



SCIENCES SUP

Aide-mémoire

IUT • Licence • Master • Écoles d'ingénieurs

AIDE-MÉMOIRE TRAITEMENT DU SIGNAL

Francis Cottet

DUNOD

TRAITEMENT DU SIGNAL

Consultez nos catalogues sur le Web



www.dunod.com

TRAITEMENT DU SIGNAL

Aide-mémoire

Francis Cottet

Professeur à l'ENSMA de Poitiers

DUNOD

Illustration de couverture : *Lionel Auvergne*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



Nouvelle présentation, 2005

© Dunod, Paris, 2000

ISBN 2 10 049690 5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Seuls les esprits cultivés sont libres
Épictète, 1^{er} siècle

À mes parents,
À Françoise, Joseph et Méaza

Table des matières

AVANT-PROPOS	XI
NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS	XIII
PARTIE 1 : LE TRAITEMENT DES SIGNAUX ANALOGIQUES	
CHAPITRE 1 • DÉFINITIONS ET REPRÉSENTATION DES SIGNAUX	3
1.1 Définitions	3
1.2 Représentation des signaux	7
CHAPITRE 2 • TRANSFORMATIONS DE FOURIER	13
2.1 Analyse spectrale des fonctions périodiques	13
2.2 Analyse spectrale des fonctions non périodiques	24

CHAPITRE 3 • SYSTÈMES DE TRANSMISSION. FILTRAGE	31
3.1 Systèmes de transmission	31
3.2 Filtrage	36
3.3 Corrélation	50
CHAPITRE 4 • MODULATION DES SIGNAUX	57
4.1 Introduction	57
4.2 Modulation d'amplitude	60
4.3 Modulation exponentielle	69
CHAPITRE 5 • SIGNAUX ALÉATOIRES. BRUIT	91
5.1 Signaux aléatoires	91
5.2 Le bruit	100

PARTIE 2 : LE TRAITEMENT DES SIGNAUX NUMÉRIQUES

CHAPITRE 6 • NUMÉRISATION DES SIGNAUX	111
6.1 Échantillonnage	111
6.2 Quantification du signal échantillonné	131
6.3 Restitution du signal	135
CHAPITRE 7 • ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX DISCRETS	149
7.1 Les différentes représentations fréquentielles	149
7.2 Transformée de Fourier discrète	151
7.3 Transformée de Fourier rapide	156
7.4 Convolution et corrélation numériques	163
7.5 Les fenêtres de pondération	167

CHAPITRE 8 • FILTRAGE NUMÉRIQUE	179
8.1 Introduction	179
8.2 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie	187
8.3 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie	202
8.4 Réalisation des filtres numériques	205
8.5 Techniques avancées de filtrage numérique	210
ANNEXES	213
A.1 Impulsion de Dirac	213
A.2 Fonctions mathématiques utilisées en traitement du signal	216
A.3 Transformée de Laplace	224
BIBLIOGRAPHIE	227
LEXIQUE ANGLAIS-FRANÇAIS	229
INDEX	231

Avant-propos

Le contenu et l'organisation de ce livre ont été développés à partir de l'idée directrice selon laquelle, dans une application de mesures, de tests ou de contrôle d'un procédé physique, le concepteur se trouve confronté à des choix de traitements des signaux à mettre en œuvre afin de répondre à ces besoins. L'efficacité, l'effet produit, la nécessité, la validité du résultat sont autant de questions auxquelles il est difficile de répondre sans une connaissance et une pratique minimum de la discipline que constitue le **traitement du signal**.

Ce livre est composé de deux grandes parties : le traitement des signaux analogiques (**partie 1**) et le traitement des signaux numériques (**partie 2**). Les cinq premiers chapitres sont consacrés aux bases du traitement des signaux analogiques et les trois suivants traitent des signaux numériques.

Le chapitre 1 présente les définitions nécessaires à la compréhension de l'ouvrage. Il permet de plus de préciser les différentes représentations des signaux et de fixer les notations utilisées par la suite. Le chapitre 2 est

consacré aux transformations de Fourier des signaux analogiques périodiques et non périodiques qui constituent la base du traitement des signaux. Cette analyse spectrale des signaux analogiques permet de bien décrire la représentation duale de tous signaux : temps et fréquence. Le chapitre 3 présente la théorie générale des systèmes de transmission et traite du filtrage analogique. Cette présentation permet ainsi une extension à tous les types de filtres et de sollicitations de ces filtres. Le chapitre 4 étudie un des aspects importants du traitement des signaux : la modulation. Les méthodes les plus utilisées y sont présentées. Le chapitre 5 aborde le traitement des signaux aléatoires en particulierisant l'étude au signal de « bruit ».

La transformation des signaux analogiques en signaux numériques est étudiée en détail au chapitre 6. Ce chapitre, qui présente en particulier le théorème d'échantillonnage, est sans doute le plus important de cet ouvrage. Le chapitre 7 est consacré à l'analyse spectrale des signaux numériques. Le chapitre 8 présente les concepts de base du domaine très riche que constitue le filtrage numérique avec des applications simples de diverses méthodes.

L'aspect « théorie du signal » a volontairement été limité au strict nécessaire pour la compréhension des modèles utilisés. Les bases mathématiques indispensables et utiles sont rappelées avec un maximum de simplicité et de concision en annexe.

Ce livre n'a pas pour but d'être un ouvrage exhaustif. Dans cet ouvrage, nous nous contenterons d'une approche pragmatique. En effet, il existe de nombreux ouvrages qui décrivent de façon complète toutes les méthodes et techniques utilisées dans le domaine du traitement du signal, sujet très vaste et en constante évolution. Par contre, il est destiné aux étudiants qui désirent acquérir une formation de base dans les techniques du traitement du signal. De plus cet ouvrage offre un outil de base à tous les techniciens et ingénieurs qui travaillent dans le domaine du test, de la mesure ou du contrôle de procédés. Ainsi cet ouvrage permettra à son lecteur de s'initier rapidement aux bases du traitement des signaux afin de les mettre en œuvre de façon pertinente.

Notations et abréviations

$x * y$	Produit de convolution
$\text{Arctg}(x)$	Fonction arctangente
$b(t)$	Signal «bruit»
$\cos(x)$	Fonction cosinusoidale
CAN	Convertisseur analogique-numérique
CNA	Convertisseur numérique-analogique
$\text{Cov}_{xy}(\tau)$	Fonction de covariance
$C_{xx}(t)$	Fonction d'autocorrélation
$C_{xy}(t)$	Fonction d'intercorrélation
e^x	Fonction exponentielle
$E_{sp}[x^n]$	Espérance de x^n ou moment d'ordre n de la variable x
f	Fréquence

F	Transformée de Fourier
FFT	Transformée de Fourier rapide
$g_{\text{fen}}(t)$	Fonction de la fenêtre de pondération
$h(t)$	Réponse impulsionnelle ou percussive d'un filtre
$H(f)$, $H(p)$ ou $H(z)$	Fonction de transfert d'un filtre
$J_n(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
L	Transformée de Laplace
$\log(x)$	Fonction logarithme à base 10
$\text{Ln}(x)$	Fonction logarithme népérien
m	Moyenne temporelle
OMA	Onde modulée en amplitude
OMF	Onde modulée en fréquence
p	Fréquence complexe (opérateur de Laplace)
$\text{Pgn}_{T0}(x)$	« Peigne » de Dirac (suite de pic de Dirac)
q	Quantum de conversion
r_{xy}	Coefficient de corrélation
$s(t)$	Signal temporel
$\bar{s}(t)$	Complexe conjugué de la variable $s(t)$
$\overline{s(t)}$	Moyenne temporelle du signal $s(t)$
$s_e(t)$	Signal temporel échantillonné
$s_{e,\Pi}(t)$	Signal temporel échantillonné tronqué ou limité temporellement
$S(f)$	Transformée de Fourier du signal $s(t)$
$S_e(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné $s_e(t)$
$S_{e,\Pi}(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué $s_{e,\Pi}(t)$

$\sin(x)$	Fonction sinusoïdale
$\text{sinc}(x)$	Fonction sinus cardinal $[\sin(\pi x)/(\pi x)]$
$s_{\text{ind}}(t)$	Réponse indicielle (réponse au signal $u(t)$)
$S_{xx}(f)$	Densité spectrale ou spectre en puissance
$S_{xy}(f)$	Densité spectrale d'interaction
t	Temps
T_z	Transformée en z
TFD	Transformée de Fourier discrète
$T_e (= 1/F_e)$	Période d'échantillonnage d'un signal
$T_0 (= 1/F_0)$	Période d'un signal
$u(t)$	Échelon unité ou fonction de Heaviside
V_e	Tension d'entrée
V_s	Tension de sortie
w_N^{mk}	Fonction $e^{-j2\pi km/N}$
$\delta(x)$	Pic de Dirac
$\Gamma_{xy}(\tau)$	Fonction de corrélation statistique
$\Lambda_\tau(t)$	Fonction triangle de base égale à τ
ω, Ω	Pulsation $(= 2\pi f)$
$\Pi_\tau(x)$	Fonction «porte» de largeur τ
σ_x	Écart type de la variable x

PARTIE 1

Le traitement des signaux analogiques

Chapitre 1

Définitions et représentation des signaux

1.1 DÉFINITIONS

1.1.1 Définitions de base

Un **signal** est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux, considérés dans ce livre, sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $s(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Mais le traitement du signal s'applique à tous les signaux physiques (onde acoustique, signal optique, signal magnétique, signal radioélectrique, etc.). Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du traitement du signal aux signaux bidimensionnels (images).

Le **bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différenciation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.

La **théorie du signal** a pour objectif fondamental la « description mathématique » des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

Le **traitement du signal** est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux. Son champ d'application se situe donc dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux.

Le **traitement de l'information** fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur de message est bruité. Cela inclut les méthodes de « codage de l'information » dans le but de la réduction de redondance, de la correction des erreurs, de la confidentialité (cryptage). L'ensemble des concepts et méthodes développés dans le traitement de l'information et du signal forme la **théorie de la communication**.

1.1.2 Principales fonctions du traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes :

- Élaboration des signaux :
 - synthèse : création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison de signaux élémentaires ;
 - modulation, changement de fréquence : moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission ;
 - codage : traduction en code binaire (quantification), etc.
- Interprétation des signaux :
 - filtrage : élimination de certaines composantes indésirables ;
 - détection : extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation) ;
 - identification : classement d'un signal dans des catégories préalablement définies ;
 - analyse : isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme complexe (transformée de Fourier) ;
 - mesure : estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.).

1.1.3 Les systèmes numériques

Les qualités actuelles du traitement numérique de l'information conduisent à son développement pour résoudre les problèmes de contrôle/commande de procédés industriels. Le système de traitement numérique, schématisé sur la figure 1.1, va réaliser la saisie de l'information, traiter ces informations suivant un programme de contrôle (régulation, filtrage numérique, etc.) et d'après des valeurs de consignes entrées par l'utilisateur, envoyer des signaux de commande au processus industriel pour atteindre le comportement recherché. Le système numérique présente, en effet, un grand nombre d'avantages par rapport à un contrôle de processus par un système analogique :

- reproductibilité des systèmes (circuits logiques) ;
- stabilité : pas de dérive en temps ou en température ;
- adaptabilité et souplesse d'emploi (modification du programme) ;
- fiabilité : circuits à très grande intégration ;
- rapidité : jusqu'à 10 ms environ en temps réel.

Les grandeurs physiques (mouvement mécanique, variation de température, etc.) liées aux procédés physiques contrôlés mis en jeu doivent être transformées en signaux analogiques électriques (courant ou tension) : cela est le rôle des **capteurs** ou transducteurs (quartz, thermocouple,...) dans le cas de la mesure. Inversement, la commande au niveau du processus est faite à l'aide d'**actionneurs** ou récepteurs (moteur, vanne,...) qui transforment le signal analogique électrique reçu en grandeurs physiques (énergie mécanique, chaleur, etc.).

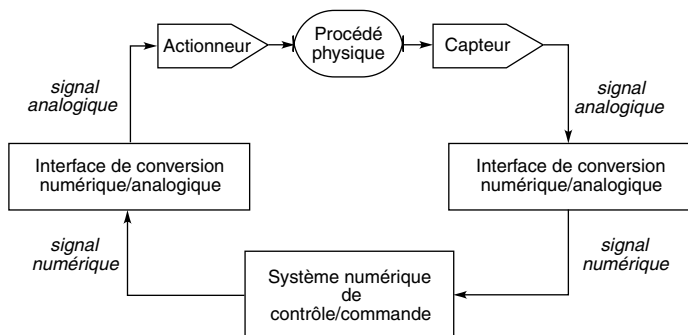


Figure 1.1 Chaîne d'acquisition et de restitution de données d'un procédé physique piloté par un système numérique.

Dans le cas des traitements par des systèmes numériques, ces signaux analogiques transmis ou reçus seront transformés en signaux numériques. Ce rôle est rempli par des interfaces électroniques spécialisées qui sont composées de différents éléments : les convertisseurs analogiques-numériques et numériques-analogiques, les échantillonneurs-bloqueurs, les

multiplexeurs, les amplificateurs à gain programmable, etc. Les fonctions du traitement numérique sont très nombreuses : filtrage, analyse spectrale, modulation, détection, estimation, transcodage, génération de signaux, reconnaissance, correction, etc.

1.2 REPRÉSENTATION DES SIGNAUX

1.2.1 Modélisation des signaux

Un signal expérimental est une grandeur physique et doit donc être physiquement réalisable. Les mesures macroscopiques analogiques, réalisées à partir d'appareils de mesures comme un oscilloscope, fournissent des courbes « tension en fonction du temps » du type de celle représentée sur la figure 1.2. Ces signaux physiques sont représentés par des fonctions $s(t)$ à valeurs réelles d'une variable réelle t . Par conséquent, le signal possède les caractéristiques suivantes :

- énergie bornée ;
- amplitude bornée ;
- continu temporellement ;
- causal ($s(t) = 0$ pour $t < 0$) ;
- spectre du signal borné (tend vers 0 lorsque f tend vers ∞).

Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont représentés par des fonctions :

- à énergie théorique infinie ;
- avec des discontinuités (signal carré) ;
- définies sur $\mathfrak{R}$ (signaux non causaux) ;
- à spectre du signal infini ;
- à valeurs complexes :

$$s(t) = Ae^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1.1)$$

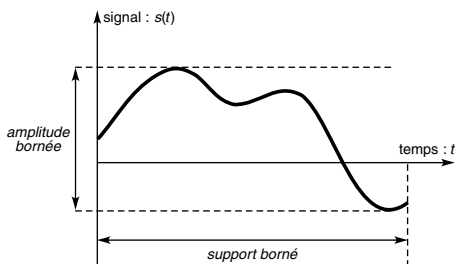


Figure 1.2 Représentation d'un signal physique réel.

Remarque : il est important de noter que l'introduction de tels modèles mathématiques nécessite une interprétation des résultats obtenus après traitement pour retrouver ensuite la réalité.

1.2.2 Classification des signaux

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

- représentation temporelle des signaux ;
- représentation spectrale ;
- caractéristique morphologique (signal continu ou discret).

a) Représentation temporelle des signaux

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux :

- les **signaux certains** (ou déterministes) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat ;

- les **signaux aléatoires** (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux périodiques dont les signaux sinusoïdaux sont un cas particulier :

$$s(t) = A \sin \left[\left(2\pi/T \right) t + \varphi \right] \quad (1.2)$$

avec T la période du signal et φ la phase.

Les signaux non périodiques se composent d'une part des signaux pseudo-périodiques formés d'une somme de sinusoides de périodes différentes et d'autre part des signaux transitoires dont l'existence est limitée dans le temps.

Ces signaux « certains » peuvent en principe être reproduits rigoureusement identiques à eux-mêmes. Dans cet ouvrage nous nous intéresserons principalement à ce type de signaux, excepté le signal dit de bruit, qui fait partie de la deuxième catégorie.

En ce qui concerne les signaux aléatoires, ils sont dits **stationnaires** lorsque leur valeur moyenne est indépendante du temps, c'est-à-dire que les résultats de leur analyse statistique restent les mêmes quel que soit le moment où l'on en observe une partie déterminée. De plus ces signaux aléatoires stationnaires sont **ergodiques** s'il est identique de faire une moyenne statistique à un instant donné sur différents essais ou de faire une moyenne temporelle suffisamment longue sur un seul de ces essais.

b) Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son amplitude, sa puissance ou son énergie en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre est aussi appelé la **largeur de bande spectrale du signal** ΔF (cf. figure 1.3) :

$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

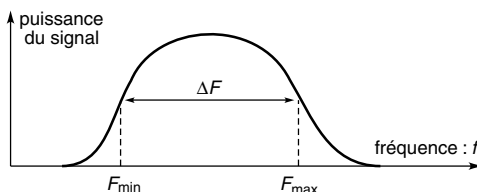


Figure 1.3 Distribution spectrale d'un signal avec la définition de la largeur de bande spectrale ΔF .

Cette caractéristique, exprimée en hertz (Hz), est absolue. Aussi il est nécessaire de la comparer au domaine de fréquences dans lequel se situe le signal. En considérant la fréquence moyenne $F_{\text{moy}} = (F_{\text{max}} + F_{\text{min}})/2$, on peut distinguer deux types de signaux :

- les signaux à bande étroite avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ petit (soit $F_{\text{max}} \# F_{\text{min}}$) ;
- les signaux à large bande avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ grand (soit $F_{\text{max}} \gg F_{\text{min}}$).

Pour les signaux à bande étroite, il est possible de les classer par le domaine de variation de la fréquence moyenne F_{moy} :

- $F_{\text{moy}} < 250 \text{ KHz}$ signaux basses fréquences (BF)
- $250 \text{ KHz} < F_{\text{moy}} < 30 \text{ MHz}$ signaux hautes fréquences (HF)
- $30 \text{ MHz} < F_{\text{moy}} < 300 \text{ MHz}$ signaux très hautes fréquences (VHF)
- $300 \text{ MHz} < F_{\text{moy}} < 3 \text{ GHz}$ signaux ultra hautes fréquences (UHF)
- $F_{\text{moy}} > 3 \text{ GHz}$ signaux super hautes fréquences (SHF)

Lorsque la fréquence du signal devient très grande, pratiquement supérieure à quelques térahertz ($\text{THz} = 10^{12} \text{ Hz}$), la longueur d'onde λ est le paramètre de référence ($\lambda = c/F$ avec c : vitesse de la lumière $300\,000 \text{ Km/s}$) :

- $700 \text{ nm} < \lambda < 0,1 \text{ mm}$ signal lumineux infrarouge
- $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ signal lumineux visible
- $10 \text{ nm} < \lambda < 400 \text{ nm}$ signal lumineux ultraviolet

c) Les signaux analogiques et numériques

Le temps est un paramètre important de classification. Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux conduit à faire la distinction entre les signaux dits à temps continus (**signaux continus**) et les signaux dits à temps discrets (**signaux discrets ou échantillonnés**). Un autre paramètre des signaux traités est à prendre en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue ou discrète (quantifiée).

Ainsi quatre formes de signaux, qui se retrouvent dans un système numérique de contrôle d'un processus physique, peuvent être distinguées (cf. figure 1.4) :

- signal à amplitude et temps continus (signal analogique) : $s(t)$;
- signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : $s_q(t)$. Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique-analogique pour la commande d'un actionneur ;
- signal à amplitude continue et temps discret (signal échantillonné) : $s(nT_e)$. Ce signal, obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur-bloqueur, est transmis à un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal numérique utilisable par un ordinateur ;
- signal à amplitude discrète et temps discret (signal logique ou numérique) : $s_q(nT_e)$. Ce dernier cas correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur, se transmettent sous la forme de plusieurs signaux de type numérique 0 V (0 logique) ou 5 V (1 logique) se propageant en parallèle : 8 signaux pour un nombre codé sur 8 bits.

On appelle **numérisation d'un signal** l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets.

Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.

La restitution (ou l'interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur.

Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique.

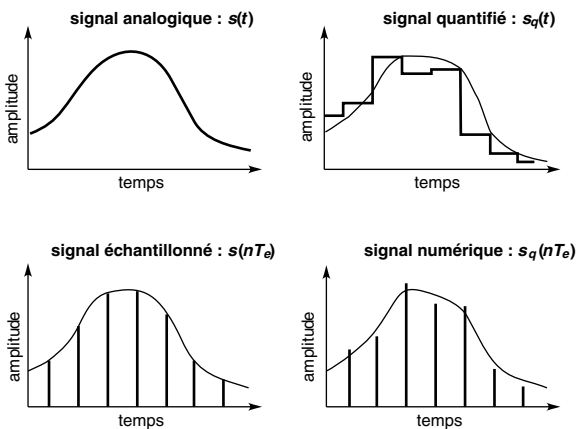


Figure 1.4 Classification morphologique des signaux.

Chapitre 2

Transformations de Fourier

2.1 ANALYSE SPECTRALE DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

2.1.1 Développement en série de Fourier

Si $s(t)$ est une fonction périodique de t , de période T_0 ($= 1/F_0$), elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence F_0 , dite fréquence fondamentale. Soit :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n F_0 t + b_n \sin 2\pi n F_0 t) \quad (2.1)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier. Ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \, dt = \overline{s(t)} \quad (2.2)$$

avec a_0 appelé valeur moyenne ou composante continue

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(2\pi n F_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.3)$$

et

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(2\pi n F_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.4)$$

En introduisant la représentation complexe, nous pouvons donner une forme plus générale de l'expression de ce développement en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nF_0) \cdot e^{j2\pi n F_0 t} \quad (2.5)$$

avec $S(nF_0) = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j \cdot b_n) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{j2\pi n F_0 t} \cdot dt \quad \text{pour } n \geq 1$

et

$$S(0) = a_0 = \overline{s(t)} \quad (2.6)$$

Le concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il peut être vu comme la traduction du sens de rotation de la vitesse angulaire ou pulsation ($\omega = 2\pi f$). Ainsi la fonction réelle $\cos(\omega t)$ ou $\cos(2\pi f t)$ peut être exprimée comme la somme de deux fonctions complexes dans le plan complexe (cf. figure 2.1) :

$$\cos(\omega t) = 1/2 \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

Ces valeurs négatives de la fréquence sont introduites uniquement dans un but de rendre symétrique la fonction de représentation des fréquences. Dans le cas de signaux réels, nous avons :

$$a_{-n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{-n} = -b_n$$

Les coefficients du développement $S(nF_0)$ sont en général une grandeur complexe qui peut s'écrire sous la forme :

$$S(nF_0) = |S(nF_0)| \cdot e^{j\varphi_n} \quad (2.7)$$

avec pour module :

$$|S(nF_0)| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.8)$$

et pour phase φ_n :

$$\varphi_n = \text{Arctg}(-b_n/a_n) \quad (2.9)$$

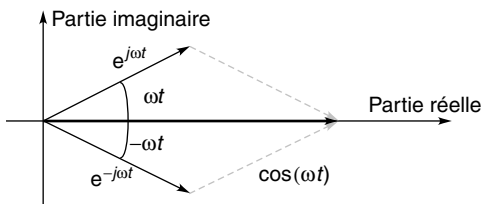


Figure 2.1 Introduction des fréquences négatives dans l'expression des signaux.

2.1.2 Représentations fréquentielles

Les coefficients $S(nF_0)$ représentent les composantes du spectre en fréquence de $s(t)$. En introduisant l'impulsion de Dirac $\delta(x)$ qui est décrite en annexes, la représentation fréquentielle du signal est formée de pics de Dirac de poids $|S(nF_0)|$ réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives (cf. figure 2.2). Par convention, on dessine chaque raie en lui donnant une hauteur proportionnelle à son poids $|S(nF_0)|$. Il est important de noter que ce spectre $S(f)$ est en général complexe, formé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, et devrait donc être représenté dans un système à trois dimensions : axe des fréquences f , axe de la partie imaginaire $\text{Im}\{S(f)\}$ et axe de la partie réelle $\text{Re}\{S(f)\}$. L'expression du spectre est la suivante :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0) \quad (2.10)$$

$$\text{avec } S(nF_0) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{j2\pi nF_0 t} \cdot dt \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } S(0) = \overline{s(t)}$$

La représentation fréquentielle ou le **spectre en fréquence** $S(f)$ du **signal** $s(t)$ est constitué de la composante continue à la fréquence 0, du fondamental à la fréquence F_0 (ou harmonique d'ordre 1) et des différents harmoniques aux fréquences $f = n \cdot F_0$. Il est important de remarquer que le spectre d'une fonction périodique, de période $T_0 (= 1/F_0)$, est **discontinu** et composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences, F_0 .

Cette représentation complexe du signal distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe des fréquences : c'est la représentation spectrale **bilatérale** $S(f)$ (fréquences positives et négatives).

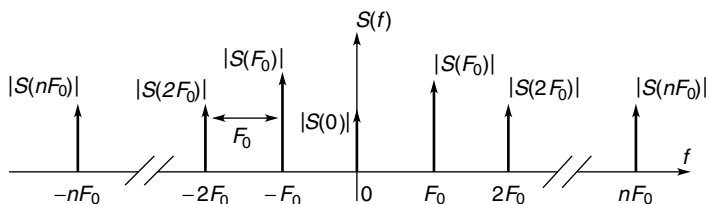


Figure 2.2 Représentation fréquentielle bilatérale d'un signal périodique de période $T_0 (= 1/F_0)$.

Seule la représentation unilatérale $S_{\text{réel}}(f)$ (spectres composés de fréquences positives uniquement), calculée directement à partir des équations 2.1 à 2.4 (série de Fourier), est une représentation réelle qui peut être obtenue à partir d'analyseurs de spectres ou de transformateurs de Fourier qui présentent le module de ce spectre. À partir de l'expression initiale 2.1, nous pouvons écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos(2\pi n F_0 t + \varphi_n) \quad (2.11)$$

avec $c_n = 2 \cdot |S(nF_0)| = 2 \cdot \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Les coefficients c_n représentent les « amplitudes » des composantes du spectre réel $S_{\text{réel}}(f)$ en représentation unilatérale (cf. figure 2.3). Il est très aisé de passer de l'une à l'autre des représentations par la relation suivante :

$$S(f) = k \cdot S_{\text{réel}}(f) \quad (2.12)$$

avec $k = \{2 \text{ si } f > 0 ; 1 \text{ si } f = 0 ; 0 \text{ si } f < 0\}$.

2.1.3 Quelques propriétés

Nous avons une correspondance unique entre la fonction $x(t)$, son développement en série de Fourier et par conséquent sa représentation spectrale $X(f)$. Nous écrirons donc cette réciprocité sous la forme :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

a) Propriété de linéarité

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$, nous avons :

$$A \cdot x(t) + B \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} A \cdot X(f) + B \cdot Y(f) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

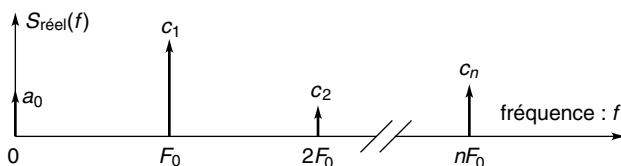


Figure 2.3 Représentation fréquentielle unilatérale d'un signal périodique de période $T_0 (= 1/F_0)$.

b) Propriété de parité

Si la fonction $x(t)$ est paire, alors les coefficients b_n sont nuls :

$$X(nF_0) = \frac{1}{2} \cdot a_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(2\pi nF_0 t) \cdot dt$$

Si la fonction $x(t)$ est impaire, alors les coefficients a_n sont nuls :

$$X(nF_0) = \frac{-j}{2} \cdot b_n = \frac{-j}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot dt$$

Soit la fonction $x(t)$ et $X(f)$ sa représentation fréquentielle, nous avons :

Fonction $x(t)$	Représentation fréquentielle $X(f)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe (partie réelle paire, partie imaginaire impaire)

c) Propriété de translation

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, nous avons :

$$x(t - \theta) \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \theta \cdot f}$$

et réciproquement :

$$X(f - \nu) \xleftrightarrow{F} x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t}$$

2.1.4 Exemples de développements en série de Fourier

Nous présentons ci-après un ensemble de fonctions périodiques (de période $T_0 = 1/F_0$) et de leurs développements en série de Fourier sous la forme d'une représentation fréquentielle bilatérale (partie imaginaire $\text{Im}\{S(f)\}$ ou partie réelle $\text{Re}\{S(f)\}$). Ainsi, à partir de cette table et des propriétés associées à cette transformation, il est possible de déterminer la représentation spectrale de la plupart des fonctions périodiques usuelles sans effectuer les calculs donnés par les relations 2.1 à 2.4.

a) Signaux sinusoïdaux et cosinusoidaux

Représentation temporelle

- Signal sinusoïdal :

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$$

Représentation spectrale

$$S(f) = \frac{j \cdot A}{2} \cdot (\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0))$$

(cf. figure 2.4)

Représentation temporelle

- Signal cosinusoidal :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

Représentation spectrale

$$S(f) = \frac{A}{2} \cdot (\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0))$$

(cf. figure 2.5)

b) Signaux carrés**Représentation temporelle**

- Signal carré pair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{c1}(t)$$

$$\text{avec } s_{c1}(t) = -A \text{ pour } t \in [-T_0/2, -T_0/4]$$

$$\text{et } s_{c1}(t) = A \text{ pour } t \in [-T_0/4, T_0/4]$$

$$\text{et } s_{c1}(t) = -A \text{ pour } t \in [T_0/4, T_0/2]$$

Représentation spectrale

$$S_{c1}(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) \cdot F_0)$$

(cf. figure 2.6)

- Signal carré pair à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{c2}(t)$$

soit

$$s_{c2}(t) = 1/2 \cdot s_{c1}(t) + A/2$$

$$S_{c2}(f) = 1/2 \cdot S_{c1}(f) + A/2 \cdot \delta(f)$$

$$S_{c2}(f) = \frac{A}{2} \delta(f) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \delta(f - (2p+1) F_0)$$

(cf. figure 2.7)

- Signal carré impair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{c3}(t)$$

soit :

$$s_{c3}(t) = s_{c1}(t + T_0/4)$$

$$\text{avec } s_{c3}(t) = A \text{ pour } t \in [0, T_0/2]$$

$$\text{et } s_{c3}(t) = -A \text{ pour } t \in [T_0/2, T_0]$$

$$S_{c3}(f) = S_{c1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4)f}$$

$$S_{c3}(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) \cdot F_0)$$

(cf. figure 2.8)

- Signal carré impair à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{c4}(t)$$

soit :

$$s_{c4}(t) = 1/2 \cdot s_{c1}(t + T_0/4) + A/2$$

$$S_{c4}(f) = 1/2 \cdot S_{c1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4)f} + A/2 \cdot \delta(f)$$

$$S_{c4}(f) = \frac{A}{2} \delta(f) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1) F_0)$$

(cf. figure 2.9)

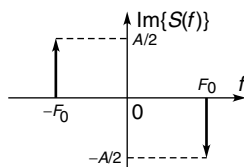


Figure 2.4 Représentation spectrale bilatérale d'un signal sinusoïdal.

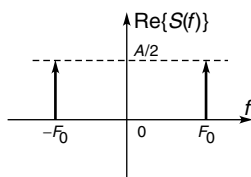


Figure 2.5 Représentation spectrale bilatérale d'un signal cosinusoidal.

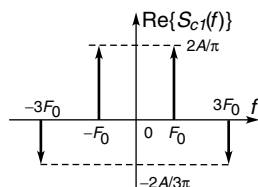


Figure 2.6 Représentation spectrale bilatérale du signal carré pair $s_{c1}(t)$.

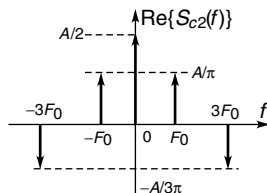


Figure 2.7 Représentation spectrale bilatérale du signal carré pair $s_{c2}(t)$.

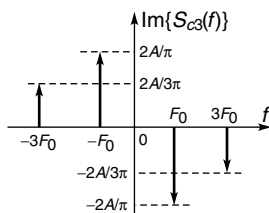


Figure 2.8 Représentation spectrale bilatérale du signal carré impair $s_{c3}(t)$.

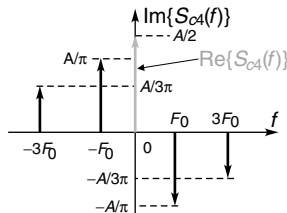


Figure 2.9 Représentation spectrale bilatérale du signal carré impair $s_{c4}(t)$.

c) Signaux impulsionnels

Représentation temporelle

- Signal impulsionnel pair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{i1}(t) \text{ pour } \tau < T_0$$

$$\text{avec } s_{i1}(t) = -A \text{ pour } t \in [-T_0/2, \tau/2]$$

$$\text{et } s_{i1}(t) = A \text{ pour } t \in [-\tau/2, \tau/2]$$

$$\text{et } s_{i1}(t) = -A \text{ pour } t \in [\tau/2, T_0/2]$$

- Signal impulsionnel pair à composante continue non nulle ($= A\tau/T_0$) :

$$s(t) = s_{i2}(t)$$

$$\text{soit : } s_{i2}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{i1}(t) + \frac{A}{2}$$

- Signal impulsionnel à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{i3}(t)$$

$$\text{soit : } s_{i3}(t) = s_{i1}(t + \tau/2)$$

- Signal impulsionnel à composante continue non nulle ($= A\tau/T_0$) :

$$s(t) = s_{i4}(t)$$

$$\text{soit : } s_{i4}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{i1}(t + \tau/2) + \frac{A}{2}$$

Représentation spectrale

$$S_{i1}(f) = \frac{2A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0) - A \cdot \delta(f)$$

$$(cf. \text{ annexes : fonction } \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x))$$

$$S_{i2}(f) = \frac{1}{2} \cdot S_{i1}(f) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S_{i2}(f) = \frac{A \cdot \tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0)$$

(cf. figure 2.10)

$$S_{i3}(f) = S_{i1}(f) \cdot e^{j2\pi(\tau/2)f}$$

$$S_{i3}(f) = \frac{2A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot e^{j\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0) - A \cdot \delta(f)$$

$$S_{i4}(f) = \frac{1}{2} \cdot S_{i1}(f) \cdot e^{j2\pi(\tau/2)f} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S_{i4}(f) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot e^{j\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n \cdot F_0)$$

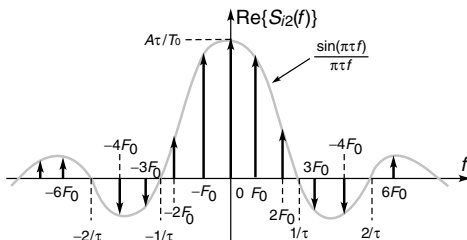


Figure 2.10 Représentation spectrale bilatérale du signal impulsionnel pair $s_{i2}(t)$.

Remarque : le signal impulsionnel pair à composante continue non nulle $s_{i2}(t)$ a pour limite la fonction « peigne » de Dirac $\text{Pgn}_A(x)$ lorsque A tend vers l'infini, τ vers 0 et en conservant le produit $A\tau$ égal à 1 (cf. annexes).

d) Signaux triangulaires

Représentation temporelle

- Signal triangulaire pair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{t1}(t)$$

avec

$$s_{t1}(t) = A + \frac{4A}{T_0}t \text{ pour } t \in [-T_0/2, 0]$$

$$\text{et } s_{t1}(t) = A - \frac{4A}{T_0}t \text{ pour } t \in [0, T_0/2]$$

- Signal triangulaire pair à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{t2}(t)$$

soit

$$s_{t2}(t) = 1/2 \cdot s_{t1}(t) + A/2$$

- Signal triangulaire impair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{t3}(t)$$

soit :

$$s_{t3}(t) = s_{t1}(t + T_0/4)$$

- Signal triangulaire impair à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{t4}(t)$$

soit :

$$s_{t4}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{t1}(t + T_0/4) + \frac{A}{2}$$

Représentation spectrale

$$S_{t1}(f) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \delta(f - (2p+1)F_0)$$

$$S_{t2}(f) = 1/2 \cdot S_{t1}(f) + A/2 \cdot \delta(f)$$

$$S_{t2}(f) = \frac{2A}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \delta(f - (2p+1)F_0) + \frac{A}{2} \delta(f)$$

$$S_{t3}(f) = S_{t1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4)f}$$

$$S_{t3}(f) = \frac{j4A}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \cdot \delta(f - (2p+1)F_0)$$

$$S_{t4}(f) = \frac{1}{2} S_{t1}(f) \cdot e^{j2\pi(T_0/4)f} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S_{t4}(f) = \frac{j2A}{\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \delta(f - (2p+1)F_0) + \frac{A}{2} \delta(f)$$

e) Signaux divers

Représentation temporelle

- Signal rampe impair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{r1}(t)$$

avec

$$s_{r1}(t) = \frac{2A}{T_0} t \text{ pour } t \in [-T_0/2, T_0/2]$$

- Signal rampe à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{r2}(t)$$

avec

$$s_{r2}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{r1}(t + T_0/2) + \frac{A}{2} \quad + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

- Signal « dent de scie » ou rampe inversée à composante continue non nulle ($= A/2$) :

$$s(t) = s_{r3}(t)$$

avec

$$s_{r3}(t) = \frac{1}{2} \cdot s_{r1}(-t + T_0/2) + \frac{A}{2} \quad + \frac{A}{2} \cdot \delta(f)$$

- Signal sinusoïdal redressé double alternance :

$$s(t) = A \cdot |\sin(2\pi F_0 t)|$$

$$S(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \delta(f) - \frac{2A}{\pi} \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2pF_0)$$

- Signal sinusoïdal redressé simple alternance :

$$s(t) = s_{sa}(t)$$

avec

$$s_{sa}(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t) \text{ pour } t \in [0, T_0/2]$$

$$\text{et } s_{sa}(t) = 0 \text{ pour } t \in [T_0/2, T_0]$$

Représentation spectrale

$$S_{r1}(f) = \frac{jA}{\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \delta(f - nF_0)$$

$$S_{r2}(f) = \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \delta(f - nF_0)$$

$$S_{r2}(f) = \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \delta(f + nF_0)$$

$$S(f) = \frac{2A}{\pi} \cdot \delta(f) - \frac{2A}{\pi} \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2pF_0)$$

$$S(f) = \frac{A}{\pi} \cdot \delta(f) - \frac{jA}{4} \cdot \delta(f - F_0) + \frac{A}{\pi} \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2pF_0)$$

2.2 ANALYSE SPECTRALE DES FONCTIONS NON PÉRIODIQUES

2.2.1 Transformée de Fourier

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension de la transformation précédente pour laquelle la période est infinie. L'intervalle de fréquence F_0 tend alors vers zéro et le spectre devient alors une fonction continue. D'où, la transformée de Fourier de $s(t)$, notée $S(f)$ ou $F\{s(t)\}$, et la transformée de Fourier inverse, notée $F^{-1}\{S(f)\}$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \quad (2.13)$$

et

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df \quad (2.14)$$

$S(f)$ est une fonction de f , en général complexe, qui comprend donc une partie réelle $\text{Re}[S(f)]$ et une partie imaginaire $\text{Im}[S(f)]$:

$$\text{Re}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi ft) \cdot dt \quad (2.15)$$

et

$$\text{Im}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi ft) \cdot dt \quad (2.16)$$

Pour que la transformée de Fourier de $s(t)$ existe et soit réciproque, il suffit que $s(t)$ soit une fonction de carré sommable. Cela signifie que $s(t)$, ainsi que sa transformée de Fourier, sont à énergie finie. Toutes les fonctions existant physiquement vérifient ces conditions parce qu'on les observe sur un temps fini.

2.2.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Nous avons une correspondance unique entre la fonction $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$ ou représentation spectrale. Nous écrirons donc cette

réciprocité sous la forme :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

Nous retrouvons les mêmes propriétés que pour le développement en série de Fourier.

a) Propriété de linéarité

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$, nous avons :

$$A \cdot x(t) + B \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} A \cdot X(f) + B \cdot Y(f) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

b) Propriété de parité

Soit la fonction $x(t)$ et $X(f)$ sa représentation fréquentielle, nous avons :

Fonction $x(t)$	Représentation fréquentielle $X(f)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
réelle	complexe (partie réelle paire, partie imaginaire impaire)
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire
imaginaire	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, nous avons :

$$\bar{x}(t) \xleftrightarrow{F} \bar{X}(-f) \quad \text{avec } \bar{x} \text{ signifiant le complexe conjugué}$$

c) Propriété de translation

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, nous avons :

$$x(t - \theta) \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \theta \cdot f}$$

Et réciproquement :

$$X(f - \nu) \xleftrightarrow{F} x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t}$$

d) Propriété d'homothétie

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, nous avons :

$$x(a \cdot t) \xleftrightarrow{F} 1/|a| X(f/a) \quad \text{avec } a \in \mathfrak{R}$$

e) Propriété de dérivation

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, nous avons :

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f) \cdot X(f)$$

et plus généralement :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

De cette propriété de dérivation, on en déduit la transformée des signaux à valeur moyenne nulle qui facilite le calcul du spectre de signaux comme celui de la fonction échelon unité $u(t)$. Soit un signal $x(t)$ de la forme :

$$x(t) = A_x + x_0(t) \quad \text{avec } x_0(t) \text{ de valeur moyenne nulle}$$

Nous pouvons écrire :

$$x(t) = A_x + \int_{-\infty}^t \frac{dx_0(t)}{dt} \cdot dt \quad \text{avec } A_x \text{ la constante d'intégration}$$

Étant donné $\frac{dx_0(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} X'_0(f)$, il vient :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} 1/(j2\pi f) \cdot X'_0(f) + A_x \cdot \delta(f)$$

2.2.3 Exemples de transformées de Fourier

Nous présentons ci-après un ensemble de fonctions non périodiques et de leurs transformées de Fourier. Ainsi, à partir de cette table des transformées de Fourier et des propriétés associées à cette transformation, il est possible de déterminer la représentation spectrale de la plupart des fonctions usuelles sans effectuer le calcul intégrale donné par la relation 2.13.

