi}{\gamma_0 - i\varepsilon}\mathbf{e}^{-\frac{\varepsilon^2(a^2+b^2)}{\gamma_0 - i\varepsilon}}$$

On regroupe dans (15-23) les deux exponentielles en $(a^2 + b^2)$:

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 \frac{-i\varepsilon}{\gamma_0 - i\varepsilon}\mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{\left(i\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_0 - i\varepsilon}\right)(a^2+b^2)}$$

En définissant $\gamma(z) = \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma_0 - i\varepsilon} - i\varepsilon = \dfrac{i\varepsilon\gamma_0}{i\varepsilon - \gamma_0}$ on obtient :

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_0 \dfrac{\gamma(z)}{\gamma_0}\mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{-\gamma(z)(a^2+b^2)} \\ \text{avec } \gamma(z) = \dfrac{i\varepsilon\gamma_0}{i\varepsilon - \gamma_0} \quad \text{soit } \dfrac{1}{\gamma(z)} = \dfrac{1}{\gamma_0} + \dfrac{i}{\varepsilon} = {w_0}^2 + i\dfrac{2z}{k} \end{array}\right\} \tag{15-25}$$

La solution obtenue à la distance z est encore une solution gaussienne en fonction des coordonnées a et b du point P. Sans doute le coefficient $\gamma(z)$ de l'exponentielle est complexe ; et il faudra séparer la partie imaginaire qui représente un déphasage variable dans le plan d'onde (ce n'est plus une onde plane) et la partie réelle qui représente la variation d'amplitude. Mais nous sommes assurés que la partie réelle de $\gamma(z)$ est positive ; ce sera donc bien une variation d'amplitude analogue à celle de la figure 15.2, avec une valeur différente du rayon gaussien w.

Remarque 15.1 – Connaissant maintenant le champ de l'onde en tous les points P du plan z, nous pouvons l'utiliser pour calculer le champ à une distance supérieure $Z = z + D$, en appelant Q (de coordonnées X, Y, Z) le point courant de ce nouveau plan Z (*cf.* Fig. 15.4).

Il nous faut refaire tout le calcul précédent en remplaçant $\mathcal{E}(M)$ de la formule (15-21) par $\mathcal{E}(P)$ de la formule (15-25) c'est-à-dire que nous remplaçons au départ $\mathcal{E}_0$ par $\mathcal{E}_0 \dfrac{\gamma(z)}{\gamma_0}\mathbf{e}^{ikz}$ d'une part, et $\gamma_0 = \dfrac{1}{w_0}$ par $\gamma(z)$ d'autre part.

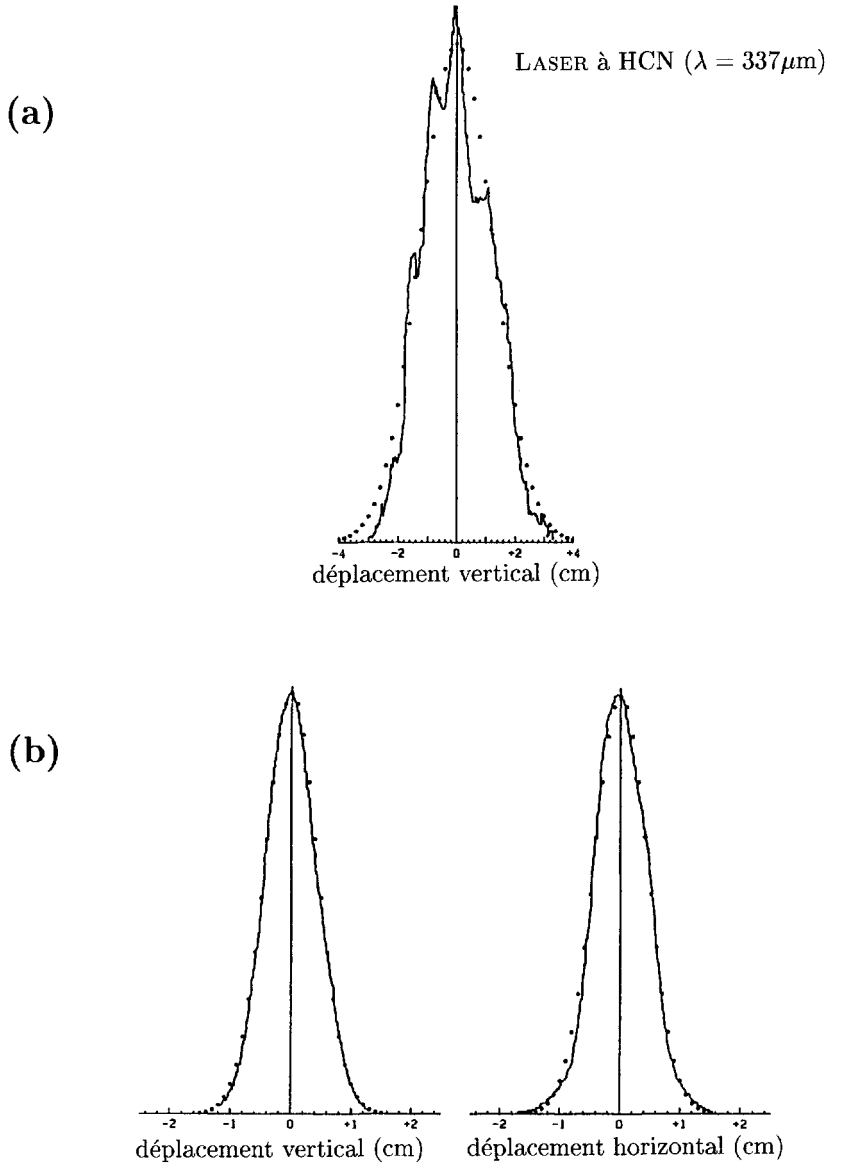


FIG. 15.5 – *Enregistrements de profils d'intensité du faisceau lumineux infrarouge issu d'un Laser à HCN : (a) directement à la sortie du Laser ; (b) après passage du faisceau à travers un système de deux miroirs sphériques confocaux, selon les deux axes perpendiculaires Ox et Oy dans le plan d'onde. Seule la partie gaussienne s'est propagée de manière stable. (Enregistrement du Laboratoire des Dispositifs infrarouges. Université P.-et-M. Curie.)*

Dans le cours du calcul, nous devons remplacer la distance z entre les deux plans de M et de P par la distance D entre les deux plans de P et de Q ; c'est-à-dire que nous remplaçons $\varepsilon = \dfrac{k}{2z}$ par $\varepsilon' = \dfrac{k}{2D} = \dfrac{k}{2(Z-z)}$.

Tout le reste du calcul effectué pour calculer l'intégrale se reproduira sans problème, y compris le calcul de l'intégrale définie parce que la partie réelle du coefficient complexe $\gamma(z)$ est positive et donc aussi celle du coefficient $\gamma(z) - \varepsilon'$, ce qui assure la convergence de la nouvelle intégrale. Nous pouvons donc transposer le résultat $\mathcal{E}(P)$, en y effectuant tous les changements notés ci-dessus, pour obtenir le champ au point Q :

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}(Q) = \left[\mathcal{E}_0 \frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \mathbf{e}^{ikz}\right] \frac{\gamma(Z)}{\gamma(z)} \mathbf{e}^{ikD}\, \mathbf{e}^{-\gamma(Z)(X^2+Y^2)} \\ = \mathcal{E}_0 \frac{\gamma(Z)}{\gamma_0} \mathbf{e}^{ik(z+D)}\, \mathbf{e}^{-\gamma(Z)(X^2+Y^2)}\end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}26)$$

$$\text{avec } \gamma(Z) = \frac{i\varepsilon'\gamma(z)}{i\varepsilon' - \gamma(z)}, \qquad \text{soit } \frac{1}{\gamma(Z)} = \frac{1}{\gamma(z)} + \frac{2i}{k}(Z-z) \quad (15\text{-}27)$$

La solution obtenue dans le plan Z est encore une solution gaussienne avec une partie réelle positive pour $\gamma(Z)$. La formule de récurrence (15-27) permet de calculer la nouvelle constante $\gamma(Z)$ en fonction de l'ancienne $\gamma(z)$. *La solution gaussienne se répétera donc de proche en proche, de façon parfaitement stable.* Il est réconfortant de vérifier que cette expression de $\mathcal{E}(Q)$ obtenue par deux applications successives des formules de Kirchhoff est identique à celle que nous aurions obtenue directement en remplaçant z par Z dans l'expression de $\mathcal{E}(P)$ (15-25). De plus, le calcul est valable pour $D < 0$, donc $\varepsilon' < 0$; et cela justifie l'utilisation de l'onde gaussienne partout, y compris pour le voisinage de l'origine et pour les z négatifs.

A l'appui de ces calculs théoriques, nous reproduisons sur la figure 15.5 deux enregistrements expérimentaux de la répartition spatiale d'intensité dans le faisceau lumineux issu d'un laser à HCN (la grande longueur d'onde entraîne une grande valeur du rayon gaussien w, qui facilite la mesure). L'enregistrement (a) effectué directement à la sortie du laser montre des irrégularités qui reflètent sans doute des inhomogénéités dans la décharge du tube laser. L'enregistrement (b) est effectué plus loin après passage du faisceau dans un système optique. La partie gaussienne de la répartition est conservée tandis que les parties irrégulières ont été dispersées et ont disparu.

15.5 Caractéristiques de l'onde gaussienne

Nous partons des formules (15-25) obtenues au paragraphe précédent, en les transcrivant en un point $M(x, y, z)$ quelconque :

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)} \\ \text{avec } \frac{1}{\gamma(z)} = {w_0}^2 + i\frac{2z}{k} = {w_0}^2\left(1 + i\frac{z}{L}\right)\end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}28)$$

en définissant $\boxed{L = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}}$ (longueur de Rayleigh) (15-29)

15.5.1 Rayon gaussien du profil transversal

L'important est de séparer la partie réelle et la partie imaginaire de $\gamma(z)$ puisque c'est la partie réelle qui détermine la répartition spatiale d'amplitude.

$$\gamma(z) = \frac{1}{w_0^2}\frac{1}{1+i\frac{z}{L}} = \frac{1}{w_0^2}\cdot\frac{1-i\frac{z}{L}}{1+\frac{z^2}{L^2}} = \frac{1}{w(z)^2}\left(1-i\frac{z}{L}\right) \tag{15-30}$$

en appelant $w(z)^2$ l'inverse de la partie réelle ; ce qui fait apparaître le rayon gaussien de la nouvelle répartition spatiale dans le plan z :

$$\boxed{w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{L}\right)^2}} \tag{15-31}$$

On voit que la longueur L définie plus haut en (15-29) sert d'échelle à la variation du rayon gaussien $w(z)$ en fonction de z. On appelle L *longueur de Rayleigh* ; et lorsqu'on s'écarte de l'origine O d'une longueur de Rayleigh ($z = L$), le rayon gaussien est multiplié par $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que la section du pinceau lumineux a sa surface multipliée par 2. Cet élargissement du faisceau, aussi bien pour les z négatifs que pour les z positifs est représenté sur la figure 15.6a. La zone centrale, de longueur $2L$, où la densité d'énergie varie au maximum de 50 % est appelée la zone de Rayleigh. En anglais on appelle « waist » le rayon w_0 à l'endroit du rétrécissement minimum, qui est considéré comme la taille ou la ceinture du faisceau.

15.5.2 Rayon de courbure du front d'onde

Dans le calcul du paragraphe précédent, nous avions choisi comme point de départ dans le plan $z = 0$ une onde gaussienne plane, c'est-à-dire que la phase de l'onde dans ce plan ne dépendait pas de x et y. Ce plan $z = 0$ est en fait le seul où l'onde soit plane. Dès que z est différent de zéro, le paramètre $\gamma(z)$ calculé en (15-30) est complexe et l'exponentielle imaginaire en $x^2 + y^2$ représente un déphasage dépendant de x et y. Ce déphasage dans le plan d'onde peut être comparé avec celui d'une onde sphérique paraxiale : formule (15-7) encadrée au début de ce chapitre. Cette comparaison permet de définir un rayon de courbure $R(z)$ de l'onde, tel que les termes imaginaires en $x^2 + y^2$ de (15-28) et (15-7) soient égaux :

$$\mathbf{e}^{i\frac{z}{Lw(z)^2}(x^2+y^2)} = \mathbf{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}$$

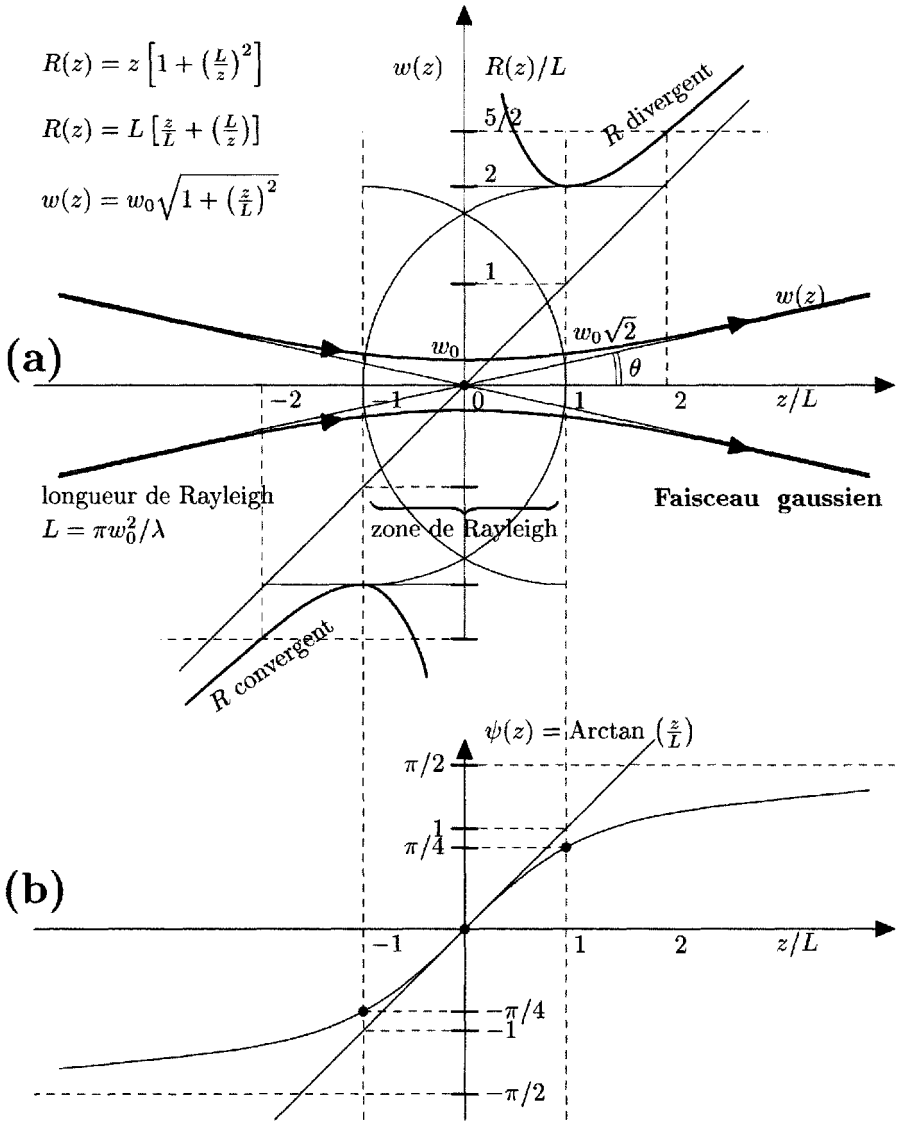


FIG. 15.6 – *Évolution du faisceau gaussien en fonction de la distance z le long de l'axe de révolution. (a) Variations du rayon gaussien $w(z)$ du profil d'amplitude et du rayon de courbure algébrique $R(z)$ du front d'onde. (b) Variation du déphasage global $\psi(z)$.*
Les deux cercles dessinés sur la figure (a) représentent les fronts d'onde, dont la courbure est la plus accentuée, aux limites de la zone de Rayleigh ($R = \pm 2L$ pour $z = \pm L$.

$$\text{soit } R(z) = \frac{kLw(z)^2}{2z} = \frac{Lkw_0^2}{2z}\left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \tag{15-32}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{R(z) = \frac{L^2}{z}\left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) = z + \frac{L^2}{z} = L\left(\frac{z}{L} + \frac{L}{z}\right)} \tag{15-33}$$

L'avant dernière expression nous montre que le rayon de courbure équivalent devient très voisin de z lorsque $z \gg L$; c'est-à-dire que le faisceau gaussien réalise véritablement pour z très grand une onde sphérique paraxiale limitée transversalement. En revanche, la dernière expression est plus commode pour étudier la variation de $R(z)$ aux faibles valeurs de z ; on se rappelle que la somme d'une variable et de son inverse $\left(\frac{z}{L} + \frac{L}{z}\right)$ passe par un minimum lorsque ces deux quantités sont égales à l'unité ; c'est-à-dire que $R(z)$ est minimum, égal à $2L$, lorsque $z = L$, juste à la longueur de Rayleigh. Lorsque $z \to 0$, $R(z) \to \infty$ de manière à retrouver l'onde plane (de rayon de courbure infini) lorsque $z = 0$. Tout ceci est représenté aussi sur la figure 15.6a.

On donne au rayon de courbure une définition algébrique : $R(z)$ est positif pour une onde divergente comme sur la partie droite de la figure 15.6 ; mais au contraire $R(z)$ est négatif pour une onde convergente comme sur la partie gauche de la figure. Cela permet de généraliser la formule (15-33) aux valeurs négatives de z, pour lesquelles on retrouve les valeurs opposées à celles discutées ci-dessus pour les z positifs, le minimum $R(z) = 2L$ pour $z = L$ est remplacé symétriquement par un maximum $R(z) = -2L$ pour $z = -L$.

15.5.3 Amplitude et phase de l'onde

$\gamma(z)$ n'intervient pas seulement dans l'exponentielle de la formule (15-28) ; on le trouve aussi en facteur de $\mathcal{E}_0$, où il détermine l'amplitude du champ. Il faut donc calculer d'après (15-30) le module du nombre complexe $\gamma(z)$:

$$|\gamma(z)| = \frac{1}{w_0^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{L^2}}} = \frac{1}{w_0 w(z)} \tag{15-34}$$

L'argument du nombre complexe $\gamma(z)$ ressort aussi facilement de la dernière expression (15-30) où l'on trouve le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle égal à $\frac{z}{L}$. On en déduit l'expression suivante de ce nombre complexe :

$$\boxed{\gamma(z) = \frac{1}{w_0 w(z)}\mathbf{e}^{-i\psi(z)} \text{ avec } \tan\psi(z) = \frac{z}{L}} \tag{15-35}$$

La courbe de variation de l'angle $\psi(z)$ est également tracée sur la figure 15.6b. Tenant compte de $\gamma_0 = 1/w_0^2$, tout ceci nous permet de réécrire l'amplitude

complexe du champ de l'onde dans le plan z en séparant le module et les termes de phase :

$$\boxed{\mathcal{E}(x,y,z) = \left(\mathcal{E}_0 \frac{w_0}{w(z)}\right) \mathbf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} \cdot \mathbf{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} \cdot \mathbf{e}^{ikz - i\psi(z)}} \quad (15\text{-}36)$$

avec :

- $\left(\mathcal{E}_0 \frac{w_0}{w(z)}\right)$ l'amplitude au centre ;
- $\mathbf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}}$ profil transversal de l'amplitude avec le rayon $w(z)$ (15-31) ;
- $\mathbf{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}$ déphasage dans le plan d'onde équivalent à une onde sphérique de rayon de courbure $R(z)$ (15-33) ;
- $\mathbf{e}^{ikz - i\psi(z)}$ déphasage de propagation selon l'axe z : du déphasage kz de l'onde plane il faut retrancher le déphasage $\psi(z)$ donné par (15-35) qui varie de π quand z varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Le signe des termes imaginaires est lié à la convention choisie $\mathbf{e}^{-i\omega t}$ pour représenter le champ électrique (*cf.* (15-3)ou (15-21)). Par comparaison avec d'autres auteurs, il peut y avoir un changement de i en $-i$ qui n'a aucune conséquence pratique.

On vérifie que l'amplitude sur l'axe en $1/w(z)$ donne une densité d'énergie en $1/w(z)^2$, qui compense exactement l'accroissement de surface de la section du faisceau en $w(z)^2$: cela assure la conservation de l'énergie transportée dans le faisceau. On résume dans le tableau ci-dessous les variations en fonction de z des trois paramètres caractéristiques de la distribution gaussienne :

z	$\lvert z\rvert \gg L$		$-L$		0		$+L$		$z \gg L$
$w(z)$	$w_0 \frac{\lvert z\rvert}{L}$	$\searrow$	$w_0\sqrt{2}$	$\searrow$	w_0	$\nearrow$	$w_0\sqrt{2}$	$\nearrow$	$w_0 \frac{z}{L}$
$R(z)$ algébrique	z (convergent) centré en 0	$\nearrow$	$-2L$ module minimum	$\searrow$	$+\infty$ (plan) $-\infty$	$\searrow$	$2L$ minimum	$\nearrow$	z (divergent) centré en 0
$\psi(z)$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{-\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

En résumé la modification du faisceau gaussien sur une très grande distance (beaucoup plus grande que la longueur de Rayleigh) ressemble à celle

d'une onde sphérique convergente qui devient une onde sphérique divergente après passage par un foyer. Mais le foyer ponctuel de l'optique géométrique est remplacé par le waist de dimension finie. La variation de π du déphasage $\psi(z)$ n'est autre que le classique déphasage de π dans le passage par un foyer (phase de Gouy) ; ceci peut être considéré comme une autre manière de le démontrer.

Remarque 15.2 – Les expressions (15-28) ou (15-36) de l'onde gaussienne peuvent être retrouvées rapidement et sous forme condensée par un artifice mathématique. Comme nous l'avons vu au paragraphe 15.1, l'onde sphérique $\mathbf{e}^{ikr}/r$ possède une divergence à l'origine ($r = 0$). Cette singularité ponctuelle peut être éliminée de l'axe Oz par une translation de l'origine, non pas d'une quatité réelle ce qui ne ferait que déplacer la singularité, mais d'une quantité complexe. Remplaçons ainsi z par $q(z) = z - iL$ où L est une constante positive. En posant la nouvelle variable complexe $\widetilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + q^2}$, l'expression $\mathbf{e}^{ik\widetilde{r}}/\widetilde{r}$ est encore solution de l'équation de Helmholtz (15-2).

Supposons maintenant $|x|$ et $|y| \ll |q|$ (ce qui est possible partout car $|q| \geq L$) et effectuons l'approximation paraxiale (*cf.* §15.1) ; il suffit de remplacer formellement z par q dans (15-7) pour obtenir :

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \frac{C}{q}\mathbf{e}^{ikq}\,\mathbf{e}^{ik\dfrac{x^2+y^2}{2q}}$$

Posons $C = -iL\mathbf{e}^{-kL}\mathcal{E}_0$ ce qui permet de faire disparaître la partie constante de l'exponentielle, $\mathbf{e}^{ikq}$, et de montrer que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0,0,0)$ à l'origine des axes ; on obtient :

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \mathcal{E}_0\left(-\frac{iL}{q}\right)\mathbf{e}^{ikz}\,\mathbf{e}^{ik\dfrac{x^2+y^2}{2q}} \quad \text{avec} \quad q = z - iL \tag{15-37}$$

on peut vérifier que cette expression est rigoureusement identique à (15-36). En utilisant la définition (15-35) de l'angle $\psi(z)$ et celle (15-31) de $w(z)$, on peut transformer l'amplitude complexe de cette expression :

$$\frac{-iL}{q} = \frac{-iL}{z - iL} = \frac{1}{1 + iz/L} = \frac{\mathbf{e}^{-i\psi(z)}}{\sqrt{1 + z^2/L^2}} = \frac{w_0\,\mathbf{e}^{-i\psi(z)}}{w(z)}$$

De plus, en séparant partie réelle et imaginaire de $1/q$, puis en utilisant la formule (15-33) du rayon de courbure et la définition (15-29) de la longueur de Rayleigh ;

$$\frac{1}{q} = \frac{z}{z^2 + L^2} + i\frac{L}{z^2 + L^2} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{2}{kw^2(z)} = \frac{2i}{k}\gamma(z) \tag{15-38}$$

La relation de récurrence (15-27) s'écrit simplement :

$$q(Z) = q(z) + Z - z \tag{15-39}$$

certains auteurs désignent $q(z)$ comme « rayon de courbure complexe » : le rayon de courbure réel apparaît dans la partie réelle de $1/q$ tandis que le rayon gaussien apparaît alors dans la partie imaginaire. Nous avons dans l'étude précédente privilégié un coefficient $\gamma(z)$ dont la partie réelle reflète l'amplitude du champ et la partie imaginaire représente la phase.

15.5.4 Directivité et inégalités de Heisenberg

L'hyperbole qui représente la variation de $w(z)$ peut être aussi caractérisée par l'angle $\theta = w_0/L$ des asymptotes avec l'axe Oz (*cf.* Fig. 15.6). Compte tenu de la relation (15-29) entre les deux paramètres w_0 et L qui définissent le faisceau, on en déduit les expressions de cet angle :

$$L = \pi\frac{w_0^2}{\lambda} \text{ ou } w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{w_0}{L} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}}} \qquad (15\text{-}40)$$

L'angle θ varie donc en raison inverse du rayon minimum w_0 ou « waist » du faisceau. Ceci est illustré sur la figure 15.7, où l'on montre, pour une longueur d'onde fixée, différentes courbes $w(z)$ possibles : au plus petit waist correspond la plus forte divergence ; au plus grand waist correspond la plus faible divergence.

En complément à la figure 15.7, le tableau ci-dessous illustre par des valeurs numériques la relation entre rayon minimum w_0, ouverture angulaire θ et longueur de Rayleigh L pour une longueur d'onde $\lambda = 0,75\ \mu$m, choisie à la limite du visible et de l'infrarouge :

∅ minimum $2w_0$	0,1 mm	1 mm	1 cm	10 cm	1 m
longueur de Rayleigh	1 cm	1 m	100 m	10 km	1000 km
∅ angulaire 2θ (radians)	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

Le faisceau gaussien réalise une autolimitation transversale d'un faisceau lumineux sans diaphragme ; mais la formule (15-40) qui détermine son ouverture angulaire, sous la forme $\dfrac{\lambda}{\pi w_0}$ est très semblable à la formule calculée pour la diffraction par un diaphragme circulaire de diamètre $2w_0$.

Dans le cas du faisceau gaussien cette relation entre l'ouverture angulaire θ et le rayon minimum w_0 reflète très exactement le cas limite des inégalités de

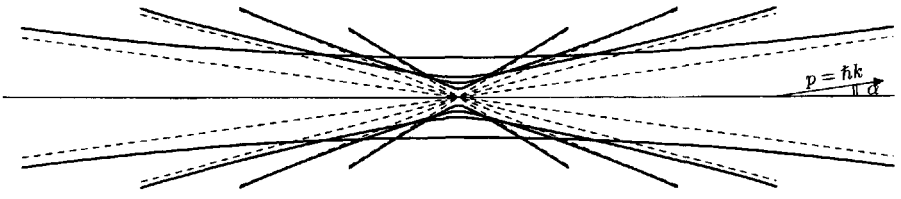


FIG. 15.7 – *Relation entre le diamètre minimum (waist) et l'ouverture angulaire du faisceau gaussien.*

Heisenberg appliquées aux photons : dans le plan $z = 0$ de section minimum du faisceau (waist), l'incertitude quadratique moyenne Δx sur la position du photon a été calculée en (15-12)

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \frac{w_0}{2}$$

Dans la partie divergente du faisceau (pour z très grand) l'incertitude quadratique sur sa direction angulaire α dans le plan xOz vaut :

$$\overline{\alpha^2} = \frac{\overline{x^2}}{z^2} = \frac{w(z)^2}{4z^2} = \frac{w_0^2}{4}\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{z^2}\right) \rightarrow \frac{w_0^2}{4L^2} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \text{ si } z \rightarrow \infty$$

On en déduit l'incertitude quadratique moyenne Δp_x sur la composante $p_x = \hbar k \sin\alpha \simeq \hbar k\alpha$ du vecteur quantité de mouvement du photon

$$\Delta p_x = \sqrt{\overline{p_x^2}} = \hbar k\sqrt{\overline{\alpha^2}} = \hbar k\frac{\theta}{2} = \hbar k\frac{w_0}{2L} = \frac{\hbar}{w_0} \qquad (15\text{-}41)$$

en tenant compte de la définition (15-29) de la longueur de Rayleigh L.

On obtient :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \qquad (15\text{-}42)$$

15.6 Problèmes de détermination des caractéristiques gaussiennes

Il s'agit de cas pratiques où le faisceau gaussien doit être déterminé à partir de nécessités expérimentales précises. Nous en donnons deux exemples.

15.6.1 Rayon gaussien w_1 et rayon de courbure R_1 imposés dans un plan d'onde fixé P

On cherche à déterminer la position O du waist et son rayon w_0 (*cf.* Fig. 15.8a). On appelle z_1 la longueur algébrique $\overline{OP}$. On simplifiera l'écriture en introduisant la longueur l_1 définie à partir du rayon w_1 de la même manière que la longueur de Rayleigh L est définie à partir du rayon minimum w_0. Les formules (15-29) pour L et (15-31) pour $w(z)$ permettent d'écrire :

$$l_1 = \frac{\pi}{\lambda}w_1^2 = \frac{\pi}{\lambda}w_0^2\left(1 + \frac{z_1^2}{L^2}\right) = L\left(1 + \frac{z_1^2}{L^2}\right) = z_1\left(\frac{L}{z_1} + \frac{z_1}{L}\right)$$

d'après l'expression (15-33) de $R(z)$:

$$R_1 = R_1(z_1) = z_1 + \frac{L^2}{z_1} = L\left(\frac{L}{z_1} + \frac{z_1}{L}\right)$$

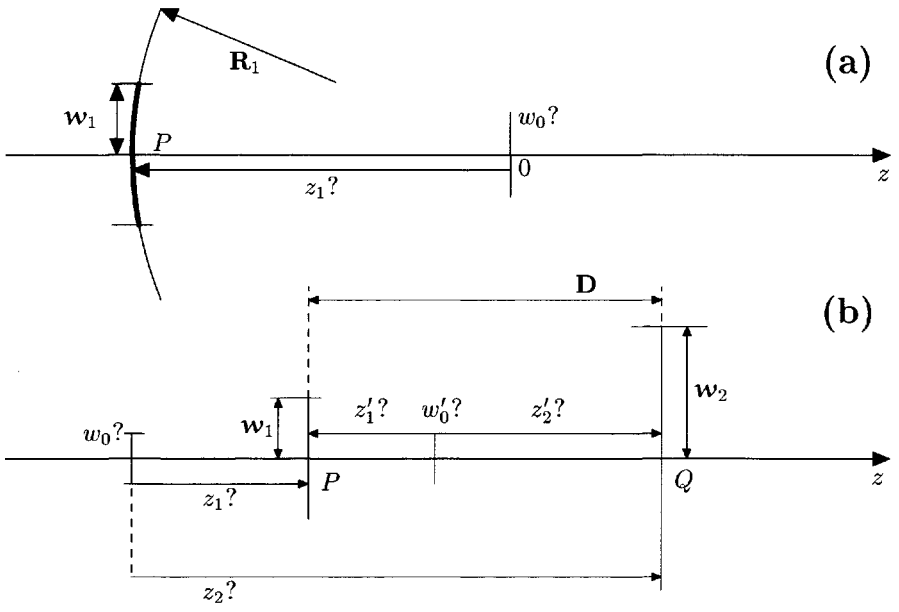


FIG. 15.8 – *Détermination des caractéristiques d'un faisceau gaussien quand : (a) on impose w_1 et R_1 dans le plan P ; (b) on impose les rayons w_1 dans le plan P et w_2 dans le plan Q, séparés par la distance D. Le calcul conduit dans ce cas à deux solutions possibles, à condition que la distance D ne soit pas trop longue.*

les parenthèses des deux formules sont identiques et disparaissent si l'on fait leur rapport $\frac{l_1}{R_1} = \frac{z_1}{L}$. En reportant cette valeur de $\frac{z_1}{L}$ dans les deux formules ci-dessus, on obtient respectivement z_1 et L :

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{l_1}{\frac{l_1}{R_1} + \frac{R_1}{l_1}} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1^2}{{l_1}^2}} \qquad \begin{pmatrix}\text{formule algébrique :}\\ z_1 \text{ a le signe de } R_1\end{pmatrix} \\ L &= \frac{R_1}{\frac{l_1}{R_1} + \frac{R_1}{l_1}} = \frac{l_1}{1 + \frac{{l_1}^2}{{R_1}^2}} \qquad \left(\text{on en déduit } w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (15\text{-}43)$$

15.6.2 Deux rayons gaussiens w_1 et w_2 imposés dans deux plans P et Q distants de D

On appelle $z_1 = \overline{OP}$ et $z_2 = \overline{OQ}$ les distances algébriques de la position O du waist du faisceau (*cf.* Fig. 15.8b). Comme dans l'exemple précédent

on utilisera les longueurs $l_1 = \frac{\pi}{\lambda} w_1^2$ et $l_2 = \frac{\pi}{\lambda} w_2^2$. On écrit d'abord la distance algébrique

$$\overline{PQ} = z_2 - z_1 = D.$$

Nous écrivons ensuite la même formule de $w(z)$ (15-31) que ci-dessus :

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{\pi}{\lambda} w_1^2 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2 \left(1 + \frac{z_1^2}{L^2}\right) = L\left(1 + \frac{z_1^2}{L^2}\right) = L + \frac{z_1^2}{L} \implies \frac{z_1^2}{L^2} = \frac{l_1}{L} - 1 \\ l_2 &= \frac{\pi}{\lambda} w_2^2 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2 \left(1 + \frac{z_2^2}{L^2}\right) = L\left(1 + \frac{z_2^2}{L^2}\right) = L + \frac{z_2^2}{L} \end{aligned}\right\}$$

$$l_2 - l_1 = \frac{z_2^2 - z_1^2}{L} = \frac{(z_2 - z_1)(z_1 + z_2)}{L} = D\frac{z_1 + z_2}{L} = D\frac{2z_1 + D}{L}$$

en utilisant $z_2 = z_1 + D$. On en déduit une autre valeur de $\frac{z_1}{L}$. On élimine z_1 en écrivant l'égalité de ces deux valeurs de $\frac{z_1}{L}$; et il reste une équation en L :

$$\left(\frac{z_1}{L}\right)^2 = \frac{l_1}{L} - 1 = \left(\frac{l_2 - l_1}{2D} - \frac{D}{2L}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(l_2 - l_1)^2}{D^2} - \frac{2(l_2 - l_1)}{L} + \frac{D^2}{L^2}\right]$$

En faisant passer le premier membre dans le second membre, les termes en $\frac{1}{L}$ se simplifient :

$$\frac{D^2}{L^2} - \frac{2(l_2 + l_1)}{L} + \frac{(l_2 - l_1)^2}{D^2} + 4 = 0$$

soit, en choisissant la variable $x = \frac{D}{L}$, l'équation du second degré :

$$x^2 - \frac{2(l_2 + l_1)}{D} x + \frac{(l_2 - l_1)^2}{D^2} + 4 = 0$$

Solutions :
$$x = \frac{D}{L} = \frac{l_1 + l_2}{D} \pm 2\sqrt{\frac{l_1 l_2}{D^2} - 1} \qquad (15\text{-}44)$$

Le problème n'a de solution que si la distance D n'est pas trop grande : $D < \sqrt{l_1 l_2}$. Si cette condition est vérifiée, on obtient deux solutions : l'une dont le waist est entre les deux plans P et Q imposés, l'autre dont le waist est à l'extérieur de l'intervalle PQ, du côté du plus petit des deux rayons w_1 et w_2. Ayant trouvé la longueur de Rayleigh L, on en déduit le rayon minimum w_0 et les deux distances z_1 et z_2 qui permettent de positionner le waist, connaissant leur différence D et leur somme $z_1 + z_2 = (l_2 - l_1)\frac{L}{D} = \frac{l_2 - l_1}{x}$.

Remarque 15.3 – Nous résoudrons au chapitre suivant (§16.1) un autre problème : détermination d'un faisceau gaussien dont les rayons de courbure R_1 et R_2 sont imposés dans deux plans d'onde séparés par la distance D.

15.7 Transformation de l'onde gaussienne par une lentille

La propagation de l'onde gaussienne étant déterminée par les équations de la diffraction, nous ne pouvons pas utiliser les formules des lentilles obtenues en optique géométrique et nous devons reprendre le problème à son fondement. Nous allons dans un premier temps considérer la lentille mince comme un transformateur de rayon de courbure d'une onde, et ensuite nous l'appliquerons à l'onde gaussienne.

15.7.1 Action d'une lentille sur le rayon de courbure de l'onde

Nous considérons d'abord une lentille mince plan convexe d'axe Oz (Fig. 15.9). L'axe Oz coupe le dioptre plan en P et le dioptre sphérique en son sommet S ; nous appelons $e_0 = PS$ l'épaisseur maximum de la lentille et $e(\rho)$ son épaisseur à la distance ρ de l'axe. Cette épaisseur peut être calculée connaissant le rayon a du dioptre sphérique de centre C. Un point M de la sphère à la distance ρ de l'axe se projette sur l'axe en H.

L'approximation paraxiale ($\rho \ll a$) nous permet d'écrire :

$$CH = \sqrt{a^2 - \rho^2} \simeq a\left(1 - \frac{\rho^2}{2a^2}\right) \Longrightarrow HS = a - CH \simeq \frac{\rho^2}{2a}$$

On en déduit l'épaisseur :

$$e(\rho) = PH = e_0 - HS \simeq e_0 - \frac{\rho^2}{2a} = e_0 - \frac{x^2 + y^2}{2a} \tag{15-45}$$

L'onde à la distance ρ traverse une épaisseur de verre $e(\rho)$ d'indice de réfraction n_r et subit donc un allongement du chemin optique de $(n_r - 1)e(\rho)$, c'est-à-dire un déphasage de $k(n_r - 1)e(\rho)$. Le champ d'**une onde plane incidente avant la traversée de la lentille** s'écrit :

$$E_{\text{inc}}(x, y, z, t) = \mathcal{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}$$

Après traversée de la lentille, nous calculons l'onde transmise :

$$\begin{aligned} E_{\text{trans}}(x, y, z, t) &= \mathcal{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{ik(n_r - 1)e(\rho)} \\ &= \mathcal{E}_0 \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{ik(n_r - 1)e_0}\, \mathbf{e}^{-ik(n_r - 1)\frac{x^2 + y^2}{2a}} \end{aligned}$$

L'exponentielle en $(n_r - 1)e_0$ représente un retard de phase identique dans tout le plan d'onde et qui n'a donc aucune conséquence importante ; tandis que le dernier terme en $(x^2 + y^2)$ représente une avancée de phase qui croît avec la distance ρ de l'axe. Par comparaison avec la formule de l'onde sphérique paraxiale (15-5), nous en déduisons que l'onde transmise a un rayon

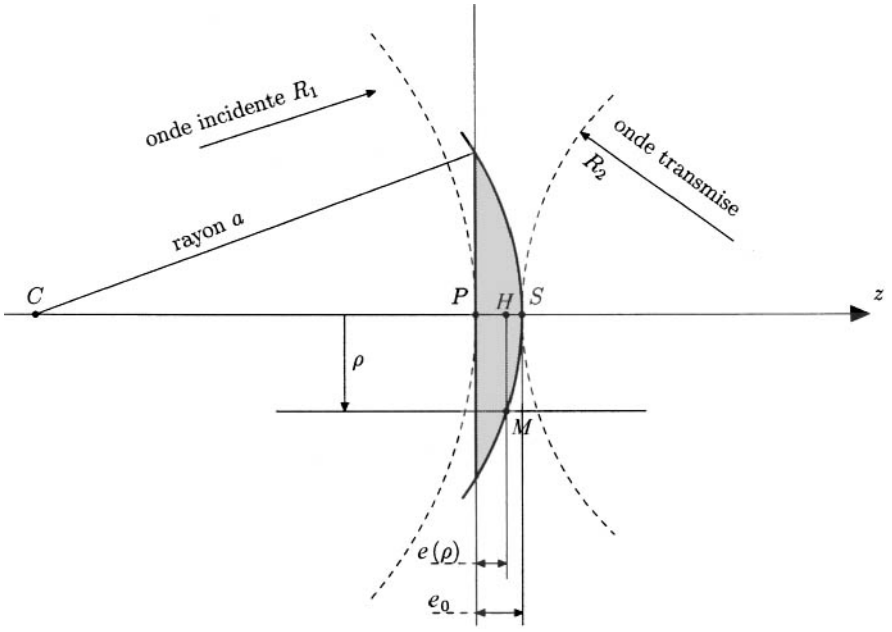


FIG. 15.9 – *Transformation d'une onde sphérique par une lentille mince plan convexe. Avec les conventions de signe adoptées,* $R_1 > 0$ *(onde divergente) mais* $R_2 < 0$ *(onde convergente).*

de courbure $R_{\text{trans}} = -a/(n_r - 1)$; ce rayon négatif, avec la convention de signe adoptée depuis le début de ce chapitre, signifie que l'onde sphérique est convergente.

Dans le cadre de l'optique géométrique elle viendrait se focaliser au foyer F à la distance focale

$$SF = f = |R_{\text{trans}}| = \frac{a}{n_r - 1}$$

nous retrouvons ainsi la formule reliant la distance focale au rayon du dioptre et à l'indice de réfraction.

Si nous avons à faire avec une lentille biconvexe, nous pouvons la considérer comme formée de deux lentilles plan-convexes accolées : celle que nous venons de calculer d'un côté, et une autre dont le dioptre sphérique a le rayon b. À l'avance de chemin optique calculée ci-dessus $(n_r - 1)\dfrac{\rho^2}{2a}$, nous devons ajouter l'avance $(n_r - 1)\dfrac{\rho^2}{2b}$ de l'autre lentille plan convexe. L'avance totale vaut $\left(\dfrac{(n_r - 1)}{a} + \dfrac{(n_r - 1)}{b}\right)\dfrac{\rho^2}{2}$, de même que la distance focale totale est obtenue

en additionnant les inverses des distances focales individuelles :

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_r - 1)}{a} + \frac{(n_r - 1)}{b} \tag{15-46}$$

En définitive l'onde transmise, immédiatement après la lentille, peut s'écrire (à un déphasage constant près que nous pouvons négliger) :

$$E_{\text{trans}} = E_{\text{inc}}\, \mathbf{e}^{-ik\dfrac{x^2+y^2}{2f}} \tag{15-47}$$

Cette formule est algébrique (avec la convention du champ en $\mathbf{e}^{-i\omega t}$) et elle représente une avance de phase pour les lentilles convergentes de distance focale f positive, mais au contraire un retard de phase pour les lentilles divergentes de distance focale f négative.

Si l'onde incidente a un rayon de courbure algébrique R_1, elle s'écrit

$$E_{\text{inc}} = \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{ik\dfrac{x^2+y^2}{2R_1}}$$

donc

$$E_{\text{trans}} = \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)} = \mathbf{e}^{-i\omega t}\, \mathbf{e}^{ikz}\, \mathbf{e}^{ik\dfrac{x^2+y^2}{2R_2}}$$

avec le rayon de courbure R_2 de l'onde transmise :

$$\boxed{\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}} \qquad \text{(formule algébrique)} \tag{15-48}$$

Nous avons simplement retrouvé la formule de conjugaison des lentilles minces dans l'approximation de Gauss de l'optique géométrique, les points conjugués étant les centres des surfaces d'onde sphériques arrivant sur la lentille ou bien en repartant.

15.7.2 Application au cas d'une onde gaussienne

Nous supposons connues les caractéristiques du faisceau gaussien incident : « waist » w_{01}, longueur de Rayleigh $L_1 = \pi\dfrac{w_{01}^2}{\lambda}$, et distance z_1 entre le waist et la lentille (*cf.* Fig. 15.10). Ceci permet de calculer le rayon gaussien w_1 et le rayon de courbure R_1 dans le plan de la lentille grâce à (15-33). Nous en déduirons alors le rayon R_2 de l'onde émergente grâce à ((15-48)) :

$$R_1 = z_1 + \frac{{L_1}^2}{z_1} = \frac{z_1^2 + {L_1}^2}{z_1}$$

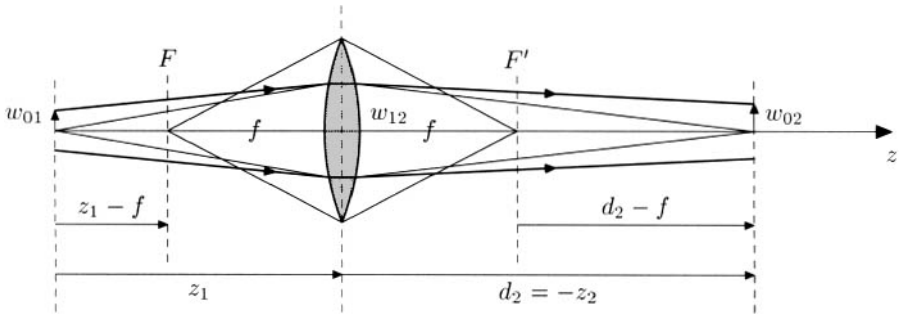


FIG. 15.10 – *Représentation du faisceau gaussien transformé par une lentille.*

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} = \frac{z_1}{z_1^2 + {L_1}^2} - \frac{1}{f} = -\frac{z_1(z_1 - f) + L_1^2}{f(z_1^2 + L_1^2)} \tag{15-49}$$

Dans la pratique on utilise le plus souvent des lentilles convergentes (f positif) et R_2 est le plus souvent négatif, conduisant à une distance z_2 négative ; pour éviter trop de signes moins, nous utiliserons $d_2 = -z_2$ (*cf.* Fig. 15.10).

Le rayon gaussien dans le plan de la lentille mince est conservé entre le faisceau incident et le faisceau transmis : $w_1 = w_2 = w_{12}$.

Nous sommes alors ramenés au premier problème du paragraphe précédent.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} w_{12}^2 &= \frac{\pi}{\lambda} w_{01}^2 \left(1 + \frac{z_1^2}{L_1^2}\right) = L_1 \left(1 + \frac{z_1^2}{L_1^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{\lambda} w_{02}^2 \left(1 + \frac{\mathrm{d}_2^2}{L_2^2}\right) = L_2 \left(1 + \frac{\mathrm{d}_2^2}{L_2^2}\right) = d_2 \left(\frac{L_2}{d_2} + \frac{d_2}{L_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15-50}$$

$$-R_2 = d_2 + \frac{L_2^2}{d_2} = L_2 \left(\frac{L_2}{d_2} + \frac{d_2}{L_2}\right) \tag{15-51}$$

On retrouve les deux parenthèses identiques dans les deux expressions à droite ; elles disparaissent si l'on fait le rapport des deux formules ci-dessus :

$$\frac{d_2}{L_2} = \left(\frac{\pi w_{12}^2}{\lambda}\right) \frac{1}{-R_2} = \frac{z_1^2 + L_1^2}{L_1} \times \frac{1}{-R_2} = \frac{z_1(z_1 - f) + L_1^2}{f L_1} \tag{15-52}$$

Le rapport $\dfrac{d_2}{L_2}$ est donc déterminé en fonction de paramètres connus de l'onde incidente 1 ; en reportant cette expression dans l'équation (15-50) on trouve :

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1 + \dfrac{d_2^2}{L_2^2}}{1 + \dfrac{z_1^2}{L_1^2}} = \frac{L_1^2}{z_1^2 + L_1^2} \left[1 + \left(\frac{d_2}{L_2}\right)^2\right] = \frac{f^2 L_1^2 + \left[z_1(z_1 - f) + L_1^2\right]^2}{(z_1^2 + L_1^2) f^2}$$

Le numérateur de cette expression paraît compliqué, mais il s'arrange en faisant apparaître $(z_1^2+L_1^2)$ en facteur : $(z_1^2+L_1^2)\left[(z_1-f)^2+L_1^2\right]$. On obtient finalement :

$$\left(\frac{w_{02}}{w_{01}}\right)^2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{f^2}{(z_1-f)^2+L_1^2} = \frac{1}{\zeta_1^2+p^2} \text{ avec } \begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{z_1}{f} - 1 \\ p = \dfrac{L_1}{f} \end{cases} \tag{15-53}$$

en distinguant le paramètre sans dimension p qui est généralement imposé à l'expérimentation et la variable sans dimension ζ_1 dont il est plus facile de disposer. Sur la figure 15.11a on a représenté les variations du rapport $\dfrac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{L_2/L_1}$ en fonction de la variable ζ_1 pour diverses valeurs du paramètre p. Ce sont des courbes en cloche qui passent par un maximum de hauteur $1/p$ quand $\zeta_1 = 0$. La courbe redescend à la valeur maximum divisée par $\sqrt{2}$ pour $\zeta_1 = \pm p$ et la valeur moitié du maximum pour $\zeta_1 = \pm p\sqrt{3}$. Les courbes sont très plates si $p > 1$, mais au contraire très pointues quand $p \ll 1$.

Il nous reste à chercher la position du waist du faisceau émergent ; ce que nous obtenons en reportant (15-53) dans (15-52) :

$$d_2 = \frac{L_2}{L_1}\frac{z_1(z_1-f)+L_1^2}{f} = f\frac{z_1(z_1-f)+L_1^2}{(z_1-f)^2+L_1^2}$$

$$d_2 - f = f^2\frac{z_1-f}{(z_1-f)^2+L_1^2} = f\frac{\zeta_1}{\zeta_1^2+p^2} \tag{15-54}$$

On a représenté sur la figure 15.11b les variations de la distance $d_2 - f$ (rapportée à f) en fonction de la variable ζ_1, pour les mêmes valeurs du paramètre p. Ces courbes, symétriques autour de l'origine, présentent un maximum et un minimum (de hauteur $\pm\dfrac{f}{2p}$) pour les valeurs opposées $\zeta_1 = \pm p$. Là encore les courbes restent très plates si $p > 1$, mais sont au contraire très accidentées si $p \ll 1$. La courbe limite pour $p = 0$ est une hyperbole.

Ces courbes et ces formules doivent être utilisées dans les expériences où il faut adapter le faisceau gaussien issu d'un laser à la géométrie du dispositif expérimental où il est envoyé. On pourra retenir les idées générales suivantes :

- si $f \gg L_1$ ($p \ll 1$), les positions des deux waists w_{01} et w_{02} sont reliées approximativement comme l'objet et son image en optique géométrique.
- si $f \gtrsim L_1$ ($p \gtrsim 1$), l'onde incidente peut être considérée en première approximation comme peu différente d'une onde plane ; et elle est focalisée au foyer de la lentille ($d_2 \simeq f$).

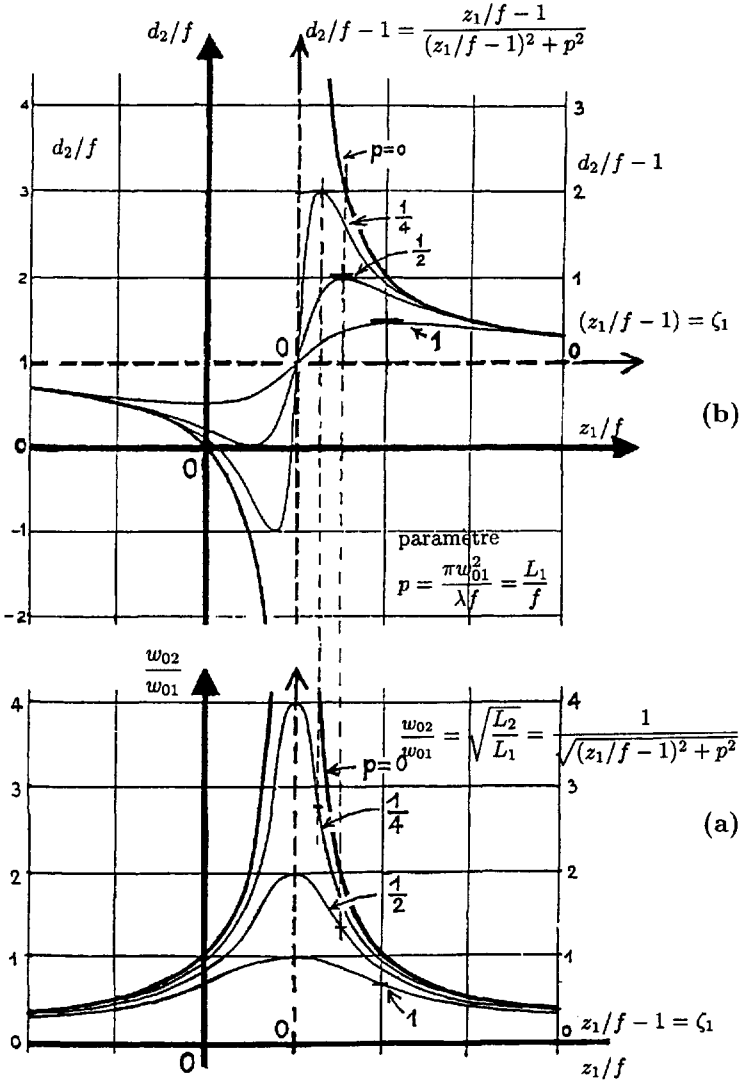


FIG. 15.11 – *Transformation d'un faisceau gaussien par une lentille de distance focale f. Chaque courbe est tracée pour une valeur fixée du paramètre $p = L_1/f$. (a) Variation de w_{02}/w_{01} en fonction de z_1/f ou de $\zeta_1 = (z_1/f) - 1$; (b) variation de d_2/f en fonction de z_1/f ou de $d_2/f - 1$ en fonction de ζ_1 (axes en tiretés épais).*

15.8 Aspect vectoriel de l'onde gaussienne

Dans tout ce chapitre, nous avons en fait effectué l'étude d'une seule composante cartésienne du champ électrique de l'onde gaussienne,

la composante E_x. Qu'en est-il des autres composantes du champ $\vec{E}$ et de celles du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associé ?

Partons de l'expression du module complexe $\mathcal{E}_x$ donnée en (15-25), que nous avons transcrite en un point $M(x,y,z)$ en (15-28) :

$$E_x(M) = \mathcal{E}_0 \frac{\gamma(z)}{\gamma_0} \mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)} \mathbf{e}^{i(kz-\omega t)}$$

Dans l'espace vide la divergence du champ électrique doit être nulle, soit en supposant $E_y = 0$:

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \text{ et } E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Dans l'approximation paraxiale : $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} \simeq ik\,E_z$; d'où :

$$E_z \simeq \frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{2\gamma(z)}{ik} x\,E_x$$

or, d'après (15-25) et (15-29) $\dfrac{ik}{2\gamma(z)} = \dfrac{ik\,w_0^2}{2} - z = iL - z$, soit :

$$E_z = -\frac{x}{z-iL} E_x. \tag{15-55}$$

Il existe donc, hors du plan yOz, une composante longitudinale non nulle du champ électrique ; mais elle reste faible car on a toujours *en pratique* $|x| \ll |z - iL|$.

On note encore en utilisant (15-33) :

$$\text{Re}\left(\frac{1}{z-iL}\right) = \frac{z}{z^2+L^2} = \frac{1}{R(z)}$$

on voit que la partie de E_z *en phase* avec E_x est donné par :

$$E_z^{ph} \simeq -\frac{x}{R(z)} E_x$$

Cette relation, écrite sous la forme : $x\,E_x + R(z)\,E_z^{ph} = 0$ montre que le vecteur $(E_x, 0, E_z^{ph})$ est orthogonal au rayon $\overrightarrow{CM}(x,y,R(z))$ de la surface d'onde, donc tangent à cette surface. La composante en quadrature avec E_x, dirigée selon Oz (en pratique selon le rayon CM) tend vers zéro comme $1/z^2$ lorsque $z \to \infty$; à grande distance l'onde électromagnétique gaussienne se comporte bien comme une onde EM sphérique avec le champ $\overrightarrow{E}$ perpendiculaire à la surface d'onde sphérique.

Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de l'onde s'obtient à partir de l'équation de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0$, qui conduit pour une onde monochromatique à :

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{i\omega}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}$$

Dans l'approximation paraxiale, on ne conserve que les termes principaux obtenus à partir des dérivées de E_x, soit :

$$\overrightarrow{B} \simeq \left(0, \frac{1}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z}, -\frac{1}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

soit en transposant avec la variable y le calcul de $\partial E_x/\partial x$ effectué plus haut :

$$\overrightarrow{B} \simeq \left(0, \frac{1}{c}E_x, -\frac{1}{c}\frac{y}{z-iL}E_x\right)$$

La composante la plus importante est selon Oy et en phase avec E_x ; la composante longitudinale B_z^{ph} en phase avec E_x s'y ajoute pour donner un champ magnétique rectiligne $(0, B_y, B_z^{ph})$ tangent à la surface d'onde locale, il reste une faible composante longitudinale en quadrature avec E_x qui tend vers zéro comme $1/z^2$ lorsque $z \to \infty$.

Enfin, la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde est donnée dans ce cadre d'approximation par :

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}^*)$$

les composantes de $\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}^*$ sont : $\frac{1}{c}\left(\frac{x}{z-iL}|E_x|^2, \frac{y}{z+iL}|E_x|^2, |E_x|^2\right)$ d'où en prenant leurs parties réelles :

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0 c}|E_x|^2\left(\frac{x}{R(z)}, \frac{y}{R(z)}, 1\right)$$

Ce vecteur est donc en tout point *orthogonal à la surface d'onde locale* (il est dirigé selon le rayon CM) ; on retrouve là une propriété générale de l'optique. Noter de plus que les parties longitudinales de $\vec{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en quadrature avec E_x ne contribuent pas au vecteur de Poynting moyen.

Remarque 15.4 – Dans tout ce chapitre, nous avons étudié une onde gaussienne « sphérique », à symétrie de révolution autour de Oz. On peut sans difficulté généraliser les calculs précédents à une onde gaussienne « elliptique » dont les surfaces d'onde sont des ellipsoïdes ; il suffit par exemple de prendre dans le plan du waist une amplitude en $\mathbf{e}^{-x^2/w_1^2}\,\mathbf{e}^{-y^2/w_2^2}$ avec deux « rayons » w_1 et w_2 différents selon Ox et Oy. Ce type d'onde est bien adapté à la description du faisceau émis par les diodes laser.

Bibliographie

[1] A.E. Siegman, An Introduction to Lasers and Masers (Mc Graw-Hill 1971).

Chapitre 16

Les modes d'une cavité linéaire

DANS LE CHAPITRE précédent, nous avons cherché les solutions de l'équation d'onde permettant de décrire l'onde lumineuse très directive issue d'un laser, et qui se propage en espace libre. Dans ce chapitre, nous entrons plus directement dans l'analyse du fonctionnement du laser en cherchant les solutions de l'équation d'onde à l'intérieur des cavités généralement utilisées dans les lasers. Dans ce type de problèmes, on fait généralement l'hypothèse que le milieu amplificateur n'apporte qu'une faible perturbation aux solutions de l'équation d'onde, soit parce qu'il s'agit d'un milieu dilué de faible indice (gaz), soit parce qu'il n'occupe qu'un très faible volume dans la cavité s'il s'agit d'un milieu condensé (liquide ou solide). Les solutions réelles dans les cas concrets peuvent ainsi être obtenues en appliquant de faibles corrections aux solutions étudiées dans les cavités vides auxquelles nous appliquons nos calculs dans ce chapitre.

Nous nous limiterons, pour l'essentiel, aux cavités linéaires c'est-à-dire aux cavités formées par deux miroirs, plans ou sphériques, disposés sur un axe de révolution commun (systèmes centrés) en sorte que les propagations paraxiales Aller et Retour se font le long de cet axe commun (*cf.* Fig. 16.1).

16.1 Le faisceau gaussien en cavité linéaire (modes gaussiens fondamentaux)

Nous étudierons dans la suite de ce chapitre des solutions plus générales ; mais dans ce premier paragraphe, nous nous limitons à des solutions particulièrement simples qui se montrent en pratique suffisantes dans un grand nombre d'expériences.

Le point de départ de cette analyse simplifiée repose sur le fait que les cavités linéaires utilisées en optique ne sont pas entièrement fermées,

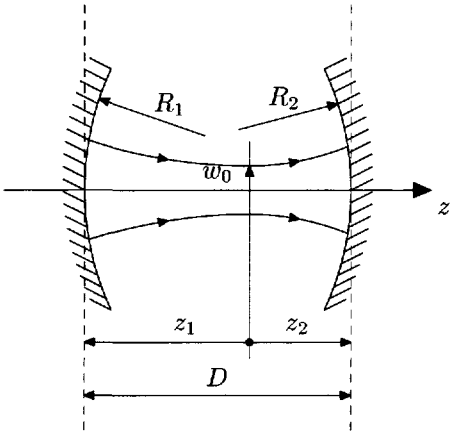


FIG. 16.1 – *Faisceau gaussien dans une cavité Pérot-Fabry linéaire. (Attention ! la convention de signe pour les rayons des miroirs sphériques (concave ou convexe) est différente de la convention adoptée pour les signes des rayons de courbure des fronts d'onde (divergent ou convergent).)*

contrairement aux cavités métalliques utilisées dans le domaine des hyperfréquences : sur la figure 16.1, nous voyons les deux miroirs qui ferment la cavité aux deux extrémités de l'axe optique ; mais entre les deux miroirs la cavité est ouverte et donc les solutions possibles de l'équation d'onde sont des solutions dont l'amplitude est autolimitée lorsqu'on s'écarte de l'axe. Nous connaissons de telles solutions, ce sont les solutions gaussiennes étudiées au chapitre précédent. Nous cherchons donc simplement à adapter ces solutions générales gaussiennes aux conditions aux limites imposées par les miroirs pour trouver les modes gaussiens possibles de la cavité.

Considérons par exemple un faisceau gaussien existant ; nous avons calculé grâce aux formules du chapitre précédent le rayon de courbure $R(z_1)$ de l'onde dans le plan z_1 et le rayon de courbure $R(z_2)$ dans le plan z_2 ; métallisons une sphère de rayon $R(z_1)$ qui coupe l'axe en z_1 et une sphère de rayon $R(z_2)$ qui coupe l'axe en z_2. L'onde arrive sur chacun de ces miroirs avec une incidence normale et elle est donc renvoyée sur elle-même par chacun des miroirs. Notre onde gaussienne fonctionnant dans le sens Aller puis dans le sens Retour constitue donc une solution possible.

Dans la réalité, les miroirs nous imposent les valeurs R_1 et R_2 des rayons de courbure dans les deux plans z_1 et z_2 séparés par la distance D ; et nous devons rechercher s'il existe un faisceau gaussien répondant à ces conditions : nous connaissons la différence D des deux coordonnées z_1 et z_2, mais leur

somme S est une inconnue :

$$\left.\begin{array}{c} D = z_2 - z_1 \quad \text{et} \quad S = z_1 + z_2 \\ \text{soit} \quad z_2 = \dfrac{S+D}{2} \quad \text{et} \quad z_1 = \dfrac{S-D}{2} \end{array}\right\} \tag{16-1}$$

Nous devons écrire deux fois la relation $R(z)$ (15-33) entre rayon de courbure R et position z sur l'axe dans le faisceau gaussien, aux deux extrémités de la cavité. Une petite difficulté apparaît du fait des conventions de signe différentes adoptées d'une part pour les rayons des miroirs ($R > 0$ pour les miroirs concaves, plus fréquemment utilisés, et $R < 0$ pour les miroirs convexes) et d'autre part, pour les rayons de courbure des ondes gaussiennes ($R > 0$ pour une onde divergente et $R < 0$ pour une onde convergente). Nous raisonnons sur un faisceau gaussien se propageant dans le sens de l'axe Oz et l'on voit sur la figure 16.1 que ces conventions conduisent à des signes identiques pour le miroir n°2 situé à droite, mais à des signes opposés pour le miroir n°1 situé à gauche soit :

$$\left.\begin{array}{c} -R_1 = R(z_1) = z_1 + \dfrac{L^2}{z_1} \\ R_2 = R(z_2) = z_2 + \dfrac{L^2}{z_2} \end{array}\right\} \tag{16-2}$$

On fait la somme et la différence des deux équations ci-dessus :

$$\left.\begin{array}{l} R_2 - R_1 = R(z_2) + R(z_1) = z_2 + z_1 + L^2\left(\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_1}\right) \\ \qquad = (z_2 + z_1)\left(1 + \dfrac{L^2}{z_1 z_2}\right) = S\left(1 + \dfrac{L^2}{z_1 z_2}\right) \\ R_2 + R_1 = R(z_2) - R(z_1) = z_2 - z_1 + L^2\left(\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_1}\right) \\ \qquad = (z_2 - z_1)\left(1 - \dfrac{L^2}{z_1 z_2}\right) = D\left(1 - \dfrac{L^2}{z_1 z_2}\right) \end{array}\right\} \tag{16-3}$$

la deuxième équation permet de calculer

$$\frac{L^2}{z_1 z_2} = 1 - \frac{R_1 + R_2}{D} \tag{16-4}$$

en reportant cette valeur dans la première équation (16-3) on trouve la somme S :

$$S = \frac{R_2 - R_1}{2 - \dfrac{R_1 + R_2}{D}} = \frac{D(R_2 - R_1)}{2D - (R_1 + R_2)} = \frac{D(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2 - 2D}$$

Les formules (16-1) permettent d'en déduire séparément les deux coordonnées :

$$z_2 = \frac{S+D}{2} = \frac{D(R_1-D)}{R_1+R_2-2D} \text{ et } z_1 = \frac{S-D}{2} = \frac{-D(R_2-D)}{R_1+R_2-2D} \quad (16\text{-}5)$$

16.1.1 Discussion de la validité de ces calculs de modes

Attention ! ces formules n'ont de signification physique que si la quantité L^2, éliminée dans le calcul, est positive. Nous devons donc terminer le calcul de la longueur de Rayleigh L grâce à (16-4) :

$$\boxed{L^2 = z_1 z_2 \left(1 - \frac{R_1+R_2}{D}\right) = \frac{D(R_2-D)(R_1-D)(R_1+R_2-D)}{(R_1+R_2-2D)^2}} \quad (16\text{-}6)$$

Il faut discuter, au numérateur de L^2, le signe du produit des trois parenthèses, que nous avons choisi d'écrire toutes les trois sous la même forme (rayons $-D$) pour faciliter la mémorisation. Mais il ne faut pas oublier que si la distance D est positive avec nos hypothèses, les rayons R_1 et R_2 sont algébriques avec la convention des miroirs (concaves ou convexes). Pour que L soit positif, il faut que les trois parenthèses soient positives ou bien qu'une seule soit positive et les deux autres négatives ; ce qui fait distinguer quatre cas de figure distincts selon le tableau 16.1.1.

La figure 16.2 donne une représentation graphique dans le plan R_1R_2 des valeurs des paramètres R_1/D et R_2/D qui permettent de trouver des solutions gaussiennes (zones claires a, b, c, d) et de celles qui ne permettent pas de les

TAB. 16.1 - *Quatre cas de figure.*

Cas	Signe des parenthèses			Conditions sur les rayons	
	(R_1-D)	(R_2-D)	(R_1+R_2-D)		
a	+	+	+ (automatique)	$R_1 > D$	$R_2 > D$
b	−	−	+ impose R_1 et R_2 positifs	$0 < R_1 < D$	$0 < R_2 < D$
c	−	+	−impose $R_1 < 0$	$R_1 < 0$ (convexe)	$R_2 > D$
d	+	−	−impose $R_2 < 0$	$R_1 > D$	$R_2 < 0$ (convexe)

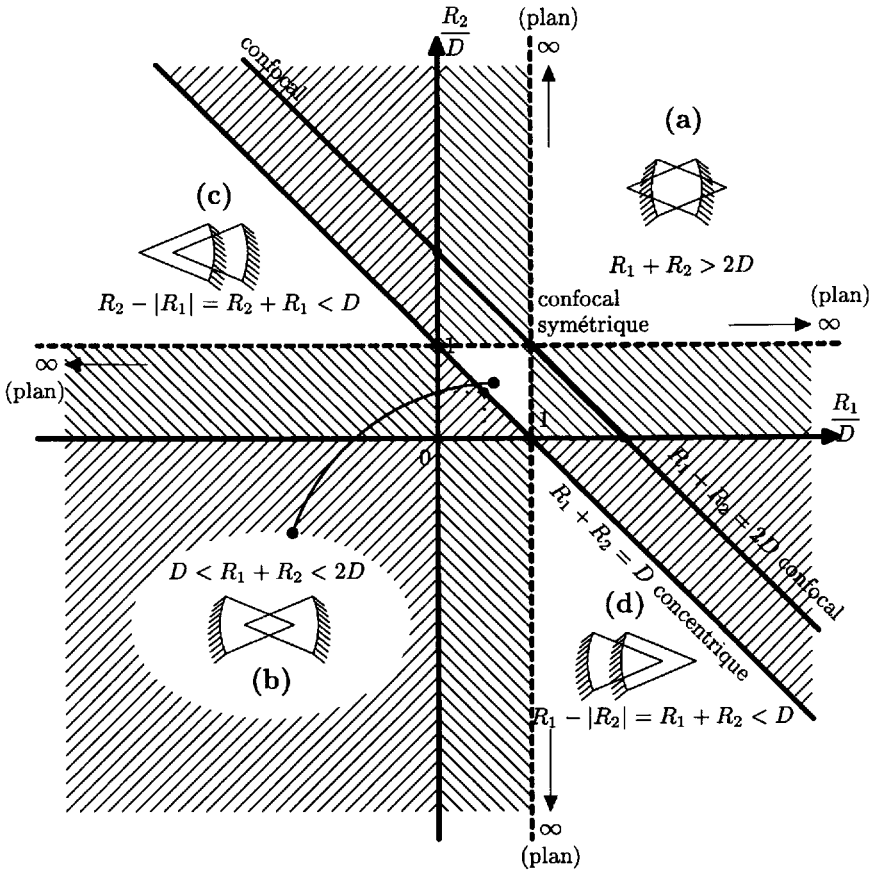


FIG. 16.2 – *Discussion dans le plan $R_1 \times R_2$ de la possibilité d'une solution gaussienne à l'intérieur d'une cavité linéaire (R positif pour un miroir concave ; R négatif pour un miroir convexe). Les quatre zones (a) (b) (c) (d) sont discutées dans le tableau 16.1.*

obtenir : zones hachurées, interdites. Pour chacune de ces zones permises, un dessin représente la concavité ou convexité des miroirs et les positions relatives des centres des miroirs.

Dans la pratique expérimentale, il est important aussi de connaître le rayon gaussien de l'onde pour vérifier qu'elle n'est pas écrantée par les diaphragmes inévitables qui limitent les dimensions transversales de la cavité (rayons des miroirs en particulier). Le rayon minimum w_0 (waist) du faisceau est calculé en même temps que la longueur de Rayleigh puisque $w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} L$. Il est intéressant de noter l'interdiction de la configuration confocale, où les foyers

des deux miroirs coïncident, ce qui correspond à la condition $R_1 + R_2 = 2D$; en effet dans ce cas la longueur de Rayleigh L ainsi que le rayon w_0, deviennent infinis. Cependant, cette interdiction est levée pour la configuration *confocale symétrique* ($R_1 = R_2 = D$) parce que l'annulation du carré du dénominateur est compensée par l'annulation de deux parenthèses au numérateur de L^2 ; et en levant la forme indéterminée $0/0$, il vient $L = D/2$, donc $w_0^2 = \lambda D/2\pi$.

On doit aussi calculer les rayons gaussiens aux extrémités de la cavité sur les miroirs, en utilisant la formule (15-31) du faisceau gaussien, par exemple sur le miroir n°2 :

$$w_2^2 = w(z_2)^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{z_2^2}{L^2}\right) = w_0^2 \left[1 + \frac{D(R_1 - D)}{(R_2 - D)(R_1 + R_2 - D)}\right]$$

$$\text{soit} \quad w_2^2 = w_0^2 \frac{R_2(R_1 + R_2 - 2D)}{(R_2 - D)(R_1 + R_2 - D)} \tag{16-7}$$

ou encore en remplaçant w_0^2 par son expression en fonction des rayons :

$$\boxed{w_2^2 = \frac{\lambda}{\pi} R_2 \sqrt{\frac{D(R_1 - D)}{(R_2 - D)(R_1 + R_2 - D)}}} \tag{16-8}$$

On note que le terme sous la racine carrée est bien positif dans les mêmes conditions a,b,c,d, trouvées plus haut pour le calcul de L^2. On obtiendrait bien sûr une expression équivalente pour le rayon w_1 sur le miroir n°1, en permutant simplement les indices 1 et 2. On note alors que les droites qui limitent les zones permises a,b,c,d, que ce soient la droite verticale $R_1 = D$, la droite horizontale $R_2 = D$, ou la droite à 45° $R_1 + R_2 = D$ (configuration concentrique des miroirs) correspondent aux cas où le rayon gaussien devient infini sur l'un ou l'autre des deux miroirs ou sur les deux miroirs à la fois. (Dans le cas de la configuration *confocale symétrique*, envisagée plus haut, il faut encore lever une forme indéterminée $0/0$ et l'on trouve $w_2^2 = \lambda D/\pi = 2w_0^2$, soit $w_2 = w_0\sqrt{2}$; c'est bien en accord avec le fait que les 2 miroirs sont placés aux limites de la zone de Rayleigh).

On peut ainsi donner une interprétation physique à la figure 16.2 : pour les valeurs des paramètres tombant dans les zones interdites (hachurées) il est impossible de limiter l'extension transversale du faisceau lumineux. Nous obtenons cette propriété des cavités linéaires en utilisant les formules du faisceau gaussien, c'est-à-dire les méthodes de calcul de Kirchhoff, adaptées aux problèmes de diffraction. Mais cette propriété n'est pas liée à cette méthode de calcul. Lorsqu'on étudie les cavités linéaires, dans le cadre de l'optique géométrique, par la méthode des matrices de transfert, on retrouve la même propriété : on calcule la façon dont un rayon lumineux paraxial se propage au cours d'allers et retours dans la cavité et on recherche la possibilité

pour ce rayon de rester à une distance transversale finie ; on retrouve ainsi exactement les conditions a,b,c,d, trouvées précédemment (*cf.* réf. [1] et [2]). On appelle cavités stables les cavités répondant aux critères a,b,c ou d, dans lesquelles il est possible de trouver des solutions des équations d'onde limitées transversalement. Par opposition, toutes les cavités correspondant aux zones hachurées de la figure 16.2 sont appelées cavités instables : n'importe quelle onde paraxiale envoyée dans une telle cavité instable finit par s'évader transversalement après quelques allers et retours.

Pour la construction d'un laser oscillateur, on utilise généralement des cavités stables qui seules possèdent des coefficients de qualité Q importants (*cf.* §9.2). Mais avec certains milieux amplificateurs, dont le gain en un passage est déjà très supérieur à l'unité, il arrive que l'on utilise des cavités instables, permettant d'extraire toute l'énergie disponible dans un milieu amplificateur pompé sur un grand diamètre.

Le choix d'une cavité stable dans les zones permises de la figure 16.2 dépendra généralement de la variation, suivant l'axe, du diamètre utile du faisceau lumineux. Par exemple, une configuration voisine du cas concentrique permet d'obtenir au point central un diamètre de faisceau extrêmement petit, nécessaire pour extraire l'énergie lumineuse d'un milieu condensé (solide ou liquide) dont l'inversion de population est obtenue grâce au pompage très intense d'un faisceau lumineux extérieur étroitement focalisé (issu d'un autre laser). Inversement, les lasers à gaz, où le volume du milieu amplificateur est nécessairement allongé, utiliseront davantage des configurations proches du cas confocal symétrique qui permet la variation minimale du diamètre du faisceau dans la cavité (dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$).

Remarque 16.1 – Pour la comparaison avec les calculs classiques par matrices de transfert (*cf.* réf. [1] et [2]), on prendra garde que ces calculs sont généralement effectués en utilisant comme paramètres non pas les rayons des miroirs mais leurs inverses, conformément aux habitudes des opticiens en optique géométrique courante (la puissance d'une lentille, mesurée en dioptries, est l'inverse de sa distance focale ; et cet inverse est calculé à partir des inverses des rayons ; *cf.* (15-46) au chapitre précédent). Pour établir la correspondance entre la figure 16.2 et les figures habituellement représentées dans le plan D/R_1, D/R_2, il faut faire une transposition dans laquelle les deux droites verticale et horizontale ($D/R_1 = 1, D/R_2 = 1$) sont conservées mais où la droite à 45° des configurations concentriques, est transformée en les deux ailes d'une hyperbole. La zone a devient le carré de côté unité proche de l'origine et la zone triangulaire b se retrouve plus éloignée avec 2 sommets à l'infini (*cf.* Fig. 16.2bis).

Dans ce genre de calcul, on préfère souvent utiliser les paramètres $g_1 = 1 - D/R_1$ et $g_2 = 1 - D/R_2$. On vérifie facilement que la discussion du tableau 16.1 pour trouver les zones permises a,b,c,d s'exprime alors sous la forme très simple $0 < g_1 g_2 < 1$; la condition limite $g_1 g_2 = 1$ correspond à $R_1 + R_2 = D$ c'est-à-dire au cas concentrique. La figure 16.2bis peut être facilement interprétée avec les paramètres g_1, g_2 en remplaçant les axes initiaux (D/R_1 et D/R_2) par les axes parallèles et inversés représentés en tireté épais. Il suffit de tourner la figure 16.2bis de 180° dans son plan pour retrouver les axes g_1 g_2 habituels à d'autres auteurs.

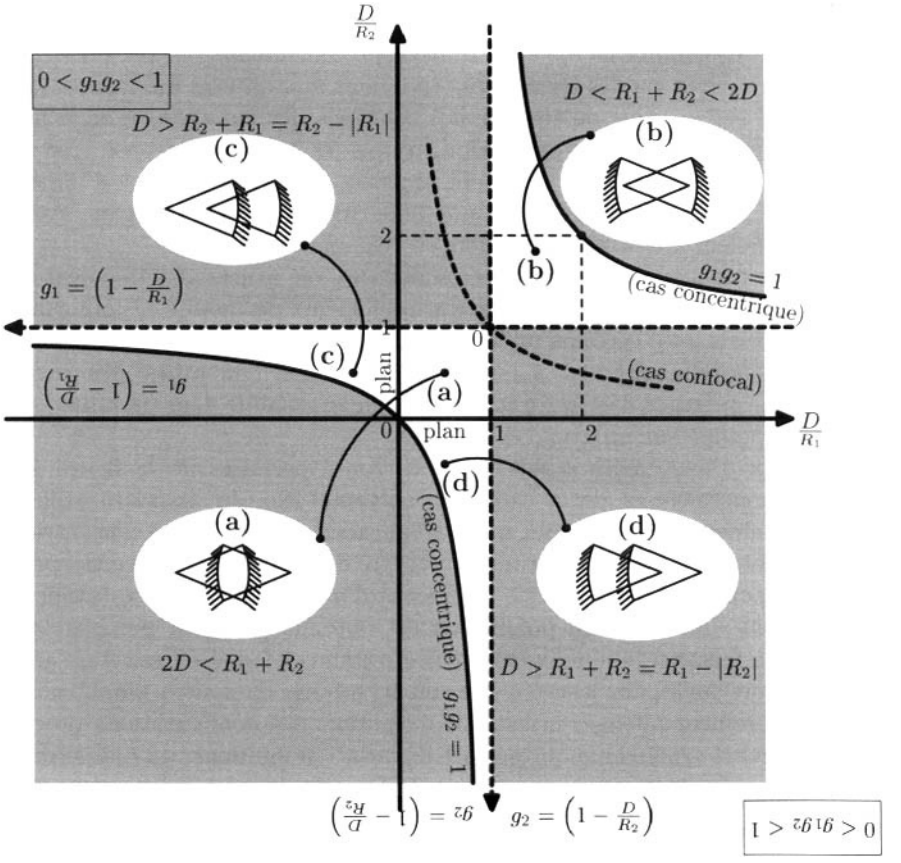


FIG. 16.2bis – *Reprise de la discussion de la figure 16.2 avec des coordonnées inversées.*

Il est facile de transposer les formules (16-5) donnant la position du waist, en fonction des paramètres g_1 et g_2 en les divisant haut et bas par le produit $R_1 R_2$

$$z_2 = D\frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2} \qquad z_1 = -D\frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2} \tag{16-9}$$

De la même manière, on transpose la formule de la longueur de Rayleigh (16-6) en la divisant haut et bas par le produit $R_1 R_2$ au carré :

$$L^2 = D^2\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} \tag{16-10}$$

On trouve de même le rayon du faisceau sur le miroir de sortie à partir de (16-8) :

$$w_2^2 = \frac{\lambda}{\pi}D\sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}} \tag{16-11}$$

16.1.2 Condition de résonance de la cavité

Dans tout ce paragraphe la longueur d'onde λ de l'onde n'est intervenue que pour calculer la valeur exacte des rayons gaussiens w_0,w_1 et w_2 ; elle n'est pas intervenue jusqu'ici dans la discussion proprement dite des solutions possibles (Fig. 16.2). Mais la discussion n'est pas finie : sans doute avons-nous trouvé les modes gaussiens qui peuvent se réfléchir successivement sur plusieurs allers et retours sans déformation ; mais l'obtention d'une onde de forte intensité exige que les interférences de ces tours successifs soient constructives (*cf.* les rappels sur les cavités Pérot-Fabry au chapitre 9) c'est-à-dire que le déphasage de l'onde soit un multiple de 2π après un tour de cavité, ou bien de π après un aller simple. Exploitant la formule (15-36) de l'onde gaussienne, nous savons écrire ce déphasage sur l'axe ($x = y = 0$) entre le premier miroir placé en z_1 et le second placé en z_2 :

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi_{\text{Aller}} = k(z_2 - z_1) - \psi(z_2) + \psi(z_1) \\ = \frac{2\pi}{\lambda} D - (\psi_2 - \psi_1) = N\pi \quad (N \text{ entier}) \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}12)$$

soit

$$D = \left(N + \frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi}\right)\frac{\lambda}{2}$$

et en utilisant la formule (15-35) $\tan(\psi_i) = z_i/L$:

$$\tan(\psi_2 - \psi_1) = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2} = \frac{D/L}{1 + \dfrac{z_1 z_2}{L^2}} = \frac{D(R_1 + R_2 - D)}{L(R_1 + R_2 - 2D)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{D(R_1 + R_2 - D)}{(R_1 - D)(R_2 - D)}} \qquad \left(\text{en utilisant (16-6)}\right)$$

soit

$$\cos^2(\psi_2 - \psi_1) = \frac{1}{1 + \tan^2(\psi_2 - \psi_1)} = \frac{(R_1 - D)(R_2 - D)}{R_1 R_2} \qquad (16\text{-}13)$$

Nous discutons cette formule pour les configurations les plus courantes avec deux miroirs concaves (cas a ou b) : le terme correctif au nombre entier, dans la parenthèse, $(\psi_2 - \psi_1)/\pi$ est voisin de zéro dans le cas de miroirs presque plans (R_1 et R_2 très grands, cas a) et pour les configurations presque concentriques ($R_1 + R_2 \approx D$, cas b) ; il prend la valeur $\pm 1/2$ au voisinage de la configuration confocale symétrique ($R_1 = R_2 \approx D$; $+1/2$ du côté de la région (a) et $-1/2$ du côté de la région (b) des figures 16.2 et 16.2bis). Ces résultats nous permettront de décrire les résonances observées expérimentalement au §16.4.

16.2 Équation des ondes paraxiales (approximation de l'enveloppe lentement variable)

Les modes gaussiens fondamentaux calculés au premier paragraphe sont bien ceux que l'on observe le plus généralement dans les cavités ; et l'on peut s'en contenter dans une première approche pour comprendre le fonctionnement des lasers bien réglés. Mais on observe souvent aussi d'autres solutions plus complexes ; et ce sont elles que nous recherchons maintenant.

Pour cela nous cherchons des solutions plus générales d'une équation d'onde approchée qui prend en compte l'hypothèse paraxiale ; chaque composante du champ électrique de l'onde peut s'écrire sous la forme :

$$E(x,y,z,t) = \mathcal{F}(x,y,z)\mathbf{e}^{-i\omega t + ikz} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \qquad (16\text{-}14)$$

où la fonction $\mathcal{F}$, appelée enveloppe, est supposée avoir une variation faible en fonction de z, en tout cas une variation beaucoup moins rapide que celle de la fonction $\mathbf{e}^{ikz}$; ce que nous exprimerons mathématiquement par :

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right| \ll k^2|\mathcal{F}| \qquad (16\text{-}15)$$

On prendra garde à ne pas confondre l'enveloppe $\mathcal{F}$ avec la fonction spatiale, ou amplitude complexe du champ utilisée au chapitre précédent qui contient l'exponentielle $\mathbf{e}^{ikz}$: $f(x,y,z)$ ou $\mathcal{E}(x,y,z) = \mathcal{F}.\mathbf{e}^{ikz}$.

En pratique, cette hypothèse (16-15) sera utilisée pour négliger dans l'équation d'onde le terme du second ordre en $\partial^2\mathcal{F}/\partial z^2$.

L'équation d'onde la plus générale en espace libre, *cf.* (15-12 et 15-13) loin des sources rayonnantes s'écrit pour chaque composante du champ électrique (ici E_x) :

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Longrightarrow \Delta E + k^2 E = 0 \qquad (16\text{-}16)$$

on calcule

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + ik\mathcal{F}\right)\mathbf{e}^{ikz}\,\mathbf{e}^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - k^2\mathcal{F}\right)\mathbf{e}^{ikz}\,\mathbf{e}^{-i\omega t}$$

L'approximation de l'enveloppe lentement variable (16-15) nous autorise à négliger le terme du second ordre en $\partial^2\mathcal{F}/\partial z^2$ dans la parenthèse ci-dessus ; et compte tenu de l'élimination du terme en $k^2\mathcal{F}$, l'équation (16-16), dans

le cas des ondes *paraxiales*, devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0} \tag{16-17}$$

Nous allons tout d'abord montrer que cette équation aux dérivées partielles conduit exactement aux mêmes solutions que la méthode de Kirchoff dans le cadre de l'approximation paraxiale (*cf.* §15.4). La fonction $\mathcal{F}(x, y, z)$, devant être (pour des raisons énergétiques) de « carré sommable » en x et y, possède une transformée de Fourier spatiale $\widehat{\mathcal{F}}(u, v, z)$ définie par :

$$\widehat{\mathcal{F}}(u, v, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x, y, z) \mathbf{e}^{-i(ux + vy)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{16-18}$$

(les quantités u et v jouent par rapport à x et y le même rôle que la fréquence ω par rapport au temps).

On sait calculer les transformées de Fourier des dérivées de $\mathcal{F}$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \xrightarrow{\text{T.F.}} iu\widehat{\mathcal{F}}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} \xrightarrow{\text{T.F.}} -u^2\widehat{\mathcal{F}}$$

et les expressions semblables pour les dérivées par rapport à y.

L'équation (16-17) se traduit pour $\widehat{\mathcal{F}}$ par l'équation :

$$-(u^2 + v^2)\widehat{\mathcal{F}} + 2ik\frac{\partial \widehat{\mathcal{F}}}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\frac{1}{\widehat{\mathcal{F}}}\frac{\partial \widehat{\mathcal{F}}}{\partial z} = -i\frac{u^2 + v^2}{2k}$$

L'intégration par rapport à z est immédiate :

$$\widehat{\mathcal{F}}(u, v, z) = \widehat{\mathcal{F}}(u, v, 0)\mathbf{e}^{-i\frac{u^2 + v^2}{2k}z} \tag{16-19}$$

Nous revenons à $\mathcal{F}(x, y, z)$ en prenant la transformée de Fourier inverse (T.F.I.). L'exponentielle complexe n'étant pas de carré sommable, sa transformée de Fourier doit être prise au sens des distributions ; en utilisant :

$$\mathbf{e}^{-i\frac{u^2}{4\beta}} \xrightarrow{\text{T.F.I}} \sqrt{\frac{\beta}{\pi i}}\mathbf{e}^{i\beta x^2} \tag{16-20}$$

C'est la même correspondance qu'en (15-24) avec cette différence que nous avons remplacé le nombre complexe β à partie réelle négative par le nombre

imaginaire pur $\beta/i = -i\beta$; β ici est réel ; $\beta = k/2z$. Il vient alors :

$$\mathbf{e}^{-i\frac{u^2+v^2}{2k}z} \xrightarrow{\text{T.F.I.}} \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right)\mathbf{e}^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}$$

$$\widehat{\mathcal{F}}(u,v,0) \xrightarrow{\text{T.F.I.}} \mathcal{F}(x,y,0)$$

et la Transformée de Fourier Inverse du produit (16-19) donne un produit de convolution, soit :

$$\mathcal{F}(x,y,z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(x',y',0)\,\mathbf{e}^{i\frac{k}{2z}[(x'-x)^2+(y'-y)^2]}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \tag{16-21}$$

expression identique à (15-20). Cela montre l'équivalence totale des deux méthodes. En particulier l'onde gaussienne étudiée au chapitre précédent, et utilisée dans les cavités au paragraphe 16.1, est *solution exacte* de l'équation (16-17) ; mais c'est une solution très particulière, qui possède la symétrie de révolution autour de la direction de propagation centrale Oz et une extension latérale de forme très simple en x et y. Or l'équation (16-17) possède bien d'autres solutions et l'expérience montre que dans certains cas le faisceau laser présente une structure spatiale en x et y bien plus complexe qu'une simple gaussienne. Aussi nous allons, dans le paragraphe suivant, en rechercher des solutions plus générales.

Remarque 16.2 – L'exponentielle complexe au second membre de (16-21) avec le facteur $(-ik/2\pi z)$ n'est autre que la fonction de Green de l'opérateur différentiel de l'équation (16-17).

Il était intéressant de montrer l'équivalence générale des deux méthodes de calcul. Mais la vérification que la solution (15-28) du chapitre précédent est aussi solution de (16-17) peut être obtenue très simplement ; en supprimant $\mathbf{e}^{ikz}$ dans (15-28), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(x,y,z) = \tfrac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0}\gamma(z)\mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)} \\
&\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0}\gamma(z)\mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)}[-2x\gamma(z)] \\
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0}\gamma(z)\mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)}[-2\gamma+4\gamma^2x^2] \qquad \times 1 \\
&\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial y^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0}\gamma(z)\mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)}[-2\gamma+4\gamma^2y^2] \qquad \times 1 \\
&\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0}\gamma(z)\mathbf{e}^{-\gamma(z)(x^2+y^2)}\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} - (x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}\right] \qquad \times 2ik
\end{aligned}$$

On écrit l'équation (16-17) en faisant la combinaison linéaire à droite ; en regroupant les termes qui dépendent de x et y, on obtient :

$$\left(x^2+y^2-\frac{1}{\gamma(z)}\right)\left(4\gamma^2-2ik\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}\right)=0$$

La première parenthèse ne peut pas rester nulle lorsqu'on fait varier x et y dans un plan z = constante. Donc la seconde parenthèse doit être nulle :

$$4\gamma^2 - 2ik\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{ou} \quad \frac{1}{\gamma^2}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{ik} \tag{16-22}$$

On en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}\,(1/\gamma)}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{2}{ik} = \dfrac{2i}{k}$ ou $\dfrac{1}{\gamma(z)} = \dfrac{2i}{k}z + \text{Cte}$ on retrouve bien l'expression de $\gamma(z)$ calculée au chapitre 15 en (15-25).

16.3 Solutions de l'équation paraxiale à variables x et y séparées. Modes transverses de Hermite-Gauss

Nous nous intéressons aux solutions générales de l'équation (16-17) ; mais pour cela nous limitons tout d'abord notre recherche aux solutions qui sont à variables x et y séparées. De plus, comme il s'agit d'ondes paraxiales, les surfaces d'onde au voisinage de l'axe Oz sont quasiment sphériques, ce qui entraîne (*cf.* 15-1) que la phase de la fonction enveloppe $\mathcal{F}(x, y, z)$ ne doit dépendre de x et y que par un terme nécessairement de la forme :

$$\mathbf{e}^{ik\dfrac{x^2+y^2}{2R(z)}}$$

où $R(z)$ est le rayon de courbure de la surface d'onde passant par le point $(0, 0, z)$ de l'axe Oz. On sépare de plus, dans le facteur d'amplitude qui dépend *a priori* de z, son module $A(z)$ et son facteur de phase $\mathrm{e}^{-i\psi(z)}$; c'est-à-dire que nous recherchons des solutions de la forme :

$$\mathcal{F}(x, y, z) = f(x, z)g(y, z)A(z)\mathbf{e}^{-i\psi(z)}\,\mathbf{e}^{-i\beta(z)(x^2+y^2)} \tag{16-23}$$

où f, g et A sont des *fonctions réelles* ainsi que ψ et β. Pour trouver les solutions générales de f et g, nous allons dans ce paragraphe utiliser une comparaison mathématique avec le problème de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique. Ce dernier étant traité en détail dans tous les livres de mécanique quantique usuels, nous pourrons ainsi gagner du temps. Nous commençons par calculer séparément les 3 termes de l'équation (16-17) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}^{-i\beta(x^2+y^2)} - 2i\beta x f\,\mathbf{e}^{-i\beta(x^2+y^2)}\right] gA\mathbf{e}^{-i\psi}$$

il y a dans cette expression de $\partial\mathcal{F}/\partial x$ cinq termes dépendant de x qui doivent être à nouveau dérivés pour obtenir la dérivée seconde de $\mathcal{F}$; mais deux de ces cinq nouvelles dérivées sont identiques et se contractent, conduisant à quatre

termes seulement dans la dérivée seconde :

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} = \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4i\beta x\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x} - 4\beta^2x^2 - 2i\beta\right] & \times 1 \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial y^2} = \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 4i\beta y\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial y} - 4\beta^2y^2 - 2i\beta\right] & \times 1 \\ \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial z} + \dfrac{1}{A}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} - i\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} - i(x^2+y^2)\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right] & \times 2ik \end{array}\right\} \quad (16\text{-}24)$$

Il reste à faire la combinaison linéaire indiquée dans la marge de droite, pour écrire l'équation de propagation (16-17) ; le résultat obtenu doit être écrit sur plusieurs lignes ; nous en profitons pour ranger sur trois lignes différentes : (1) les termes dépendant de x et z, (2) les termes dépendant de y et z, (3) les termes en z seulement :

$$\left|\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4i\beta x\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2ik\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial z} - x^2\left(4\beta^2 - 2k\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right) \\ (2) & +\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 4i\beta y\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial y} + 2ik\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial z} - y^2\left(4\beta^2 - 2k\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right) \\ (3) & -4i\beta(z) + 2ik\dfrac{1}{A}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} + 2k\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} = 0 \end{array}\right. \quad (16\text{-}25)$$

L'équation (16-25) est la somme de trois parties qui ne dépendent pas des mêmes variables. Comme il est classique avec ce genre d'équation, on en déduit que la partie (1) dépendant de x est nécessairement égale à une fonction ne dépendant que de z et se comportant comme une constante par rapport à la variable x. De façon analogue la partie (2) dépendant de y est nécessairement égale à une fonction de z, constante par rapport à la variable y. Les parties (1) et (2) se séparent alors en fournissant deux équations différentielles indépendantes, respectivement en x, et en y ; et il reste une troisième équation en z :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4i\beta x\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2ik\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial z} - x^2\left(4\beta^2 - 2k\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right) = C_1(z) \\ (2) & +\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 4i\beta y\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial y} + 2ik\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial g}{\partial z} - y^2\left(4\beta^2 - 2k\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right) = C_2(z) \\ (3) & -4i\beta(z) + 2ik\dfrac{1}{A}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} + 2k\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} + C_1(z) + C_2(z) = 0 \end{array}\right\} \quad (16\text{-}26)$$

Les fonctions f et g étant supposées réelles, nous pouvons séparer les parties réelle et imaginaire des deux premières équations (16-26). Les expressions en x et en y étant symétriques, nous nous contentons bien sûr de faire le traitement en x. La première équation (16-26) se dédouble en :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(partie réelle)} & \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x^2\left(4\beta^2 - 2k\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}\right) = C_{1r} \\ \text{(partie imaginaire)} & -4i\beta x\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2ik\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial z} = C_{1i} \end{array}\right\} \qquad (16\text{-}27)$$

La parenthèse dans la première équation (réelle) ne dépend que de z, c'est une constante en x, que nous appellerons $4\alpha^2$, en posant par définition :

$$\boxed{\alpha^2(z) = \beta^2(z) - \frac{k}{2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z}} \qquad (16\text{-}28)$$

(Nous avons fait l'hypothèse que cette parenthèse est nécessairement positive. Si elle est négative, on montre l'impossibilité de trouver des solutions bornées en x, donc physiquement satisfaisantes.) La première des équations (16-27) devient alors :

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\alpha^2 x^2 = C_{1r} \qquad (16\text{-}29)$$

C'est l'équation aux fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique ; et nous pouvons donc réutiliser sans autre justification tous les résultats mathématiques usuels de ce problème. En introduisant la nouvelle variable $\xi = x\sqrt{2\alpha}$, on obtient l'équation différentielle sous forme normalisée :

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \xi^2 f(\xi) = -\frac{C_{1r}}{2\alpha} f(\xi) \quad \text{avec } \xi = x\sqrt{2\alpha(z)} \qquad (16\text{-}30)$$

Les conditions imposées à l'amplitude du champ électrique pour être physiquement satisfaisantes sont les mêmes que celles imposées aux fonctions d'onde, c'est-à-dire d'être « de carré sommable » ; on n'obtient de solution acceptable que pour les valeurs particulières de la constante, entières et impaires, et les solutions possibles sont :

$$\text{valeurs propres : } -\frac{C_{1r}}{2\alpha} = 2m + 1 \quad (m \text{ entier}) \qquad (16\text{-}31)$$

$$\text{fonctions propres : } f_m(\xi) = \mathrm{H}_m(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = \mathrm{H}_m(x\sqrt{2\alpha})\mathrm{e}^{-\alpha x^2} \qquad (16\text{-}32)$$

dans lesquelles $\mathrm{H}_m(\xi)$ représentent les polynômes de Hermite définis par :

$$\mathrm{H}_m = (-1)^m \mathrm{e}^{\xi^2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}\left(\mathrm{e}^{-\xi^2}\right) = \left(2\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^m \cdot 1$$

polynômes de degré m et de parité m, dont les quatre premiers sont indiqués sur la figure 16.3, à côté de la représentation de la fonction $f_m(\xi)$. La première solution, correspondant à $m = 0$, se confond avec la solution gaussienne fondamentale déjà étudiée au paragraphe 16.1 et au chapitre précédent.

Les autres solutions sont aussi globalement gaussiennes, mais avec des zones brillantes et des zones noires à l'intérieur de la tache gaussienne (les courbes en trait épais sur la figure 16.3 représentent $|f_m(\xi)|^2$, c'est-à-dire l'intensité lumineuse). On appelle **modes transverses** ces solutions de l'équation d'onde pour lesquelles la variation transversale du champ est plus complexe et présente des maxima et des minima nuls. On retiendra que le nombre des minima nuls est égal au nombre quantique m définissant le mode. On notera que ces solutions existent aussi bien dans la propagation en espace libre, puisque nous n'avons pas encore tenu compte des conditions aux limites imposées par les miroirs.

Il nous faut maintenant tirer les conséquences de la deuxième équation (16-27), imaginaire, en calculant les dérivées des fonctions propres (16-32) :

$$\frac{1}{f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x} = \frac{1}{f_m}\frac{\partial f_m}{\partial \xi}.\sqrt{2\alpha} = \left[\frac{1}{\mathrm{H}_m}\frac{\mathrm{dH}_m}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi\right]\sqrt{2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{H}_m}\frac{\mathrm{dH}_m}{\mathrm{d}\xi}\sqrt{2\alpha} - 2\alpha x \qquad \Big| \; -2\beta x$$

$$\frac{1}{f_m}\frac{\partial f_m}{\partial z} = \frac{1}{f_m}\frac{\partial f_m}{\partial \xi}\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = \left[\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\frac{1}{\mathrm{H}_m}\frac{\mathrm{dH}_m}{\mathrm{d}\xi} - x^2\right]\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} \qquad \Big| \; k$$

dans la deuxième équation, nous tenons compte de la dépendance en z de la fonction propre, à travers la constante $\alpha(z)$ de l'exponentielle gaussienne en x. La combinaison linéaire figurant dans la marge de droite exprime la 2^{e} équation (16-27) :

$$\frac{1}{\mathrm{H_m}}\frac{\mathrm{dH}_m}{\mathrm{d}\xi}.\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\left(-4\alpha\beta + k\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\right) + 4\alpha\beta x^2 - kx^2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2i}C_{1i}$$

$$\left(-\frac{1}{\mathrm{H}_m}\frac{\mathrm{dH}_m}{\mathrm{d}\xi}.\frac{x}{\sqrt{2\alpha}} + x^2\right)\left(4\alpha\beta - k\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{1}{2i}C_{1i}.$$

La première parenthèse de l'expression ci-dessus ne peut être ni constante ni nulle quand la variable x varie. Dans ces conditions, la deuxième parenthèse et la constante C_{1i} doivent être nulles, imposant une valeur précise à la partie imaginaire de l'exponentielle gaussienne :

$$\boxed{\beta(z) = \frac{k}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}} \qquad (16\text{-}33)$$

Les deux relations (16-33) et (16-28) permettent de retrouver la constante $\gamma(z)$ complexe du mode gaussien fondamental introduite au chapitre précédent

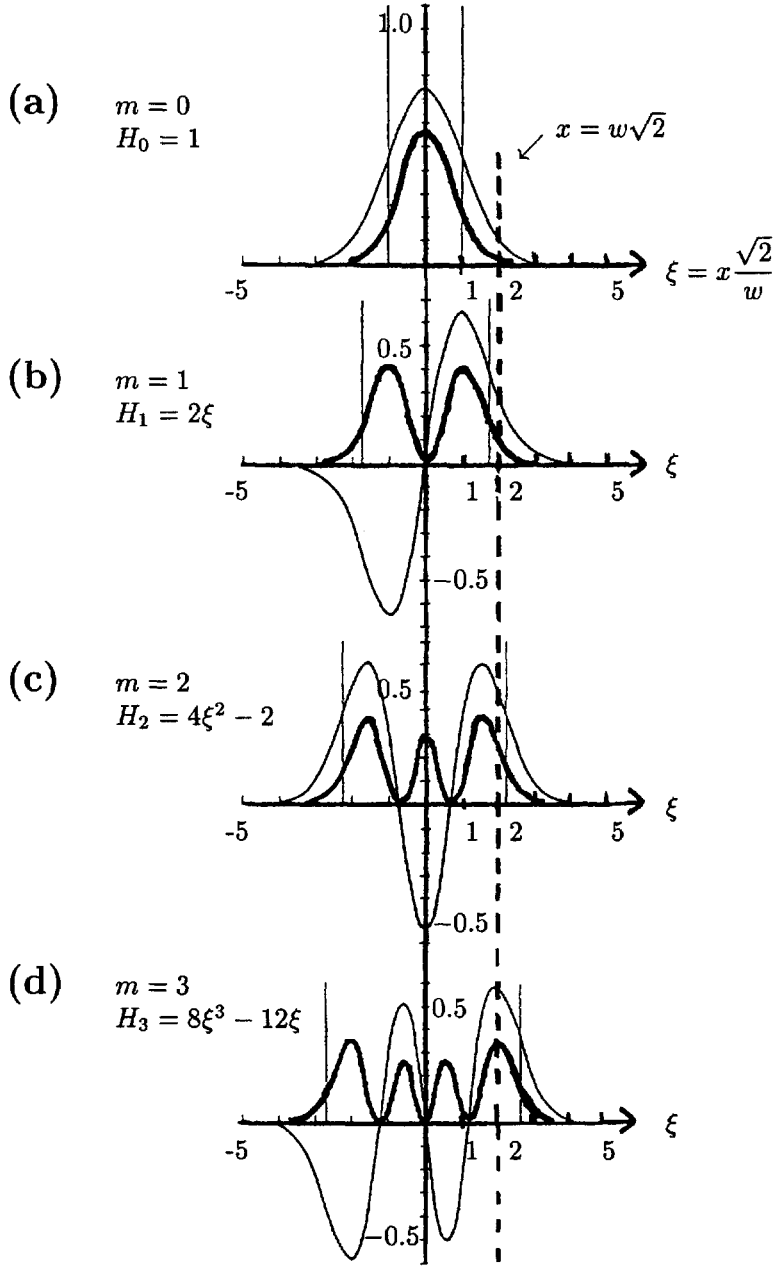


FIG. 16.3 – *Fonctions propres de Hermite-Gauss* $f_m(\xi) = H_m(\xi)e^{-\xi^2/2}$ *en trait fin. On a représenté en trait épais leur carré* $f_m^2(\xi)$*, proportionnel à la densité d'énergie de l'onde. (Variable réduite* $\xi = x\sqrt{2\alpha} = x\sqrt{2}/w$*.)*

en (15-25) ou (15-28). Nous posons maintenant :

$$\gamma(z) = \alpha(z) + i\beta(z) \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}) \tag{16-34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} + i\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = \frac{4}{k}\alpha\beta + i\frac{2}{k}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) = \frac{2}{ik}(\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta) = \frac{2}{ik}\gamma^2$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle pour la fonction $\gamma(z)$ que nous résolvons facilement en écrivant la dérivée de son inverse (*cf.* (16-22) dans remarque 16.2) :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = \frac{2i}{k} \tag{16-35}$$

$$\text{soit} \qquad \frac{1}{\gamma(z)} = \frac{2i}{k}z + \mathrm{C^{te}} = \frac{2i}{k}(z - z_0) + w_0^2 \tag{16-36}$$

Nous séparons la partie imaginaire de la constante représentée par z_0 et sa partie réelle représentée par w_0^2 ; nous savons en effet que la partie réelle de la constante $\gamma(z)$ doit être positive pour que la solution soit transversalement limitée. Nous avons ainsi retrouvé la formule (15-25), caractérisant la constante exponentielle $\gamma(z)$ du faisceau gaussien étudié au chapitre précédent. (Une translation le long de l'axe Oz permet de replacer à l'origine le rayon minimum), en annulant la constante d'intégration z_0.)

En choisissant $z_0 = 0$, et en utilisant $L = kw_0^2/2$, l'équation (16-36) permet de retrouver les parties réelle et imaginaire de $\gamma(z)$ déjà calculées en (15-30), pour le mode gaussien fondamental :

$$\left.\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{1}{w_0^2(1 + z^2/L^2)} = \frac{1}{w(z)^2} \\ \beta(z) &= -\frac{1}{w_0^2}\frac{z/L}{1 + z^2/L^2} = -\frac{k}{2}\frac{1}{z + L^2/z} = -\frac{k}{2R(z)} \end{aligned}\right\} \tag{16-37}$$

Tous les modes transverses ont donc les mêmes constantes gaussiennes que le mode gaussien fondamental étudié au chapitre précédent.

Les résultats obtenus en fonction de x se transposent immédiatement pour la fonction $g(y)$ à partir de la deuxième des équations (16-26) :

$$\text{valeurs propres } C_{2r} = -2\alpha(2n + 1) \tag{16-38}$$

$$\text{fonctions propres } g_n(\eta) = \mathrm{H}_n(\eta)\mathbf{e}^{-\eta^2/2} = \mathrm{H}_n(y\sqrt{2\alpha}).\mathbf{e}^{-\alpha y^2} \tag{16-39}$$

en introduisant la variable réduite $\eta = y\sqrt{2\alpha}$.

Un mode transverse est donc défini par deux nombres quantiques m et n représentant le nombre des minima noirs respectivement en fonction de x et en fonction de y.

Ayant trouvé les valeurs des deux constantes C_{1r} et C_{2r} qui sont réelles, nous pouvons maintenant traiter la troisième des équations différentielles (16-26). Nous séparons aussi les parties réelle et imaginaire :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(partie réelle)} & 2k\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} + C_{1r} + C_{2r} = 0 \\ \text{(partie imaginaire)} & -4i\beta(z) + 2ik\dfrac{1}{A}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = 0 \end{array}\right\} \qquad (16\text{-}40)$$

Avec la deuxième équation (imaginaire), nous trouvons une relation identique à celle du mode gaussien fondamental (15-36) pour l'amplitude $A(z)$:

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{k}\beta(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} \Longrightarrow A(z) = \sqrt{\alpha(z)} \times C^{te} = \frac{C^{te}}{w(z)} \qquad (16\text{-}41)$$

Cette relation est indispensable pour assurer la conservation de l'énergie dans les plans d'onde successifs.

La première des équations (16-40) (réelle) nous conduit au contraire pour le déphasage $\psi(z)$ à une relation plus compliquée que celle du mode fondamental :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z} = -\frac{C_{1r}}{2k} - \frac{C_{2r}}{2k} = \frac{\alpha(z)}{k}[2m+1+2n+1] = \frac{2\alpha(z)}{k}(m+n+1)$$

On retrouve bien pour $m = n = 0$ la formule (15-35) qui détermine le déphasage $\psi_{00}(z)$ du mode gaussien fondamental. On intègre l'équation différentielle ci-dessus en utilisant l'expression calculée pour $\alpha(z)$ en (16-37) ; on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{00}}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{k}\alpha(z) = \frac{2}{kw_0^2}\frac{1}{1+z^2/L^2} = \frac{1}{L}\frac{1}{1+z^2/L^2}$$

soit $\psi_{00}(z) = \arctan(z/L)$, en conformité avec (15-35). Nous en déduisons pour un mode (m,n) quelconque :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\psi_{mn}}{\mathrm{d}z} = (m+n+1)\dfrac{\mathrm{d}\psi_{00}}{\mathrm{d}z} \\ \text{ou} \quad \boxed{\psi_{mn}(z) = (m+n+1)\psi_{00}(z) = (m+n+1)\arctan\left(\dfrac{z}{L}\right)} \end{array}\right\} \qquad (16\text{-}42)$$

Cette différence de phase entre les modes transverses et le mode fondamental a des conséquences pratiques importantes dans les expériences. Mais avant de

parler des expériences, nous résumons les propriétés trouvées pour ces modes transverses.

L'intégration directe de l'équation de propagation des ondes paraxiales (16-17) nous a permis de retrouver les modes gaussiens fondamentaux introduits et justifiés au chapitre précédent par leur stabilité dans l'application successive des intégrales de Kirchhoff. Mais à côté des modes gaussiens fondamentaux, nous avons trouvé toute une série quantifiée d'autres modes gaussiens-transverses, pour lesquels la variation transversale d'intensité est plus complexe que la simple variation gaussienne, et présente des maxima et des zéros d'intensité en fonction des coordonnées transversales x et de y (*cf.* Fig. 16.3).

Les paramètres gaussiens de ces modes transverses, que ce soit la partie réelle $\alpha(z)$ (qui définit le rayon gaussien $w(z) = 1/\sqrt{\alpha}$) ou la partie imaginaire $\beta(z)$ (qui définit le rayon de courbure du front d'onde $R(z) = -k/2\beta$) ont la même variation, en fonction de la coordonnée longitudinale z, que les paramètres du mode gaussien fondamental.

Le rayon de courbure $R(z)$ joue un rôle fondamental dans les conditions de phase initiales, que ce soit pour l'entrée du faisceau lumineux dans une cavité, ou pour son entrée en espace libre à la sortie d'un appareil ; on en déduit que **tous les modes gaussiens (transverses ou fondamental) effectivement observés dans un cas réel (dans une cavité), ont dans chaque plan z les mêmes paramètres gaussiens α et β.**

L'égalité des rayons de courbure $R(z)$ des fronts d'onde de l'onde gaussienne fondamentale et des ondes gaussiennes transverses, nous permet de généraliser à tous les modes transverses la discussion du paragraphe 16.1 sur les modes gaussiens dans une cavité linéaire, puisque l'essentiel de cette discussion repose sur les rayons de courbure des fronts d'onde (Fig. 16.2).

Lorsqu'on fait la théorie des fonctions propres des opérateurs, on montre que l'ensemble des fonctions propres forme une base complète dans l'espace de toutes les fonctions possibles ; c'est-à-dire que n'importe quelle solution possible peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions propres. Pour faciliter la résolution de l'équation différentielle de propagation (16-17), nous avons fait une hypothèse restrictive en nous limitant aux solutions séparées en x et y ; mais les solutions propres calculées dans chaque plan transversal z :

$$F_{mn}(x, y) = f_m(x) g_n(y)$$

forment une base complète de l'espace des solutions possibles. Toutes les solutions de l'équation (16-17), y compris les solutions à variables non séparées, peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires de ces solutions

propres ((16-32) et (16-39)) :

$$F(x,y) = \sum_m \sum_n a_{mn} f_m(x) g_n(y) \tag{16-43}$$

16.4 Mise en évidence expérimentale des modes transverses

Les problèmes se posent différemment selon que l'on analyse un faisceau lumineux extérieur avec une cavité passive ou bien que l'on produit la lumière à l'intérieur d'une cavité active (laser).

16.4.1 Cas d'une cavité passive

On analyse une fréquence ν ou une longueur d'onde λ imposée en cherchant la résonance qui se produit lorsque la longueur D de la cavité est accordée. Nous généralisons la formule (16-12) écrite dans le cas du faisceau gaussien fondamental au cas des modes transverses. Le déphasage sur un Aller dans la cavité dépend du mode (m,n) considéré :

$$\delta\varphi_{mn} = k(z_2 - z_1) - \psi_{mn}(z_2) + \psi_{mn}(z_1) = \frac{2\pi}{\lambda} D - \delta\psi_{mn} \tag{16-44}$$

avec

$$\delta\psi_{mn} = \psi_{mn}(z_2) - \psi_{mn}(z_1) = (m+n+1)[\psi_{00}(z_2) - \psi_{00}(z_1)] = (m+n+1)\delta\psi_{00}$$

d'après la formule (16-42). Nous avions calculé en (16-12) et (16-13) le déphasage pour le mode fondamental :

$$\cos^2 \delta\psi_{00} = \frac{(R_1 - D)(R_2 - D)}{R_1 R_2}$$

La condition de résonance pour le mode (m,n) s'écrit $\delta\varphi_{mn} = N\pi$ soit :

$$D_{mn} = \left[N + (m+n+1)\frac{\delta\psi_{00}}{\pi} \right] \frac{\lambda}{2} \quad (N \text{ entier}) \tag{16-45}$$

a) Pour les configurations les plus courantes utilisant deux miroirs concaves, et si les miroirs sont presque plans (R_1 et R_2 très grands) ou bien presque concentriques ($R_1 + R_2 \approx D$), $\cos\delta\psi_{00}$ est voisin de l'unité, et le terme correctif $\delta\psi_{00}/\pi$ est très petit : on observe une série de résonances, correspondant aux diverses valeurs des entiers m et n, pour des longueurs D équidistantes, au voisinage de chacune des résonances du mode fondamental (pour les ordres d'interférence successifs N, $N+1$,$N+2$,...) (*cf.* Fig. 16.4a).

b) Dans le cas de la configuration confocale symétrique ($R_1 = R_2 = D$), le terme correctif $\delta\psi_{00}/\pi = \pm 1/2$ et l'on observe des résonances intermédiaires

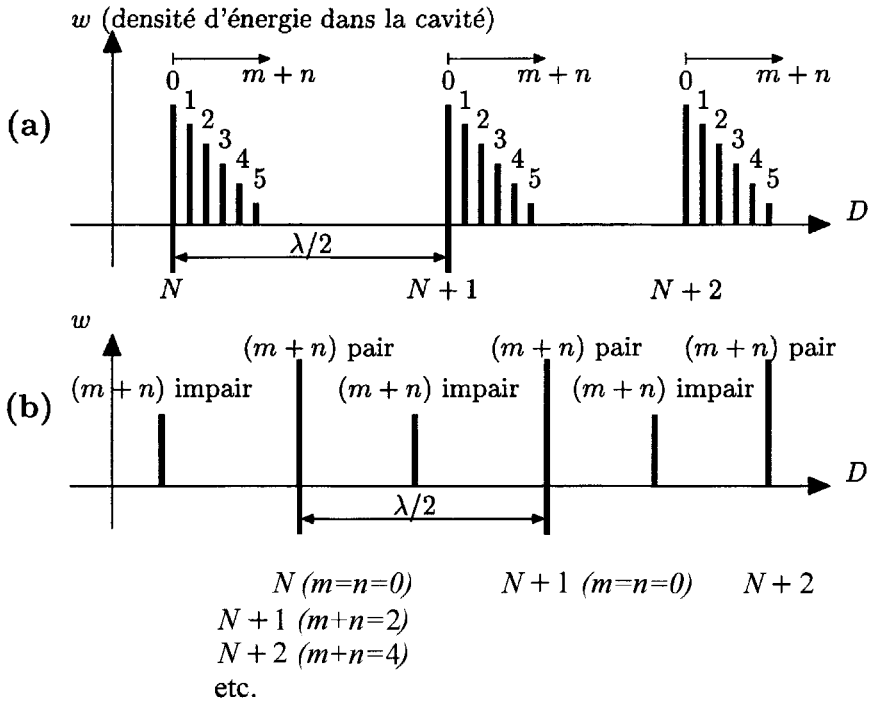


FIG. 16.4 – *Résonances du mode fondamental et des modes transverses dans une cavité linéaire passive (éclairée par une seule longueur d'onde) en fonction de la distance D des miroirs. (a) Cas où la correction $\delta\psi_{00}/\pi \ll 1$. On distingue les résonances transverses correspondant aux diverses valeurs de la somme $m + n$ à côté de la résonance de chaque mode fondamental (ordres d'interférence $N, N + 1, N + 2$, etc.). (b) Configuration confocale symétrique ($R_1 = R_2 = D$). On trouve une résonance transverse intermédiaire (de somme $m + n$ impaire) au milieu de l'intervalle entre deux ordres d'interférence voisins du mode fondamental. Les résonances transverses correspondant à une somme $m + n$ paire coïncident avec les résonances du mode fondamental. (On a ici supposé que $\delta\psi_{00}/\pi \approx -1/2$.)*

au milieu de chaque intervalle correspondant à un ordre d'interférence ; mais toutes les résonances des modes transverses se trouvent confondues soit avec les résonances des différents ordres d'interférence du mode fondamental (si $m + n$ est pair), soit avec ces résonances intermédiaires (si $m + n$ est impair, *cf.* Fig. 16.4b). On observe donc les résonances pour les longueurs D régulièrement espacées de $\lambda/4$ (deux fois plus serrées que les résonances successives des différents modes N) ; et ces résonances sont relativement intenses puisqu'elles correspondent à la coïncidence d'un grand nombre de modes transverses.

c) Avec d'autres configurations de la cavité, on peut trouver des résonances réparties sur l'intégralité de l'axe des longueurs D. Lorsqu'on utilise une telle cavité pour analyser un spectre comportant plusieurs longueurs d'onde, il est conseillé d'éliminer les modes transverses. *La meilleure solution pour ce faire est d'adapter le faisceau incident au mode fondamental de la cavité*, c'est-à-dire de le transformer avec une lentille, suivant les techniques décrites au paragraphe 15.7, en sorte que son rayon de courbure à l'entrée de la cavité soit égal à celui R_1 du miroir d'entrée et que son rayon gaussien à cet endroit soit égal au rayon gaussien w_1 du mode fondamental sur le miroir d'entrée (formules transposées de (16-7) et (16-8) par permutation des indices 1 et 2). Alors toute l'énergie du faisceau incident est injectée dans le mode gaussien fondamental de la cavité et les modes transverses possibles restent vides et inopérants ; on joue sur les conditions initiales vérifiées par l'onde à son entrée dans la cavité.

16.4.2 Cas d'une cavité active

Il s'agit d'une cavité contenant un milieu amplificateur. Si la condition de seuil est vérifiée sur une bande de longueur d'onde assez large, il peut y avoir émission de plusieurs longueurs d'onde différentes λ_{mn} correspondant aux résonances des différents modes pour la même distance D des miroirs :

$$\frac{\lambda_{mn}}{2}\left[N+(m+n+1)\frac{\delta\psi_{00}}{\pi}\right]=D \qquad \text{(16-46)}$$

Lorsque le laser fonctionne sur plusieurs modes simultanément, on observe effectivement la modulation de son intensité aux fréquences de battements entre les diverses fréquences optiques très voisines $\nu_{mn}=c/\lambda_{mn}$.

La recherche d'une bonne pureté spectrale conduit donc à sélectionner un seul mode. Il est assez facile d'isoler le mode fondamental parce que son étendue transversale est moindre que celle des modes transverses : on dispose dans le plan z de la cavité un diaphragme dont le rayon est ajusté au voisinage de la valeur $\rho=w(z)\sqrt{2}$ (un peu au-dessus, mais certainement en dessous de $2w(z)$). On peut voir en effet sur la figure 16.3 qu'un tel diaphragme (correspondant aux coordonnées réduites $\xi=2$ ou $\eta=2$) écrante notablement les modes transverses sans provoquer de perte d'énergie importante sur le mode fondamental ; on parvient ainsi à abaisser le gain des modes transverses au-dessous du seuil critique sans trop perturber le mode fondamental.