Représentation temporelle

- Fonction porte :

$$s(t) = A \cdot \Pi_\tau(t)$$

avec $\Pi_\tau(t) = 1$ pour $t \in [-\tau/2, +\tau/2]$

et $\Pi_\tau(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau/2, +\tau/2]$

- Fonction sinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\tau/2, +\tau/2]$:

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

- Fonction cosinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\tau/2, +\tau/2]$:

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

- Fonction sinus cardinal :

$$s(t) = A \cdot \text{sinc}(\tau t) = A \cdot \frac{\sin(\pi \tau t)}{\pi \tau t}$$

- Fonction sinusoidale de variable quadratique :

$$s(t) = A \cdot \sin(a \cdot t^2)$$

- Fonction cosinusoidale de variable quadratique :

$$s(t) = A \cdot \cos(a \cdot t^2)$$

Représentation spectrale

$$S(f) = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f \tau)$$

(cf. annexes : fonction $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$)

$$S(f) = \frac{jA\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi \tau (f + F_0))}{\pi \tau (f + F_0)} - \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0))}{\pi \tau (f - F_0)} \right]$$

$$S(f) = \frac{A \cdot \tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi \tau (f + F_0))}{\pi \tau (f + F_0)} + \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0))}{\pi \tau (f - F_0)} \right]$$

$$S(f) = \frac{A}{\tau} \cdot \Pi_\tau(f)$$

$$S(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-(\pi f)^2/a\right) + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$S(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-(\pi f)^2/a\right) - \frac{\pi}{4} \right]$$

Représentation temporelle

- Fonction triangle:

$$s(t) = A \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$$

avec $\Lambda_{2\tau}(t) = 1 + t/\tau$ pour $t \in [-\tau, 0]$

$\Lambda_{2\tau}(t) = 1 - t/\tau$ pour $t \in [0, +\tau]$

et $\Lambda_{2\tau}(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau, +\tau]$

- Fonction sinus cardinal quadratique :

$$s(t) = A \cdot [\text{sinc}(\nu t)]^2 = A \cdot \left[\frac{\sin(\pi \nu t)}{\pi \nu t} \right]^2$$

- Fonction exponentielle symétrique :

$$s(t) = A \cdot e^{-a|t|} \text{ avec } a > 0$$

- Fonction rapport du second ordre :

$$s(t) = \frac{A}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \text{ avec } a > 0$$

d'où le cas particulier :

$$s(t) = \frac{A}{1 + t^2} \text{ avec } a = 0$$

- Fonction d'Heaviside ou échelon unité :

$$s(t) = u(t)$$

avec $u(t) = 0$ pour $t < 0$

et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$

- Fonction signe :

$$s(t) = \text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$$

avec $\text{sgn}(t) = -1$ pour $t < 0$ et $\text{sgn}(t) = 1$

pour $t \geq 0$

- Dérivée de la fonction signe :

$$s(t) = \frac{d(\text{sgn}(t))}{dt} = 2 \cdot \delta(t)$$

- Fonction exponentielle décroissante :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \text{ avec } a > 0$$

Représentation spectrale

$$\begin{aligned} S(f) &= A \cdot \tau \cdot [\text{sinc}(\tau f)]^2 \\ &= A \cdot \tau \cdot \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right]^2 \end{aligned}$$

$$S(f) = \frac{A}{\nu} \cdot \Lambda_{2\nu}(f)$$

$$S(f) = \frac{2 \cdot A \cdot a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$S(f) = \frac{A}{2 \cdot a} \cdot e^{-a|f|}$$

$$S(f) = A \cdot \pi \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot |f|}$$

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$$S(f) = 2$$

$$S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

Représentation temporelle

- Fonction impulsionnelle exponentielle :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \left(e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t} \right) \text{ avec } a > 0 \\ \text{et } b > 0$$

- Fonction sinusoïdale amortie :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at} \text{ avec } a > 0$$

- Fonction cosinusoidale amortie :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at} \text{ avec } a > 0$$

- Fonction cosinusoidale causale :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

- Fonction sinusoïdale causale :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t)$$

- Fonction rampe amortie par une gaussienne :

$$s(t) = A \cdot t \cdot e^{-\pi \cdot t^2}$$

- Fonction rampe centrée :

$$s(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq \tau/2$$

$$s(t) = 1/2 + t/\tau \quad \text{pour } |t| < \tau/2$$

$$s(t) = 0 \quad \text{pour } t = -\tau/2$$

- Fonction gaussienne :

$$s(t) = A \cdot e^{-\pi \cdot t^2}$$

- Fonction gaussienne quelconque :

$$s(t) = A \cdot e^{-a \cdot t^2}$$

- Pic de Dirac :

$$s(t) = \delta(t)$$

Représentation spectrale

$$S(f) = \frac{A \cdot (b - a)}{(a + j2\pi f) \cdot (b + j2\pi f)}$$

$$S(f) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(f) = \frac{A \cdot (a + 2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(f) = \frac{A}{4} \delta(f + F_0) + \delta(f - F_0) \\ + \frac{2f}{j\pi (f^2 - F_0^2)}$$

$$S(f) = \frac{jA}{4} \delta(f + F_0) - \delta(f - F_0) \\ + \frac{2jf}{\pi (f^2 - F_0^2)}$$

$$S(f) = A \cdot j \cdot f \cdot e^{-\pi \cdot f^2}$$

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f)$$

$$S(f) = A \cdot e^{-\pi \cdot f^2}$$

$$S(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{(\pi \cdot f)^2}{a}}$$

$$S(f) = 1$$

Représentation temporelle

- Pic de Dirac de poids A :

$$s(t) = A \cdot \delta(t)$$

- Fonction constante :

$$s(t) = A$$

- Peigne de Dirac de période T_0 :

$$s(t) = \text{Pgn}_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$$

$$s(t) = T_0 \cdot \text{Pgn}_{T_0}(t) = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$$

- Fonction exponentielle complexe :

$$s(t) = A \cdot e^{-j2\pi F_0 t}$$

- Pic de Dirac en $t = T_0$:

$$s(t) = A \cdot \delta(t - T_0)$$

Représentation spectrale

$$S(f) = A$$

$$S(f) = A \cdot \delta(f)$$

$$S(f) = F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f)$$

$$= F_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$$

$$S(f) = \text{Pgn}_{F_0}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$$

$$S(f) = A \cdot \delta(f - F_0)$$

$$S(f) = A \cdot e^{-j2\pi T_0 f}$$

Remarques : la fonction « échelon unité » $u(t)$ permet en particulier de rendre un signal quelconque $s(t)$ **causal** en réalisant le produit $s(t) \cdot u(t)$. La fonction « porte » $\Pi_\tau(t)$ permet de découper dans un signal une portion de durée finie. Cette opération conduit à transformer un signal théorique (représentation mathématique) en un signal réel n'existant que pendant un temps fini de durée τ , correspondant au temps de mesure ou d'observation.

Chapitre 3

Systèmes de transmission. Filtrage

3.1 SYSTÈMES DE TRANSMISSION

3.1.1 Définitions et propriétés

a) Comparaison des grandeurs d'entrée et de sortie

Un système de transmission fait correspondre à un signal d'entrée $e(t)$ quelconque un signal de sortie $s(t)$, réponse du système de transmission, fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du système de transmission. Pour le système de transmission, on réalise une comparaison des grandeurs d'entrée et de sortie en exprimant le rapport des puissances des deux grandeurs (de même nature). Le logarithme à base 10 de ce rapport

est alors exprimé en « bel » ; mais l'unité pratique est le décibel (abréviation db) :

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10} (s(t)/e(t)) \quad (3.1)$$

Si on compare pour un appareil (par exemple un amplificateur), les puissances d'entrée et de sortie, le rapport en puissance est donné par :

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10} (P_s/P_e) \quad (3.2)$$

avec un gain si $A_{\text{db}} > 0$ et un affaiblissement si $A_{\text{db}} < 0$.

Si on exprime ce rapport en puissance en fonction des tensions V_e et V_s aux bornes des charges résistives identiques, on obtient :

$$A_{\text{db}} = 20 \cdot \log_{10} (V_s/V_e) \quad (3.3)$$

Cette convention permet d'exprimer, par un même nombre, le rapport en tension et le gain en puissance si les résistances (ou impédances) d'entrée et de sortie sont identiques. Quelques valeurs utiles sont données dans le tableau ci-après :

Rapport des tensions V_s/V_e	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	2	10	100
Gain ou affaiblissement en db	-20	-6	-3	6	20	40

b) Bande passante

Cette comparaison des puissances ou tensions d'entrée et de sortie d'un système de transmission est utilisée lorsque l'on veut étudier l'influence d'une autre grandeur : par exemple la fréquence.

On considère une tension sinusoïdale, fournissant à l'entrée supposée résistive (indépendante de la fréquence), une puissance moyenne constante quelle que soit la fréquence : P_e constant. On étudie l'évolution de la puissance de sortie sur une charge résistive en fonction de la fréquence : $P_s = P_s(f)$. P_s passe par un maximum P_{sm} qui est considéré comme une référence. La courbe ainsi obtenue représente la réponse du système de transmission à une entrée fixée en fonction de la fréquence.

On appelle **bande passante** du système de transmission la zone de fréquences pour lesquelles on a $P_s/P_{sm} < 0,5$ ou $A_{db} = -3$ db. Ainsi la bande passante à -3 db est la tranche des fréquences pour lesquelles l'affaiblissement de la puissance de sortie, à puissance entrante constante, est inférieur à -3 db par rapport à sa valeur maximale (cf. figure 3.1). Si l'on applique cette définition pour les tensions, on obtient un rapport « tension de sortie / tension maximale » (V_s/V_{sm}) devant être supérieur ou égal à $1/\sqrt{2}$ ($\sim 0,7$). On définit également une bande passante à -6 db ($V_s/V_{sm} = 0,5$).

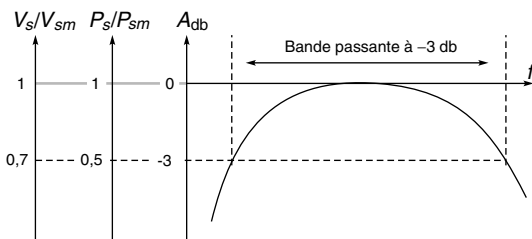


Figure 3.1 Bande passante à -3 db d'un système de transmission.

c) Propriété d'un système de transmission

Nous allons nous intéresser à des systèmes de transmission qui possèdent les trois propriétés suivantes : linéarité, continuité et stationnarité.

• Systèmes linéaires

En considérant $s_1(t)$ réponse à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ réponse à $e_2(t)$, le système de transmission, noté S.T., est dit linéaire si :

$$a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$$

Il est important de remarquer que presque tous les systèmes sont linéaires pour les faibles signaux (première approximation). D'autre part, une des conséquences de la linéarité est que, pour prévoir la réponse à

une action quelconque, il suffit de connaître la réponse pour une collection dénombrable de signaux d'entrée. L'extension de la propriété de linéarité s'écrit de la façon suivante : si $e_i(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} s_i(t)$, alors :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot e_i(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot s_i(t)$$

• Systèmes continus

Soit $s_n(t)$ la suite des réponses paramétrées par n à $e_n(t)$, le système est dit continu si nous avons la propriété suivante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t)$$

Remarque : il est intéressant de noter qu'un « intégrateur pur » est un système continu, mais pas un « dérivateur pur ».

• Systèmes stationnaires

Un système est stationnaire si son comportement est indépendant de l'origine du temps, donc, si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$:

$$e(t - \theta) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t - \theta)$$

Les filtres sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires.

3.1.2 La convolution

a) Définition

Une impulsion brève, injectée à l'entrée d'un système de transmission linéaire, continu et stationnaire, donne en sortie un signal de durée finie. Cette réponse est appelée **réponse impulsionnelle** (ou percussionnelle) du filtre et notée $h(t)$. Dans le cas général, c'est-à-dire pour signal d'entrée

quelconque, nous avons une relation mathématique qui lie le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ pour un système de transmission possédant les trois propriétés vues précédemment ou filtre, noté S.T.-L.C.S., soit :

$$e(t) \xrightarrow{\text{S.T.-L.C.S.}} s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = e(t) * h(t) \quad (3.4)$$

Cette opération, appelée « **convolution** » et notée $*$, exprime la réponse à un signal quelconque à partir de celle à un signal type (réponse impulsionnelle) ; la réponse dépend du filtre, caractérisé par $h(t)$, et de l'histoire du signal. Le calcul de la convolution est complexe. Il nécessite de nombreuses étapes de calculs : pour chaque point de la réponse $s(t)$, il est nécessaire d'élaborer la fonction $h(t - \tau)$, symétrique de la réponse impulsionnelle par rapport à l'axe des ordonnées et décalée temporellement, puis le produit par le signal d'entrée $e(\tau)$ et enfin l'intégration sur la variable τ .

Les filtres, qui sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires, sont des systèmes de convolution.

b) Propriétés

- commutativité : $x * y = y * x$
- associativité : $x * (y * z) = (x * y) * z$
- distributivité par rapport à l'addition : $x * (y + z) = x * y + x * z$
- élément neutre (pic de Dirac) : $x * \delta = \delta * x = x$

c) Théorème de Plancherel

La relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution s'énonce sous la forme du théorème suivant :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$, nous avons :

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot Y(f) \quad \text{et} \quad x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} X(f) * Y(f) \quad (3.5 \text{ et } 3.6)$$

d) Convolution des signaux périodiques

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$ de période T_0 , on définit la convolution de la manière suivante :

$$P_{\text{conv}}(t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.7)$$

3.2 FILTRAGE

3.2.1 Fenêtrage temporel

a) Principes généraux

Le terme de « filtrage » est habituellement utilisé dans le domaine fréquentiel. Aussi dans le domaine temporel, nous parlerons plus de fenêtrage, que de filtrage, temporel qui peut être défini comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal. Ainsi, le signal de sortie $s(t)$ est le produit du signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction temporelle du filtre ou de la fenêtre $g(t)$:

$$s(t) = e(t) \cdot g(t)$$

La modification qu'entraîne ce fenêtrage temporel au niveau du spectre de $e(t)$ est donnée en appliquant le théorème de Plancherel à la relation précédente :

$$s(t) = e(t) \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} S(f) = E(f) * G(f) \quad (3.8)$$

Par conséquent, pour un filtre de fonction temporelle $g(t)$ quelconque, le spectre du signal de sortie sera différent de celui du signal d'entrée conséquence du produit de convolution. Ainsi les actions temporelles telles que

le prélèvement d'un signal (cas de toutes mesures réalisées pendant un temps fini) ou l'interruption (interrupteur monté sur le circuit d'un haut-parleur) ou encore l'atténuation (atténuation réalisée pendant un temps fini à l'aide d'un potentiomètre réglant le volume du son) sont des filtres ou fenêtrages temporels qui vont modifier le spectre du signal.

Dans le premier cas (découpage d'une tranche temporelle d'un signal), si la durée τ , dite durée de la mesure, tend vers l'infini, nous pouvons vérifier la cohérence de la relation 3.8 ; étant donné que $g(t) = 1$ pour tout t , il vient :

$$g(t) = 1 \xleftrightarrow{F} G(f) = \delta(f)$$

donc $s(t) = e(t) \cdot g(t) = e(t)$ pas de modification du signal

et $S(f) = E(f) * \delta(f) = E(f)$ pas de modification du spectre

b) Mesure d'un signal

L'enregistrement par un appareil ou le traitement par ordinateur d'un signal impose un temps fini au signal qu'il soit analogique ou échantillonné. Ce problème de la durée finie d'un signal est celui de la mesure.

Pour modéliser cette troncature temporelle du signal, on utilise la fonction porte temporelle $\Pi_\tau(t)$ de largeur τ . Comme nous l'avons vu la transformée de Fourier de cette fonction porte est la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(\tau f)$ (cf. chapitre 2). Ainsi, les relations de modifications du signal dues à la mesure sur une durée finie τ sont :

$$s(t) = e(t) \cdot \Pi_\tau(t) \quad \text{et} \quad S(f) = E(f) * \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f}$$

L'influence de cette fenêtre temporelle sur le signal et sur son spectre peut être très importante. Plus l'observation ou la mesure du signal sera longue et plus le spectre du signal sera précis, c'est-à-dire peu perturbé par cette fenêtre temporelle physiquement inévitable.

Prenons l'exemple d'un signal cosinusoidal pur de période T_0 . Le spectre de ce signal est représenté par deux pics de Dirac situés aux fréquences F_0

et $-F_0$. Soit :

$$e(t) = \cos(2\pi F_0 t) \xrightarrow{F} E(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient le signal mesuré $s(t)$ (c'est-à-dire $e(t)$ tronqué et limité à τ) et son spectre $S(f)$:

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

et

$$S(f) = \frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi\tau(f + F_0))}{\pi\tau(f + F_0)} + \frac{\sin(\pi\tau(f - F_0))}{\pi\tau(f - F_0)} \right]$$

Nous obtenons ainsi un spectre formé de deux fonctions de type sinc centrées sur les fréquences F_0 et $-F_0$ (cf. figure 3.2).

Dans le cas général d'un signal périodique quelconque avec un spectre formé d'un ensemble de raies de diverses importances, le fenêtrage temporel, c'est-à-dire la mesure d'un tel signal, conduit à un spectre formé de la somme de toutes les fonctions sinc placées au niveau des fréquences existantes avec une amplitude proportionnelle à l'importance de la raie. Ce résultat peut conduire à une interprétation erronée du spectre : distinction impossible de deux fréquences proches, localisation d'une fréquence sans existence réelle, etc.

Remarque : il est donc important de constater que le spectre d'un signal tronqué temporellement, c'est-à-dire mesuré sur un temps fini (cas réel), va être modifié dans le sens où chaque composante du spectre sera transformée en une forme $\text{sinc}(x)$. Ce résultat correspond au principe d'incertitude : une connaissance complète du signal sur l'axe des temps conduit à une détermination précise dans le domaine fréquentiel alors qu'une connaissance limitée temporellement du signal induit un « flou » sur la détermination du spectre de ce signal. Une étude complète de cet effet de fenêtrage temporel et des moyens de le limiter est faite dans le chapitre 7.

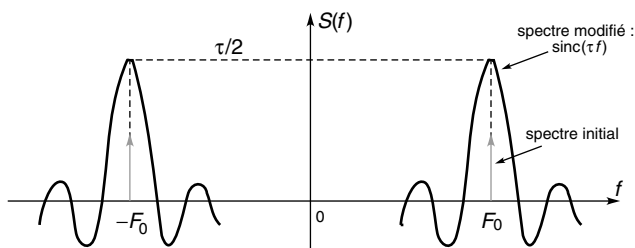


Figure 3.2 Modification du spectre en fréquence d'un signal sinusoïdal par une troncature temporelle ou mesure.

3.2.2 Filtrage fréquentiel

a) Théorème fondamental des filtres

Les termes de filtre ou de filtrage s'appliquent en général plus à des systèmes définis par un produit dans l'espace des fréquences. De la même manière que dans le domaine temporel, nous parlerons de filtrage fréquentiel comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal. Ainsi, le spectre $S(f)$ du signal de sortie $s(t)$ est le produit du spectre $E(f)$ signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction fréquentielle du filtre $H(f)$:

$$S(f) = E(f) \cdot H(f)$$

La modification qu'entraîne ce filtrage fréquentiel au niveau de la représentation temporelle $e(t)$ est donnée en appliquant le théorème de Plancherel à la relation précédente :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) \xleftrightarrow{F} s(t) = e(t) * h(t) \quad (3.9)$$

Le théorème fondamental des filtres s'appuie sur la définition même des filtres comme systèmes de convolution. Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, et par sa fonction de transfert, notée $H(f)$ ou

$H(p)$ réciproquement transformée de Fourier ou de Laplace de $h(t)$ (cf. annexes). La réponse $s(t)$ d'un tel filtre à un signal d'entrée $e(t)$ est donnée par les opérations des relations 3.9, soit :

- Convolution dans l'espace temps

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.10)$$

- Produit dans l'espace des fréquences (transformée de Fourier ou de Laplace) :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) \quad \text{ou} \quad S(p) = E(p) \cdot H(p) \quad (3.11)$$

De plus, dans la pratique, un filtre sera souvent caractérisé par sa réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$, c'est-à-dire sa réponse à un échelon unité $u(t)$:

$$s_{\text{ind}}(t) = u(t) * h(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.12)$$

La relation de base 3.10 peut prendre différentes formes suivant les caractéristiques temporelles des signaux $e(t)$ et $h(t)$:

- $h(t)$ causal (filtre réalisable : cf. paragraphe suivant) :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

- $e(t)$ causal (exemple du signal $u(t)$ « échelon unité ») :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

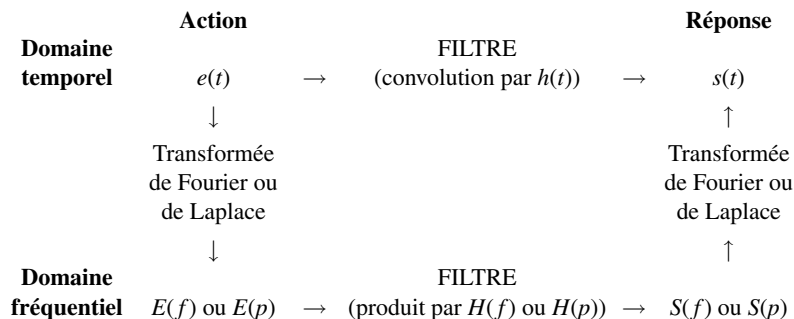
- $e(t)$ et $h(t)$ causaux :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

À partir de ces relations, il est possible de déterminer la réponse à une action ou signal d'entrée quelconque.

Mais il peut être très intéressant de passer dans le domaine fréquentiel pour déterminer la réponse, car l'opération à réaliser est alors un produit

simple. Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel pour le signal d'entrée se fait par transformée de Fourier ou de Laplace, de même le retour dans le domaine temporel pour le signal de sortie se fait par les transformations inverses (le calcul de ces transformées se faisant à partir des tables des fonctions usuelles, des propriétés et des règles opératoires de base). Soit le chemin de calcul suivant :



Une des applications les plus importantes de ce processus est le calcul de la réponse de filtres en chaîne. Si n filtres, caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h_i(t)$ et leur fonction de transfert $H_i(f)$ ou $H_i(p)$, sont mis en série, on peut les remplacer par un filtre équivalent dont la réponse impulsionnelle peut être calculée par :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_n(t)$$

Ce calcul est relativement difficile à effectuer. Par contre le calcul de la fonction de transfert équivalente sera très simple :

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot \dots \cdot H_n(f) = \prod_{i=1}^n H_i(f)$$

Il est toutefois très important de noter que ce calcul n'est possible que si la mise en chaîne des filtres ne modifie pas leurs caractéristiques, c'est-à-dire si l'impédance de sortie du filtre est très petite par rapport à l'impédance d'entrée du filtre suivant. Cette condition sera remplie en particulier dans le cas des filtres numériques (*cf.* chapitre 8).

b) Filtrés réalisables

Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour $t < 0$: car l'effet ne peut précéder la cause. Tout système physique aura donc une réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle quelconque (ni paire, ni impaire), par conséquent, la fonction de transfert $H(f)$ sera obligatoirement complexe :

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Le spectre $S(f)$ de la réponse $s(t)$ du filtre à un signal $e(t)$, ayant pour transformée de Fourier $E(f)$, montre que **tout filtre physique réalisable déphase** :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) = E(f) \cdot |H(f)| \cdot e^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Dans le cas des filtres réalisables, il est possible de calculer plus complètement la réponse indicielle suivant l'équation 3.12. Le filtre étant réalisable, sa réponse impulsionnelle $h(t)$ peut se mettre sous la forme causale :

$$h(t) = h_0(t) \cdot u(t) \quad \text{avec } h_0(t) \text{ une fonction quelconque}$$

Ainsi, nous obtenons la réponse indicielle d'un filtre réalisable :

$$s_{\text{ind}}(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t h_0(\tau) \cdot d\tau \quad (3.13)$$

Les filtres analogiques continus réalisables sont construits à partir des composants électroniques : résistances, capacités, self-inductances et amplificateurs opérationnels. Le fonctionnement de ces filtres est caractérisé par des équations intégral-différentielles linéaires à coefficients constants entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$. En utilisant la transformée de Laplace, cette relation donne une fonction de transfert $H(p)$ qui est le quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot p^i \bigg/ \sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j \quad (3.14)$$

Cette relation 3.14 peut s'exprimer sous la forme d'une somme ou d'un produit des quatre fonctions élémentaires suivantes :

- Filtre passe-bas du premier ordre (cf. paragraphe suivant) :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \text{ le temps de réponse}$$

- Filtre passe-haut du premier ordre (cf. paragraphe suivant) :

$$H_2(p) = \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } \tau \text{ le temps de réponse}$$

- Filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$H_3(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \quad \text{avec } \xi \text{ le coefficient d'amortissement}$$

- Filtre passe-haut du deuxième ordre :

$$H_4(p) = \frac{(\tau \cdot p)^2}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \quad \text{avec } \xi \text{ le coefficient d'amortissement}$$

Remarque : Posons la question de la faisabilité d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c . Le spectre de ce filtre peut être modélisé par la fonction porte $H(f) = \Pi_{2F}(f)$. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle du filtre est la transformée de Fourier inverse de cette fonction de transfert, soit $h(t) = \text{sinc}(2F_c t)$. On constate que la réponse impulsionnelle $h(t)$, ainsi obtenue, n'est pas causale. Par conséquent, nous pouvons en déduire qu'un filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable.

c) Exemples de filtres

Nous allons analyser les fonctionnements temporel et fréquentiel des deux premiers filtres de base (filtre passe-bas et filtre passe-haut du premier ordre) en étudiant la fonction de transfert $H(f)$, la réponse impulsionnelle $h(t)$, la réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ et la réponse à une rampe $s_r(t)$ des deux filtres.

• Filtre passe-bas du premier ordre :

La réponse du filtre passe-bas du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \quad \text{avec } \tau = RC \text{ la constante de temps du filtre}$$

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi\tau f} \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec le pôle } p = 1/\tau$$

L'étude d'un filtre se fait généralement en décrivant l'évolution du module et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence. Représentant le rapport du signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$, le module de la fonction de transfert, appelé gain du filtre G_{db} , est donné en db suivant la convention de la relation 3.3. Dans le cas du filtre passe-bas du premier ordre, nous avons les deux expressions suivantes :

$$G_{db} = -10 \log_{10} \left(1 + (2\pi\tau f)^2 \right) \quad \text{et} \quad \varphi = -\text{Arctg}(2\pi\tau f)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre qui est appelée aussi diagramme de Bode (cf. figure 3.3). Dans ce plan de Bode (G_{db} , $\log(f)$), on peut représenter soit la courbe réelle, soit seulement les droites asymptotiques à cette courbe. La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut -3 db. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant négative pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à retard de phase : le signal de sortie est en retard par rapport au signal d'entrée (cf. figure 3.4).

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la transformée suivante (cf. chapitre 2) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

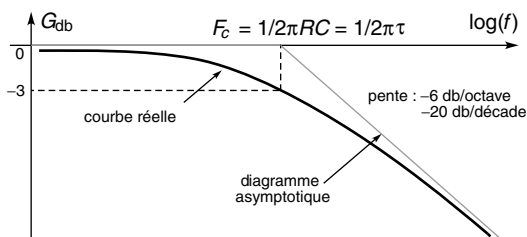


Figure 3.3 Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

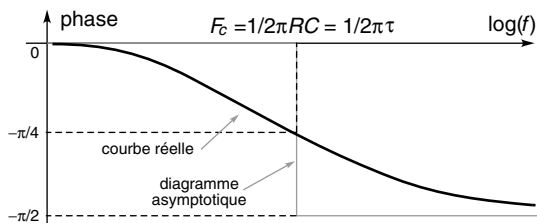


Figure 3.4 Courbe de phase d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

soit le résultat suivant présenté sur la figure 3.5 :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

À partir de l'expression de $h(t)$ et de la relation générale 3.13, donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-bas du premier ordre (cf. figure 3.6) :

$$s_{\text{ind}}(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t u(\theta) \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \cdot d\theta = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot u(t)$$

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, la réponse du filtre à un signal

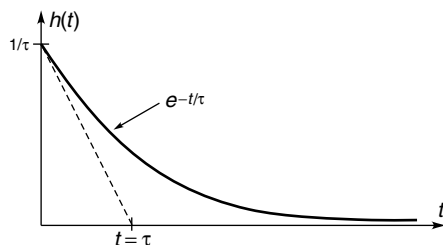


Figure 3.5 Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

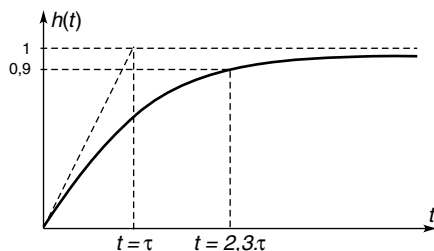


Figure 3.6 Réponse indicielle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

causal quelconque $e(t)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot \int_0^t e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot e(t - \theta) \cdot d\theta$$

ou

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \cdot \int_0^t e^{+\frac{\theta}{\tau}} \cdot e(\theta) \cdot d\theta$$

Cette dernière expression permet par exemple de calculer simplement la réponse d'un filtre à une entrée de type rampe limitée en temps (cf. figure 3.7). L'expression de cette entrée causale est :

$$e(t) = t/t_0 \quad \text{pour } t \in [0, t_0] \quad \text{et} \quad e(t) = 1 \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty]$$

Le signal de sortie $s_r(t)$ va donc être le résultat suivant présenté en deux parties selon les valeurs de t :

$$s_r(t) = \frac{1}{t_0} \cdot u(t) \cdot [t - \tau \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})] \quad \text{pour } t \in [0, t_0]$$

$$s_r(t) = u(t) \cdot [1 - \frac{\tau}{t_0} \cdot (1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad \text{pour } t \in [t_0, +\infty]$$

Ces deux courbes se raccordent au point $t = t_0$. Cette sollicitation du type rampe est utilisée dans le domaine de l'automatique où elle correspond à la commande progressive d'un actionneur pour arriver à la valeur de consigne, cet actionneur étant modélisé par un opérateur retard. On vérifie en particulier le retard de $\tau = RC$ de la sortie sur l'entrée. Suivant les valeurs respectives de τ et t_0 , le signal de sortie a des représentations différentes; la figure 3.7 correspond à un cas intermédiaire avec une valeur du rapport τ/t_0 inférieure à 1.

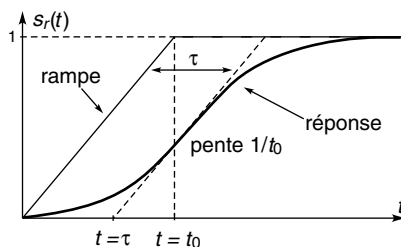


Figure 3.7 Réponse d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre à un signal de type rampe limitée en temps.

- Filtre passe-haut du premier ordre :

La réponse du filtre passe-haut du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$R \cdot C \cdot \frac{de(t)}{dt} = R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du filtre

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{j2\pi\tau f}{1 + j2\pi\tau f}$$

ou $H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$ avec le pôle $p = 1/\tau$ et le zéro $p = 0$

Dans le cas du filtre passe-haut du premier ordre, nous avons les deux expressions du gain du filtre et de la phase suivantes :

$$G_{db} = 20 \log_{10} \left(2\pi\tau f / \sqrt{1 + (2\pi\tau f)^2} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arctg} (1/2\pi\tau f)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre, diagramme de Bode (cf. figure 3.8). La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut -3 db. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant positive pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à avance de phase : le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée (cf. figure 3.9).

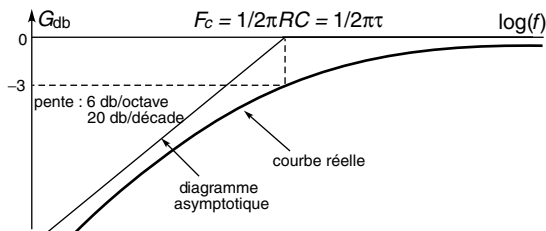


Figure 3.8 Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la transformée suivante (cf. chapitre 2) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xrightarrow{F} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

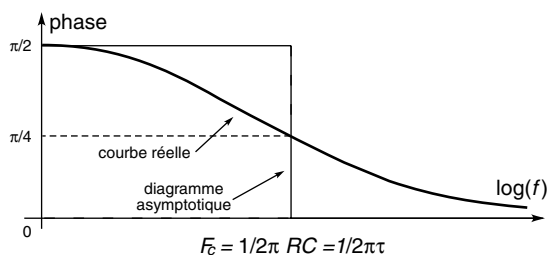


Figure 3.9 Courbe de phase d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

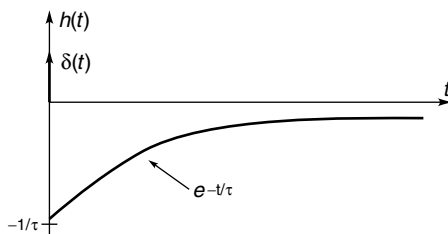


Figure 3.10 Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

soit le résultat suivant présenté sur la figure 3.10 :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

À partir de l'expression de $h(t)$ et de la relation générale 3.13, donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-haut du premier ordre (cf. figure 3.11) :

$$s_{\text{ind}}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

Considérons en entrée un signal de rampe non limité en temps modélisé de la façon suivante :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \quad \text{pour } t \geq 0$$

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, on obtient la réponse du filtre à un signal causal rampe défini ci-avant (cf figure 3.12) :

$$s_r(t) = a \cdot \tau \cdot u(t) \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

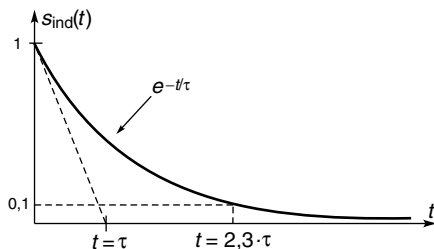


Figure 3.11 Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

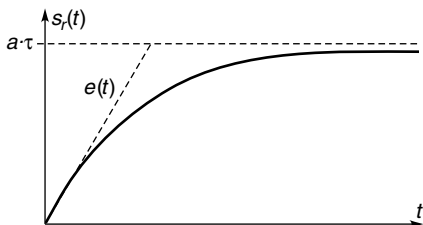


Figure 3.12 Réponse d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre à un signal de type rampe non limitée en temps.

3.3 CORRÉLATION

3.3.1 Puissance et énergie des signaux

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie. Lorsque nous faisons une mesure, le processus subit toujours un prélèvement d'énergie de la part du dispositif de mesure. Cette notion de puissance

d'un signal est donc très importante. On peut caractériser un signal selon les critères de puissance et d'énergie dans le plan temporel ou fréquentiel.

a) Puissance temporelle d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ s'exprime sous la forme :

$$p(t) = x(t) \cdot \bar{x}(t) = |x(t)|^2 \quad (3.15)$$

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T_0 est :

$$P(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt$$

D'où l'énergie totale du signal $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt \quad (3.16)$$

La puissance instantanée d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p_{xy}(t) = x(t) \cdot \bar{y}(t) \quad \text{et} \quad p_{yx}(t) = y(t) \cdot \bar{x}(t) \quad (3.17)$$

La puissance moyenne d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T_0 est donnée par :

$$P_{xy}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \bar{y}(t) \cdot dt \quad \text{et} \quad P_{yx}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt \quad (3.18)$$

b) Puissance fréquentielle d'un signal, densité spectrale

Si le signal $x(t)$ a une transformée de Fourier $X(f)$, on définit le spectre de puissance d'un signal ou **densité spectrale** par :

$$S_{xx}(f) = X(f) \cdot \bar{X}(f) = |X(f)|^2 \quad (3.19)$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquence de largeur Δf autour d'une fréquence F_0 est :

$$E_x(\Delta f, F_0) = \int_{F_0 - \Delta f/2}^{F_0 + \Delta f/2} S_{xx}(f) \cdot df$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(f)$ s'exprime sous la forme :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot df \quad (3.20)$$

Nous pouvons aussi définir la densité spectrale d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$ par :

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot \bar{Y}(f) \quad \text{et} \quad S_{yx}(f) = Y(f) \cdot \bar{X}(f) \quad (3.21)$$

3.3.2 Corrélation et densité spectrale

a) Définition de la fonction de corrélation pour les signaux à énergie finie

La fonction d'autocorrélation d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \bar{x}(\theta - t) \cdot d\theta \quad (3.22)$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est définie par :

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \bar{y}(\theta - t) \cdot d\theta \quad (3.23)$$

Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre de translation t . Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, c'est une étude de la ressemblance du processus avec lui-même au cours du temps, et, par conséquent, si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité.

La fonction d'autocorrélation $C_{xx}(t)$ possède deux propriétés importantes. Pour des signaux réels, la fonction d'autocorrélation est paire, soit pour un signal $x(t)$ réel :

$$C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$$

D'autre part la fonction d'autocorrélation a sa valeur maximale pour $t = 0$:

$$C_{xx}(t) \leq C_{xx}(0) \quad \text{quel que soit } t$$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'autocorrélation étant une analyse de la ressemblance d'un signal avec lui-même, le résultat de cette comparaison est maximum lorsque le signal n'est pas décalé temporellement ($t = 0$), c'est-à-dire identique à lui-même.

b) Relation avec la densité spectrale

Considérons la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale d'un signal $x(t)$:

$$\begin{aligned} F^{-1} \{S_{xx}(f)\} &= F^{-1} \{|X(f)|^2\} = F^{-1} \{X(f) \cdot \bar{X}(f)\} \\ F^{-1} \{S_{xx}(f)\} &= x(t) * \bar{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot \bar{x}(\theta - t) \cdot d\theta = C_{xx}(t) \end{aligned}$$

D'où relation suivante :

$$C_{xx}(t) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(f) \quad (3.24)$$

et pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$C_{xy}(t) \xleftrightarrow{F} S_{xy}(f) \quad \text{ou} \quad C_{yx}(t) \xleftrightarrow{F} S_{yx}(f)$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, c'est-à-dire la redistribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. Aussi il sera souvent plus facile de calculer la fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation d'un signal en passant par son spectre ou sa densité spectrale.

c) Corrélation de signaux périodiques

Pour un signal périodique réel $x(t)$ de période T_0 , on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\theta) \cdot x(\theta - t) \cdot d\theta \quad (3.25)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, tous les signaux périodiques peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série de Fourier (cf. relation 2.1) :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n F_0 t + b_n \sin 2\pi n F_0 t)$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'autocorrélation suivante :

$$C_{xx}(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cdot \cos(2\pi n F_0 t)$$

Nous pouvons effectivement conclure que la fonction d'autocorrélation conserve l'information fréquence, mais pas l'information phase. Le signal d'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences. Par contre la représentation de la fonction d'autocorrélation est d'autant plus distordue que le signal est riche en harmoniques étant donné que l'addition de ces signaux périodiques se fait sans cohérence de phase. Les distorsions de certains signaux riches en harmoniques seront mises en évidence dans le paragraphe suivant.

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$, on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} x(\theta) \cdot y(\theta - t) \cdot d\theta \quad (3.26)$$

Ainsi si ces signaux sont périodiques de même période T_0 , ils peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série de Fourier (cf. relation 2.5) :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t}$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'intercorrélation suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_0) \cdot \bar{Y}(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t}$$

Mais si ces signaux sont périodiques de périodes différentes T_1 pour $x(t)$ et T_2 pour $y(t)$, ils peuvent s'exprimer sous la forme des développements en série de Fourier suivants (cf. relation 2.5) :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(nF_1) \cdot e^{j2\pi nF_1 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y(nF_2) \cdot e^{j2\pi nF_2 t}$$

La fonction d'intercorrélation est alors la suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(n \cdot (pF_1)) \cdot \bar{Y}(n \cdot (qF_2)) \cdot e^{j2\pi nF_3 t} \quad \text{avec} \quad F_3 = p \cdot F_1 = q \cdot F_2$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques de périodes différentes est une fonction périodique dont la période est le ppcm (plus petit commun multiple) des périodes des signaux considérés. Si le rapport des périodes est irrationnel, alors la fonction d'intercorrélation est nulle.

d) Exemples de fonctions d'autocorrélation

Représentation temporelle

- Signal sinusoïdal :

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t) :$$

Fonction d'autocorrélation

- Fonction cosinusoidale

$$C_{ss}(t) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

- Signal cosinusoidal :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t) :$$

- Signal carré pair à composante continue nulle :

$$s(t) = s_{c1}(t)$$

$$\text{avec } s_{c1}(t) = -A \text{ pour } t \in [-T_0/2, -T_0/4]$$

$$\text{et } s_{c1}(t) = A \text{ pour } t \in [-T_0/4, T_0/4]$$

$$\text{et } s_{c1}(t) = -A \text{ pour } t \in [T_0/4, T_0/2]$$

- Fonction porte :

$$s(t) = A \cdot \Pi_\tau(t)$$

$$\text{avec } \Pi_\tau(t) = 1 \text{ pour } t \in [-\tau/2, +\tau/2]$$

$$\text{et } \Pi_\tau(t) = 0 \text{ pour } t \notin [-\tau/2, +\tau/2]$$

- Fonction cosinusoidale

$$C_{ss}(t) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

- Fonction triangulaire :

$$C_{s_{c1}s_{c1}}(t)$$

$$= \frac{4A^2}{\pi^2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot e^{j2\pi(2p+1)F_0 t}$$

$$C_{s_{c1}s_{c1}}(t) = s_{tr}(t)$$

avec

$$s_{tr}(t) = A^2 + \frac{4A^2}{T_0} t \text{ pour } t \in [-T_0/2, 0]$$

$$\text{et } s_{tr}(t) = A^2 - \frac{4A^2}{T_0} t \text{ pour } t \in [0, T_0/2]$$

- Fonction triangle

$$C_{ss}(t) = A^2 \cdot \tau \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$$

3.3.3 Théorème de Parseval

Il paraît évident que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : aussi elle sera la même qu'il s'agisse de la représentation temporelle ou fréquentielle. Les relations 3.16 et 3.20 permettent ainsi d'écrire :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot df$$

ou dans le cas de deux signaux :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{y}(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \bar{Y}(f) \cdot df$$

Chapitre 4

Modulation des signaux

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 Spectre d'un signal et bande passante d'un support

Le domaine de la modulation des signaux vient du besoin de transmettre un signal physique, support d'une information entre deux points distants. Considérons un signal à transmettre $s(t)$, ayant une représentation fréquentielle $S(f)$. Le spectre du signal, calculé par la transformée de Fourier, est en particulier caractérisé par l'encombrement fréquentiel, c'est-à-dire la zone de fréquence que le signal occupe, zone appelée **largeur de bande spectrale**. Pour tout signal réel $s(t)$, on a un spectre borné pour lequel on peut définir une fréquence minimale f_m et une fréquence maximale f_M telles que $S(f) = 0$ pour toute fréquence f inférieure à f_m et supérieure à f_M . Par exemple nous avons :

- signal de parole « téléphonie » : $f_m = 300$ Hz et $f_M = 3,4$ KHz
- signal sonore « haute fidélité » : $f_m = 20$ Hz et $f_M = 16$ KHz

La transmission de ce signal va être effectuée soit à l'aide d'un support physique de transmission qui peut être un câble métallique (paire bifilaire, câble coaxial) ou une fibre optique, soit en utilisant une propagation libre d'ondes hertziennes.