Mais il est aussi possible, en jouant de manière plus subtile avec les conditions aux limites imposées dans la cavité, de favoriser au contraire le gain de tel ou tel mode transverse en sorte qu'il soit le seul au-dessus du seuil critique permettant l'oscillation. Lorsqu'on réussit à isoler ainsi un seul mode transverse, on observe la disparition des battements de fréquences signalés plus haut. La figure 16.5 reproduit les résultats d'une expérience de démonstration effectuée aux Bell Labs (réf. [3]) sur un laser Hélium-Néon à $\lambda=1,15\ \mu$m (la cavité

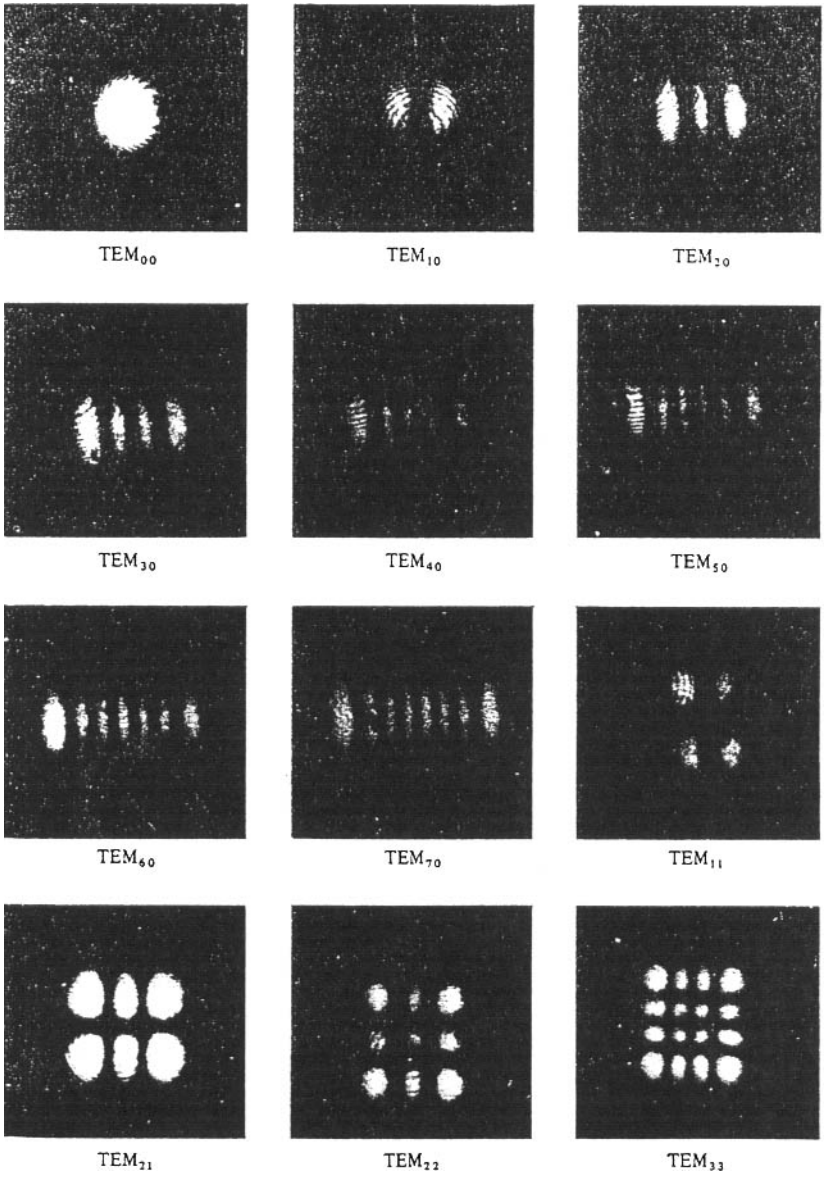


FIG. 16.5 – *Modes de Hermite-Gauss observés expérimentalement à la sortie d'un laser Helium-Néon à* $\lambda = 1.15\ \mu m$ *(d'après la réf. [3], avec la permission de l'IEEE Communications Society). Chaque mode est repéré par le nombre quantique* m *en* x *suivi du nombre quantique* n *en* y *(*m *est égal au nombre de taches noires sur l'axe horizontal* Ox *;* n *est égal au nombre de taches noires sur l'axe vertical* Oy*).*

était voisine de la configuration concentrique symétrique $R_1 = R_2 = D/2$ qui conduit sur les miroirs à des rayons gaussiens particulièrement grands ; ce qui facilitait la construction des diaphragmes destinés à favoriser un mode particulier). Chacune des photographies présentées reproduit la répartition spatiale de l'intensité lumineuse à la sortie du laser, fonctionnant sur un mode unique : les photographies du haut de la figure 16.5 permettent ainsi de visualiser directement les fonctions $f_m(x)^2$ représentées en trait épais sur la figure (16.3) ; les photographies du bas permettent de visualiser des produits $f_m(x)^2 g_n(y)^2$. Le mode d'ordre m en x est caractérisé par m taches noires sur l'axe des x ; le mode d'ordre n en y par n taches noires sur l'axe des y.

Ces modes de Hermite-Gauss correspondant à des fonctions séparées en x et y, sont ceux que l'on observe le plus souvent parce que l'on utilise couramment dans les lasers des lames à l'incidence de Brewster qui permettent de supprimer toute perte par réflexion pour la lumière polarisée (ces lames constituent par exemple les fenêtres du milieu amplificateur gazeux, ou liquide ; ou bien elles font partie des éléments sélectifs en longueur d'onde). Ces lames imposent aux ondes des conditions qui différentient fortement la direction Ox située dans le plan de la lame et la direction Oy située dans le plan de symétrie perpendiculaire à la lame (géométrie de type rectangulaire).

16.4.3 Modes de symétrie circulaire, de Laguerre-Gauss

Mais si l'on fait attention à construire des cavités laser respectant strictement la symétrie de révolution autour de l'axe Oz commun aux deux miroirs, on peut observer d'autres modes transverses bien différents appelés modes de Laguerre-Gauss. Ces modes se calculent de manière analogue aux précédents, en cherchant des solutions de l'équation d'onde transversale, exprimées en coordonnées polaires, en fonction du rayon vecteur $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et de l'angle azimutal θ dans le plan d'onde. On recherche des solutions à variables ρ et θ séparées :

$$\mathcal{F}(\rho, \theta, z) = f(\rho, z) g(\theta) A(z) \mathbf{e}^{-i\psi(z)} \, \mathbf{e}^{-(\alpha + i\beta)\rho^2} \qquad \text{(16-47)}$$

On retrouve les mêmes fonctions $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ pour la constante gaussienne, et des fonctions transversales quantifiées avec deux indices entiers p et q de la forme :

$$f(\rho, z) g(\theta) = (\rho\sqrt{2\alpha})^q \mathcal{L}_p^q(2\alpha\rho^2) \cos q\theta \quad \text{ou bien} \quad \sin q\theta \qquad \text{(16-48)}$$

en utilisant les polynômes de Laguerre $\mathcal{L}_p^q$. Ces solutions forment aussi comme les solutions hermitiennes une base complète de l'espace des solutions ; c'est-à-dire que l'on peut exprimer les modes de Hermite comme combinaisons linéaires des modes de Laguerre, aussi bien que les modes de Laguerre comme combinaisons linéaires des modes de Hermite (*cf.* 16-43).

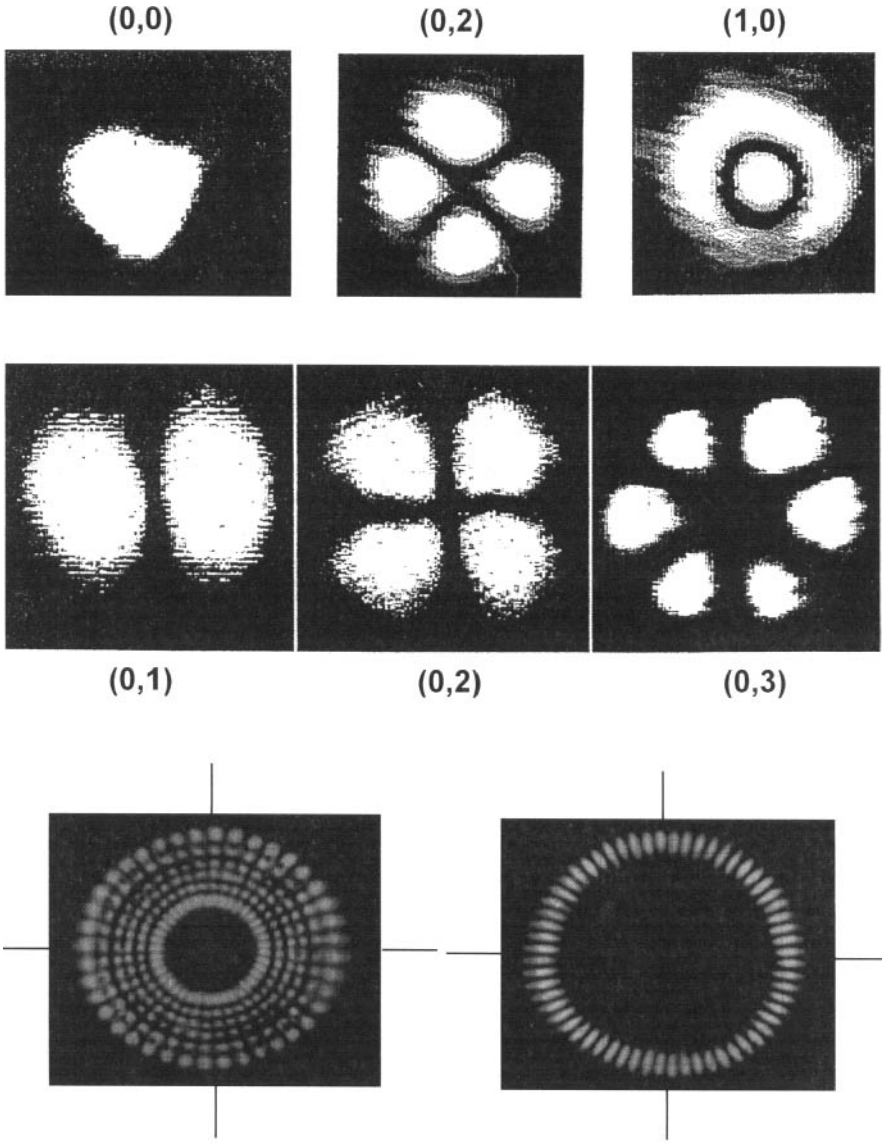


FIG. 16.6 – *Modes de Laguerre-Gauss observés expérimentalement à la sortie d'un Laser à CO_2. Les modes sont repérés par le nombre quantique radial p suivi du nombre quantique angulaire q (p est égal au nombre d'anneaux noirs ; q est égal au nombre des diamètres noirs). Les deux clichés du bas de la figure illustrent la possibilité d'observer des modes d'indices angulaires q beaucoup plus grands ($q = 20$ à gauche ; $q = 30$ à droite). (Clichés du laboratoire de Physique des lasers de l'université Lille 1.)*

L'observation de ces modes de Laguerre-Gauss, plus difficile que celle des modes de Hermite-Gauss, a été faite cependant dans les premières années d'existence des lasers (réf. [4]). La figure 16.6 reproduit les modes transverses de Laguerre-Gauss observés avec un laser à CO_2 à l'université de Lille ; le nombre quantique angulaire q est égal au nombre des diamètres noirs ; le nombre quantique radial p est égal au nombre des anneaux noirs. Le déphasage dans la propagation en z est aussi quantifié comme un multiple du déphasage $\psi_{00}(z)$ du mode gaussien fondamental :

$$\psi_{pq}(z) = (2p + q + 1)\psi_{00}(z)$$

les diverses fréquences de résonance de ces nouveaux modes sont donc les mêmes que les fréquences de résonance des modes rectangulaires de Hermite-Gauss.

16.5 Comparaison avec les modes guidés

La propagation guidée de la lumière dans une fibre optique est une innovation technologique de la seconde moitié du XX^{e} siècle qui a profondément révolutionné les techniques des transmissions par câbles. Ces problèmes de télécommunications sont trop vastes pour être développés dans cet ouvrage ; nous souhaitons seulement dans ce dernier paragraphe faire ressortir la parenté existant entre la propagation des ondes paraxiales étudiée dans ce chapitre et la propagation des ondes guidées.

Une fibre optique est un mince fil de milieu transparent, généralement un verre filé (mais ce peut être aussi un plastique), dont le diamètre est de l'ordre du dixième de millimètre ; mais la partie centrale, ou *cœur*, de ce fil, a une composition chimique légèrement différente qui lui communique un indice de réfraction supérieur à celui de la partie extérieure de la fibre appelée *gaine* (*cf.* Fig. 16.7a).

Pour expliquer de manière rapide le guidage d'une onde lumineuse dans le cœur d'une fibre optique, on évoque bien sûr le phénomène de réflexion totale qui se produit lorsqu'un rayon lumineux se propageant à l'intérieur d'un milieu matériel transparent d'indice n_r, eau, verre, etc., frappe la surface du milieu sous une incidence rasante, et se trouve totalement réfléchi vers l'intérieur du milieu parce que son angle d'incidence i est supérieur à l'angle limite i_λ ($i > i_\lambda = \arcsin 1/n_r$). S'agissant d'ondes paraxiales, dont l'angle avec l'axe de révolution Oz est très faible, une très petite différente d'indice (couramment de l'ordre de 10^{-2}) est suffisante entre le cœur et la gaine pour provoquer cette réflexion totale.

En fait, il existe deux types de fibres optiques : celles où existe effectivement une variation brusque d'indice entre le cœur et la gaine (on parle alors d'un *saut d'indice*) ; et celles où l'on réalise une variation progressive d'indice dans le milieu, avec un maximum sur l'axe de révolution Oz ; on parle alors d'un *gradient d'indice*. C'est ce dernier cas que nous choisissons de traiter,

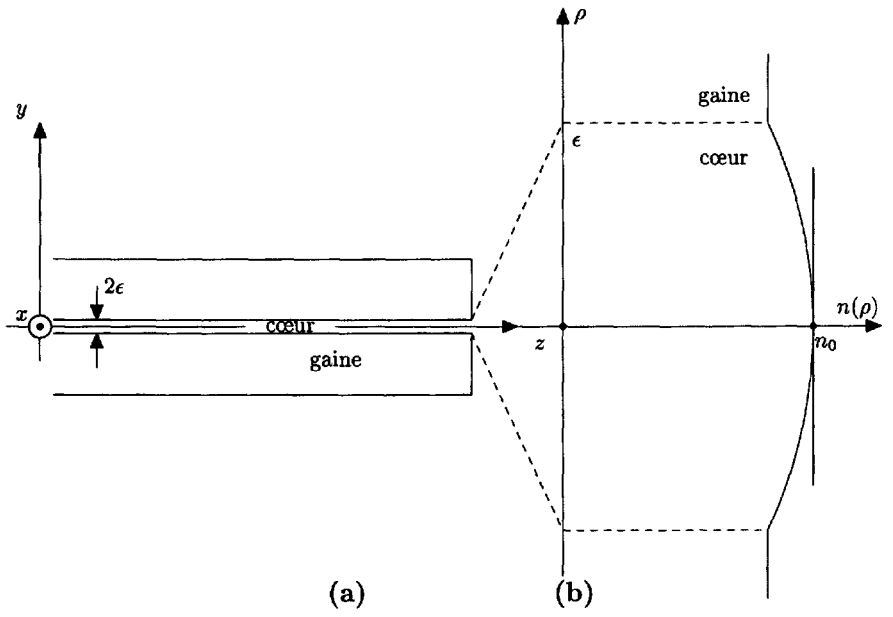


FIG. 16.7 – *Progagation guidée dans une fibre optique. (a) Géométrie de révolution de la fibre autour de l'axe Oz. Le cœur d'indice de réfraction élevé a un diamètre* 2ε *très inférieur à celui de la gaine de faible indice de réfraction. (b) Dans le cas d'une fibre à gradient d'indice : profil parabolique de variation de l'indice du cœur en fonction du rayon vecteur* ρ *(échelle radiale très dilatée).*

et qui est représenté sur la figure 16.7b où l'on a porté sur l'axe horizontal les valeurs de l'indice de réfraction n_r en fonction de la distance ρ à l'axe de révolution, portée sur l'axe vertical. Une courbe qui passe par un maximum peut toujours être représentée localement, de manière approchée, par une parabole ; ce qui nous permet d'écrire l'indice de réfraction du cœur sous la forme :

$$n_r(\rho) = n_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \qquad (16\text{-}49)$$

Compte tenu de la faible différence d'indice qui est suffisante, la longueur a qui caractérise le gradient d'indice est toujours très supérieure au rayon ε du cœur (ε de l'ordre de quelques μm), c'est-à-dire que la quantité ρ^2/a^2 est très inférieure à l'unité. Il nous faut alors, dans l'équation de propagation, tenir

compte de la variation avec la distance ρ du vecteur d'onde :

$$k(\rho) = \omega\frac{n_r}{c} = \omega\frac{n_0}{c}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) = k_0\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \tag{16-50}$$

C'est en fait k^2 qui intervient dans l'équation de propagation spatiale (15-2) :

$$k^2 = k_0^2\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \approx k_0^2\left(1 - \frac{2\rho^2}{a^2}\right) = k_0^2 - \alpha^2(x^2 + y^2)$$
$$\text{avec } \alpha^2 = \frac{2k_0^2}{a^2} \tag{16-51}$$

en négligeant le terme du quatrième ordre devant le terme du second ordre. Cette expression de k^2 apporte dans l'équation de propagation des termes en x^2 et y^2 analogues à ceux du paragraphe 16.3 sans qu'il soit nécessaire de faire une hypothèse de déphasage dû à la forme sphérique du front d'onde comme en (16-23). Nous faisons seulement l'hypothèse de variations séparées en x et y dans l'expression spatiale de l'onde :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = f(x)g(y)\mathbf{e}^{iKz} \tag{16-52}$$

et l'équation de propagation (15-2) peut s'écrire :

$$\frac{1}{\mathcal{E}}\Delta\mathcal{E} + k^2 = \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} - K^2 + k_0^2 - \alpha^2(x^2 + y^2) = 0 \tag{16-53}$$

soit en séparant les fonctions indépendantes en x et y :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - \alpha^2 x^2 &= C_1 \\ \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} - \alpha^2 y^2 &= C_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{avec } C_1 + C_2 = K^2 - k_0^2 \tag{16-54}$$

La première équation (16-54) en x est identique à l'équation (16-29) de l'oscillateur harmonique au facteur 4 près devant α^2 et admet donc les mêmes solutions quantifiées de Hermite-Gauss, sauf la correction d'un facteur 2 dans la relation entre la coordonnée x et la nouvelle variable réduite :

$$\xi = x\sqrt{\alpha} \tag{16-55}$$

$$\text{valeurs propres } C_1 = -\alpha(2m + 1) \tag{16-56}$$

$$\text{fonctions propres } f_m(\xi) = \mathrm{H}_m(\xi)\mathbf{e}^{-\xi^2/2} = \mathrm{H}_m(x\sqrt{\alpha})\mathbf{e}^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \tag{16-57}$$

et les formules transposées en y avec le nombre quantique n. On en déduit le rayon gaussien.

$$w^2 = \frac{2}{\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{k_0} = \frac{a\lambda_0}{\pi\sqrt{2}} \tag{16-58}$$

(indépendant de z) où $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c/\omega n_0$ est la longueur d'onde minimum mesurée sur l'axe de révolution Oz. Pour que notre calcul soit valable, il faut bien sûr que l'amplitude exponentielle soit devenue négligeable lorsqu'on arrive à la gaine, c'est-à-dire $w \ll \varepsilon$. La relation entre les constantes C_1 et C_2 dans le système (16-54) fournit la valeur du vecteur d'onde moyen K qui dépend des indices m et n :

$$K_{mn}^2 = k_0^2 + C_1 + C_2 = k_0^2 - \alpha(2m + 1 + 2n + 1) = k_0^2 - 2\alpha(m + n + 1)$$

Le terme correctif en α étant très petit devant k_0^2, on peut faire un développement limité de la racine carrée :

$$K_{mn} \approx k_0 \left[1 - \frac{\alpha}{k_0^2}(m + n + 1)\right] = k_0 \left[1 - \frac{\lambda_0}{a\pi\sqrt{2}}(m + n + 1)\right] \qquad (16\text{-}59)$$

Les divers modes guidés possibles sont tous des ondes planes (aucun déphasage en x et y) mais ils se propagent avec des vecteurs d'onde moyens K_{mn} quantifiés, qui diminuent légèrement quand l'ordre des modes augmente. Cette variation du vecteur d'onde K_{mn} avec les différents modes produit des déphasages $K_{mn}z$ différents après propagation sur la longueur z. Ces déphasages deviennent importants pour de grandes longueurs de propagation et produisent un brouillage du champ résultant.

Le calcul dans les fibres à saut d'indice est nettement plus compliqué : il faut écrire le raccordement sur la surface cylindrique du cœur de l'onde plane, qui s'y propage, avec l'onde évanescente qui l'accompagne dans la gaine. Mais on trouve des résultats similaires avec des vecteurs d'onde moyens K_{mn} dépendant des nombres quantiques (de manière plus compliquée). Une différence importante est que l'existence des différents modes dépend du diamètre du cœur ; si le cœur est suffisamment étroit, un seul mode est possible, et dans cette fibre monomode la propagation se fait avec un seul vecteur d'onde bien défini.

Bibliographie

[1] G.D. Boyd et H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J., **41**, 1347 (1962).

[2] H. Kogelnik et T. Li, Proc. IEEE, **54**, 1312 (1966).

[3] H. Kogelnik et W. Rigrod, Proc. IRE, **50**, 220 (1962).

[4] W. Rigrod, Appl. Phys. Lett. **2**, 3 (1963).

Chapitre 17

Propagation dépendant de la polarisation atomique

NOUS REVENONS d'abord à l'introduction de la partie III, en rappelant que les deux chapitres 17 et 18 sont largement indépendants et peuvent être lus dans n'importe quel ordre. Le premier paragraphe du chapitre 17 constitue cependant une introduction commune à ces deux chapitres.

17.1 Couplage des équations d'onde et des équations quantiques de Bloch

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié la propagation des ondes lumineuses soit en espace libre, soit dans des cavités, mais dans tous les cas nous avons supposé que l'espace entre les miroirs (ou les lentilles) était vide ; et nous avons cherché des solutions des équations de Maxwell sans termes source (sans second membre), en nous limitant à ces régions qui ne contiennent aucune source d'onde. Ce faisant, nous avons laissé de côté le problème de l'origine de l'onde.

Nous voulons au contraire dans ce chapitre et dans le chapitre suivant étudier ce problème en tenant compte des sources que sont les atomes ou les molécules. Nous devons alors utiliser les équations de Maxwell complètes, avec leur second membre représentant les sources. Dans cette étude, on peut utiliser deux méthodes générales :

a) une première méthode consiste à chercher d'abord la solution particulières des équations de Maxwell pour chaque source ponctuelle séparément ; puis, en utilisant la linéarité de ces équations, on obtient la solution pour l'ensemble des sources en effectuant la somme des solutions particulières. L'intérêt de cette méthode est que l'on utilise une solution bien connue des équations différentielles de Maxwell : le champ

rayonné par un dipôle électrique oscillant quasi ponctuel. Mais il reste à faire en chaque point la somme des champs rayonnés par tous les dipôles répartis dans l'espace c'est-à-dire, en pratique, une intégrale sur l'espace, qui fait apparaître leurs interférences (qui peuvent être suivant les cas constructives ou destructives). Du point de vue conceptuel, cette méthode présente l'avantage de bien faire ressortir le rôle émetteur d'onde de chaque atome particulier, par l'intermédiaire de la polarisation atomique calculée quantiquement dans la première partie de cet ouvrage ;

b) une deuxième méthode consiste à écrire les équations différentielles de Maxwell avec comme terme source (au second membre) le vecteur polarisation volumique macroscopique local, obtenu en effectuant une moyenne sur l'ensemble des atomes d'un petit volume local (*cf.* chapitre 3). Il reste alors à résoudre l'équation différentielle de propagation en tenant compte de ce terme source au second membre. Le rôle individuel de chaque atome n'apparaît plus explicitement, puisqu'on calcule directement le champ global.

Dans les deux méthodes, on utilise la même polarisation atomique calculée quantiquement à l'aide des équations de Bloch en fonction du champ appliqué à chaque atome. Que l'on emploie la méthode b) (équation locale sur le champ global), ou la méthode a) (sommation des solution dipolaires individuelles), on est affronté à la même difficulté : à savoir que le champ appliqué en un point dépend de la polarisation existant en tous les autres points de l'espace. De ce fait, les équations d'onde classiques de Maxwell et les équations quantiques de Bloch sont étroitement imbriquées et ne peuvent plus être résolues séparément.

Dans la méthode b), on obtient un système d'équations différentielles couplées entre elles à la fois par les composantes du champ électrique et par les variables atomiques u et v caractérisant la polarisation atomique ; mais il n'existe pas de solution générale pour intégrer ce système complexe comprenant des termes non linéaires. La même difficulté se retrouve dans la méthode a).

Dans les deux cas, il faut utiliser des **méthodes par approximations successives** : on fait des hypothèses simplificatrices sur le champ électrique pour calculer la polarisation atomique qui existerait avec ces hypothèses ; et l'on utilise ensuite ce résultat provisoire de la polarisation atomique pour calculer un champ corrigé, qui permettra de calculer une solution plus exacte de la polarisation atomique, etc. ; on procède par itération jusqu'à ce que les solutions convergent de manière satisfaisante (*cf.* Fig. 17.1). Sans doute les ordinateurs sont-ils parfaitement adaptés pour calculer des solutions numériques de telles équations complexes. Cependant pour aider à la compréhension des phénomènes physiques concernés, nous calculons dans la suite des solutions approchées, avec des hypothèses particulières très simples.

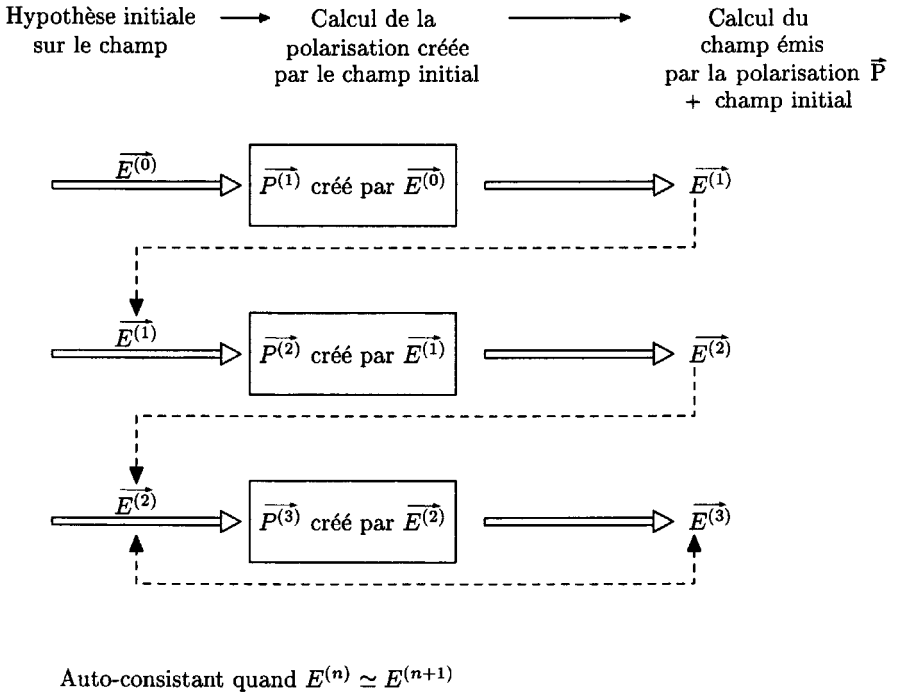


FIG. 17.1 – *Schéma de principe des approximations successives. (Un choix judicieux de l'hypothèse initiale conditionne la rapidité de la convergence vers une solution auto-consistante.)*

En pratique la méthode b) d'équation locale sur le champ global est généralement mieux appropriée pour étudier le fonctionnement interne des lasers, et c'est elle que nous utilisons dans ce chapitre 17. Au chapitre suivant (18), nous utiliserons la méthode a) par sommation des solutions individuelles mieux appropriée pour décrire les expériences de diffusion de lumière utilisant les lasers.

L'hypothèse simplificatrice essentielle utilisée dans ce chapitre 17 sera l'approximation de l'onde plane. Celle-ci apparaîtra en totale contradiction avec les solutions des équations de Maxwell sans second membre étudiées en espace libre au chapitre 15, et en cavités au chapitre 16, où nous avons étudié la répartition transversale de l'onde. Comme nous l'avons indiqué en introduction du chapitre 16, en effet, lorsque la lumière interagit avec des atomes, les calculs de ces deux chapitres 15 et 16 doivent être considérés comme des approximations à l'ordre zéro permettant de démarrer un calcul par approximations successives, tenant compte par la suite des termes source des équations de Maxwell.

Mais, dans un calcul par approximations successives, rien n'interdit d'utiliser comme point de départ à l'ordre zéro une approximation plus grossière. On peut aussi inverser l'ordre de certaines approximations qui dépendent de paramètres indépendants : on peut donc aussi bien choisir comme approximation de départ à l'ordre zéro une solution tenant compte du second membre des équations de Maxwell dans le cadre de l'hypothèse « onde plane », et ensuite seulement la corriger pour tenir compte de la véritable répartition transversale de l'onde.

17.2 Équations de Maxwell avec second membre. Ondes planes dans les milieux isolants, homogènes et *isotropes*

Les quatre équations de Maxwell, écrites ici pour des milieux non magnétiques, peuvent se répartir en deux groupes distincts, deux équations sans second membre :

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0 \\ &\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17-1}$$

et deux équations avec termes source au second membre :

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho - \operatorname{div}\overrightarrow{P}\right) \\ &\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\vec{\jmath} + \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{17-2}$$

Nous avons écrit les équations pour les champs macroscopiques, définis par des moyennes en volume sur de petits échantillons de matière (à l'échelle mésoscopique intermédiaire entre les dimensions atomiques et les longueurs d'onde optiques) et nous avons séparé aux seconds membres :

- la densité volumique ρ des charges libres et la densité du courant de conduction $\vec{\jmath}$ des charges libres, dans un milieu conducteur ;
- la densité volumique moyenne des charges liées $(-\operatorname{div}\overrightarrow{P})$ et la densité de courant moyenne des charges liées $(\partial\overrightarrow{P}/\partial t)$, qui s'expriment en fonction de la polarisation diélectrique volumique $\overrightarrow{P} = \sum q_i \overrightarrow{r}_i$ (somme étendue à toutes les charges contenues dans une unité de volume (supposée initialement neutre).

Les milieux conducteurs sont non transparents, sauf sur des épaisseurs extrêmement minces, à cause de ρ et $\vec{\jmath}$ précisément. La lumière traverse donc

généralement des **milieux isolants**, dans lesquels on peut écrire la nullité des termes représentant les charges libres

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0 \tag{17-3}$$

et seuls restent aux seconds membres les termes représentant les charges liées. Il peut être alors commode d'utiliser le vecteur induction électrique : $\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$ qui permet d'écrire div $\overrightarrow{D} = 0$. Ce vecteur $\overrightarrow{D}$ joue un rôle important dans les milieux anisotropes, où le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$ n'est pas nécessairement perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Mais nous nous limiterons ici au cas des **milieux homogènes et isotropes** (où les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{P}$ sont colinéaires) ; et compte tenu de div $\overrightarrow{D} = 0$, cela impose en fait que les divergences de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{P}$ soient nulles aussi (*cf.* remarque 17.1) :

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 \\ &\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{17-4}$$

On peut alors éliminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ suivant la méthode habituelle en calculant le rotationnel de la deuxième équation sans second membre (17-1) et en utilisant l'identité classique :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{div} \overrightarrow{E} \right) - \Delta \overrightarrow{E}$$

Compte tenu de (17-4), le second membre de cette équation se réduit au laplacien $\Delta \overrightarrow{E}$. On obtient à partir de (17-1) :

$$\Delta \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} \right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{B} \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{P}}{\partial t^2}$$

c'est-à-dire l'équation de propagation avec second membre :

$$\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{P}}{\partial t^2} \tag{17-5}$$

Cette équation vectorielle s'écrit séparément pour chaque composante cartésienne de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{P}$; pour une onde polarisée rectilignement parallèle à Ox elle s'écrira simplement :

$$\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \tag{17-6}$$

Nous avons ainsi justifié l'équation sans second membre (15.3) qui a servi de point de départ aux calculs des chapitres 15 et 16, lorsque $P_x = 0$. Mais notre but ici était d'obtenir l'expression exacte du second membre. L'onde plane,

ayant une extension transversale infinie, n'existe jamais en toute rigueur. Mais l'étude des solutions gaussiennes, des équations d'onde au chapitre 15 nous a donné des exemples de solutions qui ne sont pas très éloignées de la solution onde plane, lorsque le diamètre gaussien $2w_0$ est très supérieur à la longueur d'onde ($2w_0 \gg \lambda$) : ce sont des solutions de l'équation d'onde paraxiale pour lesquelles la variation transversale du champ électrique (dans les directions x et y) est beaucoup plus faible que sa variation longitudinale selon l'axe Oz du pinceau lumineux.

Les dérivées spatiales transversales $\partial E_x/\partial x$ et $\partial E_x/\partial y$ ne sont pas strictement nulles, comme dans l'onde plane, mais leurs valeurs restent très faibles, et elles obéissent à une approximation voisine de celle de l'onde plane :

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial E_x}{\partial x}\right| \approx \left|\frac{\partial E_x}{\partial y}\right| \ll \left|\frac{\partial E_x}{\partial z}\right| \\ &\text{et de même pour les dérivées secondes :} \\ &\left|\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right| \approx \left|\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right| \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}7)$$

Cette approximation permet de simplifier dans un premier temps l'équation différentielle (17-6) en :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \simeq \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}} \qquad (17\text{-}8)$$

c'est l'équation de propagation d'une onde qui se propage avec la vitesse c le long de l'axe Oz, mais qui est modifiée en chaque point par la polarisation P_x du milieu traversé.

Remarque 17.1 – L'hypothèse du milieu homogène implique que la susceptibilité χ du milieu soit uniforme, la même en tout point de l'espace. Or nous avons vu (*cf.* chapitre 3) que la susceptibilité dépend de l'intensité lumineuse lorsque celle-ci devient élevée ; supposer l'intensité uniforme n'est pas réaliste pour un faisceau laser ; aussi les calculs de ce chapitre ne peuvent en toute rigueur s'appliquer qu'à des ondes d'intensités pas trop fortes pour lesquelles χ peut être considérée comme indépendante de l'intensité (c'est-à-dire en dessous de la saturation). L'interprétation de phénomènes spécifiques des hautes intensités, comme l'autofocalisation d'un faisceau, est donc exclue de l'étude qui suit.

Explicitons la divergence de $\overrightarrow{D}$; avec $\varepsilon = (1+\chi)\varepsilon_0$:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \overrightarrow{E}) = \varepsilon \operatorname{div} \overrightarrow{E} + \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}\, \varepsilon}$$

L'hypothèse χ uniforme, donne $\overrightarrow{\operatorname{grad}\, \varepsilon} = 0$, et compte tenu de $\operatorname{div} \overrightarrow{D} = 0$, elle conduit à $\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0$ et $\operatorname{div} \overrightarrow{P} = 0$; ce qui justifie la première équation (17-4).

17.3 Onde plane progressive quasi sinusoïdale (approximation de l'enveloppe lentement variable). Laser amplificateur

L'approximation que nous faisons dans ce paragraphe est semblable à celle que nous avons faite pour les ondes paraxiales au §16.2, en séparant dans l'expression du champ électrique la partie qui varie très rapidement en fonction des variables d'espace et de temps et la partie qui varie beaucoup plus lentement, soit avec la notation complexe :

$$E_x(z,t) = \mathcal{F}(z,t)\mathrm{e}^{ikz - i\omega t} \quad \text{avec } k \approx \frac{\omega}{c} \tag{17-9}$$

où la fonction complexe $\mathcal{F}$, appelée enveloppe, est supposée avoir des variations en fonction de z et de t beaucoup moins rapides que celles des exponentielles complexes ; cette hypothèse d'enveloppe lentement variable s'écrit séparément pour chacune des deux variables z et t :

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}\right| &\ll k\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right| \ll k^2|\mathcal{F}| \\ \left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}\right| &\ll \omega\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right| \ll \omega^2|\mathcal{F}| \end{aligned}\right\} \tag{17-10}$$

La première des conditions ((17-10)) est identique à la condition (16-15) du chapitre précédent ; la deuxième est nouvelle parce que dans le présent chapitre nous réservons la possibilité d'une variation temporelle de l'intensité lumineuse (alors qu'au chapitre 16 nous nous limitions à des solutions sinusoïdales stationnaires, d'amplitude constante). Sans doute cette variation d'intensité ne doit-elle pas être trop rapide ; la deuxième condition (17-10) impose que la variation relative d'intensité soit très inférieure à l'unité pendant une période de l'onde optique (couramment entre 10^{-14} et 10^{-15} seconde) ; elle est parfaitement vérifiée pour des impulsions de la nanoseconde ; elle est encore approchée avec des impulsions de quelques picosecondes. **Dans certains cas on pourra également supposer que la variation de l'enveloppe $\mathcal{F}$ est lente en regard des temps de relaxation atomiques τ_1 et τ_2 afin de pouvoir utiliser les solutions stationnaires des équations quantiques de Bloch** qui déterminent la polarisation atomique P_x ; cette hypothèse s'écrit mathématiquement sous la forme :

$$\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right| \ll \frac{1}{\tau_1}|\mathcal{F}| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau_2}|\mathcal{F}| \tag{17-11}$$

Ces conditions vont nous permettre de négliger les dérivées secondes de $\mathcal{F}$ dans l'expression de l'équation d'onde :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \left[\cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}} + 2ik\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - k^2\mathcal{F}\right]\mathbf{e}^{ikz - i\omega t} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \left[\cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}} - 2i\omega\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} - \omega^2\mathcal{F}\right]\mathbf{e}^{ikz - i\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}12)$$

compte tenu de cette simplification, l'équation (17-8) (multipliée par c^2) devient :

$$\left[(\omega^2 - k^2c^2)\mathcal{F} + 2i\left(kc^2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \omega\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)\right]\mathbf{e}^{ikz - i\omega t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \qquad (17\text{-}13)$$

On remarquera que les hypothèses (17-10) n'empêchent pas les termes contenant les dérivées premières d'avoir une importance prépondérante, parce que le coefficient de $\mathcal{F}$ est très petit si le vecteur d'onde k est très voisin de ω/c (milieux dilués). Ce coefficient peut être réécrit de manière simplifiée :

$$\omega^2 - k^2c^2 = (\omega + kc)(\omega - kc) \approx 2\omega(\omega - kc)$$

La même approximation peut être appliquée au coefficient $kc^2 \approx \omega c$ devant $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$; on obtient alors :

$$\boxed{2\omega\left[(\omega - kc)\mathcal{F} + i\left(c\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)\right]\mathbf{e}^{ikz - i\omega t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}} \qquad (17\text{-}14)$$

La polarisation atomique P_x a été calculée dans la première partie en fonction du champ électrique local (*cf.* formules (2-5) et (3-10)) :

$$E_x(t) = \mathcal{E}_1 \cos\omega t \quad \Longrightarrow \quad P_x = nd_{ab}(u\cos\omega t - v\sin\omega t)$$

ce sont les parties réelles des notations complexes :

$$E_x(t) = \mathcal{E}_1\,\mathbf{e}^{-i\omega t} \quad \Longrightarrow \quad P_x = nd_{ab}(u - iv)\,\mathbf{e}^{-i\omega t} \qquad (17\text{-}15)$$

(avec la convention $\mathbf{e}^{+i\omega t}$, on écrirait $u + iv$; $\mathcal{E}_1$ est une amplitude réelle). L'utilisation de ce résultat dans le problème actuel nous oblige à repérer la phase du champ électrique dans le plan z à l'instant t ; en posant :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}(z,t) &= \mathcal{E}(z,t)\mathbf{e}^{+i\varphi(z,t)} \quad \text{avec } \mathcal{E} \text{ réel} \\ \text{soit} \quad E_x(z,t) &= \mathcal{E}(z,t)\mathbf{e}^{ikz - i\omega t + i\varphi(z,t)} \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}16)$$

L'amplitude réelle $\mathcal{E}$ et la phase φ du champ doivent bien sûr varier lentement en fonction de z et de t, en accord avec les conditions (17-10) et (17-11). Les conditions obtenues, pour $\mathcal{E}$ sont la simple transposition de (17-10) et (17-11) en y remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{E}$. Les conditions appliquées à φ s'écrivent plus simplement encore :

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right| \ll k^2\,,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \ll k \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right| \ll \omega^2\,,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| \ll \omega \tag{17-17}$$

De (17-15) et (17-16) nous déduisons la polarisation atomique dans le plan z à l'instant t

$$P_x(z,t) = nd_{ab}(u - iv)\mathbf{e}^{ikz - i\omega t + i\varphi(z,t)} \tag{17-18}$$

Dans la dérivation de P_x nous devons en toute rigueur tenir compte aussi des dérivées $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ des variables de Bloch. Nous avons vu dans la première partie que les vitesses de variation de u et v peuvent être suivant les cas de l'ordre de $1/\tau_1$ et $1/\tau_2$ ou de la fréquence de Rabi $\Omega_1 = d_{ab}\mathcal{E}/\hbar$. Dans la plupart des expériences, ces quantités sont très inférieures à la fréquence optique ω de l'exponentielle imaginaire ; et ceci nous permet généralement de négliger les dérivées de u et v.

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} \approx -i\left(\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)P_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \approx -\left(\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 P_x \approx -\omega^2 P_x \tag{17-19}$$

en négligeant grâce à (17-17) un terme en $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Les dérivées temporelles font apparaître une fréquence réelle instantanée $\left(\omega - \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ qui grâce à (17-17) pourra être confondue pratiquement avec ω.

Il nous reste à exprimer en fonction de $\mathcal{E}$ et φ les dérivées de $\mathcal{F}$:

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + i\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathcal{E}\right)\mathbf{e}^{i\varphi} \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + i\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathcal{E}\right)\mathbf{e}^{i\varphi}$$

Lorsqu'on exprime le premier membre de l'équation différentielle (17-14) en fonction de $\mathcal{E}$ et le second membre à l'aide de (17-19) et (17-18), on voit apparaître en facteur de façon symétrique dans les deux membres la même exponentielle imaginaire $\mathbf{e}^{ikz - i\omega t + i\varphi}$, que l'on peut ainsi faire disparaître :

$$2\omega\left[\left(\omega - kc - c\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathcal{E} + i\left(c\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right)\right] = -\omega^2\frac{nd_{ab}}{\varepsilon_0}(u - iv)$$

$$\left[\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - c\left(k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\mathcal{E} + i\left(c\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\omega n d_{ab}}{2\varepsilon_0}(u - iv) \tag{17-20}$$

La séparation des parties réelle et imaginaire conduit à deux équations différentielles distinctes pour $\varphi(z,t)$ et $\mathcal{E}(z,t)$:

$$\omega - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - c\left(k + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\omega\frac{nd_{ab}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{u}{\mathcal{E}} = -\frac{\omega}{2}\chi' \qquad \text{(17-21a)}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + c\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} = \omega\frac{nd_{ab}}{2\varepsilon_0}v = -\frac{\omega}{2}\chi''\mathcal{E} \qquad \text{(17-21b)}$$

en introduisant les susceptibilités réelle et imaginaire χ' et χ'' calculées en (3-12). La deuxième équation qui détermine l'amplitude $\mathcal{E}$ du champ est totalement indépendante de la phase φ ; la première équation qui détermine la phase dépend encore de l'amplitude $\mathcal{E}$ par l'intermédiaire de la fréquence de Rabi $\Omega_1 = d_{ab}\dfrac{\mathcal{E}}{\hbar}$ qui figure dans l'expression de χ'. *Mais si l'on est très en dessous de la saturation (comme nous l'avons supposé au §17.2, cf. remarque 17.1) $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$, ce terme dépendant de $\mathcal{E}$ est négligeable, et les deux équations sont indépendantes.*

Ces équations permettent d'étudier la propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu dilué ($k \approx \omega/c$). La première équation fait apparaître la fréquence réelle instantanée ($\omega - \partial\varphi/\partial t$) et la fréquence spatiale locale ($k + \partial\varphi/\partial z$) de l'onde. Cette variation de la fréquence instantanée de l'onde peut être comprise comme l'analogue d'un effet Doppler-Fizeau, provoqué ici par la variation de la vitesse de propagation de l'onde, quand l'indice de réfraction du milieu varie avec la partie réelle u ou χ' de la polarisation atomique (on l'observe effectivement dans des expériences en impulsions). Dans le cas des milieux condensés ($k \neq \omega/c$), les équations ci-dessus gardent la même allure, mais avec des valeurs différentes des coefficients.

Dans un milieu très dilué, il est possible de choisir $\omega = kc$ et l'équation (17-21a) de la phase devient très semblable à celle de l'amplitude :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z} = +\frac{\omega}{2}\chi' \qquad \text{(17-22)}$$

Cas particulier d'une onde continue en régime stationnaire (amplitude et phase constantes), issue d'une source lumineuse permanente.

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(17-23)}$$

• (17-22) $\Longrightarrow \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\omega}{2c}\chi' = k\dfrac{\chi'}{2}$

On en déduit le déphasage $\varphi(z) = \dfrac{\chi'}{2}kz$; c'est bien le *retard de phase* que l'on calcule avec un indice de réfraction n_r sur la longueur z :

$$n_r - 1 = \chi'/2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = (n_r - 1)kz = (n_r - 1)2\pi z/\lambda$$

• (17-21)b $\Longrightarrow \dfrac{1}{\mathcal{E}} \cdot \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\dfrac{\omega}{2c}\chi'' = -k\dfrac{\chi''}{2}$,

et l'on en déduit le coefficient d'absorption de l'intensité :

$$K = -\frac{1}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = -2\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = +k\chi'' = \frac{2\pi}{\lambda}\chi''$$

tel que $\mathcal{E}^2(z) = \mathcal{E}^2(0)\mathrm{e}^{-Kz}$.

Dans les conditions les plus courantes, la constante m_0 qui figure dans les expressions (3-12) de χ' et χ'' est positive, égale à l'unité ($m_0 = 1$) ; et donc χ'' et K sont positifs, conduisant à une diminution de l'intensité lumineuse $\mathcal{E}^2$ au cours de la propagation. Mais si la lumière traverse un milieu où une technique de pompage a réalisé une inversion des populations, alors m_0 est négatif ainsi que χ'' et K (au contraire v est positif). L'intensité $\mathcal{E}^2$ augmente au cours de la propagation. *On retrouve l'amplification d'énergie lumineuse déjà étudiée dans la 2e partie. Mais elle apparaît ici comme une véritable amplification du champ électrique de l'onde, résultant des équations de Maxwell, lorsque la composante v de la polarisation atomique, en quadrature avec le champ, devient positive. Nous avons ainsi décrit le principe de fonctionnement des amplificateurs* laser.

En définitive ce paragraphe nous a permis de préciser les diverses approximations qui doivent être vérifiées pour valider les résultats de la partie II, obtenus à partir des équations de probabilités.

17.4 Onde stationnaire dans une cavité laser (en dessous de la saturation)

Nous nous restreindrons dans ce paragraphe aux cavités stables, dont le coefficient de qualité est relativement élevé, généralement utilisées dans le cas des lasers continus.

Remarque 17.2 – Nous excluons donc de cette étude les lasers en impulsions pour lesquels un pompage momentanément très intense permet de produire un coefficient d'amplification instantané très élevé. Dans ce cas, l'onde réfléchie sur le miroir, après un premier passage dans le milieu, a une intensité très supérieure à l'onde initiale ; et la superposition de ces deux ondes Aller et Retour, d'intensités très différentes, ne forme pas une onde stationnaire. On utilise souvent dans les lasers impulsionnels des cavités dites instables (*cf.* chapitre 16) dont le coefficient de qualité est très faible parce que l'onde ne peut subir qu'un très petit nombre d'Allers et Retours avant d'être éjectée de la cavité ; nous n'envisageons pas ici ce type de cavité.

Nous considérons donc des lasers continus pour lesquels le gain en un passage est de l'ordre de 1,1 ou inférieur. C'est souvent le cas avec un milieu amplificateur gazeux ; ce peut être aussi un milieu amplificateur condensé (solide ou liquide) utilisé sous une faible épaisseur mais alors l'équation

de propagation avec second membre ne s'applique que sur une faible fraction de la longueur de cavité. On suppose bien sûr que la fréquence ω de l'onde ou plutôt sa longueur d'onde λ est accordée à la longueur l de la cavité :

$$l = N\frac{\lambda}{2} = N\frac{\pi}{k} \quad (N \text{ entier}) \quad \Longrightarrow \quad k = N\frac{\pi}{l} \tag{17-24}$$

de manière que toutes les ondelettes Aller soient en phase entre elles, et de même toutes les ondelettes Retour. Dans ces conditions, deux ondelettes Aller et Retour successives ont des amplitudes très voisines et réalisent approximativement une onde stationnaire, caractérisée par :

1. une phase φ de l'onde résultante identique en tout point de l'onde stationnaire ; la phase φ ne dépend pas de z ;

2. une amplitude résultante $\mathcal{E}\sin kz$ qui varie sinusoïdalement selon l'axe Oz de la cavité, avec des ventres du champ électrique tous égaux (en module).

$$\left.\begin{aligned} &E_x(z,t) = \mathcal{F}\sin kz \cdot \mathbf{e}^{-i\omega t} = \left(\mathcal{E}\,\mathbf{e}^{i\varphi}\right)\sin kz \cdot \mathbf{e}^{-i\omega t} \\ &\text{avec} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17-25}$$

où $\mathcal{E}$ *représente une une valeur moyenne du module du champ aux ventres de l'onde stationnaire*, supposés presque identiques. Une différence importante par rapport au paragraphe précédent c'est que le module $\mathcal{E}$ aux ventres de l'onde stationnaire et la phase φ ne dépendent pas de z (grâce au choix d'une amplitude algébrique en $\sin kz$, changeant de signe à chaque nœud de l'onde stationnaire). Mais comme dans le paragraphe précédent, nous supposerons que l'amplitude complexe $\mathcal{F}(t) = \mathcal{E}(t)\mathbf{e}^{i\varphi(t)}$ est une fonction lentement variable au sens des équations (17-10) et (17-11).

La variation rapide du champ électrique E_x en fonction de z s'exprime maintenant sous la forme de la fonction réelle $\sin kz$; qui remplace l'exponentielle complexe $\mathbf{e}^{ikz}$ du paragraphe précédent. Heureusement l'équation différentielle de l'onde (17-8) ne contient pas la dérivée première par rapport à z, mais seulement la dérivée seconde qui s'écrit de manière très simple :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x = -k^2 \mathcal{F}\sin kz \cdot \mathbf{e}^{-i\omega t}$$

La dérivée temporelle, au contraire, garde une expression plus compliquée, mais l'hypothèse de l'enveloppe $\mathcal{F}$ lentement variable nous permet de négliger la dérivée seconde de $\mathcal{F}$ comme dans les équations (17-12). Il suffit simplement d'y remplacer l'exponentielle complexe $\mathbf{e}^{ikz}$ par la fonction réelle $\sin kz$ et la seconde équation (17-12) devient maintenant :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \left[\cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}} - 2i\omega\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} - \omega^2 \mathcal{F}\right]\sin kz \cdot \mathbf{e}^{-i\omega t} \tag{17-26}$$

Tous les calculs du paragraphe précédent peuvent être repris, et nous n'en résumons ici que quelques étapes sans justification ; l'équation (17-14) devient :

$$2\omega\left[(\omega-kc)\mathcal{F}+i\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right]\sin kz\cdot\mathbf{e}^{-i\omega t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}$$

$$2\omega\left[(\omega-kc)\mathcal{E}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathcal{E}+i\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right]\sin kz\cdot\mathbf{e}^{-i\omega t+i\varphi}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}\qquad(17\text{-}27)$$

Avant d'étudier le second membre de cette équation, qui dépend de la polarisation atomique P_x, il nous faut encore étudier un autre phénomène important, qui modifie la variation temporelle du champ, et qui n'est pas représenté par l'équation différentielle (17-8) ; il s'agit de la perte d'énergie dans les réflexions partielles sur les miroirs qui bordent la cavité optique. Ce phénomène a été calculé au premier paragraphe du chapitre 9, où nous avons étudié la variation temporelle de l'énergie W_{cav} de l'onde enfermée dans la cavité. Cette énergie W_{cav} est proportionnelle au carré de l'amplitude $\mathcal{E}^2$ de l'onde stationnaire ; et la transformation des équations (9-4) et (9-6) nous permet d'écrire la contribution supplémentaire de ce phénomène à la variation d'amplitude :

$$\frac{1}{\mathcal{E}^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}^2}{\mathrm{d}t}=-\big[(1-R_A)+(1-R_B)\big]\frac{c}{2l}=-\frac{1}{\tau_c}=-\frac{\omega}{Q}$$

soit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{miroirs}}=-\frac{1}{2\tau_c}\mathcal{E}=-\frac{\omega}{2Q}\mathcal{E}$$

Dans le fonctionnement réel d'une cavité laser, nous devons écrire la variation temporelle globale de l'amplitude en ajoutant cet effet de perte d'énergie sur les miroirs à la variation résultant des équations de Maxwell à l'intérieur de la cavité :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{global}}=\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right)_{\text{Maxwell}}+\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{miroirs}}=\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right)_{\text{Maxwell}}-\frac{\omega}{2Q}\mathcal{E}\qquad(17\text{-}28)$$

où $\left(\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right)_{\text{Maxwell}}$ est la dérivée calculée dans l'équation (17-27). Nous remplaçons donc dans l'équation (17-27) la dérivée $\left(\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right)_{\text{Maxwell}}$ par son expression tirée de (17-28) :

$$2\omega\left[\left(\omega-kc-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\mathcal{E}+i\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}+\frac{\omega}{2Q}\mathcal{E}\right)\right]\sin kz\,\mathbf{e}^{-i\omega t+i\varphi}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}\qquad(17\text{-}29)$$

c'est-à-dire que dans cette équation (17-29) la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée globale. Nous pouvons maintenant remplacer la polarisation atomique P_x par son expression calculée à partir des équations de Bloch. Nous devons tenir compte de la phase du champ électrique (17-25) ; et nous remplaçons l'expression (17-18) de la polarisation par :

$$\begin{aligned} P_x(z,t) &= nd_{ab}\big[u(z) - iv(z)\big]\,\mathbf{e}^{-i\omega t + i\varphi} \\ &= \Big[\chi'(z) + i\chi''(z)\Big]\varepsilon_0\mathcal{E}\sin kz\;\mathbf{e}^{-i\omega t + i\varphi} \end{aligned} \tag{17-30}$$

nous avons écrit ici $u(z)$ et $v(z)$ pour rappeler que les solutions de l'équation de Bloch doivent être calculées en chaque point à partir d'une amplitude variable de l'onde $\mathcal{E}_1(z) = \mathcal{E}\sin kz$. La seconde expression, faisant apparaître la susceptibilité complexe $\chi' + i\chi''$, sera plus facile à utiliser parce qu'elle fait apparaître en facteur dans l'expression de P_x le même facteur $\sin kz\;\mathbf{e}^{-i\omega t + i\varphi}$ qui figure déjà dans l'expression de $\mathcal{E}$ et de ses dérivées. On peut alors supprimer ce facteur qui apparaît de façon symétrique dans les deux membres de l'équation (17-29). Le calcul de la dérivée seconde de P_x est encore réduit au terme $-\omega^2 P_x$ en négligeant les dérivées de $\mathcal{E}$ et de φ (enveloppe lentement variable) ; et l'on obtient l'analogue de l'équation (17-20) :

$$\left(\omega - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - kc\right)\mathcal{E} + i\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{2Q}\mathcal{E}\right) = -\frac{\omega}{2}\left(\chi' + i\chi''\right)\mathcal{E} \tag{17-31}$$

Le premier membre de cette équation est indépendant de z ; il peut donc être compatible avec le second à condition seulement que la variation avec z des susceptibilités χ' et χ'' soit négligeable. Compte tenu des expressions (3-12) des susceptibilités, ceci exige que l'on puisse négliger le terme en Ω_1 qui dépend du champ, c'est-à-dire que l'on soit **très *en dessous de la saturation*** ($\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$). On peut alors séparer les parties réelle et imaginaire pour obtenir les équations séparées de la phase et de l'amplitude :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - kc &= -\frac{\omega}{2}\chi' && \text{(17-32a)} \\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\omega}{2}\left(\chi'' + \frac{1}{Q}\right)\mathcal{E} && \text{(17-32b)} \end{aligned}}$$

Mais ces équations ne sont valides que pour de faibles amplitudes $\mathcal{E}$, c'est-à-dire à l'allumage d'un laser ou bien pour un laser fonctionnant au voisinage du seuil. On peut aussi les généraliser (en tenant compte de la variation avec $\mathcal{E}$ de χ' et χ'') dans le cas d'une cavité en anneau que l'on a rendue unidirectionnelle parce qu'alors l'amplitude du champ est indépendante de z.

17.4.1 Conséquence sur la phase et la fréquence. Mode pulling

Nous faisons l'hypothèse que les variations temporelles sont assez lentes pour nous autoriser, de manière approchée, à utiliser les solutions stationnaires des équations de Bloch et les expressions (3-12) des susceptibilités :

$$\left.\begin{aligned} &\chi' + i\chi'' = \chi_0'' \frac{-\delta\omega\tau_2 + i}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2 + \Omega_1^2\tau_1\tau_2} \approx \chi_0'' \frac{-\delta\omega\tau_2 + i}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2} \quad \text{si} \quad \Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1 \\ &\text{avec} \quad \chi_0'' = nm_0 \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar} = -D_P \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar} < 0 \end{aligned}\right\} \tag{17-33}$$

$|\chi_0''|$ est la valeur maximale de la partie imaginaire de la susceptibilité au centre de la résonance en champ faible quand $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ est négligeable. Dans un milieu pompé dont les populations sont inversées, m_0 devient négatif et il est plus commode d'utiliser la population inversée $D_P = -nm_0 > 0$ introduite au chapitre 9. (Attention ! On prendra garde à ne pas confondre la densité atomique n des expressions ci-dessus avec l'indice de réfraction n_r utilisé dans la suite de ce paragraphe).

Tenant compte de la valeur du nombre d'onde accordé à la cavité (17-24) et du fait que χ_0'' est négatif nous pouvons réécrire la première équation (17-32a) :

$$\omega - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = N\pi\frac{c}{l} - \frac{\omega}{2}\chi_0'' \frac{-\delta\omega\tau_2}{1 + \delta\omega^2\tau_2^2} = N\pi\frac{c}{l} - \frac{\omega}{2}(-\chi'')\delta\omega\tau_2 \tag{17-34}$$

$\left(\omega - \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$ représente la fréquence circulaire vraie instantanée de l'onde ; $N\pi\dfrac{c}{l}$ représente la fréquence circulaire de résonance de la cavité vide. Nous calculons un faible écart entre ces deux fréquences, dû à la perturbation apportée par le milieu amplificateur. Pour évaluer cet écart, nous pouvons remplacer au second membre la fréquence ω par ω_0, la fréquence atomique dont elle reste très proche.

Cas d'un laser en régime continu obéissant aux conditions (17-23) :

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$$

- Si $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$, l'équation (17-34) détermine la fréquence ω du laser continu.