De la même façon que pour le signal, une voie de transmission est nécessairement imparfaite et donc ne laisse passer que certaines fréquences. Cette bande de fréquences, dans laquelle les signaux sont « correctement » transmis, caractérise le support de transmission; elle est appelée **bande passante du support**. Cette bande passante est généralement définie par rapport à la valeur du rapport de la puissance du signal à la sortie sur la puissance du signal à l'entrée (cf. paragraphe 3.1.1). Par exemple, dans le cas d'une bande passante définie à -3 db, la puissance de sortie sera égale à la moitié de la puissance du signal d'entrée.

Ainsi, en fonction des caractéristiques spectrales du signal à propager, le choix du câble est guidé par une modification moindre du signal et par une protection contre les bruits externes. D'un point de vue pratique, il est possible de réaliser un tableau comparatif des différents câbles suivant quatre critères :

Câble	Longueur	Fréquence	Mise en œuvre	Immunité aux bruits
Câble plat	très faible ($< 0,5$ m)	faible (< 10 KHz)	simple	non
Paire torsadée	moyenne (≈ 10 m)	moyenne (< 1 MHz)	simple	oui, moyenne
Câble coaxial	moyenne (≈ 10 m)	grande (< 100 MHz)	difficile (contrainte mécanique de torsion)	oui, grande
Fibre optique	grande ($\approx$ Km)	très grande	très difficile (contrainte mécanique torsion et transformation du signal optique-électrique)	oui, très grande

4.1.2 Types de transmission

Les deux caractéristiques, présentées précédemment (largeur spectrale du signal et bande passante du support), conduisent aux deux remarques suivantes :

- le spectre du signal que l'on désire transmettre doit être compris dans la bande passante du support de la voie de transmission si l'on veut avoir une réception correcte sans déformation par la propagation dans le support (exemple : transmission impossible d'un signal télévision HF sur un simple câble bifilaire) ;
- si le support de la voie de transmission a une très large bande passante par rapport au signal à transmettre, il est évident que l'utilisation de la voie de transmission n'est pas optimisée (exemple : utilisation d'une fibre optique pour transmettre une ligne téléphonique).

Ces deux remarques permettent de distinguer les deux techniques de transmission de signaux utilisées :

- **transmission en bande de base** : les signaux sont transmis tels qu'ils sortent de la source, c'est-à-dire dans leur bande de fréquence originale. Cette technique est utilisée chaque fois que le milieu de transmission convient au sens des domaines fréquentiels et que les conditions économiques permettent de consacrer un support physique à chaque communication (exemple : réseaux locaux informatiques) ;
- **transmission par modulation** : cette opération consiste à transposer un signal en un autre signal contenant la même information, mais avec une modification en fréquence du signal.

Ce dernier mode de transmission par modulation, que nous allons étudier, présente essentiellement deux avantages :

- le **multiplexage fréquentiel** : utilisation du même support de transmission par plusieurs communications ;
- l'**adaptation aux conditions particulières d'un milieu de transmission** : insensibilisation aux parasites, augmentation des distances de propagation, etc.

4.1.3 Les différentes formes de modulation

La modulation d'un signal utilise un signal sinusoïdal V_p de fréquence f_p , appelé onde porteuse, :

$$V_p = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } f_p = \Omega/2\pi$$

Ce signal ou onde porteuse V_p est utilisé pour transmettre le signal « informatif » en modifiant l'une de ses caractéristiques, c'est-à-dire que un des paramètres de l'onde porteuse va varier au « rythme » du signal à transmettre. Les trois possibilités de modification ou modulation sont donc :

- amplitude A du signal porteur : **modulation d'amplitude (MA)** ;
- fréquence f_p du signal porteur : **modulation de fréquence (MF)** ;
- phase φ du signal porteur : **modulation de phase**.

Il est à remarquer que la fréquence porteuse f_p est en général très supérieure à la plus haute fréquence f_M du signal à transmettre.

Ces trois types de modulations sont appelés « modulation finale » permettant de créer le signal directement émis par l'émetteur. De plus il est possible dans certains cas d'associer deux types de modulation (par exemple la modulation d'amplitude et de phase).

La comparaison de ces différents modes de modulation et le choix de l'une de ces méthodes se font sur la base de nombreux critères (immunité aux bruits ou qualité de la transmission, facilité de réalisation, coût, etc.).

4.2 MODULATION D'AMPLITUDE

4.2.1 Principe de la modulation d'amplitude

L'onde porteuse étant définie par $s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$ et le signal modulant $s(t)$ à transmettre vérifiant la propriété $|s(t)|_{\max} \leq 1$, l'expression du signal modulé en amplitude $s_{OMA}(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot [1 + m \cdot s(t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

où m est le taux de modulation (exprimé en pour-cent de la profondeur de modulation), nombre compris entre 0 et 1 tel que l'expression entre crochets soit toujours positive.

Si on observe le signal modulé pendant une durée de plusieurs périodes de l'onde porteuse, on voit varier l'amplitude instantanée de cette onde en fonction du signal $s(t)$ (cf. figure 4.1). Dans le cas où l'amplitude maximale du signal $s(t)$ est égale à 1, l'amplitude positive de l'onde porteuse varie de $A(1+m)$ à $A(1-m)$ et l'amplitude négative entre $-A(1+m)$ et $-A(1-m)$. On parlera d'enveloppe du signal modulé.

4.2.2 Étude spectrale d'un signal modulé en amplitude

a) Cas particulier : $s(t) = \cos(\omega t)$

Dans ce cas particulier, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot [1 + m \cdot \cos(\omega \cdot t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

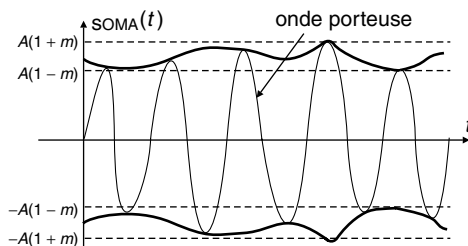


Figure 4.1 Représentation de l'onde modulée en amplitude.

Soit :

$$s_{OMA}(t) = A \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \frac{mA}{2} [\cos((\Omega - \omega)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega)t + \varphi)]$$

Le spectre se compose donc de trois raies : Ω onde porteuse, $\Omega - \omega$ raie latérale inférieure et $\Omega + \omega$ raie latérale supérieure (cf. figure 4.2). La largeur spectrale occupée par le spectre est de 2ω .

b) Cas général: $s(t)$ quelconque

Dans ce cas général, le signal $s(t)$ peut s'exprimer suivant sa décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire :

$$s(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

Cette décomposition est supposée limitée aux $n + 1$ premiers termes, soit pour $i > n$, $a_i = 0$. Donc nous avons un spectre borné qui peut être représenté de façon continue en supposant les raies très proches, c'est-à-dire la différence entre les ω_i très petite (cf. figure 4.3). En posant $m_i = ma_i$, l'expression du signal modulé est donnée par :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^n m_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \right] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

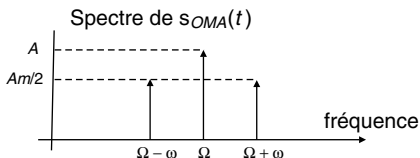


Figure 4.2 Représentation unilatérale du spectre de l'onde modulée en amplitude par un signal sinusoïdal.

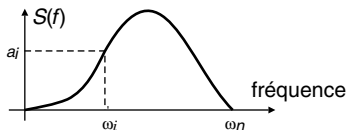


Figure 4.3 Représentation du spectre borné d'un signal modulant quelconque.

Soit :

$$s_{OMA}(t) = A \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \sum_{i=0}^n \frac{Am_i}{2} \cdot [\cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)]$$

Cette représentation conduit à une représentation spectrale unilatérale $S_{OMA}(f)$ se présentant sous la forme d'une raie centrale de fréquence Ω identique au cas précédent et de deux bandes latérales s'étendant de Ω à $\Omega + \omega_n$ (bande latérale supérieure) et de $\Omega - \omega_n$ à Ω (bande latérale inférieure) (cf. figure 4.4). La largeur spectrale est donc de $2\omega_n$. Ainsi si l'on désire transporter par un même canal plusieurs informations de type basse fréquence (BF), l'écart minimal entre les porteuses doit être de $2\omega_n$.

Remarque : en radiodiffusion où le spectre des signaux BF a été volontairement tronqué à 4,5 kHz, chaque émetteur occupe autour de sa fréquence porteuse une largeur spectrale de 9 kHz. Ainsi pour la gamme « Grandes Ondes » (GO), située entre 150 et 450 kHz, il peut théoriquement être placé environ 30 émetteurs. En réalité, afin d'éviter toutes les interférences une zone non utilisée, dite de silence, a été placée entre les émissions et seule une quinzaine d'émetteurs peuvent coexister.

4.2.3 Puissance en modulation d'amplitude

a) Puissance moyenne de l'onde porteuse

Par définition, pour un signal de l'onde porteuse $s_p(t)$, nous avons :

$$P_{OP} = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} [s_p(t)]^2 \cdot dt \propto \frac{A^2}{2} \quad \text{avec } T_p = \frac{2\pi}{\Omega}$$

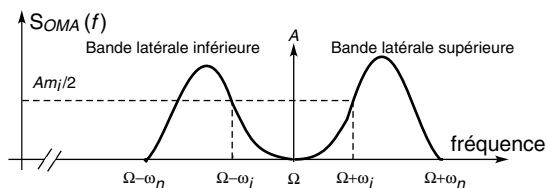


Figure 4.4 Représentation spectrale unilatérale d'un signal modulé en amplitude par un signal quelconque à spectre borné.

b) Puissance crête de l'onde modulée en amplitude

Pour un signal modulé en amplitude, la puissance crête est la puissance moyenne obtenue lorsque le signal modulant est maximum :

$$P_c = P_{OP} \cdot [1 + m]^2 \quad \text{pour } |s(t)|_{\max} \leq 1$$

c) Puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude

Étant donné que nous avons $T_0 \gg T_p$ (T_0 la période du signal modulant $s(t)$), le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur cette période. Ainsi le calcul de la puissance de l'OMA sur la période de la porteuse T_p donne :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2} \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2$$

Le calcul de la puissance de l'OMA sur la période du signal modulant est :

$$P_{OMA} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} A^2 \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2 \cdot \cos^2(\Omega \cdot t) \cdot dt$$

soit :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2T_0} \left[\int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 dt + \int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 \cos(2\Omega t) dt \right]$$

Or, comme le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur la période de l'onde porteuse T_p , il vient :

$$P_{OMA} = \frac{A^2}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} [1 + 2 \cdot m \cdot s(t) + m^2 \cdot s^2(t)] dt$$

En posant $\overline{s(t)}$ la valeur moyenne du signal et $\overline{s^2(t)}$ la valeur quadratique moyenne, nous avons :

$$P_{OMA} = P_{OP} \cdot [1 + 2 \cdot m \cdot \overline{s(t)} + m^2 \cdot \overline{s^2(t)}]$$

Pour un signal sinusoïdal modulant, on obtient :

$$P_{OMA} = P_{OP} \cdot \left[1 + \frac{m^2}{2} \right]$$

d) Conclusion

Dans le cas le plus favorable sur le plan énergétique, c'est-à-dire pour un taux de modulation $m = 1$ et un signal sinusoïdal modulant, nous avons :

$$P_c = 4 \cdot P_{OP} \quad \text{et} \quad P_{OMA} = \frac{3}{2} \cdot P_{OP}$$

Il est important de remarquer que la puissance crête ne dépend que du taux de modulation m , alors que la puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude dépend de m et aussi de la forme du signal modulant.

4.2.4 Systèmes dérivés de la modulation d'amplitude

L'étude de systèmes dérivés de la modulation d'amplitude provient de deux constatations :

- d'une part, une proportion très importante de la puissance transmise par le canal est affectée à la porteuse : $2/3$ dans le cas d'un taux de modulation de 1 et d'un signal sinusoïdal modulant ;
- d'autre part, on peut remarquer que les deux bandes latérales correspondant au signal modulant transportent la même information.

a) Modulation à porteuse supprimée

La modulation d'amplitude à porteuse supprimée consiste à éliminer la porteuse dans la transmission. Le signal modulé théorique s'exprime de la façon suivante :

$$s_{OMA}(t) = A \cdot s(t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

En réalité, cette transmission d'information, plus économique du point de vue énergétique, présente un inconvénient majeur au niveau de la détection puisque le récepteur ne disposant plus de la référence de la fréquence porteuse Ω , devient très complexe à réaliser. Ce problème est éliminé en transmettant un embryon d'onde porteuse, suffisant pour la détection.

b) Modulation à bande latérale unique

Afin de supprimer la redondance des signaux transmis au niveau des deux bandes latérales, on réduit de moitié la largeur du canal pour ne transmettre qu'une bande latérale : modulation à bande latérale unique (**BLU**). En considérant le signal modulant sous la forme d'une décomposition en série de Fourier limitée aux n premiers termes, pour la bande latérale supérieure (**BLS**), le signal modulé s'exprime par :

$$s_{OMA-BLS}(t) = \frac{A}{2} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)$$

et pour la bande latérale inférieure (**BLI**) par :

$$s_{OMA-BLI}(t) = \frac{A}{2} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi)$$

Ce système de modulation peut être réalisé à partir des signaux obtenus lors de la modulation d'amplitude classique en filtrant la bande latérale non utilisée (cf. figure 4.5). Ce type de modulation conduit à un spectre utile de largeur de bande égale ou légèrement supérieure à ω_n . En effet, dans ce cas, une partie faible de l'onde porteuse peut être aussi transmise pour permettre une détection plus facile, rejoignant ainsi le cas suivant.

c) Modulation à bande latérale résiduelle

Ce type de modulation réalise un compromis entre la modulation d'amplitude complète avec son occupation spectrale large et la modulation à bande latérale unique avec les difficultés de synchronisation à la réception. La modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle est obtenue à partir d'un signal de modulation complète filtré afin d'éliminer partiellement l'une des bandes latérales et de diminuer l'amplitude de l'onde porteuse.

Remarque : ce procédé de modulation est utilisé en télévision. En effet le signal vidéo à transmettre a une largeur de bande importante (5 MHz) excluant ainsi une modulation d'amplitude complète en raison de l'occupation spectrale.

d) Modulation à deux porteuses en quadrature

Cette modulation permet de diminuer la largeur spectrale du signal modulé en utilisant deux ondes porteuses. Cette technique consiste à diviser le signal informatif $s(t)$ en deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ modulant deux porteuses $s_{p1}(t)$ et $s_{p2}(t)$ de même fréquence et en quadrature de phase :

$$s_{p1}(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad s_{p2}(t) = A \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

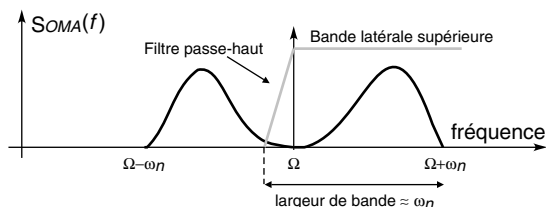


Figure 4.5 Représentation spectrale unilatérale d'un signal modulé en amplitude à bande latérale supérieure unique (BLS).

Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ peuvent être constitués en prenant deux composantes de $s(t)$: données paires et impaires, la composante de droite et la composante de gauche d'un signal stéréophonique. Le dédoublement du signal à la sortie du codeur permet de diviser par deux la rapidité de modulation et donc de diminuer la largeur spectrale par le même facteur. Par conséquent, on retrouve une occupation spectrale du signal modulé identique à une modulation BLU du signal initial $s(t)$. Ce type de modulation est très utilisé dans le domaine de la modulation des signaux numériques.

4.2.5 Procédés de la modulation d'amplitude

a) L'émetteur

La modulation est une opération essentiellement non linéaire ; un circuit ou un composant non linéaire du deuxième ordre (diode, transistor) est donc

nécessaire pour obtenir la porteuse modulée à partir du signal de porteuse pure et signal modulant BF. Dans le cas de circuit non linéaire, le signal de sortie $s(t)$ est une fonction du signal d'entrée $e(t)$ de la forme :

$$s(t) = a + b \cdot e(t) + c \cdot e^2(t)$$

Si le signal d'entrée $e(t)$ est directement lié au signal de l'onde porteuse et au signal modulant (par exemple la somme des deux signaux), nous obtenons en sortie un signal comportant de nombreuses composantes fréquentielles. Seules les composantes correspondant à l'onde modulée en amplitude (OMA), obtenues après filtrage, seront utilisées pour la transmission.

Les deux structures principales de circuit utilisées sont les systèmes suivants :

- Modulation à addition et amplification non linéaire : l'utilisation d'un élément non linéaire (diode) comme amplificateur de la somme des deux signaux « porteuse et modulant » conduit à produire les composantes fréquentielles nécessaires à l'OMA.
- Modulation à multiplication de signaux : la méthode idéale consiste à utiliser un multiplieur analogique, qui effectue directement le produit du signal porteur par $[1 + m \cdot s(t)]$. Ce multiplieur peut être représenté par un amplificateur linéaire dont le gain est le signal modulant.

Une troisième méthode, appelée modulation en anneau, est utilisée pour les modulations sans porteuse. Le circuit comporte un anneau de diodes. La conduction ou le blocage des diodes deux à deux sont pilotés par l'onde porteuse. La sortie peut être modélisée par le produit du signal modulant et d'un signal carré d'amplitude $+1$, -1 et de fréquence identique à celle de l'onde porteuse. Il est à remarquer que ce système de modulation, qui théoriquement ne donne pas un signal à la fréquence porteuse, fait apparaître un embryon de porteuse du fait de la dissymétrie pratique de certains composants électroniques.

b) Le récepteur

La démodulation ou détection est l'opération inverse de la modulation, il s'agit à partir de la porteuse HF modulée de reconstituer le signal BF modulant. Deux techniques permettent de réaliser cette détection :

- La démodulation synchrone : le principe de cette méthode consiste à réaliser le produit du signal modulé et d'un signal de fréquence Ω_0 proche de la fréquence de l'onde porteuse Ω . Si on réalise un calage de l'oscillateur local, c'est-à-dire que $\Omega_0 = \Omega$, le signal de sortie, filtré par un filtre passe-bande, est directement proportionnel au signal BF modulant initial. Cette détection synchrone s'applique à toutes les formes de signaux modulés en amplitude à condition qu'un signal de porteuse soit émis (signal faible) pour synchroniser ou « caler » l'oscillateur local.
- La démodulation d'enveloppe : la détection d'enveloppe, aussi appelée détection linéaire, utilise contrairement à sa deuxième appellation un composant non linéaire : une diode montée pour un redressement mono-alternance suivie d'un filtre passe-bas. En choisissant la constante de temps du filtre très supérieure à la période du signal modulant et très inférieure à la période de l'onde porteuse, le signal BF de sortie sera constitué de l'enveloppe du signal. La diode étant un composant non linéaire, le signal obtenu en sortie devra être filtré afin d'isoler la composante basse fréquence utile.

4.3 MODULATION EXPONENTIELLE

4.3.1 Principe

Le signal de l'onde porteuse de fréquence f_p peut s'écrire sous la forme déjà vue :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } f_p = \Omega/2\pi$$

ou encore sous une forme faisant intervenir la **phase instantanée** $\varphi_i(t)$ et avec la notation complexe :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\varphi_i(t)) \quad \text{ou} \quad s_p(t) = A \cdot e^{j\varphi_i(t)}$$

Cette dernière représentation explique le nom donné à ce type de modulation : la modulation exponentielle consistant à faire varier au rythme du signal modulant la grandeur de la fonction exponentielle, par opposition à la modulation d'amplitude. Cette modulation est aussi appelée **modulation angulaire ou d'angle** puisqu'elle concerne une variation de la phase instantanée.

Nous pouvons aussi définir la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt}$$

Ce sont ces grandeurs $\varphi_i(t)$ et $\Omega_i(t)$ qui vont être modifiées en fonction d'un signal BF à transmettre. Suivant les caractéristiques de cette modification, nous aurons une modulation de fréquence (MF) qui est une action linéaire sur la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$ ou une modulation de phase (MP) qui agit de façon linéaire sur la phase instantanée $\varphi_i(t)$. Ainsi, le tableau 4.1 montre une présentation parallèle de ces deux types de modulation dans le cas d'un signal modulant quelconque $s(t)$. Nous pouvons remarquer que, d'un point de vue de la formulation mathématique, la seule différence entre les expressions de l'onde modulée en fréquence et en phase est la dérivation du signal modulant.

Pour un signal modulant cosinusoidal $s(t) = \cos(t)$, nous obtenons aisément le résultat des relations précédentes et définissons les grandeurs caractérisant les excursions de fréquence et de phase indiquant les domaines de variation de la fréquence et de la phase respectivement autour de la valeur centrale Ω_0 ou $\varphi_0 = \Omega_0 t$ (cf. tableau 4.2). De plus, dans ce cas simple d'un signal modulant à deux niveaux, nous pouvons faire une comparaison graphique des deux modulations de type exponentiel avec la modulation d'amplitude (cf. figure 4.6).

Tableau 4.1 Définitions des modulations de fréquence et de phase.

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot s(t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \int_0^t \Omega_i(t) \, dt$ $= \Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t) \, dt$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t) = A \cos \left[\Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t) \, dt \right]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Omega_0 + \Delta\varphi \frac{ds(t)}{dt}$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A \cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)]$

Tableau 4.2 Modulations de fréquence et de phase (cas d'un signal cosinusoidal).

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \sin(\omega t)$ – indice de modulation : $m = \Delta\Omega / \omega$ – excursion de phase : $\pm \Delta\Omega / \omega = \pm m$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t) = A \cos[\Omega_0 t + \Delta\Omega / \omega \cdot \sin(\omega t)]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \Omega_0 - \Delta\varphi \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$ – excursion de fréquence : $\pm \Delta\varphi \cdot \omega$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A \cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)]$

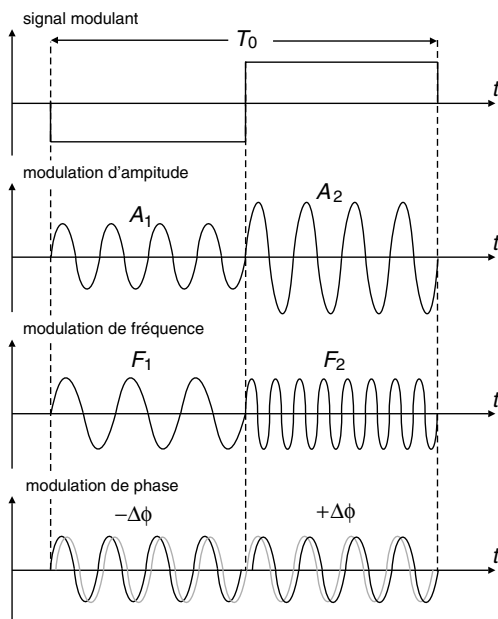


Figure 4.6 Comparaison des modulations d'amplitude, de fréquence et de phase pour un signal modulant de type carré.

4.3.2 Modulation de fréquence

a) Expression de l'onde modulée en fréquence : cas d'un signal cosinusoidal

Dans le cas d'un signal modulant cosinusoidal (fréquence f ou pulsation ω), nous venons de voir l'expression de l'onde modulée :

$$s_{OMF}(t) = A \cos \left[\Omega_0 t + \frac{\Delta \Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right] \quad \text{avec } m = \frac{\Delta \Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f}$$

Afin d'obtenir le spectre de ce signal modulé, nous allons développer cette expression. Soit :

$$s_{OMF}(t) = A[\cos(\Omega_0 t) \cdot \cos(m \cdot \sin(\omega t)) - \sin(\Omega_0 t) \cdot \sin(m \cdot \sin(\omega t))]$$

Pour pouvoir obtenir une relation sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions $\sin$ et $\cos$, nous devons expliciter les deux termes $\cos[m \cdot \sin \alpha]$ et $\sin[m \cdot \sin \alpha]$. En utilisant les fonctions de Bessel de première espèce $J_n(m)$ (cf. annexes), on obtient en développant l'expression précédente de s_{OMF} la forme suivante :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \cos((\Omega_0 + n\omega)t)$$

Le spectre contient donc une infinité de raies latérales de part et d'autre de la fréquence de l'onde porteuse F_0 . Pour un indice de modulation donné m , la fonction de Bessel $J_n(m)$ représente donc l'amplitude de la raie de fréquence $F_0 + nf$ (ou pulsation : $\Omega_0 + n\omega$). L'évolution des fonctions de Bessel $J_n(m)$ et leurs propriétés vont permettre de donner les principales caractéristiques du spectre de l'onde modulée en fréquence (OMF).

Étant donné la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées des fonctions de Bessel, les deux raies latérales du spectre de fréquence $F_0 \pm nf$ ont des amplitudes de même module, le spectre est symétrique par rapport à la fréquence F_0 .

Bien que le nombre de raies et, par conséquent, la largeur de bande du signal secondaire soient théoriquement infinis, l'amplitude des raies latérales éloignées de F_0 finit par décroître. En effet les fonctions de Bessel $J_n(m)$ ont une amplitude décroissante lorsque n augmente à m constant. Cette décroissance est d'autant plus tardive que m est plus élevé (cf. tableau 4.3).

Ce résultat est très important car il permet de déterminer ce que l'on appelle la **largeur utile du spectre** $L_{u,OMF}$, c'est-à-dire la bande de fréquence utilisée réellement par l'OMF. Pour déterminer cette largeur de spectre, il faut se donner une valeur limite pour laquelle la composante de fréquence

nf ne sera plus prise en compte. Cette limite, créée par un filtrage du signal, dépend de la qualité recherchée pour la transmission.

Tableau 4.3 Amplitude de la composante $F_0 + nf$ du spectre pour différentes valeurs de m avec l'indication de la limitation du spectre à $m + 1$.

n	m=1	m=2	m=5	m=10
0	0,77	0,22	0,18	0,25
1	0,44	0,58	0,32	0,04
2	0,11	0,35	0,046	0,25
3	0,02	0,129	0,36	0,06
4	0,0025	0,034	0,39	0,22
5		0,007	0,26	0,23
6		0,001	0,13	0,014
7			0,05	0,22
8			0,02	0,32
9			0,005	0,29
10			0,002	0,21
11				0,123
12				0,063
13				0,029
14				0,012
15				0,005

Si l'on considère que seules les raies d'amplitude dépassant 10 % de l'amplitude de la porteuse non modulée sont conservées, la largeur utile du spectre peut s'exprimer en se limitant à la valeur $n = m + 1$ (règle de Carson), soit :

$$L_{u,OMF} = 2(1 + m + \sqrt{m})f$$

$$L_{u,OMF} \approx 2(1 + m)f = 2(f + \Delta F)$$

Il est important de noter que, par rapport à la modulation d'amplitude, nous avons dans ce cas une largeur de spectre $(1 + m)$ fois plus grande.

De plus si la fréquence du signal modulant est petite devant l'excursion de fréquence ($m \gg 1$), on a :

$$L_{u,OMF} \approx 2mf = 2\Delta F$$

D'autre part, il est intéressant de connaître la position de la raie d'amplitude maximale dans le spectre pour un indice de modulation m donné. Nous pouvons ainsi remarquer que la position de la composante d'amplitude maximale s'éloigne de F_0 au fur et à mesure que m croît. La figure 4.7 met en évidence pour trois indices de modulations cette répartition d'énergie du spectre de l'OMF qui s'éloigne de la fréquence centrale F_0 . Et ainsi nous pouvons noter que les composantes d'amplitude élevée ont tendance à se placer de plus en plus près de $F_0 \pm \Delta F$.

Si l'on fait l'hypothèse d'un indice de modulation faible $m \ll 1$, les seules composantes spectrales significatives sont celles correspondant aux fréquences F_0 et à $F_0 \pm f$. Le spectre de l'OMF est alors identique à celui obtenu dans le cas de la modulation d'amplitude à la phase près.

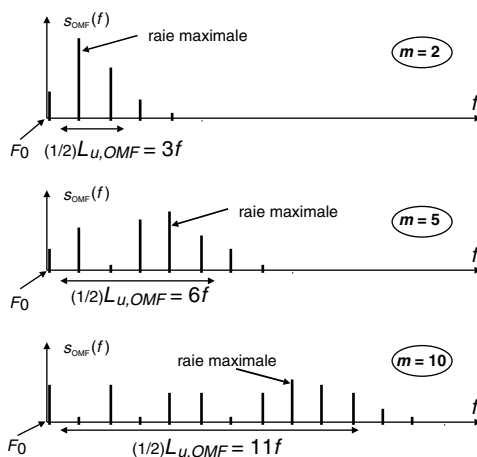


Figure 4.7 Variation du spectre d'une onde modulée en fréquence par un signal sinusoïdal en fonction de l'indice de modulation m .

Remarque : les émissions radiophoniques en modulation de fréquence sont effectuées avec une fréquence de l'onde porteuse de l'ordre de 100 MHz (88 à 108 MHz) et un indice de modulation de 5. Ainsi pour des signaux modulateurs de largeur spectrale d'environ 15 kHz, le domaine fréquentiel occupé par une émission est de $2 \times (6 \times 15) = 2 \times 90 \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}$ autour de la fréquence centrale. Donc deux émetteurs peuvent être séparés théoriquement par seulement 0,18 MHz, en réalité au moins 0,2 MHz. Il peut donc être placé théoriquement 100 émetteurs. En réalité, afin d'éviter toutes les interférences une zone de silence a été placée entre les émissions et d'autre part les émissions étant pour la plupart stéréophoniques, elles ont une largeur spectrale plus importante. Pour ces mêmes émissions en modulation d'amplitude, la largeur de spectre aurait été de seulement 30 kHz au lieu de 180 kHz.

b) Puissance en modulation en fréquence

La puissance de l'onde porteuse s'exprime de la même façon que pour la modulation d'amplitude, soit : $P_{OP} \propto A^2/2$

La puissance moyenne de l'onde modulée en fréquence s'obtient à partir de l'expression de s_{OMF} mise sous sa forme complexe :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot e^{j(\Omega_0 + n\omega)t}$$

ou

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j\Omega_0 t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot e^{jn\omega t}$$

Les fonctions de Bessel étant de puissance bornée (cf. annexes), il vient :

$$P_{OMF} = P_{OP} \propto \frac{A^2}{2}$$

Contrairement à ce que nous avons obtenu pour la modulation d'amplitude, cette puissance est indépendante du signal modulant. Il est donc possible d'augmenter le signal informatif, c'est-à-dire l'indice de modulation

sans augmenter la puissance transmise. Or l'augmentation de l'indice de modulation améliore de façon importante le rapport signal sur bruit, bien que l'on augmente aussi le bruit capté en élargissant le spectre à transmettre.

Ainsi l'amélioration de la modulation de fréquence par rapport à la modulation d'amplitude, exprimée en db, est directement fonction de l'indice de modulation m selon l'expression suivante :

$$5 + 20 \log_{10} m$$

c) Traitement spécifique des signaux de la parole en MF

Le spectre de fréquence des signaux de parole et musique n'a pas une répartition constante des différentes composantes. Si la fréquence de 400 Hz est la référence, le niveau baisse et atteint -14 db à 10 KHz (cf. figure 4.8).

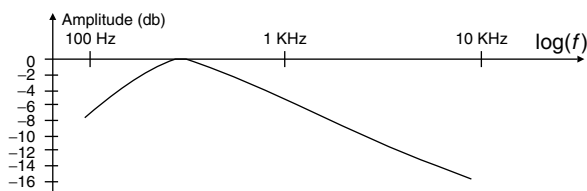


Figure 4.8 Répartition spectrale d'un signal audiofréquence (parole ou musique).

Il s'ensuit que le rapport signal/bruit diminue en hautes fréquences avec un niveau de bruit identique sur tout le spectre. Cette dégradation est encore plus importante en modulation de fréquence puisque la bande spectrale transmise est plus large.

Pour palier à ce problème, on réalise au niveau de l'émetteur une préaccentuation permettant d'augmenter les amplitudes des hautes fréquences du spectre. À la réception, on effectue bien évidemment l'opération inverse : la désaccentuation (cf. figure 4.9).

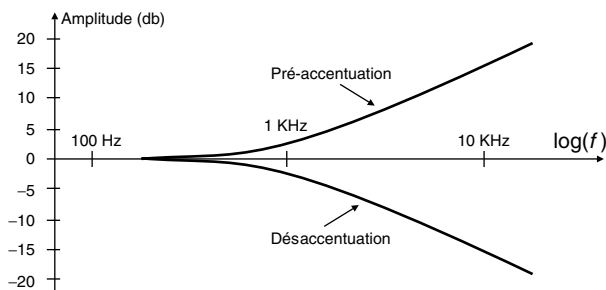


Figure 4.9 Courbes de pré-accatuation et de désaccatuation utilisées pour éviter un rapport signal/bruit faible en hautes fréquences (pour $t = 50 \mu s$).

d) Spectre de l'onde modulée en fréquence : cas général

Le signal $s(t)$ informatif peut se décomposer suivant la série de Fourier limitée au terme n (signal physique) :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

L'expression de l'OMF sous sa forme complexe est donc :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t + \sum_{i=1}^n m_i a_i \cdot \sin(\omega_i t)]} \quad \text{avec } m_i = \frac{\Delta\Omega}{\omega_i} = \frac{\Delta F}{f_i}$$

D'où, en utilisant les fonctions de Bessel, l'expression générale est :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t]} \cdot \prod_{i=1}^n \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_i) \cdot a_i \cdot e^{jk\omega_i t}] \right]$$

Prenons l'exemple d'un signal avec uniquement deux composantes fréquentielles de pulsation ω_1 et ω_2 , nous avons l'expression du signal $s(t)$:

$$s(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

D'où l'expression de l'OMF dans ce cas particulier :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t]} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_1) \cdot a_1 \cdot e^{jk\omega_1 t}] \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_2) \cdot a_2 \cdot e^{jk\omega_2 t}] \right]$$

Il est important de remarquer que cette fonction n'est pas linéaire et donc que le principe de superposition n'est pas applicable. Le signal modulé en fréquence par la somme de deux signaux sinusoïdaux n'est pas la somme des deux signaux modulés en fréquence par chacun de ces signaux. Le spectre va se composer de nombreuses raies dont les premières auront les amplitudes suivantes :

Pulsation	Amplitude
Ω_0	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_1$	$A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_1$	$-A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_2$	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_2$	$-A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$

On peut remarquer que toutes les amplitudes des raies vont dépendre des indices de modulation m_1 et m_2 . Le spectre sera borné lorsque les deux quantités $J_k(m_1)$ et $J_p(m_2)$ ou leur produit deviendront négligeables. Si l'on cherche la largeur spectrale maximale, on peut faire le raisonnement suivant : si $\omega_1 < \omega_2$, alors $m_1 > m_2$. Donc la fonction $J_k(m_1)$ sera petite pour $n = 1 + m_1$. Cette condition implique que la fonction $J_p(m_2)$ soit aussi de faible valeur puisque si $n = 1 + m_1$ et $m_1 > m_2$, alors $n = 1 + m_1$. Ainsi la valeur n est définie par l'indice de modulation de la fréquence la plus petite, mais la largeur spectrale sera obtenue pour la fréquence la plus grande :

$$L_{u,OMF} \approx 2(1 + m_1)\omega_2 \quad \text{avec } m_1 = \frac{\Delta\Omega}{\omega_1}$$

e) *Spectre de l'onde modulée en fréquence :*
cas d'un signal à deux niveaux

Lorsque le signal $s(t)$ est un signal numérique, on associe une fréquence donnée à chacun de ses états. Dans le cas d'une transmission d'un signal binaire (transmission sur réseaux informatiques), deux fréquences sont utilisées (cf. figure 4.6). Cette modulation peut être effectuée par autant d'oscillateurs qu'il y a d'états numériques et alors le signal modulé a une phase discontinue ou par un oscillateur commandé par tension (VCO : *Voltage Controlled Oscillator*) et alors le signal modulé a une phase continue. Hors la discontinuité de phase a pour effet d'étaler le spectre du signal (introduction de transitions raides) ; on préfère donc en général la modulation de fréquence à continuité de phase du fait de la bande passante limitée des supports de transmission.

Dans ce cas, en considérant θ la durée de base d'un bit b_i du signal numérique, l'expression de l'onde modulée en fréquence est :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \cos [2\pi (F_0 + \Delta f \cdot b_i) \cdot t + \varphi_i] \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

et la fréquence instantanée $f_i(t)$ et l'indice de modulation m s'expriment par :

$$f_i(t) = F_0 + \Delta f \cdot b_i(t) \quad \text{avec } f_1 = F_0 - \Delta f \leq f_i(t) \leq f_2 = F_0 + \Delta f$$

et

$$m = \frac{2\pi\Delta f}{2\pi(1/2\theta)} = 2 \cdot \Delta f \cdot \theta$$

Le spectre de ce signal modulé en fréquence à continuité de phase est donné par l'expression suivante (cf. figure 4.10) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{2A^2\Delta f}{(\pi\theta)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\theta(f - \Delta f)) \cdot \sin^2(\pi\theta(f + \Delta f))}{1 - \cos(2\pi\theta\Delta f) \cdot \cos(2\pi\theta f) + (f^2 - \Delta f^2) \cos^2(2\pi\theta\Delta f)}$$

Pour définir le meilleur indice de modulation, on peut chercher un compromis entre les deux caractéristiques suivantes :

- le coefficient de corrélation entre les deux états du signal permet de mesurer la probabilité d'erreur à la réception. Celle-ci est minimale pour **$m = 0,715$**

- la largeur spectrale est définie comme la bande de fréquence rassemblant 95 % de la puissance, alors le spectre le plus étroit est obtenu pour un indice de $m = 0,64$.

Soit l'exemple des systèmes de transmissions numériques (modems conformes à l'avis V23 du CCITT), qui utilisent une modulation de fréquence à deux valeurs fréquences: 1 300 Hz et 2 100 Hz (d'où $\Delta f = 400$ Hz et $F_0 = 1\,700$ Hz). La rapidité de modulation étant de 1 200 bit/s ($1/\theta$), l'indice de modulation est de $(800(1/1\,200)) = 0,66$.

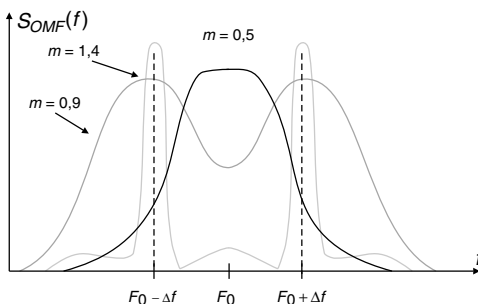


Figure 4.10 Spectre d'un signal modulé en fréquence par un signal numérique.

f) Les méthodes de modulation de fréquence

Les principales méthodes de modulation de fréquence sont au nombre de deux : le modulateur indirect de Armstrong et le modulateur direct.

Le modulateur indirect de Armstrong est basé sur un circuit intégrateur dans lequel est injecté le signal modulant basse fréquence suivi d'un modulateur d'amplitude sans porteuse du type modulateur en anneau. Ce signal obtenu est additionné au signal de la porteuse déphasée de $\pi/2$, déjà utilisée pour la modulation d'amplitude, et enfin le signal résultant est écrêté pour obtenir un signal à amplitude constante. Il est intéressant de noter que le modulateur d'Armstrong sans le module d'intégration est un modulateur de phase.

Le modulateur direct consiste à modifier, au rythme du signal basse fréquence, la fréquence de fonctionnement d'un oscillateur. Cette dernière est en général définie par la valeur d'une capacité. La méthode de loin la plus répandue consiste à utiliser une **diode à capacité variable** ou varicap. En effet une jonction P-N polarisée en sens inverse se comporte comme une capacité dont la valeur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la tension à ses bornes.

g) Les méthodes de démodulation de fréquence

Après un amplificateur haute fréquence (HF), un récepteur complet pour une onde modulée en fréquence se compose en premier lieu d'un système de changement de fréquence. Sur les entrées d'un circuit mélangeur ou d'un multiplieur sont envoyés le signal de l'onde modulée en fréquence $s_{OMF}(t)$ et le signal $s_{OL}(t)$ en provenance d'un oscillateur local, accordé par l'utilisateur du récepteur :

$$s_{OMF}(t) = A \cos(\Omega t + m \sin(\omega t))$$

$$s_{OL}(t) = A_L \cos(\Omega_L t)$$

Le signal de sortie $s_m(t)$ est donc constitué de deux signaux centrés sur $\Omega - \Omega_L$ et sur $\Omega + \Omega_L$ (respectivement bandes latérales inférieure et supérieure) :

$$s_m(t) = kAA_L [\cos((\Omega - \Omega_L)t + m \sin(\omega t)) + \cos((\Omega + \Omega_L)t + m \sin(\omega t))]$$

Un filtre de moyenne fréquence ou encore de fréquence intermédiaire $F_i = \Omega_i/2\pi$ (FI) permet de sélectionner la bande latérale inférieure uniquement. Le signal $s_{FI}(t)$, résultat de ce changement de fréquence, est donc :

$$s_{FI}(t) = kAA_L [\cos(\Omega_i t + m \sin(\omega t))] \quad \text{avec } \Omega_i = \Omega - \Omega_L$$

Le système d'accord est organisé de telle sorte que cette fréquence intermédiaire soit indépendante de la fréquence d'émission. Ceci permet d'ajuster définitivement tous les paramètres de l'amplificateur intermédiaire et du démodulateur de fréquence. Par exemple, dans le cas de la

radiodiffusion en modulation de fréquence, cette fréquence intermédiaire a été fixée par convention à 10,7 MHz.

Cet amplificateur est en général suivi d'un limiteur d'amplitude. En effet, les variations d'amplitude, qui ne transportent aucune information, ne pourraient contribuer qu'à perturber la phase suivante : la démodulation de fréquence. Le circuit « démodulateur de fréquence » ou « discriminateur de fréquence » doit fournir un signal proportionnel à la déviation de fréquence du signal $s_{FI}(t)$ par rapport à la fréquence intermédiaire F_i .