  Nous retrouvons là le phénomène de « mode pulling » déjà rencontré au début du chapitre 13 et illustré sur la figure 17.2 (qui est une reprise de la figure 13.2) : par rapport à la fréquence $N\pi\dfrac{c}{l}$ du mode de cavité à vide, la fréquence circulaire ω de l'onde laser se trouve tirée vers la fréquence atomique ω_0. Sans reprendre la discussion déjà effectuée

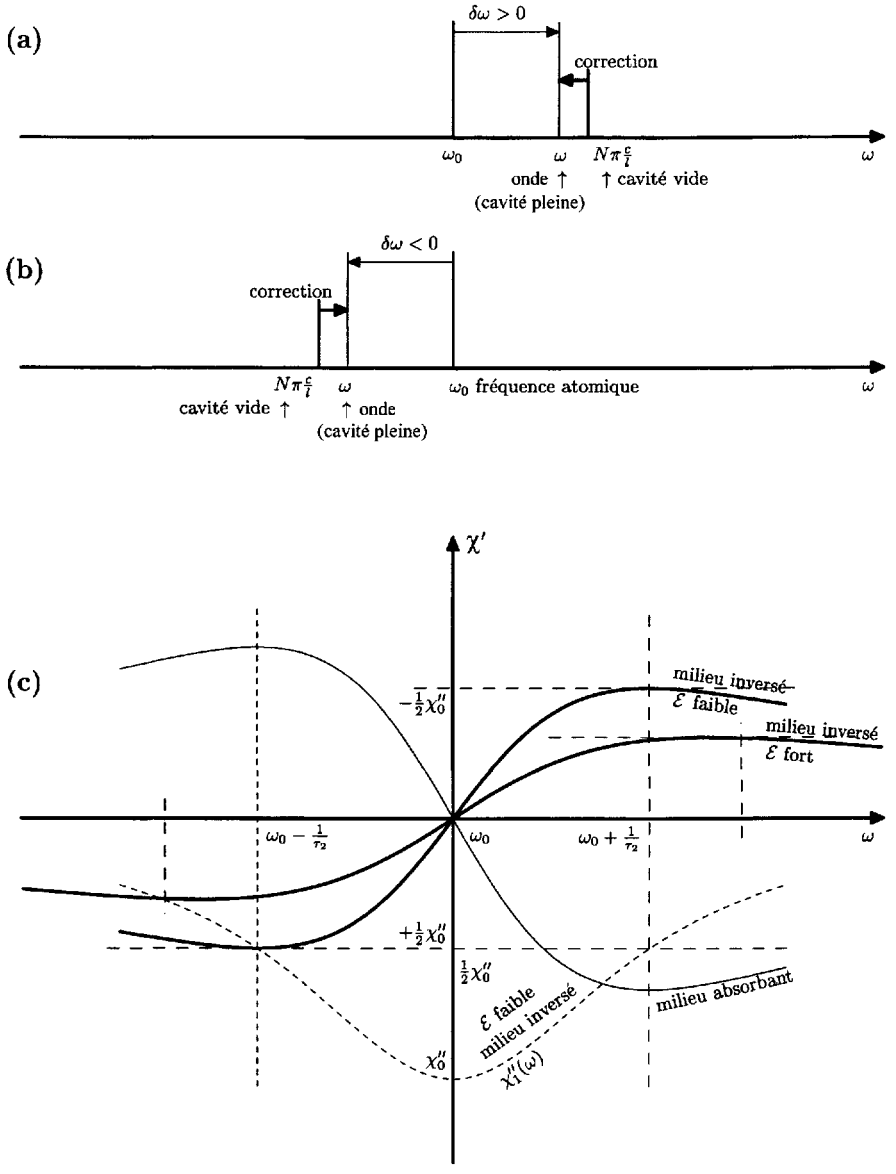


FIG. 17.2 – *« Mode pulling » dans l'émission laser : comparée à la fréquence de la cavité vide $N\pi c/l$, la fréquence émise subit un déplacement qui la tire vers la fréquence atomique ω_0 : (a) cas $\delta\omega = \omega - \omega_0 > 0$ – (b) cas $\delta\omega = \omega - \omega_0 < 0$ – (c) explication des corrections (a) et (b) par la variation de la susceptibilité réelle χ' en fonction de la fréquence ω (en trait tireté représentation de la susceptibilité imaginaire $\chi_1''(\omega)$ dans le cas du champ faible).*

au chapitre 13, nous pouvons ajouter une interprétation un peu différente de la même discussion, utilisant le vecteur d'onde. En effet, le nombre d'onde k est fixé par la condition de résonance de la cavité (17-24) ; mais alors la fréquence circulaire de l'onde $\omega = k\dfrac{c}{n_r}$ dépend de l'indice de réfraction n_r. Dans un milieu inversé (amplificateur), aux basses fréquences ($\omega < \omega_0$), χ' est négatif (*cf.* Fig. 17.2c), l'indice $n_r = \sqrt{1+\chi'}$ est inférieur à 1, et donc la fréquence ω est supérieure à la fréquence à vide kc ; aux hautes fréquences ($\omega > \omega_0$), χ' est positif, l'indice n_r est supérieur à 1 et la fréquence ω est donc inférieure à la fréquence à vide kc.

- En reportant la première condition (amplitude $\mathcal{E}$ constante) dans la seconde équation (17-32b) on obtient

$$\chi'' + \frac{1}{Q} = 0 \tag{17-35}$$

Nous retrouvons bien, de manière extrêmement directe, l'équation (13-5) dans le cas particulier où le coefficient de remplissage $\eta = 1$. En effet, nous avons simplifié l'exposé de ce chapitre 17 en supposant que la propagation se fait dans un milieu homogène ; il suffirait de distinguer la propagation dans le milieu matériel sur la longueur ηl et dans le vide sur la longueur $(1-\eta)l$ pour réintroduire le coefficient η comme nous l'avons fait au §13.1. Nous pourrions donc à partir de l'équation (17-35) démontrer à nouveau les relations (13-6) et (13-7) donnant la correction de fréquence par rapport à la résonance de cavité vide.

17.4.2 Conséquence sur l'amplitude du champ

La deuxième équation (17-32b) permet de retrouver le bilan d'énergie que nous avons calculé au chapitre 9. En multipliant les deux membres de cette équation par $2\mathcal{E}$, nous obtenons une équation différentielle portant sur le carré du champ $\mathcal{E}^2$, qui est proportionnel à l'énergie lumineuse enfermée dans la cavité W_{cav} :

$$\left.\begin{aligned} 2\mathcal{E}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}^2}{\mathrm{d}t} &= -\omega\left(\chi'' + \frac{1}{Q}\right)\mathcal{E}^2 \\ \text{soit}\quad \frac{\mathrm{d}W_{\text{cav}}}{\mathrm{d}t} &= -\omega\left(\chi'' + \frac{1}{Q}\right)W_{\text{cav}} \end{aligned}\right\} \tag{17-36}$$

Dans le cadre de la solution stationnaire des équations de Bloch (3-3) et (3-12), en tenant compte de la condition de non-saturation ($\Omega_1^2\tau_1\tau_2$ négligeable) :

$$\chi'' = \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar}\frac{nm_0}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} \approx \frac{d_{ab}^2\tau_2}{\varepsilon_0\hbar}\frac{nm_0}{1+\delta\omega^2\tau_2^2} = (n_a-n_b)\frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\cdot\frac{\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{cav}}}{\mathrm{d}t} = \left[(n_b - n_a)\frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0 \hbar}\omega \frac{\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2} - \frac{\omega}{Q}\right] W_{\mathrm{cav}} \qquad (17\text{-}37)$$

Compte tenu de (3-7) et (3-8) on peut réécrire :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{cav}}}{\mathrm{d}t} = \left[(n_b - n_a)B_{21}h\nu\varphi(\nu) - \frac{1}{\tau_c}\right] W_{\mathrm{cav}}$$

On retrouve bien l'équation (9-16) dans le cas particulier du coefficient de remplissage $\eta = 1$; en effet l'équation (17-32) est établie en supposant que le milieu amplificateur remplit complètement la cavité, entre les deux miroirs.

Le calcul fait ci-dessus n'est réellement valable que dans la mesure où, χ'', c'est-à-dire aussi la différence des populations $(n_b - n_a) = -nm_0$ varie peu en fonction de la position z (cas non saturé $\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1$; ou bien cavité en anneau que l'on a rendue unidirectionnelle). Nous avons déjà indiqué au §9.3 que la généralisation de la formule (9-16) aux fortes intensités lumineuses n'était pas rigoureuse à cause du terme non linéaire : produit $m(z)w(z)$ dont la valeur moyenne n'est pas évidente. C'est précisément le rôle du paragraphe suivant d'étudier les conséquences de ce terme non linéaire.

17.5 Effet de la saturation dans une onde stationnaire (laser oscillateur, modèle de Lamb)

Lorsque le champ électrique est de trop forte intensité, l'équation (17-30) calculant la polarisation P_x ne peut pas être utilisée aussi facilement à cause de la variation sensible de χ' et χ'' en fonction du champ, donc aussi de z. Nous étudions plus en détail cette variation des susceptibilités à partir des formules (3-12) résultant de la solution stationnaire des équations de Bloch :

$$\left.\begin{aligned} &\chi' + i\chi'' = \chi_0'' \frac{-\delta\omega\tau_2 + i}{1+\delta\omega^2\tau_2^2+\Omega_1^2\tau_1\tau_2} = \chi_1''(\delta\omega) \times \frac{-\delta\omega\tau_2 + i}{1+\left(\dfrac{\Omega_1^2\tau_1\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}\right)} \\ &\text{avec} \quad \chi_1''(\delta\omega) = \frac{\chi_0''}{1+\delta\omega^2\tau_2^2} \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}38)$$

χ_1'' est l'expression de la partie imaginaire de la susceptibilité en champ faible, telle que nous avons utilisée au paragraphe précédent. La courbe $\chi_1''(\delta\omega)$ est représentée sur la figure (17-2). Nous avons mis la susceptibilité sous cette forme pour pouvoir effectuer un développement limité en fonction du paramètre de saturation $\Omega_1^2\tau_1\tau_2$, défini en 3-18 en même temps que le champ

de saturation $\mathcal{E}_{\text{sat}}$ (3-17) ; c'est-à-dire que nous nous restreignons au cas d'une saturation faible ($\Omega_1^2\tau_1\tau_2 \lesssim 1$). Nous définissons provisoirement un champ de référence $\mathcal{E}_{\text{ref}}$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E}_{\text{ref}}^2 = \mathcal{E}_{\text{sat}}^2\left(1+\delta\omega^2\tau_2^2\right) = \frac{\hbar^2}{d_{ab}^2\tau_1\tau_2}\left(1+\delta\omega^2\tau_2^2\right) \\ &\text{avec}\quad \Omega_1^2\tau_1\tau_2 = \frac{\mathcal{E}_1^2(z)}{\mathcal{E}_{\text{sat}}^2} = \frac{\mathcal{E}^2\,\sin^2 kz}{\mathcal{E}_{\text{sat}}^2} \end{aligned}\right\} \tag{17-39}$$

($\mathcal{E}$ est le module du champ aux ventres de l'onde stationnaire) ; limitons le développement au premier ordre ; il vient :

$$\chi' + i\chi'' \approx \chi_1''(-\delta\omega\tau_2 + i)\left[1 - \frac{\Omega_1^2\tau_1\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}\right] = \chi_1''(-\delta\omega\tau_2+i)\left[1 - \frac{\mathcal{E}^2\,\sin^2 kz}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right] \tag{17-40}$$

Ceci nous permet de transformer la polarisation complexe écrite en (17-30) :

$$P_x \approx \varepsilon_0\chi_1''\mathcal{E}\,\sin kz\,\mathbf{e}^{-i\omega t + i\varphi}(-\delta\omega\tau_2+i)\left[1 - \frac{\mathcal{E}^2\,\sin^2 kz}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right]$$

Si l'on regroupe à l'intérieur du crochet les termes dépendant de z, on fait apparaître un terme en $\sin kz$ à la puissance 3. Mais un calcul classique de trigonométrie ou la simple multiplication des exponentielles complexes montre facilement que :

$$\sin^3 kz = \frac{3}{4}\sin kz - \frac{1}{4}\sin 3kz$$

On en déduit finalement la polarisation :

$$P_x = \varepsilon_0\chi_1''\mathcal{E}\,\mathbf{e}^{-i\omega t + i\varphi}(-\delta\omega\tau_2+i)\left[\sin kz\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\sin 3kz\right] \tag{17-41}$$

La polarisation produite par l'onde stationnaire sinusoïdale a bien la même périodicité spatiale $\lambda = 2\pi/k$, mais avec une distorsion notable correspondant au troisième harmonique $\sin 3kz$. La distorsion de la polarisation produit nécessairement dans l'équation de Maxwell une distorsion du champ de l'onde électromagnétique. Il nous faut donc reprendre le calcul à l'ordre d'approximation suivant en faisant l'hypothèse d'une onde spatialement distordue ; c'est-à-dire qu'il faut ajouter au champ (17-25), qui nous a servi d'hypothèse à l'ordre zéro, de faibles composantes harmoniques d'ordres supérieurs. Nous obtiendrons alors dans les deux membres de l'équation d'onde (17-29) une série de termes harmoniques. Comme ces fonctions harmoniques sont orthogonales entre elles, l'équation (17-29) sera effectivement satisfaite si nous pouvons égaliser les coefficients de chacun de ces harmoniques dans les deux membres de l'équation.

En fait nous avons déjà obtenu en (17-40) la correction principale au terme fondamental en $\sin kz$, qui est du premier ordre en $\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{ref}}^2$ (d'autres corrections, s'il y en a, sont d'ordre supérieur). Pour que l'équation d'onde (17-29) soit satisfaite au premier ordre en $\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{ref}}^2$, il suffit d'écrire l'égalité des coefficients de $\sin kz$ entre le premier membre de (17-29) et le second membre $-\omega^2 P_x$ calculé à l'aide de (17-41). En séparant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons deux équations distinctes pour la phase et pour l'amplitude dont nous étudierons séparément les conséquences :

$$\left.\begin{aligned} \omega - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - kc &= +\frac{\omega}{2}\delta\omega\tau_2\chi_1''\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\omega}{2}\left[\chi_1''\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right) + \frac{1}{Q}\right]\mathcal{E} \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}42)$$

17.5.1 Conséquence sur la phase et la fréquence

En remplaçant k encore par son expression (17-24) en cavité, la première équation (17-41) nous donne une expression de l'écart au mode de cavité vide très voisin de (17-34), simplement corrigé par le facteur $\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_{\text{ref}}^2}\right)$, c'est-à-dire un peu réduit par rapport à l'écart calculé en champ faible au paragraphe précédent. Ceci s'explique bien par la saturation de la dispersion.

Sur la partie (c) de la figure 17.2 nous avons rappelé que la susceptibilité dépend de l'intensité de l'onde quand apparaît le phénomène de saturation : la courbe la plus haute en trait plein correspond au cas des champs faibles ($\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{sat}}^2 \ll 1$). La courbe la plus basse en tiretés épais correspond à un début de saturation ($\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{sat}}^2 \approx 0,4$) : on voit que $|\chi'|$ est plus faible c'est-à-dire que l'effet du mode pulling est réduit. Ceci est bien en conformité avec la formule (17-42) où le terme correctif en $\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{ref}}^2$ vient en réduction sur l'écart de fréquence calculé en champ faible. Ce terme correctif produit un effet de signe opposé au terme principal, comme si la fréquence atomique ω_0 repoussait la fréquence ω du mode au lieu de l'attirer ; c'est pourquoi on l'appelle parfois terme de « mode pushing ». Mais on doit noter que l'effet global est lié au signe de la susceptibilité réelle χ' ; et l'intensité de l'onde ne peut jamais inverser le signe de χ'. L'effet global du milieu amplificateur est toujours une attraction de la fréquence de l'onde vers la fréquence atomique, c'est-à-dire un « mode pulling ». Le signe de la susceptibilité ne dépend que des termes de pompage qui créent la différence de population inversée D_P. On notera que pour obtenir un fort champ $\mathcal{E}$, provoquant de la saturation, il faut augmenter le pompage, c'est-à-dire la différence D_P, c'est-à-dire aussi $|\chi_0''|$ *cf.* (17-33). En pratique le terme de « mode pushing » ne fait que compenser l'accroissement de $|\chi_0''|$. C'est bien clair dans le cas du régime continu de fonctionnement.

En effet lorsqu'on écrit $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 0$ pour caractériser le régime continu d'un laser, on remarque que les deux équations (17-42) contiennent le même développement limité en fonction de $\mathcal{E}^2$. Les démonstrations que nous avons faites au paragraphe précédent ainsi qu'au chapitre 13 en exprimant χ'' puis χ' en fonction de $1/Q$ peuvent se répéter ici identiquement ; c'est-à-dire que les corrections de fréquences (13-6) et (13-7), calculées par rapport à la cavité vide, ont une portée générale. *En définitive la correction de fréquence d'un* laser *continu est indépendante de l'intensité du pompage. Cela vient du fait que le* laser *continu fonctionne toujours au seuil dans des conditions où la différence de population réelle* $D_{\text{seuil}} = (n_b - n_a)_{\text{seuil}}$ *a toujours la même valeur.*

17.5.2 Conséquences de l'équation sur l'amplitude

Nous commençons par réécrire la deuxième équation (17-42) avec un double but :

1. tenir compte du fait que χ_0'' est négatif (17-33) d'une part ;
2. remplacer le paramètre $\mathcal{E}_{\text{ref}}^2$ (17-39), pour exprimer le résultat en fonction du paramètre de saturation aux ventres de l'onde stationnaire $\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_{\text{sat}}^2$ d'autre part.

De manière plus précise nous choisissons de nous aligner sur d'autres auteurs en représentant l'intensité lumineuse par une quantité sans dimension, égale à la *valeur moyenne du paramètre de saturation* dans la cavité :

$$I = \frac{\mathcal{E}^2 \overline{\sin^2 kz}}{\mathcal{E}_{\text{sat}}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{sat}}}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{sat}}\sqrt{2}}\right)^2 \tag{17-43}$$

L'équation de l'amplitude peut alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}\Bigg[\underbrace{\left(-\frac{\omega}{2}\chi_1''\right) - \frac{\omega}{2Q}}_{a} - \underbrace{\frac{3}{4}\frac{-\omega\chi_1''}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}}_{\beta}\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{sat}}\sqrt{2}}\right)^2\Bigg] \\ = \mathcal{E}\left[a - \beta\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{sat}}\sqrt{2}}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{17-44}$$

avec χ_1'' défini en (17-38). Nous avons ainsi retrouvé d'une manière assez rapide (mais par une démonstration moins complète et moins générale) les coefficients a et β utilisés dans l'ouvrage de W. Lamb (réf. [1]).

L'équation (17-44) peut encore être transformée en une équation portant sur l'intensité en multipliant les deux membres de l'équation par $2\mathcal{E}$, suivant la méthode utilisée en (17-36) à la fin du paragraphe précédent. On obtient

alors :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 2I(a - \beta I) \tag{17-45}$$

Cette équation permet d'étudier le démarrage de l'oscillation laser comme nous l'avons déjà fait au chapitre 11 (*cf.* remarque ci-dessous). Elle peut aussi être généralisée au cas d'une oscillation sur plusieurs modes simultanés.

Dans le cas de deux modes, par exemple, de fréquences ω_1 et ω_2 d'intensités I_1 et I_2, on obtiendra un système d'équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} &= 2I_1(a_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2) \\ \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} &= 2I_2(a_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1) \end{aligned}\right\} \tag{17-46}$$

où les coefficients θ_{12} et θ_{21} sont appelés coefficients de *saturation croisée* par opposition aux coefficients β_1 et β_2 *d'autosaturation.* En effet les deux ondes 1 et 2 interagissent avec les mêmes atomes et contribuent toutes les deux à leur polarisation. Le calcul des coefficients θ est complexe : on y trouve des termes dépendant d'une modulation de la polarisation atomique (et des populations) à la fréquence de battement des deux ondes ; et il y a d'autres termes dépendant du battement spatial des deux ondes stationnaires (le phénomène de saturation croisée est plus important là où les ventres des deux ondes stationnaires coïncident ; il est plus faible dans les zones de la cavité où les ventres d'une onde coïncident avec les nœuds de l'autre). Le calcul est également très différent selon que la largeur de la raie atomique est homogène ou au contraire essentiellement de nature inhomogène (largeur Doppler dans les gaz, par exemple).

Les équations (17-46) permettent d'étudier l'évolution temporelle des deux modes en compétition dans la cavité laser. Les solutions permanentes sont obtenues en écrivant la nullité des deux dérivées $\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire la nullité des deux parenthèses figurant aux seconds membres des équations (17-46) :

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 I_1 + \theta_{12} I_2 &= a_1 \\ \beta_2 I_2 + \theta_{21} I_1 &= a_2 \end{aligned}\right\} \tag{17-47}$$

Ce système de deux équations algébriques à deux inconnues a des solutions simples :

$$I_1 = \frac{a_1\beta_2 - a_2\theta_{12}}{\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{a_2\beta_1 - a_1\theta_{21}}{\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}}$$

si ces deux solutions sont positives, les deux modes peuvent fonctionner simultanément en continu. Si l'une de ces solutions est négative, elle est impossible et doit être remplacée par une intensité nulle ; c'est-à-dire que le mode correspondant est transitoire : il peut prendre naissance lorsque l'autre mode est

très faible, mais ensuite son intensité décroît, et lorsqu'elle arrive à zéro la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ s'annule, stoppant toute évolution ultérieure. La discussion de ces solutions permanentes utilise le plus souvent une représentation dans un plan d'axes I_1 et I_2 où les deux équations (17-47) sont figurées par deux droites, dont on cherche l'intersection. Mais nous renvoyons pour cela à la figure 17.3, et à des ouvrages plus spécialisés.

Remarque 17.3 – *Démarrage de l'oscillation* laser *d'après l'équation (17-45).* Les coefficients a et β sont calculés en (17-44) à partir de χ'' (17-38), c'est-à-dire la solution stationnaire de la polarisation atomique. Cette valeur stationnaire est effectivement atteinte, au moins approximativement, si l'intensité lumineuse varie lentement par rapport aux temps de relaxation τ_1 et τ_2 des équations de Bloch ; or les probabilités des processus de pompage s'ajoutent à la probabilité d'émission spontanée A_{21} pour donner la probabilité de relaxation $1/\tau_1$ (*cf.* §2.3 et §9.5). En utilisant χ'' nous faisons donc l'hypothèse que les processus de pompage sont plus rapides que les changements d'intensité et qu'à très faible intensité la différence de population atteint pratiquement la valeur maximum D_P(qui intervient dans l'expression de χ_0''). L'équation différentielle (17-45) doit donc nous permettre de traiter le second problème du §11.2, à savoir le démarrage d'un laser par déblocage de sa cavité à partir de la différence de population maximum D_P. Au démarrage, tant que I est très petit, le second terme βI est négligeable devant a et l'équation se réduit pratiquement à :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \approx 2aI \quad \Longrightarrow \quad I(t) \approx I(0)\mathrm{e}^{+2at} \tag{17-48}$$

à comparer avec le modèle phénoménologique (11-5) :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \approx \left(\frac{D_P}{D_{\text{seuil}}} - 1\right)\frac{1}{\tau_c}\,w \quad \text{valable tant que} \quad D(t) \approx D_P$$

Ceci permettait de décrire la partie basse, exponentielle, de la courbe de la figure 11.3. Ces deux modes de calcul sont cohérents si :

$$2a = \frac{D_P}{D_{\text{seuil}}\,\tau_c} - \frac{\omega}{Q} = D_P\hbar\omega B_{21}\varphi(\nu) - \frac{\omega}{Q} \tag{17-49}$$

grâce à $D_{\text{seuil}}\tau_c = \dfrac{1}{h\nu B_{21}\varphi(\nu)}$ tiré de (9-17) avec le coefficient de remplissage $\eta = 1$.

En utilisant (3-7) $\varphi(\nu) = \dfrac{2\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2}$ et (3-8) $B_{21} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{d_{ab}}{\hbar}\right)^2$ il vient :

$$2a = \omega D_P \frac{d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\frac{\tau_2}{1+\delta\omega^2\tau_2^2} - \frac{\omega}{Q} = (-\omega\chi_1'') - \frac{\omega}{Q} \qquad \textit{cf.}\ (17\text{-}44)$$

Mais on ne cherchera pas à comparer les asymptotes horizontales (régimes continus) de ces deux modèles, qui sont tous les deux approchés, mais reposent sur des approximations différentes. On calcule des intensités voisines en régime continu à condition seulement que l'on se trouve très en dessous de la saturation ($I \ll 1$, c'est-à-dire encore $|\chi_1''| \approx 1/Q$).

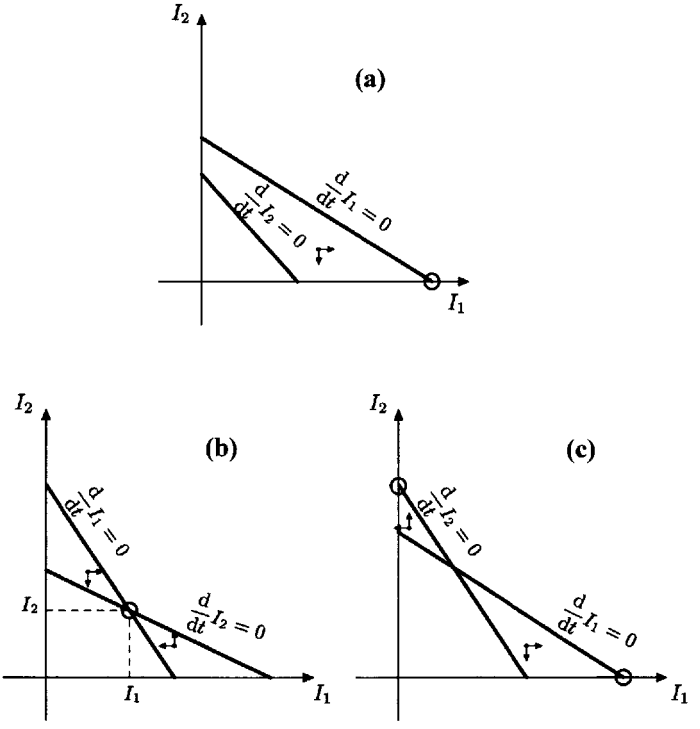


FIG. 17.3 – *Compétition entre deux modes simultanés d'un laser, d'intensités respectives I_1 et I_2, d'après les équations différentielles (17-46).*

Les droites d'équations (17-47) tracées dans le quart de plan (I_1, I_2 positifs) représentent les points où soit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1 = 0$, *soit* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_2 = 0$. *On remarque que les dérivées* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I$ *sont positives du côté contenant l'origine* 0, *et négatives pour les grandes valeurs de I_1 et I_2. Cette remarque permet de discuter la stabilité des solutions possibles (petites flèches représentant les signes des dérivées) :*

(a) les deux droites ne se coupent pas ; le mode dont la droite représentative est la plus proche de l'origine s'éteint (ici $I_2 = 0$) ; seul reste l'autre mode, représenté par le petit cercle sur l'axe I_1.

Lorsque les deux droites se coupent :

(b) L'étude de stabilité autour du point d'intersection montre qu'il correspond à une solution stable où les deux modes I_1 et I_2 coexistent.

(c) L'étude de stabilité autour de l'intersection (dans l'espace entre les deux droites) montre qu'elle correspond à un équilibre instable. Le laser évolue vers une solution où l'un des deux modes s'éteint ; mais ce peut être l'un ou l'autre selon les conditions initiales.

17.6 Propagation d'impulsions ultracourtes : aires d'impulsion

Les calculs des paragraphes précédents ont été menés jusqu'au bout avec l'hypothèse que les variations d'intensité lumineuses étaient lentes devant les temps de relaxation atomique τ_1 et τ_2, ce qui nous permettait d'utiliser les solutions stationnaires des équations de Bloch. Dans ce dernier paragraphe, nous nous affranchissons de cette hypothèse pour étudier la propagation d'impulsions très courtes. Nous adopterons même l'hypothèse contraire : **la durée τ de l'impulsion est beaucoup plus courte que les temps de relaxation atomiques**. Nous restons cependant dans le cadre de l'hypothèse générale de l'enveloppe lentement variable (17-10) c'est-à-dire que la durée τ de l'impulsion reste beaucoup plus longue que la période $2\pi/\omega$ de l'onde lumineuse :

$$\underset{}{\frac{2\pi}{\omega}} \ll \underset{\text{(impulsion)}}{\tau} \ll \underset{\text{(atomiques)}}{\tau_1 \text{ et } \tau_2} \tag{17-50}$$

cette étude est un peu complexe, et nous fractionnons en plusieurs sous-paragraphes les diverses étapes de ce calcul.

17.6.1 Équations de Bloch sans relaxation

La lenteur (toute relative) de la relaxation atomique, et la forte intensité lumineuse (fréquence de Rabi $\Omega_1 = \frac{d_{ab}}{\hbar}\mathcal{E} \approx \frac{1}{\tau}$) nous autorisent à négliger complètement les termes d'amortissement dans les équations de Bloch, *cf.* formules (2-11), comme nous l'avons fait au §6.2 dans la première partie. Nous pouvons appliquer en chaque point z de l'axe de propagation de l'onde les résultats (6-4) de ce paragraphe ; à la fin de l'impulsion $T_0(z)$ les variables atomiques *à résonance* ($\delta\omega = 0$) valent :

$$\left.\begin{aligned} &m(z,T_0) = m_0 \cos\theta_0(z), \quad v(z,T_0) = -m_0 \sin\theta_0(z), \quad u(z,T_0) = 0 \\ &\text{avec} \quad \theta_0(z) = \frac{d_{ab}}{\hbar}\int_0^{T_0} \mathcal{E}(z,t)\,\mathrm{d}t = \frac{d_{ab}}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{17-51}$$

À résonance, l'aire d'impulsion $\theta_0(z)$ (*cf.* Fig. 17.4) suffit à caractériser l'action de l'onde sur les atomes.

Nous ne pouvons pas, bien sûr, nous contenter des solutions résonnantes car ces impulsions ultracourtes sont aussi très intenses ($\Omega_1 \geqslant 1/\tau$) et produisent sur les atomes des effets notables même lorsque l'écart à résonance est relativement important : $|\delta\omega| \sim \Omega_1 \geqslant 1/\tau$; et il est indispensable de tenir compte des solutions non résonnantes $u(\delta\omega, z, t)$ et $v(\delta\omega, z, t)$ en fonction de la variation temporelle du champ $\mathcal{E}(z,t)$ en chaque point z.

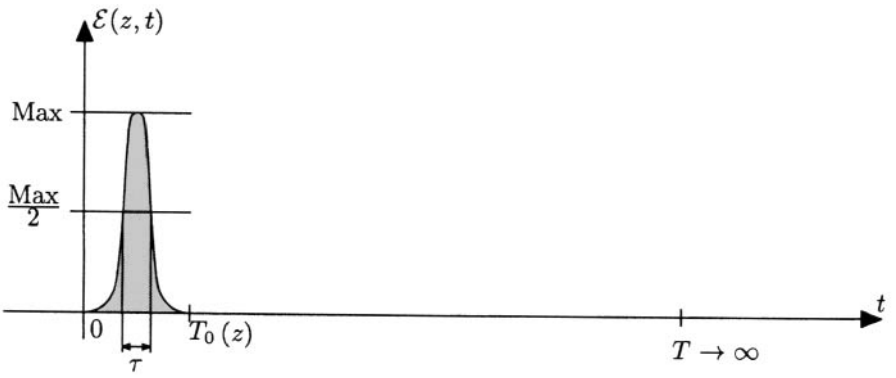


FIG. 17.4 – *Variation temporelle de l'amplitude du champ électrique $\mathcal{E}(z,t)$ d'une impulsion lumineuse de durée moyenne τ, en un point fixé z de l'axe de propagation. On a choisi arbitrairement le temps zéro juste avant le démarrage de l'impulsion. Dans le cas d'une impulsion résonnante ($\delta\omega = 0$), le vecteur de Bloch tourne d'un angle $\theta_0(z)$ proportionnel à l'aire grisée.*

17.6.2 Élargissement inhomogène

L'élargissement inhomogène de la raie atomique doit être obligatoirement pris en compte du fait que l'intensité du champ permet de mobiliser fortement des atomes qui ne sont pas exactement résonnants avec la fréquence ν de l'onde. Nous avons introduit au §3.4 cette notion de largeur inhomogène, lorsque la fréquence centrale ν_c (ou la pulsation $\omega_c = 2\pi\nu_c$) de la résonance atomique varie d'un atome à l'autre dans le même échantillon. Nous avons introduit au chapitre 13 les fonctions de répartition statistiques $F(\nu_c)$ ou $G(\omega_c)$ proportionnelles au nombre d'atomes de l'échantillon ayant la même valeur centrale ν_c ou ω_c, et normées à l'unité (*cf.*(13-18) et (13-22))en sorte que :

$$\int_0^{+\infty} F(\nu_c)\,\mathrm{d}\nu_c = 1 \text{ ou } \int_0^{+\infty} G(\omega_c)\,\mathrm{d}\omega_c = 1\,;\ \text{donc } F(\nu_c) = 2\pi G(\omega_c) \tag{17-52}$$

Dans le cas présent, la pulsation ω de l'onde est imposée et unique, et il est plus commode d'utiliser la variable $\delta\omega = \omega - \omega_c$; c'est-à-dire que par une translation et un changement de signe sur l'axe des fréquences, nous transposons la fonction précédente $G(\omega_c)$ en une autre fonction $g(\delta\omega)$ normée de la même façon :

$$g(\delta\omega) = g(\omega - \omega_c) = G(\omega_c) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\delta\omega)\,\mathrm{d}(\delta\omega) = 1$$

(en toute rigueur la borne supérieure de l'intégrale est $+\omega$ quand $\omega_c = 0$).

Ceci nous permettra d'écrire la polarisation atomique de l'échantillon en tenant compte de tous les atomes concernés. Nous étudions la propagation d'une onde plane progressive comme au §17.3 et pouvons utiliser l'expression (17-16) du champ électrique ; mais la formule (17-18) de la polarisation doit être transposée en faisant la somme des contributions des atomes correspondant à diverses valeurs de l'écart à résonance $\delta\omega$:

$$P_x(z,t) = nd_{ab} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\delta\omega)\, g(\delta\omega) \left[u(\delta\omega, z, t) - iv(\delta\omega, z, t)\right] \mathbf{e}^{ikz - i\omega t + i\varphi(z)} \tag{17-53}$$

On remarque que la fonction exponentielle complexe dépend de la fréquence ω de l'onde qui est fixée, mais pas de l'écart $\delta\omega$; elle peut donc être sortie de l'intégrale en $\delta\omega$, et cela permet de reprendre les calculs du §17.3 : on peut faire disparaître cette exponentielle imaginaire que l'on trouve de manière symétrique dans les deux membres de l'équation d'onde (17-13) (dans E_x d'un côté, dans P_x de l'autre) ; puis en séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient les deux équations séparées de la phase et de l'amplitude. Nous ne nous intéressons ici qu'à l'équation de l'amplitude et l'équation (17-21b) se transforme en :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z} = \omega \frac{nd_{ab}}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\delta\omega)\, g(\delta\omega) \cdot v(\delta\omega, z, t) \tag{17-54}$$

(il s'agit d'une équation pour milieu dilué ; dans un milieu condensé il y aurait des coefficients corrigés par l'indice de réfraction, mais la structure de l'équation serait la même).

Calculant à l'ordinateur des solutions de cette équation (17-54), McCall et Hahn en 1967 ont trouvé des solutions particulières surprenantes, sans atténuation, pour des valeurs particulières de l'aire d'impulsion définie plus haut. En cherchant à les expliquer, ils ont démontré le théorème suivant (réf. [3]).

17.6.3 Théorème des aires d'impulsion

On fait apparaître l'aire d'impulsion (17-51) en faisant l'intégrale sur le temps des deux membres de l'équation différentielle (17-54) entre un temps lointain dans le passé avant l'impulsion et un temps T postérieur à T_0 (fin de l'impulsion *cf.* Fig. 17.4) et que l'on fera tendre vers l'infini. Au premier membre, on doit calculer deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}t\, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}t\, \mathcal{E}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\hbar}{d_{ab}}\theta_0(z)\right] = \frac{\hbar}{d_{ab}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z)$$

$$\int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}t\, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(z,t) = \mathcal{E}(z,T) - \mathcal{E}(z,-\infty) = 0$$

Cette deuxième intégrale est nulle, puisque les deux champs considérés sont pris soit avant, soit après l'impulsion. L'équation (17-54), intégrée sur

le temps, nous donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) = \frac{\omega}{c}\frac{nd_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\delta\omega)\,g(\delta\omega)\cdot v(\delta\omega,z,t) \qquad (17\text{-}55)$$

En fait, cette équation est vraie pour tous les temps $T > T_0$; mais en faisant tendre T vers l'infini, nous pourrons obtenir une expression algébrique simple. On peut permuter les deux intégrales sur le temps et sur l'écart de fréquence $\delta\omega$; puis en utilisant la première des trois équations de Bloch (2-11) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = \delta\omega\cdot v$, on peut calculer l'intégrale sur le temps :

$$\int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}t\,v(\delta\omega,z,t) = \int_{-\infty}^{T}\mathrm{d}t\,\frac{1}{\delta\omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}(\delta\omega,z,t) = \frac{1}{\delta\omega}u(\delta\omega,z,T)$$

(parce qu'au temps lointain, avant l'impulsion, u est nécessairement nul). L'intégrale sur le temps est donc calculée et il ne reste plus que l'intégrale sur $\delta\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) = \frac{\omega}{c}\frac{nd_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\delta\omega)\,g(\delta\omega)\frac{1}{\delta\omega}u(\delta\omega,z,T) \qquad (T\longrightarrow\infty) \quad (17\text{-}56)$$

Il nous reste à calculer la variable atomique u aux instants T postérieurs à l'impulsion. Supposons que le calcul par ordinateur ait permis de calculer les variables u et v pendant l'impulsion et nous ait permis d'obtenir en particulier leurs valeurs à la fin T_0 de l'impulsion :

$$u(\delta\omega,z,T_0) = u_0(\delta\omega,z) \quad \text{et} \quad v(\delta\omega,z,T_0) = v_0(\delta\omega,z)$$

L'évolution après T_0 est beaucoup plus simple parce qu'alors $\Omega_1 = d_{ab}\mathcal{E}/\hbar = 0$. La troisième équation de Bloch nous dit alors que $m(t)$ est constant et le système se réduit aux deux premières équations. Nous retrouvons le problème d'évolution de la polarisation dans le noir déjà rencontré au §6.4 dans la première partie de l'ouvrage.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u-iv) = i\delta\omega(u-iv) \qquad \Longrightarrow \qquad u(T)-iv(T) = (u_0-iv_0)\,\mathrm{e}^{i\delta\omega(T-T_0)}$$

on en déduit :

$$u(\delta\omega,z,T) = u_0(\delta\omega,z)\,\cos[\delta\omega(T-T_0)] + v_0(\delta\omega,z)\,\sin[\delta\omega(T-T_0)] \quad (17\text{-}57)$$

Lorsque l'on substitue (17-57) au second membre de l'équation (17-56), on obtient sous l'intégrale une fonction de la variable $\delta\omega$ qui oscille très rapidement dès que $(T-T_0)$ est grand. Lorsque $T\longrightarrow\infty$, ces oscillations, de plus en plus serrées, se moyennent à zéro pour toutes les valeurs de $\delta\omega$, exceptées celles qui sont très proches de zéro : la contribution non nulle à l'intégrale sur $\delta\omega$ provient uniquement de la zone de l'axe des fréquences, proche de l'origine,

où $|\delta\omega| \lesssim 1/(T - T_0)$ et où nous avons le droit d'appliquer l'approximation quasi résonnante (*cf.* remarque 6.2 à la fin du §6.2).

Lorsque nous calculons le quotient $u(\delta\omega, z, T)/\delta\omega$, la singularité pour $\delta\omega = 0$ n'est qu'apparente, puisque la quantité $u(\delta\omega, z, T) \to 0$ quand $\delta\omega \to 0$. Le calcul est simple pour la première fonction sinusoïdale parce que, d'après l'équation (6-7), son amplitude $u_0(\delta\omega, z)/\delta\omega = u(\delta\omega, z, T_0)/\delta\omega$ reste bornée ; on en déduit que l'intégrale sur $\delta\omega$ de cette première fonction sinusoïdale tend vers zéro quand $T \to \infty$.

Nous pouvons donc réécrire (17-56) avec le seul second terme de (17-57) dont le calcul est plus délicat :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) = \frac{\omega}{c}\frac{nd_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\delta\omega)\, g(\delta\omega)\, v_0(\delta\omega, z)\frac{\sin\delta\omega(T - T_0)}{\delta\omega} \qquad (T \longrightarrow \infty) \tag{17-58}$$

Nous reconnaissons dans la dernière fraction, pour $T \to \infty$, une suite de fonctions qui convergent, au sens des distributions, vers la distribution δ de Dirac :

$$\delta(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin x(T - T_0)}{x} \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{\pi}\frac{\sin x(T - T_0)}{x} = 1\right)$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) = \frac{\omega}{c}\frac{nd_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\pi g(0)\, v_0(0, z) \tag{17-59}$$

d'après (17-51) $v_0(0, z) = v(0, z, T_0) = -m_0 \sin\theta_0(z)$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) = -\frac{\alpha}{2}\sin\theta_0(z) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\omega}{c}\frac{nm_0d_{ab}^2}{\varepsilon_0\hbar}\pi g(0)} \tag{17-60}$$

C'est le théorème des aires, dont nous allons expliquer maintenant les conséquences.

17.6.4 Application à une impulsion de faible intensité

Si l'aire d'impulsion est voisine de zéro, nous pouvons confondre l'angle $\theta_0(z)$ et son sinus ; et le théorème des aires s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0(z) \approx -\frac{\alpha}{2}\theta_0(z) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_0(z) = \theta_0(0)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}z} \tag{17-61}$$

Dans un milieu ordinaire ($m_0 = 1$) la constante α définie par Mc Call et Hahn (17-60) est positive, c'est-à-dire qu'il se produit une atténuation progressive de l'aire d'impulsion, variant exponentiellement avec la distance z de propagation.

Dans la mesure où l'impulsion ne se déforme pas et où sa durée reste constante, il est possible de repérer l'intensité lumineuse à partir du carré θ^2 de l'aire d'impulsion, qui est proportionnel au carré du champ électrique. On peut aussi calculer sa variation avec z :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\theta_0^2(z) = 2\theta_0(z)\frac{\mathrm{d}\theta_0(z)}{\mathrm{d}z} = -\alpha\theta_0^2(z) \quad \Longrightarrow \quad \theta_0^2(z) = \theta_0^2(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha z} \qquad (17\text{-}62)$$

On comprend ainsi pourquoi on a laissé le facteur $1/2$ dans le théorème (17-60) : le coefficient α représente la constante exponentielle d'atténuation de l'énergie d'une onde de faible intensité. Il est à comparer avec le coefficient d'absorption $K(\nu)$ introduit au §8.4 dans la deuxième partie du livre. En nous restreignant à un atome à deux niveaux (hypothèse de la 1re partie : $g_a = g_b$ et $B_{12} = B_{21}$ ou $\sigma_{12} = \sigma_{21}$) la formule (8-18) jointe aux formules (8-8) pour calculer la section efficace, nous donne pour le coefficient d'absorption :

$$K(\nu) = \sigma_{12}(n_a - n_b) = \sigma_{12}nm = nm\frac{h}{\lambda}B_{12}\varphi(\nu) = nm\frac{\hbar\omega}{c}B_{12}\varphi(\nu)$$

En utilisant le calcul de B_{12} (3-8) effectué dans le cadre de la solution stationnaire de Bloch :

$$B_{12} = B_{21} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d_{ab}}{\hbar}\right)^2$$

on obtient

$$K(\nu) = nm\frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}\varphi(\nu) \qquad (17\text{-}63)$$

Dans le cas d'un élargissement inhomogène beaucoup plus important que la largeur naturelle, il faut remplacer la forme naturelle de raie $\varphi(\nu)$ par un produit de convolution $\Phi(\nu)$ (*cf.* formule (13-20) au §13.3) qui se confond pratiquement avec la répartition statistique (17-52) :

$$\Phi(\nu) \approx F(\nu) = 2\pi G(\omega) = 2\pi g(0) \qquad \Longrightarrow \qquad K(\nu) = \alpha$$

(Attention ! On ne confondra pas le coefficient α introduit par MacCall et Hahn dans la théorie des aires avec le coefficient d'amplification par unité de longueur utilisé dans la partie II de l'ouvrage, et qui est son opposé.)

Nous avons seulement vérifié la cohérence de diverses méthodes de calcul, avant d'aborder les phénomènes nouveaux, à forte intensité, que seule la mécanique quantique permet d'expliquer.

17.7 Impulsions ultracourtes très intenses. Autotransparence

La différence entre les calculs phénoménologiques et les équations de Maxwell-Bloch apparaît à forte intensité lumineuse lorsqu'il n'est plus possible de remplacer le sinus par l'angle $\theta_0(z)$. La conséquence la plus frappante

apparaît lorsque $\theta_0(z)$ est égal à un multiple de π, ce qui annule $\sin\theta_0(z)$:

$$\theta_0(z) = N\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta_0(z)}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{ou } \theta_0(z) = \text{constante}$$

17.7.1 Cas où l'aire d'impulsion est un multiple de π

En fait, une étude de stabilité montre que les valeurs impaires du nombre entier N doivent être éliminées. Supposons qu'il se produise une petite fluctuation ε de l'angle θ_0 autour d'une valeur impaire :

$$\theta_0 = \pi + N2\pi + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta_0 = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}z} = \frac{\alpha}{2}\varepsilon$$

Si la fluctuation ε est positive, $\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}z}$ est positif ; θ_0 augmente et donc ε aussi. Si la fluctuation ε est négative, $\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}z}$ est négatif ; θ_0 diminue et donc l'écart $|\varepsilon|$ augmente. Dans les deux cas θ_0 tend à s'écarter davantage de sa valeur initiale. Le même raisonnement à partir d'un multiple de 2π montre au contraire que $\dfrac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}z}$ est de signe opposé à la fluctuation ε et que θ_0 est donc ramené vers la valeur initiale. En définitive :

$$\boxed{\theta_0(z) = N \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta_0(z) = \text{constante}} \qquad (17\text{-}64)$$

L'aire d'impulsion est alors transmise intégralement d'un point à l'autre sans affaiblissement. On obtient ce phénomène étonnant que l'énergie de l'impulsion se propage sans perte, bien que le milieu traversé soit normalement absorbant (m_0 positif) ; c'est le phénomène d'autotransparence.

Ce phénomène s'explique bien à partir des propriétés des impulsions 2π décrites au §6.2 : à la fin de l'impulsion 2π les populations atomiques ont repris leurs valeurs initiales ; il n'y a donc eu finalement aucun échange permanent d'énergie avec les atomes. De manière plus précise, l'impulsion a juste l'énergie nécessaire pour inverser les populations atomiques ($m_0 \rightarrow -m_0$) pendant la première moitié de l'impulsion ; puis pendant la seconde moitié les atomes inversés réémettent vers l'avant toute l'énergie qu'ils avaient emmagasinée. La polarisation atomique a existé transitoirement de manière à permettre cette émission de l'onde vers l'avant et elle s'est annulée dès que l'intégralité de l'énergie a été transmise.

L'essentiel du phénomène physique d'autotransparence a été décrit. On peut cependant être un peu plus précis dans la description mathématique, car l'équation différentielle (17-60) peut être résolue en séparant dans chacun

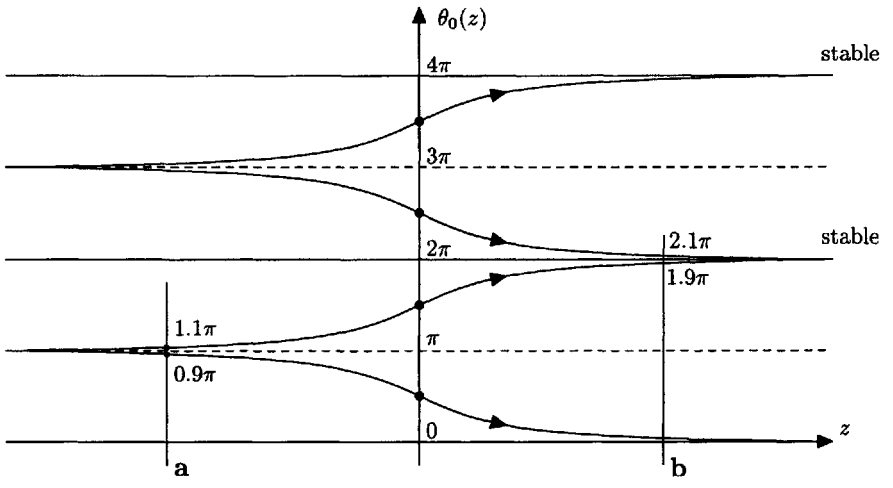


FIG. 17.5 – *Variations de l'aire d'impulsion* $\theta_0(z)$ *en cours de propagation suivant la loi (17-66). On a choisi la courbe particulière* $\tan\frac{\theta_0(z)}{2} = \mathbf{e}^{-\frac{\alpha}{2}z}$ *qui par translation le long de l'axe Oz permet de représenter toutes les autres.*

des deux membres la variable z d'une part et la variable θ_0 de l'autre :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\theta_0}{\sin\theta_0} &= \frac{\mathrm{d}\theta_0}{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}} = \frac{\mathrm{d}\theta_0}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\times\frac{1}{\cos^2\frac{\theta_0}{2}} \\ &= \frac{1}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\ln\tan\frac{\theta_0}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}65)$$

On en déduit : $-\frac{\alpha}{2}z = \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right) + \text{Constante}$, soit

$$\boxed{\tan\frac{\theta_0(z)}{2} = \tan\frac{\theta_0(a)}{2}\,\mathbf{e}^{-\frac{\alpha}{2}(z-a)}} \qquad (17\text{-}66)$$

a représente la position de la face d'entrée dans le milieu absorbant et $\theta_0(a)$ caractérise l'aire d'impulsion avant l'entrée dans le milieu, on retrouve bien le fait que si $\theta_0(a) = N\cdot 2\pi$ la tangente de l'angle moitié est nulle et reste nulle, quel que soit z. On a tracé sur la figure 17.5 des courbes représentatives de la loi $\theta_0(z)$ exprimée en (17-66). On a choisi arbitrairement comme conditions initiales :

pour $z = 0$ $\quad \tan\frac{\theta_0(0)}{2} = +1$ ou -1 $\quad$ soit $\quad \theta_0(0) = \frac{\pi}{2} + N\cdot 2\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + N\cdot 2\pi$

On a représenté sur la figure le cas particulier d'une face d'entrée située en a et pour laquelle on peut avoir deux valeurs différentes de l'aire d'impulsion initiale : si $\theta_0(a) = 0,9\pi$, $\theta_0(z)$ décroît vers zéro alors que si $\theta_0(a) = 1,1\pi$, $\theta_0(z)$ croît jusqu'à 2π en cours de propagation. Sur l'équation (17-66) c'est le cas où $\theta_0(a)/2$ est très voisin de $\pi/2$, donc $\tan\theta_0(a)/2$ est très grand, positif ou négatif ; mais l'exponentielle décroissante et tendant vers zéro finit toujours par l'emporter. On retrouve bien l'instabilité discutée au début de ce paragraphe. Pour l'autre cas particulier (face d'entrée en b) que $\theta_0(b)$ vaille $1,9\pi$ ou $2,1\pi$, dans les deux cas $\theta_0(z)$ tend rapidement vers 2π et se stabilise à cette valeur.

Remarque 17.4 – Nous avons traité tout ce paragraphe dans l'hypothèse d'un milieu absorbant (m_0 positif et donc α positif). Mais le même formalisme s'applique aussi bien à un milieu inversé, amplificateur, où m_0 est négatif et donc α négatif aussi. Il est facile de voir que, dans ce cas là, ce sont les multiples impairs de π qui correspondent aux solutions stables en cours de propagation et qu'inversement les multiples de 2π sont des solutions instables. En d'autres termes, changer le signe de α dans l'équation (17-66) revient à changer le sens de l'axe des z sur la figure 17.5.

Dans le cas d'impulsions de faible intensité ($\theta_0(z) \ll \pi/2$) on retrouverait le coefficient d'amplification $\alpha(\nu) = -K(\nu) = -\alpha$ positif introduit aux chapitres 8 et 9 (conclusion du §8.5 et §9.4) dans la partie II.

17.7.2 Recherche d'une loi temporelle indéformable (solitons résonnants)

Dans ce qui précède nous n'avons raisonné que sur l'aire d'impulsion, représentant la surface grisée de la figure 17.4. Mais on peut aussi s'intéresser à la forme temporelle de la courbe $\mathcal{E}(t)$. La conservation de l'aire d'impulsion conduit à se demander s'il n'est pas possible que la forme de la courbe $\mathcal{E}(t)$ se conserve également en cours de propagation

$$\mathcal{E}(z,t) = f\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad \text{où } V \text{ est une vitesse} \leq c \tag{17-67}$$

ce qui se traduit sous forme d'équation différentielle en :

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 \tag{17-68}$$

Mais $\mathcal{E}(t)$ obéit aussi à l'équation différentielle (17-21b) :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{\omega}{c}\frac{n d_{ab}}{2\varepsilon_0} v(z,t) = -\frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}}{2\varepsilon_0} n m_0 \sin\theta(z,t)$$

(on a remplacé v en utilisant (17-51)).

En soustrayant cette dernière équation de (17-68) on élimine la dérivée par rapport à z, et il reste une équation différentielle sur le temps :

$$\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{c}\right)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}}{2\varepsilon_0} n m_0 \sin\theta(z,t) = \frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}}{2\varepsilon_0} n m_0 \sin\left(\theta - \frac{z}{V}\right)$$

pour être cohérent avec l'expression (17-67). Nous nous limitons ici, par simplicité, au cas d'une *impulsion exactement résonnante* sans élargissement inhomogène (*cf.* §6.2) ; et nous utilisons les formules (6-2) et (6-3) donc

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Omega_1(t) = \frac{d_{ab}}{\hbar}\mathcal{E}(z,t) \text{ soit } \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\hbar}{d_{ab}}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

Le remplacement de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$ par l'expression ci-dessus permet d'obtenir une équation différentielle pour la fonction $\theta(t)$:

$$\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{c}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}nm_0\sin\theta(t) = \frac{\alpha}{2\pi g(0)}\sin\theta(t) \qquad (17\text{-}69)$$

Nous reconnaissons au second membre la constante α (17-60) (qui a la dimension de l'inverse d'une longueur) divisée par $2\pi g(0) = \Phi(\nu_0)$ (qui a la dimension de l'inverse d'une fréquence, c'est-à-dire d'un temps). Lorsqu'on divise par la parenthèse contenant les vitesses au premier membre, on obtient au second membre une constante ayant les dimensions de l'inverse d'un temps au carré :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2}\sin\theta(t) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{V} - \dfrac{1}{c}} \times \frac{\omega}{c}\frac{d_{ab}^2}{2\varepsilon_0\hbar}nm_0 = \frac{V}{1 - \dfrac{V}{c}}\frac{\alpha}{\Phi(\nu_0)} \qquad (17\text{-}70)$$

En multipliant les deux membres de (17-70) par $2\partial\theta/\partial t$:

$$2\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{2}{\tau^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 = -\frac{2}{\tau^2}\frac{\partial}{\partial t}[\cos\theta]$$

l'intégration donne $\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 = -\dfrac{2}{\tau^2}\cos\theta + \text{Constante}$.

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est vaste et relativement compliqué. Nous nous contentons de rechercher une solution simple possible ; il suffit de choisir la Constante égale à $2/\tau^2$:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 = \frac{2}{\tau^2}(1 - \cos\theta) = \frac{4}{\tau^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle du premier ordre,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{2}{\tau}\sin\frac{\theta(t)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\tau}\sin\frac{\theta(t)}{2} \qquad (17\text{-}71)$$

La forme mathématique de cette équation différentielle est la même que celle de la loi des aires (17-60). Maintenant il s'agit d'une dérivée temporelle appliquée à la fonction du temps $\dfrac{1}{2}\theta(t)$, et non plus à la fonction $\theta_0(z)$ obtenue par intégration sur le temps ; mais les mêmes solutions mathématiques

peuvent être utilisées sans nouvelle démonstration ; et la transposition de l'équation (17-66) nous donne :

$$\tan\frac{\theta(t)}{4} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}[t-t_0(z)]} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}[t-z/V]} \tag{17-72}$$

(t_0 constante d'intégration arbitraire, à déterminer en chaque point z d'après la vitesse de propagation V, soit $t_0 = z/V$). Avant de continuer, on peut tout de suite vérifier que cette solution (17-72) correspond bien à une impulsion 2π. En effet lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, $\tan\frac{\theta}{4}$ varie de 0 à $+\infty$, c'est-à-dire l'angle $\theta/4$ entre 0 et $\pi/2$, et donc θ entre 0 et 2π. On retrouve bien à la fin de l'impulsion l'angle $\theta_0(z) = 2\pi$ en conformité avec la condition (17-64). À partir de la variation temporelle de l'angle θ, il est facile de trouver celle du champ (formule (6-3) rappelée au début de ce paragraphe) :

$$\mathcal{E}(z,t) = \frac{\hbar}{d_{ab}}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{d_{ab}}\frac{2}{\tau}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\hbar}{d_{ab}\tau}\frac{2\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan^2\frac{\theta}{4}} = \frac{2\hbar}{d_{ab}\tau}\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{t-t_0}{\tau}}+\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(z,t) = \frac{2\hbar}{d_{ab}\tau}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{t-z/V}{\tau}} = \mathcal{E}_{\mathrm{Max}}\operatorname{sech}\frac{t-z/V}{\tau} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\mathrm{Max}} = \frac{2\hbar}{d_{ab}\tau}} \tag{17-73}$$

L'inverse du cosinus hyperbolique est encore appelé *sécante hyperbolique*. La figure 17.6 représente la variation temporelle de cette sécante hyperbolique. On définit parfois la durée moyenne de l'impulsion T_p, telle que l'aire du rectangle $\mathcal{E}_{\mathrm{Max}}T_p$ soit égale à l'aire grisée.

La définition de $\theta_0(z)$ (17-51) nous dispense de calculer l'intégrale de la fonction (17-73); nous savons que l'aire grisée est déterminée comme celle d'une impulsion 2π :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(z,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\hbar}{d_{ab}}\theta_0(z) = \frac{\hbar}{d_{ab}}2\pi = \mathcal{E}_{\mathrm{Max}}\cdot T_p = \frac{2\hbar}{d_{ab}\tau}\cdot T_p \quad \text{soit} \quad T_p = \pi\tau \tag{17-74}$$

Cette forme temporelle en sécante hyperbolique peut donc se propager sans déformation avec la vitesse V, reliée à τ par la formule (17-70). Cette vitesse de propagation est d'autant plus rapide que la durée de l'impulsion est plus courte ($V \to c$ si $\tau \to 0$). Ce ralentissement de la propagation s'explique par la durée nécessaire pour réaliser l'échange d'énergie réversible avec les atomes : pendant la première moitié de l'impulsion l'onde donne son énergie aux atomes de manière à inverser leurs populations ; pendant la seconde moitié les atomes réémettent l'onde en revenant à leur état initial.

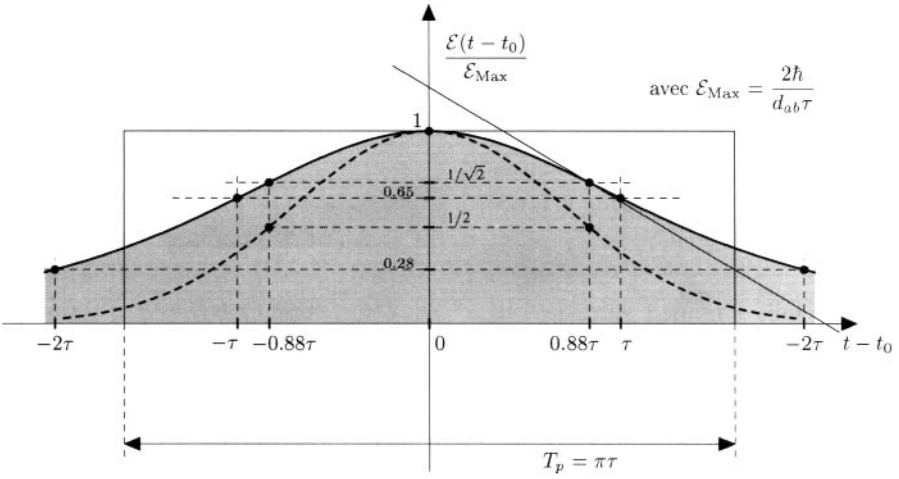


FIG. 17.6 – *Variation temporelle d'une impulsion en sécante hyperbolique, (17-73) qui se propage sans déformation. La durée moyenne d'impulsion T_p est parfois définie par égalité de la surface grisée avec celle du rectangle $\mathcal{E}_{\max} T_p$; on en déduit $T_p = \pi\tau$. En tireté la variation temporelle de l'intensité lumineuse, dont l'écart à mi-hauteur $0,88\tau$ correspond avec le point d'inflexion du champ $\mathcal{E}(t)$.*

De nombreuses vérifications expérimentales sont venues illustrer ce phénomène surprenant, conséquence des équations quantiques de Bloch. Les premières expériences étaient réalisées en 1967 avec les impulsions rouges d'un laser à Rubis traversant un autre cristal de Rubis (réf. [2]) ; et avec les impulsions d'un laser à CO_2 ($\lambda = 10,6$ μm dans l'infrarouge lointain) traversant une cellule de gaz SF_6 (réf. [4]).

Remarque 17.5 – La vérification directe de l'intégrale (17-74) est en fait assez facile en faisant le changement de variable :

$$y = \text{th}\frac{t-t_0}{2\tau}\,;\, \text{d}y = (1-y^2)\frac{\text{d}t}{2\tau}\,;\, \text{et sech}\frac{t-t_0}{\tau} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

On obtient alors une intégrale définie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}\frac{t-t_0}{\tau}\cdot\frac{\text{d}t}{\tau} = \int_{-1}^{+1}\frac{2\text{d}y}{1+y^2} = 2\Big[\arctan y\Big]_{-1}^{+1} = 2\pi$$

Ces impulsions 2π correspondent à une valeur précise (17-73) pour le produit $\mathcal{E}_{\text{Max}}\tau$. Lorsqu'on envoie une impulsion quelconque (*cf.* Fig. 17.5, elle commence par se déformer pour se rapprocher de cette valeur. Si l'on part de l'entrée a du milieu matériel avec une impulsion de $1,1\pi$, l'évolution avec z doit produire un presque doublement de l'aire d'impulsion. Comme l'énergie totale de l'impulsion, proportionnelle

à $\int \mathcal{E}^2 dt$, ne peut pas augmenter, ce résultat ne peut être obtenu que par un fort allongement de la durée d'impulsion (on peut par exemple conserver l'énergie en divisant $\mathcal{E}_{\text{Max}}$ par 2 et en multipliant par 4 la durée d'impulsion ; l'aire d'impulsion, produit de $\mathcal{E}_{\text{Max}}$ par la durée, est alors multipliée par 2). Inversement si l'on part avec une impulsion voisine de 3π (juste un peu en dessous de 3π) elle doit évoluer avec z vers une impulsion 2π. Cette réduction de l'aire d'impulsion sans augmentation d'énergie ne peut être obtenue que par un raccourcissement de la durée d'impulsion (par exemple multiplier $\mathcal{E}_{\text{Max}}$ par 3/2 en réduisant par un facteur 4/9 la durée d'impulsion conserve l'énergie, tout en réduisant l'aire l'impulsion dans le facteur $3/2 \times 4/9 = 2/3$; c'est en fait plus compliqué parce qu'il y a toujours un peu d'absorption). Ce type de contraction d'impulsions a été effectivement observé en particulier avec les impulsions d'un laser accordable à travers la vapeur de Rubidium (transition $5s \rightarrow 5p$ à la limite du rouge et de l'I.-R. ; réf. [5]).

Remarque 17.6 – La démonstration du théorème des aires a été obtenue en tenant compte de l'élargissement inhomogène. Pour mieux en comprendre la raison, Mc Call a analysé plus en détail le mouvement du vecteur de Bloch pour les atomes qui sont seulement voisins de la résonance ($\delta\omega\tau \approx 1$) et dont la contribution est importante : leur vecteur de Bloch subit au cours de l'impulsion un mouvement différent de celui des atomes résonnants ; mais à la fin de l'impulsion il revient à sa position initiale, s'il s'agit d'une impulsion 2π. Il n'y a donc pas eu finalement d'échange d'énergie entre l'onde et ces atomes voisins de la résonance (réf. [3]).

Remarque 17.7 – On ne confondra pas ces solitons résonnants avec les *solitons dispersifs* utilisés dans les fibres optiques. Dans le cas des fibres optiques, c'est la propagation guidée jointe à la non-linéarité de la dispersion (on joue sur χ' au lieu de χ'') qui produit des impulsions en sécante hyperbolique capables de se propager sans déformation. Dans le cas des fibres optiques, on utilise la dispersion, et l'absorption est réellement très faible, permettant la propagation sur des dizaines (voire des centaines) de kilomètres. Dans le cas résonnant l'absence d'absorption n'est qu'une première approximation ($\tau \ll \tau_1$ et τ_2) mais on ne peut pas la supprimer complètement.

Bibliographie

[1] M. Sargent, M.O. Scully et W.E. Lamb, Laser Physics (Addison-Wesley 1977).

[2] S.L. Mc Call et E.L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).

[3] S.L. Mc Call et E.L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).

[4] C.K.N. Patel et R.E. Slusher, Phys. Rev. Lett. **19**, 1019 (1967).

[5] R.E. Slusher et H.M. Gibbs, Phys. Rev. **A5**, 1634 (1972) [erratum **6**, 1255 (1972)].

Chapitre 18

Les dipôles atomiques, sources de rayonnement

NOUS AVONS INTRODUIT au début du chapitre 17 (§17.1) les deux méthodes généralement utilisées pour calculer, à partir des équations de Maxwell, les ondes émises par les atomes. La première méthode, développée au chapitre 17, a permis de mieux comprendre la formation de l'onde dans une cavité laser ; mais elle est limitée à des ondes de direction bien définie. Dans ce nouveau chapitre, nous appliquons l'autre méthode pour étudier l'émission d'ondes dans n'importe quelle direction par les dipôles atomiques oscillants créés par une irradiation laser. Ceci permet d'expliquer une grande variété d'expériences de diffusion de la lumière par les atomes.

Comme nous l'avons déjà signalé au §17.1, un point important de cette étude est le calcul des interférences entre les ondelettes émises par les différents dipôles du milieu diffusant. Mais nous commencerons dans les deux premiers paragraphes par rappeler les caractéristiques de l'onde émise par un seul atome.

18.1 Onde rayonnée par un dipôle oscillant

Nous rappelons d'abord les résultats classiques du champ rayonné au point P, à grande distance $r = AP$ par un dipôle électrique (ou petite antenne), placé à l'origine A, parallèle à l'axe Ax, et dont la composante $p_x(t)$ varie au cours du temps. On néglige les termes en $1/r^2$ ou $1/r^3$, et l'on ne garde que les termes en $1/r$, prépondérants à grande distance, appelés termes de rayonnement. La figure 18.1 montre les directions des deux champs rayonnés au point P de coordonnées sphériques (r, θ, φ) : le champ électrique E_R, porté par l'axe local P_θ perpendiculaire à AP dans le plan méridien (AxP), le champ magnétique B_R, porté par l'axe local P_φ perpendiculaire à ce plan

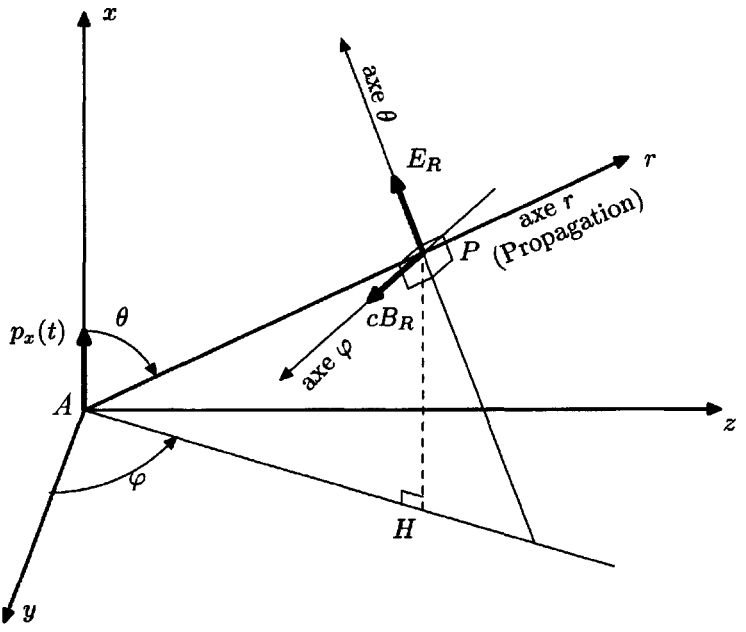


FIG. 18.1 – *Champ rayonné en P (de coordonnées r, θ, φ) par le dipôle $p_x(t)$ choisi comme origine A (le vecteur magnétique cB_R représenté sur l'axe P_φ a la même dimension que E_R et lui est égal).*

méridien, sont donnés par les expressions :

$$\left.\begin{aligned} E_R(P,t) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{rc^2}\ddot{p}_x\left(t-\frac{r}{c}\right) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{rc^2}\omega^2 p_x\left(t-\frac{r}{c}\right) \\ B_R(P,t) &= E_R(P,t)/c \end{aligned}\right\} \quad (18\text{-}1)$$

Nous renvoyons aux ouvrages d'électromagnétisme pour la démonstration de ces résultats. Attention ! en coordonnées sphériques, on oriente habituellement les axes locaux P_θ et P_φ dans le sens de la croissance des angles θ et φ. Nous avons choisi ici le sens opposé afin que la projection de l'axe local $P\theta$ sur l'axe Ax de référence soit dans le sens positif.

La dérivée seconde du moment dipolaire par rapport au temps, $\ddot{p}_x$ (qui est liée à l'accélération des charges) constitue la source du champ rayonnée ; l'expression en $\omega^2 p_x$, à droite, résulte du calcul de $\ddot{p}$ dans le cas d'une variation

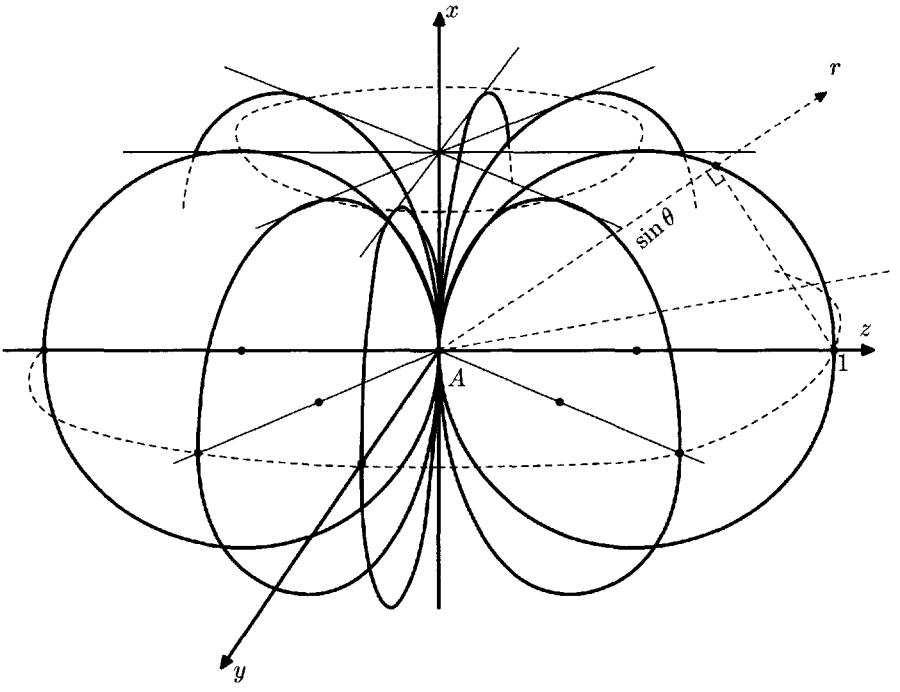


FIG. 18.2 – *Diagramme de rayonnement du dipôle (on a représenté quatre plans méridiens contenant Ax, dont xAy et xAz).*

sinusoïdale. Elle permet d'écrire le champ en notation complexe :

$$\left.\begin{aligned} E_R(P,t) &= \mathcal{E}_R \mathbf{e}^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} = \mathcal{E}_R \mathbf{e}^{-i\omega t}\,\mathbf{e}^{+ikr} \quad \left(k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}\right) \\ \text{amplitude } \mathcal{E}_R &= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}p_0 = \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\pi}{\lambda^2}\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\sin\theta}{r}C \end{aligned}\right\} \quad (18\text{-}2)$$

(p_0 est l'amplitude du dipôle électrique sinusoïdal ; on note C la constante entre parenthèse). Le décalage temporel $\frac{r}{c}$ entre le champ E_R mesuré en P et la source p_x en A représente la durée de propagation de l'onde entre A et P.

À une distance r fixée, l'amplitude du champ E_R ne dépend de la position P que par le facteur $\sin\theta$; en particulier le champ est maximal dans le plan yAz perpendiculaire au dipôle et nul sur l'axe Ax qui porte le dipôle. Ceci est représenté sur le diagramme de rayonnement de la figure 18.2 obtenu en reportant sur chaque direction $\overrightarrow{r}$ une longueur proportionnelle à E_R, égale à $\sin\theta$; dans chaque plan méridien (contenant l'axe Ax), le diagramme est constitué de deux cercles de diamètre unité tangents en A à l'axe Ax.

La théorie électromagnétique permet encore de calculer l'énergie transportée au loin par l'onde ; c'est le flux, à travers n'importe quelle surface, du vecteur de Poynting $\overrightarrow{E}_R \wedge \left(\overrightarrow{B}_R/\mu_0\right)$, qui est ici porté par le rayon vecteur. On choisit généralement de calculer le flux à travers la surface d'onde perpendiculaire au vecteur de Poynting ; et l'on s'intéresse à sa valeur moyenne sur le temps :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P}{S} = \overline{\left|\overrightarrow{E}_R \wedge \left(\overrightarrow{B}_R/\mu_0\right)\right|} = \frac{1}{c\mu_0}\overline{E_R^2} = \varepsilon_0 c\overline{E_R^2} = \varepsilon_0 c\mathcal{E}_R^2/2 \\ &\text{ou dans un petit angle solide } \delta\Omega = \delta S/r^2 : \\ &\qquad P(\delta\Omega) = \frac{\delta S}{r^2}\frac{\varepsilon_0 c}{2}\left(r\mathcal{E}_R\right)^2 = \delta\Omega \sin^2\theta \frac{\varepsilon_0 c}{2} C^2 \end{aligned}\right\} \quad (18\text{-}3)$$

Pour calculer la puissance totale rayonnée par un dipôle P_{R1}, il reste à faire la somme sur toutes les directions de l'espace en utilisant l'élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, qui conduit à l'intégrale :

$$\iint \sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \times \frac{4}{3}$$

(soit la moyenne sur l'angle solide total 4π : $\langle\sin^2\theta\rangle = 2/3$)

$$\left.\begin{aligned} &P_{R1} = \frac{\varepsilon_0 c}{2}C^2\iint \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\varepsilon_0 c}{2}C^2\frac{8\pi}{3} = \varepsilon_0 c\frac{4\pi^3}{3\lambda^4}\left(\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2\omega}{3\lambda^3\varepsilon_0}\cdot\frac{p_0^2}{2} \\ &\text{soit } P(\delta\Omega) = \delta\Omega\sin^2\theta\cdot\frac{3}{8\pi}P_{R1} = \frac{\delta\Omega}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)P_{R1} \end{aligned}\right\} \quad (18\text{-}4)$$

($p_0^2/2$ est la valeur moyenne temporelle du carré du dipôle oscillant).

La puissance totale calculée P_{R1} est indépendante du rayon r de la sphère utilisée pour le calcul, si grand soit-il ; ceci montre bien que cette énergie s'éloigne indéfiniment du dipôle placé en A, et se trouve perdue définitivement, exactement comme dans le modèle de l'émission spontanée (par opposition à l'émission induite qui est un échange réversible avec l'onde incidente).

18.2 Application au dipôle atomique créé par une onde incidente

Les résultats de la théorie électromagnétique, que nous venons d'écrire, sont bien vérifiés quotidiennement par l'émission de toutes les antennes radioélectriques. Nous allons les appliquer maintenant au cas du dipôle atomique calculé dans la première partie ; puis nous calculerons les échanges d'énergie entre l'onde incidente, l'atome et la nouvelle onde rayonnée par l'atome.

18.2.1 Puissance cohérente rayonnée dans l'onde dipolaire

Nous avons, au chapitre 2, calculé le dipôle atomique en fonction des variables quantiques « croisées » u et v :

$$\langle D_x \rangle = d_{ab}(u\cos\omega t - v\sin\omega t) \qquad \textit{cf.}\ (2\text{-}5)$$

Lorsque l'atome est isolé, en l'absence d'interaction, les variables « croisées » sont nulles. Mais l'interaction avec une onde incidente résonnante ou quasi résonnante leur communique des valeurs non nulles, et crée ainsi un véritable dipôle atomique. Tous les calculs de la première partie nous ont montré que l'évolution temporelle des variables $u(t)$ et $v(t)$ se fait avec des constantes de temps de l'ordre des temps d'amortissement τ_1 ou τ_2, et avec la fréquence de Rabi Ω_1, ou la fréquence de Rabi généralisée $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}$: ces variations sont habituellement très lentes par comparaison avec l'oscillation de l'onde incidente à la fréquence $\omega/2\pi$. Ceci nous autorise dans le calcul des dérivées temporelles de $\langle D_x \rangle$ à négliger les dérivées de $u(t)$ et $v(t)$ devant les dérivées de $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$, et à écrire de manière approchée le carré du dipôle atomique en calculant une valeur moyenne sur le temps :

$$\frac{p_0^2}{2} \simeq \overline{\langle D_x \rangle^2} = d_{ab}^2 \frac{\overline{u^2 + v^2}}{2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{p_0^2}{2} = d_{ab}^2 \frac{u_S^2 + v_S^2}{2} \qquad (18\text{-}5)$$

La formule approchée (écrite à gauche) devient rigoureuse (à droite) dans toutes les expériences où l'on atteint la solution stationnaire calculée au chapitre 3, puisque les valeurs stationnaires u_S et v_S sont constantes au cours du temps (*cf.* (3-3)).

Le dipôle atomique ainsi calculé constitue, au second membre des équations de Maxwell, une source d'onde exactement comme l'antenne ou le dipôle classique du paragraphe précédent ; il émet une onde rayonnée en $1/r$ analogue à celle des formules (18-1) et (18-2).

Lorsque nous appliquons la formule (18.4) de la puissance rayonnée au petit dipôle atomique, sans doute faut-il prendre quelques précautions : à ces valeurs très faibles de l'énergie, nous expérimentons les échanges d'énergie sous forme discontinue de paquets $\hbar\omega$; mais l'apparition de ces paquets $\hbar\omega$ reste déterminée par l'onde cohérente calculée en (18-1) en remplaçant p_x par $\langle D_x \rangle$, et représentée sur les figures 18.1 et 18.2. La puissance rayonnée ainsi calculée n'a plus qu'une signification moyenne (calculée sur un grand nombre d'atomes, ou bien sur une longue durée dans le cas d'un atome unique (*cf.* Fig. 3.3) ; nous l'appellerons puissance cohérente P_{coh} (pour rappeler le rôle de l'onde rayonnée cohérente (18-1) dont la phase est déterminée exactement à partir de la phase de l'onde incidente) :

$$P_{\text{coh}} = \frac{4\pi^2}{3\lambda^3\varepsilon_0}\omega\overline{\langle D_x \rangle^2} = \frac{4\pi^2 d_{ab}^2}{3\lambda^3\varepsilon_0}\omega\frac{u_S^2 + v_S^2}{2} \qquad (18\text{-}6)$$

on peut utiliser $d_{ab}^2 = 2\varepsilon_0 \hbar^2 B$ (*cf.* (3-8)) soit :

$$P_{\text{coh}} = \frac{8\pi^2\hbar^2}{3\lambda^3} B\omega \frac{u_S^2 + v_S^2}{2} = \left(\frac{4\pi h}{3\lambda^3} B\right) \hbar\omega \frac{u_S^2 + v_S^2}{2};$$

on reconnaît dans la parenthèse, à un facteur 2 près, le rapport A/B donné en (3-9), avec une différence importante cependant puisque ici la fréquence ω ou la longueur d'onde λ sont celles de l'onde incidente et non pas les valeurs résonnantes ω_0 ou λ_0 de l'atome. Par analogie avec la formule (3-9) il est commode d'introduire ici la constante $A(\lambda)$ ayant les dimensions de l'inverse d'un temps et définie par :

$$A(\lambda) = \frac{8\pi h}{3\lambda^3} B \tag{18-7}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{P_{\text{coh}} = \hbar\omega A(\lambda) \frac{u_S^2 + v_S^2}{4} = \hbar\omega A(\lambda) \frac{\Omega_1^2 \tau_2^2 (1 + \delta\omega^2 \tau_2^2)}{4\left(1 + \delta\omega^2 \tau_2^2 + \Omega_1^2 \tau_1 \tau_2\right)^2}} \tag{18-8}$$

On a remplacé u_S et v_S par leurs expressions (3-3) avec $m_0 = 1$ (situation sans pompage). Les variables u et v étant sans dimension, et $A(\lambda)$ ayant la dimension de l'inverse d'un temps, on vérifie très simplement l'homogénéité dimensionnelle de cette formule ; en la divisant par l'énergie $\hbar\omega$ d'un photon, on obtient la probabilité par unité de temps d'émission d'un photon dans l'onde rayonnée cohérente.

Il est intéressant de comparer la puissance émise dans l'onde rayonnée avec la puissance absorbée par l'atome aux dépens de l'onde incidente, ou bien la puissance dissipée par l'atome dans l'émission spontanée.

18.2.2 Puissance absorbée et dissipée par un atome

L'expression de la puissance absorbée est un résultat classique de la théorie électromagnétique, que nous avions déjà utilisé au chapitre 3 dans la remarque 3-5 à la fin du §3.3. Nous l'appliquons ici à un seul atome :

$$P_{\text{abs}} = E_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle D_x \rangle = \mathcal{E}_1 \cos\omega t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle D_x \rangle \tag{18-9}$$

Dans le cas de la solution stationnaire de Bloch (u_S et v_S constantes) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle D_x \rangle = -d_{ab}\omega(u_S \sin\omega t + v_S \cos\omega t)$$

Comme dans le calcul de la puissance rayonnée, il faut ici encore prendre la valeur moyenne sur le temps :

$$\overline{P_{\text{abs}}} = -\omega d_{ab} \mathcal{E}_1 \left(u_S \overline{\sin\omega t.\cos\omega t} + v_S \overline{\cos^2\omega t}\right) \tag{18-10}$$

La valeur moyenne temporelle est nulle pour le premier terme trigonométrique, et vaut $1/2$ pour $\overline{\cos^2 \omega t}$. L'absorption est donc proportionnelle à la variable v ; c'est ce que nous avions déjà obtenu au chapitre 3, en calculant la susceptibilité complexe $\chi' + i\chi''$ d'un certain volume du milieu étudié. Tenant compte de la définition (1-4) : $\Omega_1 = d_{ab}\mathcal{E}_1/\hbar$, on obtient :

$$\boxed{\overline{P_{\text{abs}}} = -\omega d_{ab}\mathcal{E}_1 \frac{v_S}{2} = \hbar\omega \frac{\Omega_1 |v_S|}{2} = \hbar\omega \frac{1}{\tau_1} \frac{\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2}{2\,(1 + \delta\omega^2 \tau_2^2 + \Omega_1^2 \tau_1 \tau_2)}} \qquad (18\text{-}11)$$

(ici encore on a remplacé v_S par son expression (3-3) avec $m_0 = 1$).

Cette puissance peut être retrouvée de manière indépendante à partir de l'énergie **dissipée par les atomes dans l'émission spontanée**. Lorsque nous avons défini le temps de « relaxation » total des populations τ_1 au chapitre 2, formule (2-20), nous avons admis que, en dehors de l'interaction avec l'onde incidente, la population de l'état excité $\beta^*\beta$ décroissait spontanément avec retour à l'état inférieur suivant la loi : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta^*\beta = -\dfrac{1}{\tau_1}\beta^*\beta$.

Pour déduire un échange d'énergie de cette probabilité de transition, il faut connaître le spectre énergétique des photons émis. Nous venons de voir que l'émission dipolaire cohérente se fait sous forme d'une onde monochromatique à la pulsation ω, c'est-à-dire avec des photons d'énergie $\hbar\omega$. Il existe aussi une émission de lumière incohérente, due aux fluctuations quantiques du dipôle atomique (*cf.* §18.2.4), et dont le spectre se répartit entre les trois fréquences ω, ω_0 et $2\omega - \omega_0$ (*cf.* chapitre 7, remarque 7.2) ; la valeur *moyenne* des photons émis a la même valeur $\hbar\omega$, ce qui permet d'écrire la puissance totale dissipée ou perdue par le système dans le cadre de la solution stationnaire :

$$P_{\text{perdue}} = \hbar\omega \frac{1}{\tau_1} (\beta^*\beta)_S \qquad (18\text{-}12)$$

en effectuant le remplacement par la formule (3-4) dans le cas $m_0 = 1$:

$$(\beta^*\beta)_S = \frac{1 - m_S}{2} = -\frac{\Omega_1 \tau_1 v_S}{2} = \frac{\Omega_1 \tau_1 |v_S|}{2}$$

on vérifie l'égalité de la puissance perdue (18-12) avec la puissance absorbée calculée en (18-11). Ceci nous montre que les échanges d'énergie calculés en (18-10) et (18-11) représentent la part irréversible des échanges du système atome-onde incidente (en étroite interaction) avec l'extérieur (processus dissipatifs ; c'est en calculant la valeur moyenne temporelle en (18-10) que nous avons éliminé les échanges réversibles intérieurs au système atome-onde incidente, dans lesquels on compte l'émission stimulée et la part correspondante de l'absorption).

Nous pouvons encore distinguer deux parts dans cette énergie absorbée et perdue. Rappelons en effet la définition de la constante de temps τ_1 donnée

au chapitre 2 (§2.3) :

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_b} + \mathcal{P}_{\text{coll}} = A + \mathcal{P}_{\text{coll}} \tag{18-13}$$

(on ne confondra pas cette probabilité de collisions $\mathcal{P}_{\text{coll}}$, qui joue sur les populations atomiques, avec la probabilité $\frac{1}{T_c}$, introduite au §13.2 pour décrire les largeurs de raies homogènes, et qui joue sur les variables croisées u et v. On comptabilise en effet dans la probabilité $\mathcal{P}_{\text{coll}}$ les collisions où se produit un transfert énergétique entre l'énergie interne des atomes étudiés et l'énergie cinétique ou l'énergie interne des projectiles (collisions de « quenching ») ; et ces collisions sont beaucoup moins nombreuses que les collisions déphasantes du §13.2 ($\mathcal{P}_{\text{coll}} \ll \frac{1}{T_c}$).

En reportant (18-13) dans (18-12) on sépare, dans la puissance perdue totale, celle qui est diffusée sous forme de lumière dans des directions différentes P_{diff} et celle qui est dissipée directement dans les collisions P_{coll} :

$$\overline{P_{\text{abs}}} = P_{\text{perdue}} = \hbar\omega A(\beta^*\beta)_S + \hbar\omega\mathcal{P}_{\text{coll}}(\beta^*\beta)_S = P_{\text{diff}} + P_{\text{coll}} \tag{18-14}$$

18.2.3 Cas des processus éloignés de la résonance

Lorsque nous avons introduit la durée de vie radiative τ_b du niveau excité, au chapitre 2, ou la probabilité de transition spontanée A, au chapitre 8, nous aurions dû préciser que le calcul de cette probabilité A_{21} était valide seulement lorsqu'on se place au voisinage de la résonance et que les photons absorbés et diffusés sont voisins de l'énergie $\hbar\omega_0$ de la transition atomique. C'est une limite de validité de la relation (3-9). Or nous décrirons dans ce chapitre des expériences de diffusion où la fréquence de l'onde est très éloignée de la résonance. Que peut-on dire alors ?

Le calcul rigoureux des phénomènes éloignés de la résonance est hors du cadre de cet ouvrage. Nous pouvons cependant en donner une idée. En fait, la notion de durée de vie τ_b d'un état excité est plus complexe qu'il n'y paraît ; appliquée maladroitement, cette notion peut conduire à des méprises. Dans la théorie rigoureuse où l'on fait le calcul de τ_b, à l'aide des opérateurs quantiques de création et d'annihilation de photons, on calcule en réalité un processus de diffusion dans lequel un photon incident est absorbé et un autre photon est diffusé dans une direction différente. C'est bien la raison pour laquelle les formules (18-11) et (18-12) conduisent à des résultats identiques ; elles sont en fait deux aspects d'un processus unique qui peut être calculé globalement. La méthode de calcul n'est donc pas fondamentalement différente entre les cas résonnants et les cas non résonnants ; mais attention ! les approximations que l'on a le droit de faire ne sont pas les mêmes.

Nous donnons ici deux résultats de ces calculs de la théorie quantique plus approfondie.

1) Dans tous les calculs de diffusion de photons hors de l'onde incidente, il faut dénombrer les modes indépendants du champ électromagnétique dans lesquels ils peuvent être émis. C'est là l'origine du facteur $8\pi/3\lambda_0^3$ qui est essentiel dans la relation (3-9) entre les coefficients A et B (appliqué à la longueur d'onde λ_0 résonnante). Dans une diffusion non résonnante, on fait le même dénombrement à la longueur d'onde λ imposée par l'onde incidente. Cela revient à remplacer la probabilité spontanée calculée à résonance par la probabilité $A(\lambda)$ déjà introduire en (18-7). De fait, les formules d'échanges énergétiques écrites plus haut peuvent être généralisées hors résonance à condition d'y remplacer A ou $\frac{1}{\tau_b}$ par $A(\lambda)$. (Les calculs effectués ici utilisent les valeurs u et v calculées dans l'hypothèse d'un système à deux états quantiques seulement ; c'est donc bien la relation (3-9) que nous devons utiliser et non pas la relation d'Einstein (8-4).

2) Dans les calculs de la première partie de l'ouvrage, au chapitre 1, nous avons utilisé l'approximation séculaire, qui consiste à négliger certains termes « antirésonnants » en $\mathbf{e}^{\pm 2i\omega t}$, dont les effets sont négligeables comparés aux termes résonnants (*cf.* remarque 1.3). Tant que le désaccord $|\delta\omega| = |\omega - \omega_0|$ reste faible, cette approximation reste valide. Mais si l'on travaille dans des conditions où $\omega \ll \omega_0$ (ce sera le cas avec la diffusion Rayleigh), il faut tenir compte de ces termes « antirésonnants » ; et cela conduit dans les calculs de probabilités ou d'énergie échangée à multiplier par un terme correctif en : $\left(1 + \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}\right)^2$ qui est effectivement très voisin de 1 quand $|\delta\omega| \ll \omega_0$, mais qui peut atteindre la valeur 4 quand ω tend vers zéro.

18.2.4 Bilan des énergies échangées. Puissance incohérente

Nous excluons de ce bilan les échanges d'énergie réversibles entre l'atome et l'onde incidente ; nous ne comptabilisons que les pertes d'énergie irréversibles, dissipées par le système atome-onde incidente vers l'extérieur.

Les remarques faites ci-dessus nous permettent d'élargir ce bilan aux processus éloignés de la résonance à condition de remplacer A par $A(\lambda)$. En revanche, nous restons dans le cadre de l'approximation séculaire, qui est indispensable pour la validité des équations de Bloch ; c'est-à-dire que nous excluons les écarts à la résonance vraiment trop importants.

On vérifie alors sans difficulté que la puissance totale P_{diff} (18-14), diffusée sous forme de lumière, en dehors de l'onde incidente, est supérieure à la puissance cohérente P_{coh} calculée au premier paragraphe de ce chapitre à partir du rayonnement du dipôle électrique. On peut montrer que la différence provient des fluctuations quantiques des opérateurs dipolaires atomiques (*cf.* le livre « Photons et atomes (processus d'interaction) » *op. cit.*).

La lumière correspondante n'a pas de phase définie. C'est une lumière totalement incohérente et dont le spectre n'est pas monochromatique ; nous appellerons P_{incoh} la puissance correspondante.

Pour écrire le bilan de ces trois puissances, nous utiliserons le paramètre de saturation *généralisé hors résonance* :

$$s = \frac{\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2}{1 + \delta\omega^2 \tau_2^2} \tag{18-15}$$

À partir des formules (18-11) et (18-8), (en supposant toujours $m_0 = 1$), ceci nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} P_{\text{diff}} &= \hbar\omega A(\lambda)(\beta^*\beta)_S = \hbar\omega A(\lambda)\frac{1 - m_S}{2} = \frac{\hbar\omega A(\lambda)}{2}\frac{s}{1+s} \\ P_{\text{coh}} &= \hbar\omega A(\lambda)\frac{u_S^2 + v_S^2}{4} = \frac{\hbar\omega A(\lambda)}{2}\frac{\tau_2}{2\tau_1}\frac{s}{(1+s)^2} = P_{\text{diff}}\frac{\tau_2}{2\tau_1}\frac{1}{1+s} \\ P_{\text{incoh}} &= P_{\text{diff}} - P_{\text{coh}} = \frac{\hbar\omega A(\lambda)}{2}\frac{s}{(1+s)^2}\left(s + 1 - \frac{\tau_2}{2\tau_1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18-16}$$

La condition $\tau_2 \leq 2\tau_1$ nous assure que le rapport $P_{\text{coh}}/P_{\text{diff}}$ est toujours inférieur à un 1. En l'absence de collisions $\tau_2 = 2\tau_1$, et la dernière expression se réduit à :

$$P_{\text{incoh}} = \frac{\hbar\omega A(\lambda)}{2}\frac{s^2}{(1+s)^2} = sP_{\text{coh}}. \tag{18-17}$$

Cette dernière expression est bien celle que l'on calcule à partir de fluctuations quantiques des opérateurs dipolaires. La partie de P_{incoh} en $\left(1 - \frac{\tau_2}{2\tau_1}\right)$ provient du brouillage des émissions dipolaires par les collisions (voire par les processus d'élargissement inhomogène).

La figure 18.3 représente la variation de ces trois puissances en fonction du paramètre s dans le cas $\tau_2 = 2\tau_1$. Cette figure éclairera la discussion qui suit :

- à résonance $\delta\omega \simeq 0$

$$\begin{cases} \Omega_1^2\tau_1\tau_2 \ll 1 \text{ (faible intensité incidente)} \Rightarrow s \ll 1 \quad P_{\text{coh}} \gg P_{\text{incoh}} \\ \Omega_1^2\tau_1\tau_2 = 1 \text{ (limite de saturation)} \Rightarrow s = 1 \quad P_{\text{coh}} = P_{\text{incoh}} \\ \Omega_1^2\tau_1\tau_2 \gg 1 \text{ (forte saturation)} \Rightarrow s \gg 1 \quad P_{\text{coh}} \ll P_{\text{incoh}} \end{cases}$$

- loin de la résonance

$$|\delta\omega| \gg \Omega_1\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \Rightarrow s \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{\text{coh}}}{P_{\text{incoh}}} = \frac{1}{s} \gg 1$$

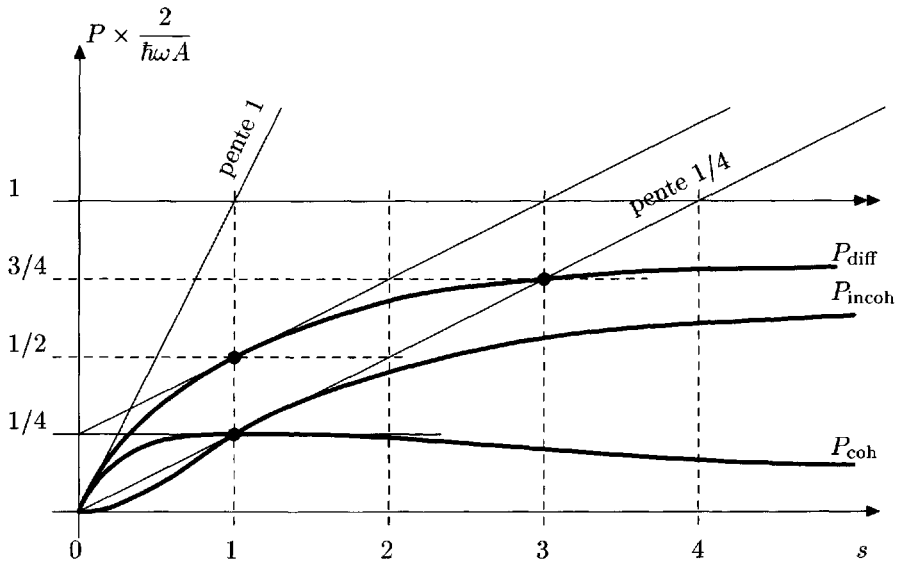


FIG. 18.3 – *Variation des puissances dissipées sous forme de lumière diffusée par un atome, soumis à une onde incidente, en fonction du paramètre sans dimension* $s = \dfrac{\Omega_1^2 \tau_1 \tau_2}{1 + \delta\omega^2 \tau_2^2}$ *(en l'absence de collisions* $\tau_2 = 2\tau_1$*).*

le rayonnement diffusé est presque entièrement cohérent ; c'est le cas de la diffusion Rayleigh (basse fréquence, $\delta\omega < 0$).

• En présence de collisions, on sait que $\tau_2 < 2\tau_1$ et le rapport $\dfrac{P_{\text{coh}}}{P_{\text{diff}}}$ est réduit notablement. Dans le cas où $\tau_2 \ll 2\tau_1$, la diffusion cohérente devient négligeable quelle que soit la valeur du coefficient s : l'interruption trop fréquente du rayonnement dipolaire par les collisions détruit sa cohérence (*cf.* §13-2 sur l'élargissement homogène par collisions).

En conclusion, résumons les deux idées importantes dégagées dans ce paragraphe :

1) La solution stationnaire des équations de Bloch (3-3) nous permet d'expliquer d'un seul coup aussi bien les phénomènes résonnants ($\delta\omega \simeq 0$) que la diffusion Rayleigh lorsque la fréquence de l'onde incidente est éloignée de la résonance. On ne recherchera pas cependant un accord quantitatif dans ce dernier cas, si l'écart à résonance est trop important.

2) Lorsque nous avons défini la probabilité d'émission spontanée $\dfrac{1}{\tau_b} = A$ au chapitre 2 aussi bien qu'au chapitre 8, nous avons inclus dans ce phénomène tous les photons perdus parce qu'ils ne sont pas échangés avec l'onde incidente. Nous devons donc distinguer deux catégories parmi ces photons

perdus, d'émission spontanée : une partie d'entre eux sont vraiment incohérents, les autres appartiennent à une onde cohérente dont la phase est définie en relation avec celle de l'onde incidente.

Des expériences sur des atomes ou molécules isolés sont parfois réalisables (*cf.* par exemple la figure 3.3) ; mais elles sont délicates et peu courantes. Dans les expériences habituelles, on observe simultanément un grand nombre d'atomes ; pour la partie cohérente des ondes diffusées, il faut donc étudier *les interférences de toutes les ondelettes atomiques, qui sont cohérentes entre elles, puisque leur phase est déterminée par la même onde incidente. C'est pourquoi il était important de distinguer la part cohérente et la part incohérente de la diffusion.*

Remarque 18.1 – Nous n'avons pas évoqué dans ce paragraphe la diffusion Thomson des rayons X (cas non résonnant haute fréquence, $\delta\omega \gg \omega_0$). En effet dans ce cas là, l'écart $\delta\omega$ a une valeur du même ordre de grandeur pour tous les écarts énergétiques $\hbar\omega_{pq} = E_q - E_p$, existant dans l'atome ; donc les contributions de tous les niveaux d'énergie excités de l'atome sont du même ordre de grandeur ; et réduire le calcul à deux niveaux, comme nous l'avons fait dans la partie I, n'a plus aucun sens.

La lumière dissipée en dehors du faisceau incident est perdue de manière irréversible, avec la probabilité $A = 1/\tau_2$ de l'émission spontanée, et se confond avec elle. Quel que soit le langage utilisé pour cette lumière perdue par diffusion, il faut, à son égard, distinguer trois propriétés différentes.

1) La diffusion de lumière en dehors du faisceau incident est un phénomène irréversible parce que l'énergie perdue par l'atome disparaît au loin dans une direction où la cavité optique n'est pas fermée.

2) La phase de l'onde émise dépend de celle du dipôle atomique. Si l'excitation est incohérente (décharge, où faisceau lumineux incident à spectre large) l'émission diffusée est aussi incohérente. Mais l'excitation par un faisceau incident monochromatique (non saturant) produit des dipôles oscillant avec des phases bien définies les unes par rapport aux autres, donc une émission diffusée cohérente. Il s'y ajoute une émission incohérente due aux fluctuations quantiques des dipôles.

(Attention ! Le calcul de la partie cohérente de l'émission diffusée utilise la valeur moyenne quantique du dipôle atomique, calculée à partir des solutions u et v des équations de Bloch. A forte saturation u et v redeviennent nuls, et donc l'émission spontanée redevient aussi incohérente ; ce sont les fluctuations des dipôles qui produisent alors l'effet le plus important.)

3) De même, concernant le diagramme de rayonnement, si l'excitation est isotrope, l'émission diffusée est isotrope aussi. Mais une excitation directionnelle (avec une polarisation bien définie, ou bien faisceau d'électrons de vitesses parallèles) entraîne une direction privilégiée des dipôles émetteurs et par suite une émission diffusée qui n'est pas isotrope. (*Cf.* les diagrammes de rayonnement au chapitre 19.)

18.3 Interférences des ondes dipolaires dans les directions obliques

Le calcul de ces interférences dépend essentiellement de la direction choisie pour observer la lumière diffusée. On a schématisé sur la figure 18.4 une onde plane incidente se propageant suivant la direction Oz et l'onde diffusée par différents dipôles, dans une direction faisant l'angle α avec Oz. L'observation étant faite à grande distance, l'onde diffusée peut être considérée localement comme une onde plane. Nous choisissons arbitrairement comme référence l'onde diffusée par le dipôle p_0 placé à l'origine des axes ; et nous comparons sa phase avec les phases des ondes diffusées dans la même direction par d'autres dipôles du même milieu diffusant. Pour cela, on trace la normale au plan d'onde incidente et la normale au plan d'onde diffusée passant par des dipôles

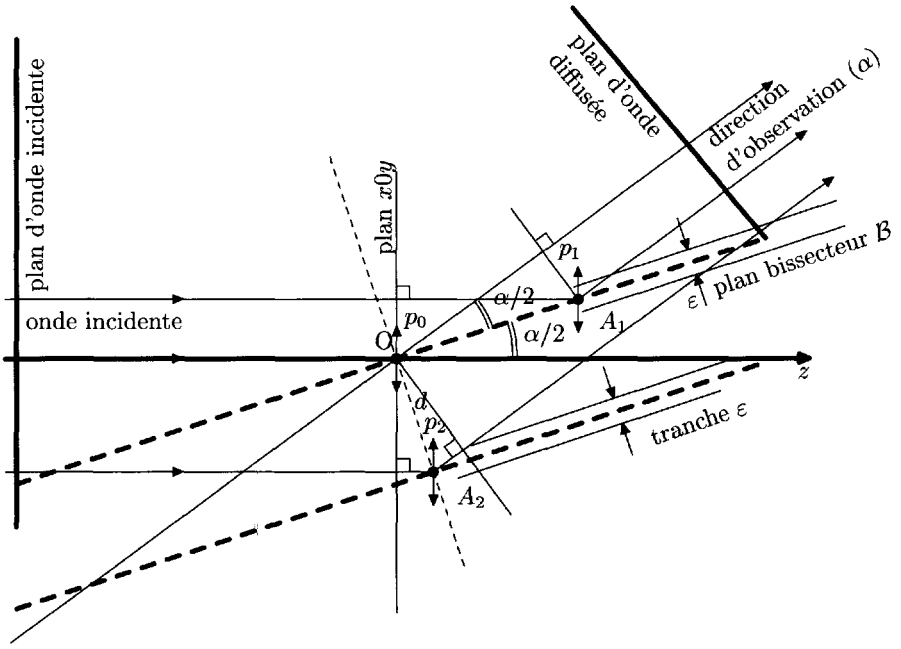


FIG. 18.4 – *Diffusion de la lumière par les dipôles atomiques dans une direction faisant l'angle α avec la direction de propagagtion Oz de l'onde plane incidente, polarisée parallèlement à Ox.*

La figure est faite dans le plan contenant Oz et la direction d'observation ; selon le choix de cette direction, le plan de la figure fait un angle différent avec le champ électrique incident E_x (qui est contenu dans le plan d'onde incident).

p_1 ou p_2 situés aux points A_1 ou A_2 ; on calcule alors les différences de chemin optique le long de ces normales (rayon lumineux).

Considérons d'abord le dipôle p_1 placé en un point A_1 du plan bissecteur $\mathcal{B}$ de l'angle α passant par O ; il est clair que le retard de chemin optique de l'onde incidente en A_1 est exactement compensé par l'avance de chemin optique de l'onde diffusée à partir de A_1 (les deux sont égaux à $\pm OA_1 \cos\frac{\alpha}{2}$). Les ondes diffusées par les dipôles du plan bissecteur $\mathcal{B}$ sont donc toutes en phase dans la direction α. Il en est de même, bien sûr, pour chacun des plans parallèles au plan bissecteur, mais avec une phase qui peut être différente d'un plan à l'autre.

Il reste maintenant à calculer la différence de phase entre les ondes diffusées par deux plans parallèles, séparés par la distance d. On choisit dans le deuxième plan A_2 tel que OA_2 soit perpendiculaire aux deux plans. Comparée à l'onde diffusée par le dipôle p_0 en O, l'onde diffusée par p_2 en A_2 subit le même retard $d\sin\frac{\alpha}{2}$, une fois à l'arrivée de l'onde incidente, et une autre fois à l'émission de l'onde diffusée soit un retard total $2d\sin\frac{\alpha}{2}$.

On trouve alors des séries de plans parallèles qui diffusent des ondes en phase ou en opposition de phase avec le plan $\mathcal{B}$ selon leur distance d :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Plans en phase si } 2d\sin\dfrac{\alpha}{2} = N\lambda \ (N \text{ entier}) \\ \text{Plans en opposition de phase si } 2d\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\lambda}{2} + N\lambda\end{array}\right\} \qquad (18\text{-}18)$$

La deuxième série de plans s'insère à mi-distance entre les plans de la première série. Pour calculer le bilan des interférences, il faut compter le nombre d'atomes présents dans chaque tranche de largeur ε ($\varepsilon \ll \lambda$) autour de chacun des plans parallèles.

18.3.1 En milieu condensé

En milieu condensé, les atomes sont serrés les uns contre les autres à quelques Angströms de distance, alors que les distances d sont de l'ordre de la longueur d'onde lumineuse, soit des milliers d'Angströms ; avec une largeur des tranches ε de quelques dizaines d'Angströms, on comptabilise dans chaque tranche des nombres d'atomes quasiment égaux et les interférences entre séries de plans parallèles, de phases opposées, sont presque totalement destructives. Il peut exister cependant un faible résidu de diffusion cohérente dans des directions obliques à cause d'impuretés ou de micro-défauts ainsi que de petites fluctuations de densité (détruisant l'égalité des nombres d'atomes dans chaque tranche). Mais dans les milieux condensés, l'essentiel de la diffusion cohérente se fait vers l'avant, dans des directions très voisines de la direction Oz de l'onde incidente, pour lesquelles les interférences sont globalement constructives.

Remarque 18.2 – La possibilité de trouver une largeur des tranches ε, intermédiaire entre les distances atomiques et la longueur d'onde, est essentielle au raisonnement précédent. Cette possibilité disparaît cependant complètement avec l'utilisation de rayons X dont la longueur d'onde est de l'ordre de l'Angström, voire nettement inférieure pour les rayons X durs ; et de fait, dans un milieu solide amorphe ou liquide, on observe une notable diffusion cohérente des rayons X répartie entre toutes les directions obliques.

Dans un milieu cristallin, la régularité de rangement des atomes conduit à observer une diffusion cohérente renforcée dans des directions privilégiées, phénomène que l'on appelle couramment diffraction des rayons X, par analogie avec la théorie des réseaux de diffraction optiques. On part des plans cristallins suivant lesquels les atomes sont régulièrement rangés et qui jouent le rôle du plan bissecteur de la figure 18.4 : les ondelettes X diffusées par tous les atomes du plan cristallin sont en phase dans la direction d'angle $\beta = \alpha/2$ symétrique de la direction de l'onde incidente. La condition pour que les différents plans cristallins soient en phase n'est autre que la première des équations (18-18) écrite avec l'angle $\beta = \alpha/2$; c'est la relation de Bragg pour la « diffraction » des rayons X.

18.3.2 Les fluctuations de densité dans un gaz

Les fluctuations de densité dans un gaz sont importantes et conduisent au contraire à une diffusion oblique relativement intense. En effet l'application des lois de hasard aux positions des atomes permet d'évaluer le carré moyen $\overline{(\Delta N)^2}$ de l'écart ΔN sur le nombre d'atomes contenus dans des volumes $\mathcal{V}$ égaux et dont la valeur moyenne est déterminée par la densité n d'atomes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{nombre moyen d'atomes dans } \mathcal{V} : N = n\mathcal{V} \\ \text{carré moyen } \overline{(\Delta N)^2} \simeq N\end{array}\right\} \qquad (18\text{-}19)$$

(on définit encore l'écart quadratique moyen $\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}} = \sqrt{N}$).

On applique ce résultat aux deux volumes constitués par toutes les tranches (de direction $\alpha/2$ sur la figure 18.4) qui diffusent en phase d'une part, et toutes les tranches qui diffusent en opposition de phase d'autre part. L'amplitude du champ rayonné dans la direction α est obtenue par soustraction des champs créés séparément par chaque volume ; elle est donc proportionnelle à la différence de leurs nombres d'atomes, de l'ordre de $\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}} = \sqrt{N}$. La puissance de l'onde diffusée résultante est proportionnelle au carré du champ, c'est-à-dire à N ; on parvient ainsi à calculer que la puissance de l'onde totale rayonnée dans la direction α est égale à celle d'un seul atome multipliée par le nombre total d'atomes du milieu diffusant.

On retrouve le même résultat par un raisonnement différent en considérant la phase φ_i de chacune des ondelettes individuelles, de même amplitude $\mathcal{E}_R$, émises dans la même direction par chaque atome numéroté i : $E_i = \mathcal{E}_R \cos(\omega t + \varphi_i)$.

Le champ global résultant vaut :

$$E_{\text{total}} = \sum_i \mathcal{E}_R \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{18-20}$$

La puissance totale résultante P_R est proportionnelle au carré du champ total :

$$(E_{\text{total}})^2 = \mathcal{E}_R^2 \left[\sum_{i=1}^{N} \cos^2(\omega t + \varphi_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \cos(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_j) \right]$$

Compte tenu du hasard total des valeurs des phases φ_i et φ_j, la seconde sommation en i et en j donne un résultat nul et la valeur moyenne sur le temps des cosinus carrés conduit au résultat :

$$\frac{P_R}{S} = c\varepsilon_0 \overline{(E_{\text{total}})^2} = c\varepsilon_0 \mathcal{E}_R^2 N/2 \tag{18-21}$$

c'est-à-dire qu'il suffit d'ajouter les puissances émises individuellement par les N atomes de la vapeur diffusante.

Nous appliquons ce résultat à **la diffusion Rayleigh de la lumière visible dans l'air**. C'est un cas où l'onde incidente est très éloignée de la résonance puisque les premières transitions résonnantes sont dans l'ultra-violet un peu lointain ($\delta\omega < 0$). Nous ne chercherons donc pas à exploiter le détail des solutions de Bloch ; mais nous pourrons établir la relation entre la puissance diffusée et la susceptibilité χ' du gaz, parce que les corrections théoriques à effectuer dans les calculs jouent de la même façon sur ces grandeurs et ne modifient pas leur relation. La susceptibilité d'un gaz est sans doute petite, mais peut être mesurée avec précision à partir de son indice de réfraction n_r ($n_r - 1 = \chi'/2$; *cf.* Remarque 3.3 au chapitre 3).

Nous avons au chapitre 3 calculé les susceptibilités χ' et χ'' en fonction des variables quantiques u_S et v_S dans les formules (3-12), dont les expressions permettent d'établir un lien avec le dipôle atomique (18-5) :

$$\left(\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)^2 = \left(\frac{d_{ab}}{\varepsilon_0}\right)^2 (u_S^2 + v_S^2) = \frac{\chi'^2 + \chi''^2}{n^2} \mathcal{E}_{\text{in}}^2 \tag{18-22}$$

Le très grand écart à la résonance permet de simplifier le calcul, en nous autorisant à négliger χ'' devant χ' :

$$\chi'' \simeq \chi' / |\delta\omega\tau_2| \approx \chi'/\omega\tau_2 \approx 10^{-6}\chi' \tag{18-23}$$

Les équations (18.4) permettent alors de calculer la puissance diffusée

- par un volume $\mathcal{V}$ contenant $N = n\mathcal{V}$ atomes ou molécules ;

• en fonction de l'intensité incidente $P_{\text{in}}/S_{\text{in}} = \varepsilon_0 c \mathcal{E}_{\text{in}}^2/2$; par

$$\boxed{P_{R\ \text{totale}} = NP_{R1} = N\frac{8\pi^3}{3\lambda^4}\left(\frac{\chi'}{n}\right)^2\frac{P_{\text{in}}}{S_{\text{in}}} = \frac{\mathcal{V}}{n}\frac{8\pi^3}{3\lambda^4}\chi'^2\frac{P_{\text{in}}}{S_{\text{in}}}} \tag{18-24}$$

$$\boxed{P(\delta\Omega) = \delta\Omega \sin^2\theta \frac{\pi^2}{\lambda^4}\chi'^2\frac{P_{\text{in}}}{S_{\text{in}}}} \tag{18-25}$$

En appliquant (18-24) au volume $\mathcal{V} = S_{\text{in}}\delta z$ traversé par l'onde incidente sur la longueur δz, on obtient la perte de puissance δP_{in} de l'onde incidente sur la longueur δz :

$$K = -\frac{1}{P_{\text{in}}}.\frac{\delta P_{\text{in}}}{\delta z} = \frac{P_{R\ \text{totale}}}{P_{\text{in}}\delta z} = \frac{1}{n}\frac{8\pi^3}{3\lambda^4}\chi'^2 \tag{18-26}$$

Ce coefficient d'atténuation K est extrêmement faible, mais parfaitement mesurable si l'on opère sur les dizaines de kilomètres de l'atmosphère terrestre (on compare des longueurs différentes lorsque le soleil baisse sur l'horizon).

Toutes ces formules ont été bien vérifiées, soit en absorption dans l'atmosphère (comme nous venons de l'indiquer), soit au laboratoire en appliquant la formule (18-25) à un petit volume de gaz, enfermé dans un récipient de verre, à condition d'éliminer soigneusement toutes les causes de lumière parasite, car le rapport entre la puissance mesurée $P(\delta\Omega)$ et la puissance incidente P_{in} est très petit (Cabannes 1915 ; référence [1]). On vérifie la loi en $1/\lambda^4$, qui produit le bleu du ciel et le rouge du soleil couchant.

La polarisation de la lumière diffusée à angle droit du faisceau incident ($\alpha = 90°$ sur la figure 18.4) est vérifiée correctement avec les gaz monoatomiques ; mais des écarts de quelques % (jusqu'à 10 %) sont observés sur des gaz moléculaires, manifestant l'anisotropie de ces molécules. L'intérêt de ces expériences est de fournir une mesure absolue du nombre d'atomes par unité de volume n, et par suite du nombre d'Avogadro. Ces mesures ne sont pas aussi précises que d'autres méthodes à cause des corrections de dépolarisation et des corrections pour d'autres causes d'absorption (poussières et vapeur d'eau dans l'atmosphère par exemple) ; mais elles sont en accord avec les autres méthodes.

Remarque 18.3 – Un rapide calcul d'ordre de grandeur pour le coefficient d'absorption. La densité de l'atmosphère normale est connue à partir du nombre d'Avogadro $\mathfrak{N}$ dans 22.4 litres : $n = \dfrac{6{,}02 \times 10^{23}}{0{,}0224} \simeq 3 \times 10^{25}/\text{m}^3$. Les mesures d'indice de l'air par interférométrie donnent $\chi' = 2(n_r - 1) \simeq 6 \times 10^{-4}$. Pour trois

longueurs d'onde λ, on calcule le coefficient d'absorption K (en m^{-1}), et l'on mesure l'épaisseur optique au zénith et l'épaisseur optique au couchant :

$[\lambda]$	0,66 μm (rouge)	0,55 μm (vert)	0,44 μm (bleu)
Coefficient d'absorption en m^{-1}	$0{,}5 \times 10^{-5}$	10^{-5}	3×10^{-5}
Épaisseur optique au zénith Kl ($l \simeq 10$ km)	0,05	0,1	0,3
Épaisseur optique au couchant Kl ($l \simeq 100$ km)	0,5	1	3

La comparaison de ces valeurs numériques explique bien le bleu du ciel au milieu de la journée, le soleil rouge au couchant, et le rayon vert pendant une fraction de seconde à la disparition du soleil sous l'horizon : en effet le phénomène de réfraction sur les couches atmosphériques obliques (effet de prisme) fait que les « images » du soleil perçues par l'observateur sont un peu plus hautes sur l'horizon pour les couleurs les plus déviées (bleu et vert) et un peu moins haute sur l'horizon pour la couleur rouge, la moins déviée : l'image rouge passe donc sous l'horizon la première avant les images verte ou bleue (mais la partie bleue du spectre, avec l'épaisseur optique $Kl \approx 3$, ne parvient déjà plus à l'observateur).

Nous n'avons pas fait mention des changements de fréquence par effet Doppler qui caractérisent les milieux gazeux (*cf.* §13.3) pour deux raisons :

(1) à la réception du faisceau incident par les atomes, les écarts Doppler sont tout à fait négligeables comparés à l'écart de l'onde incidente elle-même $\delta\omega = \omega - \omega_0 \approx -\dfrac{\omega_0}{2}$;

(2) à l'émission, il est certain que le spectre des ondes émises s'étale sur une plage de fréquence de l'ordre de la largeur Doppler, et dans le cas où l'onde incidente est monochromatique, l'onde diffusée ne l'est pas. Mais le fait que les ondelettes diffusées soient à des fréquences différentes ne change rien aux raisonnements précédents : cela ne fait qu'augmenter le brouillage des phases φ_i définies en (18-20) ; et c'est sans conséquence dans la mesure où les hasards de positions des atomes conduisaient déjà à un brouillage total.

18.3.3 Diffusion par une onde sonore

Une onde sonore produit dans un milieu des zones de compression et de dilatation qui modifient momentanément et localement la densité d'atomes. Si cette onde sonore est une onde plane, ces zones sont des tranches planes parallèles analogues à celles de la figure 18.4 ; et la distance d entre deux tranches voisines de forte densité est égale à la longueur d'onde sonore $\Lambda_{\text{son}} = v_{\text{son}}/\nu_{\text{son}}$. La condition (18-18) pour que les ondes optiques diffusées par les tranches

de forte densité soient en phase s'écrit donc :

$$\boxed{2\Lambda_{\text{son}} \sin \frac{\alpha}{2} = \lambda_{\text{opt}}} \tag{18-27}$$

en remplaçant les longueurs d'onde par les fréquences on obtient :

$$\boxed{2\nu_{\text{opt}} \frac{v_{\text{son}}}{c} \sin \frac{\alpha}{2} = \nu_{\text{son}}} \tag{18-28}$$

on calcule la fréquence sonore capable de diffuser la lumière de fréquence ν_{opt} dans direction α.

Ce processus de diffusion se distingue des précédents par le fait qu'il provoque simultanément un changement de fréquence de l'onde lumineuse diffusée, prévu par Brillouin en 1922 (référence [2]), et qui peut s'expliquer de deux points de vue différents.

(1) Avec une onde sonore progressive, on suit le déplacement de la tranche de forte densité à la vitesse du son. On considère alors que l'onde lumineuse est en quelque sorte réfléchie par un miroir mobile de vitesse v_{son}, entraînant pendant la durée δt une variaton du chemin optique $\delta l = 2v_{\text{son}}\delta t \sin \dfrac{\alpha}{2}$, par suite un effet Doppler avec la vitesse $v_{\text{Doppler}} = \delta l/\delta t$ et un changement de fréquence de l'onde diffusée qui s'exprime simplement en fonction de la fréquence acoustique (18-28) :

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{Doppler}} &= \frac{\delta l}{\delta t} = 2v_{\text{son}} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \nu_{\text{diff}} &= \nu_{\text{opt}} \left(1 \pm \frac{v_{\text{Doppler}}}{c}\right) = \nu_{\text{opt}} \pm 2\nu_{\text{opt}} \frac{v_{\text{son}}}{c} \sin \frac{\alpha}{2} = \nu_{\text{opt}} \pm \nu_{\text{son}} \end{aligned}\right\} \tag{18-29}$$

le signe $\pm$ dépendant du sens de propagation des ondes acoustiques (réf. [3]).