Parmi les nombreux systèmes plus ou moins complexes et performants de démodulation de fréquence qui existent, nous n'étudierons les principes que de quelques uns :

- Transformation en modulation d'amplitude : ce système utilise un circuit résonnant du type RLC, accordé sur une fréquence f_0 . Nous savons que si une tension d'amplitude constante et de fréquence f est appliquée à un tel circuit, la tension de sortie a une amplitude fonction de la position relative de f_0 et f . Selon le coefficient de surtension du circuit résonnant, une faible variation de f se traduit par une variation proportionnelle de l'amplitude. D'où le passage à une modulation de type amplitude qu'il faut ensuite démoduler par les méthodes vues au chapitre précédent.
- Discriminateurs à déphasage ou à variation de phase : le principe de ces circuits utilise le fait que si les enroulements primaire et secondaire d'un transformateur sont accordés et fortement couplés, les tensions sont en quadrature à la résonance et leur déphasage varie presque linéairement autour de cette fréquence de résonance.
- Démodulateur de fréquence par comptage : le principe de ce démodulateur consiste en un premier temps à réaliser une transformation du signal d'entrée en créneaux par écrêtage ou par comparateur. Le signal carré ainsi obtenu, de fréquence identique au signal initial, est différencié afin d'obtenir des impulsions qui sont mises en forme par un circuit monostable. Ainsi, le signal obtenu est une suite d'impulsions de largeur et

d'amplitude fixe dont la périodicité est celle du signal d'entrée. Sa valeur moyenne est donc rigoureusement proportionnelle à la fréquence de ce dernier. Un intégrateur permet directement d'obtenir le signal modulant recherché.

- Détection d'une onde modulée en fréquence par une boucle d'asservissement de phase : une boucle d'asservissement ou verrouillage de phase (PLL : *phase lock loop*) est un circuit composé d'un oscillateur à fréquence qui fournit un signal de fréquence proportionnelle à une tension d'entrée et d'un circuit comparateur de phase qui fournit un signal qui est fonction du déphasage entre les signaux, supposés sinusoïdaux et de même fréquence, appliqués à ses deux entrées. Dans notre cas le signal d'entrée du détecteur de phase est le signal modulé en fréquence (signal à F_i) et la sortie de ce circuit fournit un signal proportionnel à la variation de fréquence : résultat recherché. La boucle à asservissement de phase est donc un démodulateur de fréquence idéal, la seule condition à satisfaire est que la vitesse de variation de la fréquence soit inférieure à la fréquence de coupure de la boucle.

4.3.3 Modulation de phase

La modulation en phase d'une porteuse par un signal BF est équivalente à une modulation de fréquence par la dérivée du signal informatif. Par conséquent, tout ce qui a été développé pour la modulation de fréquence s'applique. Cette modulation est la plus employée pour la transmission des signaux numériques. En effet elle réalise un bon compromis puissance/efficacité spectrale, c'est dire le meilleur « nombre de bits par seconde et par hertz de bande passante ». Cette notion a déjà été évoquée dans la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (*cf.* chapitre 4.2).

a) Modulation de phase pour la transmission de signaux numériques

Pour minimiser la probabilité d'erreur, les différents états de la phase sont régulièrement répartis sur l'intervalle disponible $[0, 2\pi]$. Pour des raisons

techniques de démodulation avec une probabilité d'erreur acceptable, on ne dépasse pas 8 valeurs de phase.

Dans la cas d'un signal codé binaire, la modulation à deux phases s'écrit :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t + \varphi_i) \quad \text{avec } \varphi_i = \pm \pi \text{ (selon la donnée 0 ou 1)}$$

La densité spectrale $S(f)$ du signal modulé en phase dépend de la durée d'un bit égale au temps θ , soit :

– modulation cohérente ($F_0 = k/\theta$) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{A^2}{\theta^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi \theta f)}{\pi^2 (f^2 - F_0)^2} \cdot f^2$$

– modulation non cohérente ($F_0 \neq k/\theta$) :

$$S_{OMF}(f) = \frac{A^2}{\theta^2} \cdot \left[\frac{\sin^2(\pi \theta (f - F_0))}{\pi^2 (f - F_0)^2} + \frac{\sin^2(\pi \theta (f + F_0))}{\pi^2 (f + F_0)^2} \right]$$

Si $F_0 \gg 1/\theta$ (k très grand), les deux expressions sont quasiment identiques et le spectre est centré autour de F_0 . Pour augmenter le débit binaire en conservant la fréquence de modulation ($1/\theta$), il suffit d'augmenter le nombre d'états de phase (cf. figure 4.11).

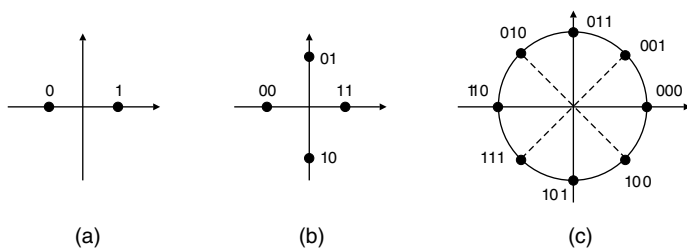


Figure 4.11 Représentation vectorielle d'un signal modulé en phase à deux valeurs (a), à quatre valeurs (b) et à huit valeurs (c). Dans le cas (c), le code est tel qu'un seul bit change lorsque l'on passe d'un état de phase au plus proche voisin (code de Gray).

b) Démodulation des signaux modulés en phase pour la transmission de signaux numériques

La réception et la démodulation des signaux modulés en phase peuvent se réaliser avec deux types de démodulateurs : démodulateur cohérent et démodulateur différentiel.

Le principe du démodulateur cohérent est l'utilisation d'un oscillateur local synchronisé sur la fréquence de la porteuse. Le signal reçu est multiplié par le signal de l'oscillateur local déphasé des mêmes états utilisés à la modulation; la sortie de ces circuits multiplieurs est soumise à un filtrage passe-bas qui indique s'il y a identité entre le signal reçu et un des signaux du récepteur.

La démodulation différentielle consiste à multiplier le signal reçu par le signal reçu précédent (retard de θ). La phase du signal reçu étant φ_i et celle du signal retardé φ_{i-1} , un filtrage passe-bas de la sortie permet d'obtenir un signal proportionnel à $\cos(\varphi_i - \varphi_{i-1})$ et de déterminer le saut de phase 0 ou π .

c) Modulations combinées d'amplitude et de phase

Au lieu de faire correspondre les différents états du signal numérique à l'un des paramètres caractéristiques de l'onde porteuse (amplitude, fréquence ou phase), on peut utiliser à la fois deux paramètres. C'est l'association simultanée « amplitude A_i et phase φ_i » qui a été retenue. Le signal modulé est le suivant :

$$s_{OMF}(t) = A_i \cdot \cos[2\pi F_0 t + \varphi_i] \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

Un cas particulier est la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (MAQ). Dans le diagramme spatial représentatif de la modulation, chaque état du signal numérique est représenté par un point $M(A_i, \varphi_i)$. Si nous considérons 16 états (quatre valeurs d'amplitude : 2 codées avec A_1 et 2 codées avec A_2), le signal modulé s'écrit (*cf.* figure 4.12) :

$$s_{OMF}(t) = A_1 \cdot \cos[2\pi F_0 t + \varphi] + A_2 \cdot \sin[2\pi F_0 t + \varphi] \quad \text{avec } A_{1,2} = \pm 1 \text{ et } \pm 3$$

Nous pouvons remarquer que, comme précédemment, on utilise un codage de type code de Gray.

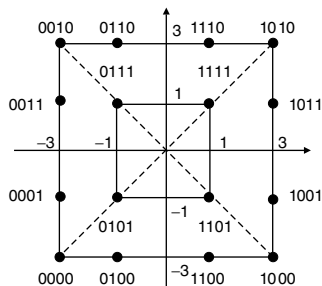


Figure 4.12 Diagramme spatial de la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature avec 16 états.

4.3.4 Modulation primaire/secondaire

Dans certaines applications où le signal informatif à transmettre est complexe formé de plusieurs parties indépendantes (image et son, son stéréophonique, etc.), il est possible d'utiliser deux fois successivement le principe de la modulation, appelée modulation primaire et modulation secondaire. Pour concrétiser cette méthodologie, nous allons considérer l'exemple applicatif des émissions radiophoniques stéréophoniques FM.

La radiodiffusion stéréophonique doit transmettre les signaux $g(t)$ et $d(t)$ correspondant aux deux voies (gauche et droite). Chacun de ces signaux a une largeur spectrale identique permettant d'assurer une très grande qualité sonore : 15 Hz à 15 KHz. On supposera que l'amplitude du spectre est constante et égale à 1 sur toute cette largeur spectrale (spectre intégré temporellement).

Pour permettre une utilisation de ces émissions par des récepteurs monophoniques, les deux signaux émis sont en réalité les signaux $m(t)$ et $s(t)$ tels que :

$$\begin{aligned} m(t) &= g(t) + d(t) && \text{signal utilisé par les récepteurs monophoniques} \\ s(t) &= g(t) - d(t) \end{aligned}$$

Les signaux $m(t)$ et $s(t)$ étant formés à partir de la somme des signaux $g(t)$ et $d(t)$, ils possèdent la même largeur spectrale. Le spectre d'une somme de signaux est égale à la somme des spectres des différents signaux. La figure 4.13 représente schématiquement ces spectres $M(f)$ et $S(f)$ des signaux $m(t)$ et $s(t)$ en supposant un spectre intégré sur le temps et normalisé à 1 (analyse fréquentielle des émissions radiophoniques sur un temps long). La largeur spectrale utilisée sera supposée égale à 15 KHz. À la réception, la reconstitution des signaux $g(t)$ et $d(t)$ à partir des signaux $m(t)$ et $s(t)$ est très simple :

$$g(t) = [m(t) + s(t)]/2 \quad \text{et} \quad d(t) = [m(t) - s(t)]/2$$

Pour transmettre les deux signaux $m(t)$ et $s(t)$ sur le même canal de transmission (même onde porteuse finale), le signal $s(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une onde, dite sous-porteuse, de fréquence $F_{SP} = 38$ KHz et d'amplitude égale à 1. Cette modulation d'amplitude est une modulation d'amplitude sans porteuse avec un indice de modulation égal à 1 (OMA/SP). Un signal $r(t)$ est formé de la somme du signal $m(t)$, de la sous-porteuse modulée par le signal $s(t)$ et d'un signal sinusoïdal pur de fréquence $F_0 = 19$ KHz et d'amplitude 1. Le signal $r(t)$ peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$r(t) = m(t) + s_{OMA}\{s(t), F_{SP}\} + \sin(2\pi F_0 t)$$

Dans une représentation fréquentielle unilatérale, le spectre $R(f)$ de ce signal s'exprime par :

$$R(f) = M(f) + S_{OMA}(f) + \delta(f - F_0)$$

Le spectre, représenté sur la figure 4.14, permet de déterminer une largeur spectrale de 53 KHz. La modulation d'amplitude étant sans porteuse, il n'apparaît pas de raie à 38 KHz.

Cette largeur spectrale pourrait être réduite si, au lieu d'utiliser une modulation d'amplitude complète, il avait été considéré une modulation à bande latérale unique (bande latérale inférieure). Dans ce cas la largeur spectrale aurait été d'environ 38 KHz.

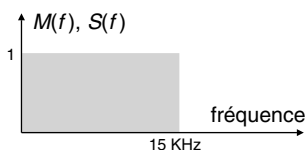


Figure 4.13 Représentation spectrale des signaux à émettre en radiodiffusion FM.

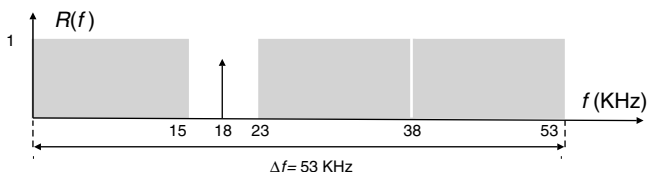


Figure 4.14 Représentation spectrale $R(f)$ du signal intermédiaire $r(t)$.

Pour permettre la transmission hertzienne du signal $r(t)$, précédemment défini, il est utilisé pour moduler en fréquence une porteuse de fréquence $F_p = 100$ MHz. L'indice de modulation est pris égal à 5. Nous avons donc une largeur spectrale ou largeur utile d'émission qui est donnée par la relation approchée de Carson (cf. paragraphe 4.3) :

$$L_{u,OMF} \approx 2(1 + \text{« indice de modulation »}) \cdot f_{\max} = 2(1 + 5) \cdot 53 = 636 \text{ KHz}$$

La gamme de fréquence allouée à ce type de radiodiffusion s'étend de 88 MHz à 108 MHz. De plus un intervalle fréquentiel de protection de 400 KHz est imposé entre les zones spectrales occupées par les émetteurs. La figure 4.15 représente ce spectre de l'OMF. Donc l'occupation d'un émetteur doit être considérée comme étant :

$$L_{u,OMF} = 636 + 400 = 1\,036 \text{ KHz} \approx 1 \text{ MHz}$$

Par conséquent le nombre d'émetteurs dans la gamme allouée peut être de 20. Enfin l'onde sinusoïdale pure à 19 KHz a été émise afin de permettre au récepteur une démodulation plus aisée. En effet, étant donné que la modulation d'amplitude a été réalisée sans porteuse, il est nécessaire

de recréer cette fréquence de 38 KHz pour démoduler le signal. Cette fréquence est alors produite à partir du signal à 19 KHz.

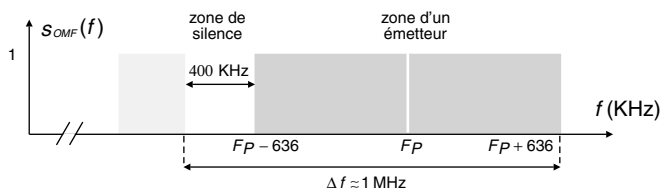


Figure 4.15 Représentation spectrale de l'onde modulée en fréquence.

Chapitre 5

Signaux aléatoires. Bruit

5.1 SIGNAUX ALÉATOIRES

5.1.1 Définitions

Un signal est dit **aléatoire** si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles.

Considérons un ensemble n d'expérimentations ou d'épreuves ou encore d'enregistrements liés à un même phénomène physique. À chacune de ces épreuves, indicées par i , est associée une fonction $s(i)$ qui représente une réalisation du signal aléatoire ou une trajectoire du **processus aléatoire**, modèle mathématique du signal aléatoire (*cf.* figure 5.1). Pour t_0 fixé, l'ensemble des valeurs $s_i(t_0)$ représente les valeurs du signal aléatoire $s(t_0)$.

Un processus aléatoire, décrivant un signal aléatoire est dit **stationnaire** si les propriétés statistiques (moyenne, écart type, etc.) sont indépendantes du choix de l'origine du temps.

Il est plus aisé d'obtenir une expérimentation d'un processus sur un temps long que plusieurs épreuves de ce processus lié à un même phénomène physique. Le processus est dit **ergodique** si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve.

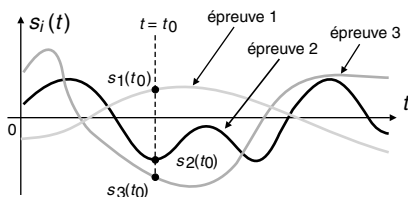


Figure 5.1 Réalisations d'un signal aléatoire provenant de plusieurs épreuves.

Ainsi un processus stationnaire et ergodique pourra être analysé à partir d'une seule expérimentation sur un temps suffisamment long (ces deux propriétés étant vérifiées a posteriori sur les résultats obtenus).

Ce signal aléatoire peut être continu (exemple de la figure 5.1) ou discret (nombre de valeurs fini). Étant donné que la plupart des signaux « informatif » mesurés et étudiés sont de type continus, nous nous intéresserons ici à cette classe de signaux.

5.1.2 Caractérisations statistiques (cf. annexes)

a) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire s défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $p(s)$ et considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants (cf. annexes) :

– valeur moyenne ou espérance :

$$m_s = E_{sp} [s] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.1)$$

– valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2 :

$$E_{sp} [s^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.2)$$

– écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{sp} [(s - m_s)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m_s)^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (5.3)$$

– écart type :

$$\sigma_s = \sqrt{E_{sp} [(s - m_s)^2]} \quad (5.4)$$

– fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, notée $\Gamma_s(\tau)$, est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire s et s' mesurées à deux instants séparés de τ :

$$\Gamma_s(\tau) = E_{sp} [s(t) \cdot s(t - \tau)] = E_{sp} [s \cdot s'] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot s' \cdot p(s, s'; \tau) \cdot ds \cdot ds' \quad (5.5)$$

Si on considère les variables aléatoires s et s' centrées, on parlera de fonction d'autocovariance $\text{Cov}_s(\tau)$:

$$\text{Cov}_s(\tau) = E_{sp} [(s - m_s) \cdot (s' - m_{s'})] = \Gamma_s(\tau) - m_s^2$$

car

$$m_s = m_{s'} \text{ (stationnarité)}$$

Nous pouvons aussi définir la fonction d'autocovariance normalisée ou encore coefficient de corrélation ou dans ce cas d'autocorrélation $r_{ss}(\tau)$:

$$r_{ss}(\tau) = \text{Cov}_s(\tau) / \sigma_s^2 \quad (5.6)$$

b) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique

Si la variable aléatoire stationnaire est aussi ergodique, nous avons donc l'équivalence avec les caractéristiques temporelles, c'est-à-dire :

– moyenne temporelle :

$$\overline{s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot dt \equiv m_s \quad (5.7)$$

– puissance du signal :

$$P_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) \cdot dt \equiv E_{sp} [s^2] \quad (5.8)$$

– puissance des variations par rapport à la moyenne :

$$P_{s-m_s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [s(t) - \overline{s(t)}]^2 \cdot dt = P_s - \overline{s(t)}^2 \equiv \sigma_s^2 \quad (5.9)$$

– valeur efficace des variations :

$$\sqrt{P_{s-m_s}} = \sqrt{P_s - \overline{s(t)}^2} \equiv \sigma_s \quad (5.10)$$

– fonction d'autocorrélation temporelle $C_{ss}(\tau)$:

$$C_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot s(t - \tau) \cdot dt \equiv \Gamma_s(\tau) \quad (5.11)$$

et pour la fonction d'autocorrélation temporelle centrée $Cc_{ss}(\tau)$ ou fonction d'autocovariance temporelle :

$$Cc_{ss}(\tau) = C_{ss}(\tau) - \overline{s(t)}^2 \equiv \text{Cov}_s(\tau) = \Gamma_s(\tau) - m_s^2 \quad (5.12)$$

Nous pouvons remarquer que :

$$C_{ss}(0) = P_s \quad \text{et} \quad Cc_{ss}(0) = C_{ss}(0) - \overline{s(t)}^2 = P_s - \overline{s(t)}^2 = \sigma_s^2 \quad (5.13)$$

c) Caractérisation d'un signal aléatoire gaussien

Considérons un processus aléatoire gaussien stationnaire et centré décrivant une variable aléatoire s . Ce processus est complètement déterminé par la seule donnée de sa fonction de corrélation $C_{ss}(\tau) = C_{ss}(\tau)$. Ainsi nous avons :

- valeur moyenne :

$$m_s = \overline{s(t)} = 0 \quad (\text{variable aléatoire centrée})$$

- écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{sp}[(s)^2] = C_{ss}(0) = C_{ss}(0)$$

- coefficient de corrélation : le coefficient de corrélation r_{ss} s'applique en général à deux signaux aléatoires différents (cf. annexes) ; ici nous considérons les deux variables aléatoires s et s décalé de τ , d'où le coefficient de corrélation $r_{ss}(\tau)$:

$$r_{ss}(\tau) = \frac{C_{ss}(\tau)}{C_{ss}(0)}$$

- densité de probabilité :

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot C_{ss}(0)}} \cdot e^{-\frac{s^2}{2 \cdot C_{ss}(0)}} \quad (5.14)$$

d) Caractérisation de deux signaux aléatoires stationnaires

La caractérisation de l'interaction ou la comparaison de deux signaux aléatoires s_1 et s_2 peuvent être réalisées par les fonctions suivantes :

- fonction de corrélation statistique ou d'intercorrélation statistique :

$$\begin{aligned} \Gamma_{s_1 s_2}(\tau) &= E_{sp}[s_1(t) \cdot s_2(t - \tau)] = E_{sp}[s_1 \cdot s_2] \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} s_1 \cdot s_2 \cdot p(s_1, s_2; \tau) \cdot ds_1 \cdot ds_2 \end{aligned}$$

- fonction de covariance :

$$\text{Cov}_{s_1 s_2}(\tau) = E_{sp}[(s_1 - m_{s_1}) \cdot (s_2 - m_{s_2})] = \Gamma_{s_1 s_2}(\tau) - m_{s_1} \cdot m_{s_2}$$

- coefficient de corrélation :

$$r_{s_1 s_2} = \frac{E_{sp} [(s_1 - m_{s_1}) \cdot (s_2 - m_{s_2})]}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} = \frac{\text{Cov}_{s_1 s_2}(\tau)}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} = \frac{\Gamma_{s_1 s_2}(\tau) - m_{s_1} \cdot m_{s_2}}{\sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2}} \quad (5.15)$$

- fonction de corrélation temporelle ou d'intercorrélation temporelle :

$$C_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) \cdot s_2(t - \tau) \cdot dt \quad (5.16)$$

e) Exemple de la caractérisation d'un signal aléatoire

Considérons un signal sinusoïdal $s(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ d'amplitude a , de pulsation ω et de phase φ . Comme nous l'avons vu au chapitre 4, ce signal peut être le support (onde porteuse) d'un signal informatif à transporter. La modulation s'effectue en faisant varier au rythme du signal informatif ou modulant l'un des trois paramètres du signal porteur $s(t)$. Nous allons supposer que le signal modulant est un processus aléatoire de distribution uniforme sur un intervalle fixé. Ainsi, nous pouvons distinguer les trois cas suivants (cf. figure 5.2) :

- cas I (modulation d'amplitude) : a est une variable aléatoire,

$$\omega = \Omega = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \varphi = 0 = \text{Cte.}$$

- cas II (modulation de fréquence ou de pulsation) : ω est une variable aléatoire,

$$a = A = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \varphi = 0 = \text{Cte.}$$

- cas III (modulation de phase) : φ est une variable aléatoire,

$$a = A = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \omega = \Omega = \text{Cte.}$$

Pour ces trois cas, nous allons caractériser la variable aléatoire $s = s(t_0)$ obtenue à l'instant quelconque fixé t_0 , c'est-à-dire calculer la densité de probabilité $p(s)$, la fonction de répartition $P(s) = \text{Prob}\{s' \leq s\}$, la moyenne statistique m_s et la variance ou moyenne quadratique centrée σ_s :

– **Cas I** (modulation d'amplitude) (cf. figure 5.3) :

$$s = a \cdot \sin(\Omega \cdot t_0) = a \cdot k_0 \quad \text{avec } k_0 \in [-1, +1] \text{ selon la valeur de } t_0$$

$$p(s) = 1/|A \cdot k_0| \quad \text{pour } s \in [0, Ak_0] \text{ ou } s \in [Ak_0, 0] \text{ selon la valeur de } t_0$$

$$\text{si } s \in [0, Ak_0] \text{ alors } P(s) = \frac{s}{|A \cdot k_0|} ; \text{ si } s \in [Ak_0, 0] \text{ alors } P(s) = \frac{-s}{|A \cdot k_0|}$$

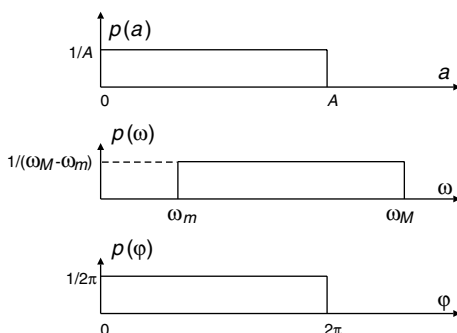


Figure 5.2 Fonctions de distribution des variables aléatoires a , ω et φ .

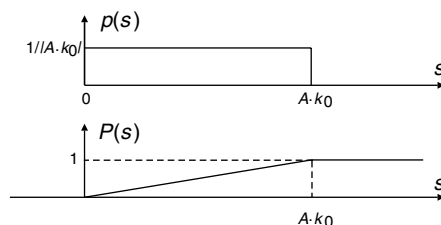


Figure 5.3 Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation d'amplitude (cas I) avec $t_0 > 0$.

Ces lois statistiques dépendent de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire n'est pas stationnaire. De plus, nous avons :

$$\text{si } s \in [0, Ak_0] \quad \text{alors } m_s = |A \cdot k_0| / 2;$$

$$\begin{aligned}
&\text{si } s \in [Ak_0, 0] \quad \text{alors } m_s = -|A \cdot k_0|/2 \\
&\text{si } s \in [0, Ak_0] \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = \frac{(A \cdot k_0)^2}{3}; \\
&\text{si } s \in [Ak_0, 0] \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = -\frac{(A \cdot k_0)^2}{3}
\end{aligned}$$

La valeur moyenne temporelle $\overline{s(t)}$ du signal $s(t)$ étant nulle ($\overline{s(t)} \neq m_s$), le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

– **Cas II** (modulation de fréquence) (cf. figure 5.4) :

$$s = A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$$

avec les variables aléatoires $\omega \in [\omega_m, \omega_M]$ et $s \in [-A, +A]$.

En posant $\Delta\omega = \omega_M - \omega_m$ et $t_0 \cdot \Delta\omega = k \cdot (2\pi) + \Delta\varphi$, il vient :

$$P(s) = \frac{2(k+1) \cdot \text{Arc sin}(s/A) + (k-1)\pi + \Delta\varphi}{k2\pi + \Delta\varphi}$$

$$p(s) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - s^2}} \quad \text{avec } p(0) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{A}$$

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{(k+1) \cdot \pi}{2k\pi + \Delta\varphi} \cdot A^2 \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle sont identiques, par contre les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont différentes ($P_s = A^2/2$). Donc le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

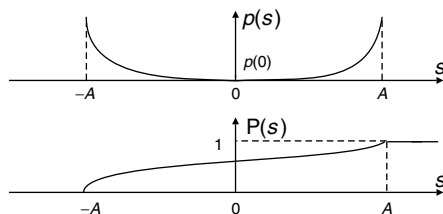


Figure 5.4 Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation de fréquence (cas II).

– **Cas III** (modulation de phase) :

$s = A \cdot \sin(\Omega \cdot t_0 + \varphi)$ avec les variables aléatoires $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $s \in [-A, +A]$

Ce cas III est un cas particulier de la modulation de fréquence en considérant que l'excursion de fréquence produit une variation de phase entre 0 et 2π . Aussi il suffit de reporter dans les relations précédentes du cas II les valeurs suivantes :

$$k = 0 \text{ et } \Delta\varphi = 2\pi$$

$$P(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{Arc sin}(s/A) + \frac{1}{2}$$

$$p(s) = 1/(\pi \cdot \sqrt{A^2 - s^2}) \quad \text{avec } p(0) = \frac{1}{\pi \cdot A}$$

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. Les courbes de représentations de ces deux fonctions sont identiques à celle de la figure 5.4. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{A^2}{2} \equiv P_s = \overline{s^2(t)} \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle, les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont identiques. Il serait aussi possible

de calculer l'autocorrélation statistique et temporelle et de vérifier leur identité :

$$C_{ss}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\Omega \cdot \tau) \equiv \Gamma_s(\tau) \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Le processus associé à cette variable aléatoire est donc ergodique.

On vérifie bien la relation 5.13 sur la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(0) = P_s$.

5.2 LE BRUIT

5.2.1 Définitions

Comme il a été défini dans l'introduction, le bruit correspond à tout signal indésirable limitant l'intelligibilité d'un signal utile. Dans ce chapitre nous donnons quelques renseignements sur la nature du bruit et la notion de rapport signal/bruit.

a) Sources de bruit

Relativement au système considéré (filtre, détecteur, amplificateur, etc.), les sources de bruit sont classables en deux grandes catégories :

- Bruits externes : la source de bruit est localisée à l'extérieur du système et agit sur celui-ci par influence. On peut distinguer deux origines : les perturbations naturelles (bruits cosmiques, bruits atmosphériques) et les perturbations artificielles (parasites générés par des équipements électriques industriels). L'intensité de ces perturbations varie selon les lieux (zones rurales ou urbaines, logements ou usines, etc.). Ces perturbations peuvent être considérées comme négligeables au-delà d'une fréquence de quelques dizaines de MHz.
- Bruits internes : les causes des perturbations internes à un système de traitement peuvent se classer en deux groupes : les perturbations impulsionnelles engendrées par des commutations de courants et le **bruit**

de fond généré dans les câbles et les composants électroniques en raison des mécanismes statistiques de la conduction électrique. Deux composantes principales le constituent : bruit thermique (dans les circuits passifs comme les résistances), bruit de grenaille (dans les composants actifs comme les diodes, transistors,...). Les perturbations impulsives peuvent être souvent modélisées par des processus de Poisson (cf. annexes).

Ces perturbations externes ou internes peuvent être éliminées ou fortement diminuées par des blindages pour le premier groupe ou un mode de construction soigné en ce qui concerne les parasites impulsifs; mais le bruit de fond est irréductible pour une température donnée.

b) Bruit thermique

Au-dessus du zéro absolu, l'agitation thermique des particules est à l'origine d'une tension de bruit qui apparaît sur toute résistance. Ce bruit thermique, appelé effet Johnson, se traduit par une tension moyenne efficace b_{eff}^2 , exprimée par la relation de Nyquist-Johnson :

$$b_{\text{eff}}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot \Delta f$$

avec k : constante de Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K)

T : température (en K)

R : résistance (en Ω)

Δf : bande passante du système à l'entrée duquel on suppose que la résistance bruyante est branchée (en Hz).

La puissance totale du bruit thermique obtenue dans une résistance constante aura pour valeur :

$$P_{th} = k \cdot T \cdot \Delta f \quad \text{exprimée en W} \quad (5.17)$$

Dans la bande de fréquences considérées Δf , ce bruit a une densité spectrale de puissance constante :

$$B(f) = B_0 \quad \text{avec } B_0 = (1/2)kT \quad (5.18)$$

Ce type de bruit est appelé **bruit blanc** (fonction de valeur moyenne nulle). D'après la relation précédente 5.18, sa fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(\tau)$ est en première approximation une impulsion de Dirac ($C_{bb}(\tau) = 0$ sauf pour $\tau = 0$) (cf. figure 5.5) :

$$C_{bb}(\tau) = B_0 \cdot \delta(\tau) \quad (5.19)$$

Pratiquement, un tel bruit n'existe pas, mais on parlera de bruit blanc à chaque fois que son spectre de densité de puissance sera constant à l'intérieur de la bande passante utile du système étudié.

Si cette condition n'est pas entièrement satisfaite, on parlera de bruit rose : fonction d'autocorrélation impulsionnelle très étroite centrée sur $\tau = 0$. Il est possible de modéliser la densité spectrale d'un bruit rose par une fonction porte de largeur $2F_b$ (F_b : fréquence maximale du bruit rose), soit :

$$B(f) = B_0 \cdot \Pi_{2F_b}(f)$$

La fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(\tau)$ est alors donnée par :

$$C_{bb}(\tau) = B_0 \cdot (2F_b) \cdot \frac{\sin(2\pi F_b \tau)}{2\pi F_b \tau}$$

Mais dans le cas où F_b est grand, nous pourrions considérer que la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc ou d'un bruit rose est nulle pur $\tau > \tau_{\text{lim}}$ (cf. figure 5.5).

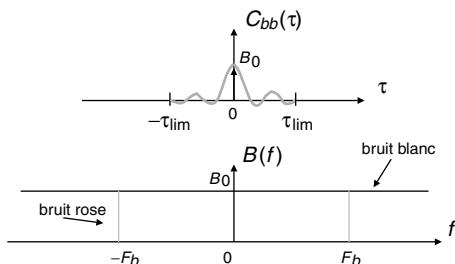


Figure 5.5 Densité spectrale et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc et d'un bruit rose.

Le bruit thermique étant créé à partir de la superposition d'un grand nombre de sources élémentaires, il est possible d'appliquer le théorème central limite (cf. annexes) et par conséquent la distribution statistique d'un bruit thermique suit une loi de Gauss.

c) Bruit de grenaille

Le bruit de grenaille correspond aux fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge, traversant une barrière de potentiel, qui participent à la création d'un courant. Une telle barrière existe à chaque jonction PN d'un semi-conducteur. Cet effet se produit également dans les mécanismes d'émission thermoélectrique et photoélectrique. Contrairement au bruit thermique qui existe en l'absence de tout courant de conduction moyen, le bruit de grenaille dépend du courant moyen et se superpose à celui-ci. On démontre que ce bruit peut aussi être supposé bruit blanc.

d) Modèles de bruit

Pour simuler ou analyser des signaux réels, d'autres modèles, basés sur la densité de probabilité du bruit, peuvent être considérés. Ainsi, en particulier, deux modèles de bruit sont assez répandus :

- le bruit dit gaussien dont la densité probabilité à une répartition de type gaussien caractérisée par une valeur moyenne et un écart type ;
- le bruit dit périodique formé d'une somme de signaux sinusoïdaux sans référence de phase.

Dans le cas du bruit blanc ou du bruit rose, il est possible d'associer une densité de probabilité de type gaussien ou de répartition uniforme.

5.2.2 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal/bruit (S/B) est une caractéristique de la dégradation d'un signal, par définition informatif, par un bruit non informatif. C'est un

moyen pour caractériser un système de transmission en comparant le rapport S/B à son entrée η_e avec le rapport à sa sortie η_s ou pour comparer la «qualité» des diverses méthodes de traitement de signaux.

Soit un signal $x(t)$, de puissance moyenne finie P_x , mélangé avec du bruit blanc $b(t)$, on aura la puissance moyenne du signal résultant $s(t)$, somme des deux signaux $x(t)$ et $b(t)$, exprimée par :

$$P_s = P_{x+b} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + b(t)]^2 dt \quad (5.20)$$

Le bruit étant supposé indépendant du signal, on obtient :

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [b(t)]^2 dt = P_x + P_b \quad (5.21)$$

Dans le cas d'un bruit blanc stationnaire, ergodique et centré, nous avons :

$$P_s = P_x + \sigma_b^2$$

On définira donc le rapport signal/bruit η par le rapport de la puissance moyenne du signal et la puissance moyenne du bruit :

$$\eta = \frac{P_x}{\sigma_b^2} \quad (5.22)$$

Considérons un signal informatif de type cosinusoidal $x(t) = A \cos(\omega t)$; le rapport signal/bruit est donné par :

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{\sigma_b^2}$$

5.2.3 Traitement des signaux noyés dans le bruit

Nous allons considérer ici un bruit blanc $b(t)$ possédant les caractéristiques données précédemment. En utilisant les propriétés de ce signal aléatoire particulier, nous présentons un ensemble d'applications fondamentales de la corrélation : détection, extraction, détermination de caractéristiques dynamiques d'un système linéaire.

a) Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Les propriétés des fonctions de corrélation donnent lieu à diverses méthodes de traitement des signaux bruités. Ces traitements supposent un bruit blanc dont la fonction d'autocorrélation est donnée par la relation 5.19. Soient un signal réel périodique $x(t)$ et un signal de bruit $b(t)$, indépendant de $x(t)$ et sans mémoire ($C_{bb}(\infty) = 0$). Le signal complet à traiter $s(t)$ est donné par la somme de ces deux signaux :

$$s(t) = x(t) + b(t)$$

La fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ de ce signal est donnée par la relation 3.25 :

$$\begin{aligned} C_{ss}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)s(t-\tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [x(t) + b(t)] [x(t-\tau) + b(t-\tau)] dt \end{aligned}$$

Étant donné la propriété de distributivité de l'opérateur de corrélation, il vient :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xb}(\tau) + C_{bx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

Or les fonctions $C_{xb}(\tau)$ et $C_{bx}(\tau)$ sont nulles, car les deux signaux sont indépendants. Ce résultat sera d'autant plus vrai que la période d'intégration T du corrélateur sera grande. La fonction $C_{bb}(\tau)$ est nulle en dehors de 0 si l'on considère un bruit blanc, ou devient négligeable au bout d'une durée finie de corrélation devant la fonction $C_{xx}(\tau)$ si l'on considère un bruit rose (cf. figure 5.6). Par conséquent, nous avons en sortie du corrélateur la fonction d'autocorrélation du signal informatif :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau)$$

Cette méthode permet ainsi de détecter la présence d'un signal même lorsque le signal est faible devant le bruit. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, dans le cas d'un signal périodique, le signal obtenu à la sortie du corrélateur conservera l'information fréquence (il contient toutes les

fréquences du signal et seulement celles-ci) ; mais l'information phase sera perdue et donc cette méthode ne permet pas de restituer la forme du signal.

b) Détection synchrone par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Cette méthode de détection d'un signal noyé dans un bruit peut être encore plus efficace en terme d'extraction d'un signal faible par rapport au bruit en réalisant une détection synchrone. Au lieu de faire l'autocorrélation du signal bruité $s(t)$, le procédé consiste à réaliser la corrélation de ce signal $s(t)$ avec un signal sinusoïdal pur $x_p(t)$. En faisant varier la fréquence de ce signal sinusoïdal, la fonction de corrélation sera non nulle ou maximale à chaque fois que la fréquence du signal $x_p(t)$ sera identique à celle contenue dans le signal $x(t)$. En effet nous avons la fonction de corrélation :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau) + C_{bx_p}(\tau)$$

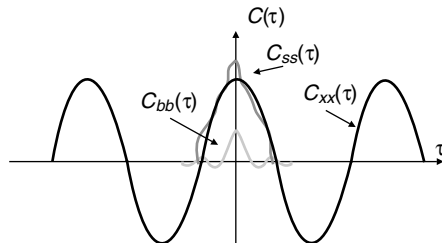


Figure 5.6 Détection d'un signal périodique noyé dans du bruit blanc.

De même que précédemment, la fonction $C_{bx_p}(\tau)$ est nulle ou devient nulle si le temps d'intégration du corrélateur est suffisamment grand, car les deux signaux sont indépendants. d'où :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau)$$

Ce procédé permettant de s'affranchir des autres fonctions de corrélations et en particulier de celle du bruit $C_{bb}(\tau)$, la détection est plus efficace et autorise des rapports signal/bruit beaucoup plus faibles.

Cette méthode de détection est très puissante. Elle est par exemple très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques d'étoiles lointaines, sachant que les signaux captés sont fortement entachés de bruit.

La fréquence du signal à détecter n'étant en général pas connue, la réalisation pratique d'une telle détection se fait grâce à l'utilisation de générateur possédant la fonction de modulation en fréquence. Le terme de modulation correspond à la possibilité de faire varier linéairement la fréquence du signal de sortie du générateur en fonction du temps. La vitesse d'exploration d'un domaine de fréquence peut aussi en général être choisie.

c) Identification d'un système linéaire à l'aide d'un bruit blanc

Un domaine important de l'automatique est l'identification de processus, c'est-à-dire la détermination de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert d'un système de convolution. Ce système étant supposé accessible que par sa sollicitation en entrée et le signal émis en sortie, l'identification consiste à injecter en entrée un signal permettant d'en déduire ensuite par mesure du signal de sortie la réponse impulsionnelle. La méthode la plus directe est basée sur le fait que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution et, par conséquent, si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, le signal de sortie est directement la réponse impulsionnelle. Cette méthode présente l'inconvénient d'avoir à faire une approximation imparfaite de l'impulsion de Dirac (impulsion d'amplitude infinie et de durée nulle). En effet ce signal d'entrée ne doit pas endommager le système à analyser; aussi le générateur d'impulsions fournit une impulsion d'amplitude limitée et de durée courte mais non nulle

Pour éliminer ce problème, l'identification du système (détermination de sa réponse impulsionnelle $h(t)$) peut être réalisée en utilisant un corrélateur et un générateur de bruit blanc selon le montage présenté sur la figure 5.7.

Soit un générateur de bruit blanc fournissant un signal $e(t) = b(t)$, nous avons la propriété suivante :

$$C_{ee}(t) = e(t) * \bar{e}(-t) = C_{bb}(t) = B_0 \cdot \delta(t)$$

Le signal de sortie $s(t)$ du système à analyser, système linéaire, continu et stationnaire (filtre) a par définition la forme suivante :

$$s(t) = h(t) * e(t)$$

Le corrélateur réalise donc l'opération de corrélation entre $e(t)$ et $s(t)$, soit sous la forme d'un produit de convolution :

$$\begin{aligned} C_{se}(t) &= s(t) * \bar{e}(-t) = h(t) * [e(t) * \bar{e}(-t)] \\ &= h(t) * [B_0 \cdot \delta(t)] = B_0 \cdot [h(t) * \delta(t)] \\ C_{se}(t) &= B_0 \cdot h(t) \end{aligned}$$

Ainsi, à la sortie du corrélateur, nous obtenons la réponse impulsionnelle à une constante près. La sortie du corrélateur donne donc directement la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système à identifier.

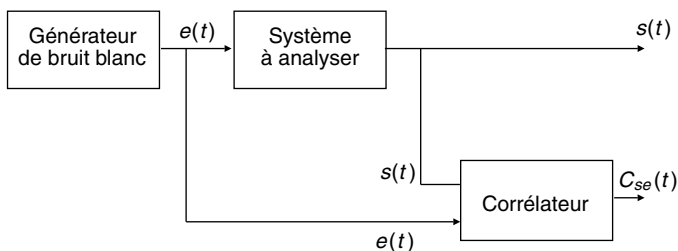


Figure 5.7 Principe du montage permettant de réaliser l'identification d'un système linéaire à partir d'un bruit blanc.

PARTIE 2

Le traitement des signaux numériques

Chapitre 6

Numérisation des signaux

6.1 ÉCHANTILLONNAGE

6.1.1 Échantillonnage idéal : définition

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs $s(nT_e)$ avec n entier situées à des instants discrets espacés de T_e constante, appelée la **période d'échantillonnage**. Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleveur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur. Dans une première phase, nous pouvons faire l'hypothèse que cette durée de prélèvement du signal est très courte et négligeable.

En supposant que le système numérique ne réalise aucun traitement sur le signal enregistré, l'enchaînement des différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est celui présenté sur la figure 6.1. Le signal analogique d'entrée V_e est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement $V_e(nT_e)$.