(2) Avec une onde sonore stationnaire, on reste dans une tranche fixe du matériau (ventre de l'onde stationnaire) et l'on constate la variation périodique de la densité avec la fréquence ν_{son}. L'intensité qu'elle diffuse est donc modulée à la fréquence ν_{son}. Ceci produit l'équivalent d'un battement entre les deux fréquences $\nu_{\text{opt}} \pm \nu_{\text{son}}$; mais ces deux fréquences lumineuses, décalées positivement ou négativement, sont produites simultanément.

Ces calculs s'appliquent à deux types d'expériences bien différentes :

(1) *La mise en évidence des ondes thermoélastiques naturelles* qui parcourent en tous sens un milieu condensé, solide ou liquide à température absolue $T \neq 0$ et dont l'énergie globale constitue l'essentiel de l'énergie thermique emmagasinée par ce matériau. Compte tenu de la répartition de l'énergie thermique sur un très grand nombre d'ondes acoustiques de fréquences et de directions différentes, l'amplitude de chacune d'elles reste très modeste ;

et la quantité de lumière diffusée par une onde particulière reste faible en comparaison de la lumière diffusée à la fréquence incidente ν_{opt} par les imperfections du réseau cristallin.

Lorsqu'on observe le spectre de la lumière diffusée, il peut être nécessaire d'atténuer la composante à fréquence centrale ν_{opt} par un filtrage approprié pour permettre l'observation des deux composantes qui l'encadrent à $\nu_{\text{opt}} \pm \nu_{\text{son}}$, et qui forment ce qu'on appelle le « doublet Brillouin ». Chaque direction α d'observation permet de mettre en évidence une fréquence sonore différente selon la loi (18-28). Dans le cas des cristaux non cubiques, la vitesse du son varie selon sa direction par rapport aux axes cristallins ; en faisant tourner le cristal par rapport aux directions de la lumière, on fait varier la vitesse du son et donc conformément à (18-28) la fréquence des ondes sonores détectées.

(2) *La diffusion de la lumière par les ondes ultrasonores artificielles* produites dans un cristal par un transducteur piézo-électrique adapté. Les premières expériences de ce type ont été effectuées dès 1932 (références [3] et [4]) ; mais leurs applications se sont développées plus récemment grâce à la directivité des faisceaux laser. Les fréquences relativement basses des transducteurs piézo-électriques (jusqu'à la centaine, voire quelques centaines de MHz), jointes à la faible vitesse du son dans les solides ($v_{\text{son}} \approx$ quelques km/sec), conduisent à des longueurs d'onde sonores nettement supérieures aux longueurs d'onde optiques courantes ($\Lambda_{\text{son}} \gtrsim 10\mu\text{m}$), et des angles de diffusion assez faibles permettant de confondre le sinus avec l'angle : (18-27) peut s'écrire $\alpha \simeq \lambda_{\text{opt}}/\Lambda_{\text{son}}$.

Les Modulateurs Acousto-Optiques (M.A.O. ou A.O.M. en anglais) peuvent utiliser une onde sonore progressive, se propageant dans un seul sens, qui demande plus d'énergie électrique au transducteur, mais qui produit un seul déplacement de fréquence (18-29) de signe imposé. La directivité des faisceaux laser permet d'obtenir d'excellents rendements atteignant 80 %, pour la transformation de l'onde incidente en onde diffusée (références [5] et [6]). Ces M.A.O. peuvent être utilisés soit comme interrupteurs optiques, assez rapides, en déviant brusquement le faisceau lumineux, soit pour « balayer » finement la fréquence d'un laser bien stabilisé, sans perdre la stabilité de fréquence nécessaire.

Remarque 18.4 – Le raisonnement que nous avons fait pour analyser les interférences des ondelettes diffusées, avec les tranches parallèles de la figure 18.4, suppose que le milieu soit assez vaste pour comporter un grand nombre de tranches identiques qui moyennent leurs effets. Toute discontinuité peut être une cause de diffusion plus intense ; ainsi la réflexion partielle sur la surface séparative de deux milieux transparents peut être interprétée comme une diffusion privilégiée par les atomes proches de cette séparation.

Un autre exemple est le phénomène de réflexion spéculaire observé sur une vapeur atomique avec une longueur d'onde résonnante pour les atomes de cette vapeur, lorsque la densité n de la vapeur est assez forte pour conduire à un coefficient d'absorption $K \approx 1/\lambda$; en effet seuls les atomes proches de la paroi sont fortement éclairés et leur contribution au champ diffusé est beaucoup plus forte que celle des couches plus profondes en opposition de phase.

18.4 Diffusion cohérente vers l'avant

Le but de ce paragraphe n'est pas de décrire des expériences ou des applications nouvelles, mais de préparer les deux paragraphes suivants. De plus, il apporte une meilleure compréhension globale de l'interaction lumière-atome.

Nous avons déjà évoqué les interférences constructives de la diffusion vers l'avant, dans la direction Oz de propagation de l'onde incidente : en effet il y a toujours compensation exacte entre le retard de chemin optique à la réception de l'onde incidente et l'avance de chemin optique du même point A_1 réémettant dans la direction Oz. On peut alors poser la question de l'ouverture angulaire dans laquelle cette propriété reste valable.

18.4.1 Cône de cohérence

La réponse est relativement simple parce qu'elle est donnée par les classiques calculs de diffraction que l'on trouve dans tous les cours d'optique ondulatoire. En effet, nous devons calculer la somme des ondelettes diffusées au loin par les dipôles régulièrement répartis sur une section de diamètre D perpendiculairement à $0z$; ce calcul est pratiquement identique à la somme « à l'infini » des ondelettes émises par les sources fictives de Kirchhoff réparties sur un trou de diamètre D percé dans un écran (les formules théoriques des deux problèmes comportent des facteurs angulaires différents : $\sin\theta$ pour le dipôle, $\cos\alpha - \cos\beta$ pour Kirchhoff, *cf.* §15.3. Mais en pratique, dans une ouverture angulaire limitée, ces fonctions trigonométriques peuvent être confondues avec l'unité). Les classiques calculs de diffraction nous montrent ainsi que les interférences des ondelettes restent constructives à l'intérieur du cône de cohérence centré sur l'axe $0z$ et d'angle au sommet $\alpha \approx \lambda/D$ (Fig. 18.5a) dont l'ouverture varie en raison inverse du diamètre D. Pour calculer l'ordre de grandeur du champ diffusé au loin à l'intérieur de ce cône, nous pouvons multiplier l'amplitude $\mathcal{E}_R$ (18-2) du champ rayonné d'un dipôle par le nombre N des dipôles, qui sont approximativement en phase :

$$\mathcal{E}_{\text{Avant}} \simeq N\mathcal{E}_R = N\frac{1}{r}\frac{\pi}{\lambda^2}\frac{p_0}{\varepsilon_0} \ (\sin\theta = 1 \text{ pour la direction } 0z\ ). \qquad (18\text{-}30)$$

La puissance rayonnée vers l'avant dans ce cône $P(\text{Avant})$ est calculée comme le flux du vecteur de Poynting à travers une section S à grande distance r :

$$P(\text{Avant}) \simeq \frac{\varepsilon_0 c}{2}\mathcal{E}^2_{\text{avant}}S = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\frac{S}{r^2}N^2\frac{\pi^2}{\lambda^4}\left(\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\Omega N^2\frac{\pi^2}{\lambda^4}\left(\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)^2 \qquad (18\text{-}31)$$

À la différence du calcul du paragraphe précédent, la puissance rayonnée est ici multipliée par le carré du nombre de dipôles N, qui dépend de l'épaisseur a (selon Oz) de la couche de dipôles. Nous pouvons l'utiliser pour exprimer

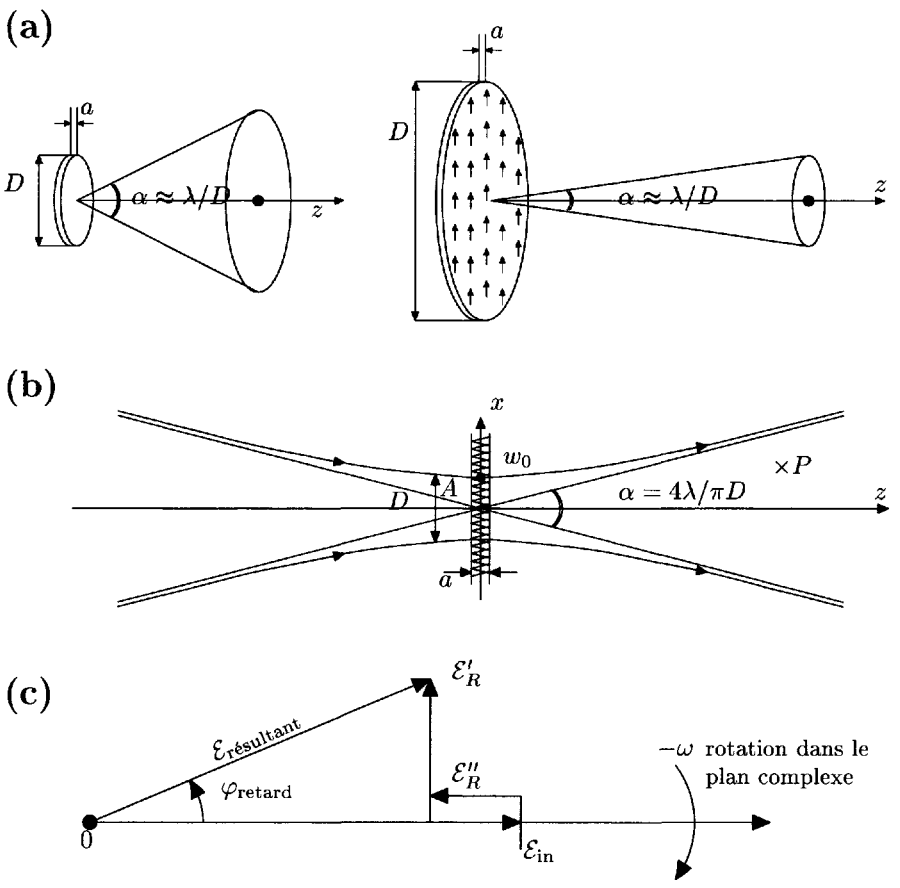


FIG. 18.5 – *Diffusion vers l'avant.*

(a) Cônes dont l'ouverture varie en raison inverse du diamètre du milieu émetteur. (b) Faisceau incident gaussien, induisant des dipôles dans une mince tranche de matière d'épaisseur a placée au waist ($D = 2w_0$). On calcule le champ créé au point quelconque P par tous les atomes A de la tranche. (c) Représentation dans le plan complexe des amplitudes des champs au point P (avec la convention du champ en $\mathbf{e}^{-i\omega t}$).

l'angle solide Ω du cône de cohérence :

$$N = na\pi\frac{D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{S}{r^2} \approx \frac{\lambda^2}{D^2} = \frac{\pi}{4}\frac{na\lambda^2}{N} \tag{18-32}$$

à densité n et épaisseur a données, l'angle solide Ω varie en raison inverse du nombre de dipôles ; en substituant (18-32) dans (18-31), on élimine une fois N :

$$P(\text{Avant}) \approx Nna\lambda^2\varepsilon_0 c\frac{\pi^3}{8\lambda^4}\left(\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)^2 = N\frac{3na\lambda^2}{32}P_{R1} = N^2P(\Omega) \qquad (18\text{-}33)$$

en utilisant les expressions des puissances rayonnées par un dipôle calculées en (18.4) : P_{R1} totale, ou $P(\Omega)$ dans la direction Oz ($\sin\theta = 1$). Dans le cas de la diffusion Rayleigh, il est facile alors de remplacer P_{R1} par son expression calculée en (18-24).

La cohérence des champs des N dipôles conduit à une puissance rayonnée relativement importante en N^2 ; et l'élimination de l'un des deux facteurs N du carré laisse dans la formule un coefficient sans dimension $na\lambda^2$ proportionnel à la densité atomique n du milieu diffusant. L'épaisseur a du milieu diffusant ne peut pas être choisie de manière arbitraire ; trois facteurs limitatifs de nature différente peuvent entrer en jeu :

(1) l'épaisseur a doit rester inférieure à la longueur de cohérence de l'onde incidente, c'est-à-dire sa durée de cohérence τ_{coh} multipliée par la vitesse c (*cf.* §14.6), parce qu'au-delà de la durée de cohérence, il n'y a plus de corrélation entre les phases. Avec une onde incidente monochromatique, l'épaisseur a peut être relativement grande (la longueur d'une cavité laser par exemple). Dans le cas d'une lumière blanche, le temps de cohérence est de l'ordre de la période optique et l'épaisseur a doit être inférieure à une longueur d'onde λ.

(2) Le calcul suppose que tous les atomes du volume de longueur a sont soumis (approximativement au moins) au même champ incident, déphasé seulement par la distance de propagation. C'est-à-dire que cette onde incidente n'est pas modifiée de manière importante, par son interaction avec les atomes, entre les deux extrémités de la longueur a. Cette condition dépend évidemment de la fréquence de l'onde ; une onde résonnante est modifiée beaucoup plus rapidement qu'une onde dont la fréquence est éloignée de la résonance.

(3) La densité atomique n ne doit pas non plus être trop élevée pour respecter une autre hypothèse, implicite, mais qu'il faut rappeler ici : la méthode de résolution des équations de Maxwell, utilisée dans ce chapitre 18, fait la somme des solutions calculées séparément pour différentes sources de rayonnement ; elle suppose donc que ces sources sont indépendantes, sans interaction entre elles qui pourraient les modifier. **Nous ne pouvons l'appliquer qu'à un milieu suffisamment dilué pour que les distances entre les dipôles rendent leurs interactions négligeables ; et le facteur sans dimension $na\lambda^2$ doit garder une valeur faible** (*cf.* paragraphe suivant ; la densité n, dont il s'agit ici, est celle d'une classe d'atomes homogène (*cf.* §13.3) ; parce que c'est la coïncidence de leurs fréquences centrales qui crée de fortes interactions entre les atomes).

Les mêmes remarques s'appliquent naturellement dans la suite, où nous proposons une autre approche du même problème utilisant le faisceau

gaussien. Cela nous permet d'utiliser les calculs déjà effectués au chapitre 15, et d'en tirer facilement des interprétations physiques importantes.

18.4.2 Faisceau incident gaussien (dispersion et absorption)

Nous supposons donc qu'une source lointaine vers les z négatifs (ce peut être par exemple un laser suivi d'une lentille) crée un faisceau incident gaussien décrit de manière rigoureuse au chapitre 15 par l'expression (15-36). Dans le plan de son « waist » ($z = 0$), cette expression se simplifie ; le champ a la même phase en tous les points A de ce plan $z = 0$, et l'amplitude s'écrit en transposant (15-21) :

$$\mathcal{E}_{\text{in}}(A) = \mathcal{E}_{\text{in}}(x, y, 0) = \mathcal{E}_0 \mathbf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \tag{18-34}$$

Nous supposons encore que le faisceau traverse dans le plan de son waist un milieu matériel d'épaisseur a et de densité atomique n (*cf.* Fig. 18.5b). Sous l'action du champ incident ci-dessus, chaque atome acquiert un dipôle donné par (18-5) ; une différence importante par rapport aux calculs des paragraphes précédents tient à la variation des amplitudes u_S et v_S des dipôles selon leur position transversale (x, y) puisqu'elles dépendent du champ incident gaussien. Afin de faciliter les calculs ci-dessous, nous choisissons de nous maintenir en dessous de la saturation, généralisée en (18-15) :

$$s \ll 1 \quad \text{soit } \Omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \ll 1 + \delta\omega^2 \tau_2^2 \tag{18-35}$$

Dans ces conditions les expressions stationnaires u_S et v_S calculées en (3-3) peuvent être considérées comme linéaires en Ω_1, c'est-à-dire aussi par rapport à l'amplitude $\mathcal{E}_{\text{in}}$ du champ incident. En d'autres termes, les susceptibilités χ' et χ'' (3-11) peuvent être considérées comme constantes (indépendantes de $\mathcal{E}_{\text{in}}$, c'est-à-dire de x et y) et l'on peut les utiliser pour écrire la valeur moyenne du moment dipolaire atomique (2-5) ou (3-10) :

$$\left.\begin{aligned} \langle D_x(t)\rangle &= \left(\frac{\chi'}{n}\cos\omega t + \frac{\chi''}{n}\sin\omega t\right)\varepsilon_0 E_x(t) \\ \text{en notation complexe : } &\frac{1}{n}(\chi' + i\chi'')\varepsilon_0 \mathcal{E}_{\text{in}}(x, y, 0)\mathbf{e}^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{18-36}$$

Nous obtenons une variation gaussienne de l'amplitude des dipôles.

Pour calculer le champ rayonné vers l'avant au point P, il faut faire la somme de tous les champs individuels (18-1) rayonnés par chaque atome A à la distance $AP = r$; la faible ouverture du faisceau gaussien permet d'écrire $\sin\theta = 1$; mais il ne faut pas oublier le déphasage dû au retard en $\left(t - \frac{r}{c}\right)$.

Nous avons choisi une tranche très mince qui permet de ramener l'intégrale de volume à une intégrale de surface. On obtient en projection sur l'axe Ox

(tenant compte de $\sin\theta = 1$) :

$$\left.\begin{aligned} E_R(P,t) &= \iint \frac{na\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\omega^2}{rc^2}\left\langle D_x\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle \\ &= \frac{\pi a}{\lambda^2}(\chi' + i\chi'')\mathbf{e}^{-i\omega t}\iint \mathrm{d}S\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r}\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(x,y,0) \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}37)$$

L'intégrale restante n'est pas simple à calculer ; mais nous l'avons déjà fait au chapitre 15, il suffit d'en reprendre le résultat. En effet, pour calculer l'amplitude complexe du champ $\mathcal{E}(P)$ en un point P quelconque du faisceau gaussien, nous étions partis de l'intégrale de Kirchhoff (15-17) appliquée à la répartition gaussienne dans le plan $z = 0$, soit (15-18). Cette formule (15-18) s'applique aussi à notre onde incidente :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathrm{in}}(P) &= -\frac{ik}{2\pi}\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r}\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(A) \\ &= -\frac{i}{\lambda}\iint \mathrm{d}S\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r}\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(x,y,0) \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}38)$$

Le calcul de l'intégrale (18-38) est identique au calcul de l'intégrale (15-18) que nous avons effectué au chapitre 15, et qui nous a fourni le résultat (15-25) ou (15-36), c'est-à-dire l'expression générale du faisceau gaussien. Tenant compte des coefficients différents en facteur devant les intégrales (18-38) et (18-37), nous obtenons pour l'amplitude complexe $\mathcal{E}_R(P)$ du champ rayonné $E_R(P,t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E}_R(P) = \frac{\pi a}{\lambda^2}(i\chi' + \chi'')\iint \mathrm{d}S\frac{\mathbf{e}^{ikr}}{r}\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(x,y,0) = \frac{\pi a}{\lambda}(i\chi' - \chi'')\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(P) \\ &\text{soit } \mathcal{E}_R(P) = i\mathcal{E}'_R(P) - \mathcal{E}''_R(P)\begin{cases} \text{en phase } \mathcal{E}''_R(P) = \dfrac{\pi a}{\lambda}\chi''\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(P) \\ \text{en quadrature } \mathcal{E}'_R(P) = \dfrac{\pi a}{\lambda}\chi'\mathcal{E}_{\mathrm{in}}(P) \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (18\text{-}39)$$

La répartition gaussienne des dipôles semblait compliquer le problème ; en fait elle l'a simplifié en le ramenant à un problème déjà traité précédemment. La relation (18-39) montre que l'onde rayonnée est aussi une onde gaussienne, possédant les mêmes caractéristiques que l'onde incidente ; et elle impose une relation de phase invariable dans l'espace entre l'onde incidente et l'onde diffusée, observées au même point P.

Nous résumons les résultats importants, calculés rigoureusement dans ce cas particulier du faisceau gaussien, mais qui ont une portée générale :

(1) Le cône de cohérence de la diffusion vers l'avant se confond avec l'ouverture angulaire du faisceau incident, ce qui rend difficile une expérimentation directe sur ce phénomène (sauf expériences en impulsions §18-7).

(2) L'amplitude complexe du champ total résultant au point P (*cf.* Fig. 18.5c) s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{rés}}(P) = \left[\mathcal{E}_{\text{in}}(P) - \mathcal{E}''_R(P)\right] + i\mathcal{E}'_R(P) \tag{18-40}$$

Dans la mesure où $\mathcal{E}'_R$ et $\mathcal{E}''_R$ sont petits devant $\mathcal{E}_{\text{in}}$, on en déduit :

- une diminution d'amplitude $\dfrac{-\delta\mathcal{E}_{\text{rés}}}{\mathcal{E}_{\text{rés}}} \simeq \dfrac{\mathcal{E}''_R}{\mathcal{E}_{\text{in}}} = \dfrac{\pi a}{\lambda}\chi''$ soit un coefficient d'absorption subi sur la longueur $\delta z = a$:

$$K = -\frac{1}{P}\frac{\delta P}{\delta z} = -\frac{2}{\mathcal{E}}\frac{\delta\mathcal{E}_{\text{rés}}}{\delta z} = \frac{2\pi\chi''}{\lambda} = \chi''\frac{\omega}{c} \quad \text{(absorption)}$$

- un déphasage retard du champ résultant (Fig. 18.5c) :

$$\varphi \simeq \frac{\mathcal{E}'_R}{\mathcal{E}_{\text{in}}} \simeq \frac{\pi a}{\lambda}\chi' = 2\pi\frac{(n_r - 1)a}{\lambda} \quad \text{(dispersion)}$$

en tenant compte de la relation classique entre la susceptibilité réelle χ' et l'indice de réfraction n_r. On retrouve bien le retard de phase produit par la traversée d'un milieu d'indice n_r dans la zone de transparence basse fréquence ($\delta\omega < 0$) où χ' est positif.

En résumé, ces calculs de diffusion vers l'avant nous permettent de retrouver (avec la méthode (a) du §17.1) les résultats obtenus au chapitre 17 par une méthode différente (méthode (b) du §17.1) en écrivant les équations locales de propagation (*cf.* §17.3).

Ces calculs ne sont valides, bien sûr, que si tous les dipôles de la tranche d'épaisseur a sont soumis approximativement au même champ (18-34) ne dépendant pas de z, c'est-à-dire que le champ rayonné calculé à la sortie de la tranche a reste petit devant le champ incident : termes en $\chi\dfrac{\pi a}{\lambda} \ll 1$. Dans le cas contraire, il faut décomposer le calcul en tranches successives très minces, puis calculer l'évolution de $\mathcal{E}_{\text{res}}(z)$ en fonction de z comme on le fait habituellement dans les calculs d'absorption pour obtenir la loi en $\mathbf{e}^{-Kz}$.

Remarque 18.5 – C'est le terme imaginaire χ'' de la polarisation atomique complexe qui produit la partie $\mathcal{E}''_R$ du champ rayonné, en phase avec l'onde incidente. Inversement c'est le terme réel χ' de la polarisation qui produit la partie $\mathcal{E}'_R$ imaginaire du champ rayonné, en quadrature avec l'onde incidente. Ce croisement de termes est provoqué par le facteur i en tête de l'intégrale de Kirchhoff (15-17) reprise en (18-38).

Une autre façon d'interpréter ce croisement peut être proposée aux lecteurs qui ont étudié, dans certains cours d'optique, le calcul effectué du champ rayonné, créé au voisinage d'un plan de dipôles p_x mis en phase par une onde plane incidente polarisée parallèle à Ox, $E_{\text{in}}(z,t)$:

$p_x(0,t) = \dfrac{\chi'}{n}E_{\text{in}}(0,t)$, indépendants de x et y, dans le plan d'onde $z = 0$

Le résultat classique de ce calcul est que l'onde plane rayonnée vers l'avant par l'ensemble de ces dipôles est caractérisée par un champ $E_R(z,t)$ en quadrature avec le champ incident $E_{\text{in}}(z,t)$; c'est la moyenne des déphasages de propagation à partir des différents dipôles qui produit au total cette quadrature.

Autrement dit, si l'on applique la formule de Kirchhoff (18-38) en un point P très voisin du « waist » $z = 0$, le calcul de l'intégrale au second membre introduit le même déphasage en quadrature par rapport au champ incident complexe $\mathcal{E}_{\text{in}}(P)$. Heureusement le facteur $-i$ devant l'intégrale compense et annule cette quadrature ; c'est ce qui permet aux deux membres de l'équation ($\mathcal{E}_{\text{in}}(P)$ à gauche, et l'intégrale à droite) de se trouver en phase.

18.4.3 Puissance de l'onde résultante. Amplification

On peut encore calculer l'intensité de l'onde résultante transportée dans le faisceau gaussien.

$$\frac{P_{\text{rés}}}{S} = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\mathcal{E}_{\text{rés}}^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\left[(\mathcal{E}_{\text{in}} - \mathcal{E}_R'')^2 + \mathcal{E}_R'^2\right]$$
$$= \frac{\varepsilon_0 c}{2}\left[\mathcal{E}_{\text{in}}^2 - 2\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}_R'' + \left(\mathcal{E}_R''^2 + \mathcal{E}_R'^2\right)\right] \quad (18\text{-}41)$$

(Il s'agit de l'intensité locale en chaque point du front d'onde ; c'est-à-dire que la surface S est choisie beaucoup plus petite que la section du faisceau : $S \ll \pi w(z)^2$. On peut intégrer sur la section du faisceau, comme au §15.2, pour obtenir la puissance totale transportée.)

On reconnaît dans le dernier crochet trois termes successifs :

- la puissance incidente en $\mathcal{E}_{\text{in}}^2$;
- la puissance absorbée $2\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}_R''$ qui est soustraite de la précédente ;
- la puissance diffusée de façon cohérente vers l'avant ($\mathcal{E}_R''^2 + \mathcal{E}_R'^2$) qui compense partiellement la perte par absorption. Ce terme est en fait le même que la puissance diffusée vers l'avant évaluée en (18-33).

L'amplification de lumière est également décrite par le calcul précédent : si un processus de pompage est appliqué aux atomes de la tranche concernée de façon à inverser leurs populations, c'est-à-dire à créer un paramètre m_0 négatif, les deux susceptibilités χ' et χ'' ont aussi leurs signes inversés. Le retard de phase φ calculé plus haut devient une avance de phase, créée par un indice de réfraction n_r inférieur à l'unité. Le champ résultant est augmenté par une susceptibilité χ'' négative qui crée un champ $\mathcal{E}_R''$ négatif ; c'est-à-dire qu'au lieu d'être en opposition de phase avec le champ incident, le champ $\mathcal{E}_R''$ est maintenant en phase avec lui, et la puissance de l'onde résultante est augmentée avec le coefficient d'amplification :

$$\alpha = \frac{1}{P}\frac{\delta P}{\delta z} = -\chi''\frac{\omega}{c} > 0 \quad (18\text{-}42)$$

En résumé, dans un milieu ordinaire, une partie du champ rayonné vers l'avant par les dipôles atomiques est en opposition de phase avec le champ incident et explique ainsi la perte de puissance à la traversée du milieu.

Dans un milieu « inversé » par pompage, la phase des dipôles atomiques est inversée ; le champ rayonné vers l'avant par les dipôles atomiques a une composante en phase avec le champ incident qui augmente l'amplitude du champ résultant.

C'est le champ rayonné vers l'avant par les dipôles atomiques qui explique l'augmentation de puissance de l'onde résultante. Ces dipôles oscillants sont créés et mis en phase par l'onde incidente ; il s'agit bien d'un rayonnement stimulé par l'onde incidente.

L'accroissement de puissance du faisceau lumineux est donné par le terme en $-2\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}''_R$, de la formule (18-41), qui est proportionnel à $|\chi''|$. C'est le même terme qui, suivant le signe du champ $\mathcal{E}''_R$, représente l'absorption ou l'émission stimulée ; on retrouve à partir des équations d'onde la parfaite symétrie entre ces deux effets de la même interaction. Mais on ne cherchera pas à appliquer *quantitativement* les calculs de ce paragraphe ; la plupart des lasers courants fonctionnent dans des conditions de saturation, contraires à l'hypothèse (18-35) et cela rend les calculs nettement plus complexes.

18.5 Superradiance due aux interactions entre voisins

Au cours des calculs du paragraphe précédent, nous avons rappelé que la méthode d'intégration utilisée dans ce chapitre (par superposition des solutions calculées séparément à partir de différentes sources d'onde) suppose que ces sources soient indépendantes et ne soient pas modifiées par leurs interactions réciproques. Nous avons donc dans le paragraphe précédent fait l'hypothèse de milieux suffisamment dilués. Nous essayons à présent de préciser les conditions de dilution et de donner une idée des phénomènes observés lorsque cette condition n'est pas satisfaite.

Pour poser le problème, nous partirons du calcul de la puissance lumineuse rayonnée vers l'avant par une tranche de N dipôles dans leur cône de cohérence, calculée en (18-33) :

$$P(\text{Avant}) \approx NP_{R1} \times \frac{3}{32} na\lambda^2 \approx NP_{R1} \frac{na\lambda^2}{10}$$

Cette formule permet de comparer la puissance diffusée collectivement avec la puissance qui serait diffusée séparément par les N dipôles isolés, NP_{R1}, laquelle est équivalente, en ordre de grandeur, à la puissance absorbée par ces N dipôles aux dépens de l'onde incidente. Cette équivalence ressort de deux résultats du §18.2 : (1) en dessous de la saturation ($s \ll 1$), la puissance cohérente rayonnée par un dipôle isolé est du même ordre de grandeur

que la puissance absorbée par ce dipôle ; (2) le calcul de la puissance absorbée est linéaire par rapport au moment dipolaire p_0 ; c'est-à-dire que la puissance absorbée par plusieurs dipôles s'obtient en faisant la somme des puissances absorbées séparément par chacun d'eux.

Si nous réalisons des conditions où le facteur sans dimension $na\lambda^2 \gg 10$, la conservation de l'énergie semble impossible à assurer, à moins de modifier quelque chose dans la description du phénomène : la prise en compte des interactions entre proches voisins devient indispensable.

Nous donnerons d'abord deux idées simples pour éclairer la situation :

(1) **La densité critique** n_c peut être définie par la relation :

$$\boxed{n_c a \lambda^2 = 1} \tag{18-43}$$

elle sépare les milieux dilués ($n < n_c$) des milieux concentrés ($n > n_c$) où l'on doit absolument tenir compte des interactions entre dipôles. Pour une onde résonnante, on calcule la section efficace d'absorption maximum (3-9) :

$$\sigma_0 = \sigma(\nu_0) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi}\left(\frac{A\tau_2}{2}\right)$$

En l'absence de collision ou autres causes d'élargissement ($A\tau_2 = 2$), on calcule sur la longueur a, avec la densité critique n_c, l'épaisseur optique Ka telle que :

$$Ka = n_c \sigma_0 a = \frac{3}{2\pi} n_c a \lambda_0^2 \simeq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{-Ka} \simeq 0.6 \tag{18-44}$$

c'est-à-dire que seule une grosse moitié des photons émis par la couche arrière de la tranche d'atomes peut s'échapper vers l'avant sans être réabsorbée. On comprend pourquoi au-dessus de n_c il est indispensable de tenir compte de ces interactions entre atomes de la tranche. Dans le cas d'un élargissement inhomogène (*cf.* §13.3), il faut corriger $\sigma(\nu_0)$ par le facteur $A\tau_{\text{inhom}}$; cela revient à calculer la densité n pour une classe homogène d'atomes seulement.

(2) Pour mieux illustrer les problèmes posés, il faut sortir du régime stationnaire auquel nous nous sommes cantonnés jusqu'ici. Nous nous intéressons donc **à l'amortissement des ondes rayonnées lorsqu'on arrête brusquement l'onde incidente** avec un interrupteur ultrarapide, supposé quasi instantané.

Lorsqu'il s'agit de l'onde spontanée émise par les atomes isolés sans interaction, nous avons l'habitude d'écrire la variation temporelle de l'énergie $W = NW_1$ emmagasinée par les N dipôles indépendants (densité $n \ll n_c$) :

$$-\frac{1}{W}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{NW} N P_{R1} = \frac{P_{R1}}{W_1} = \frac{1}{\tau_b} \quad \Rightarrow \quad W(t) = W(0)\mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau_b}}$$

la durée de vie τ_b de l'état excité est aussi la constante de temps d'amortissement de l'énergie de l'onde (ici P_{R_1} peut être rayonnée de manière presque isotrope sans suprématie importante de la direction vers l'avant).

Nous transposons cette formule dans le cas de la tranche de N dipôles en étroite interaction (ils ont été mis en cohérence par l'onde incidente avant que nous ne l'arrêtions) qui ont emmagasiné aussi l'énergie $W = N_1 W_1$, mais qui rayonnent préférentiellement vers l'avant (densité $n \gg n_c$) :

$$-\frac{1}{W}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{1}{W}P(\text{Avant}) = \frac{1}{NW_1}.NP_{R1}\frac{na\lambda^2}{10} = \frac{1}{\tau_b}\frac{na\lambda^2}{10} = \frac{1}{\tau_{\text{super}}}$$

En régime supercritique ($n \gg n_c$), la perte d'énergie plus rapide des dipôles, dans une onde de plus forte intensité, produit un amortissement plus important, avec une constante de temps plus courte :

$$\tau_{\text{super}} \approx \frac{\tau_b}{na\lambda^2/10} \tag{18-45}$$

C'est le phénomène de superradiance (le facteur 10 dans cette formule résulte d'approximations et donne seulement un ordre de grandeur).

La description rigoureuse du phénomène de superradiance sort du cadre de cet ouvrage. Elle a été faite par le professeur Dicke en 1954 dans le cas des spins, en résonance magnétique (référence [7]) ; les longueurs d'onde radio ou micro-ondes utilisées dans ce domaine ($\lambda \gtrsim 1$ mètre) sont supérieures aux dimensions courantes des volumes étudiés dans les expériences, et l'on travaille donc facilement dans des conditions où $n\lambda^3 \gg 1$.

Les dipôles, qui sont résonnants à la même fréquence ω_0, interagissent fortement par l'intermédiaire des ondes engendrées à très courtes distances et dont les déphasages restent très faibles : ils forment alors un système quantique cohérent qui doit être étudié comme un tout sans pouvoir en séparer les différents composants (on trouvera un exemple élémentaire à deux atomes dans l'ouvrage « Photons et atomes (processus d'interaction) » *op. cit.*).

Lorsqu'on généralise ces calculs au cas des transitions optiques où les longueurs d'onde sont petites devant les volumes expérimentaux, on peut utiliser un volume allongé dans une direction, qui s'impose comme direction de propagation ; et la condition d'interactions fortes devient $na\lambda^2 \gg 1$.

Si l'on part à l'instant initial avec N atomes dans l'état excité (système totalement inversé $m_0 = -1$) mais sans aucune onde incidente, on peut calculer la façon dont les interactions tendent à mettre en phase progressivement les N dipôles, puis lorsqu'ils sont à peu près en phase, on obtient l'émission d'une onde très intense mais de durée courte de l'ordre de τ_{super} (18-45). Le résultat est représenté schématiquement sur la figure 18.6a et comparé avec le schéma 18.6b dans le cas d'une onde spontanée ordinaire (densité $n \ll n_c$).

La première observation expérimentale de l'émission superradiante dans le domaine optique a été réalisée en 1973 au M.I.T. (Cambridge, USA) dans la vapeur d'fluorure d'hydrogène HF sur des transitions

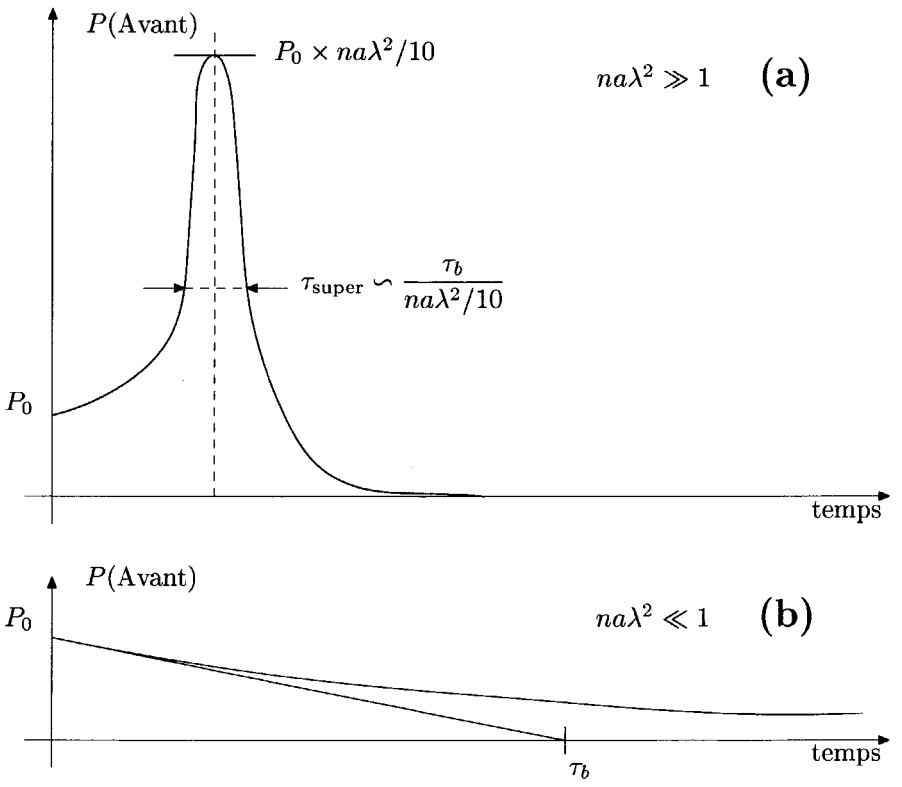


FIG. 18.6 – *Variation temporelle de l'émission diffusée vers l'avant de N atomes excités (à l'état d'énergie supérieur E_b de la transition) répartis avec la densité volumique n sur une profondeur a dans la direction de propagation* $0z$.

(a) Cas de la superradiance ($na\lambda^2 \gg 1$). (b) Cas ordinaire pour comparaison ($na\lambda^2 \ll 1$).

rotationnelles dans l'infrarouge lointain (réf. [8]). Le pompage est effectué à l'aide des impulsions puissantes (1 kW/cm^2 pendant 0.2 μsec) d'un laser à HF, en infrarouge moyen à $\lambda \simeq 2.5$ μm. Ces impulsions peuplent préférentiellement tel ou tel niveau de rotation correspondant à la première bande de vibration $v = 1$ de la molécule HF, réalisant ainsi l'inversion quasitotale avec le niveau de rotation immédiatement inférieur ; suivant le niveau rotationnel pompé, la transition étudiée se produit avec une longueur d'onde de l'infrarouge lointain allant de 50 μm à 250 μm.

La pression de vapeur de quelques milliTorrs (de l'ordre de un Pascal) dans une cellule tubulaire de longueur a comprise entre 30 cm et 1 mètre réalisait la

condition supercritique ($n/n_c \approx 100$ à 1000). Le pompage optique avec une longueur d'onde complètement différente réalise l'inversion des populations sans création de dipôles à la fréquence de l'infrarouge lointain (les variables croisées correspondantes u et v restent nulles) ; on est bien dans les conditions des hypothèses de Dicke. La figure 18.7a reproduit un enregistrement typique observé en fonction du temps sur l'oscilloscope grâce à un récepteur infrarouge rapide (InGe refroidi à l'Hélium liquide) placé dans l'axe du tube contenant la vapeur HF. Dans ce cas particulier, on pompe le niveau $J = 3$ et l'on observe la transition $J = 3 \rightarrow J = 2$ à la longueur d'onde $\lambda = 84$ μm. Le début du temps d'enregistrement coïncide à peu près avec l'impulsion de pompage. On observe un délai d'environ 500 nanosecondes avant l'apparition de l'émission superradiante, qui est caractérisée par une redescente brusque en une durée de quelques τ_{super} conformément au schéma de la figure 18.6a. Dans ce cas particulier, on calcule une durée $\tau_{\text{super}} \approx 6$ nanosecondes, alors que la constante de temps d'émission radiative τ_b est très supérieure à la microseconde. Mais la décroissance de l'émission superradiante doit être comparée à la durée de brouillage due à l'élargissement

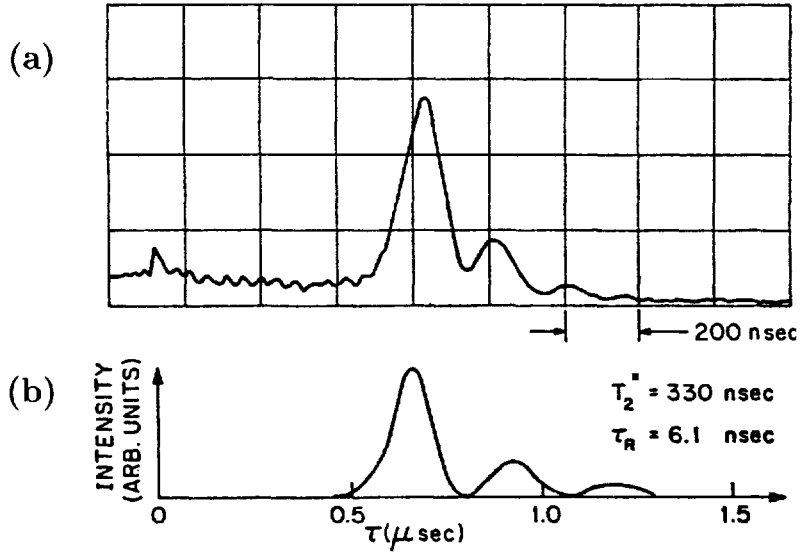


FIG. 18.7 – *(a) Enregistrement en fonction du temps sur l'oscilloscope de l'émission superradiante produite par une vapeur de HF à $\lambda = 84$ μm.*
(b) Calcul théorique de la même émission. Le temps zéro est celui de l'impulsion laser de pompage à une autre longueur d'onde (indiqué sur l'enregistrement par un petit pic parasite) (d'après la réf. [8], avec la permission de l'American Physical Society).

inhomogène, qui serait $\tau_{\text{inhom}} = \dfrac{1}{\Delta\omega_{\text{inhom}}} \approx 0.33$ microseconde. On vérifie que le délai s'allonge et que l'impulsion superradiante s'élargit lorsqu'on diminue l'intensité du pompage, c'est-à-dire la densité n des molécules inversées.

D'autres expériences d'émission superradiante ont été effectées dans les années suivantes sur des vapeurs métalliques de thalium [9], de sodium [10], de césium [11] et de rubidium [12] à des longueurs d'onde du proche infrarouge. Elles ont confirmé les caractéristiques observées en 1973.

18.6 L'émission spontanée amplifiée (ou A.S.E., Amplified Spontaneous Emission)

C'est un phénomène un peu différent de la superradiance du §18.5 ; bien qu'on lui en attribue souvent le nom. Les deux phénomènes ont en commun de produire des ondes très intenses et très directives, ressemblant un peu aux faisceaux laser, mais sans utilisation d'une cavité optique. Ce qui sépare la superradiance au sens de Dicke et l'A.S.E., c'est la densité critique n_c (18-43) : la première fonctionne en régime supercritique avec les caractéristiques temporelles évoquées ci-dessus (*cf.* Fig. 18.6a) ; la seconde fonctionne en régime sous-critique.

On observe l'A.S.E. dans des milieux très fortement inversés, par un pompage particulièrement efficace, et qui sont suffisamment allongés (la longueur a est d'une fraction de mètre au laboratoire, et peut atteindre des centaines de milliers de kilomètres dans des nuages interstellaires). Si le milieu est homogène, c'est la direction dans laquelle il présente la longueur maximale qui devient la direction d'émission d'une onde intense, parce que c'est dans cette direction que l'amplification est la plus forte à partir des premiers photons émis spontanément à l'extrémité opposée.

C'est le phénomène d'A.S.E. qui explique les émissions de micro-ondes très intenses et très directives observées par les radio-astronomes dans les nuages interstellaires aux fréquences caractéristiques de quelques molécules ou radicaux simples (H_2O, OH, SiO, SiF) et qui ont toutes les caractéristiques des émissions maser. Les densités faibles de ces molécules ou radicaux sont compensées par les dimensions très vastes des nuages interstellaires. Le pompage effectué par le rayonnement solaire sur ces niveaux de rotation des molécules peut accumuler l'énergie grâce à la quasi-absence de relaxation spontanée aux fréquences des micro-ondes.

Il est possible de reprendre la discussion de la densité critique dans le cas du faisceau gaussien calculé au §18.4. La formule (18-41) de l'intensité résultante transmise dans le faisceau nous a permis de distinguer le terme $(\mathcal{E}_R'^2 + \mathcal{E}_R''^2)$ de l'émission spontanée et le terme $-2\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}_R''$ qui représente l'effet induit ou stimulé (absorption ou amplification). Nous en déduisons le rapport

entre la puissance spontanée et la puissance stimulée (positive ou négative) :

$$\frac{P_{\text{spont}}}{|P_{\text{sti}}|} = \frac{\mathcal{E}_R'^2 + \mathcal{E}_R''^2}{2\,|\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}_R''|} = \frac{\frac{\pi^2 a^2}{\lambda^2}(\chi'^2 + \chi''^2)\mathcal{E}_{\text{in}}^2}{\frac{2\pi a}{\lambda}\,|\chi''|\,\mathcal{E}_{\text{in}}^2} = \frac{\pi a}{2\lambda}\cdot\frac{\chi'^2 + \chi''^2}{|\chi''|} \qquad (18\text{-}46)$$

Pour continuer le calcul, il faut faire des approximations différentes suivant le domaine de la fréquence incidente :

- cas résonnant $\omega \simeq \omega_0$, donc $\chi' \simeq 0$ et $\chi'' \simeq \chi_0'' = n m_0 \frac{3\lambda_0^3}{4\pi^2}$ (*cf.* (3-13)) (cas à 2 niveaux $g_1 = g_2$, sans élargissement $A\tau_2/2 = 1$; c'est le signe de m_0 qui change entre l'absorption et l'amplification)

$$\frac{P_{\text{spont}}}{|P_{\text{sti}}|} \simeq \frac{\pi a}{2\lambda}\,|\chi_0''| = \frac{3|m_0|}{8\pi} n a \lambda_0^2 \simeq |m_0|\frac{n a \lambda_0^2}{8} \qquad (18\text{-}47)$$

- loin de la résonance (diffusion Rayleigh)

$$|\chi''| \simeq \frac{|\chi_0''|}{(\delta\omega\tau_2)^2} \ll |\chi'| \approx \frac{|\chi_0''|}{|\delta\omega\tau_2|}$$

$$\frac{P_{\text{spont}}}{|P_{\text{sti}}|} \simeq \frac{\pi a}{2\lambda}\frac{\chi'^2}{|\chi''|} = \frac{\pi a}{2\lambda}\,|\chi_0''| = \frac{3|m_0|}{8\pi} n a \lambda_0^2$$

On retrouve le même rapport.

Dans le cas courant de l'absorption ($m_0 = 1$), nous comparons directement la puissance spontanée cohérente avec la puissance absorbée (P_{sti} négatif) ; et nous obtenons un rapport $na\lambda^2/8$ très voisin de celui des formules (18-33) ou (18-45). Le facteur numérique exact qui accompagne le paramètre sans dimension $na\lambda^2$ dépend en fait de la géométrie précise de chaque expérience ; mais il garde le même ordre de grandeur. Nous retrouvons le rôle de la densité critique (18-43).

Dans le cas d'un milieu inversé par pompage (m_0 négatif), la puissance stimulée est positive et représente l'amplification par émission stimulée. Dans la pratique courante des processus de pompage, la densité des atomes inversés reste sous-critique ($|m_0| n a \lambda^2 < 1$) ; c'est-à-dire que l'émission spontanée cohérente vers l'avant reste faible devant l'amplification par émission stimulée, qui est observée également dans le phénomène d'A.S.E.

Dans le cas d'un milieu inversé par pompage, nous pouvons calculer le gain dans la traversée de la tranche d'épaisseur a :

$$\frac{\delta P}{P_{\text{in}}} = \frac{P_{\text{sti}}}{P_{\text{in}}} = \frac{2\,|\mathcal{E}_{\text{in}}\mathcal{E}_R''|}{\mathcal{E}_{\text{in}}^2} = \frac{2\,|\mathcal{E}_R''|}{\mathcal{E}_{\text{in}}} = \frac{2\pi a}{\lambda}\,|\chi_0''| = \frac{3|m_0|}{2\pi} n a \lambda_0^2 \simeq \frac{|m_0| n a \lambda^2}{2} \qquad (18\text{-}48)$$

on se rappelle que $|m_0|$ représente la fraction des atomes inversés, c'est-à-dire que $n|m_0|$ représente la valeur maximale de la différence des populations inversée ($n_b - n_a$) créée par le pompage. Ce résultat est bien en accord avec le calcul d'épaisseur optique Ka effectué en (18-44).

18.7 Émission libre cohérente et échos de photons

Le terme d'« induction libre » est utilisé le plus souvent pour désigner l'observation de l'émission libre cohérente des dipôles atomiques dans le noir en l'absence d'onde lumineuse incidente. Ce terme est emprunté à la Résonance Magnétique (*cf.* chapitre 4) où l'on a observé vingt ans plus tôt un phénomène semblable : à savoir la rotation cohérente des moments magnétiques en l'absence d'onde radio-incidente (réf. [13]). Mais le terme d'induction provient de la méthode de détection utilisée en Résonance Magnétique ; on a vu au §4.6 une méthode courante, consistant à mesurer la f.é.m. d'induction produite dans une bobine par la rotation collective des moments magnétiques, et qui n'a aucun équivalent dans le domaine des transitions optiques. Inversement, la détection des transitions optiques par émission spontanée n'est pas possible en Résonance Magnétique à cause de la loi en $1/\lambda^3$ (8-4) qui régit la probabilité A_{21} d'émission spontanée et la rend quasi nulle aux basses fréquences. Les techniques d'observation conduisent donc à différencier totalement Résonance Magnétique et transitions optiques, et le terme « induction » en réalité n'a aucun sens dans le domaine optique.

18.7.1 Brouillage des oscillations libres dans le noir par les inhomogénéités

Ce qui rapproche ces deux phénomènes (radio et optique), ce sont les équations quantiques d'évolution des variables atomiques. Dans les deux cas, on est amené à distinguer les expériences où les variables atomiques subissent un mouvement *d'oscillation forcée sous l'action de l'onde incidente* (solutions stationnaires ou transitoires des équations de Bloch) et les expériences où l'on observe *l'oscillation libre de ces mêmes variables en l'absence d'onde incidente.* Nous étudions donc maintenant l'oscillation libre, dans le noir, des dipôles atomiques ; mais la détection en est faite en observant la lumière cohérente diffusée vers l'avant par ces dipôles ; c'est pourquoi nous préférons parler d'émission libre ou de diffusion libre.

Pour créer ces dipôles atomiques et mettre en phase leurs oscillations, il est en fait indispensable d'utiliser d'abord une onde incidente, comme nous l'avons expliqué dans les paragraphes précédents. C'est donc après la coupure brutale de l'onde incidente qu'il est possible de faire cette observation. On sait maintenant réaliser des interrupteurs optiques très rapides soit par effet électro-optique, soit par effet piézo-électrique (*cf.* §18.3.3) ; mais le plus souvent on préfère utiliser des impulsions optiques courtes comme celles du chapitre 6 (et que l'on sait produire avec les lasers ; *cf.* chapitre 11). En effet, nous avons vu au §6.2 que l'effet de ces impulsions ne dépend que de « l'aire d'impulsion » (6-4) sans que leur forme exacte ait réellement d'importance ; elles sont donc plus faciles à réaliser. Les impulsions de $\pi/2$ ($\Omega_1\tau = \pi/2$) sont

les plus intéressantes puisqu'elles produisent les dipôles d'amplitude maximale $v = -m_0$; mais la valeur exacte $\pi/2$ n'est pas indispensable. C'est une telle impulsion qui est représentée sur le schéma (a) de la figure 18.8 juste avant l'instant zéro. On enregistre ensuite la lumière diffusée vers l'avant de manière cohérente par tous les dipôles atomiques mis en phase par l'impulsion ; c'est le schéma (b) de la figure 18.8. Nous y avons représenté deux cas d'expériences différents : la courbe en tireté représente l'observation possible avec un milieu diffusant où il n'existe pas d'élargissement inhomogène ; on observe une exponentielle dont la constante de temps τ_2 est la constante de temps caractéristique des variables croisées u et v. Dans la plupart des milieux, on rencontre une dispersion des fréquences centrales ω_c des différents atomes qui se traduit par un élargissement inhomogène $\Delta\omega_{\text{inhom}}$ de la courbe de résonance en fréquence (*cf.* §13.3) ; chaque dipôle oscille librement avec la fréquence ω_c, et la différence entre les diverses fréquences ω_c produit un brouillage des ondelettes émises. Ceci détruit progressivement les interférences constructives vers l'avant et divise par N la puissance émise dans le cône de cohérence (qui redevient proportionnelle au nombre N des dipôles au lieu de N^2) avec une constante de temps que l'on appelle parfois le temps de relaxation inhomogène :

$$\tau_{\text{inhom}} \approx 2/\Delta\omega_{\text{inhom}} \tag{18-49}$$

En définitive : lorsque, dans les paragraphes précédents, nous étudions la diffusion forcée par l'onde incidente, tous les dipôles atomiques subissent la même variation temporelle imposée par l'onde incidente (avec des amplitudes différentes pour les uns et pour les autres) et restent donc cohérents entre eux. La diffusion libre (ou induction libre), étudiée dans ce paragraphe, se fait au contraire à la fréquence propre ω_c de chaque dipôle ; et les écarts, dits inhomogènes entre ces fréquences propres, réduisent la durée de diffusion cohérente, ce qui empêche la mesure du vrai temps τ_2 d'amortissement des dipôles isolés.

18.7.2 La technique des échos

La technique des échos (référence [14]) est un moyen permettant de mesurer la constante de temps τ_2 homogène des variables croisées individuelles malgré leur brouillage collectif. Nous devons donc ici distinguer comme au chapitre 2 :

- les variables collectives dénotées $\overline{u}$ et $\overline{v}$ (2-8) qui sont brouillées par les écarts inhomogènes après la durée $\tau_{\text{inhom}} \sim 1/\Delta\omega_{\text{inhom}}$;
- les variables individuelles u et v (2-3) d'un seul atome qui continuent à osciller à leur fréquence propre ω_c pendant une durée de l'ordre de τ_2. Les calculs qui suivent sont relatifs à un atome particulier.

La séquence d'impulsions utilisée dans la technique des échos est représentée sur le schéma (c) de la figure 18.8. On conserve l'impulsion $\pi/2$

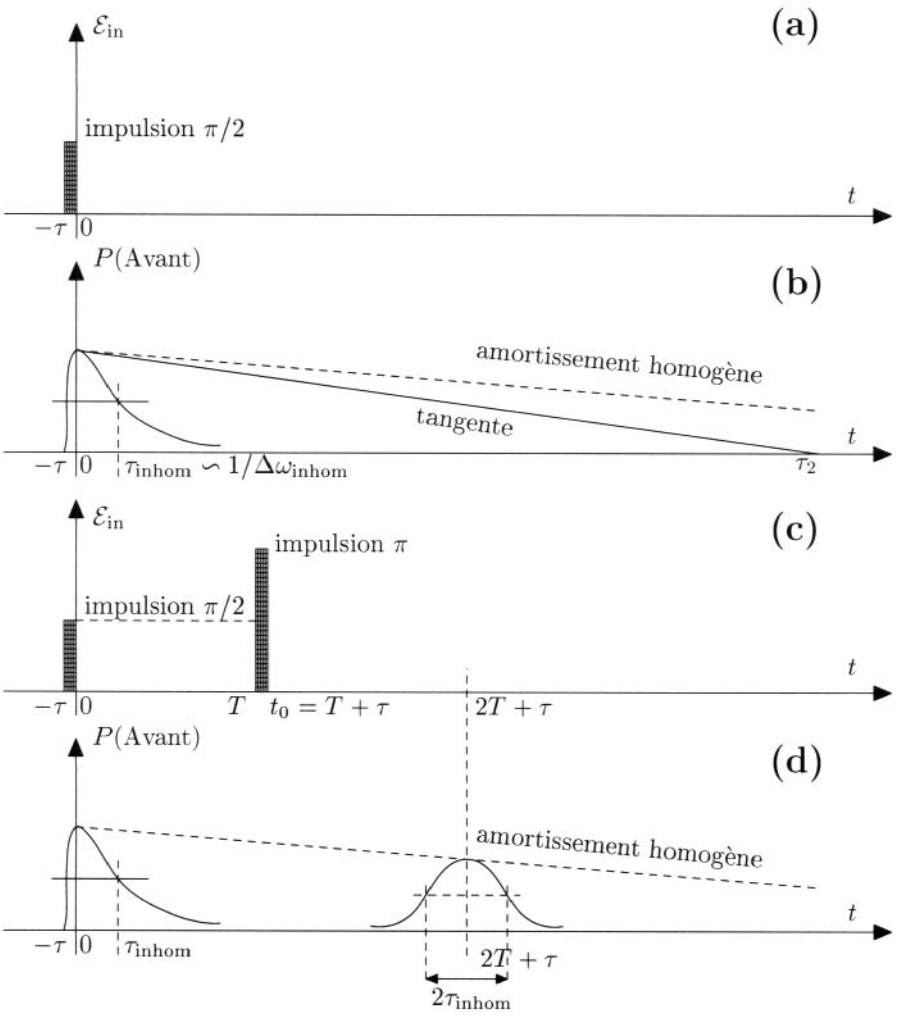


FIG. 18.8 – *Induction libre (a) et (b) et échos des photons (c) et (d). On observe la lumière diffusée vers l'avant (b) ou (d) par les dipôles optiques créés et mis en phase par une impulsion incidente de $\pi/2$. On a représenté ces impulsions de durée τ très courtes par de minces rectangles verticaux sur les schémas (a) et (c). Mais leur forme exacte est indifférente ; seule importe l'aire hachurée. La séquence (c) des échos de photons est expliquée dans le texte.*

de l'onde à l'instant zéro pour créer les dipôles atomiques ; mais après une durée T dans le noir, on envoie une deuxième impulsion deux fois plus intense

que la précédente provoquant le déphasage $\Omega_1\tau = \pi$ (en pratique, on réalisera parfois une impulsion de même intensité mais de durée double 2τ ; cela revient au même puisque c'est l'aire d'impulsion qui compte).

Nous calculons maintenant l'évolution d'un atome particulier dont l'écart à la résonance vaut $\delta\omega_c = \omega - \omega_c$: à l'instant zéro après la première impulsion ($\Omega_1\tau = \pi/2$) on applique les résultats (6-5) (6-7) du §6.2, tenant compte du fait que :

$$\Omega_1 \approx \frac{1}{\tau} \gg \frac{1}{\tau_{\text{inhom}}} \approx \Delta\omega_{\text{inhom}} \approx |\delta\omega_c| \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 \gg |\delta\omega_\varepsilon| \tag{18-50}$$

(la figure 6.2 montre, de manière imagée, la rotation du vecteur de Bloch d'un quart de tour autour de l'axe $0X$ du repère tournant) ; on obtient à la fin de la première impulsion :

$$u(0) \simeq 0 \; ; \qquad v(0) \simeq -m_0 \; ; \qquad m(0) \simeq 0$$

L'évolution dans le noir a été calculée au §6.4, formule (6-14), elle se poursuit jusqu'au temps T où l'on obtient donc :

$$u(T) - iv(T) = [u(0) - iv(0)]\,\mathbf{e}^{i\delta\omega_c T}\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \simeq im_0\,\mathbf{e}^{i\delta\omega_c T}\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \tag{18-51}$$

(dans le repère tournant de la figure 6.2, le vecteur de Bloch tourne autour de l'axe vertical $0z$ avec la vitesse angulaire $\delta\omega_c$) ; on obtient

$$\left.\begin{aligned} u(T) &= -m_0 \sin(\delta\omega_c T)\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \\ v(T) &= -m_0 \cos(\delta\omega_c T)\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \\ m(T) &= m(0) \simeq 0 \end{aligned}\right\} \tag{18-51bis}$$

Les atomes subissent alors la nouvelle impulsion, $\Omega_1\tau = \pi$, qui relève encore des approximations (18-50) (sur la figure 6.2, le vecteur de Bloch tourne d'un angle π autour de l'axe $0X$ du repère tournant) et qui provoque un changement de signe des variables v et m, mais qui laisse invariante la variable u. On obtient ainsi après l'impulsion :

$$\left.\begin{aligned} u(T+\tau) &= u(T) = -m_0 \sin(\delta\omega_c T)\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \\ v(T+\tau) &= -v(T) = +m_0 \cos(\delta\omega_c T)\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \\ m(T+\tau) &= -m(T) \simeq 0 \end{aligned}\right\} \tag{18-52}$$

Le changement de signe de v, tandis que u ne change pas, entre (18-51) et (18-52), produit une inversion de signe du déphasage du nombre complexe $u - iv$, qui constitue le point clef de cette méthode :

$$u(T+\tau) - iv(T+\tau) = -im_0\,\mathbf{e}^{-i\delta\omega_c T}\,\mathbf{e}^{-T/\tau_2} \tag{18-52bis}$$

Les atomes qui dans (18-51bis) se trouvaient en avance de phase ($\delta\omega_c > 0$) se retrouvent dans (18-52bis) en retard de phase, et réciproquement les atomes qui étaient en retard de phase ($\delta\omega_c < 0$) se trouvent en avance de phase dans la formule ((18-52bis). Tous les déphasages qui brouillaient les différents dipôles entre eux ont été inversés d'un coup, avant de reprendre l'évolution dans le noir (6-14) pour $t > t_0 = T + \tau$:

$$u(t) - iv(t) = [u(t_0) - iv(t_0)]\,\mathbf{e}^{i\delta\omega_c(t\,-\,t_0)}\,\mathbf{e}^{-(t\,-\,t_0)/\tau_2}$$

En tenant compte de (18-52bis) et en négligeant une exponentielle réelle en $\mathbf{e}^{-\tau/\tau_2} \simeq 1$ (parce que $\tau \ll \tau_2$), on obtient :

$$\boxed{u(t) - iv(t) = -im_0\,\mathbf{e}^{-i\delta\omega_c T}\,\mathbf{e}^{i\delta\omega_c(t\,-\,t_0)}\,\mathbf{e}^{-t/\tau_2}} \qquad (18\text{-}53)$$

Sur cette expression, on voit que les déphasages entre les différents atomes, dépendant de leur désaccord en fréquence $\delta\omega_c$, s'annulent tous simultanément lorsque $t - t_0 = T$; à cet instant $t = 2T + \tau$, tous les dipôles, remis en phase, émettent donc vers l'avant des ondes cohérentes dont les interférences constructives donnent lieu à un signal observable que l'on appelle un écho et qui est représenté sur le schéma (d) de la figure 18.8. La forme de cet écho est facile à comprendre : sa largeur temporelle $2\tau_{\text{inhom}}$ s'explique par la remise en phase progressive des dipôles à partir du temps $2T + \tau - \tau_{\text{inhom}}$ et leur nouveau déphasage progressif après le temps $2T + \tau$, qui reproduit la forme observée après la première impulsion au temps zéro. La hauteur de l'écho en $\mathbf{e}^{-2T/\tau_2}$ est donnée par la formule (18-53) et résulte de l'amortissement homogène commun à tous les dipôles. En recommençant l'expérience avec diverses valeurs du temps d'attente T dans le noir, on peut tracer la courbe en tireté qui représente l'amortissement homogène et en déduire la mesure de la constante de temps τ_2.

Cette expérience d'échos de photons avec sa séquence de deux impulsions successives séparées par une attente assez longue T, a quelque point commun avec l'expérience des franges de Ramsey décrite au chapitre 6, l'une agissant dans le domaine des temps, l'autre dans le domaine des fréquences. Dans les deux cas, la longue durée d'observation des atomes entre les impulsions permet de surmonter les handicaps expérimentaux qui empêcheraient d'atteindre la limite ultime déterminée par l'amortissement naturel τ_2 des atomes : avec les franges de Ramsey, on retrouve la largeur naturelle $1/\tau_2$ malgré l'élargissement de fréquence dû à la trop courte durée d'interaction τ ; avec les échos on observe l'amortissement naturel de durée τ_2 malgré la trop courte durée de cohérence τ_{inhom} due à l'élargissement inhomogène $\Delta\omega_{\text{inhom}}$. Cette expérience d'échos aurait pu trouver sa place au chapitre 6 s'il n'avait pas été nécessaire d'expliquer d'abord la méthode de détection par diffusion cohérente vers l'avant.

18.7.3 Observation expérimentale dans les solides et dans les gaz

Historiquement, cette séquence d'impulsion a été imaginée par Hahn en 1950, et baptisée « échos de spins », pour pallier les inhomogénéités de champ magnétique qui élargissent les courbes de Résonance Magnétique (réf. [14]). La détection se faisait en observant la f.é.m d'induction produite par la rotation des spins, remis en phase au temps $2T + \tau$. L'extension de la méthode aux transitions optiques s'est faite naturellement lorsque sont apparues les premières sources laser capables de produire des champs $\mathcal{E}_{\text{in}}$ suffisamment élevés, (pour obtenir $\Omega_1 \tau > 1$).

La transposition du nom d'échos de spins en échos de photons n'était en fait pas très rigoureuse ; il eût été plus exact de parler d'« échos de polarisation » ou « échos de dipôles » puisqu'ils sont créés par la remise en phase des oscillations libres des moments dipolaires atomiques. Il est certain, en tout cas, que l'observation de ces échos d'ondes lumineuses intenses (dans le noir, en l'absence d'onde incidente) est la meilleure vérification (outre la superradiance) de la réalité de l'émission cohérente vers l'avant calculée au §18.4.

La première expérience d'échos de photons a été réalisée en 1964 par Kurnit, Abella et Hartmann à l'université Columbia de New York sur un cristal de rubis (ions Cr^{+++} dans l'alumine), refroidi à l'Hélium liquide pour réduire les perturbations des ions par les vibrations d'agitation thermique (réf. [15] et [16]). Les impulsions lumineuses de durée $\tau \approx 10$ nanosecondes provenaient d'un laser à rubis : on envoie directement sur le cristal 25 % seulement de la puissance du faisceau laser. La puissance complémentaire prélevée par un miroir semi-réfléchissant est envoyée dans une ligne à retard de plusieurs mètres formée de miroirs concaves qui reconcentrent le faisceau lumineux après chaque réflexion. Compte tenu des pertes de la ligne à retard, on obtient ainsi une seconde impulsion d'intensité doublée, et retardée d'un temps T variable selon la longueur de la ligne.

Les premiers lasers disponibles pour réaliser ces expériences étaient multimodes et l'intensité nécessaire dans l'impulsion beaucoup plus importante, puisque une faible part seulement tombait à la bonne fréquence de la transition étudiée. Pour ne pas saturer le récepteur photoélectrique, il était nécessaire d'interposer devant lui un obturateur à cellule de Kerr réduisant très fortement la lumière transmise au moment de chacune des deux impulsions laser. La figure 18.9 montre la photographie des enregistrements sur oscilloscope en fonction du temps du signal du récepteur photoélectrique ; chacun des trois enregistrements a été obtenu avec un délai différent de la ligne à retard : a) $T = 36$ nanosecondes ; b) $T = 83$ ns et c) $T = 137$ ns. On voit sur chacun de ces trois enregistrements trois pics équidistants : les deux premiers sont dus au résidu des impulsions incidentes après atténuation ; le troisième est l'écho émis par le cristal.

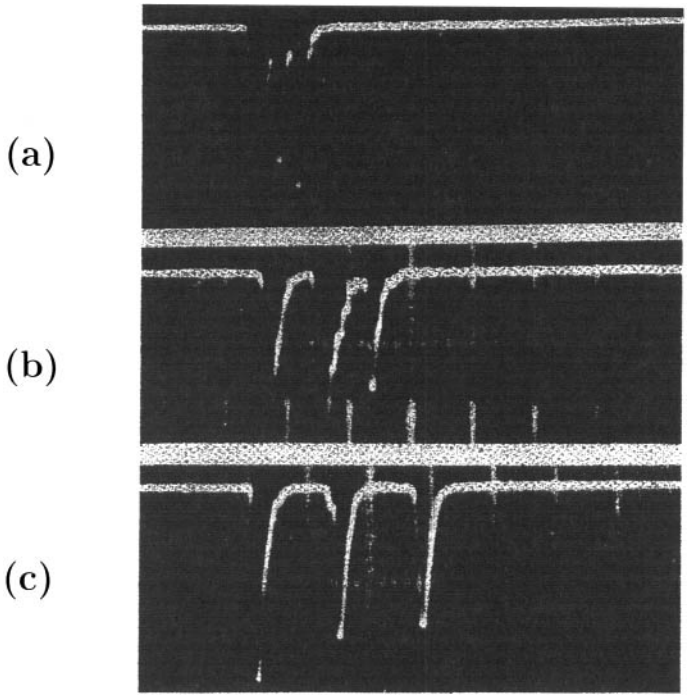


FIG. 18.9 – *Enregistrement d'échos de photons sur l'oscilloscope. Les deux premiers pics sont les impulsions laser très atténuées. Le troisième pic est l'écho réémis par les ions Cr^{3+} du cristal de rubis (d'après réf. [15, 16], avec la permission de l'American Physical Society).*

Séparation des impulsions : (a) 36ns ; (b) 83ns ; (c) 137ns.

Dans les années suivantes **d'autres expériences ont été réalisées dans des gaz**, où l'inhomogénéité est de nature différente puisqu'elle est due aux mouvements des atomes (effet Doppler, *cf.* §13.3). Or l'explication des échos a été donnée avec des atomes immobiles ; le fait que les atomes se déplacent dans l'espace entre les deux impulsions semblerait, à première vue, remettre en cause la cohérence des ondelettes émises au moment de l'écho. En fait, il n'en est rien (référence [17]) et nous nous en convaincrons en deux temps :

(1) les déplacements parallèles au plan d'onde $x0y$, n'affectent en rien les relations de phase entre onde incidente, dipôle atomique et onde réémise. Nous n'avons donc à tenir compte que de la composante de vitesse v_z parallèle à la direction de propagation, celle qui détermine le déplacement de fréquence Doppler ;

(2) il nous suffit maintenant de raisonner sur les atomes d'une classe de vitesse v_z particulière et de les comparer aux atomes de la classe de vitesse

zéro (atomes immobiles dans la direction $0z$). Nous supposons que ces deux classes d'atomes ont subi la première impulsion $(\pi/2)$ à l'instant zéro dans le même plan I (Initial) perpendiculaire à $0z$. Les atomes mobiles de vitesse algébrique v_z parcourent pendant le délai T la distance algébrique $\delta z = v_z T$ et sont donc rattrapés par la seconde impulsion (π) à un instant légèrement décalé $t = T + \dfrac{\delta z}{c} = T\left(1 + \dfrac{v_z}{c}\right)$ (en retard si $v_z > 0$, en avance si $v_z < 0$).

La compensation de phase des atomes mobiles, *cf.* (18-53) sera donc effective à l'instant $2t = 2T\left(1 + \dfrac{v_z}{c}\right)$ quand ils se seront éloignés dans un plan M à la distance algébrique $2\delta z = 2v_z T$, par rapport aux atomes immobiles, restés dans le plan I (Initial). On en déduit que l'onde émise par les atomes immobiles en I à l'instant $2T$ et l'onde émise par les atomes mobiles en M à l'instant $2t = 2T + \dfrac{2v_z T}{c}$ se rattrapent l'une l'autre et se propagent en phase vers les z positifs.

En définitive, le déplacement des atomes mobiles produit une différence entre temps de propagation des ondes réémises, qui annule exactement le décalage temporel dans l'évolution interne des atomes. Les ondes émises par les diverses classes de vitesse, aux instants où leur compensation de phase est effective, se retrouvent toutes en phase dans leur propagation vers l'avant (z positifs) donnant lieu aux mêmes échos que dans les solides. Les premières observations d'échos de photons dans les gaz ont été effectuées en 1968 :

- dans le gaz SF_6, à $\lambda = 10.6\mu$m, avec un laser à $C0_2$ (référence [18]) ;
- dans la vapeur de Césium, à $\lambda = 0.852\mu$m, avec une diode laser en GaAs (référence [19]).

Remarque 18.6 – Pour améliorer le taux de réjection de la lumière incidente du laser, les expériences sont faites également en « trichant » très légèrement sur les angles des directions de propagation : la seconde impulsion est envoyée dans une direction faisant un petit angle α avec la direction de la première impulsion. Appelant $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ les vecteurs d'onde correspondant à la première puis à la seconde impulsion, on montre en effet que l'écho se reconstruit avec le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que

$$\vec{k} + \vec{k_1} - 2\vec{k_2} = 0$$

c'est-à-dire que la direction de l'écho (vecteur $\vec{k}$) fait l'angle α avec $\vec{k_2}$ et 2α avec $\vec{k_1}$.

Bibliographie

[1] J. Cabannes, C. R. Acad. Sci. **CLX**, 62 (1915) et Ann. Phys. **15**, 5 (1921).

[2] L. Brillouin, Ann. Phys. **17**, 88 (1922).

[3] P. Debye et F.W. Sears, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **18**, 409 (1932).

[4] R. Lucas et P. Biquard, J. Phys. **3**, 464 (1932).

[5] H.Z. Cummings et N. Knable, Proc. IEEE **51**, 1246 (1963).

[6] E.I. Gordon, Proc. IEEE **54**, 1391 (1966).

[7] R.H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).

[8] N. Skribanowitz, I.P. Herman, J.C. Mc Gillivray et M.S. Feld, Phys. Rev. Lett. **30**, 309 (1973).

[9] A. Flusberg, T.M. Mossberg, S.R. Hartmann, Phys. Lett. A **58**, 373 (1976).

[10] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **36**, 1035 (1976).

[11] H.M. Gibbs, Q.H.F. Vrehen, H.M.J. Hikspoors, Phys. Rev. Lett. **39**, 547 (1977).

[12] A. Crubellier, S. Liberman, P. Pillet, Phys. Rev. Lett. **41**, 1237 (1978).

[13] E.L. Hahn, Phys. Rev. **77**, 297 (1950).

[14] E.L. Hahn, Phys. Rev. **80**, 580 (1950) et Phys. Today (juin 1953).

[15] N.A. Kurnit, I.D. Abella et S.R. Hartmann, Phys. Rev. Lett. **13**, 567 (1964) et Phys. Rev. **141**, 391 (1966).

[16] I.D. Abella, Progress in Optics, Vol. VII, page 141 (edited by E. Wolf, North Holland, 1969).

[17] M. Scully, M.J. Stephen et D.C. Burnham, Phys. Rev. **171**, 213 (1968).

[18] C.K.N. Patel et R.E. Slusber, Phys. Rev. Lett. **20**, 1087 (1968).

[19] B. Bölger et J.C. Diels, Phys. Lett. A **28**, 401 (1968).

[20] T.M. Mossberg et S.R. Hartmann, Phys. Rev. A **23**, 1271 (1981).

[21] S.R. Hartmann, Scientific American (avril 1968).

Chapitre 19

Vecteur dipôle atomique et polarisation des ondes

NOUS AVONS SIMPLIFIÉ tous les exposés de ce livre en nous limitant jusqu'ici au cas d'un champ électrique polarisé linéairement, donc de direction fixée, et qui, agissant sur un atome à symétrie sphérique (attention aux champs magnétiques ou aux molécules !), produit un dipôle atomique dirigé selon la même direction. Dans ce dernier chapitre nous donnons quelques compléments utiles pour traiter les problèmes soulevés par les diverses polarisations des ondes lumineuses. Cela nous oblige aussi à abandonner l'hypothèse d'un système à deux états quantiques, même si nous essayons, dans certains cas, de nous y ramener.

Au cours de l'exposé précédent, nous avons distingué les deux faces, de l'interaction onde-atome :

- dans la partie I nous avons étudié l'effet sur un échantillon atomique d'une onde incidente (supposée non perturbée par cette interaction) ;
- dans la partie III (et particulièrement le chapitre 18) nous avons calculé les ondes créées par les dipôles atomiques oscillants.

Nous reprenons ici cette distinction, dans un premier temps nous décrivons l'action des ondes de polarisations variées sur les atomes. Il nous faut donc tenir compte des diverses composantes du champ électrique qui agissent sur les diverses composantes du vecteur moment dipolaire électrique de l'atome ; mais les diverses composantes du champ sont généralement cohérentes, c'est-à-dire qu'elles sont reliées entre elles par des relations de phase précises, et les calculs correspondants ne sont donc pas indépendants les uns des autres.

L'ensemble de ces calculs pourrait être d'une complexité redoutable si un théorème général, concernant les opérateurs vectoriels, ne permettait pas de les simplifier ; il s'agit du théorème de Wigner-Eckart, qui ramène les propriétés de tous les opérateurs vectoriels à celles des vecteurs moments

angulaires, lesquels sont largement développées dans tous les ouvrages de mécanique quantique. Nous allons donc rappeler quelques propriétés classiques des opérateurs vectoriels moments angulaires, de leurs composantes et de leurs représentations, qui nous serviront pour représenter les vecteurs moments dipolaires.

19.1 Représentation standard du moment angulaire et du moment dipolaire

Bien que le théorème de Wigner-Eckart soit démontré dans le cadre général des propriétés des opérateurs tensoriels, nous nous contenterons de l'appliquer aux opérateurs vectoriels qui sont des tenseurs d'ordre 1. Pour des raisons de symétrie, les spécialistes des tenseurs sont amenés à définir des composantes standard J_q des vecteurs ($q = -1, 0, +1$), à partir de leurs composantes cartésiennes de la manière suivante :

$$J_{-1} = \frac{J_x - iJ_y}{\sqrt{2}}, \quad J_0 = J_z, \quad J_{+1} = -\frac{J_x + iJ_y}{\sqrt{2}} \tag{19-1}$$

Ces définitions sont générales, pour tous les opérateurs vectoriels ; nous les avons écrites pour les vecteurs moments angulaires, pour faire apparaître aussitôt leur ressemblance avec les opérateurs J_- et J_+, classiquement utilisés en mécanique quantique, mais aussi leur différence (facteurs numériques $\pm 1/\sqrt{2}$) ; il ne faut pas les confondre.

Cette définition conduit à de légères différences (facteurs numériques seulement) dans les relations de commutation, que nous réécrivons donc avec les définitions ci-dessus :

$$\left.\begin{array}{l} [J_0, J_{+1}] = J_{+1} \qquad [J_{-1}, J_0] = J_{-1} \qquad [J_{-1}, J_{+1}] = J_0 \\ [\overrightarrow{J}^2, J_q] = 0 \qquad \text{pour tout } q \end{array}\right\} \tag{19-2}$$

Il est bien connu que la commutation des opérateurs $\overrightarrow{J}^2$ et $J_z = J_0$ a pour conséquence l'existence de vecteurs propres communs que l'on écrit $|j, m\rangle$ et qui forment une base orthonormée de $(2j+1)$ vecteurs pour la représentation du système physique étudié :

$$\overrightarrow{J}^2 |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1)}|j, m\rangle; \quad J_0|j, m\rangle = m|j, m\rangle \tag{19-3}$$

(j est un nombre entier ou demi-entier, m varie entre $-j$ et $+j$ par valeurs entières ; nous avons choisi des vecteurs $\overrightarrow{J}$ sans dimension).

Un niveau d'énergie atomique E_a est caractérisé par une valeur j_a du nombre quantique de moment cinétique, et correspond donc à $2j_a + 1$ états quantiques distincts $|j_a\, m_a\rangle$. Sauf cas particulier $j_a = 0$ ou $j_b = 0$, les niveaux d'énergie sont dégénérés et il faudra étudier l'action du champ incident

et de l'opérateur moment dipolaire $\overrightarrow{D}$ sur plusieurs états quantiques. Ce problème sera facilité par l'utilisation des composantes standard D_q de l'opérateur vectoriel $\overrightarrow{D}$, définies en transposant les expressions (19-1) :

$$D_{-1} = \frac{D_x - iD_y}{\sqrt{2}}, \qquad D_0 = D_z, \qquad D_{+1} = -\frac{D_x + iD_y}{\sqrt{2}} \tag{19-4}$$

inversement

$$D_x = \frac{D_{-1} - D_{+1}}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad D_y = i\frac{D_{-1} + D_{+1}}{\sqrt{2}} \tag{19-5}$$

On prendra garde au fait que les opérateurs D_{+1} et D_{-1} (contrairement à D_x et D_y) ne sont pas des opérateurs hermitiques, puisqu'ils ne sont pas égaux à leurs hermitiques conjugués ; on vérifie en fait que :

$$(D_{+1})^\dagger = -D_{-1}, \qquad (D_{-1})^\dagger = -D_{+1} \tag{19-6}$$

Nous avons besoin d'utiliser une autre propriété de ces bases de vecteurs propres (19-3), liée au classique problème de compositions des moments angulaires. Si le système étudié comporte deux parties l'une de vecteurs moment angulaire $\overrightarrow{J}'$ avec les vecteurs propres $|j', m'\rangle$ et l'autre de vecteur moment angulaire $\overrightarrow{J}''$ avec les vecteurs propres $|j'', m''\rangle$, on forme à partir de ces deux sous-espaces à $(2j' + 1)$ et $(2j'' + 1)$ dimensions un nouvel espace à $(2j' + 1)(2j'' + 1)$ dimensions en définissant les nouveaux vecteurs de base :

$$|j', m'\rangle |j'', m''\rangle = |j' j'' m' m''\rangle$$

Les règles de composition des moments angulaires nous permettent de définir l'opérateur moment angulaire total $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{J}' + \overrightarrow{J}''$ dont le nombre quantique j peut prendre toutes les valeurs différant de valeurs entières entre $j' + j''$ et $|j' - j''|$ (règle du triangle). Chacune de ces valeurs de j permet de définir $(2j + 1)$ vecteurs de base $|j, m\rangle$ vecteurs propres communs de $\overrightarrow{J}^2$ et $J_z = J_0$. La nouvelle base orthonormée ainsi définie a la même dimension que la précédente ; on sait calculer la matrice de changement de base qui détermine les nouveaux vecteurs en fonction des précédentes :

$$\left.\begin{aligned} &|j, m\rangle = \sum_{m'} \sum_{m''} |j' j'' m' m''\rangle \langle j' j'' m' m'' | jm\rangle \\ &(j' \text{ et } j'' \text{ fixés } ; |j' - j''| \leqslant j \leqslant j' + j''; m = m' + m'') \end{aligned}\right\} \tag{19-7}$$

La dernière relation, entre les nombres quantiques m, provient de la relation $J_z = J'_z + J''_z$. Elle fournit une *règle de sélection* permettant de distinguer les coefficients non nuls. De ce fait la double sommation de la formule (19-7) se réduit à une sommation simple sur un seul indice.

Les coefficients de cette matrice de changement de base sont appelés coefficients de Clebsch-Gordan (C.G). La manière de les noter varie d'un auteur à l'autre ; nous avons choisi celle qui rappelle que chacun d'eux est le produit scalaire de deux vecteurs, pris dans chacune des deux bases.

Remarque 19.1 – Ces coefficients de C.G. sont l'objet de nombreuses relations mathématiques, qui permettent de les calculer, et qui sont rappelées dans certains livres de mécanique quantique (Messiah ; Cohen-Tannoudji, Diu et Laloë). On trouve leurs valeurs numériques dans des tables spécialisées. Nous ne rappelons ici que les plus importantes de ces propriétés :

- Les C.G. sont réels : $\langle j'j''m'm''|jm\rangle^* = \langle j'j''m'm''|jm\rangle$ (mais ils peuvent être, suivant les cas, positifs ou négatifs). Du fait que les deux bases vectorielles ainsi reliées sont orthonormées, et du fait de la réalité des coefficients de C.G., on en déduit deux propriétés importantes :
- Les mêmes coefficients servent à exprimer le changement de base inverse

$$|j'j''m'm''\rangle = \sum_j \sum_m |j,m\rangle\langle j'j''m'm''|jm\rangle$$

- ils satisfont les relations d'orthogonalité :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m'}\sum_{m''}\langle j'j''m'm''|j_a m_a\rangle\langle j'j''m'm''|j_b m_b\rangle = \delta_{j_a j_b}\cdot\delta_{m_a m_b} \\ &\sum_j \sum_m \langle j'j''m'_a m''_a|jm\rangle\langle j'j''m'_b m''_b|jm\rangle = \delta_{m'_a m'_b}\cdot\delta_{m''_a m''_b} \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}8)$$

(δ_{pq} symbole de Kroneker, égal à 1 si $p = q$, et nul si $p \neq q$).

Une autre écriture fait apparaître des coefficients plus symétriques par rapport aux trois moments angulaires :

$$\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\langle j'j''m'm''|jm\rangle = (-1)^{j'-j''+m}\begin{pmatrix} j' & j'' & j \\ m' & m'' & -m \end{pmatrix}$$

où la parenthèse désigne un « coefficient $3-j$ », coefficients introduits par Wigner ; ce sont ces coefficients qui sont le plus souvent donnés dans les tables spécialisées, et qui sont invariants dans une permutation circulaire des trois colonnes (tandis que la permutation de deux colonnes peut changer son signe).

On en déduit des relations de symétrie comme celle-ci qui nous servira plus loin :

$$\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\langle j'j''m'm''|jm\rangle = (-1)^{j''-j-m'}\frac{1}{\sqrt{2j''+1}}\langle j'j-m'm|j''m''\rangle \qquad (19\text{-}9)$$

Les signes des coefficients de C.G. ont une importance certaine dans les relations d'orthogonalité et dans les calculs de certains effets d'« interférences quantiques ». Mais dans le calcul d'un grand nombre d'expériences, on n'utilise que leurs carrés, et alors la connaissance de leurs signes n'est pas nécessaire.

19.2 Théorème de Wigner-Eckart

Ce théorème s'applique de manière générale à tous les opérateurs tensoriels d'ordre quelconque ; mais nous ne l'utiliserons, et ne l'énoncerons que sur le cas particulier des opérateurs vectoriels.

C'est là que le choix des composantes standard trouve sa justification ; en effet on montre que les trois composantes standard D_q d'un opérateur vectoriel comme $\overrightarrow{D}$ sont les composantes d'un opérateur « tensoriel » d'ordre 1, ce qui signifie qu'elles se transforment par rotation d'espace comme les trois vecteurs de base $|1,q\rangle$ qui seraient associés à un moment angulaire de nombre quantique $j=1$.

On montre alors que les éléments de matrice des opérateurs D_q s'écrivent sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l}\langle j_b, m_b|D_q|j_a, m_a\rangle = \langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle \dfrac{1}{\sqrt{2j_b+1}}\langle j_b||D||j_a\rangle \\ \text{règle de sélection : } m_b = m_a + q\end{array}\right\} \qquad (19\text{-}10)$$

On notera que l'ordre des nombres quantiques j_a et j_b est inversé dans l'écriture du C.G. et dans celle de l'élément de matrice. $\langle j_b||D||j_a\rangle$, appelé « élément de matrice réduit », est le coefficient qui caractérise la valeur du dipôle électrique entre les niveaux a et b, et toute la dépendance en m_a, m_b et polarisation q est contenue dans le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle$. L'inclusion du facteur $\sqrt{2j_b+1}$ dans cette formule (19-10) est une convention qui n'est pas adoptée par tous les auteurs ; son adoption rend l'élément de matrice réduit indépendant d'une éventuelle permutation de j_a et j_b.

Une conséquence immédiate et fondamentale de la formule (19-10) tient à la règle de sélection des C.G. $m_b = m_a + q$, qui se transpose à l'opérateur D_q. **Chaque opérateur D_q relie un état quantique $|j_a, m_a\rangle$ du niveau d'énergie inférieure à un seul état quantique $|j_b, m_a + q\rangle$ du niveau d'énergie supérieure.** C'est une grande simplification.

Nous avons utilisé implicitement cette simplification dans la partie I de cet ouvrage en nous restreignant **au cas des champs électriques polarisés linéairement** parallèlement à une direction Ox, que nous appelons maintenant Oz pour respecter les notations des composantes standard. Un champ E_z parallèle à Oz (polarisation π) conduit à un hamiltonien d'interaction (*cf.* (1-1))

$$\mathcal{H}_I = -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{D} = -E_z D_z = -E_z D_0 = -\mathcal{E}_1 \cos\omega t D_0 \qquad (19\text{-}11)$$

L'opérateur D_0 relie chaque état quantique $|j_a, m_a\rangle$ à un seul état quantique de même nombre quantique magnétique $m_b = m_a$. Dans une expérience où les atomes seraient préparés dans un seul état quantique m_a du niveau inférieur (soit naturellement si $j_a = 0$, soit par tri sur jet atomique avec un dispositif Stern et Gerlach, soit par pompage optique) nous pourrions réellement observer une transition entre deux états quantiques seulement, caractérisée

par l'élément de matrice de D_0 :

$$d_{ab} = \langle j_b, m_a | D_0 | j_a, m_a \rangle = \langle j_a 1 m_a 0 | j_b m_a \rangle \frac{1}{\sqrt{2j_b+1}} \langle j_b || D || j_a \rangle \qquad (19\text{-}12)$$

C'est un peu plus compliqué pour les polarisations circulaires qui correspondent aux opérateurs D_{+1} et D_{-1} ; nous leur consacrons le paragraphe suivant.

19.3 Action d'une onde polarisée circulairement

Nous supposons d'abord une polarisation circulaire, notée σ_+, où le champ, de module constant $\mathcal{E}_1/\sqrt{2}$, tourne dans le sens direct autour de l'axe de quantification Oz ; c'est-à-dire que :

$$\text{onde } \sigma_+ : \qquad E_x = \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \cos \omega t \qquad E_y = \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \sin \omega t \qquad (19\text{-}13)$$

(Le facteur $\sqrt{2}$ introduit dans le module du champ, fait que, pour la même valeur de $\mathcal{E}_1$, l'onde σ_+ a la même densité d'énergie que l'onde polarisée rectiligne.)

Le hamiltonien d'interaction s'écrit alors, en utilisant (19-4) :

$$H_{\sigma+} = -E_x D_x - E_y D_y = -\frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} D_x - \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} D_y$$

$$H_{\sigma+} = -\frac{\mathcal{E}_1}{2\sqrt{2}} e^{+i\omega t} (D_x - iD_y) - \frac{\mathcal{E}_1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} (D_x + iD_y)$$

$$\boxed{H_{\sigma+} = \frac{\mathcal{E}_1}{2} \left(e^{-i\omega t} D_{+1} - e^{+i\omega t} D_{-1} \right)} \qquad (19\text{-}14)$$

Le problème est plus complexe que dans le cas de la polarisation rectiligne parce que le hamiltonien contient encore deux composantes standard de $\vec{D}$. Mais elles sont associées avec des exponentielles imaginaires de signes opposés ; et cela différencie de manière importante leurs rôles dans l'équation de Schrödinger du §1.2. Même si nous isolons un seul état quantique $|j_a, m_a\rangle$ du niveau d'énergie inférieure, nous devons maintenant introduire deux états atomiques distincts du niveau d'énergie supérieure pour écrire l'état atomique global :

$$\left.\begin{aligned} &|\psi_{b+}\rangle = |j_b, m_a + 1\rangle \qquad \text{et} \qquad |\psi_{b-}\rangle = |j_b, m_a - 1\rangle \\ &|\psi(t)\rangle = a(t)|j_a, m_a\rangle + b_+(t)|j_b, m_a + 1\rangle + b_-(t)|j_b, m_a - 1\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}15)$$

Dans l'équation (1-6) en da/dt le terme en $b(t)\langle\psi_a|H_I|\psi_b\rangle$ doit être dédoublé en deux termes semblables, l'un en b_+, l'autre en b_-. Quant à l'équation (1-7)

elle doit être dédoublée en deux équations distinctes :

- l'une en $\mathrm{d}b_+/\mathrm{d}t$, que nous pourrons appeler (1.7^+) ;
- l'autre en $\mathrm{d}b_-/\mathrm{d}t$, que nous pourrons appeler (1.7^-).

Compte tenu de ces deux états b_+ et b_-, le hamiltonien d'interaction (19-14) possède maintenant quatre éléments de matrice au lieu de deux :

$$\bullet\ \langle j_a, m_a|H_{\sigma+}|j_b, m_a+1\rangle = -\frac{\mathcal{E}_1}{2}\mathrm{e}^{+i\omega t}\langle j_a, m_a|D_{-1}|j_b, m_a+1\rangle \qquad (19\text{-}16)$$

$$\langle j_a, m_a|H_{\sigma+}|j_b, m_a-1\rangle = \frac{\mathcal{E}_1}{2}\mathrm{e}^{-i\omega t}\langle j_a, m_a|D_{+1}|j_b, m_a-1\rangle \qquad (19\text{-}17)$$

et leurs complexes conjugués ($H_{\sigma+}$ est hermitique, à la différence de D_{+1} et D_{-1}) :

$$\bullet\ \langle j_b, m_a+1|H_{\sigma+}|j_a, m_a\rangle = \frac{\mathcal{E}_1}{2}\mathrm{e}^{-i\omega t}\langle j_b, m_a+1|D_{+1}|j_a, m_a\rangle \qquad (19\text{-}18)$$

$$\langle j_b, m_a-1|H_{\sigma+}|j_a, m_a\rangle = -\frac{\mathcal{E}_1}{2}\mathrm{e}^{+i\omega t}\langle j_b, m_a-1|D_{-1}|j_a, m_a\rangle \qquad (19\text{-}19)$$

Nous avons signalé par une puce noire les deux qui jouent un rôle important, comme expliqué ci-dessous : les deux premiers éléments de matrice (19-16) et (19-17) interviennent dans l'équation (1-6) *modifiée*. Mais nous avons dit que seuls les termes résonnants en $\mathrm{e}^{+i\omega t}$ avaient une contribution importante dans l'équation (1-6) quand nous l'avons réécrite sous la forme (1-8) ; donc l'élément de matrice (19-17) en facteur avec $b_-(t)$ donne une contribution négligeable, *dans le cadre de l'approximation séculaire.*

Les deux éléments de matrice, complexes conjugués, (19-18) et (19-19) interviennent dans les équations (1.7^+) et (1.7^-). Or dans l'équation (1-7), les termes résonnants sont au contraire en $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (ce que nous avons exprimé en la réécrivant sous la forme (1-9). Donc l'élément de matrice (19-19), qui figure dans l'équation (1.7^-) en $\mathrm{d}b_-/\mathrm{d}t$ apporte aussi une contribution négligeable. En conclusion, dans le cadre de l'approximation séculaire, l'état quantique $|\psi_{b-}\rangle = |j_b, m_a - 1\rangle$ n'est pas couplé à l'état de départ $|j_a, m_a\rangle$ par le hamiltonien d'interaction $H_{\sigma+}$. **La polarisation $\sigma+$ de la lumière sélectionne donc le seul état quantique $|j_b, m_a + 1\rangle$ du niveau supérieur ; et cette interaction peut être traitée en pratique comme un problème à deux états quantiques** ; et grâce à (19-6) elle s'écrit avec un seul élément de matrice :

$$\left.\begin{aligned} d_{ab} &= \langle j_b, m_a+1|D_{+1}|j_a, m_a\rangle = -\langle j_a, m_a|D_{-1}|j_b, m_a+1\rangle \\ d_{ab} &= \langle j_a 1 m_a 1|j_b m_a+1\rangle \frac{1}{\sqrt{2j_b+1}}\langle j_b||D||j_a\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}20)$$

Dans le cas d'une polarisation circulaire σ_-, tournant en sens inverse autour de Oz, il est facile de faire des calculs analogues, en changeant ω en $-\omega$. Nous

nous contentons de les résumer :

$$\text{onde } \sigma_- \ : \qquad E_x = \frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \cos\omega t \qquad E_y = -\frac{\mathcal{E}_1}{\sqrt{2}} \sin\omega t \tag{19-21}$$

On obtient le hamiltonien :

$$\boxed{H_{\sigma-} = \frac{\mathcal{E}_1}{2} \left(\mathrm{e}^{+i\omega t} D_{+1} - \mathrm{e}^{-i\omega t} D_{-1} \right)} \tag{19-22}$$

Par comparaison avec la formule (19-14) les exposants des exponentielles imaginaires ont changé de signes. Dans l'écriture des éléments de matrices (19-16) à (19-19) il faut, avec $H_{\sigma-}$, changer les signes dans toutes les exponentielles imaginaires, ce qui inverse complètement leurs rôles dans l'approximation séculaire. **En pratique le hamiltonien $H_{\sigma-}$ couple l'état de départ $|j_a, m_a\rangle$ avec le seul état $|\psi_{b-}\rangle = |j_b, m_a - 1\rangle$, et l'interaction de l'onde $\sigma-$ avec l'atome peut aussi être traitée comme un problème à deux états quantiques.**

En définitive, les deux hamiltoniens $H_{\sigma+}$ et $H_{\sigma-}$ contiennent, tous les deux, les deux composantes standard D_{+1} et D_{-1} du vecteur dipôle atomique. C'est le sens de rotation du champ électrique, représenté par le signe des exposants des exponentielles imaginaires, qui détermine les interactions différentes des deux hamiltoniens, et qui permet de retrouver les lois classiques de conservation du moment angulaire : une onde de polarisation circulaire transporte un moment angulaire dirigé selon l'axe Oz de rotation (dans le sens de Oz pour σ^+ ; dans le sens opposé pour $\sigma-$; ceci est vérifié dans les expériences où l'absorption d'une onde polarisée circulaire met réellement en rotation le milieu absorbant) ; l'absorption d'un photon circulaire $\sigma+$ augmente la composante J_z du moment angulaire atomique ($m_b = m_a + 1$) et inversement pour une onde $\sigma-$.

Remarque 19.2 – Valeur moyenne du dipôle d'un atome excité par une onde polarisée circulairement. Nous venons de montrer que les hamiltoniens (19-14) ou (19-22) d'une onde incidente circulaire ne réalisent en pratique de couplage qu'entre deux états quantiques, ce qui permet de généraliser tous les calculs de la partie I de l'ouvrage. Pour calculer n'importe quelle composante du moment dipolaire atomique nous pouvons donc généraliser les formules du chapitre 2. Nous partons de la formule (2-14) ; que nous explicitons plus en détail dans le cas d'une excitation de polarisation $\sigma+$ qui couple l'état m_a du niveau inférieur et l'état $m_b = m_a + 1$ du niveau supérieur :

$$\langle D_q \rangle = a^* b \langle m_a | D_q | m_b \rangle + b^* a \langle m_b | D_q | m_a \rangle \quad \text{avec} \quad m_b = m_a + 1 \tag{19-23}$$

(l'indice q pouvant représenter soit une composante standard, soit une composante cartésienne). Si nous appliquons cette formule à la composante $D_0 = D_z$, il est clair d'après (19-10) que tous les éléments de matrice de l'opérateur D_0 entre m_a et m_b sont nuls ; donc $\langle D_0 \rangle = \langle D_z \rangle = 0$.

Pour calculer $\langle D_x \rangle$ et $\langle D_y \rangle$, il faut utiliser (19-5) pour les exprimer en fonction de D_{-1} et D_{+1} dans la formule ci-dessus (19-23) : et d'après (19-10), la contribution

de D_{+1} au premier élément de matrice est nulle ; et celle de D_{-1} au second élément de matrice également. Il reste :

$$\left.\begin{aligned}\langle D_x\rangle &= a^*b\langle m_a\left|\frac{D_{-1}}{\sqrt{2}}\right|m_b\rangle + b^*a\langle m_b\left|\frac{-D_{+1}}{\sqrt{2}}\right|m_a\rangle = -\frac{a^*b+b^*a}{\sqrt{2}}d_{ab}\\ \langle D_y\rangle &= a^*b\langle m_a\left|\frac{iD_{-1}}{\sqrt{2}}\right|m_b\rangle + b^*a\langle m_b\left|i\frac{D_{+1}}{\sqrt{2}}\right|m_a\rangle = i\frac{b^*a-a^*b}{\sqrt{2}}d_{ab}\end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}24)$$

en tenant compte des relations (19-6) et (19-20) (les éléments de matrice transposés de D_{-1} et D_{+1} sont opposés). En utilisant les variables croisées U et V introduites en (2-12) et compte tenu de (2-13), on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\langle D_x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}d_{ab}\,U = -\frac{1}{\sqrt{2}}d_{ab}\,[u\cos\omega t - v\sin\omega t]\\ \langle D_y\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}d_{ab}\,V = -\frac{1}{\sqrt{2}}d_{ab}\left[u\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) - v\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}25)$$

La composante $\langle D_y\rangle$ présente un déphasage retard de $\pi/2$ par rapport à la composante $\langle D_x\rangle$; c'est-à-dire que $\langle D_x\rangle$ et $\langle D_y\rangle$ sont les deux composantes d'un vecteur qui tourne autour de Oz dans le sens direct.

Le résultat (19-25) pouvait être obtenu plus simplement en appliquant directement à la composante D_{+1} la formule (19-23), dont le premier élément de matrice est alors nul :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle D_x\rangle + i\langle D_y\rangle) = \langle D_{+1}\rangle = b^*a\langle m_b|D_{+1}|m_a\rangle = \frac{U+iV}{2}d_{ab}$$

$\langle D_x\rangle$ et $\langle D_y\rangle$, valeurs moyennes d'opérateurs hermitiques, sont nécessairement réelles ; U et V le sont également ; en séparant la partie réelle et la partie imaginaire de $\langle D_{+1}\rangle$, on retrouve (19-25).

Dans le cas de l'excitation $\sigma+$, nous obtenons ainsi une correspondance précise entre la composante $\langle D_x\rangle$ et la variable croisée U d'une part ; entre la composante $\langle D_y\rangle$ et la variable croisée V d'autre part. Ceci donne une signification géométrique de rotation dans l'espace réel aux expressions (2-13) ; à la différence du cas de polarisation rectiligne où cette rotation n'est qu'une représentation dans le plan complexe.

Dans le cas d'excitation de l'atome avec une onde incidente de polarisation circulaire $\sigma-$, tournant en sens opposé, il faut changer les signes de toutes les parties imaginaires dans le calcul ; on obtient alors une composante $\langle D_y\rangle$ qui est en avance de phase de $\pi/2$ par rapport à $\langle D_x\rangle$; c'est-à-dire que $\langle D_x\rangle$ et $\langle D_y\rangle$ sont les composantes d'un vecteur qui tourne autour de Oz dans le sens rétrograde.

19.4 Probabilités de transition et coefficients d'Einstein

19.4.1 Transition élémentaire entre deux états quantiques

Si l'on peut isoler un état de départ, et si l'on utilise une onde de polarisation standard $q = m_b - m_a$, on produit la seule transition élémentaire

$m_a \leftrightarrow m_b$; les probabilités par unité de temps d'absorption ou d'émission induite peuvent s'exprimer rapidement à l'aide de « pseudo-coefficients d'Einstein » adaptés à ce cas particulier $B(m_a \rightarrow m_b)$ pour l'absorption et $B(m_b \rightarrow m_a)$ pour l'émission induite. Soit w_q la densité volumique d'énergie correspondante ; elle permet de calculer :

- la probabilité d'absorption par unité de temps : $B(m_a \rightarrow m_b)\varphi(\nu)w_q$;
- la probabilité d'émission par unité de temps : $B(m_b \rightarrow m_a)\varphi(\nu)w_q$ avec $q = m_b - m_a$.

En transposant le résultat (3-9), à l'aide de (19-11) et (19-19), on obtient :

$$B(m_a \rightarrow m_b) = B(m_b \rightarrow m_a) = \frac{1}{2\varepsilon_0\hbar^2}|\langle j_b, m_b|D_q|j_a, m_a\rangle|^2 \qquad (19\text{-}26)$$

Ce résultat peut être retrouvé dans la théorie plus approfondie du rayonnement utilisant les opérateurs de création et d'annihilation de photons. Dans cette même théorie le calcul de l'émission spontanée conduit, pour cette transition élémentaire $m_b \rightarrow m_a$, donc sur la seule polarisation $q = m_b - m_a$, à la probabilité par unité de temps :

$$A(m_b \rightarrow m_a) = \frac{k^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar}|\langle j_b, m_b|D_q|j_a, m_a\rangle|^2 \qquad (19\text{-}27)$$

Avec $k = 2\pi/\lambda$, ceci conduit à la relation générale déjà indiquée en (3-9) :

$$\boxed{\frac{A(m_b \rightarrow m_a)}{B(m_b \rightarrow m_a)} = \frac{8\pi h}{3\lambda^3}} \qquad (19\text{-}28)$$

19.4.2 Coefficients d'Einstein

Dans le cas général, un sous-niveau m_b peut se désexciter vers plusieurs sous-niveaux m_a selon les trois polarisations possibles $q = m_b - m_a$. La probabilité totale d'émission spontanée s'obtient en effectuant la somme sur les m_a à m_b fixé (il revient au même de la faire sur q, car m_a et q sont liés), soit en utilisant (19-27) et (19-10) :

$$\sum_{m_a} A(m_b \rightarrow m_a) = \frac{k^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar}\frac{|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2}{2j_b+1}\sum_{m_a \text{ et } q}|\langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle|^2$$

D'après la relation d'orthogonalité (19-8) cette somme sur m_a et q vaut 1 ; et la probabilité totale est alors indépendante de m_b : *tous les sous-niveaux m_b du niveau b ont la même probabilité totale* par unité de temps d'émission spontanée, notée A_{21} avec la correspondance $1 \leftrightarrow a$ et $2 \leftrightarrow b$ (*cf.* Fig. 1.1) :

$$\boxed{A_{21} = \frac{k^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar}\frac{1}{2j_b+1}|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2} \qquad (19\text{-}29)$$

Pour l'émission induite, de polarisation $q = m_b - m_a$ fixée, le coefficient $B(m_b \to m_a)$ dépend de m_b. On peut définir, à q fixé, un *coefficient moyen pour les sous-niveaux* m_b, soit :

$$\frac{1}{2j_b+1}\sum_{m_b} B(m_b \to m_a) = \frac{1}{2j_b+1}\frac{1}{2\varepsilon_0\hbar^2}\frac{|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2}{2j_b+1}\sum_{m_b}|\langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle|^2 \tag{19-30}$$

la sommation porte sur m_b et $m_a = m_b - q$, à q fixé.

La propriété de symétrie des coefficients C.G. (19-9) permet d'écrire :

$$\frac{1}{2j_b+1}\sum_{m_b \text{ et } m_a}|\langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle|^2 = \frac{1}{3}\sum_{m_b \text{ et } m_a}|\langle j_a j_b m_a m_b|1 q\rangle|^2 = \frac{1}{3} \tag{19-31}$$

en utilisant au second membre la relation d'orthogonalité (19-8). Le nombre 3 dans (19-31) provient d'un facteur $2j+1$ dans le cas $j=1$; c'est le nombre des diverses polarisations standard q.

Le résultat de la sommation (19-30) est *indépendant de la polarisation q choisie*. On obtient alors le coefficient moyen B_{21}

$$\boxed{B_{21} = \frac{1}{2j_b+1}\sum_{m_b} B(m_b \to m_a) = \frac{1}{6\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{2j_b+1}|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2} \tag{19-32}$$

Dans le cas d'un rayonnement isotrope, où les trois polarisations standard sont également présentes, il est commode d'introduire la valeur moyenne des coefficients $B(m_b \to m_a)$ sur les trois polarisations pour un sous-niveau de départ m_b *donné* :

$$\frac{1}{3}\sum_{q} B(m_b \to m_a) = \frac{1}{3}\frac{1}{2\varepsilon_0\hbar^2}\frac{|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2}{2j_b+1}\sum_{q \text{ et } m_a}|\langle j_a 1 m_a q|j_b m_b\rangle|^2 = B_{21} \tag{19-33}$$

car la relation d'orthogonalité (19-8) s'applique directement à la sommation figurant à droite, aboutissant au même résultat que (19-30), indépendant du sous-niveau m_b choisi.

Les coefficients A_{21} et B_{21} sont les coefficients d'Einstein pour respectivement l'émission spontanée et l'émission induite ; ils sont liés par la relation qui se déduit de (19-29) et (19-32) :

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{\lambda^3}} \tag{19-34}$$

En résumé, les coefficientsd'Einstein A_{21} et B_{21} sont calculés dans des

opérations bien distinctes :

- **pour l'émission spontanée à partir d'un sous-niveau m_b c'est la somme sur les différentes polarisations possibles (somme indépendante du sous-niveau m_b choisi)** ;
- **pour l'émission induite, c'est la moyenne sur les sous-niveaux m_b du niveau supérieur des coefficients calculés pour une polarisation fixée** (moyenne indépendante de la polarisation choisie) ; **ou bien c'est la moyenne sur les trois polarisations standard des coefficients calculés à partir d'un sous-niveau m_b fixé** (moyenne indépendante du sous-niveau m_b choisi).

En ce qui concerne l'absorption, on définit de même un coefficient moyen B_{12} pour les sous-niveaux m_a du niveau inférieur, à *polarisation q fixée* donc m_b variable :

$$\frac{1}{2j_a+1}\sum_{m_a} B(m_a \to m_b) = \frac{1}{2j_a+1}\,\frac{1}{2\varepsilon_0\hbar^2}\,\frac{|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2}{2j_b+1} \times \sum_{m_a} |\langle j_a 1 m_a q | j_b m_b\rangle|^2$$

Sommer sur m_a est identique à sommer sur m_b car $m_b = m_a + q$; c'est donc la même somme que ci-dessus, en (19-30) ; d'où :

$$\boxed{B_{12} = \frac{1}{2j_a+1}\sum_{m_a} B(m_a \to m_b) = \frac{1}{6\varepsilon_0\hbar^2}\,\frac{1}{2j_a+1}|\langle j_b||D||j_a\rangle|^2} \qquad (19\text{-}35)$$

De manière symétrique au calcul effectué en (19-33) pour le coefficient d'émission B_{21}, on vérifie facilement que la valeur moyenne des coefficients $B(m_a \to m_b)$ sur les trois polarisations pour un sous-niveau de départ m_a donné est indépendante de ce sous-niveau, et égale à B_{12} :

$$B_{12} = \frac{1}{3}\sum_{q \text{ et } m_b} B(m_a \to m_b) \qquad (\text{à } m_a \text{ fixé}) \qquad (19\text{-}36)$$

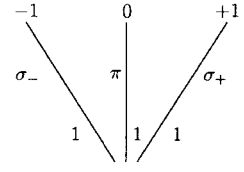
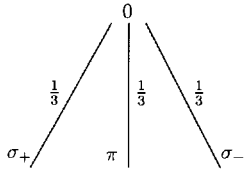
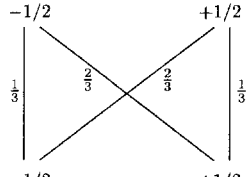
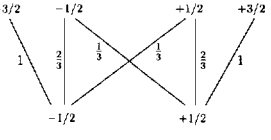
La comparaison de (19-32) et (19-35) conduit à la relation classique entre les deux coefficients B_{12} et B_{21} : chacun d'eux est inversement proportionnel à l'ordre de dégénérescence du niveau de départ $g_1 = 2j_a + 1$ pour B_{12} et $g_2 = 2j_b + 1$ pour B_{21}, en sorte que $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ *cf.* (8-4). Des exemples avec valeurs numériques sont donnés dans le tableau 19.1.

Nous allons dans les paragraphes suivants préciser dans quelles situations ces coefficients d'Einstein peuvent être utilisés.

19.4.3 Utilisation des probabilités de transition

Au chapitre 1 nous avons étudié le cas d'une onde monochromatique cohérente sans rupture de phase (nous faisons là un pléonasme car les interruptions

TAB. 19.1 – *Valeurs des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan dans quelques cas simples. Ces valeurs sont indiquées sur les traits qui relient les valeurs m_a et m_b des deux niveaux d'énergie de nombres quantiques j_a et j_b (les polarisations sont π pour les traits verticaux, σ^+ pour les traits montant vers la droite, et σ^- pour les traits symétriques). On vérifie dans tous les cas : $A(m_b \to m_a)/B(m_b \leftrightarrow m_a) = A_{21}/3B_{21}$.*

$j_b = 1$, $m_b =$ -1 0 $+1$  $j_a = 0$, $m_a =$ 0	$\lvert\langle 010q\rvert 1q\rangle\rvert^2 = 1$ $A(m_b \to 0) = A_{21}$ $B(m_b \leftrightarrow 0) = 3B_{21} = B_{12}$
$j_b = 0$, $m_b =$ 0  $j_a = 1$, $m_a =$ -1 0 $+1$	$\lvert\langle 1\,1\,-q\,q\rvert 0\,0\rangle\rvert^2 = \frac{1}{3}$ $A(0 \to m_a) = \frac{1}{3}A_{21}$ $B(0 \leftrightarrow m_a) = B_{21} = 3B_{12}$
$j_b = \frac{1}{2}$, $m_b =$ $-1/2$ $+1/2$  $j_a = \frac{1}{2}$, $m_a =$ $-1/2$ $+1/2$	$\left\lvert\langle \frac{1}{2}1m0\rvert\frac{1}{2}m\rangle\right\rvert^2 = \frac{1}{3}$ $\left\lvert\langle \frac{1}{2}1m\pm 1\rvert\frac{1}{2}(m\pm 1)\rangle\right\rvert^2 = \frac{2}{3}$ $A(m \to m) = \frac{1}{2}A(m \to m\pm 1) = \frac{1}{3}A_{21}$ $B(m \leftrightarrow m) = \frac{1}{2}B(m \leftrightarrow m\pm 1) = B_{21} = B_{12}$
$j_b = \frac{3}{2}$, $m_b =$ $-3/2$ $-1/2$ $+1/2$ $+3/2$  $j_a = \frac{1}{2}$, $m_a =$ $-1/2$ $+1/2$	$\left\lvert\langle \frac{1}{2}\,1\,m\,0\rvert\frac{3}{2}\,m\rangle\right\rvert^2 = \frac{2}{3}$ $\left\lvert\langle \frac{1}{2}1\pm\frac{1}{2}\mp 1\rvert\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}\rangle\right\rvert^2 = \frac{1}{3}$ $\left\lvert\langle \frac{1}{2}1\pm\frac{1}{2}\pm 1\rvert\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\rangle\right\rvert^2 = 1$
$\frac{3}{2}A(m \to m) = 3A\left(\pm\frac{1}{2} \to \mp\frac{1}{2}\right) = A\left(\pm\frac{3}{2} \to \pm\frac{1}{2}\right) = A_{21}$	
$\frac{3}{2}B(m \leftrightarrow m) = 3B\left(\pm\frac{1}{2} \leftrightarrow \mp\frac{1}{2}\right) = B\left(\pm\frac{3}{2} \leftrightarrow \pm\frac{1}{2}\right) = 3B_{21} = \frac{3}{2}B_{12}$	

de phase provoqueraient en fait un élargissement en fréquence), et nous avons vu que la notion de probabilité de transition par unité de temps n'a alors aucune justification. Si l'onde monochromatique agit sur les $(2j_a + 1)$ états

quantiques du niveau inférieur et les $(2j_b + 1)$ états du niveau supérieur, il faut introduire dans l'équation de Schrödinger les $2j_a + 1$ amplitudes de probabilité a_i des états « inférieurs » et les $2j_b + 1$ amplitudes de probabilité b_s des états « supérieurs ». Sans doute les règles de sélection des opérateurs D_q réduisent-elles le nombre des produits croisés $a_i^* b_s$ ou $b_s^* a_i$ non nuls ; mais les problèmes deviennent assez complexes.

Si le spectre en fréquence du rayonnement incident est élargi (plus large que la largeur naturelle de la forme de raie $\varphi(\nu)$), les phases des produits croisés sont brouillées et leurs valeurs moyennes sont nulles. On se trouve dans les conditions où la règle d'or de Fermi s'applique, et permet de calculer les probabilités de transition du type (8-1) séparément pour chacune des transitions élémentaires $m_a \leftrightarrow m_b$. Ce calcul conduit à introduire la densité d'énergie différentielle en fréquence $\rho_q(\nu)$ à la polarisation $q = m_b - m_a$; en faisant l'hypothèse que $\rho_q(\nu)$ est à peu près constante sur la portion concernée du spectre, l'intégrale sur la fréquence fait disparaître la forme de raie normalisée :

$$\int \varphi(\nu) \mathrm{d}w = \int \varphi(\nu) \rho_q(\nu) \mathrm{d}\nu \simeq \rho_q(\nu_0) \int \varphi(\nu) d\nu = \rho_q(\nu_0) \qquad (19\text{-}37)$$

En définitive on calcule des probabilités analogues aux définitions (8-1) à condition d'y remplacer $\varphi(\nu)w$ par $\rho_q(\nu_0)$, et d'autre part : B_{21} et B_{12} par $B(m_b \rightarrow m_a)$ et $B(m_a \rightarrow m_b)$. Ces probabilités sont définies à partir des populations séparées $n(m_b)$ des sous-niveaux m_b et des populations $n(m_a)$ des sous-niveaux m_a ; elles conduisent à des équations d'évolution facilement transposées de (8-3) :

$$-\frac{\mathrm{d}n(m_b)}{\mathrm{d}t} = A_{21}\, n(m_b) + B(m_b \leftrightarrow m_a)\, \rho_q(\nu)\, [n(m_b) - n(m_a)]$$

Soit $n_b = \sum_{m_b} n(m_b)$ la population totale du niveau b. En additionnant les $(2j_b + 1)$ équations d'évolution des $n(m_b)$, il vient :

$$-\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21} n_b + \rho_q(\nu) \sum_{m_b} B(m_b \leftrightarrow m_a)[n(m_b) - n(m_a)] \qquad (19\text{-}38)$$

la sommation peut aussi porter sur m_a, car, à q fixé, $m_a = m_b - q$. On ne peut aller plus loin sans hypothèses supplémentaires.

Cas d'un rayonnement isotrope

On suppose que l'énergie de rayonnement est distribuée de façon égale sur les trois polarisations et que celles-ci sont incohérentes : $\rho_q = \rho/3$ où ρ est la densité énergétique totale. L'évolution de n_b s'obtient à partir du (19-38)

en sommant sur les polarisations q soit :

$$-\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21}n_b + \frac{\rho(\nu)}{3}\left[\sum_q\sum_{m_b} B(m_b \to m_a)n(m_b) - \sum_q\sum_{m_b} B(m_a \to m_b)n(m_a)\right]$$

On fait apparaître en facteur de $n(m_b)$ la valeur moyenne (19-33) des coefficients B sur les polarisations q à m_b fixé soit B_{21}, et en facteur de $n(m_a)$ la valeur moyenne (19-36) des coefficients B sur les polarisations q à m_a fixé, soit B_{12}. Ces coefficients moyens B_{21} et B_{12} peuvent être mis en facteur, ce qui fait apparaître la somme n_b des populations des sous-niveaux m_b et la somme n_a pour les sous-niveaux m_a : $\sum_{m_b} n(m_b) = n_b$ et $\sum_{m_a} n(m_a) = n_a$, d'où l'équation d'évolution :

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21}\,n_b + (B_{21}\,n_b - B_{12}\,n_a)\,\rho(\nu)} \qquad (19\text{-}39)$$

On calculerait de manière symétrique une équation d'évolution pour $\mathrm{d}n_a/\mathrm{d}t$ ne dépendant que de n_a et n_b. On peut donc étudier directement les populations globales n_a et n_b des deux niveaux d'énergie sans avoir à détailler les populations individuelles des sous-niveaux.

Cas de sous-niveaux Zeeman également peuplés

Nous revenons au cas d'un rayonnement polarisé ; mais nous supposons que, par des processus de relaxation suffisamment rapides entre sous-niveaux Zeeman de même énergie, on puisse admettre que les sous-niveaux soit également peuplés, soit : $n(m_b) = \dfrac{n_b}{2j_b+1}$ pour tout m_b, $n(m_a) = \dfrac{n_a}{2j_a+1}$ pour tout m_a. L'équation (19-38) devient :

$$-\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21}n_b + \sum_{m_b} B(m_b \to m_a)\left[\frac{n_b}{2j_b+1} - \frac{n_a}{2j_a+1}\right]\rho_q(\nu)$$

En facteur de n_b et n_a respectivement, on reconnaît les définitions (19-32) et (19-35) de B_{21} et B_{12} d'où :

$$-\frac{dn_b}{dt} = A_{21}n_b + (B_{21}n_b - B_{12}n_a)\rho_q(\nu)$$

on retrouve la même équation d'évolution (19-39) avec un rayonnement polarisé, soit :

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t} = A_{21}n_b + B_{21}D\rho_q(\nu)} \qquad (19\text{-}40)$$

où D est la différence pondérée des populations $n_b - \frac{g_b}{g_a} n_a$ introduite en (8-9). Cette expression (19-40) avec $\rho_q(\nu)$ est rigoureuse dans les limites de l'hypothèse d'égalisation rapide des populations des sous-niveaux Zeeman. Si cette hypothèse d'égalisation des populations n'est pas vérifiée, on ne peut plus décrire l'évolution du système uniquement en termes de populations globales n_b et n_a des niveaux b et a. Lorsque nous l'utilisons en lumière monochromatique dans la partie II de cet ouvrage, en remplaçant $\rho_q(\nu)$ par $\varphi(\nu)w$, nous devons supposer en outre que sont réalisées les conditions indiquées à la fin du §5.3 et dans la conclusion du chapitre 5 (rappelées dans l'introduction de la partie II) : à savoir que l'évolution du système soit assez lente pour qu'il reste à chaque instant approximativement décrit par les solutions stationnaires des équations de Bloch.