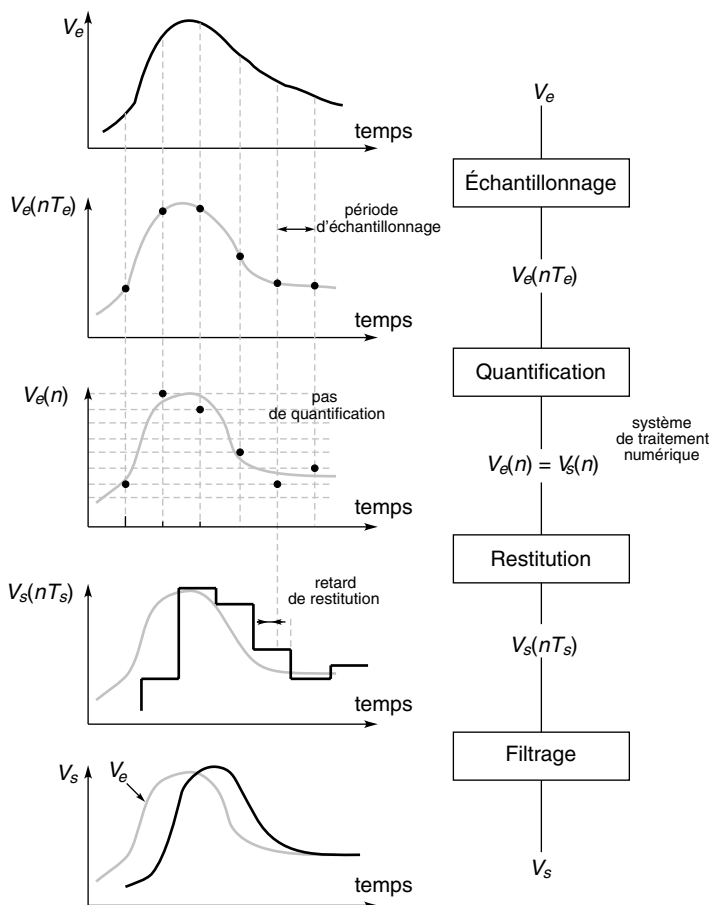


Figure 6.1 Évolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification des valeurs. T_e est la période d'échantillonnage et T_s la période restitution supposée égale à T_e .

Mais après cette phase de prélèvement d'échantillons, il est nécessaire de coder la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de **quantification**. Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leurs arrivées, formant ainsi une suite de valeurs numériques $V_e(n)$. Si, comme supposé, le système numérique n'effectue aucun traitement sur ces valeurs $V_e(n) = V_s(n)$; cette suite de nombres $V_s(n)$ est envoyée vers le procédé externe en deux étapes : restitution de la valeur analogique $V_s(nT_s)$ et ensuite filtrage de ce signal pour obtenir un signal de sortie V_s sans fronts raides.

Dans ce cas très simple, si l'on considère une période de restitution égale à la période d'échantillonnage, le résultat attendu est une restitution identique ou la plus proche possible du signal d'entrée : $V_s = V_e$. La différence, qui va exister entre ces deux signaux d'entrée et de sortie, est due à de nombreux paramètres dont les trois plus importants sont :

- la période d'échantillonnage ;
- le pas de quantification ou la précision de numérisation du signal ;
- le temps de réponse du système numérique entre l'acquisition et la restitution du signal.

Les deux derniers paramètres peuvent être facilement traités en augmentant la précision du convertisseur analogique numérique (augmentation de l'ensemble de codage) d'une part et d'autre part en choisissant un calculateur plus rapide pour limiter le retard à la restitution.

Mais la détermination du premier paramètre, qui est le choix de la période d'échantillonnage, est plus difficile. En effet, il est clair que la diminution du temps entre deux échantillons ne peut qu'améliorer la chaîne de traitement numérique. Mais cette diminution de la période d'échantillonnage est au prix du traitement (acquisition, mémorisation et restitution) d'un plus grand nombre d'échantillons. Le problème de l'échantillonnage se pose donc en ces termes : existe-t-il, pour un signal donné, une période d'échantillonnage qui soit un « bon compromis » entre la qualité du traitement numérique et la minimisation du nombre de mesures ou d'échantillons ?

6.1.2 Théorème de l'échantillonnage

a) Définition

On suppose que le signal $s(t)$ a un spectre à support borné, c'est-à-dire que le spectre est limité : $S(f) = 0$ pour $f > f_{\max}$ (cf. figure 6.2). Cette limitation spectrale est soit naturelle (répartition initiale du signal), soit artificielle en utilisant un filtre comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

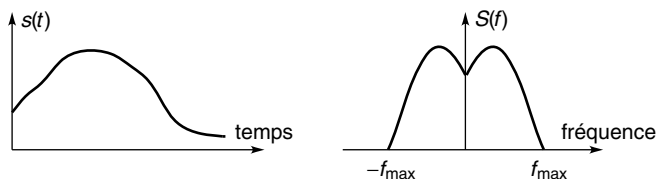


Figure 6.2 Signal à spectre borné à échantillonner.

Envisagé dans le domaine temporel, le processus d'échantillonnage revient à multiplier le signal analogique $s(t)$ par une série d'impulsions unité : le « signal » obtenu est alors constitué d'une succession d'impulsions, dont la hauteur est modulée par l'amplitude du signal échantillonné (cf. figure 6.3). Cette opération mathématique, permettant d'avoir une représentation du signal échantillonné $s_e(t)$, s'obtient en utilisant le peigne de Dirac (cf. annexes). Le peigne de Dirac, utilisé dans l'échantillonnage des signaux, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de la période d'échantillonnage T_e :

$$\text{Pgn}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

Le signal échantillonné $s_e(t)$ est une suite de pics de Dirac dont les poids sont les valeurs du signal $s(t)$ aux instants kT_e . Nous avons donc l'expression de $s_e(t)$:

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \quad (6.1)$$

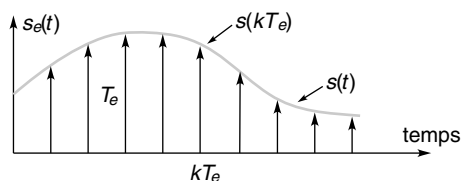


Figure 6.3 Représentation mathématique du signal échantillonné à une cadence de T_e .

D'après les propriétés du pic de Dirac, l'expression 6.1 du signal échantillonné peut être mise sous la forme de l'expression suivante qui est rigoureusement équivalente :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

ou :

$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \quad (6.2)$$

La question essentielle à se poser est : le signal échantillonné $s_e(t)$ contient-il la même information que le signal initial $s(t)$? Une manière de répondre à cette question est d'étudier le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ et de la comparer au spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$.

D'après le théorème de Plancherel, le spectre du signal échantillonné sera donné par le produit de convolution du spectre du signal initial avec la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac (cf. annexes) :

$$S_e(f) = S(f) * \left[F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_e) \right] \quad (6.3)$$

Étant donné la propriété du pic de Dirac, élément neutre de la convolution (cf. annexes), le résultat est :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k \cdot F_e) \quad (6.4)$$

Par conséquent, le spectre de l'échantillonné $S_e(f)$ s'obtient en périodisant avec une période égale à F_e , sur l'axe des fréquences, la transformée de Fourier $S(f)$ du signal initial $s(t)$ multiplié par F_e (cf. figure 6.4).

b) Théorème de Shannon

À partir de ce résultat, représenté sur la figure 6.4 et traduit par l'équation 6.4, nous pouvons faire une première remarque : contrairement au signal initial $s(t)$, qui avait un spectre borné et limité par la fréquence $f_{\max}$; le signal échantillonné $s_e(t)$ possède un spectre non borné puisque la périodisation est infinie de part et d'autre de l'axe des ordonnées.

De plus, pour que la construction périodique du spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné ne produise pas une déformation du motif répété du spectre $S(f)$ du signal initial, il faut et il suffit que la fréquence de répétition F_e , qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale $f_{\max}$ contenue dans le signal initial. Soit l'équation correspondant au **théorème de l'échantillonnage** ou **théorème de Shannon** :

$$F_e \geq 2 \cdot f_{\max} \quad (6.5)$$

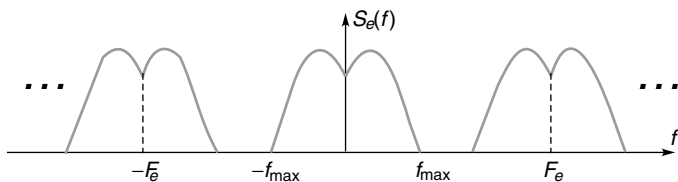


Figure 6.4 Périodisation du spectre du signal échantillonné.

Pour une fréquence d'échantillonnage fixée et égale à F_e , la fréquence limite $F_e/2$, appelée fréquence de Shannon ou fréquence de Nyquist ou encore fréquence de repliement (*folding frequency*), correspond à la fréquence maximale admissible dans le spectre du signal afin d'éviter les distorsions du spectre de l'échantillonné.

c) Extraction du signal initial à partir du signal échantillonné

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, le problème de l'échantillonnage peut être aussi posé en termes de retour au signal initial à partir du signal échantillonné, c'est-à-dire, si l'on dispose du signal $s_e(t)$, peut-on retrouver le signal $s(t)$?

En supposant le signal initial à spectre borné par $f_{\max}$ et la condition du théorème d'échantillonnage remplie, le spectre de base $S_{e0}(f)$ peut être facilement isolé. Ainsi en considérant directement la relation 6.4, ce spectre de base est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot S(f) \quad (6.6)$$

d'où, en appliquant la transformée de Fourier inverse à cette relation, nous avons la relation temporelle entre le signal $s_{e0}(t)$ correspondant à ce spectre de base $S_{e0}(f)$ et le signal initial $s(t)$:

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot s(t) \quad (6.7)$$

Mais il est possible de formaliser cette extraction du spectre périodique de l'échantillonné $S_e(f)$ en utilisant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/2$ (cf. figure 6.5). La fonction réalisée par le filtre passe-bas idéal, encore appelée fonction porte, s'écrit $\Pi_{F_e}(f)$. La transformée de Fourier inverse de cette fonction est la fonction $\text{sinc}(F_e t)$ (cf. chapitre 2). On peut donc exprimer le spectre de base $S_{e0}(f)$ de l'échantillonné sous la forme suivante :

$$S_{e0}(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{F_e}(f) \quad (6.8)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation précédente et en appliquant le théorème de Plancherel, on obtient l'expression du signal temporel ayant le spectre de base $S_{e0}(f)$ du signal échantillonné :

$$s_{e0}(t) = s_e(t) * [F_e \cdot \text{sinc}(F_e t)] = F_e \cdot \left[s_e(t) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \right]$$

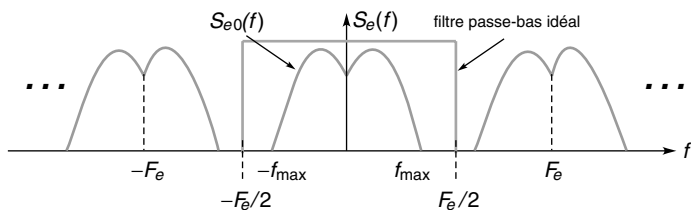


Figure 6.5 Filtrage passe-bas idéal permettant d'extraire du spectre du signal échantillonné le spectre du signal initial.

En considérant l'expression 6.1 du spectre du signal échantillonné, il vient :

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \right] * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t}$$

d'où :

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \right] \quad (6.9)$$

En identifiant les deux relations 6.7 et 6.9 donnant deux expressions de $s_{e0}(t)$, nous obtenons une expression de $s(t)$ en fonction des échantillons prélevés aux instants T_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \quad (6.10)$$

Le théorème de l'échantillonnage peut aussi s'exprimer de la manière suivante : un signal continu de spectre borné dans l'intervalle de fréquences $(-f_{\max}, +f_{\max})$ est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $1/(2f_{\max})$.

En effet cette somme de produits « $s(kT_e) \cdot \text{sinc}(F_e(t - kT_e))$ » permet de reconstituer exactement le signal et donc l'échantillonnage idéal, dans les conditions du théorème de Shannon, conserve la **totalité de l'information** contenue dans le signal.

6.1.3 Effet du repliement de spectre

a) Phénomène de repliement de spectre

Dans le cas où la condition du théorème de Shannon n'est pas respectée, il y a donc un phénomène de recouvrement de spectre (*folding, aliasing*). Le filtre passe-bas idéal, qui permettrait de récupérer le spectre de base identique au spectre du signal initial, ne peut plus agir efficacement dans ces conditions. La figure 6.6 présente ce chevauchement de spectre et donc le spectre résultant. C'est ainsi qu'une fréquence située dans la zone de repliement est susceptible d'appartenir à la fois au spectre de base du signal initial et à son spectre image décalé de $\pm F_e$.

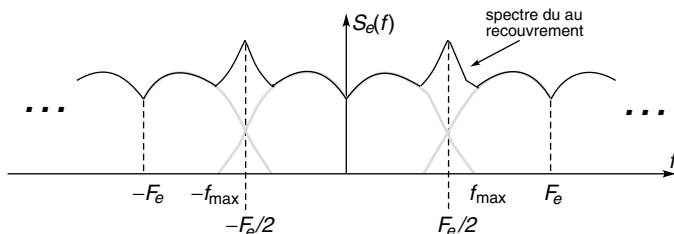


Figure 6.6 Recouvrement de spectre dans le cas du non-respect du théorème de Shannon ($F_e < 2f_{\max}$).

Cet effet peut être vu comme un effet stroboscopique. Ainsi, pour une fréquence d'échantillonnage F_e telle que $F_e < 2f_{\max}$ (non respect du théorème d'échantillonnage), une fréquence f_r comprise entre $F_e/2$ et $f_{\max}$ est vue comme la fréquence $F_e - f_r$, dite fréquence fantôme de la fréquence f_r . Cette raie fréquentielle due au repliement va apparaître comme une raie appartenant au signal alors qu'elle n'a aucune existence réelle (cf. figure 6.7) ; ou encore l'amplitude de cette raie fantôme va s'ajouter à l'amplitude de la composante fréquentielle $f_n = F_e - f_r$, existant réellement.

Il est important de remarquer que l'échantillonnage idéal est réalisé à l'aide d'impulsions excessivement brèves, aussi le spectre se répète indéfiniment sans atténuation. Dans la pratique (cf. paragraphe suivant), la durée

de prélèvement d'un échantillon du signal a une valeur finie. Dans ce cas, la répétition du spectre se fait avec un affaiblissement progressif et diminue ainsi l'effet de repliement.

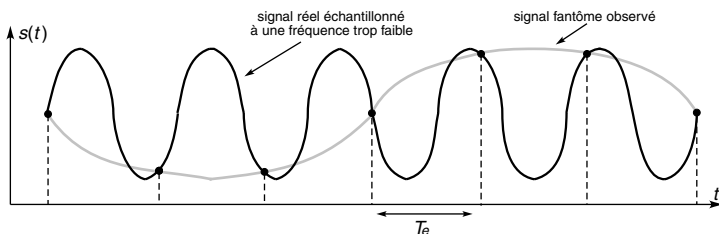


Figure 6.7 Effet stroboscopique du recouvrement de spectre : existence d'une fausse fréquence.

b) Filtre passe-bas anti-repliement

Pour éviter les répliques indésirables dues au repliement, il est indispensable que le spectre du signal ne dépasse en aucun cas la fréquence de Nyquist : $F_e/2$; cette fréquence est la plus élevée du signal qui soit sa propre réplique. Si le signal analogique possède des fréquences supérieures, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un **filtre passe-bas anti-repliement**, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence. Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation ou être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale (cf. figure 6.8).

Remarque : le signal de la parole, utilisé pour les communications téléphoniques, possède des composantes fréquentielles qui s'étendent au-delà de 10 KHz : composantes de la voix et du bruit. Mais il est limité à 4 KHz pour pouvoir appliquer une fréquence d'échantillonnage de 8 KHz et réduire ainsi fortement la taille des données à transmettre.

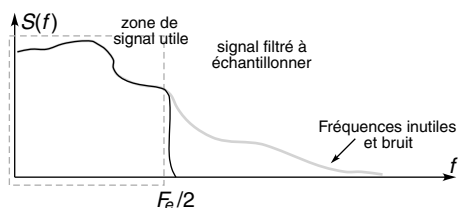


Figure 6.8 Utilisation d'un filtre anti-repliement afin de limiter réellement la largeur de bande fréquentielle du signal à échantillonner.

Théoriquement, ce filtre analogique à la fréquence de $F_e/2$ doit avoir une pente de réjection infinie, ce qui est physiquement impossible. Les filtres seront choisis avec une pente d'autant plus faible que la fréquence maximale du signal est inférieure à la fréquence de Nyquist. Par exemple, si l'on désire échantillonner un signal jusqu'à la fréquence maximale $f_{\max}$, la fréquence d'échantillonnage F_e sera choisie égale à $n f_{\max}$ avec n variant de 2,5 à 5 pour éloigner la fréquence de Nyquist ($F_e/2$) de la fréquence maximale choisie, et ainsi obtenir une atténuation suffisante des fréquences sosies (cf. figure 6.9).

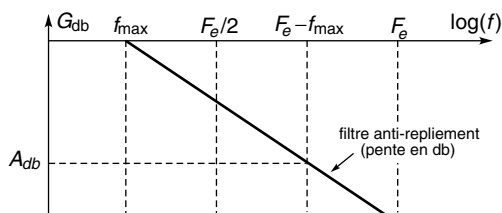


Figure 6.9 Diagramme de Bode d'un filtre anti-repliement.

Pour avoir une atténuation A en db au niveau de la première fréquence de repliement $F_e - f_{\max}$, la pente du filtre p s'exprime en db/octave selon la relation suivante :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}} \right]} = \frac{A \log 2}{\log (n - 1)} \quad (6.11)$$

Dans la pratique la réalisation de l'échantillonnage d'un signal sera un compromis entre la raideur du filtre passe-bas d'entrée et la fréquence d'échantillonnage (*cf.* figure 6.10). On peut ainsi remarquer que pour avoir une atténuation de 100 (− 40 db) au niveau de la première fréquence fantôme et utiliser un filtre passe-bas du deuxième ordre (soit : − 12 db/octave), il est nécessaire de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à 11 fois la fréquence maximale choisie.

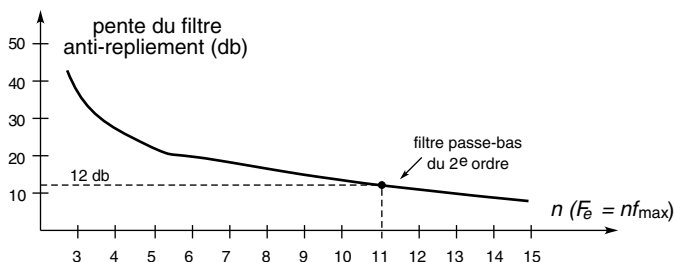


Figure 6.10 Évaluation de la pente du filtre anti-repliement en fonction du rapport fréquence d'échantillonnage sur fréquence maximale nécessaire pour avoir une atténuation de 100 pour la première fréquence fantôme.

c) Concept de sous-échantillonnage : exemple des signaux à bande étroite

On considère un signal $s(t)$ de largeur spectrale 0 à f_m . Afin de pouvoir transmettre ce signal porteur d'informations, on réalise la modulation d'amplitude d'une onde porteuse de fréquence f_p telle que $f_p \gg f_m$. Le spectre du signal modulé en amplitude $S_{OMA}(f)$, étudié au chapitre 4.2, est représenté sous forme bilatérale sur la figure 6.11. Il est important de noter la faible bande spectrale occupée par ce spectre étant donné les valeurs relatives des fréquences du signal à transmettre et de l'onde porteuse. Nous sommes ici en présence d'un signal dit à bande étroite. Ainsi les deux parties du spectre $S^-(f)$ et $S^+(f)$ occupent une largeur spectrale de $2f_m$. Mais la fréquence maximale contenue dans le signal est $f_p + f_m$.

Considérons l'exemple numérique correspondant en ordre de grandeur à une émission radiophonique en modulation d'amplitude, soit $f_m = 5$ KHz et $f_p = 100$ KHz.

Désirant réaliser l'acquisition de ce signal, la première étape consiste à déterminer la fréquence d'échantillonnage F_e nécessaire et de minimiser celle-ci autant que possible pour diminuer le nombre d'échantillons. Mais la limite inférieure est donnée par le théorème de Shannon, qui, dans cet exemple se traduit par :

$$F_e \geq 2(f_p + f_m) \quad \text{soit} \quad F_e \geq 210 \text{ KHz}$$

Cette limite inférieure de la fréquence d'échantillonnage serait totalement justifiée dans le cas où le signal aurait une largeur spectrale effectivement occupée correspondant à $[0, f_p + f_m]$. Or, dans cet exemple d'un signal à bande étroite, ce n'est pas le cas. Aussi, nous pouvons nous poser la question de savoir s'il serait possible de prendre une fréquence d'échantillonnage inférieure à la limite F_e déterminée par le théorème de Shannon. Considérons cette nouvelle fréquence F_s , dite de sous-échantillonnage, avec $F_s < F_e$. Nous allons étudier les conséquences de ce sous-échantillonnage qui va obligatoirement produire l'effet néfaste du repliement.

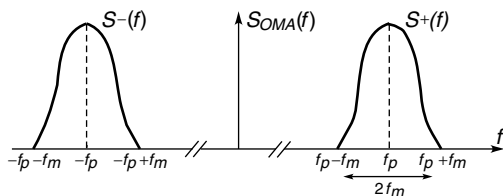


Figure 6.11 Spectre de l'onde modulée en amplitude par le signal de largeur spectrale $[0, f_m]$.

Nous savons que l'échantillonnage se concrétise par une périodisation du spectre avec une période de répétition F_s . Comme cette fréquence F_s est inférieure à la fréquence de Shannon, le phénomène de repliement va se produire. Pour éviter ce problème et ainsi pouvoir récupérer le signal

initial après échantillonnage, il faut choisir correctement cette fréquence de sous-échantillonnage (cf. figure 6.12).

Une première condition est le non-chevauchement du spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; cette condition s'exprime par : $F_s \geq 2f_m$

Comme nous allons le voir, cette condition sera largement respectée. La deuxième condition est le non-chevauchement du spectre $S^-(f)$ sur le spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; celle-ci s'exprime par les conditions sur les positions relatives des spectres au point A et B (cf. figure 6.12) :

- au point A : $-f_p + f_m + kF_s \leq f_p - f_m$
- au point B : $-f_p - f_m + (k+1)F_s \geq f_p + f_m$

Ces inégalités se résument par l'encadrement de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s suivante :

$$\frac{2(f_p + f_m)}{k+1} \leq F_s \leq \frac{2(f_p - f_m)}{k}$$

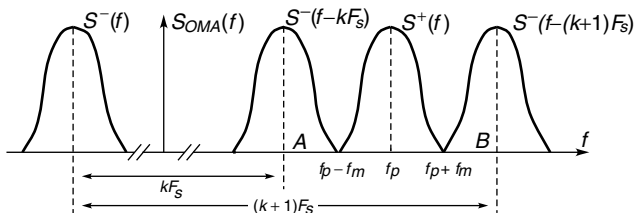


Figure 6.12 Visualisation des conditions nécessaires pour éviter un repliement de spectre dans le cas du sous-échantillonnage.

En considérant ces inégalités, la valeur maximale de k s'exprime en considérant un intervalle nul de choix de la fréquence F_s , soit :

$$k_{\max} = f_p - f_m / 2f_m$$

On peut écrire aussi que la distance spectrale entre les deux spectres $S^-(f)$ périodisés doit être supérieure à $2f_m$, soit :

$$[-f_p - f_m + (k+1)F_s] - [-f_p + f_m + kF_s] \geq 2f_m \quad \text{ou} \quad F_s \geq 4f_m$$

Ainsi pour déterminer la valeur de F_s , nous avons d'une part une valeur minimale donnée par la dernière condition et ensuite un encadrement de cette valeur en fonction du paramètre k . La zone des valeurs possibles de F_s , qui permet de respecter les inégalités préalablement établies, est représentée sur la figure 6.13. Plus le nombre k sera grand et plus la fréquence de sous-échantillonnage F_s sera faible, limitant ainsi le nombre d'échantillons. Si l'on considère l'exemple numérique précédent, la valeur de k maximale est de 9 pour laquelle nous avons l'encadrement de la valeur F_s :

$$21000 \text{ Hz} \leq F_s \leq 21110 \text{ Hz}$$

Le choix de la valeur est fixée d'une part par une fréquence proche de la fréquence limite de 20 KHz pour avoir la solution la plus performante. D'autre part il est nécessaire de réaliser un oscillateur très stable (par exemple un oscillateur à verrouillage de phase) afin d'assurer le maintien de la fréquence dans l'encadrement choisi.

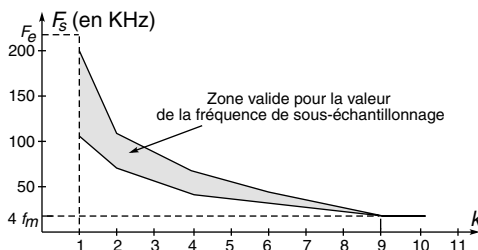


Figure 6.13 Détermination de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s .

6.1.4 Échantillonnage naturel et autres procédés

L'échantillonnage idéal impliquant des impulsions infiniment courtes n'est qu'approximativement réalisable. Dans la pratique, on utilisera des impulsions de durée courte mais finie. Le choix entre les divers procédés possibles se fera suivant les moyens techniques disponibles et la déformation tolérable lors de la restitution du signal.

Le signal échantillonné réel sera constitué alors d'une suite d'impulsions distantes de T_e et de largeur τ . L'amplitude de ces impulsions sera fonction du procédé d'échantillonnage utilisé (cf. figure 6.14) :

- **naturel** : amplitude égale à $s(t)$ pendant la durée τ ;
- **régulier** : amplitude constante et égale à $s(nT_e)$ pendant la durée τ ;
- **moyenneur** : amplitude égale à la moyenne de $s(t)$ sur l'intervalle τ .

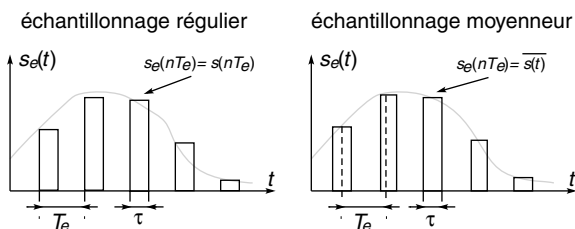


Figure 6.14 Les divers procédés d'échantillonnage réalisables : régulier et moyenneur.

Le premier type d'échantillonnage n'est pas réalisable, il constitue simplement une étape de calcul intermédiaire nécessaire à la compréhension des deux autres procédés qui sont effectivement réalisés et utilisés. La modélisation de l'échantillonnage réel qui utilise des impulsions distantes de T_e et de largeur τ , est faite en prenant une fonction porte de largeur τ et périodisée avec une période T_e . Ce signal, appelé $i_{T_e, \tau}(t)$, s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - kT_e)$$

En utilisant la propriété de périodisation avec le peigne de Dirac et le produit de convolution, nous avons l'autre expression équivalente suivante :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \Pi_{\tau}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \Pi_{\tau}(t) * \text{Pgn}_{T_e}(t)$$

Le spectre de ce signal s'exprime donc par :

$$I_{T_e, \tau}(f) = \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau k f} \right] \cdot [F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f)] = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau k f} \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

soit :

$$I_{T_e, \tau}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e) \quad (6.12)$$

a) Échantillonnage naturel

Dans le cas de l'échantillonnage naturel, l'amplitude de chaque impulsion suit la valeur de la fonction pendant l'intervalle τ . D'un point de vue représentation mathématique du signal échantillonné, nous avons le produit du signal initial par la fonction porte périodisée précédemment établie :

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t) = s(t) \cdot [\Pi_{\tau}(t) * \text{Pgn}_{T_e}(t)] \quad (6.13)$$

En utilisant la relation 6.11, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = S(f) * I_{T_e, \tau}(f) = S(f) * \left[\tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e) \right]$$

d'où :

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot S(f - kF_e) \quad (6.14)$$

L'intérêt essentiel de l'étude est de savoir si cet échantillonnage dit naturel provoque une déformation du spectre par rapport à l'échantillonnage idéal qui lui permet de récupérer le spectre du signal initial par un filtre passe-bas de largeur F_e et donc de conserver la totalité de l'information contenue dans le signal initial. À partir de la relation précédente 6.13, il est facile d'obtenir la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, soit :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot S(f) \quad (6.15)$$

Cette relation 6.15 montre que, dans le cas de l'échantillonnage naturel (avec une impulsion de largeur non nulle), il est possible d'obtenir

le spectre du signal initial avec un filtre passe-bas idéal. La proportionnalité entre les deux spectres montre que l'échantillonnage naturel n'introduit pas de déformation. Cet échantillonnage correspond simplement à une augmentation de la durée d'observation du signal. Cet échantillonnage étant non réalisable pratiquement, nous devons étudier un cas où non seulement la durée d'observation est augmentée, mais aussi la valeur de l'échantillon est approchée sur cette durée : valeur initiale ou valeur moyenne.

b) Échantillonnage régulier ou bloqueur

Dans le cas de l'échantillonnage régulier, l'amplitude de chaque impulsion est constante et égale à l'amplitude du signal initial au temps nT_e . Ce mode correspond au cas pratique le plus souvent mis en œuvre. La représentation mathématique du signal échantillonné peut être mise sous la forme d'une suite infinie de fonctions « porte » d'amplitude égale aux échantillons du signal, soit :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [s(kT_e) \cdot \Pi_\tau(t - kT_e)] \quad (6.16)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s_e(t) = [s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)] * \Pi_\tau(t) \quad (6.17)$$

En utilisant la relation 6.16, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = [S(f) * (F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f))] \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \right]$$

soit :

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e) \quad (6.18)$$

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est (cf. figure 6.15) :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f) \quad (6.19)$$

Outre le facteur τF_e , le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction $\text{sinc}(\tau f)$. L'échantillonnage régulier introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel. Cette distorsion reste petite dans le cas où la durée de la porte d'échantillonnage est faible devant la période d'échantillonnage. Par exemple, pour une fréquence d'échantillonnage de 20 KHz et une durée de l'impulsion d'échantillonnage de 5 μs (rapport de 10), la distorsion sur le spectre à la fréquence de 1 KHz n'est que de 2 %.

c) Échantillonnage moyennneur

L'échantillonneur moyennneur donne des échantillons $s_e(kT_e)$ correspondant à la valeur moyenne de $s(t)$ prise sur la durée de l'impulsion τ . Ainsi l'échantillon k s'exprime sous la forme suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e - \tau/2}^{kT_e + \tau/2} s(t) dt$$

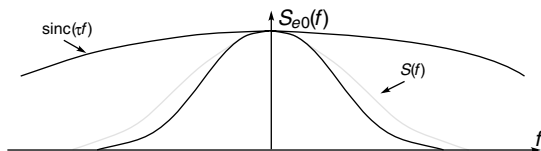


Figure 6.15 Distorsion du spectre dans le cas d'un échantillonnage régulier ou moyennneur.

En utilisant la fonction porte, la relation précédente peut s'écrire de la façon suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e - \tau/2}^{kT_e + \tau/2} \Pi_{\tau}(t - kT_e) \cdot s(t) \cdot dt$$

Cette expression représente le produit de convolution de $s(t)$ et de $\Pi_{\tau}(t)$ au temps kT_e , d'où :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le signal échantillonné complet $s_e(t)$ va donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

soit :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \quad (6.20)$$

À partir de la relation 6.20, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'obtient par transformation de Fourier en utilisant le théorème de Plancherel :

$$S_e(f) = \frac{1}{\tau} \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot S(f) \right] * [F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f)]$$

soit :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau (f - kF_e))}{\pi \tau (f - kF_e)} \cdot S(f - kF_e) \quad (6.21)$$

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot S(f) \quad (6.22)$$

Nous retrouvons un résultat très proche de celui obtenu pour l'échantillonnage régulier. Outre le facteur F_e , le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction $\text{sinc}(\pi \tau f)$ comme pour l'échantillonnage régulier et introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel (cf. figure 6.15).

En conclusion, il est important de remarquer que les échantillonnages bloqueur et moyennneur seront d'autant plus proches de l'échantillonnage idéal que la durée de l'impulsion d'échantillonnage sera faible devant la période du signal correspondant à la fréquence maximale contenue dans le signal échantillonné.

6.2 QUANTIFICATION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

6.2.1 Effet de la quantification

Quantifier une valeur x réelle quelconque, c'est remplacer cette valeur par une valeur x_q appartenant à un ensemble dénombrable de valeurs entières, suivant une certaine loi : arrondi au plus proche voisin, arrondi par défaut, etc.

Ainsi les échantillons temporels $s_e(kT_e)$, représentant les valeurs de l'amplitude de $s(t)$ aux instants kT_e , sont quantifiés pour donner des échantillons $s_{e,q}(kT_e)$. Dans le cas d'une quantification dite uniforme, l'amplitude maximale du signal est découpée en N intervalles identiques de valeur q . La valeur du signal échantillonné quantifié est définie par :

$$s_{e,q}(kT_e) = N \quad \text{si} \quad Nq - q/2 \leq s_e(kT_e) \leq Nq + q/2$$

Le circuit électronique, réalisant cette fonction est un convertisseur analogique-numérique. La fonction de transfert de ce circuit, exprimant le résultat de la relation ci-dessus, est représentée dans un plan signal quantifié en fonction de l'amplitude du signal (cf. figure 6.16).

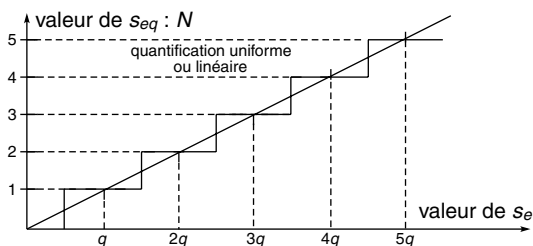


Figure 6.16 Courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

L'erreur de quantification ε pour une quantification uniforme dans le cas de l'arrondi au plus proche voisin est égale au demi-pas de quantification $q/2$ (cf. figure 6.17).

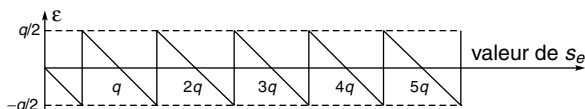


Figure 6.17 Évolution de l'erreur de quantification associée à la courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

L'évolution de cette erreur en dent de scie montre que le processus de quantification, nécessaire pour le traitement numérique des données, introduit toujours une erreur, appelée bruit de quantification, sauf dans les cas particuliers où le signal a une amplitude de la forme :

$$s_e(kT_e) = Nq$$

Si on étudie l'évolution de l'erreur de quantification $\varepsilon(t)$ en fonction du temps et pendant un temps suffisamment grand θ où l'amplitude du signal varie sur une plage importante par rapport au pas de quantification q , cette erreur peut être approximée par une droite, représentant l'équi-répartition de l'erreur :

$$\varepsilon(t) = q \frac{t}{\theta} \quad \text{pour} \quad -\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$$

La valeur moyenne de $\varepsilon(t)$ est nulle sur cet intervalle, par contre la puissance moyenne est donnée par :

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \varepsilon^2(t) \cdot dt = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \left[q \frac{t}{\theta} \right]^2 \cdot dt = \frac{q^2}{12}$$

Ce calcul peut être effectué en considérant que la tension de l'erreur de quantification ε , qui est une variable aléatoire, a une densité de probabilité $p(\varepsilon)$ constante et égale à $1/q$ sur l'intervalle $[-q/2, +q/2]$. Si nous calculons la valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2, nous retrouvons le résultat précédent :

$$E_{sp}[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \cdot d\varepsilon = \frac{q^2}{12} = P_\varepsilon$$

Ce bruit de quantification est une variable aléatoire stationnaire et ergodique. Il est important de noter que le processus de quantification est

quasiment équivalent à l'addition au signal d'un bruit uniforme. Étant donné la puissance P_e , le bruit de quantification peut être considéré comme un bruit blanc de largeur spectrale $[0, F_e/2]$. La densité spectrale est donc donnée par : $q^2/(6F_e)$.

Concernant le signal, nous allons considérer un signal sinusoïdal $s(t)$ d'amplitude maximale $V_{\max}$ et de période T . Pour un système de codage sur n bits (valeur maximale de codage $2^n - 1$), le signal sinusoïdal $s(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$s(t) = V_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = \frac{2^n - 1}{2}q$$

La puissance moyenne de ce signal est donc :

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

Soit en supposant n grand ($2^n \gg 1$) :

$$P_s \approx 2^{2n-3} \cdot q^2$$

Étant donné P_s la puissance crête du système ou puissance de la sinusoïde d'amplitude maximale codable sans écrêtage et P_e la puissance du bruit de quantification, le système a une dynamique par rapport au bruit de quantification définie par :

$$D(\text{db}) = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 6,02n + 1,76$$

On peut ainsi remarquer que rajouter 1 bit revient à augmenter la dynamique de 6 dB. En conclusion, on choisira le pas de quantification q en fonction de la précision désirée lors de la conversion et le nombre de bits n en fonction de la dynamique.

6.2.2 Lois de compression et expansion du signal

L'erreur relative due à la quantification n'est pas constante le long de la courbe de transfert, c'est-à-dire suivant la valeur de la grandeur quantifiée. Cette erreur, égale à $q/s_{e,q}$, est très faible pour des valeurs grandes de $s_{e,q}$.

et devient très importante pour des valeurs faibles : 100 % pour $s_{e,q} = q$. Pour égaliser cette erreur, il est possible de réaliser un codage non linéaire ou un codage à erreur constante, en faisant précéder la quantification du signal d'une « compression » du signal dans le sens analogique-numérique et d'une « expansion » dans le sens numérique-analogique.

Dans le cas des signaux de la parole, deux lois sont utilisées : la loi appelée μ aux États-Unis et la loi dénommée **A** en Europe, normalisée par le CCITT (Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique). Les courbes correspondant à la loi A sont représentées sur la figure 6.18. Les circuits qui réalisent ces fonctions s'appellent des **compandeurs** et les circuits qui réalisent l'échantillonnage, la compression, l'expansion et aussi la quantification s'appellent des **codecs**.

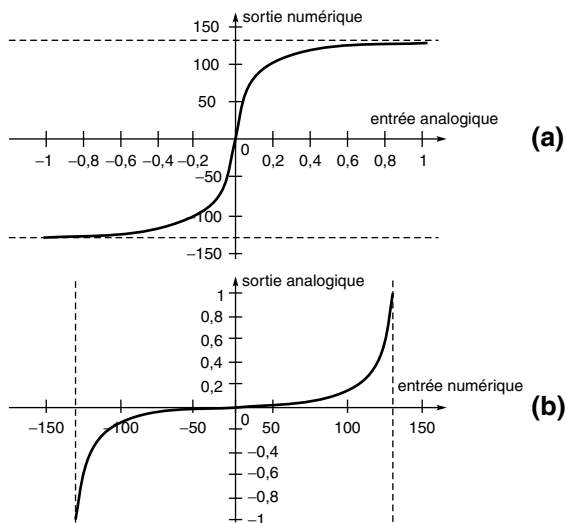


Figure 6.18 Lois A de compression et d'expansion. Loi de compression **(a)** : sortie numérique variant de -128 à +128 en fonction de l'entrée analogique variant de -1 à +1. Loi d'expansion **(b)** : sortie analogique variant entre -1 et +1 en fonction de l'entrée numérique variant de -128 à +128.

6.3 RESTITUTION DU SIGNAL

6.3.1 Problématique

La restitution du signal a pour but de redonner un signal continu temporellement à partir de valeurs discrètes connues à des instants kT_e , T_e étant la période d'échantillonnage. Pour reconstituer la continuité du signal, il faut effectuer une **interpolation** entre deux instants de discrétisation. Cette interpolation sera précédée du système permettant de transformer un nombre binaire représentant l'amplitude d'un signal à un instant donné en une valeur continue en amplitude, procédé inverse de la quantification. Il est important de remarquer que, dans ce cas, la transformation du code numérique (ensemble fini de valeurs) en une valeur analogique ne produit aucune erreur sur le signal contrairement au processus de quantification.

À partir des échantillons $V_s(n)$, ce circuit, appelé convertisseur numérique-analogique, donne un signal analogique $V_s(t)$ (cf. figure 6.19).

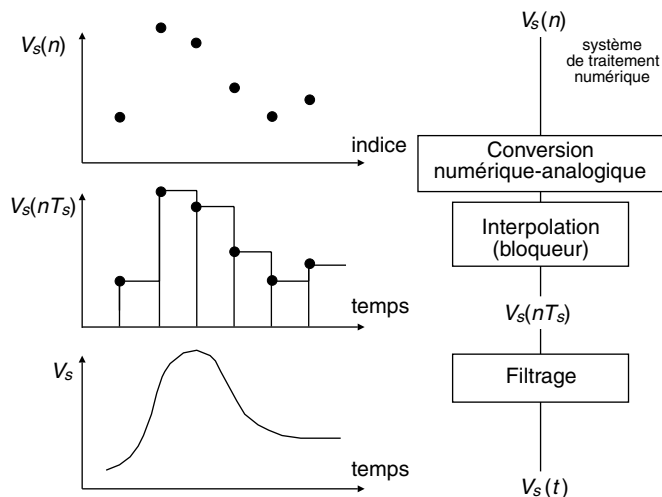


Figure 6.19 Chaîne de restitution d'un signal échantillonné.

Mais on souhaite une restitution plus continue qui puisse représenter fidèlement la forme analogique du signal, telle qu'elle aurait été obtenue avec un système de traitement analogique. Aussi on procède à une interpolation suivie d'un filtrage. Le rythme de la restitution, définie par la période T_s , est bien entendu fonction de la période d'échantillonnage T_e du signal.

Cette question de la restitution peut se poser sous la même forme que celle étudiée au paragraphe 6.1.1. Connaissant le spectre du signal échantillonné, la restitution consiste à extraire de ce spectre le spectre de base à l'aide d'un filtrage fréquentiel ou d'un calcul équivalent sur les échantillons du signal.

6.3.2 Interpolation idéale

L'interpolation parfaite consiste à utiliser l'interpolation de Shannon. En effet la relation 6.10, démontrée au paragraphe 6.1.2, permet d'obtenir le signal initial $s(t)$ avec les seuls échantillons $s(kT_e)$ aux instants kT_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)}$$

Cette méthode consiste à effectuer la somme des fonctions $\text{sinc}(x)$ relatives à chaque point de l'échantillonnage, en les pondérant de la valeur de l'amplitude de ces points. Cette interpolation idéale exprime la reconstitution d'un signal analogique de spectre borné à partir du signal échantillonné suivant la base constituée par la famille de fonctions (cf. figure 6.20) :

$$\left\{ \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)} ; \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Mais l'interpolation idéale en temps réel est difficilement réalisable, car la formule d'interpolation précédente ne satisfait pas à la condition de causalité, en effet, comme nous l'avons vu cette interpolation correspond au filtrage par une fonction fréquentielle de type porte (filtre idéal non réalisable).

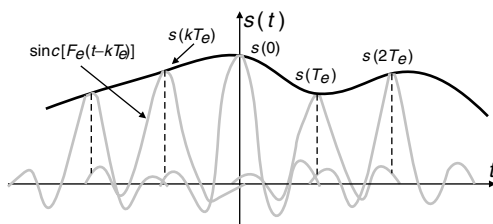


Figure 6.20 Reconstitution quasi parfaite d'un signal échantillonné.

Malgré cette difficulté théorique, cette interpolation est utilisée dans les applications nécessitant une grande qualité de restitution en limitant la sommation : oscilloscopes numériques de haute gamme ou restitution des signaux sonores issus des disques CD-audio (*cf.* exemple du paragraphe 6.3.6).

6.3.3 Interpolation linéaire

Le problème inverse consiste à considérer que le lissage du signal crénéle sera effectué par un filtrage passe-bas simple du 1^e ou 2^e ordre qui revient à réaliser en première approximation une interpolation linéaire. Cette hypothèse étant faite, il s'agit alors de déterminer la distance minimale qui doit séparer dans le temps deux échantillons successifs pour que, à partir de ces points, on puisse reconstituer « correctement » le signal au moyen d'une interpolation linéaire. Pour perdre le moins possible d'information contenue dans le signal, il faut augmenter la cadence d'échantillonnage par rapport à la fréquence théorique de Shannon, c'est-à-dire sur-échantillonner le signal. C'est une pratique assez coûteuse, car elle conduit à un accroissement important des échantillons à traiter.

La fréquence d'échantillonnage ou de sur-échantillonnage va dépendre à la fois de la méthode d'interpolation et de l'erreur que l'on tolère sur le signal reconstitué à partir des échantillons. Dans le cas de l'interpolation linéaire simple (identique à l'opération que l'on réalise lorsque l'on joint les points expérimentaux pour obtenir un graphique continu), l'erreur sur

le signal $s(t)$ par rapport au signal reconstitué $s_r(t)$ est :

$$\varepsilon = \frac{s(t) - s_r(t)}{s(t)}$$

Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal pur de période T_0 ; cette erreur est maximale pour les sommets de la fonction, c'est-à-dire pour $t = T_0/4$, et avec deux points échantillonnés de part et d'autre de ce sommet (cf. figure 6.21). Le point que l'on cherche à interpoler est $s(T_0/4) = 1$.

Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , les points échantillonnés de part et d'autre du sommet ont une amplitude identique égale à :

$$s_r\left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right) = \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right)\right]$$

Donc, l'erreur ε est donnée par :

$$\varepsilon = 1 - \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} - \frac{T_e}{2}\right)\right] = 1 - \cos\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_e}{2}\right]$$

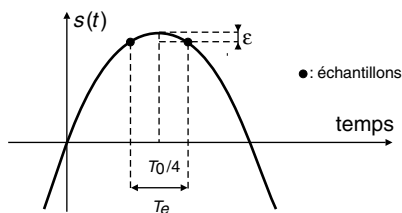


Figure 6.21 Erreur maximale dans le cas d'une interpolation linéaire d'un signal sinusoïdal échantillonné.

En utilisant le développement de la fonction $\cos$ au premier ordre ($\cos(x) = 1 - x^2/2$), il vient :

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^2$$

Il est intéressant d'exprimer ce résultat sous la forme de la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_e à utiliser pour un signal de

fréquence donnée F_0 pour obtenir une erreur inférieure à ε , soit :

$$F_e \geq F_0 \frac{2,2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Si on admet une erreur de 1 %, la fréquence d'échantillonnage doit être $22F_0$. Ainsi pour obtenir une qualité de reconstitution correcte, il est nécessaire d'utiliser un sur-échantillonnage de 11 fois supérieur à la fréquence d'échantillonnage donnée par le théorème de Shannon. Il est très important de noter que, pour réaliser une restitution correcte, sans avoir recours à un filtrage très fort (proche du filtrage idéal), une solution consiste donc à prendre une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus grande que la fréquence d'échantillonnage limite du théorème de Shannon.

6.3.4 Restitution par bloqueur

La restitution par bloqueur, illustrée sur la figure 6.19, correspond, d'un point de vue représentation mathématique, à l'échantillonnage régulier ou bloqueur dans le cas particulier où la durée de l'impulsion τ est égale à T_e (cf. paragraphe 6.1.4). Par conséquent, le spectre du signal en sortie du bloqueur est donné par la relation suivante (cf. équation 6.18) :

$$S(f) = \frac{\sin(\pi T_e f)}{\pi T_e f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e)$$

Le spectre initial du signal échantillonné est déformé de façon importante par la fonction sinc de pseudo-période F_e (cf. figure 6.22). Aussi pour isoler le spectre de base, correspondant à $k = 0$, il n'est plus nécessaire d'avoir un filtre idéal à front raide car la déformation du spectre par le système bloqueur atténue déjà fortement les spectres latéraux.

Cette déformation conduit à une atténuation du spectre d'autant plus importante que le produit $T_e f_m$ sera plus grand avec T_e durée des paliers constants et f_m la fréquence maximum du signal initial (cf. tableau 6.1). On retrouve encore une règle identique au cas précédent de l'interpolation linéaire : la déformation (0,14 db) devient négligeable si on considère une

fréquence d'échantillonnage supérieure à 10 fois la fréquence maximale du signal.

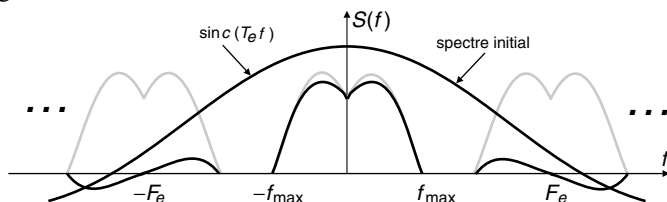


Figure 6.22 Déformation du spectre du signal obtenu par restitution par bloqueur.

Tableau 6.1 Valeur de l'affaiblissement en db en fonction du produit $T_e f_m$.

Produit $T_e f_m$	Affaiblissement (en db) : $20 \log \left(\frac{\sin(\pi T_e f_m)}{\pi T_e f_m} \right)$
0,1	0,14
0,2	0,58
0,3	1,33
0,4	2,42
0,5	3,92 ($f_m = F_e/2$)
0,7	9,69 ($f_m > F_e/2$)

6.3.5 Filtre de restitution

Le filtre de restitution sera calculé de la même manière que le filtre anti-repliement étudié au paragraphe 6.1.3. Pour une atténuation désirée A entre la dernière composante du signal à f_m et la première composante du spectre à éliminer à $F_e - f_m$, la pente du filtre p , en db/octave, est (cf. équation 6.11) :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}} \right]} = \frac{A \log 2}{\log (n - 1)}$$

Pour le calcul des caractéristiques du filtre, il est nécessaire de tenir compte des atténuations du spectre obtenu après interpolation ou blocage comme nous l'avons étudié dans le paragraphe précédent.

Considérons une restitution avec bloqueur pour un signal de fréquence maximale 10 KHz et une fréquence de restitution (échantillonnage) de 40 KHz ($F_e = 4f_m$). Soient les conditions imposées suivantes : le filtrage passe-bas désiré doit atténuer au maximum de 1 db à la fréquence maximale f_m du signal et d'au moins 50 db pour la fréquence à éliminer $F_e - f_m$. Comme nous l'avons vu, la restitution avec bloqueur atténue déjà le spectre par la fonction sinc, soit :

- à f_m : $\text{sinc}(1/4) = 0,9$ ou $-0,9$ db
- à $F_e - f_m$: $\text{sinc}(3/4) = 0,3$ ou $-10,5$ db

En conséquence, le filtre de restitution doit introduire un affaiblissement au plus de 0,1 db à f_m et d'au moins 39,5 db à $F_e - f_m$, soit une atténuation A de 39,4 db. En appliquant la relation précédente, la pente du filtre est :

$$p = \frac{39,4 \log 2}{\log 3} \approx 24 \text{ db/octave}$$

Nous obtenons ainsi un filtre de restitution du 4^e ordre. Si nous n'avions pas pris en compte l'atténuation due à l'interpolation par bloqueur, l'atténuation de 49 db nécessaire aurait conduit à mettre en place un filtre de pente $p \approx 30$ db/octave, soit un filtre du 5^e ordre.

En conclusion, nous pouvons remarquer que deux paramètres ont une influence prépondérante sur la qualité de la restitution : la fréquence d'échantillonnage utilisée et les caractéristiques du filtre de restitution. La fréquence d'échantillonnage doit être la plus petite possible pour des raisons de limitation du nombre d'échantillons, mais par contre l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage ou sur-échantillonnage permet de s'affranchir de la réalisation d'un filtre complexe. Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe suivant, un compromis entre ces deux paramètres est la solution la plus efficace.

6.3.6 Restitution par sur-échantillonnage

Un exemple de restitution de signaux numériques avec sur-échantillonnage est donné par la diffusion des signaux audio enregistrés sur un support disque optique : CD audio (Compact Disk). La chaîne d'enregistrement des signaux sonores sur disques optiques est représentée sur la figure 6.23. La fréquence d'échantillonnage F_e des signaux enregistrés a été fixée, par normalisation internationale, à 44,1 KHz. La quantification du signal est réalisée sur 16 bits. Par un filtre anti-repliement, le signal enregistré est limité à la fréquence de $F_m = 20$ KHz. Le signal, numérisé et enregistré sur le support CD, est composé d'échantillons, correspondant à un temps de mesure T_e de $22,68 \mu s$ ($T_e = 1/F_e$), avec un spectre périodique de période F_e (cf. figure 6.24).

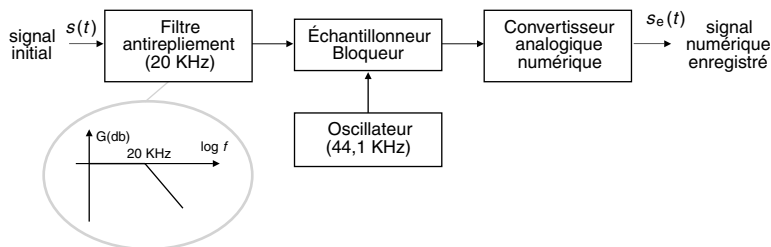


Figure 6.23 Chaîne d'enregistrement d'un signal audio sur disque optique.

Les caractéristiques de cette numérisation étant données, la reproduction de ce signal doit mettre en œuvre d'une part une conversion numérique-analogique et d'autre part une sortie de cette valeur à une fréquence permettant une restitution la plus correcte possible. L'analyse de cette correction de la restitution est faite sur la base d'un signal de sortie identique au signal d'entrée qui a été enregistré. En particulier le spectre du signal de sortie doit être identique ou proche du spectre du signal d'entrée

Pour obtenir ce résultat, la première approche consiste à utiliser une fréquence de restitution identique à la fréquence d'échantillonnage. Puis ensuite, pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il

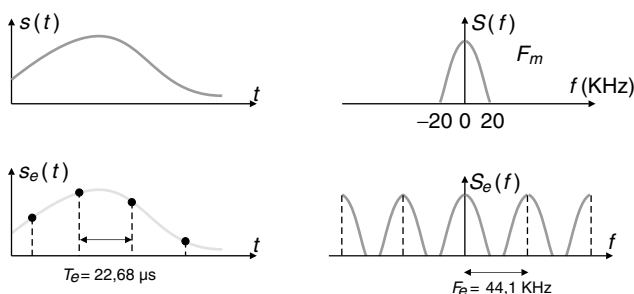


Figure 6.24 Caractéristiques temporelle et spectrale du signal sonore initial à enregistrer et du signal enregistré sur le support CD-audio.

faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (cf. figure 6.25). Ce procédé correspond au principe de l'interpolation idéale. Dans cet exemple, le calcul de la pente du filtre passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 6.11 :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - F_m}{F_m} \right]} = \frac{40 \log 2}{\log \left(\frac{24,1}{20} \right)} = 148,7 \text{ dB/octave}$$

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 25^e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement difficile à réaliser (oscillations, gain non constant sur la bande passante,...). En effet cette première méthode est la traduction directe de la relation théorique de reconstitution exacte du théorème d'échantillonnage (cf. équation 6.10). Le filtre passe-bas idéal, représenté par la porte de largeur $F_e/2$, est remplacé par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_e/2$ et avec une pente aussi grande que possible.

Pour contourner cette difficulté, la technique du sur-échantillonnage va être mise en œuvre. Le principe du sur-échantillonnage est donc de prélever des échantillons du signal à une cadence F'_e supérieure à la limite de Shannon F_e : $F'_e > F_e$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ce sur-échantillonnage du signal permet ensuite de réaliser beaucoup plus facilement la reconstruction du signal.

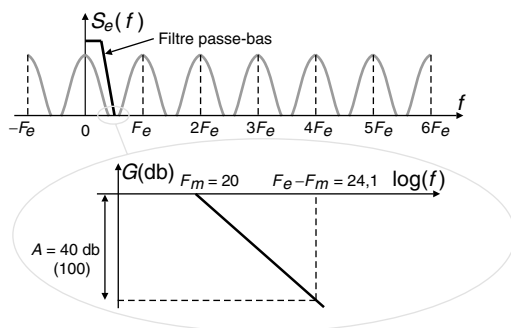


Figure 6.25 Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : équivalence de l'interpolation idéale.

Dans l'exemple qui nous intéresse ici, il n'est pas possible de sur-échantillonner le signal puisque les données sont déjà produites et disponibles sur un support fixé. Dans ce cas, la méthode du sur-échantillonnage consiste à **calculer** des échantillons intermédiaires entre deux échantillons réels du signal afin d'obtenir un signal numérique correspondant à une fréquence d'échantillonnage plus grande. Les points étant ainsi plus rapprochés, la reconstitution est alors grandement facilitée. Le calcul des points intermédiaires est basé sur la relation théorique 6.10. Dans l'exemple des signaux audio sur CD, le sur-échantillonnage est réalisé avec une fréquence quadruple : trois échantillons sont calculés entre deux échantillons initiaux connus.

L'ensemble des échantillons ainsi obtenus, échantillons initiaux et échantillons calculés, forme le nouveau signal sur-échantillonné $s'_e(t)$, ayant quatre fois plus d'échantillons. Ce signal correspond à un échantillonnage du signal initial $s(t)$ qui aurait été réalisé avec la fréquence d'échantillonnage F'_e ($F'_e = 4 F_e$). Aussi le spectre $S'_e(f)$ de ce signal sur-échantillonné $s'_e(t)$ est composé du spectre $S(f)$ périodisé avec la fréquence F'_e (cf. figure 6.26). Donc, pour obtenir l'expression du spectre $S'_e(f)$ à partir du spectre $S_e(f)$, il suffit d'utiliser un filtre fréquentiel composé d'une porte de largeur F_e et périodisée avec la fréquence F'_e . Soit :

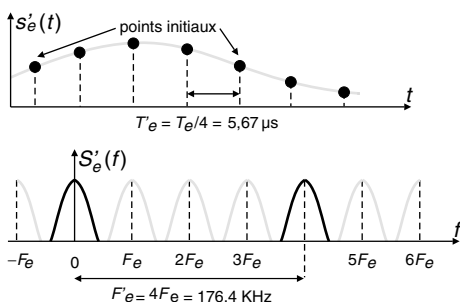


Figure 6.26 Réalisation d'un sur-échantillonnage quadruple et son effet sur le spectre du signal résultant.

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{F_e}(f - kF'_e)$$

Cette équation peut s'exprimer sous la forme équivalente suivante :

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \left[\Pi_{F_e}(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF'_e) \right] = S_e(f) \cdot [\Pi_{F_e}(f) * \text{Pgn}_{F'_e}(f)]$$

Cette relation va permettre d'établir la relation exacte de calcul des échantillons intermédiaires en prenant la transformée de Fourier de la relation précédente :

$$s'_e(t) = s_e(t) \cdot \left[F_e \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} * T'_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT'_e) \right]$$

En utilisant la relation ($F'_e = 4F_e$), il vient :

$$s'_e(t) = s_e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} \delta(t - kT_e/4)$$

En utilisant la relation 6.1 définissant $s_e(t)$, l'échantillon de rang k est calculé à partir de la relation suivante :

$$s'_e(kT'_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin(\pi(k/4 - n))}{\pi(k - 4n)}$$

La seule difficulté de cette technique réside dans le calcul des échantillons entre deux échantillons réels. La relation utilisée, correspondant à une somme infinie, a été tronquée et limitée à 48 valeurs de chaque côté de l'échantillon calculé :

$$s'_e(kT'_e) = \sum_{n=-48}^{+48} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin(\pi(k/4 - n))}{\pi(k - 4n)}$$

Pour réaliser ce calcul, la fonction $\text{sinc}(x)$ a été discrétisée sur 96 valeurs symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées, donc sur une durée de $96T'_e = 544,2 \mu\text{s}$. Cette durée correspond à 12 pseudo-périodes T_e de cette fonction. Les coefficients de la relation sont quantifiés sur 12 bits et ensuite stockés en mémoire statique EPROM.

Enfin pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (cf. figure 6.27). Dans cet exemple, le calcul de la pente du filtre passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 6.11 ; soit pour une atténuation A de 100 (40 db), il vient :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F'_e - F_m}{F_m} \right]} = \frac{40 \log 2}{\log \left(\frac{156,4}{20} \right)} = 13,5 \text{ db/octave}$$

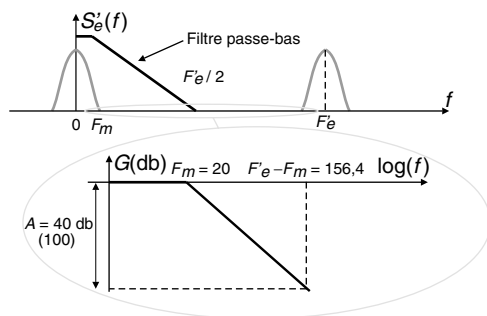


Figure 6.27 Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : technique du sur-échantillonnage.

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 2^e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement facile à réaliser par rapport au cas précédent. Cette technique est donc celle mise en œuvre dans l'ensemble des lecteurs de CD audio actuellement utilisés.

Chapitre 7

Analyse spectrale des signaux discrets

7.1 LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES

L'analyse fréquentielle des signaux apporte une information supplémentaire importante. Pour les différents cas de signaux, classés selon les caractéristiques continu ou discret et périodique ou transitoire, la représentation fréquentielle possède des propriétés particulières équivalentes continue ou discrète et périodique ou non périodique (*cf.* figure 7.1). De plus les méthodes, utilisées pour calculer ces représentations spectrales, ne sont pas les mêmes selon ces différents types de signaux (*cf.* tableau 7.1).

En effet, le spectre d'un signal continu est non périodique, qu'il soit périodique (cas **1**) ou non (cas **2**), il est obtenu à partir du développement

en série de Fourier pour le cas 1 et de la transformée de Fourier ou de l'intégrale de Fourier pour le cas 2. Le spectre d'un signal discret et non périodique (cas 3) est continu et périodique et obtenu à partir de l'intégrale de Fourier. Par contre, le calcul du spectre d'un signal périodique et discret (cas 4) utilise une nouvelle transformée : la transformée de Fourier discrète ou TFD.

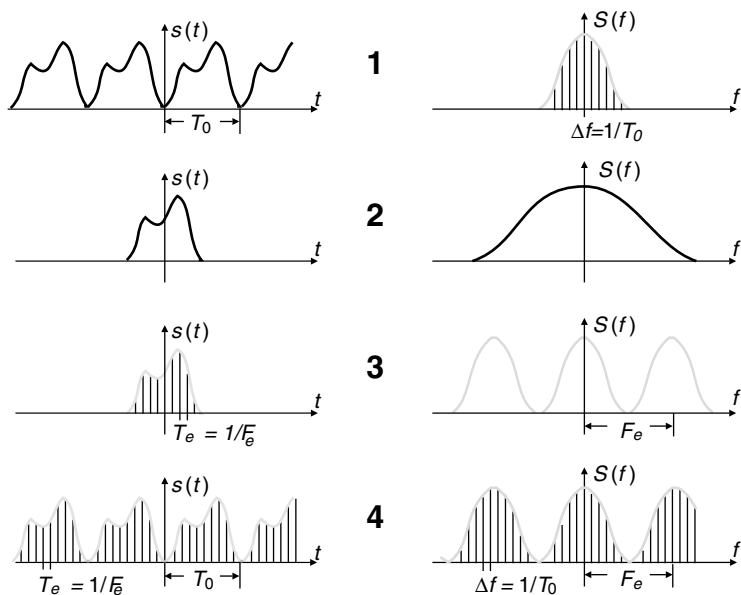


Figure 7.1 Représentations temporelles et spectrales des signaux classés selon leurs caractéristiques : périodiques ou non périodiques, continus ou discrets.

D'une façon générale, si l'on désire avoir une représentation spectrale numérique (calcul par ordinateur), le calcul des raies spectrales implique une discrétisation en fréquence, ce qui a pour conséquence de rendre le signal temporel périodique et discret. Le calcul de façon pratique est limité

à une tranche du signal, ce qui revient à des transformées identiques pour un signal non périodique et un signal périodique, c'est-à-dire que le signal transitoire doit être considéré comme périodiquement répété en dehors de son domaine d'existence.

Tableau 7.1 Correspondance entre les caractéristiques des signaux et des représentations spectrales associées.

Signal	Spectre	
	Méthode de calcul	Caractéristiques
1 - continu et périodique	Série de Fourier	Discret et non périodique
2 - continu et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
3 - discret et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
4 - discret et périodique	Transformée de Fourier discrète (TFD)	Discret et périodique

7.2 TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

7.2.1 Définition

Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage) et à tronquer temporellement ce signal. On obtient ainsi une suite de N termes représentée par :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \quad (7.1)$$

Appelons s_k les valeurs du signal $s_{e,\Pi}(t)$ aux instants kT_e . Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné limité à N termes $s_{e,\Pi}(t)$ est donné sous

la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de F_e/N suivant une expression identique :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{F_e}{N}\right) \quad (7.2)$$

De la même façon que la transformée de Fourier $S(f)$ du signal analogique $s(t)$ s'exprime sous la forme :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

On appelle Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT : *Discrete Fourier Transform*) d'un signal défini par N échantillons s_k , la suite de N termes S_m définie par :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \quad (7.3)$$

La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes (cf. figure 7.2).

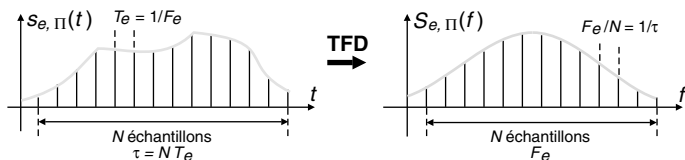


Figure 7.2 Transformée de Fourier discrète.

Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$), la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par :

$$\tau = N \cdot T_e = \frac{N}{F_e} \quad (7.4)$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à :

$$\Delta f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{F_e}{N} \quad (7.5)$$

De même que pour la transformée de Fourier d'un signal continu, on peut définir une transformation inverse qui s'écrit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \quad \text{avec} \quad s_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \quad (7.6)$$

7.2.2 Transformée de Fourier et TFD

Étant donné la définition de la transformée de Fourier discrète ou TFD que nous venons d'introduire, il est intéressant de répondre à deux questions concernant la relation entre la transformée de Fourier et la TFD :

- d'une part, le signal échantillonné de N points étant considéré comme un signal continu transitoire, quelle est la transformée de Fourier de ce signal ?
- d'autre part, connaissant la transformée de Fourier d'un signal continu, quelle est la relation entre les points de la transformée de Fourier discrète de ce signal échantillonné et les valeurs de la transformée de Fourier à ces mêmes fréquences ?

a) Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué et la TFD

Soit un signal $s(t)$, échantillonné à la fréquence F_e ($F_e = 1/T_e$) et tronqué par une porte de largeur τ ($\tau = NT_e$) qui prélève N points d'amplitude s_k de ce signal, soit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Fourier de ce signal est donc donnée par :

$$S_{e,\Pi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

Soit le résultat suivant :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi f k T_e}$$

Or pour obtenir la transformée de Fourier discrète, il faut échantillonner dans le domaine fréquentiel par pas de $1/\tau$ ($1/\tau = F_e/N$), soit :

$$S_{e,\Pi,e}(f) = S_{e,\Pi}(f) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - m/\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Cette expression doit être tronquée, puisque le nombre des échantillons de la représentation spectrale est limité à N :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Nous avons bien obtenu la relation de définition de la transformée de Fourier discrète (cf. équation 7.3) :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right] \cdot \delta(f - m/\tau)$$

b) Transformée de Fourier et la TFD

Considérons un signal $s(t)$ et sa transformée de Fourier $S(f)$. À la suite $s(kT_e) = s_k$ pour $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ correspondent les échantillons de la transformée de Fourier discrète S_m avec $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ par la relation 7.3 :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}}$$

La question, qui se pose, est donc le lien qui existe entre les valeurs de $S(f)$ aux fréquences mF_e/N et S_m pour $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. En posant $\tau = NT_e$, dans le cas où le signal est périodique de période τ , à spectre borné $F_{\max}$, et étant donné que :

- la largeur de la troncature temporelle est égale à la période τ ;
- le théorème de Shannon doit être respecté : $F_e \geq 2F_{\max}$

Il y a coïncidence, à un facteur multiplicatif près, entre $S(mF_e/N)$ et S_m :

$$S_m = \frac{\tau}{T_e} \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right) = N \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right)$$

Ce résultat provient essentiellement du fait que la fonction sinus cardinal (sinc), qui agit sur le spectre en le déformant, ne va pas produire cet effet car elle s'annule pour toutes les raies du spectre en $1/\tau$.

c) Interprétation du résultat de la TFD

Après le calcul de la transformée de Fourier discrète, on obtient une suite de N termes. Comme nous l'avons vu précédemment, les N échantillons temporels ayant été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$) et sur une durée τ ($\tau = N/T_e$), le spectre, composé de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à $\Delta f = F_e/N$.

L'interprétation des N échantillons S_m obtenus peut se faire en s'appuyant sur une analogie avec la représentation spectrale obtenue avec le développement en série de Fourier. Chaque échantillon peut être considéré comme un « harmonique » du spectre du signal. D'autre part le calcul est réalisé avec un indice positif des échantillons variant entre $[0, N-1]$ qui correspond à un domaine fréquentiel $[0, F_e]$. Mais il serait plus exact de la représenter sur un intervalle $] -F_e/2, F_e/2]$. Ainsi l'interprétation des échantillons est présentée sur le tableau 7.2.

Cette interprétation des échantillons obtenus montre bien que la précision d'analyse fréquentielle du spectre est donné par Δf qui est directement lié à la fenêtre d'observation du signal τ ($\tau = 1/\Delta f$). Pour une

fréquence d'échantillonnage F_e constante, l'augmentation de la précision en fréquence Δf passe par une augmentation du nombre de points N et donc de la fenêtre d'observation τ .

Tableau 7.2 Interprétation des échantillons calculés par TFD.

Échantillons	Fréquence [0, F_e]	Fréquence [$-F_e/2$, $F_e/2$]	Interprétation
S_0	0	0	Composante continue
S_1	Δf	Δf	Fondamentale ou 1 ^{re} harmonique
S_2	$2\Delta f$	$2\Delta f$	2 ^e harmonique
S_3	$3\Delta f$	$3\Delta f$	3 ^e harmonique
...			
$S_{N/2-1}$	$F_e/2 - \Delta f$	$F_e/2 - \Delta f$	$(N/2 - 1)^{\text{e}}$ harmonique
$S_{N/2}$	$F_e/2f$	$F_e/2f$	$(N/2)^{\text{e}}$ harmonique (fréquence de Nyquist)
$S_{N/2+1}$	$F_e/2 + \Delta f$	$-F_e/2 + \Delta f$	$(N/2 + 1)^{\text{e}}$ harmonique / $-(N/2 - 1)^{\text{e}}$ harmonique
...			
S_{N-3}	$F_e - 3\Delta f$	$-3\Delta f$	$(N - 3)^{\text{e}}$ harmonique / -3^{e} harmonique
S_{N-2}	$F_e - 2\Delta f$	$-2\Delta f$	$(N - 2)^{\text{e}}$ Harmonique / -2^{e} harmonique
S_{N-1}	$F_e - \Delta f$	$-\Delta f$	$(N - 1)^{\text{e}}$ harmonique / -1^{e} harmonique

7.3 TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

La transformée de Fourier rapide **TFR** ou **FFT** (*Fast Fourier Transform*) est simplement un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, en particulier le nombre de multiplications, pour calculer la TFD. Ce temps de calcul est en effet primordial pour réaliser des systèmes numériques en « temps réel ».

a) Comparaison TFD et TFR

En considérant la relation permettant de calculer la TFD (cf. équation 7.3), les opérations à effectuer pour obtenir ces N valeurs de la transformée de Fourier discrète dans le cas de N échantillons du signal initial sont :

- $N \cdot N = N^2$ multiplications complexes ;
- $N \cdot (N - 1)$ additions complexes.

Étant donné que la durée d'exécution d'une addition complexe est négligeable devant la durée d'une multiplication complexe, le coût de calcul de la transformée de Fourier discrète va donc essentiellement dépendre du temps de réalisation d'une multiplication complexe.

Il existe différents algorithmes de transformée de Fourier rapide. Le plus connu et le plus utilisé est celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel). Le nombre des multiplications complexes est $(N/2)\log(N)$. Le gain en fonction du nombre d'échantillons est important, sachant que le calcul de TFD se fait généralement sur un minimum de 512 ou 1 024 échantillons et que le temps de calcul d'une multiplication est prépondérant par rapport à l'addition, le temps de calcul d'une TFD par FFT peut être réduit d'un facteur supérieur à 100 (cf. tableau 7.3) :

$$N^2 / \frac{N}{2} \log(N) = 2N / \log(N)$$

Tableau 7.3 Amélioration des temps de calcul d'une transformée de Fourier discrète par utilisation d'un algorithme à entrelacement temporel.

Nombre d'échantillons	Rapport du nombre de multiplications complexes
8	5
128	36
512	114
1 024	205
2 048	372

b) Algorithme de transformée de Fourier rapide

L'algorithme de Cooley-Tukey, appelé aussi algorithme de réduction à base 2 dans le domaine temporel, s'applique dans le cas où le nombre N

d'échantillons s_k s'exprime sous la forme 2^L et permet alors de simplifier le problème par une décomposition dichotomique. Posons :

$$W_N^{mk} = e^{-j2\pi \frac{km}{N}}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$W_N^{2mk} = W_{N/2}^{mk} \quad \text{et pour } m < N/2 \quad W_N^{mk+N/2} = -W_N^{mk}$$

Pour calculer les N échantillons de la DFT $\{S_0, S_1, S_2, \dots, S_{N-2}, S_{N-1}\}$, on utilise l'expression de base :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot W_N^{mk} \quad \text{pour } m \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

En séparant les échantillons d'ordre pair et d'ordre impair, il vient :

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_N^{m(2i)} + \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_N^{m(2i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_{N/2}^{mi} + W_N^m \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_{N/2}^{mi} \end{aligned}$$

Ce résultat montre que les échantillons S_m de la DFT d'ordre N s'exprime sous la forme de deux DFT d'ordre $N/2$:

$$S_m = S_{1(N/2),m} + W_N^m \cdot S_{2(N/2),m} \quad (7.7)$$

avec $S_{1(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre pair et $S_{2(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre impair.

Ainsi nous avons donc à calculer 2 transformées d'ordre $N/2$ et $N/2$ multiplications complexes pour terminer le calcul. Si l'on considère l'opérateur « papillon », représenté sur la figure 7.3, le calcul d'une DFT d'ordre N conduit à faire le calcul de deux DFT d'ordre $N/2$ et de terminer un calcul en utilisant un opérateur « papillon » avec le coefficient W_N^m (cf. figure 7.4). En effet l'équation 7.7 peut être précisée selon l'intervalle d'appartenance de l'indice m :

- pour $0 \leq m' \leq N/2 - 1$: $S_{m'} = S_{1,m'} + W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$
- pour $N/2 \leq m'' \leq N-1$: $S_{m''} = S_{1,m''-N/2} - W_N^{m''-N/2} \cdot S_{2,m''-N/2}$
- en posant $m' = m'' - N/2$: $S_{m''} = S_{1,m'} - W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$

Cette analyse peut être réalisée L fois si $N = 2^L$. On obtient alors à la fin du processus de dichotomie une transformée d'ordre 2 dont la matrice de calcul ne demande pas de multiplication car :

$$W_2^1 = -1 \quad \text{et} \quad W_2^0 = +1$$

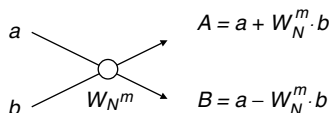


Figure 7.3 Opérateur de base pour le calcul de la TFR : opérateur « papillon ».

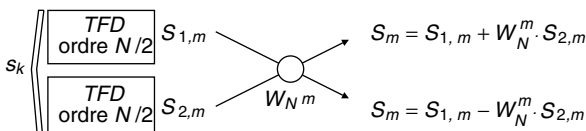


Figure 7.4 Calcul d'une TFR d'ordre N à partir de deux TFR d'ordre $N/2$.

Ainsi l'algorithme complet du calcul peut être représenté sous la forme de L étapes de calcul de type « papillon » commençant par le calcul des $N/2$ transformées d'ordre 2 (cf. figure 7.5). Pour illustrer ce principe de calcul nous allons considérer le cas $N = 8$. Pour réaliser le calcul de la TFD, nous disposons des 8 échantillons temporels s_k avec $k \in [0,7]$ et nous allons calculer les 8 échantillons fréquentiels S_m avec $m \in [0,7]$. L'expression, utilisée pour calculer les S_m en fonction des s_k , est la suivante :

$$S_m = \sum_{k=0}^7 s_k \cdot W_8^{mk}$$

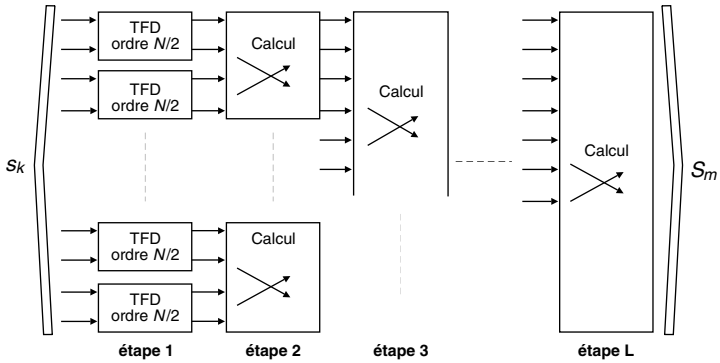


Figure 7.5 Représentation schématique de la TFR suivant l'algorithme de réduction à base 2 ou avec entrelacement temporel.

Calculons les valeurs de W_8^{mk} . Seules les 8 premières valeurs de W_8^{mk} sont différentes puisque cette fonction est identique modulo $N = 8$, soit :

$$W_8^0 = -W_8^4 = 1 \quad W_8^1 = -W_8^5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$$

$$W_8^2 = -W_8^6 = -j \quad W_8^3 = -W_8^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

Un premier découpage dichotomique conduit à réaliser deux TFD d'ordre 4 et un calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,m}$. Les deux transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

$$\text{— échantillons pairs :} \quad S_{1,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k} \cdot W_4^{mk} \quad \text{pour } m \in [0,3]$$

$$\text{— échantillons impairs :} \quad S_{2,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k+1} \cdot W_4^{mk} \quad \text{pour } m \in [0,3]$$

avec les quatre valeurs de la fonction W_4^{mk} :

$$W_4^0 = -W_4^2 = 1 \quad \text{et} \quad W_4^1 = -W_4^3 = -j$$

Ensuite les échantillons de la DFT complète sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients W_8^{mk} :

- pour $0 \leq m \leq 3$: $S_m = S_{1,m} + W_8^m \cdot S_{2,m}$
- pour $4 \leq m \leq 7$: $S_m = S_{1,m-4} + W_8^{m-4} \cdot S_{2,m-4}$

Les coefficients des expressions, donnant $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$, étant très simples (1 ou j), la méthode de découpage peut se limiter à cette étape et conserver ainsi comme premier calcul des TFD d'ordre 4. Les algorithmes, construits sur ce principe, sont appelés « FFT Radix-4 ».

En continuant le découpage dichotomique, nous obtenons alors le calcul de 4 TFD d'ordre 2 à réaliser suivi du calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,j,m}$. Les quatre transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

- échantillons pairs et impairs de $S_{1,m}$ pour $m \in [0,1]$:

$$S_{1,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k} \cdot W_2^{mk} \quad S_{1,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+2} \cdot W_2^{mk}$$

- échantillons pairs et impairs de $S_{2,m}$ pour $m \in [0,1]$:

$$S_{2,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+1} \cdot W_2^{mk} \quad S_{2,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+3} \cdot W_2^{mk}$$

avec les deux valeurs de la fonction W_2^{mk} : $W_2^0 = -W_2^1 = 1$

Étant donné les valeurs des coefficients W_2^{mk} , une TFD d'ordre 2 correspond à un opérateur de type « papillon » sans coefficient, donc une simple somme ou différence de nombres complexes (coût de calcul négligeable). Ensuite les échantillons intermédiaires $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$ sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients $W_2^{mk} W_2^{mk}$ équivalents :

- pour $0 \leq m \leq 1$:

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= S_{1,1,m} + W_4^m \cdot S_{1,2,m} = S_{1,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{1,2,m} \\ S_{2,m} &= S_{2,1,m} + W_4^m \cdot S_{2,2,m} = S_{2,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{2,2,m} \end{aligned}$$

– pour $2 \leq m \leq 3$:

$$S_{1,m} = S_{1,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{1,2,m-2} = S_{1,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{1,2,m-2}$$

$$S_{2,m} = S_{2,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{2,2,m-2} = S_{2,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{2,2,m-2}$$

Finalement nous obtenons dans ce cas le schéma général du calcul de la TFD d'ordre 8 qui conduit à un calcul de 4 TFD d'ordre 2 (ou opérateur « papillon » sans coefficient), suivi de deux étapes de calcul « papillon » (cf. figure 7.6).

Il est important de noter que pour un calcul immédiat sous cette forme les échantillons s_k doivent être classés dans un ordre permuté. Cette permutation est due aux entrelacements successifs et se traduit par un retournement ou une inversion de la représentation binaire des indices (transformation 0->1 et 1->0 des indices codés en binaire).

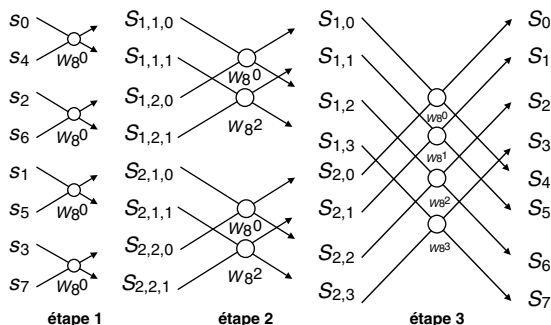


Figure 7.6 Représentation schématique de la TFR selon la méthode à entrelacement temporel pour 8 échantillons.

Ainsi les programmes de TFR ou FFT suivant cette méthode commencent toujours par un classement des échantillons et ensuite réalise le calcul des différentes étapes. De nombreux programmes, qui implémentent cette méthode, existent dans les différents langages de haut niveau et sont souvent disponibles dans les bibliothèques scientifiques de base (www.intersrv.com/~dcross/fft.html). Dans tous les cas le calcul d'une

TFR se traduit par un temps important. Pour améliorer ces temps de calcul de transformée de Fourier rapide et obtenir des résultats en « temps réel », par exemple dans les systèmes de type radar, il est nécessaire d'utiliser des processeurs de traitement de signaux (DSP : *Digital Signal Processor*). Ces processeurs possèdent des unités de calculs rapides. La mise en œuvre de ce type d'algorithmes, disponible dans les bibliothèques de programmes fournies avec ces processeurs, est aisée et conduit à des performances très intéressantes. Considérons ainsi le processeur TMS 320C25 (Texas Instruments), nous avons les résultats suivants : 200 μ s pour 64 échantillons, 3 ms pour 256 et 20 ms pour 1 024. Les programmes écrits en langage de haut niveau (C ou autre) et compilés sur des processeurs 32 bits (ex : 68 040 de chez Motorola), conduisent à des temps de calcul de l'ordre de quelques 100 ms ou plus pour un nombre d'échantillons égal à 1 024.

7.4 CONVOLUTION ET CORRÉLATION NUMÉRIQUES

7.4.1 Convolution discrète

De la même manière que pour la transformée de Fourier, il est possible de définir la convolution discrète. Considérons deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ ($= x_i$) et $y(iT_e)$ ($= y_i$). La convolution discrète z de x et de y , formée des points $z(iT_e)$ ($= z_i$), est définie à partir de l'écriture discrétisée de la relation de définition 3.4 :

$$z_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \quad (7.8)$$

Mais, pour N échantillons de x_i et y_i , la convolution discrète s'exprime par :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \quad (7.9)$$

Il est important de remarquer que ce calcul nécessite de connaître y_i en dehors de l'intervalle précédemment défini; en effet nous avons besoin des échantillons correspondant à l'intervalle $i \in \{-N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1\}$. Pour pouvoir réaliser effectivement le calcul, plusieurs solutions sont possibles pour définir les échantillons y_i (cf. figure 7.7) :

Cas 1 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ sont considérés comme nuls : $x_i = 0$ et $y_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i \geq N$. Dans ce cas il est préférable de calculer la convolution sur un intervalle qui fait intervenir symétriquement les échantillons de y_i et donc de calculer la convolution sur $2N-1$ points :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \in [0, 2N-1]$$

Cas 2 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ sont considérés comme identiques, c'est-à-dire comme si la fonction était périodique et de période NT_e .