Remarque 19.3 – Proposée aux lecteurs qui ont déjà vu dans des ouvrages plus avancés les éléments de matrice des opérateurs de création de photons et d'annihilation de photons dans chaque mode du rayonnement. Ceux-ci sont proportionnels respectivement à $\sqrt{N_i + 1}$ et $\sqrt{N_i}$ où N_i est le nombre total de photons dans chaque mode (i) de la cavité de volume $\mathcal{V}$ où l'onde et l'atome sont enfermés.

Des calculs classiques de statistique, déjà utilisé par Planck en 1900, permettent de dénombrer le nombre des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_i}$ distincts possibles dans la cavité de volume $\mathcal{V}$. Avec deux polarisations indépendantes sur chaque vecteur $\overrightarrow{k}_i$, on calcule le nombre de modes du rayonnement indépendants sur l'intervalle $\delta k = 2\pi\delta\nu/c$ du module du vecteur $\overrightarrow{k}$:

$$\text{total des modes} = \mathcal{V}\frac{k^2\delta k}{\pi^2} = \mathcal{V}\frac{8\pi\nu^2\delta\nu}{c^3}$$

Les probabilités de transition sont proportionnelles aux carrés des éléments de matrice, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{pour l'émission stimulée dans les modes occupés : } N_i \\ \text{pour l'émission spontanée dans tous les modes : } 1 \end{cases}$$

On en déduit le rapport du nombre d'émissions spontanées au nombre d'émission stimulées :

$$\frac{\text{spontané}}{\text{stimulé}} = \frac{\sum_{\text{tous modes}} 1}{\sum_{\text{modes occupés}} N_i} = \frac{\text{Total des modes}}{\text{Nombre total de photons}}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\nu)} = \frac{\text{spontané}}{\text{stimulé}} = \frac{\mathcal{V}8\pi\frac{\nu^2}{c^3}\delta\nu}{\frac{\mathcal{V}\rho(\nu)\delta\nu}{h\nu}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3\rho(\nu)} = \frac{8\pi h}{\lambda^3\rho(\nu)}$$

on retrouve bien la formule (19-34).

Comme il y a trois polarisations standard, π, σ_+ et σ_-, le dénombrement du nombre de modes possibles sur une seule polarisation n'est que le tiers du nombre

total des modes. En cas d'onde polarisée sur une transition élémentaire $m_b \leftrightarrow m_a$ on doit donc écrire :

$$\frac{A(m_b \to m_a)}{B(m_b \to m_a)\rho(\nu)} = \frac{\text{spontané}}{\text{stimulé}} = \frac{\text{Total des modes}/3}{\text{Nombre des photons}} = \frac{8\pi h}{3\lambda^3 \rho(\nu)}$$

on trouve la formule (19-28) en comprenant mieux d'où vient la différence avec la formule (19-34).

19.5 Diagrammes de rayonnement des transitions dipolaires électriques

Dans les paragraphes précédents, nous avons analysé l'interaction d'une onde lumineuse avec un atome en fonction de la polarisation de son champ électrique ; et nous avons alors été amenés à distinguer trois polarisations « standard » de ce champ qui jouent un rôle essentiel :

- champ électrique selon Oz : polarisation π ;
- champ tournant dans le sens direct autour de Oz : polarisation σ_+ ;
- champ tournant dans le sens inverse autour de Oz : polarisation σ_-.

À chacune de ces polarisations standard correspond un dipôle induit de même type : rectilique selon Oz ou tournant autour de Oz dans le même sens que le champ (*cf.* remarque 19.2).

Comme nous l'avons vu au chapitre 18, un dipôle atomique est source de rayonnement électromagnétique et nous allons ici préciser son diagramme d'émission : dépendance angulaire du champ électrique rayonné et sa polarisation, répartition angulaire de l'intensité émise.

Le dipôle atomique $\vec{p}(t) = \langle \vec{D} \rangle(t)$ est supposé placé à l'origine O. Utilisons la base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ (*cf.* Fig. 19.1).

En un point P de coordonnées sphériques (r, θ, φ) à grande distance du dipôle ($r \gg \lambda$), le champ rayonné par un dipôle oscillant à la fréquence circulaire ω est donné par l'expression suivante qui généralise la formule (18-2) dans le cas d'un dipôle d'orientation quelconque :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{ray}} = -\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \vec{e_r} \wedge \left[\vec{e_r} \wedge \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right]} \qquad (19\text{-}41)$$

Ce champ est transverse à la direction OP de vecteur unitaire $\vec{e_r}$; il s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{ray}} = E_\theta \, \vec{e_\theta} + E_\varphi \, \vec{e_\varphi}$$

Explicitons le double produit vectoriel :

$$\vec{e_r} \wedge (\vec{e_r} \wedge \vec{p}) = (\vec{e_r} \cdot \vec{p}) \, \vec{e_r} - \vec{p} = -(\vec{e_\theta} \cdot \vec{p}) \, \vec{e_\theta} - (\vec{e_\varphi} \cdot \vec{p}) \, \vec{e_\varphi}$$

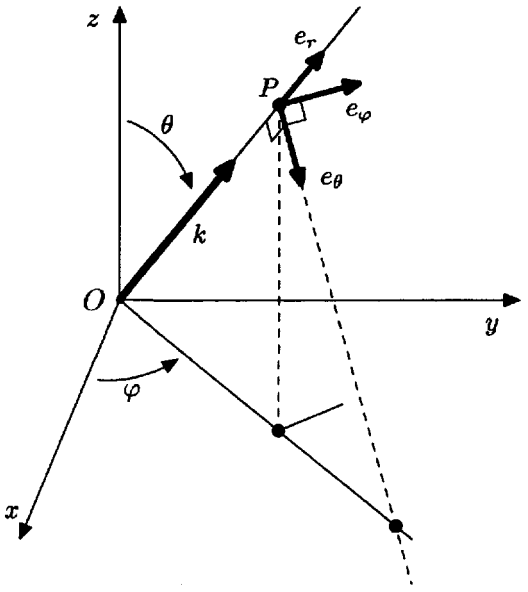


FIG. 19.1 – *Base sphérique standard* $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ *utilisée pour les diagrammes de rayonnement. (Les axes* θ *et* φ *sont opposés à ceux adoptés au chapitre 18, figure 18.1.)*

On vérifie que la composante radiale de $\overrightarrow{p}$ s'élimine du résultat et, qu'au signe près, il est égal à la projection de $\overrightarrow{p}$ sur le plan $(\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$; cela permet d'expliciter aisément les composantes E_θ et E_φ quelle que soit la direction d'oscillation de $\overrightarrow{p}$, et quelle que soit la direction de propagation $\overrightarrow{e_r}$.

Nous allons préciser ces composantes pour les transitions standard introduites aux paragraphes 19.2 et 19.3. Pour cela nous rappelons ci-dessous les expressions donnant la base cartésienne à partir de la base sphérique :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_x} = \sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{e_r} + \cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{e_\theta} - \sin\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{e_r} + \cos\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{e_\theta} + \cos\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{e_z} = \cos\theta\ \overrightarrow{e_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{e_\theta} \end{cases} \tag{19-42}$$

Transitions π $(m_b - m_a = 0)$

Le dipôle atomique oscille selon Oz :

$$\overrightarrow{p}(t) = p_0\cos\omega t\ \overrightarrow{e_z} = \mathrm{Re}\left[p_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\ \overrightarrow{e_z}\right] \tag{19-43}$$

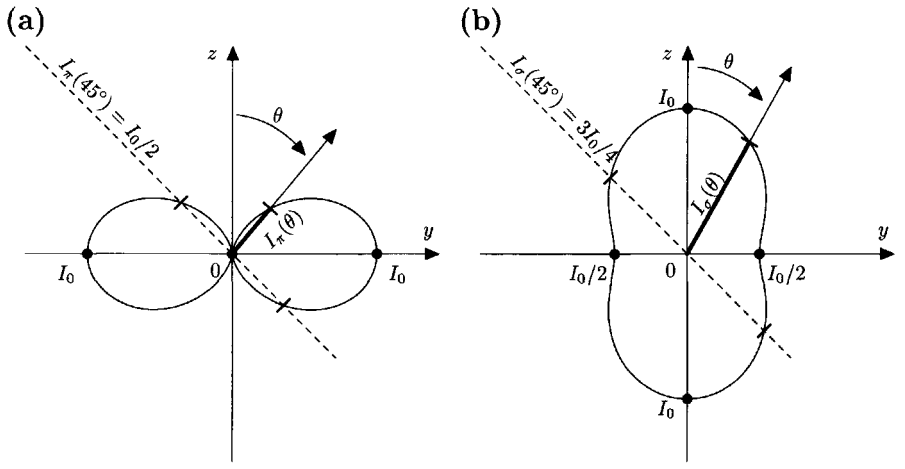


FIG. 19.2 – *Diagrammes de rayonnement : (a) transition* π $(m_b - m_a = 0)$ *; (b) transition* σ_+ *ou* σ_- $(m_b - m_a = \pm 1)$.

En utilisant $\overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{e_z} = -\sin\theta$ et $\overrightarrow{e_\varphi} \cdot \overrightarrow{e_z} = 0$, on obtient, en notation complexe :

$$E_\theta = -\frac{C}{r}\,\mathbf{e}^{-i\omega(t-r/c)}\sin\theta, \qquad E_\varphi = 0 \tag{19-44}$$

avec $C = \dfrac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}$. Nous retrouvons ici l'expression donnée en (18-2).

Pour toute direction d'émission (θ, φ), le champ électrique est polarisé *linéairement* dans le plan $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$.

À r fixé, l'intensité émise ne dépend que de θ et est donnée par l'expression (normalisée à 1 sur l'angle solide total) :

$$I_\pi(\theta) = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta \qquad \text{avec} \qquad \iint I_\pi(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 1 \tag{19-45}$$

L'intensité émise est nulle dans la direction du dipôle et maximale dans les directions perpendiculaires.

Le diagramme de rayonnement en intensité correspondant est représenté sur la figure 19.2a. Tenant compte de la symétrie de révolution on ne l'a représenté que dans un seul plan méridien (contenant l'axe Oz) ; ces courbes diffèrent des cercles de la figure 18.2, parce que sur chaque direction θ on a porté une longueur proportionnelle à l'intensité $I_\pi(\theta)$ au lieu de l'amplitude au chapitre 18.

Transitions σ_+ ($m_b - m_a = +1$)

Elle correspond à un dipôle tournant dans le sens positif autour de Oz, soit :

$$\overrightarrow{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} p_0 \cos\omega t \, \overrightarrow{e_x} + \frac{1}{\sqrt{2}} p_0 \sin\omega t \, \overrightarrow{e_y}$$

le facteur $1/\sqrt{2}$ est introduit pour avoir $|\overrightarrow{p}| = p_0/\sqrt{2}$, égal à la valeur moyenne de $|p(t)|$ dans le cas des transitions π. En notant que $\sin\omega t = \mathrm{Re}[ie^{-i\omega t}]$, on obtient :

$$\overrightarrow{p} = \mathrm{Re}\left[p_0 \, e^{-i\omega t} \, \frac{\overrightarrow{e_x} + i\overrightarrow{e_y}}{\sqrt{2}} \right] \tag{19-46}$$

Cette expression se déduit de (19-43) en remplaçant $\overrightarrow{e_z}$ par $(\overrightarrow{e_x} + i\overrightarrow{e_y})/\sqrt{2}$. La projection de ce vecteur sur le plan $(\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ donne la dépendance angulaire du champ. Cela conduit, en utilisant les expressions (19-42), aux dépendances angulaires de E_θ et E_φ ;

$$E_\theta \propto \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \qquad E_\varphi \propto \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \tag{19-47}$$

Noter le déphasage de $\pi/2$ entre E_φ et E_θ. Pour une direction (θ, φ) quelconque, la lumière émise possède une polarisation elliptique, car en général $|E_\theta|$ est différent de $|E_\varphi|$.

L'intensité est proportionnelle à $|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2$; en normalisant à 1, on obtient :

$$I_{\sigma_+}(\theta) = \frac{3}{8\pi} \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \tag{19-48}$$

Le diagramme correspondant est représenté en figure 19.2b. Il possède la symétrie de révolution autour de Oz ; on a donc représenté qu'un seul plan méridien (contenant Oz).

Précisons la polarisation du champ électrique rayonné pour quelques directions particulières d'observation :

- $\theta = 0$: champ polarisé circulairement, tournant dans le sens positif autour de Oz (polarisation σ_+, qui apparaît comme circulaire gauche pour l'observateur qui reçoit la lumière (placé au loin sur la partie positive de l'axe Oz) ;

- $\theta = \pi$: champ polarisé circulairement, tournant aussi dans le sens positif autour de Oz (polarisation σ_+), mais qui apparaît comme circulaire droite pour l'observateur recevant la lumière (placé au loin sur la partie négative de l'axe Oz) ;

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: $E_\theta = 0$, champ polarisé linéairement dans la direction perpendiculaire à Oz (polarisation dite « σ »).

Transitions σ_- $(m_b - m_a = -1)$

Le dipôle émetteur tourne dans le sens négatif autour de Oz, soit :

$$\vec{p}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} p_0 [\cos\omega t\ \vec{e}_x - \sin\omega t\ \vec{e}_y] = \mathrm{Re}\left[p_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \frac{\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y}{\sqrt{2}}\right] \qquad (19\text{-}49)$$

La projection du vecteur $(\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y)/\sqrt{2}$ dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ donne la dépendance angulaire du champ rayonné :

$$E_\theta \propto -\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\varphi}, \qquad E_\varphi \propto \frac{i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\varphi} \qquad (19\text{-}50)$$

Les conclusions concernant la polarisation du rayonnement émis se déduisent de celles d'une transition σ_+ en inversant le sens de rotation du champ électrique.

Ainsi, dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, la polarisation est circulaire tournant dans le sens rétrograde autour de Oz (polarisation σ_-) ; et elle apparaît respectivement droite et gauche, pour l'observateur qui reçoit la lumière, selon sa position sur la partie haute ($\theta = 0$) ou la partie basse ($\theta = \pi$), de l'axe des z.

Dans les directions $\theta = \frac{\pi}{2}$, la polarisation est linéaire, perpendiculaire à Oz (polarisation σ).

Enfin le diagramme angulaire d'intensité est identique à celui d'une transition σ_+ (Fig. 19.2b).

L'ensemble des résultats de ce paragraphe est résumé sur le tableau 19.2.

TAB. 19.2 – *Amplitudes et phases relatives des composantes sphériques du champ rayonné dans la direction (θ, φ) et intensité $I(\theta)$ rayonné dans la même direction.*

Transition	E_θ	E_φ	$I(\theta)$
π $(m_b - m_a) = 0$	$\sin\theta$	0	$\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$
$\sigma_\pm$ $(m_b - m_a) = \pm 1$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}$	$\frac{3}{8\pi}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}$

On notera que les symboles σ_+ et σ_- sont toujours utilisés pour désigner le sens de rotation du champ autour de l'axe de quantification Oz choisi. (Dans les expériences, ce sera le plus souvent la direction d'un champ magnétique), *tandis que les mots « gauche » et « droite » désignent le sens de rotation autour de la direction de propagation de la lumière.* (Lorsque le champ tournant passe par la position verticale avec sa pointe dirigée vers le haut, l'observateur « voit » cette pointe se déplacer respectivement vers sa gauche ou vers sa droite.)

Remarque 19.4 – Dans le cas général, $\overrightarrow{p}(t)$ est une superposition linéaire des trois composantes standard dont nous venons d'analyser le rayonnement émis. Si elles sont cohérentes (relations de phase bien définies entre elles), il en est de même pour les champs électriques émis dont il faut faire la somme avant d'évaluer l'intensité résultante.

Si en revanche, elles sont incohérentes (cas par exemple de la lumière dite naturelle), l'intensité dans une direction donnée est la somme des intensités des diverses composantes.

Si de plus les amplitudes des diverses composantes du dipôle sont identiques, l'émission est isotrope :

$$I_{\text{total}}(\theta) = I_\pi + I_{\sigma_+} + I_{\sigma_-} = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{3}{8\pi}\left(1+\cos^2\theta\right) = \frac{3}{4\pi}$$

19.6 Base standard

L'analyse des transitions atomiques nous a conduit à utiliser deux vecteurs de base complexes *cf.* (19-46) et (19-49) mieux adaptés que ceux de la base cartésienne pour décrire les dipôles électriques tournant et le rayonnement associé. En complétant par le vecteur unitaire de Oz, on constitue une base pour les vecteurs à trois dimensions appelée « base standard » dont nous allons dans ce paragraphe préciser la définition et donner quelques propriétés.

19.6.1 Définition. Produit scalaire hermitien

On choisit tout d'abord une direction privilégiée que l'on prend comme axe Oz, comme on le fait pour définir les coordonnées sphériques ; on l'appelle axe de « quantification spatiale » en mécanique quantique. Il est a priori arbitraire ; mais s'il existe une interaction qui détruit l'isotropie de l'espace en privilégiant une direction particulière, les calculs seront alors souvent simplifiés en prenant cette direction comme axe de quantification standard Oz (c'est le cas par exemple d'un champ magnétique constant $\overrightarrow{B}_0$ et l'on prendra $\overrightarrow{B}_0 = B_0\,\overrightarrow{e}_z$).

Ce choix fait, on définit la base standard $\{\overrightarrow{e}_+, \overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_-\}$ par les relations suivantes, transposées de (19-1) et (19-4) :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{e}_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e}_x + i\,\overrightarrow{e}_y\right) \\ \overrightarrow{e}_0 &= \overrightarrow{e}_z \\ \overrightarrow{e}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e}_x - i\,\overrightarrow{e}_y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}51)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{e}_q$ (avec $q = +1, 0, -1$) étant complexes, le produit « scalaire » dont on déduit la norme d'un vecteur est en fait un produit hermitien, analogue à celui utilisé en mécanique quantique.

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ complexes, on définit ce produit que l'on note $\langle \overrightarrow{a} \,|\, \overrightarrow{b} \rangle$, par la relation :

$$\langle \overrightarrow{a} \,|\, \overrightarrow{b} \rangle = \overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{b} = a_x^* \, b_x + a_y^* \, b_y + a_z^* \, b_z \tag{19-52}$$

où le point dans l'expression centrale désigne le produit scalaire classique.

Noter que l'échange des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ change le produit en son complexe conjugué. Ce produit est un nombre réel positif si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, ce qui est conforme à ce que l'on exige du carré d'une norme.

De la définition des vecteurs de base $\overrightarrow{e_q}$ découle la propriété :

$$\boxed{\overrightarrow{e_q}^* = (-1)^q \, \overrightarrow{e}_{-q}} \tag{19-53}$$

Tenant compte de la définition ci-dessus du produit scalaire hermitien, on montre que ces vecteurs sont orthonormés :

$$\langle \overrightarrow{e_q} | \overrightarrow{e_{q'}} \rangle = \overrightarrow{e_q}^* \cdot \overrightarrow{e_{q'}} = (-1)^q \overrightarrow{e}_{-q} \cdot \overrightarrow{e_{q'}} = \delta_{qq'} \tag{19-54}$$

où $\delta_{qq'}$ est le symbole de Kroneker (égal à 1 si $q = q'$, nul autrement).

19.6.2 Application aux polarisations standard

L'intérêt de cette base réside dans ses propriétés de transformation par rotation autour de Oz. Pour cela introduisons la dépendance temporelle $\mathrm{e}^{-i\omega t}$; il vient :

$$\mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e_x} + \mathrm{e}^{-i(\omega t - \pi/2)} \, \overrightarrow{e_y} \right]$$

Cette expression montre que la composante selon Oy oscille en quadrature retard, par rapport à la composante selon Ox. Le vecteur $\mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_+$ est donc un vecteur tournant dans le sens positif autour de Oz. On vérifie facilement qu'il en est de même pour son complexe conjugué $-\mathrm{e}^{i\omega t} \, \overrightarrow{e}_-$. Inversement on montre que le vecteur $\mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_-$ tourne dans le sens négatif autour de Oz, ainsi que son complexe conjugué $-\mathrm{e}^{+i\omega t} \, \overrightarrow{e}_+$.

Effectivement si l'on exprime les champs électriques tournants, de polarisations circulaires σ_+ et σ_-, utilisés au §19.3, on obtient pour les trois polarisations standard les expressions suivantes du champ électrique :

σ_+ tournant dans le sens positif autour de Oz :

$$\overrightarrow{E}(r,t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_+ + \text{C.C.}$$

σ_- tournant dans le sens rétrograde autour de Oz :

$$\overrightarrow{E}(r,t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_- + \text{C.C.}$$

π rectiligne parallèle à Oz :

$$\overrightarrow{E}(r,t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, \overrightarrow{e}_0 + \text{C.C.}$$

(19-55)

Ces expressions classiques, privilégiant le terme en $e^{-i\omega t}$, sont commodes parce qu'elles établissent une correspondance entre la polarisation σ_+ et le vecteur $\vec{e}_+$ d'une part, la polarisation σ_- et le vecteur $\vec{e}_-$ d'autre part. Mais elles ne doivent pas faire oublier que dans les termes Complexes Conjugués (C.C), ayant le même sens de rotation, on trouve avec l'exponentielle $e^{+i\omega t}$ le vecteur $-\vec{e}_-$ conjugué de $\vec{e}_+$ d'une part, et le vecteur $-\vec{e}_+$ conjugué de $\vec{e}_-$ d'autre part.

19.6.3 Composantes standard d'un vecteur

Nous avons choisi la base standard (19-51) en transposant les expressions des composantes standard (19-1) et (19-4) ; ceci implique une définition des composantes standard par rapport à la base standard, utilisant un simple produit scalaire classique :

$$\boxed{a_q = \vec{e}_q \cdot \vec{a}} \tag{19-56}$$

En effet, en explicitant le vecteur $\vec{a}$ à l'aide de ses composantes cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$$

et en utilisant (19-51), on vérifie facilement que :

$$\left.\begin{aligned} a_+ &= \vec{e}_+ \cdot \vec{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y) \\ a_0 &= \vec{e}_0 \cdot \vec{a} = a_z \\ a_- &= \vec{e}_- \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y) \end{aligned}\right\} \tag{19-57}$$

On retrouve la même forme que les expressions (19-1) et (19-4) adoptées au §19.1 pour définir les composantes standard des opérateurs vectoriels $\vec{J}$ et $\vec{D}$.

Ce choix complique un peu le développement du vecteur $\vec{a}$ sur la base $\{\vec{e}_q\}$ en associant la composante a_q avec le vecteur $\vec{e}_{-q}$ d'indice opposé :

$$\boxed{\vec{a} = \textstyle\sum_q (-1)^q a_q\,\vec{e}_{-q} = -a_+\,\vec{e}_- + a_0\,\vec{e}_0 - a_-\,\vec{e}_+} \tag{19-58}$$

on le vérifie facilement en faisant le produit scalaire classique de cette expression avec les vecteurs $\vec{e}_q$, en tenant compte des produits scalaires classiques $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_- = -1$ et $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_+ = \vec{e}_- \cdot \vec{e}_- = 0$ qui dérivent de (19-54).

Remarque 19.5 – Si $\vec{a}$ est un vecteur *réel*, et tenant compte de (19-56) et (19-53) :

$$a_q^* = \vec{e}_q^{\,*} \cdot \vec{a} = (-1)^q\,\vec{e}_{-q} \cdot \vec{a} = (-1)^q\,a_{-q} \tag{19-59}$$

De même si $\overrightarrow{A}$ est opérateur vectoriel *hermitique*, ses composantes standard (qui elles ne sont par hermitiques) vérifient :

$$A_q^\dagger = (-1)^q A_{-q}$$

relations que nous avons données pour l'opérateur $\overrightarrow{D}$ (19-6) et utilisées au §19.3.

Le choix ci-dessus des composantes standard d'un vecteur n'est pas toujours adopté. Une autre définition consiste à définir les composantes a'_q par $\overrightarrow{a} = \sum_q a'_q \overrightarrow{e}_q$ (*cf.* Messiah, *Mécanique quantique* ; tome 2, Dunod). Ces deux définitions différentes correspondent à ce que l'on appelle : composantes *covariantes* (utilisées ici) et composantes *contravariantes* (*cf.* Messiah).

19.7 Changements de base pour la polarisation lumineuse

La base standard, étudiée au paragraphe précédent, facilite les calculs d'interaction entre les atomes et la lumière. Mais dans une expérience réelle le faisceau lumineux observé (dans une mesure) ou utilisé (pour agir sur les atomes) sera plus facilement représenté dans la base sphérique réelle $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ que nous avons déjà introduite au §19.5. On sera donc fréquemment conduit à effectuer des changements de base. Nous avons déjà écrit en (19-42) la décomposition des vecteurs de la base cartésienne selon la base sphérique. On en déduit sans difficulté la décomposition des vecteurs de la base standard sur la base sphérique :

$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{e_+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\varphi}(\sin\theta\, \overrightarrow{e_r} + \cos\theta\, \overrightarrow{e_\theta} + i\, \overrightarrow{e_\varphi}) \\
\overrightarrow{e_0} &= \cos\theta\, \overrightarrow{e_r} - \sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta} \\
\overrightarrow{e_-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\varphi}(\sin\theta\, \overrightarrow{e_r} + \cos\theta\, \overrightarrow{e_\theta} - i\, \overrightarrow{e_\varphi})
\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}60)$$

Il est aisé d'inverser ces expressions pour obtenir :

$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{e_r} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \left[e^{-i\varphi}\, \overrightarrow{e_+} - e^{i\varphi}\, \overrightarrow{e_-}\right] + \cos\theta\, \overrightarrow{e_0} \\
\overrightarrow{e_\theta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \left[e^{-i\varphi}\, \overrightarrow{e_+} - e^{i\varphi}\, \overrightarrow{e_-}\right] - \sin\theta\, \overrightarrow{e_0} \\
\overrightarrow{e_\varphi} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\varphi}\, \overrightarrow{e_+} + e^{i\varphi}\, \overrightarrow{e_-}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}61)$$

Ces expressions sont utiles aussi bien pour obtenir :

a) les amplitudes de polarisation E_θ, E_φ d'un faisceau lumineux émis obliquement dans une transition standard. Nous en avons déjà donné une idée avec les diagrammes de rayonnement du §19.5 ;

b) les amplitudes des polarisations standard π, σ_+, σ_- d'une onde incidente plane dont la direction de propagation est oblique par rapport à l'axe Oz. C'est ce dernier aspect que nous développons maintenant.

Pour une onde plane, le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 \, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \, \vec{\varepsilon} + \text{C.C.} \tag{19-62}$$

où $\vec{\varepsilon}$ est un vecteur unitaire précisant la polarisation du champ électrique, c'est-à-dire sa direction de vibration. Quelle en est la décomposition selon les polarisation standard ?

Soient (θ, φ) les angles, en coordonnées sphériques, qui déterminent la direction de propagation, $\vec{k}(k,\theta,\varphi)$, et $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ les vecteurs unitaires correspondant, orthogonaux à $\vec{k}$, avec $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{k}/k)$ base orthonormée directe (*cf.* Fig. 19.1). La transversalité du champ permet d'écrire :

$$\vec{\varepsilon} = \lambda_\theta \, \vec{e}_\theta + \lambda_\varphi \, \vec{e}_\varphi \quad \text{avec} \quad |\lambda_\theta|^2 + |\lambda_\varphi|^2 = 1 \tag{19-63}$$

L'utilisation des expressions (19-60) donne les composantes standard de $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \sum_q (-1)^q \lambda_q \, \vec{e}_{-q} = -\lambda_+ \, \vec{e}_- + \lambda_0 \, \vec{e}_0 - \lambda_- \, \vec{e}_+ \tag{19-64}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\varphi}(\cos\theta\,\lambda_\theta + i\lambda_\varphi) \\ \lambda_0 &= -\sin\theta\,\lambda_\theta \\ \lambda_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\varphi}(\cos\theta\,\lambda_\theta - i\lambda_\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{19-65}$$

d'où la décomposition du champ $\vec{E}$ sur les polarisations standard $\vec{e}_q$:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 \, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \left[\sum_q (-1)^q \lambda_{-q} \, \vec{e}_q\right] + \text{C.C.}$$

Explicitons ces composantes pour des polarisations particulières du faisceau lumineux incident.

Polarisation rectiligne : $\vec{\varepsilon} = \cos\alpha \, \vec{e}_\theta + \sin\alpha \, \vec{e}_\varphi$, $\quad \alpha$: angle $(\vec{\varepsilon}, \vec{e}_\theta)$

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_\pm &= \mp\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm i\varphi}(\cos\theta\cos\alpha \pm i\sin\alpha) \\ \lambda_0 &= -\sin\theta\cos\alpha \end{aligned}\right.$$

Polarisation circulaire gauche : $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{\varepsilon_g} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{e_\theta} + i\,\overrightarrow{e_\varphi})$ (tournant dans le sens direct autour de $\overrightarrow{k}$)

$$\begin{cases} \lambda_\pm = -\dfrac{1}{2}(1 \mp \cos\theta)\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi} \\ \lambda_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$$

dans le cas particulier où le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est parallèle à l'axe Oz :

- si $\theta = 0$ ($\overrightarrow{k}$ de même sens Oz) $\lambda_+ = 0$, $\lambda_0 = 0$, $|\lambda_-| = 1$ polarisation identique à la polarisation standard σ_+, compte tenu de (19-64) ;
- si $\theta = \pi$ ($\overrightarrow{k}$ opposé à Oz) $|\lambda_+| = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_- = 0$ polarisation identique à la polarisation standard σ_-.

Polarisation circulaire droite : $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{\varepsilon_d} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{e_\theta} - i\,\overrightarrow{e_\varphi})$ (tournant dans le sens rétrograde autour de $\overrightarrow{k}$)

$$\begin{cases} \lambda_\pm = -\dfrac{1}{2}(1 \pm \cos\theta)\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi} \\ \lambda_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$$

on retrouve bien sûr les polarisations standard avec des sens inversés : σ_- pour $\theta = 0$ et σ_+ pour $\theta = \pi$.

Notations

a – amplitude d'une fonction d'onde, dépendant du temps $a(t)$
une distance (partie III)
b – amplitude d'une fonction d'onde, dépendant du temps $b(t)$
une distance (partie III)
c – vitesse de la lumière = 299 792 458 m/s
d – différentielle
distance, avec un indice : d_1, d_2, ...
d_{ab} – élément de matrice de l'opérateur dipôle électrique
e – = 2,718 base des fonctions exponentielles et des logarithmes
vecteur unitaire, avec flèche et indice : $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, ...
f – fonction de l'espace et du temps
distance focale d'un miroir ou d'une lentille
fonction de répartition statistique, avec les vitesses atomiques $f(v_x)$...
g – fonction de l'espace et du temps
poids statistique avec un indice : g_a, g_b, g_1, g_2, ...
fonction de répartition statistique $g(\delta\omega)$
h – constante de Planck = $6,626\,068 \times 10^{-34}$ J·s ($\hbar = h/2\pi$)
i – $\sqrt{-1}$ base des nombres complexes
nombre entier servant à numéroter une série
j – nombre quantique de moment angulaire
vecteur densité de courant électrique, avec flèche ou indice $\vec{j}$, j_x
nombre entier servant à numéroter une série
k – vecteur d'onde $k = |\overrightarrow{k}| = 2\pi/\lambda$
constante de Boltzmann, avec l'indice B : $k_B = 1,380\,65 \times 10^{-23}$ J/K
l – longueur, en particulier longueur de cavité
m – variable de Bloch, reliée à la différence des populations
nombre quantique magnétique, avec un indice : m_j, m_I, m_F, ...
masse d'une particule, avec un indice : m_e, m_P, m_A, ...
nombre entier servant à numéroter une série
n – densité atomique (nombre d'atomes par unité de volume)
population d'une espèce particulière, avec un indice : n_a, n_b, n_1, n_2, ...
indice de réfraction avec un index : n_r, n_e, n_o, ...
nombre entier servant à numéroter une série
p – dipôle électrique et ses composantes, avec flèche ou indice : $\overrightarrow{p}$, p_x, p_y, ...
nombre entier servant à numéroter une série

q – charge électrique, en particulier de l'électron $q = 1,602\,176 \times 10^{-19}$ C
nombre entier servant à numéroter une série
$q(z)$ rayon de courbure complexe du faisceau gaussien (partie III)

r – rayon vecteur $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
distance entre deux points
coefficient de fonction exponentielle

s – paramètre de saturation généralisé (partie III)

t – variable de temps

u – variable de Bloch en représentation « tournante »
moyenne quadratique d'une composante de vitesse (chapitre 13)

v – variable de Bloch en représentation « tournante »
vitesse atomique et ses composantes, avec indice : v_x, v_y, v_z, ...

w – densité d'énergie volumique (partie II)
rayon gaussien caractéristique d'un faisceau lumineux (partie III)

x, y, z – coordonnées d'espace dans le repère du laboratoire

A – probabilité par unité de temps de l'émission spontanée
amplitude constante d'une fonction sinusoïdale

B – coefficient d'Einstein de l'émission stimulée
amplitude constante d'une fonction sinusoïdale

C – constante

D – différence pondérée des populations (partie II)
opérateur dipolaire électrique avec un indice : D_x (partie I)
distance (partie III)

E – vecteur champ électrique et ses composantes : $\overrightarrow{E}$, E_x, E_y, E_z
valeur de l'énergie d'un système, avec un indice : E_a, E_b, E_1, E_2

F – fonction de l'espace et du temps
nombre de photons dans une cavité (W/hν) (chapitre 11)
fonction de répartition statistique F(ν) (chapitre 13)

G – fonction de répartition statistique $G(\omega)$

H – opérateur hamiltonien (partie I)
polynome de Hermite avec des indices : H_{mn} (partie III)

I – intensité lumineuse normalisée, sans dimension

J – opérateurs moments angulaires avec indices : J_x, J_y, J_z

K – coefficient d'absorption par unité de longueur à fréquence ν : $K(\nu)$
vecteur d'onde moyen d'un mode de cavité, avec des indices : K_{mn}

L – longueur de Rayleigh d'un faisceau gaussien (partie III)
autre longueur

M – vecteur aimantation par unité de volume, et ses composants
masse atomique : $M = \mathfrak{N} m_A$ ($\mathfrak{N}$ Avogadro)

N – nombre entier (en particulier modes de cavité)
nombre total d'atomes dans un échantillon (sans dimension)
vecteur unitaire de la normale à une surface avec une flèche $\overrightarrow{N}$

O – origine des axes de coordonnées
P – puissance transportée ou échangée
vecteur polarisation électrique par unité de volume et ses composantes
Q – facteur de qualité d'une cavité résonnante sans dimension (chapitre 9)
R – rayon d'une surface sphérique matérielle (miroir, lentille) (partie III)
rayon de courbure d'une onde lumineuse : $R(z)$ (partie III)
coefficient de réflexion de l'énergie sur un miroir, avec indice : R_A, R_B
S – surface, section d'un faisceau lumineux
somme
T – période d'une sinusoïde ; laps de temps, délai
coefficient de transmission d'un miroir, avec indice : T_A, T_B
température thermodynamique
U – variable de Bloch en représentation normale
V – variable de Bloch en représentation normale
vitesse
W – énergie emmagasinée dans un système physique (atome, cavité, etc...)
X – coordonnée d'espace dans le repère tournant (chapitre 4)
Y – coordonnée d'espace dans le repère tournant (chapitre 4)
Z – distance parallèle à l'axe de propagation Oz

Lettres rondes

$\mathcal{A}$ – fonction d'Airy d'une cavité Pérot-Fabry (partie II)
$\mathcal{C}$ – constante
$\mathcal{E}$ – amplitude du champ électrique
$\mathcal{F}$ – fonction « enveloppe », variant lentement dans le temps et dans l'espace (partie III)
$\mathcal{H}$ – opérateur hamiltonien transformé dans un changement de représentation (chapitre 7)
$\mathcal{J}$ – intégrale définie
inversion totale pondérée d'un milieu amplificateur (représentant sa réserve d'énergie exprimée en nombre de photons, chapitre 11)
$\mathcal{L}$ – polynômes de Laguerre avec deux indices : $\mathcal{L}_{p,q}$ (partie III)
$\mathfrak{M}$ – vecteur moment magnétique atomique $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}_x$,$\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$
$\mathfrak{N}$ – nombre d'Avogadro $= 6{,}022\,142 \times 10^{23}$
$\mathcal{P}$ – probabilité par unité de temps d'un processus de pompage (s^{-1})
$\mathcal{P}_{a\to b}(t)$ probabilité sans dimension d'une transition à l'instant t
$\mathcal{V}$ – volume

Grecques
minuscules

α – amplitude d'une fonction d'ondes dépendant du temps $\alpha(t)$ (partie I)
partie réelle de la constante exponentielle γ du champ gaussien (partie III)
coefficient d'amplification par unité de longueur à la fréquence ν : $\alpha(\nu)$
angle entre deux directions

β – amplitude d'une fonction d'ondes dépendant du temps $\beta(t)$ (partie I)
partie imaginaire de la constante exponentielle γ du champ gaussien
angle entre deux directions

γ – gain logarithmique de l'énergie lumineuse sur un tour de cavité (partie II)
constante exponentielle transversale du champ gaussien $\gamma = \alpha + i\beta$
rapport gyromagnétique d'un atome (chapitre 4)

δ – écart d'une variable quelconque par rapport à une valeur de référence

ε – ε_0 constante fondamentale des unités électriques
ε_r constante diélectrique caractéristique d'un milieu isolant
quantité petite dans un développement limité
vecteur unitaire de polarisation $\overrightarrow{\varepsilon}$ (chapitre 19)

ζ – variable d'espace réduite selon l'axe Oz

η – coefficient de remplissage d'une cavité (partie II)
variable d'espace réduite selon l'axe Oy

θ – angle azimutal en coordonnées polaires
aire d'impulsion (angle de rotation du vecteur de Bloch)

ι /

$\varkappa$ – partie imaginaire de l'indice de réfraction (indice d'extinction)

λ – longueur d'onde

μ – μ_0 constante fondamentale des unités magnétiques

ν – fréquence

ξ – variable d'espace réduite selon l'axe Ox

o /

π – $= 3{,}1416$

ρ – rayon cylindrique $= \sqrt{x^2 + y^2}$
densité de charge électrique (partie III)
rendement énergétique (partie II)
densité d'énergie différentielle en fréquences sur la polarisation q, $\rho_q(\nu)$ (chapitre 19)

σ – section efficace d'une interaction

τ – durée courte d'une impulsion
constante de temps d'une interaction ; temps de relaxation : τ_1, τ_2

υ /

φ – fonction d'onde ou état atomique entre symboles ket $|>$ ou bra $<|$
angle équatorial en coordonnées polaires
angle de phase d'une sinusoïde
forme de raie normalisée $\varphi(\nu)$

χ – susceptibilités électrique (réelle χ' et imaginaire χ'')

ψ – fonction d'onde ou état atomique entre symboles ket $|>$ ou bra $<|$
angle de phase d'une sinusoïde

ω – vitesse de rotation
pulsation ou « fréquence circulaire » d'une oscillation $\omega = 2\pi\nu$

Grecques
majuscules

Δ – opérateur Laplacien
intervalle mesuré sur une variable (largeur de raie)
Λ – longueur d'onde acoustique
Σ – sommation d'une série
Φ – flux de photons par unité de temps à travers une section S (chapitre 8)
forme de raie obtenue par produit de convolution : $\Phi(\nu)$ (chapitre 13)
Ω – angle solide (chapitre 18)
fréquence de Rabi à résonance avec indice Ω_1
fréquence de Rabi généralisée hors résonance (sans indice)
$\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \delta\omega^2}$

Index

A

absorption
et dispersion, 33–34, 466–470.
coefficient de $K(\nu)$, 35–36, 156–158.
négative, 159.
probabilité de, 147, 496.
saturation, 43–45.
section efficace σ_{12}, 32, 151.
courbe de, 38, 40.
accordable (laser), 259–265.
acoustique (onde) en diffusion, 460–462.
acousto-optique (modulateur), 230–231, 462.
aimantation volumique (vecteur $\overrightarrow{M}$), 59–61.
aire d'impulsion, 88, 92, 429–433.
Airy (fonction de), 174–175, 276.
amortissement
des franges de Ramsey, 105–106.
des oscillations de Rabi, 68, 72, 75.
des oscillations de relaxation d'un laser, 210–211.
amplification
condition d'(inversion), 159.
coefficient $\alpha(\nu)d'$, 166, 437.
d'un faisceau gaussien, 470.
gain logarithmique, 181.
d'un faisceau Laser, 270–272, 415.
Autler-Townes (doublet), 131–135.
auto-transparence (d'une impulsion résonnante), 434–441.

B

Basov et Prokhorov, 161.
Bloch
équations différentielles de, 17, 21, 24–25, 61.
équations algébriques de, 29.
solution stationnaire de, 27–28, 38, 62.
solutions transitoires, 65–113, 429.
et Siegert (déplacement), 139–140.
variables de, 18–20.
vecteur de, 54–56.
Bloembergen, 161.
Boltzmann (loi de), 158, 161.
Bohr (magnéton), 50.
Brillouin (diffusion), 461–462.

C

cavité
résonnante (Fabry-Pérot), 170–175.
pertes de, 173.
coefficient de qualité de, 173.
constante de temps de, 173.
modes de, 175, 276, 375–383, 387–400.
active, 397–399.
passive, 395–396.
stable ou instable, 378–382.
en anneau, 179, 314–316.
centres colorés, 265–266.
chaînes
d'amplificateurs optiques, 270–272.
de fréquences optiques, 326.
champ électromagnétique
interaction avec l'atome, 3–4.
intense, 115–140.
amplification, 415.
tournant (électrique), 504–511.
tournant (magnétique), 56–58.
rayonné : voir rayonnement.
chirped pulses, 232.
classes
d'atomes ou de fréquences, 288–290.
de vitesses, 291–293.
Clebsch-Gordan (coefficients de), 490, 499.

cohérence
de dipôles oscillants, 452–456, 477–484.
d'impulsion (Ramsey), 98–99.
des oscillations de Rabi, 14.
des ondes diffusées, 447–448, 452–456.
spatiale d'une onde, 331–332.
temporelle d'une onde, 329–330, 333.
collisions
cinétiques, 283, 292.
déphasantes, 283–287.
relaxantes (constante de temps), 23–24.
résonnantes, 242–243, 248–249.
élargissement par, 285–287.
section efficace de, 283–284, 292.
compétition
d'émission spontanée et stimulée, 201–204.
de modes (laser), 303–307.
convolution (produit de), 289–290, 294.
croisées (variables de Bloch ou de la matrice densité), 18, 33.
corrélation (fonction de), 333–335.

D

décharge (lasers à), 237–250.
densité
atomique, 19.
de charge électrique et de courant, 408.
d'énergie, 30.
différentielle en fréquence, 500–502.
matrice, 17.
déplacement de niveaux, ou de fréquence
light-shift, 119–130.
Autler-Townes, 131–135.
mode pulling, 275–281, 419–421.
Dicke
rétrécissement par mouvement, 42.
super-radiance, 472.
diffusion
cohérente, 447–448, 452–454, 455–470.
incohérente, 451–454.
libre cohérente (échos), 477–484.
oblique, 455–462.
vers l'avant, 463–470.
par les gaz, 457–460.
par les milieux condensés, 456–457.
par les ondes sonores, 460–462.
d'un faisceau gaussien, 466–470.
diodes (laser), 266–269.
dipolaire électrique
hamiltonien d'interaction, 4–6.
vecteur moment, 4.
opérateur vectoriel $\overrightarrow{D}$, 4, 18–19, 32–33.
éléments de matrice, 491–493.
rayonnement, 443–446.
dispersion
et absorption, 33–34, 466–470.
courbes de, 38, 279, 420.
inversion par pompage, 39, 278–279.
dans une cavité, 277–281.
susceptibilité, 34, 47, 277–280.
indice de réfraction, 34–35, 277.
Doppler-Fizeau (effet), 41, 291–294.
doublet (Autler-Townes), 131–135.

E

échos de photons, 477–484.
Eïnstein (coefficients de), 30–32, 47, 147–149, 496–498.
élargissement de raies
par collisions, 282–287.
Doppler, 41, 291–294.
par durée d'interaction courte, 93–96.
homogène, 282–287.
inhomogène, 41, 288–294, 430–431, 478.
de puissance (saturation), 36–37, 45.
rétrécissement par le mouvement, 42–43.
émission
spontanée, 22–23, 32, 74–75, 147, 496.
induite ou stimulée, 147, 496.
spontanée amplifiée, 475–476.
enveloppe (lentement variable), 384–386, 411–415.
ergodique (hypothèse), 42.
excimères, exciplexes, 251–253.

F

Fabry-Pérot (voir cavité)
fluorescence, 164, 259–264.
force d'oscillateur, 46–47.

franges de Ramsey, 98–112.
fréquence
de résonance atomique, 5, 30, 156.
de résonance de cavité, 169–171, 277–281.
d'oscillation laser, 276–281.
accordable, 259–265.
sélection de, 309–320.
standard de, 106–112, 322–324.
stabilisation de, 106–112, 322–324.
synchronisation de, 320–321.
optique (mesure directe), 325–327.
(voir largeur en fréquence)

G

gain
coefficient de $\alpha(\nu)$, 166, 180.
logarithmique sur un tour de cavité γ, 181.
saturé (ou, au seuil), 181, 192–193.
non saturé, 192–193.
Gauss
courbe de, 293–294.
fonctions ou modes de Hermite, 387–398.
fonctions ou modes de Laguerre, 399–40.
gaussienne (onde)
fondamentale (théorie), 351–362.
transverse (théorie), 387–394.
en cavité, 375–383.
directivité, 362–363.
rayon du profil d'amplitude, 345–347, 357.
rayon de courbure, 343–344, 357–359.
transformation par des lentilles, 368–371.
gyromagnétique (rapport), 50.

H

hamiltonien (opérateur)
dipolaire électrique, 3–6.
dipolaire magnétique, 51.
en polarisation rectiligne, π, 3–6, 491–492.
en polarisation circulaire $\sigma\pm$, 492–494.
en représentation tournante, 116–118.
Hahn
échos, 482.
autotransparence, 431–437.
Heisenberg (indétermination)
dans la cohérence, 330–331.
dans l'onde gaussienne (directivité), 362–363.
Hermite-Gauss (fonctions ou modes de), 387–398.
hole-burning, 295–297, 302.

I

impulsions agissant sur un atome
résonnantes, 88–92.
non résonnantes, 93–95.
intenses $(\pi/2, \pi, 2\pi)$, 88–90.
cohérentes (Ramsey), 98–112.
échos, 477–484.
autotransparence, 434–437.
solitons résonnants, 437–441.
aires d', 88–92, 429–433.
impulsions émises (lasers)
déclenchées, 215–220.
relaxées, 205–211.
géantes, 220–224.
à modes bloqués, 225
dilatation et compression de, 232–235.
avec glissement de fréquence (chirped), 232.
indice de réfraction, 34–35, 277–278.
induction
détection de la RMN, 63.
libre cohérente (voir diffusion).
injection (synchronisation par), 272, 320–321.
inversion (condition de), 156–159.

J

jet atomique ou moléculaire
expérience de Rabi, 12–14.
expérience de Ramsey, 98–112.
sélection sur (maser), 159–160.
standards de fréquence, 106–112.
jitter en fréquence, 281, 322, 335.

K

Kastler (pompage optique), 82, 162–163.
Kirchhoff
  formule de, 351.
  méthode de calcul de, 347–351.
  application à l'onde gaussienne, 351–354.
Kusch (spectromètre de), 13.

L

Laguerre-Gauss (fonctions ou modes de), 399–400.
Lamb
  dip, 298–302.
  modèle de, 422–428.
Landé (facteur de), 50.
largeur en fréquence
  de cavité, 171–175, 276, 280–281.
  forme naturelle $\varphi(\nu)$, 30.
  des courbes stationnaires de bloch, 37.
  en impulsion, 93–95.
  des courbes de Ramsey, 102.
  spectrale d'une onde, 335–336.
  et cohérence temporelle, 330, 333–335.
laser (fonctionnement) (voir aussi pompage)
  amplificateur, 166, 270–272, 411–415.
  oscillateur, 169, 176–179, 185–189, 422–428.
  en régime continu, 191–203, 279–281, 414.
  en régime impulsionnel, 205–231.
  à gaz, 237–250, 303–307.
  à excimères ou exciplexes, 251–253.
  à semi-conducteurs, 266–269.
  à milieux condensés, 259–265.
  guide d'onde, 250.
  à colorants, 261–265.
  accordables, 259–265, 310.
  à électrons libres, 272.
light-shift, 119–130.
Lyot (filtre de), 312–314.

M

maser
  à ammoniac, 160, 169.
  à trois niveaux, 161.
McCall et Hahn, 431–437.
matrice (éléments de)
  du dipôle électrique, 6, 491–493.
  du dipôle magnétique, 50–53.
matrice-densité (variables de la), 18–21.
Maxwell
  équations de, 408.
  équations couplées de Bloch, 405–407.
  répartition des vitesses d'un gaz, 291–294.
métrologie
  des hyperfréquences, 106–112.
  des fréquences optiques, 325–326.
mode
  de cavité résonnante, 175.
  intervalles entre modes, 175, 193.
  compétition de, 303–307, 426–428.
  pulling, 275–281, 419–421.
  pushing, 424.
  gaussien en espace libre, 351–362.
  gaussien en cavité, 375–383, 387–400.
  transverse, 390–400.
  guidé, 401–404.
  de Hermite-Gauss, 375–394.
  de Laguerre-Gauss, 399–400.
moment
  angulaire d'une lumière polarisée circulairement, 494.
  angulaire (opérateur), 50–52, 488–490.
  dipolaire électrique (voir dipolaire).
  dipolaire magnétique, 50, 53.

O

opérateur
  dipolaire électrique, 4–6, 18–19, 32, 97, 488–489, 494–495.
  moment angulaire ou cinétique, 50–52, 488–489.
  vectoriel (représentation standard), 488.
  Hamiltonien (voir Hamiltonien).
onde
  équation dans le vide, 348, 384.
  équation dans un milieu, 35, 409–410.
  gaussienne en espace libre, 344–347, 351–363.
  gaussienne à travers une lentille, 366–371.
  gaussienne en cavité, 375.
  paraxiale, 341–344, 351–355, 384–386.

progressive, 411–415.
stationnaire, 171–174, 415–418.
(voir absorption, amplification, émission, polarisation, propagation, rayonnement)
oscillateur (force de), 46–47.
oscillation
du dipôle, 33.
d'un laser (condition de seuil), 176.
relaxée d'un laser, 205–211.
en impulsion d'un laser, 205–231.
de Rabi, 10–14, 65–77.

P

paraxial(e)
approximation, 341–344.
onde ou faisceau, 328–330, 351–354.
propagation, 351–355, 384–386.
Pérot et Fabry (voir cavité)
Pockels (cellule de), 218–219.
polarisation atomique (vecteur $\overrightarrow{P}$)
(voir susceptibilité)
oscillante à résonance, 33.
évolution dans le noir, 97.
dans les équations de propagation, 35, 408–410.
source de rayonnement, 443–484.
créée par une irradiation polarisée circulairement, 494–495.
polarisation lumineuse
circulaire gauche ou droite, 507, 513.
circulaire agissant sur un atome, 492–495.
standard (π, σ^+ et σ^-, 491–494, 509.
du rayonnement, 444, 503–507.
dans les changements de base, 511–513.
pompage
principe (inversion), 159.
probabilité de, 182, 186.
par décharge, 165, 237–250.
par collisions résonnantes, 242–243, 248–249.
par photodissociation, 256–258.
chimique, 256, 258–259.
optique, 162–163, 255–257, 259–265.
à quatre niveaux, 164–165, 186–189, 255–257, 260–265.
à trois niveaux (maser), 161.
par tri sur jet atomique (maser), 159.
pondérée (différence des populations), 152.
population atomique (ou moléculaire), 19–20, 29–30.
Poynting (vecteur de), 373.
probabilité par unité de temps
d'émission spontanée, 23, 147.
de transition, 29, 77, 147.
équations des, 145, 149.
calculs des, 29–32, 149–150, 495–496.
utilisation des, chapitres 8 à 11, 498–502.
de collisions, 23–24, 284.
profil d'intensité (d'une onde), 346, 355.
Prokhorov et Basov, 161.
propagation
libre (équations de), 341, 348.
dans une milieu (équation de), 410.
paraxiale, 341–344, 351–355, 384–386.
soliton, 437–441.
pulling (mode), 275–281, 419–421.

Q

Q-switch, 215.
qualité (coefficient de), 171–175, 280.
quantique
saut, 74–75.
cohérence, 14.
nombre de moment angulaire j, 51.
nombre magnétique m_j, 51.

R

Rabi
oscillation de (individuelle), 10–11, 74–76.
oscillation de (collective), 65–77, 80–85, 135–137.
fréquence de, 11–12, 67.
méthode expérimentale de, 12–14.
Ramsey (méthode de), 98–112.
rate équations, 77, 145, 149.
Rayleigh
diffusion, 458–460.
longueur de, 357, 362.
rayon
de courbure d'une onde, 343, 357–359.
gaussien du profil transversal, 345, 357.
gaussien complexe, 361.

rayonnement
du dipôle, 443–446.
cohérent, 447–448, 452–453.
incohérent, 451–453.
vers l'avant, 463–470.
diagramme de, 445, 503–507.
polarisation du, 444, 503–507.
réfraction (voir dispersion)
relaxation
longitudinale et transversale, 59–61.
constante de temps de, 61.
amortissement par, 65–73, 80–82.
oscillation de, 205–211.
remplissage (coefficient de), 178–180.
représentation
standard, 488.
tournante, 8–9, 21–22, 49, 116.
résonance
de cavité, 169–171, 175, 275–281.
atomique ou spectrale, 12, 29, 36–40, 62, 65–68, 82–83, 275–276.
magnétique, 49–64, 80, 138.
de saturations (spectroscopie), 298–302.

S

saturation
des solutions stationnaires de Bloch, 43–44.
d'une transition (modèle des probabilités), 153–156, 186.
résonance de, 298–302.
paramètre de, 45, 155, 425, 452.
intensité de, 45, 155, 423.
dans un laser, 422–428.
saut quantique, 74–75.
Schawlow (et Townes), 170–171.
Schrödinger (équation de), 7, 20, 51–52, 116.
section efficace
d'absorption, 32, 151.
d'émission induite, 151.
de collision, 283–284, 292.
séculaire (approximation), 8–9, 56–58.
sélection (règle de), 489, 491.
seuil (laser)
condition de, 176.
différence des populations au, 178, 191.
fonctionnement au, 192.
Siegert (Bloch et), 139–140.
soliton
résonnant, 437–440.
dispersif, 441.
sonore (onde) en diffusion, 460–462.
Stark dynamique (effet), 119.
super-radiance, 470–475.
susceptibilité électrique $\chi = \chi' + i\chi''$
définition (polarisation volumique), 34.
calcul de Bloch, 34.
saturation de la, 43–44.
dans le calcul du mode pulling, 277–280.
de l'oscillateur classique, 47.
synchronisation d'oscillateurs lasers, 272, 320–321.

T

tournant(e)
représentation, 8–9, 21–22, 49, 116.
champ magnétique (en R.M.N.), 56–58.
référentiel (en R.M.N.), 54–57.
champ électrique (polarisation circulaire), 504–511.
Townes
principe du maser, 159–160, 169.
cavité optique dans un laser, 170–171.
doublet Autler-Townes, 131–135.
transparence
induite par irradiation intense, 158.
auto-induite (soliton), 434–441.
transverse (mode), 390–400.
triplet de fluorescence, 137–138.

W

waist (du faisceau gaussien), 362, 356–358.
Wigner-Eckart (théorème de), 491–492.

Z

Zeeman (sous-niveaux), 33, 51, 81–83, 123–126, 501.

Savoirs Actuels

Collection dirigée par Michèle Leduc

Physique

- *Analyse continue par ondelettes*, B. Torrésani
- *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, M. Le Bellac
- *Magnétisme et supraconductivité*, L.P. Lévy
- *Photons et atomes – Introduction à l'électrodynamique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Physique des plasmas* (tome 1 et tome 2), A. Bers, J.-L. Delcroix
- *Processus d'interaction entre photons et atomes*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Théorie des formes de croissance – Digitations, dendrites et flammes*, P. Pelcé
- *Théorie statistique des champs* (tome 1 et tome 2), J.-M. Drouffe, C. Itzykson

Chimie

- *Aspects de la chimie des composés macrocycliques*, B. Dietrich, J.-M. Lehn, P. Viout
- *Chimie moléculaire et supramoléculaire des sucres – Introduction chimique aux glycosciences*, S. David
- *De la solution à l'oxyde – Condensation des cations en solution aqueuse. Chimie de surface des oxydes*, J.-P. Jolivet avec le concours de M. Henry et J. Livage
- *Éléments de chimie quantique à l'usage des chimistes*, J.-L. Rivail
- *Liaisons intermoléculaires – Les forces en jeu dans la matière condensée*, A. Gerschel
- *Orbitales frontières*, Nguyên Trong Anh
- *Synthèse et catalyse asymétriques – Auxiliaires et ligands chiraux*, J. Seyden-Penne

Astrophysique

- *Gravitation relativiste*, R. Hakim
- *Le milieu interstellaire*, J. Lequeux avec le concours de Ch. Ryter et E. Falgarone (à paraître)
- *Méthodes physiques de l'observation*, P. Léna avec le concours de F. Lebrun et F. Mignard

Mathématiques

- *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, C. Sabbah (à paraître)
- *Géométrie algébrique – Une introduction*, D. Perrin
- *Groupes quantiques – Introduction au point de vue formel*, A. Guichardet
- *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, S. Alinhac, P. Gérard
- *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Ch. Laurent-Thiébaut

Composition : e-press, Angle 197 bd Zerktouni et rue d'Avignon
Casablanca, Maroc
Imprimé en France – Jouve, 18, rue Saint-Denis, 75001 Paris
Dépot légal : Janvier 2002

LASERS – Interaction lumière-atome
Erratum

Suite à une erreur, la figure 11.6 a été mal imprimée. Nous la reproduisons ci-dessous dans son intégralité.

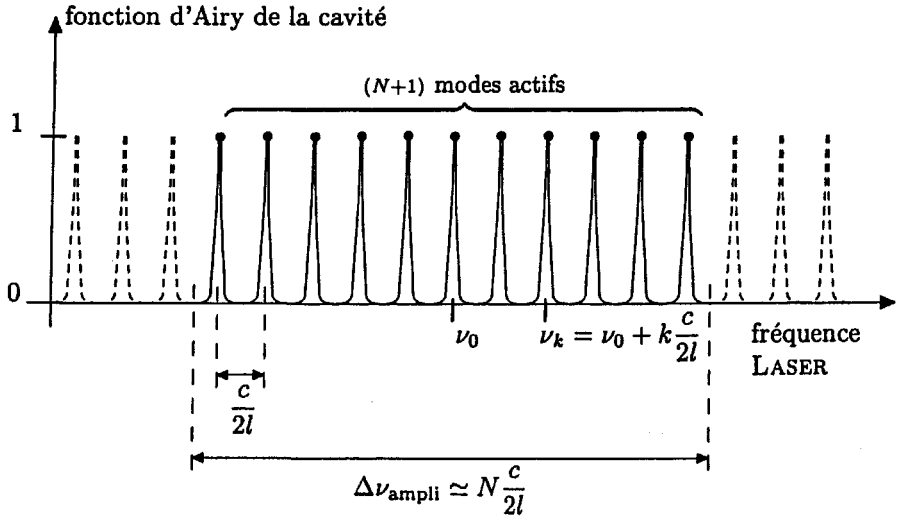


Figure 1: *Fonction d'Airy de la cavité laser. Seuls sont actifs les modes qui tombent dans la bande du milieu amplificateur. Les* $(N+1)$ *gros points représentent l'analyse de Fourier en fréquence de l'onde laser :* $(N+1)$ *fréquences de même amplitude a.*