Cas 3 : enfin les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ peuvent être connus et alors utilisés pour le calcul. Ou si ils ne le sont pas, la convolution peut alors être calculée sur un intervalle moitié de l'intervalle de connaissance des échantillons y_i , ici $N/2$.

Le premier cas conduit à des résultats présentant des distorsions, alors que les deux dernières solutions conduisent à des résultats beaucoup plus acceptables et semblent être les plus communément utilisées.

7.4.2 Corrélation discrète

De même, il est possible de définir la corrélation discrète. Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ ($= x_i$) et $y(iT_e)$ ($= y_i$). La corrélation discrète $C_{xy,k}$ de x et y est définie à partir de la relation 3.23 qui conduit à la relation discrétisée suivante :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \quad (7.10)$$

Mais, pour un nombre N échantillons de x_i et y_i , la corrélation discrète est donnée par :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \quad (7.11)$$

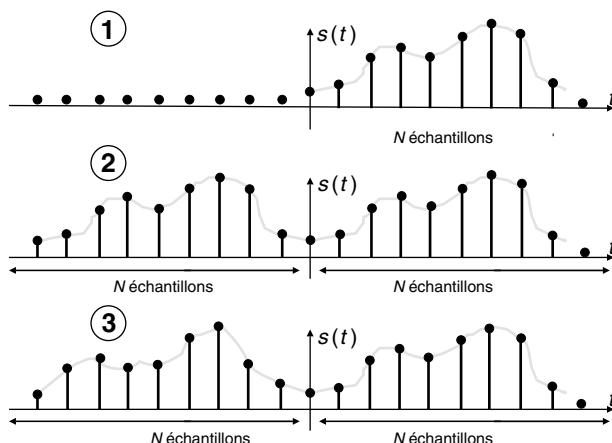


Figure 7.7 Les différentes solutions pour le calcul d'une convolution ou d'une corrélation discrète.

Comme pour la convolution discrète, il est nécessaire de connaître des valeurs de y_i en dehors de l'intervalle initial et les trois solutions proposées précédemment sont possibles. Le premier cas où l'on considère des échantillons nuls en dehors de l'intervalle initial conduit à des résultats présentant des distorsions par rapport au calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (cf. figure 7.8) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, 2N-1] \quad (7.12)$$

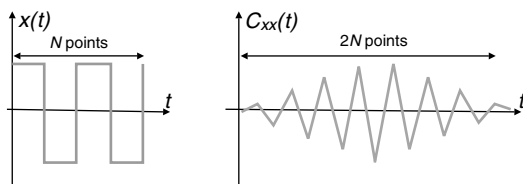


Figure 7.8 Calcul de la corrélation discrète en supposant les échantillons nuls en dehors de l'intervalle.

Le calcul sur $2N$ points permet d'avoir une fonction de corrélation symétrique. En considérant la solution où la corrélation est calculée sur la moitié des N points initiaux, nous obtenons alors un résultat identique à celui obtenu avec un calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (cf. figure 7.9) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N/2-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2 - 1] \quad (7.13)$$

ou

$$C_{xy,k} = \sum_{i=(N/2)-1}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2 - 1] \quad (7.14)$$

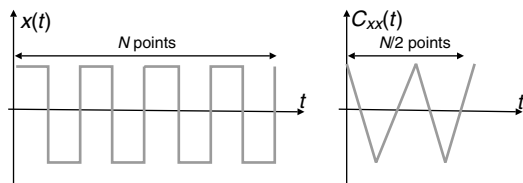


Figure 7.9 Calcul de la corrélation discrète en utilisant la moitié de l'intervalle sur lequel sont connus les échantillons.

7.5 LES FENÊTRES DE PONDÉRATION

7.5.1 Effet du fenêtrage temporel

Comme nous l'avons étudié au paragraphe 3.2, le traitement analogique ou numérique d'un signal de durée finie ou tronqué $s_{\Pi}(t)$ conduit à une déformation de son spectre. Dans le cadre de la TFD que nous venons d'étudier, le signal est obligatoirement limité aux N échantillons numériques avec lesquels la TFD est calculée, c'est-à-dire à une durée $\tau (= NT_e)$. Cette effet a été modélisé par la relation suivante :

$$s_{\Pi}(t) = s(t) \cdot \Pi_{\tau}(t)$$

et donc un spectre en fréquence donné par :

$$S_{\Pi}(f) = S(f) * \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right]$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre, obtenu par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions $\text{sinc}(\tau f)$ centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial. Ainsi cette qualité du résultat peut être incommode pour l'étude du spectre, en particulier lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres.

Pour caractériser cette « déformation » du spectre due à la fenêtre temporelle de type porte (fenêtre naturelle) $g_{\text{fen}}(t) = \Pi_{\tau}(t)$, nous allons définir les quatre paramètres suivants en considérant la valeur absolue de la fonction sinus cardinal (cf. figure 7.10) :

– la largeur à mi-hauteur du pic principal par rapport à la largeur de sa base dans le cas de la fenêtre naturelle :

$$L = \frac{L_{mi-h}}{L_{\text{base}}}$$

– l'amplitude du premier lobe secondaire par rapport à celle du pic principal généralement normé à 1 :

$$A = \frac{H_{1-l}}{H = 1}$$

– les positions des 2 premiers lobes secondaires par rapport à la position du pic central :

$$P_1 = \frac{P_{1-l}}{L_{\text{base}}/2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{P_{2-l}}{L_{\text{base}}/2}$$

Dans le cas du traitement analogique des signaux, cette déformation spectrale est inévitable et correspond à la fenêtre de mesure ou fenêtre naturelle (fonction porte) et cela conduit à des paramètres de déformation, mesurés sur la figure 7.10 ou calculés directement sur la fonction sinc (cf. annexes) :

Fenêtre	L	A	P ₁	P ₂
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46

Par contre dans le cas d'un traitement numérique du signal (transformée de Fourier discrète), il est possible d'utiliser des fonctions-fenêtres $g_{\text{fen}}(t)$ différentes de la fenêtre naturelle $\Pi_{\tau}(t)$ permettant d'obtenir une représentation spectrale meilleure au sens des paramètres définis. En effet les déformations spectrales obtenues sont directement liées au spectre de la fenêtre utilisée : fenêtre naturelle $\Rightarrow$ déformation de type sinc. Il serait souhaitable que les déformations obtenues soient moins importantes :

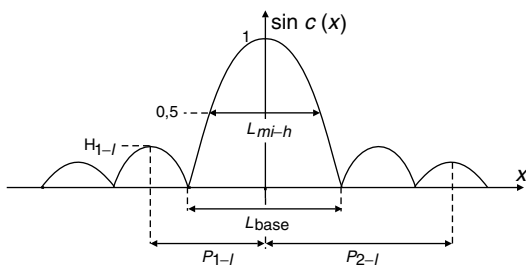


Figure 7.10 Caractérisation de la déformation du spectre due au fenêtrage.

- largeur à mi-hauteur du pic principal L la plus petite possible ;
- l'amplitude relative A du 1^{er} lobe secondaire la plus faible possible ;

– les positions P_{1-l} et P_{2-l} des 2 premiers lobes secondaires les plus éloignées possibles.

Cette fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$ agit sur les échantillons s_k pour obtenir de nouveaux échantillons $s_{k,f}$ avec les valeurs numériques de la fonction fenêtre discrétisée aux instants kT_e : $g_{\text{fen}}(kT_e) = g_{\text{fen},k}$. Soit :

$$s_{k,f} = s_k \cdot g_{\text{fen},k}$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre sera donc un ensemble de fonctions, transformées de Fourier de la fonction-fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$, centrées sur les fréquences qui composent le signal.

De nombreuses études ont été réalisées afin d'obtenir des fenêtres temporelles $g_{\text{fen}}(t)$ minimisant la déformation (*Smoothing Windows*), c'est-à-dire possédant un spectre plus proche des caractéristiques souhaitées. Ainsi, la première fenêtre utilisée a été la fenêtre « triangulaire » ou fenêtre de Bartlett qui a pour équation :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_{\tau}(t) \quad \text{pour } |t| \leq \tau/2 \quad \text{et} \quad g_{\text{fen}}(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq \tau/2$$

Il est assez évident de calculer le spectre de cette fenêtre en utilisant le résultat obtenu dans le paragraphe 3.3.2 en calculant la fonction d'auto-corrélation d'un signal porte :

$$\Lambda_{\tau}(t) = \frac{2}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau/2}(t) * \Pi_{\tau/2}(t)]$$

Donc la transformée de Fourier de la fonction $\Lambda_{\tau}(t)$ est donnée par :

$$\Lambda_{\tau}(t) \longleftrightarrow F \frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi(\tau/2)f)}{\pi(\tau/2)f} \right]^2$$

En utilisant cette fenêtre triangulaire nous obtenons le spectre possédant les caractéristiques suivantes :

Fenêtre	L	A	P ₁	P ₂
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92

Si les caractéristiques correspondant aux lobes secondaires sont effectivement améliorées, par contre la largeur du pic principal est augmenté. D'autres fenêtres plus complexes dans leurs expressions mathématiques et surtout dans le calcul du spectre sont utilisées en fonction de leurs caractéristiques. Nous présentons ci-après les principales fenêtres avec leur expression $g_{\text{fen}}(t)$; leurs caractéristiques et leurs domaines d'utilisation sont indiqués dans le tableau 7.4. Soit :

– fenêtre naturelle ou porte (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Pi_{\tau}(t)$$

– fenêtre de Bartlett ou triangulaire (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_{\tau}(t) \quad \text{pour } |t| \leq \tau/2$$

$$\text{et } g_{\text{fen}}(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq \tau/2$$

– fenêtre de Hanning :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,5 \cdot [1 - \cos(2\pi t/\tau)]$$

– fenêtre de Hamming :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos(2\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,08 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman-Harris :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42323 - 0,49755 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,07922 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman exacte :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{7938}{18608} - \frac{9240}{18608} \cdot \cos(2\pi t/\tau) + \frac{1430}{18608} \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre exponentielle :

$$g_{\text{fen}}(t) = e^{a \cdot t} \quad \text{avec } a = \text{Ln}(b)/\tau \quad \text{et } b : \text{valeur finale}$$

Tableau 7.4 Comparaison des fenêtres temporelles.

Fenêtre	L	A	P ₁	P ₂	Remarques
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46	<i>référence</i>
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92	pic secondaires faibles et éloignés
Hanning	1	0,025	2,3	3,3	lobes secondaires faibles, fenêtre très utilisée
Hamming	0,91	0,0015	2,4	3,6	pic central étroit, lobes secondaires faibles
Blackman	1,2	0,0015	3,5	4,5	lobes secondaires faibles et éloignés
Blackman-Harris	1,2	0,0004	3,5	4,5	lobes secondaires très faibles
Blackman exacte	1,15	0,0005	3,5	4,4	lobes secondaires très faibles
à « toit plat »	1,8	0,01	3,3	4,5	résolution très bonne en amplitude
exponentielle ($b=0,1$)	0,8	—	—	—	pic central très étroit, composante continue
Kaiser-Bessel ($\beta = 9$)	1,2	0,0005	3,2	3,8	lobes secondaires très faibles

– fenêtre à « toit plat » :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,2810639 - 0,5208972 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,1980399 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Kaiser-Bessel :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{I_0\left(\beta \cdot \sqrt{1 - [(t - \tau/2)/(\tau/2)]}\right)}{I_0(\beta)} \quad \text{avec } 2\pi \leq \beta \leq 3\pi$$

et $I_0(x) = J_n(jx)$: la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0 (cf. annexes)

– fenêtre de Parzen :

$$\begin{aligned}
 g_{\text{fen}}(t) &= 1 - 6 \cdot \left(\frac{|t|}{\tau}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{|t|}{\tau}\right)^3 && \text{pour } |t| \leq \tau/2 \\
 g_{\text{fen}}(t) &= 2 \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right)^3 && \text{pour } \tau/2 \leq |t| \leq \tau \\
 g_{\text{fen}}(t) &= 0 && \text{pour } |t| \geq \tau
 \end{aligned}$$

– fenêtre de Gauss (courbe de Gauss tronquée) :

$$\begin{aligned}
 g_{\text{fen}}(t) &= e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \Pi_{\tau}(t) && \text{pour } |t| \leq \tau/2 \quad \text{et } \tau = k\sigma \quad (k \in [1,5]) \\
 g_{\text{fen}}(t) &= 0 && \text{pour } |t| \geq \tau/2
 \end{aligned}$$

Ces différentes fenêtres réalisent toujours un compromis entre la largeur du pic central et les caractéristiques des lobes secondaires (hauteur et position). Dans tous les cas, l'utilisation de fenêtre numérique va améliorer la lisibilité du spectre obtenu. Le choix de la fenêtre la plus adaptée à une application est très difficile à réaliser. En pratique, il est conseillé de commencer par utiliser la fenêtre naturelle afin de ne pas produire de lissage par une fenêtre de pondération. Dans une deuxième étape, il est important de spécifier l'analyse spectrale recherchée : identification de deux fréquences très proches (élimination des lobes secondaires), comparaison des puissances respectives des pics de fréquences (fenêtres à faible déformation par lissage), résolution en fréquences et en puissance, etc. Ensuite la meilleure méthode consiste à tester l'effet des différentes fenêtres sur le spectre.

Ainsi cette possibilité est souvent offerte dans des appareils de mesure haut de gamme : oscilloscope numérique avec fonctions de traitement du signal intégrées.

7.5.2 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Considérons un signal $s(t)$ pondéré par une fenêtre temporelle de fonction réelle $g_{\text{fen}}(t)$, centrée autour du temps α ; le signal résultant, paramétré par

α , peut s'écrire :

$$s_{\Pi,\alpha}(t) = s(t) \cdot g_{\text{fen}}(t - \alpha)$$

Le spectre de ce signal, paramétré aussi par α , est obtenu à partir de la transformée de Fourier selon la relation de base 2.13 :

$$S_{\Pi,\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Pi,\alpha}(\theta) \cdot e^{-j2\pi f\theta} \cdot d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta) \cdot g_{\text{fen}}(\theta - \alpha) \cdot e^{-j2\pi f\theta} \cdot d\theta$$

Cette transformée de Fourier, ou plus exactement cet ensemble de transformées de Fourier, est appelé la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Nous pouvons remarquer que cet ensemble de transformées de Fourier, paramétrées par α , contient plus d'informations que nécessaire pour reconstruire le signal initial non tronqué. Ainsi nous avons la relation :

$$s(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} S_{\Pi,\alpha}(f) \cdot g_{\text{fen}}(t - \alpha) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot df \cdot d\alpha$$

Dans le cas où l'on considère une fenêtre de pondération de type Gauss (cf. paragraphe précédent), nous avons une transformée de Fourier à fenêtre glissante, dite transformée de Gabor :

$$S_{\Pi,\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\theta) \cdot e^{-\frac{(\theta-\alpha)^2}{2}} \cdot e^{-j2\pi f\theta} \cdot d\theta \quad (7.15)$$

Remarque : les transformées de Fourier et de Gabor peuvent être interprétées comme une décomposition sur une base de fonctions sinusoïdales pour la première (décomposition en série de Fourier) et sur une base de fonctions sinusoïdales dont l'enveloppe est une gaussienne centrée en α . L'avantage de la transformée de Gabor sur celle de Fourier concerne les signaux de durée finie ayant une répartition limitée en fréquence, le calcul de la transformée de Fourier nécessitant dans ce cas un traitement numérique de précision sur une durée longue (annulation des composantes fréquentielles élevées).

7.5.3 La transformée en ondelettes

a) Principe de base de la transformée par ondelettes

Le but de ce paragraphe est simplement de donner les idées de base de cette analyse par ondelettes, actuellement encore peu répandue. Le principe de base est d'utiliser des fenêtres de pondération de fonction réelle $g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t)$, qui sont centrée autour d'un temps α et liées par un rapport d'homothétie de β . Ainsi nous avons l'ensemble exprimé par :

$$g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot g_{\text{fen}}\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0$$

La fonction génératrice $g_{\text{fen}}(t)$ est appelée ondelette mère. La transformée par ondelettes d'un signal $s(t)$ aura donc pour expression de ces coefficients :

$$O_s(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) \cdot dt \quad (7.16)$$

Ce calcul de la transformée par ondelettes peut être vu comme une « comparaison » du signal avec un signal de base (ondelette mère) décalé temporellement et comprimé ou dilaté.

De la même manière que pour la transformée de Gabor, il est possible de reconstruire le signal initial en connaissant les coefficients de la transformée par ondelettes. Soit l'expression de $s(t)$ à une constante près :

$$s(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\beta^2} O_s(\alpha, \beta) \cdot g_{\text{fen},\alpha,\beta}(t) \cdot d\alpha \cdot d\beta$$

La fonction ondelette-mère doit posséder les propriétés suivantes :

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\text{fen}}^2(t) \cdot dt} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G_{\text{fen}}(f)|^2}{|f|} \cdot df = k \quad (\text{avec } k \text{ borné})$$

Différentes fonctions ondelettes qui respectent les propriétés précédentes sont utilisées :

– ondelette de Morlet :

$$g_{\text{fen}}(t) = e^{-t^2/2} \cdot \cos(5 \cdot t)$$

– ondelette de Haar :

$$\begin{aligned} g_{\text{fen}}(t) &= 1 && \text{pour } 0 < t < 1/2 \\ g_{\text{fen}}(t) &= -1 && \text{pour } 1/2 < t < 1 \\ g_{\text{fen}}(t) &= 0 && \text{pour } t \notin [0,1] \end{aligned}$$

– ondelette obtenue par dérivées de gaussiennes (exemple de la dérivée seconde) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot (1 - t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

b) Exemple de transformée par ondelettes

La mise en œuvre numérique nécessite de restreindre les intervalles de variation de α et β . Ainsi, nous avons la fonction-ondelette couramment utilisée :

$$g_{\text{fen},m,n}(t) = 2^{m/2} \cdot g_{\text{fen}}(2^m \cdot (t - n \cdot 2^{-m})) \quad \text{avec } m, n \in \mathbb{N}$$

En accroissant m , le temps est compressé et donc la fréquence centrale et la largeur de bande sont dilatées. Le paramètre m peut être considéré comme un facteur d'échelle et 2^{-m} comme un pas d'échantillonnage. Si on considère F_0 comme la fréquence centrale de la fenêtre $g_{\text{fen},m,n}(t)$, celle-ci peut varier selon $2^{-m}F_0$. Ainsi il est possible d'ajuster le facteur d'échelle m pour déceler les différentes fréquences contenues dans le signal.

Considérons un signal constitué de la succession de deux sinusoïdes de périodes respectives T_0 et $T_0/2$, limitées pour chacune à une période, soit (cf. figure 7.11) :

$$s(t) = \sin(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_{T_0/2}(t - T_0/2) + \sin(2\pi(2F_0)t) \cdot \Pi_{T_0/4}(t - (T_0 + T_0/4))$$

En utilisant la transformée de Fourier, le spectre de ce signal s'exprime par la relation complexe suivante :

$$\begin{aligned} S(f) = \frac{1}{j\pi} \cdot \left[\cos\left(\pi \frac{T_0}{2} f\right) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} \cdot \frac{f}{f^2 - F_0^2} \right. \\ \left. + \cos\left(\pi \frac{T_0}{4} f\right) \cdot e^{-j2\pi f [T_0 + \frac{T_0}{4}]} \cdot \frac{f}{f^2 - 4F_0^2} \right] \end{aligned}$$

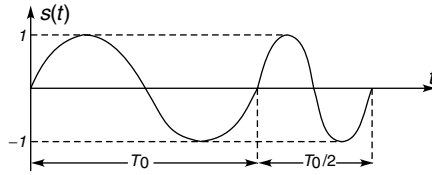


Figure 7.11 Exemple d'un signal simple de durée limite.

Cette représentation ne facilite pas la compréhension du spectre du signal $s(t)$. Considérons maintenant une analyse par ondelettes en utilisant comme fonction ondelette mère une seule période d'une sinusoïde :

$$g_{\text{fen},m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \sin \left(2^m(t - n2^{-m}) \right)$$

soit par exemple :

$$\begin{array}{lll} g_{\text{fen},1,0}(t) = \sqrt{2} \sin(2t) & \text{avec } T_0 = 1/2 & \text{et } 0 \leq t \leq \pi \\ g_{\text{fen},0,0}(t) = \sin(t) & \text{avec } T_0 = 1 & \text{et } 0 \leq t \leq 2\pi \end{array}$$

Le calcul de la transformée par ondelettes consiste à calculer les coefficients selon la relation 7.16 ou encore à comparer les différentes fonctions ondelettes comprimées et décalées avec le signal; il vient :

$$O_s(m,n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot g_{\text{fen},m,n}(t) \cdot dt$$

$$O_s(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad O_s(0,1) = 0$$

$$\text{et} \quad O_s(1,0) = 0, \quad O_s(1,1) = 0, \quad O_s(1,2) = 1 \quad \text{et} \quad O_s(1,3) = 0$$

Il est possible de représenter cette transformée par ondelettes dans un diagramme fréquence temps (cf. figure 7.12). Cette représentation montre que la transformée par ondelettes indique non seulement le contenu en fréquence mais aussi les instants d'existence de ces fréquences.

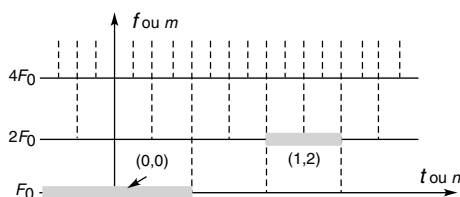


Figure 7.12 Représentation d'une transformée par ondelettes.

Cette transformée par ondelettes est particulièrement utile pour l'analyse de signaux présentant des discontinuités (signal carré, signal avec des parasites impulsionnels). Cette transformée par ondelettes s'applique à des problèmes très variés :

- une analyse dite multi-échelle : différents niveaux de paramétrage des fonctions ondelettes ;
- une analyse avec suppression de tendance : annulation d'une valeur moyenne en évolution en utilisant une analyse multi-échelle ;
- une analyse avec suppression du bruit : choix des ondelettes-mères en adéquation avec le type de signal à extraire du bruit.

Chapitre 8

Filtrage numérique

8.1 INTRODUCTION

8.1.1 Filtrage numérique : définition

On appelle « **filtre numérique** » un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du déve-

loppement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

De la même manière, le problème consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue.

Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(kT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même instant kT_e , des N entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_i$ pour tout $i \in \{k-1, \dots, k-N\}$ et de plus des sorties numériques précédentes $y(iT_e) = y_i$ pour tout $j \in \{k-1, \dots, k-N\}$ (cf. figure 8.1) :

$$y_k = F_{\text{onction}}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-N})$$

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants : la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution (cf. paragraphe 3.1). Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k , soit une combinaison linéaire des éléments x_i et y_i :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad (8.1)$$

Cette équation générale des filtres numériques est appelée **équation aux différences**. À partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres : les **filtres non récurrents** pour lesquels tous les coefficients b_j sont nuls et les **filtres récurrents** pour lesquels au moins un coefficient b_j est non nul ou encore définis comme des filtres possédant une boucle de contre-réaction.

Pour les filtres non récurrents, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad (8.2)$$

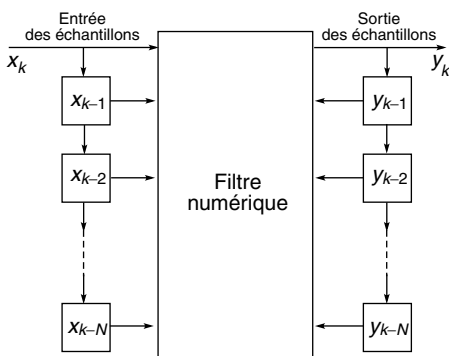


Figure 8.1 Représentation schématique d'un filtre numérique.

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, établie au paragraphe 7.4.2, qui est liée aux échantillons de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \quad (8.3)$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (**RIF**) ou filtres à moyenne ajustée (**MA**) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation 8.3 qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle ; soit la forme :

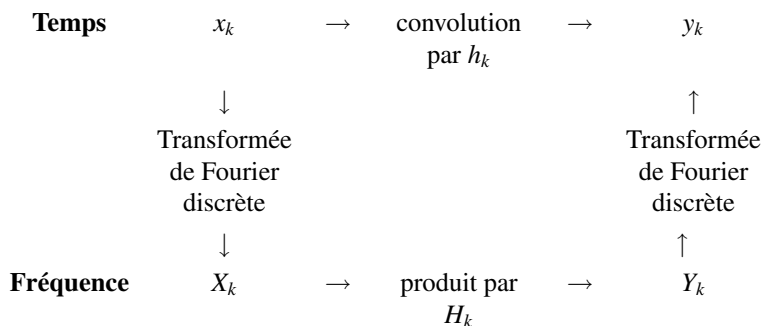
$$y_k = \sum_{i=0}^N h_i \cdot x_{k-i} \quad (8.4)$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir de filtres non récurrents. En effet l'équation 8.4 correspond à l'équation 8.2 pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récurrents.

L'autre catégorie de filtres numériques sont dits à réponse impulsionnelle infinie (**RII**) ou filtres généraux (**ARMA**) pour lesquels la relation 8.4 ne sera pas applicable et il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale 8.1. Il est possible de définir une catégorie particulière des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (**AR**) pour lesquels nous avons la relation suivante (cas particulier de la relation 8.1) :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j}$$

Enfin il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD), il est possible d'appliquer le produit dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma que celui présenté au paragraphe 3.2 :



Ainsi la conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

- modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;

- synthèse du filtre numérique basée sur : l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;
- réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

Nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets, en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en z .

8.1.2 Transformée en z

Dans le cas des signaux analogiques, on dispose de transformées (transformée de Fourier ou transformée de Laplace) permettant d'étudier et de traiter les signaux dans des domaines plus aisés (respectivement plan fréquentiel ou domaine de Laplace). Dans le cas des signaux discrets, ces transformées sont très limitées, en particulier pour les signaux possédant une infinité d'échantillons.

Pour cela, une transformée des signaux discrets a été introduite : la transformée en z . Cette transformée en z , notée $S(z)$, d'un signal $s(t)$ causal, échantillonné à la période T_e , s'exprime à l'aide de la variable complexe z selon la relation suivante :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \cdot z^{-k} \quad (8.5)$$

L'origine de cette transformée en z s'explique en considérant le calcul de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné causal. Soit le signal causal $s(t)$ échantillonné à la fréquence F_e , le signal échantillonné s'exprime par :

$$s_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Laplace $S(p)$ de ce signal échantillonné causal $s_e(t)$, obtenue en remplaçant $j2\pi f$ par p dans la transformée de Fourier, est :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s_e(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Étant donné les propriétés de δ , il vient :

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot e^{-pkT_e}$$

En effectuant le changement de variables $z = e^{pT_e}$, nous retrouvons la transformée en z du signal $s(t)$ définie par la relation 8.5.

La propriété la plus importante de cette transformée est le retard temporel. Connaissant la transformée en z $S(z)$ d'un signal $s(t)$, on cherche à obtenir la transformée en z du même signal $s(t)$ retardé du temps mT_e : $s(t - mT_e)$. À partir de l'expression 8.5, il vient :

$$s(t) \xrightarrow{z} S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k}$$

et :

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e - mT_e) \cdot z^{-k}$$

En posant $k' = k - m$ et étant donné que le signal $s(t)$ est causal, nous obtenons :

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k'=-m}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'-m} = \left[\sum_{k'=0}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'} \right] \cdot z^{-m} = S(z) \cdot z^{-m}$$

Ainsi, « z^{-1} » est appelé l'opérateur retard et fait correspondre à un signal le même signal retardé d'un échantillon.

8.1.3 Filtrage numérique simple : lissage temporel

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations 8.1 et 8.4, la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N . Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « lissage » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N qui s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i}$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences 8.2 des filtres non récurrents pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$.

L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et $+1$ avec une moyenne nulle et un écart type de $0,6$, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0,6, +0,6]$ avec un écart type de $0,18$ dans le cas de 10 valeurs moyennées (cf. figures 8.2 et 8.3). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage ; par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information. Pour illustrer ce phénomène, prenons l'exemple de deux signaux classiques : échelon unité $u(t)$ et impulsion de largeur unité. Dans les deux cas, la transition brusque du signal $u(t)$ ou le pic de l'impulsion sont fortement atténués par le lissage (cf. figures 8.4 et 8.5). Nous verrons à la fin du chapitre une méthode permettant de conserver les transitions (technique de la valeur médiane). En conclusion cette technique est efficace sur les signaux lentement variables par rapport aux bruits qui doivent être éliminés (bruit blanc, bruit de type impulsif, ...).

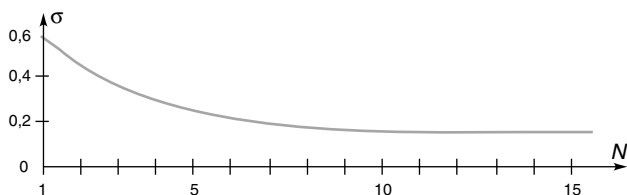


Figure 8.2 Résultat sur l'écart type d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

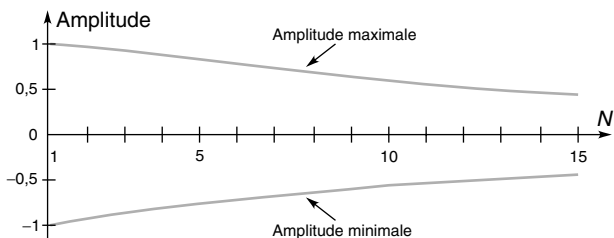


Figure 8.3 Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

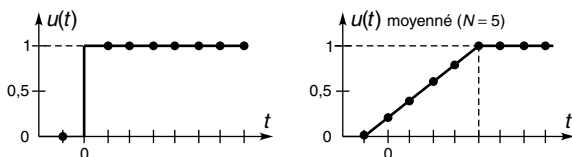


Figure 8.4 Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal « échelon unité ».

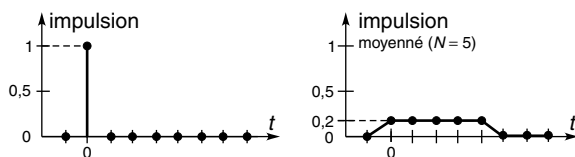


Figure 8.5 Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal « impulsion unité ».

8.2 SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE

La conception et la réalisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont essentiellement basées sur la fonction de transfert $H(z)$: gabarit de filtrage de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. La première étape est donc l'obtention de cette fonction de transfert à partir de l'équation aux différences.

8.2.1 Équation aux différences

Nous considérons des filtres numériques linéaires et invariants dans le temps correspondant aux filtres analogiques décrits par des équations différentielles à coefficients constants. Dans cette hypothèse, les systèmes sont représentés par des équations aux différences de la forme (cf. équation 8.1) :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^N b_j \cdot y_{k-j} = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad \text{avec } b_0 = 1$$

Cette équation aux différences est une équation linéaire à coefficients constants d'ordre N du filtre numérique. En appliquant la transformée en z à l'équation générale précédente et soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées en

z de y_k et x_k , il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^N b_j \cdot y_{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \right] z^{-k}$$

soit :

$$Y(z) \cdot \sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}$$

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z ou « transmittance » en z $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j}} \quad (8.6)$$

ou dans le cas d'un filtre non-récuratif :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i} \quad (8.7)$$

Ensuite la question fondamentale à résoudre est comment obtenir $H(z)$ pour des caractéristiques bien définies (gain, phase, ...) correspondant par exemple à un filtre analogique défini par son équation différentielle ou par sa fonction de transfert $H(p)$: c'est le domaine très vaste de la synthèse des filtres numériques. Les méthodes qui permettent de déterminer une fonction de transfert $H(p)$ répondant à des spécifications données de gain et de phase ou à des réponses impulsionnelles ou indicielles sont bien connues dans le cas des filtres analogiques. Une première approche à cette problématique est de réaliser une transposition du filtre analogique en filtre numérique.

8.2.2 Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H_p(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z . Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H_z(z)$ dans le plan z , il suffit de définir une relation $p = F_{\text{onction}}(z)$, d'où :

$$H_z(z) = H_p(p = F_{\text{onction}}(z))$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$z = e^{pT_e}$$

soit :

$$p = \frac{1}{T_e} \cdot \text{Ln}(z) \quad (8.8)$$

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H_p(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p . Mais si on réalise la transformation de $H_p(p)$ en $H_z(z)$ en utilisant la relation 8.8, la forme résultante de $H_z(z)$ ne sera pas un quotient de deux polynômes en z . Comme nous l'étudieront, cela conduit à des difficultés de réalisation. Aussi, il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme « quotient de deux polynômes ».

De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, etc. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes :

- transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle ;
- méthode de l'invariance indicielle ;
- transformation adaptée ;

- transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation ;
- transformation homographique ou équivalence de l'intégration.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons brièvement la méthode pour transformer $H(p)$ en $H(z)$, les conditions pour pouvoir réaliser cette transformation et, enfin, les avantages et inconvénients de cette méthode.

a) Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e , s'exprime par :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e . Soit la relation :

$$H_e(f) = H(f) * \text{Pgn}_{F_e}(f) \quad \text{d'où} \quad h_e(t) = h(t) \cdot [T_e \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)]$$

Par conséquent la transformée en z $H_e(z)$ de $h_e(t)$ est donnée par :

$$H_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot z^{-k}$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{a_i}{p - p}$$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique (*cf.* annexes) :

$$h(t) = a_i \cdot e^{p_i t}$$

La transformée en z du filtre numérique de réponse impulsionnelle $h_e(t)$, échantillonnée de $h(t)$, s'écrit donc :

$$H_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} [a_i \cdot e^{p_i k T_e}] \cdot z^{-k}$$

La somme sur k est une progression géométrique dont la limite permet d'obtenir finalement l'expression de $H_e(z)$:

$$H_e(z) = T_e \cdot \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}}$$

Ainsi la transformation à réaliser pour obtenir le filtre numérique à partir du filtre analogique caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ est :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (8.9)$$

Si un filtre quelconque peut s'exprimer sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \sum_{i=0}^r T_e \cdot \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (8.10)$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de Shannon ;
- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;

- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

b) Méthode de l'invariance indicielle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ s'obtient en utilisant la relation suivante (cf. équation 3.12) :

$$s_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t)$$

La fonction $u(t)$ est la fonction unité ou échelon d'Heaviside, précédemment étudiée, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en z de cette fonction est très simple à établir :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Les transformées de Laplace et en z de l'équation donnant $s_{\text{ind}}(t)$ sont respectivement :

$$S_{\text{ind}}(p) = H(p) \cdot U(p) = \frac{H(p)}{p}$$

et :

$$S_{\text{ind}}(z) = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente (cf. équation 8.9). Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z)(z/1 - z)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{T_e}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (8.11)$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \left[T_e \cdot \frac{z-1}{z} \right] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (8.12)$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon ;
- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

c) Transformation adaptée

Par cette méthode, appelée aussi *matched transform*, on obtient un filtre numérique dont les pôles de la fonction de transfert ou transmittance sont conservés. En considérant que $H(p)$ est sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre (filtre analogique ne présentant que des pôles), cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation identique à la précédente, c'est-à-dire celle de l'équation 8.9. Pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en série, nous obtenons alors la relation complète :

$$H(p) = \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = T_e \cdot \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (8.13)$$

d) Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

Étant donné une équation différentielle reliant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, la méthode, qui correspond à une démarche classique en analyse numérique,

consiste à donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Dans le cas de la transformation d'Euler, l'approximation réalisée est la plus simple :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette approximation correspond également à l'approximation d'une intégrale par la « méthode des rectangles » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \longrightarrow x_k = x_{k-1} + T_e \cdot y_k$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle initiale est :

$$Y(p) = p \cdot X(p) \quad \text{d'où} \quad H(p) = p$$

La transformée en z de l'équation différentielle initiale discrétisée est :

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} \cdot [X(z) - X(z) \cdot z^{-1}] = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \cdot X(z)$$

$$\text{soit : } H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$p \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \quad (8.14)$$

La transformation d'Euler ou par équivalence à la dérivation est caractérisée par :

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres analogiques simples ;
- inconvénient : le principal inconvénient est la distorsion des caractéristiques en hautes fréquences.

e) Transformation homographique ou équivalence de l'intégration

De la même manière que précédemment, cette méthode consiste à donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue. Dans ce cas, l'approximation réalisée est celle de la « méthode des trapèzes » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \longrightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [y_k + y_{k-1}]$$

La transformée en z de l'équation différentielle discrétisée est :

$$X(z) = X(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1}]$$

$$\text{soit } H(z) = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]}$$

Soit après une transformation en z , cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transposition suivante :

$$p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]} \quad (8.15)$$

La transformation homographique ou par équivalence à l'intégration ou encore appelée transformation bilinéaire est caractérisée par :

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données ;
- avantage : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

f) Exemples de synthèses de filtres numériques

Nous allons synthétiser deux filtres analogiques (filtre passe-bas du premier ordre et filtre passe-bas du deuxième ordre – cf. paragraphe 3.2.2) à l'aide des deux dernières transformations étudiées (transformation par équivalence à la dérivation et transformation par équivalence à l'intégration).

• Filtre passe-bas du premier ordre :

Soit la constante de temps du filtre ($RC = \tau$), la représentation en transformée de Laplace de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du premier ordre est :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

Considérons le filtre numérique passe-bas obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 8.14 à appliquer. Nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_e} \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat, soit le résultat suivant :

$$y_k = \frac{\frac{\tau}{T_e}}{1 + \frac{\tau}{T_e}} \cdot y_{k-1} + \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}} x_k$$

Avec l'application numérique suivante : $\tau = 1 \text{ ms}$ ($R = 1 \text{ K}\Omega, C = 1 \text{ }\mu\text{F}$), et $T_e = 100 \text{ }\mu\text{s}$, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,9090909 \cdot y_{k-1} + 0,090909 x_k$$

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k entrées du filtre :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire y_0 , soit :

- $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Considérons maintenant le même filtre numérique passe-bas obtenu par la méthode de l'équivalence à l'intégration. Nous avons la relation de transformation 8.15 à appliquer et nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{2\tau}{T_e}\right) + \left(1 - \frac{2\tau}{T_e}\right) \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat et donne le résultat suivant :

$$y_k = \frac{1}{1 + \frac{2\tau}{T_e}} \cdot \left[\left(\frac{2\tau}{T_e} - 1 \right) \cdot y_{k-1} + x_k + x_{k-1} \right]$$

Avec la même application numérique que précédemment : $\tau = 1$ ms ($R = 1$ K Ω , $C = 1$ μ F), et $T_e = 100$ μ s, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,904761 \cdot y_{k-1} + 0,047619 \cdot (x_k + x_{k-1})$$

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k d'entrées du filtre :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1, x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$;

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire y_0 , et x_0 soit :

- $x_0 = 0$ (signal causal) ;
- $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Les figures 8.6 et 8.7 représentent les résultats obtenus pour les deux filtres numériques en comparaison des réponses théoriques pour respectivement la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle.

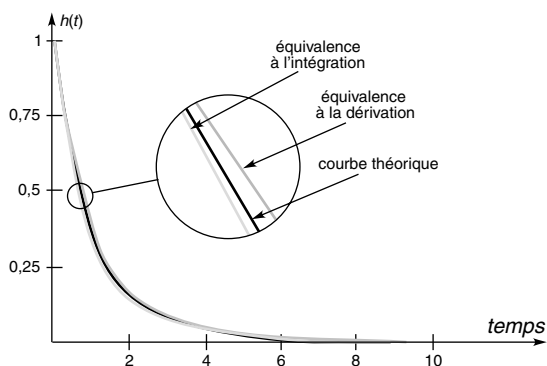


Figure 8.6 Réponses impulsionnelles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

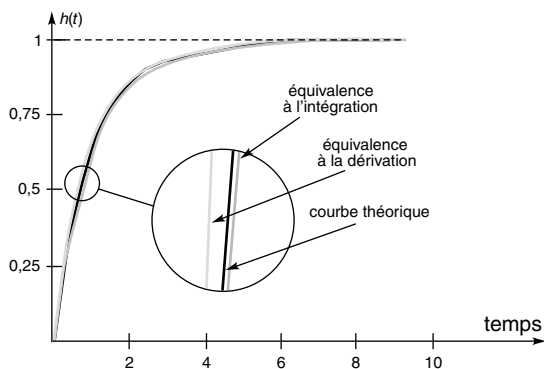


Figure 8.7 Réponses indicielles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

D'une façon générale, ces résultats montrent que les deux filtres numériques ont une réponse quasiment identique à celle du filtre analogique. D'une façon plus détaillée, nous pouvons remarquer que la synthèse du filtre numérique avec l'équivalence à la dérivation a un comportement initial meilleur, mais ensuite converge moins vite vers la réponse du filtre analogique théorique.

Remarque : il est nécessaire de réaliser un calcul numérique précis des coefficients de l'équation aux différences pour obtenir des résultats corrects au niveau de la synthèse par programme (cf. paragraphe suivant).

- Filtre passe-bas du deuxième ordre :

En considérant une fréquence propre $F_0(\omega_0 = 2\pi F_0)$ et un coefficient d'amortissement m , la représentation de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot p + p^2}$$

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 8.14 à appliquer. Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{(1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

À partir de cette transmittance en z , le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e)}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = \frac{-1}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et :

$$a_0 = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

Avec l'application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,39805 \quad b_2 = -0,65770 \quad \text{et} \quad a_0 = 0,25965$$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de l'intégration. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 8.15 à appliquer. Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 \cdot T_e^2 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-1} + (4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-2}}$$

À partir de cette transmittance en z , le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2}$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2)}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = -\frac{4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$a_0 = a_2 = -\frac{\omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et

$$a_1 = 2 \cdot a_0$$

Avec la même application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,55193 \qquad b_2 = -0,89181$$

et $a_0 = a_2 = 0,084971 \qquad a_1 = 0,169942$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- $x_0 = x_{-1} = 0$ (signal causal) ;
- $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

La figure 8.8 présente les résultats obtenus pour les deux filtres numériques en comparaison de la réponse théorique pour la réponse impulsionnelle.

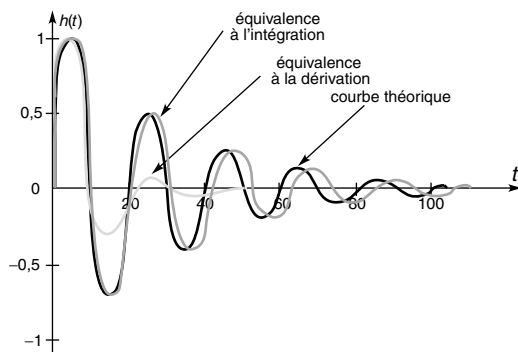


Figure 8.8 Réponses impulsionnelles de deux filtres numériques passe-bas du deuxième ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

Les résultats obtenus pour ces deux synthèses d'un filtre passe-bas du deuxième ordre montrent clairement la plus grande efficacité de l'équivalence de l'intégration par rapport à l'équivalence de la dérivation. Ce résultat s'explique par le fait que le filtre du deuxième ordre étant basé sur une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre comme son nom l'indique, il est relativement difficile de le synthétiser par une approximation du premier ordre (cas de l'équivalence à la dérivation).

8.3 SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

La convolution intervient dans tous les systèmes de filtrage linéaire et consiste en la modification du signal d'entrée par la caractéristique temporelle du système ou réponse impulsionnelle. Le filtre analogique, étant défini par sa fonction de transfert $H(p)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal de sortie $y(t)$ du filtre soumis au signal d'entrée $x(t)$ est donné par la relation connue : $y(t) = x(t) * h(t)$.

Dans le cas de filtre à réponse impulsionnelle finie, le filtrage numérique par convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(kT_e) = x_k$ par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(kT_e) = h_k$ du filtre selon la relation 8.4. La réponse impulsionnelle ayant une durée finie, le nombre d'échantillons est limité. Soit N le nombre de valeurs de h_k connues :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x_{k-i} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot h_{k-i} \quad (8.16)$$

Dans beaucoup de réalisations de filtre numérique, le point de départ est la réponse fréquentielle du filtre $H(f)$ donnée par un gabarit. Partant de cette réponse fréquentielle discrétisée $H_e(f)$, il est aisé d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée $h_e(t)$ par transformée de Fourier discrète. La discrétisation de la réponse impulsionnelle a conduit à la périodisation

du spectre comme nous l'avons vu dans le chapitre 6, soit :

$$H_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f - kF_e)$$

d'où la forme de $h_e(t)$, calculée sur N points, pour conserver la réponse fréquentielle :

$$\begin{aligned} h_e(t) &= T_e \cdot \sum_{-N/2}^{N/2-1} h_k \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} (T_e \cdot h_k) \cdot \delta(t - kT_e) \\ &= \sum_{-N/2}^{N/2-1} h'_k \cdot \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

Ainsi les échantillons de la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ sont h'_k . Dans le cas où la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas causale, il est possible de retarder cette réponse impulsionnelle de $N/2$ points pour rendre le filtre causal.

$$h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_{k-N/2} \cdot \delta(t - kT_e)$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure F_c , correspondant à une constante de temps $\tau (= 1/(2\pi F_c))$. La réponse impulsionnelle, calculée dans le paragraphe 3.2.2, s'exprime à partir des échantillons suivants :

$$h'_k = \frac{T_e}{\tau} \cdot e^{-\frac{kT_e}{\tau}}$$

La réponse impulsionnelle est causale, mais pas finie. Aussi nous considérerons uniquement un intervalle pour lequel la fonction précédente est supérieure ou égale à 5% de la valeur maximale. Prenons l'exemple numérique suivant :

$$\tau = 0,5 \text{ ms} \quad (F_c = 320 \text{ KHz}), \quad T_e = 0,1 \text{ ms}$$

Le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle est alors limité à 20, correspondant au temps 2 ms. Ainsi nous avons :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h'_k	0,2	0,164	0,134	0,11	0,09	0,074	0,06	0,049	0,04	0,033

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
h'_k	0,027	0,022	0,018	0,015	0,012	0,01	0,008	0,007	0,005	0,004

En considérant une sollicitation de type impulsion de durée $2 \cdot T_e$, le résultat, obtenu par la relation 8.16 et représenté sur la figure 8.9, montre la bonne qualité de ce filtre numérique pour synthétiser ce filtre passe-bas très simple. Le décalage en amplitude entre la courbe de réponse théorique et la courbe calculée avec le filtre numérique est dû au premier pas de calcul et à la valeur initiale de la réponse impulsionnelle discrétisée ($= T_e/\tau$). Un pas d'échantillonnage T_e plus petit par rapport à la constante de temps τ diminuerait fortement ce décalage.

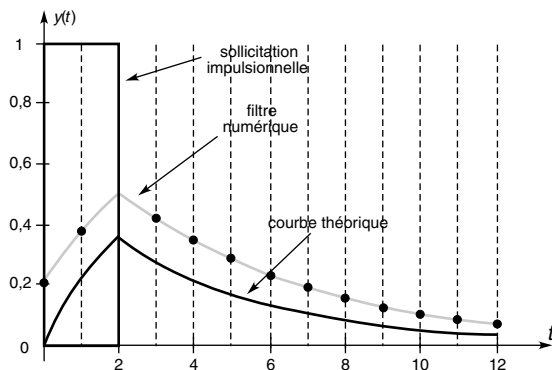


Figure 8.9 Réponses d'un filtre numérique passe-bas du premier ordre synthétisé par l'équation de convolution.

8.4 RÉALISATION DES FILTRES NUMÉRIQUES

À partir de l'expression de la transmittance en z du filtre numérique ou de l'équation de convolution, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre.

La réalisation des filtres numériques peut être faite en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants :

- additionneur, { symbolisé par Σ } ;
- multiplieur, { symbolisé par X } ;
- retard de T_e : échantillon k par rapport à $k-1$, { symbolisé par T }. Cette opération sera réalisée matériellement par des registres à décalage.

8.4.1 Filtres numériques synthétisés par $H(z)$

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure **directe** (implémentation de l'équation aux différences), structure **canonique** (structure directe avec minimisation des composants) et structure **en éléments simples**.

a) Structure directe

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non-récuratif, une des structures possibles est celle représentée sur le schéma de la figure 8.10 qui traduit l'équation 8.2.

De même, la traduction directe de l'expression de $H(z)$ pour un filtre récuratif donne le schéma de la figure 8.11 qui traduit l'équation générale 8.1.

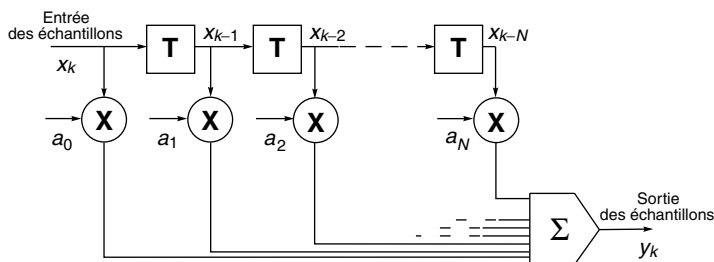


Figure 8.10 Structure directe d'un filtre numérique non-récurusif.

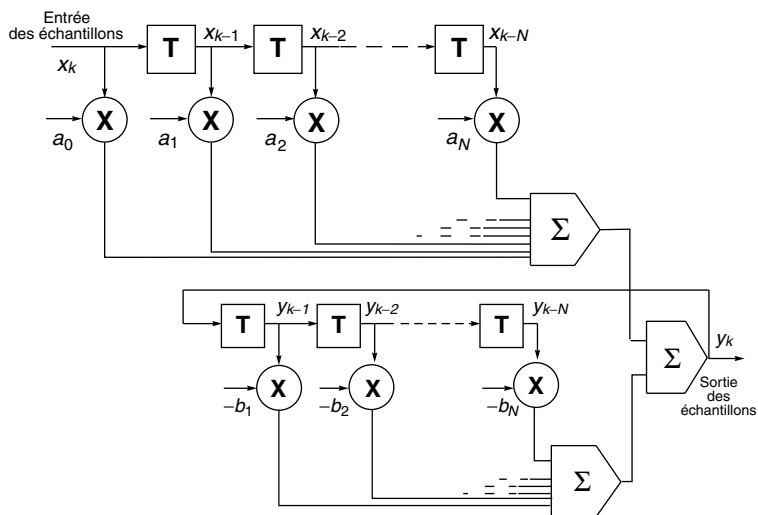


Figure 8.11 Structure directe d'un filtre numérique récurusif.

b) Structure canonique

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \cdot V(z)$$

avec $W(z) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j}$ système non récursif et $V(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}$

L'expression de $Y(z)$ est donc :

$$Y(z) = \left[\sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \right] \cdot V(z)$$

En prenant la transformée en z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire la structure de ce filtre (cf. figure 8.12) :

$$y_k = \sum_{j=0}^N a_j \cdot v_{k-j}$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

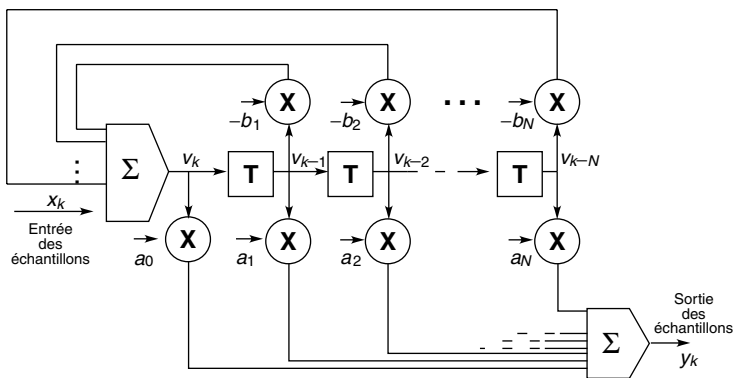


Figure 8.12 Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

c) Structure en composants simples

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre $H_i(z)$:

– premier ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i \cdot z^{-1}}$$

– second ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} \cdot z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} \cdot z^{-2} + \beta_{i1} \cdot z^{-1} + \beta_{i0}}$$

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de base pour réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments.

La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

$$H(z) = K_1 + \sum_{i=1}^r H_i(z) \quad \text{somme de composants simples}$$

$$H(z) = K_2 \cdot \prod_{i=1}^r H_i(z) \quad \text{produit de composants simples}$$

Dans le cas d'une écriture sous la forme « somme », nous obtenons une structure parallèle (*cf.* figure 8.13) et dans le cas d'une formulation « produit », nous obtenons une structure série ou dite *en cascade* (*cf.* figure 8.14). Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette adjonction de composants de base n'est réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance.

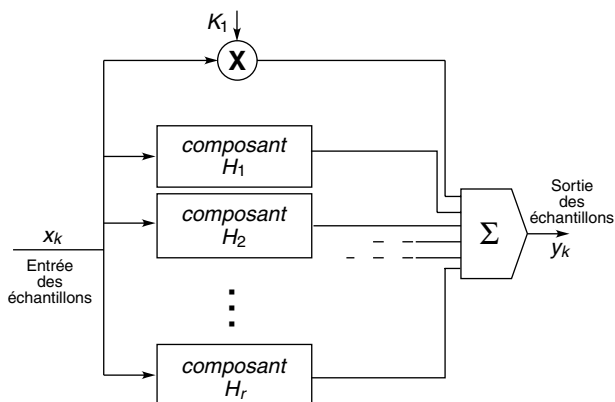


Figure 8.13 Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

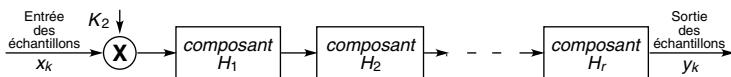


Figure 8.14 Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

8.4.2 Filtres numériques basés sur la convolution

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre. Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

- structure directe (cf. figure 8.15) ;
- structure transposée (cf. figure 8.16).

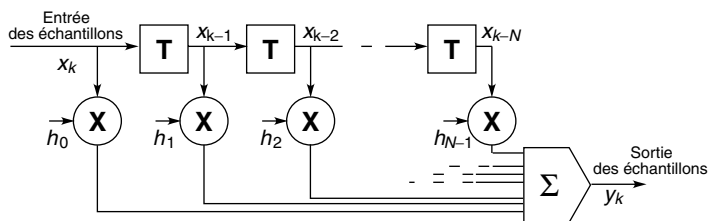


Figure 8.15 Structure directe d'un filtre à convolution.

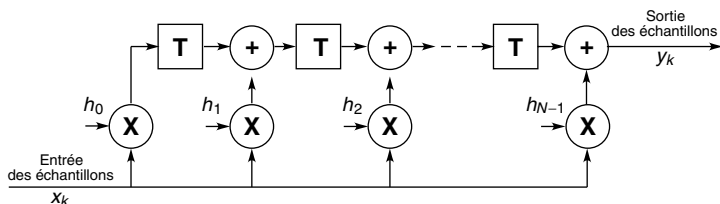


Figure 8.16 Structure transposée d'un filtre à convolution.

8.5 TECHNIQUES AVANCÉES DE FILTRAGE NUMÉRIQUE

Le domaine du filtrage numérique est très vaste car il repose uniquement sur les capacités de calcul des systèmes informatiques. Lorsque les possibilités des filtres classiques, vus précédemment, ne sont pas suffisantes pour un problème donné, il existe des extensions possibles du « filtrage numérique ».

8.5.1 « Filtres » numériques non linéaires : valeur médiane

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du

signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occupée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires.

Un de ces traitements non linéaires est le filtre de la valeur médiane. Étant donné $2N + 1$ échantillons x_k , la valeur médiane $x_{\text{med},k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{ordre croissant}} \{x_{k'}, x_{k'-1}, \dots, x_{k'-2N}; \text{ avec } x'_i \leq x'_{i+1}\}$$

d'où $x_{\text{med},k} = x_{k'-N}$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe 8.1.3 « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal « échelon unité » est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée (cf. figure 8.17). De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectuant sur $2N+1$ échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N \cdot T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

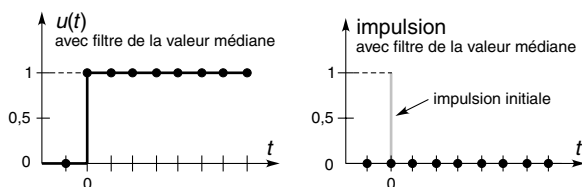


Figure 8.17 Effet d'un filtre numérique non linéaire de la valeur médiane sur un signal « échelon unité » et sur une impulsion de durée unité.

8.5.2 Filtres numériques multcadence

Les systèmes étudiés jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certaines applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multcadence). Considérons deux exemples :

- filtrage passe-bas : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible ;
- modulation : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée (cf. chapitre 4).

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « **décimation** » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « **interpolation** ».

Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales. Nous avons vu en particulier le cas de l'interpolation dans l'exemple de reproduction des signaux sonores des lecteur de CD-audio traité dans le paragraphe 6.3.6.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité a priori ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, i.e. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

Annexes

A.1 IMPULSION DE DIRAC

A.1.1 Définitions

a) *Impulsion de Dirac*

L'impulsion de Dirac ou la distribution de Dirac peuvent être vues comme un outil symbolique permettant de formuler des expressions. L'impulsion de Dirac ou pic de Dirac, notée δ , peut être perçue comme la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée $1/A$ lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A . Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une « masse » de 1 en $x = 0$ (cf. figure A.1). Dans le domaine du traitement du signal, le pic de Dirac $\delta(x)$ est une distribution ou « fonction » qui vérifie :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx = 1$$

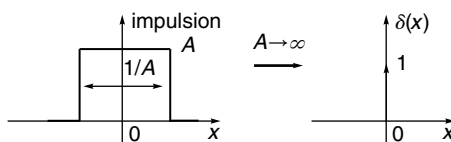


Figure A.1 Représentation de l'impulsion ou pic de Dirac.

b) « Peigne » de Dirac

Utilisé pour la démonstration de l'échantillonnage des signaux, le « peigne » de Dirac, qui s'écrit $\text{Pgn}_A(x)$, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de A , appelé période du peigne. Soit la relation de définition (cf. figure A.2) :

$$\text{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k \cdot A)$$

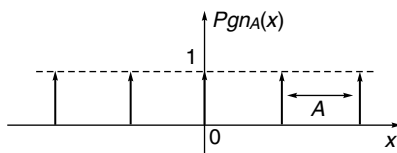


Figure A.2 Représentation d'un peigne de Dirac.

A.1.2 Principales propriétés

Il est important de souligner que, pour des raisons de facilité, les opérations décrites ci-après utilisent des notations identiques à celles utilisées pour les fonctions bien que nous soyons dans le domaine des distributions.

a) Propriétés de localisation (opération de « produit »)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) \cdot \delta(x) = f(0) \cdot \delta(x) : \quad \text{pic de Dirac de poids } f(0) \text{ en } 0$$

$$\text{et } f(x) \cdot \delta(x - a) = f(a) \cdot \delta(x - a) : \quad \text{pic de Dirac de poids } f(a) \text{ en } a$$

Pour deux pics de Dirac, le produit n'est pas défini ; mais nous poserons les relations suivantes :

$$[A \cdot \delta(x-a)] \cdot [B \cdot \delta(x-b)] = 0 \quad \text{si } a \neq b$$

et
$$[A \cdot \delta(x-a)] \cdot [B \cdot \delta(x-b)] = A \cdot B \cdot \delta(x-a) \quad \text{si } a = b$$

b) Propriétés d'élément neutre (opération de « convolution »)

$$f(x) * \delta(x) = f(x) : \quad \text{fonction } f(x)$$

et
$$f(x) * \delta(x-a) = f(x-a) : \quad \text{fonction } f(x) \text{ translatée de } a$$

Pour deux pics de Dirac, le produit de convolution n'est pas défini ; mais nous poserons la relation suivante :

$$[A \cdot \delta(x-a)] * [B \cdot \delta(x-b)] = A \cdot B \cdot \delta(x-b-a)$$

c) Propriétés d'échantillonnage avec le peigne de Dirac (produit)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) \cdot \text{Pgn}_A(x) = f(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x-kA)$$

$$f(x) \cdot \text{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(A) \cdot \delta(x-kA)$$

Ainsi le peigne de Dirac échantillonne la fonction $f(x)$ aux abscisses où il existe.

d) Propriétés de périodisation avec le peigne de Dirac (convolution)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) * \text{Pgn}_A(x) = f(x) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) * \delta(x-kA)$$

$$f(x) * \text{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kA)$$

Ainsi le peigne de Dirac périodise la fonction $f(x)$ avec une période A égale à l'intervalle entre les pics de Dirac.

A.2 FONCTIONS MATHÉMATIQUES UTILISÉES EN TRAITEMENT DU SIGNAL

A.2.1 Notations complexes

a) Notation complexe des fonctions circulaires

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j\theta} + e^{-j\theta}] \quad j \text{ étant le symbole « imaginaire pur »}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$$

d'où :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \quad \text{et} \quad e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \cdot \sin(\theta)$$

et les valeurs particulières suivantes :

$$e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \frac{\pi}{2}} = j \cdot (-1)^p, \quad e^{j \cdot n \cdot \pi} = (-1)^n, \quad e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \pi} = -1$$

b) Notions de base sur les complexes

Soit le complexe z , nous pouvons l'écrire sous la forme cartésienne :

$$z = x + j \cdot y$$

ou selon la notation polaire :

$$z = x + j \cdot y = r \cdot (\cos \theta + j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{j\theta}$$

avec le module $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'argument $\theta = \arctg(y/x)$

Le complexe conjugué de z s'écrit $\bar{z}$ avec :

$$\bar{z} = x - j \cdot y = r \cdot (\cos \theta - j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{-j \cdot \theta}$$

A.2.2 Formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \text{et} \quad \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ \text{et} \quad \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \cos(2 \cdot a) &= 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a \\ \text{et} \quad \cos^2 a &= 1/2 \cdot [1 + \cos(2 \cdot a)] \\ \sin(2 \cdot a) &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos a \\ \text{et} \quad \sin^2 a &= 1/2 \cdot [1 - \cos(2 \cdot a)] \end{aligned}$$

A.2.3 Fonctions sinus cardinal

La fonction de sinus cardinal $\text{sinc}(ax)$ ou $\sin(\pi ax) / \pi ax$ est présentée sur la figure A.3. Cette fonction est paire et présente son maximum égal à 1 en $x = 0$.

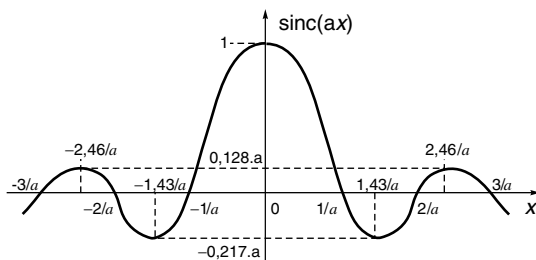


Figure A.3 Fonction sinus cardinal $\text{sinc}(ax)$.

A.2.4 Fonctions de Bessel

a) Définition et propriétés

Les fonctions de Bessel de première espèce de la variable x et d'ordre n entier $J_n(x)$ peuvent être exprimées sous la forme intégrale suivante :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin \alpha - x \cdot \alpha) \cdot d\alpha \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

La figure A.4 présente l'allure de quelques fonctions de Bessel. Les principales propriétés sont :

- symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$
- amplitude limitée : $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$ ou $J_n(x) \approx 0$ pour $n > x$
- puissance bornée : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1$

b) Relations avec les fonctions circulaires

Les fonctions de Bessel de première espèce permettent en particulier d'exprimer les fonctions circulaires complexes suivantes :

$$\cos(x \cdot \sin \alpha) = J_0(x) + 2 \cdot J_2(x) \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot J_4(x) \cdot \cos(4 \cdot \alpha) + \dots$$

$$\text{et } \sin(x \cdot \sin \alpha) = 2 \cdot J_1(x) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot J_3(x) \cdot \sin(3 \cdot \alpha) + \dots$$

$$\text{De façon plus générale, nous avons : } e^{j \cdot x \cdot \sin \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot e^{j \cdot n \cdot \alpha}$$

A.2.5 Probabilités et statistiques

a) Définitions

Une **variable aléatoire** définie sur un ensemble d'expériences est donc une variable numérique x dont la valeur est déterminée par le résultat de chaque expérience ou épreuve. Le modèle mathématique d'une telle variable est une **fonction aléatoire** dans le cas général ou processus aléatoire si l'évolution est temporelle.

On distingue deux types de variables aléatoires, celles qui sont discrètes (nombre fini de valeurs) ou celles qui sont continues (infinité de valeurs).

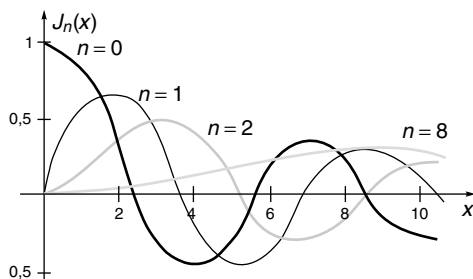


Figure A.4 Fonctions de Bessel de première espèce pour $n \geq 0$.

Si il est impossible de prévoir à l'avance la valeur x_i de la variable aléatoire discrète x que l'on va obtenir, on peut définir la **probabilité** P_i de réaliser cette valeur, définie par :

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad \text{avec } N \text{ nombre d'expériences}$$

et N_i nombre de réalisations de $x = x_i$.

Grâce à la loi des grands nombres, la valeur de P_i peut être estimée à partir du nombre total n de valeurs pour x et du nombre de réalisations n_i de la valeur x_i :

$$P_i = \text{Prob} \{x = x_i\} = n_i/n \quad \text{avec } 0 \leq P_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

De la même manière pour une variable aléatoire continue, on définit la **densité de probabilité** ou la fonction de distribution $p(x)$ avec les propriétés suivantes :

$$p(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot dx = 1$$

Ainsi la probabilité d'avoir une valeur de x comprise entre x et $x + \Delta x$ est donné par :

$$P_{\Delta x} = \text{Prob} \{x \in [x, x + \Delta x]\} = p(x) \cdot \Delta x$$

et la probabilité d'avoir la variable x comprise dans l'intervalle $[x_i, x_j]$ est :

$$P_{i,j} = \text{Prob} \{x \in [x_i, x_j]\} = \int_{x_i}^{x_j} p(x) \cdot dx$$

b) Moyenne. Moments. Écart type

Dans le cas d'un très grand nombre d'épreuves, il est possible de définir la valeur moyenne ou l'espérance de la variable aléatoire x :

- cas d'une variable aléatoire discrète : $m = E_{sp} [x] = \sum_i P_i \cdot x_i$
- cas d'une variable aléatoire continue : $m = E_{sp} [x] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot x \cdot dx$

Par définition, le moment d'ordre n (entier positif) d'une variable aléatoire x est la valeur moyenne de la puissance n de x ou l'espérance de x^n :

- cas d'une variable aléatoire discrète : $m_n = E_{sp} [x^n] = \sum_i P_i \cdot x_i^n$
- cas d'une variable aléatoire continue :

$$m_n = E_{sp} [x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot x^n \cdot dx$$

L'**écart type** σ est défini comme la valeur quadratique moyenne centrée, soit :

$$\sigma = \sqrt{E_{sp}[(x - m)^2]}$$

L'écart type, appelé aussi fluctuation absolue ou déviation standard, donne une évaluation de la « dispersion » d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

c) Fonctions caractéristiques d'une variable aléatoire

Dans le cas d'une variable aléatoire continue x avec pour densité de probabilité $p(x)$, on définit la première fonction caractéristique $\varphi_x(t)$ comme :

$$\varphi_x(t) = E_{sp} [e^{jtx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot e^{jtx} \cdot dx \quad \text{avec } t \in \Re$$

Ainsi la transformée de Fourier de $\varphi_x(t)$ donne la densité de probabilité :

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(t) \cdot e^{-jtx} \cdot dt$$

Cette fonction caractéristique permet aussi de calculer les différents moments d'ordre n de la variable aléatoire x :

$$E_{sp} [x^n] = \frac{1}{j^n} \left[\frac{d^n \varphi_x(t)}{dt^n} \right]_{t=0}$$

La seconde fonction caractéristique se définit comme :

$$\psi_x(t) = \text{Ln} [\varphi_x(t)] \quad \text{avec Ln le logarithme népérien}$$

d) Systèmes à deux variables aléatoires

À chaque épreuve, on considère que le système fournit deux valeurs correspondant à deux variables aléatoires x et y .

La fonction de distribution des variables aléatoires x et y étant $p_{x,y}(x,y)$, la probabilité d'avoir une valeur de x comprise entre x et $x + \Delta x$ et une valeur de y comprise entre y et $y + \Delta y$ est donné par :

$$P_{\Delta x, \Delta y} = \text{Prob} \{x \in [x, x + \Delta x], \quad y \in [y, y + \Delta y]\} = p_{x,y}(x,y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

avec les relations suivantes :

$$p_{x,y}(x,y) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(x,y) \cdot dx \cdot dy = 1$$

On définit la fonction de distribution $p_x(x)$ de la variable aléatoire x en ignorant y et la fonction de distribution $p_y(y)$ de y en ignorant x par les relations suivantes : $p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(x,y) \cdot dy$ et $p_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(x,y) \cdot dx$

Par définition deux variables aléatoires sont stochastiquement **indépendantes** si leur fonction de distribution $p_{x,y}(x,y)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p_{x,y}(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$$

Enfin on définit le **coefficient de corrélation** r_{xy} de deux variables aléatoires x et y de moyenne respective m_x et m_y et d'écart type σ_x et σ_y par la relation suivante :

$$r_{xy} = \frac{E_{sp} [(x - m_x) \cdot (y - m_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

La valeur de r_{xy} est comprise entre 0 et 1. Si $r_{xy} = 0$, les deux variables aléatoires sont dites non corrélées (pas obligatoirement indépendantes).

e) Loi de Gauss

Les variables aléatoires continues qui suivent une loi de Gauss sont très importantes car elles correspondent à de nombreux cas réels (sources de bruit usuelles, etc.). La fonction de distribution ou densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne x de moyenne m et d'écart type σ s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Cette fonction est entièrement déterminée par les deux paramètres m et σ . La représentation de cette loi de probabilité sur la figure A.5 montre que :

- la probabilité de trouver $x \in [m - \sigma, m + \sigma]$ est de 68,3%
- la probabilité de trouver $x \in [m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ est de 95,4%
- la probabilité de trouver $x \in [m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ est de 99,7%

Si on considère la variable aléatoire gaussienne centrée $x - m$, les moments d'ordre impair sont nuls et les moments d'ordre pair s'expriment à partir de σ^2 :

$$E_{sp}[(x - m)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k(k!)} \cdot \sigma^{2k} \quad \text{et} \quad E_{sp}[(x - m)^{2k+1}] = 0$$

L'importance de cette loi de distribution tient surtout au **théorème central limite** qui s'énonce de la manière suivante :

si une variable aléatoire est la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes, ayant chacune une loi de distribution quelconque mais de faible amplitude par rapport à la somme (l'influence de chacune des contributions est faible), alors la distribution de la variable aléatoire globale est donnée par une loi gaussienne.

Il est à noter que nous avons équivalence entre la propriété d'indépendance et un coefficient de corrélation r nul pour des variables aléatoires gaussiennes.

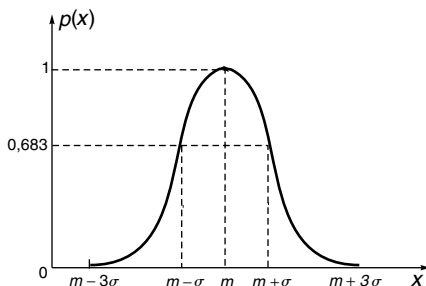


Figure A.5 Distribution de Gauss pour une variable aléatoire de moyenne m et d'écart type σ .

f) Loi de Poisson

Les variables aléatoires discrètes qui suivent une loi de Poisson se retrouvent dans diverses applications (comptage de particules émises par une source radioactive, etc.). Étant donné la moyenne m , la fonction de distribution s'écrit :

$$p(x = k) = \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$

Cette variable aléatoire x de valeur moyenne m a les caractéristiques suivantes :

$$E_{sp}[x^2] = m^2 + m \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{m}$$

A.3 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

A.3.1 Définitions

La transformée de Fourier n'existe que si l'intégrale permettant de la calculer (équation 2.13) a une valeur finie (convergente). Dans le cas contraire on peut rendre cette intégrale convergente en multipliant $s(t)$ par $e^{-\sigma \cdot t}$, la valeur σ réelle positive est appelée « rayon de convergence ». Cela conduit à définir une nouvelle grandeur, appelée « fréquence complexe », $p = \sigma + j2\pi f$. Si de plus on considère un signal causal (nul pour $t < 0$), on obtient la transformée de Laplace $S(p)$ du signal $s(t)$, notée L , :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

La transformée de Laplace est très utile dans l'étude des régimes transitoires qui vérifient le principe de causalité. En particulier, elle sera un outil important dans l'étude des filtres basés sur la réponse impulsionnelle (signal causal). D'une manière générale, cette transformée est l'outil de base dans le domaine de l'automatique, c'est-à-dire des systèmes bouclés.

Dans le cas d'un régime harmonique établi, on peut remplacer p par $j2\pi f$ ou $j\omega$ dans la transformée de Laplace.

A.3.2 Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés pour la transformation de Laplace que pour la transformation de Fourier. Soit la fonction $x(t)$ et la transformée de Laplace $X(p)$ de ce signal, nous écrirons : $x(t) \xrightarrow{L} X(p)$

a) *Linéarité*

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xleftrightarrow{L} a \cdot X(p) + b \cdot Y(p)$$

b) *Homothétie*

$$x(a \cdot t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} \cdot X(p/a)$$

c) *Translation*

$$x(t - a) \xleftrightarrow{L} X(p) \cdot e^{-a \cdot p} \quad \text{et} \quad x(t) \cdot e^{b \cdot t} \xleftrightarrow{L} X(p - b)$$

d) *Dérivation*

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} p \cdot X(p) - x(0)$$

e) *Intégration*

$$\int_0^t x(t) \cdot dt \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p} \cdot X(p) \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{L} \int_p^{+\infty} X(p) \cdot dp$$

f) *Transformée de Laplace et convolution*

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Laplace respectives $X(p)$ et $Y(p)$, nous avons la même propriété que pour la transformée de Fourier :

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{L} X(p) \cdot Y(p) \quad \text{et} \quad x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{L} X(p) * Y(p)$$

A.3.3 Exemples de transformées de Laplace

*Représentation temporelle**Transformée de Laplace*

- Fonction exponentielle :

$$s(t) = A \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$S(p) = \frac{A}{p + a}$$

Représentation temporelle

- Fonction rampe amortie :

$$s(t) = A \cdot t \cdot e^{-a \cdot t}$$

- Fonction sinusoïdale :

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$$

- Fonction cosinusoidale :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

- Fonction sinusoïdale amortie :

$$s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(2\pi F_0 t)$$

- Fonction cosinusoidale amortie :

$$s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

- Fonction sinusoïdale quadratique:

$$s(t) = A \cdot \sin^2(2\pi F_0 t)$$

- Fonction cosinusoidale quadratique:

$$s(t) = A \cdot \cos^2(2\pi F_0 t)$$

- Fonction constante :

$$s(t) = A$$

- Fonction impulsion :

$$s(t) = A \cdot [u(t - a) - u(t - b)]$$

avec $s(t) = A$ pour $t \in [a, b]$

- Fonction rampe limitée :

$$s(t) = s_r(t)$$

avec $s_r(t) = At/\theta$ pour $t \in [0, \theta]$

et $s_r(t) = A$ pour $t \in [\theta, +\infty]$

Transformée de Laplace

$$S(p) = \frac{A}{(p + a)^2}$$

$$S(p) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(p) = \frac{A \cdot p}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(p) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{(p + a)^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(p) = \frac{A \cdot (p + a)}{(p + a)^2 + (2\pi F_0)^2}$$

$$S(p) = \frac{2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2)}$$

$$S(p) = \frac{p^2 + 2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2)}$$

$$S(p) = \frac{A}{p}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} \cdot [e^{-ap} - e^{-bp}]$$

$$S_r(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-p\theta}}{p^2 \cdot \theta}$$

Bibliographie

- *Traitement du signal*

M. BELLANGER, *Traitement numérique du signal*, 6^e édition, Dunod (1998).

F. COTTET, *Traitement des signaux et acquisition de données*, Dunod (1997).

F. DE COULON, *Théorie et traitement des signaux*, Dunod (1984).

C. GASQUET et P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson (1997).

F. MANNEVILLE et J. ESQUIEU, *Théorie du signal et composants*, 2^e édition, Dunod (2000).

J. MAX et J.-L. LACOUME, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, 5^e édition, Dunod (2000).

- *Mathématiques du signal*

B. PICINBONO, *Théorie des signaux et des systèmes*, Dunod (1989).

H. REINHARD, *Cours de mathématiques du signal*, Dunod (1986).

- *Acquisition de données, capteurs*

G. ASH et coll., *Acquisition de données*, Dunod (1999).

G. ASH et coll., *Les Capteurs en instrumentation industrielle*, Dunod (1991).

Lexique anglais-français

Anglais

Actuator
Aliasing
Analog-to-digital converter
Band-pass filter
Bandwidth
Convolution
Correlation
Crosscorrelation
Data acquisition
Digital Signal Processor
Digital-to-analog converter
Fast Fourier Transform
Filter
Flat top window
Folding frequency
Fourier transform
Frequency

Français

Actionneur
Recouvrement de spectre
Convertisseur analogique/numérique
Filtre passe-bande
Bande passante
Convolution
Corrélation
Intercorrélation
Acquisition de données
Processeur de traitement de signaux
Convertisseur numérique/analogique
Transformée de Fourier rapide
Filtre
Fenêtre de pondération à « toit plat »
Fréquence de repliement
Transformée de Fourier
Fréquence

Anglais

Gaussian law
 High-pass filter
 Impulse, pulse
 Impulse response
 Low-pass filter
 Mean
 Noise
 Oversampling
 Phase lock loop (PLL)
 Power spectrum
 Ramp signal
 Real time operating system
 RMS value (RMS : root mean square)
 Sample and Hold
 Sampling
 Sawtooth signal
 Sensor
 Shielded Twisted Pair
 Shot noise
 Signal
 Signal processing
 Signal to noise ratio
 Smoothing window
 Standard deviation
 Statistical distribution
 Variance
 Voltage controlled oscillator (VCO)
 White noise
 Window
 Windowing
 Wire

Français

Loi de Gauss
 Filtre passe-haut
 Impulsion
 Réponse impulsionnelle
 Filtre passe-bas
 Moyenne
 Bruit
 Sur-échantillonnage
 Boucle à verrouillage de phase
 Spectre en puissance
 Signal de rampe
 Système d'exploitation temps réel
 Valeur efficace
 Échantillonneur/Bloqueur
 Échantillonnage
 Signal en « dent de scie »
 Capteur
 Paire torsadée blindée
 Bruit de grenaille
 Signal
 Traitement du signal
 Rapport signal sur bruit
 Fenêtre de lissage ou de pondération
 Écart type
 Distribution statistique
 Variance
 Oscillateur à fréquence commandée
 Bruit blanc
 Fenêtre temporelle (traitement du signal)
 Fenêtrage
 Fil

Index

A

actionneur 6, 12
algorithme 157, 205
analyseur de spectres 16
autocorrélation 52
avance de phase 48

B

bande passante 33
 à -3 db 33
 du support 58
bruit 4
 blanc 102
 de grenaille 103

 de quantification 133
définition 100
 externe 100
 gaussien 103
 interne 100
 périodique 103
 rose 102

C

câble 58
calcul
 de la convolution 35
 en « temps réel » 156, 163
capteurs 6

- causal 30, 40
- classification des signaux 8
- codage de l'information 4
- codecs 134
- comandeurs 134
- composante
 - continue 14, 156
 - du spectre 17
- compression 133
 - du signal 134
- convolution
 - calcul de la 35
 - définition 34
 - des signaux périodiques 36
 - discrète 163
 - propriétés 35
- Cooley-Tukey 157
- corrélation
 - de signaux périodiques 54
 - discrète 164

D

- décimation 212
- démodulation
 - d'enveloppe 69
 - de fréquence 82
 - synchrone 69
- densité spectrale 51, 53
 - d'un bruit 102
- dérivateur 34
- dérivation 26, 225
- désaccentuation 77

- détection
 - par corrélation 105
 - synchrone 106
- diagramme de Bode 44, 48
- diodes 68
- disque optique 142
- distribution de Dirac 213

E

- écart type 93
- échantillonnage 215
 - bloqueur 128
 - idéal 111, 125, 130
 - moyenneur 129
 - naturel 127
 - régulier 128
- échantillonneur 111
 - bloqueur 11
- échelon unité 28, 40
- élaboration des signaux 5
- élément neutre (pic de Dirac) 35
- émetteur 67
- émissions radiophoniques 76, 87
- énergie
 - des signaux 50
 - finie 24
 - totale du signal 51
- équation aux différences 180
- équivalence
 - de l'intégration 195
 - de la dérivation 193
- erreur de quantification 131, 132

espérance 93

expansion du signal 133

F

Fast Fourier Transform 156

fenêtrage temporel 36, 167

fenêtre

à « toit plat » 171

de Bartlett 170

de Blackman 170

de Blackman exacte 170

de Blackman-Harris 170

de Gauss 172

de Hamming 170

de Hanning 170

de Kaiser-Bessel 171

de Parzen 172

exponentielle 170

naturelle 170

temporelle 37

filtrage

fréquentiel 39

numérique par convolution 202

temporel 36

filtre

à convolution 209

à réponse impulsionnelle finie
181

à retard de phase 44

analogique 42

anti-repliement 120

de la valeur médiane 211

de restitution 140

non récursif 180

numérique 179, 182

à réponse impulsionnelle finie
202

à réponse impulsionnelle infi-
nie 187

multicadence 212

passé-bas 43

du deuxième ordre 43, 195

du premier ordre 43, 195

passé-haut 43

du deuxième ordre 43

du premier ordre 43

réalisable 42

récursif 180

fonction

à valeurs réelles 7

d'autocorrélation 94

d'autocovariance 94

d'Heaviside 28

d'intercorrélacion 95

de corrélation

définition 52

statistique 95

de covariance 95

de transfert 39

porte 27, 117

fréquence 14

complexe 224

négative 14, 16

positive 16

G

gain 188
 en puissance 32

H

homothétie 26, 225

I

identification de processus 107
impulsion de Dirac 15, 213
indice de modulation 71, 75
intégrateur 34
intégration 225
intercorrélation 52
interpolation 135, 212
 de Shannon 136
 idéale 136
 linéaire 137
interprétation des signaux 5

L

largeur
 de bande spectrale 57
 de bande spectrale du signal 9
 spectrale 63
 utile du spectre 73
linéarité 17, 25, 225
lissage temporel 185
lobe secondaire 167, 168, 171

M

mesure d'un signal 37
méthode de l'invariance
 impulsionnelle 190
 indicielle 192
modélisation des signaux 7
modulation
 à bande latérale unique 66
 à deux porteuses en quadrature 67
 à porteuse supprimée 65
 cohérente 85
 combinée 86
 d'amplitude 60, 67
 de fréquence 71, 72
 de phase 71
 exponentielle 70
 non cohérente 85
moyenne temporelle 94
moyenueur 126

N

naturel 126
numérisation d'un signal 11

O

onde porteuse 60
ondelette
 de Haar 175
 de Morlet 174
opérateur « papillon » 158

P

parité 17, 25
pas de quantification 133
peigne de Dirac 114, 214
période d'échantillonnage 111
périodisation 116, 215
phase 44, 188
 instantanée 70
pic
 central 171
 de Dirac 15, 114, 213
 principal 167, 168
plan de Bode 44
pôle 44, 48
pré-accentuation 77
précision d'analyse fréquentielle 155
processeurs de traitement de signaux 163
produit de convolution 35
puissance
 d'un signal 51, 94
 en modulation d'amplitude 63
 en modulation en fréquence 76
 fréquentielle 51
 instantanée d'interaction 51
 moyenne 63, 76
 moyenne d'interaction 51
 temporelle 51

R

radiodiffusion 63
 stéréophonique 87
rapport signal sur bruit 103
réalisation du filtre numérique 183, 205
récepteur 69
registres à décalage 205
régulier 126
repliement 119
réponse
 impulsionnelle 34, 39, 42, 107
 impulsionnelle infinie 182
 indicielle 40
représentation
 fréquentielle 15
 spectrale 155
 spectrale bilatérale 16, 20
 temporelle 8
restitution 12, 135, 139, 142
 par bloqueur 139

S

série de Fourier 13, 18
signal 3
 à temps continus 11
 à temps discret 11
 aléatoire 9, 91, 92
 aléatoire gaussien 95
 analogique 11
 carré 19, 20
 certain 8

cosinusoidal 19, 20
 « dent de scie » 23
 déterministe 8
 échantillonné 11
 ergodique 9, 92, 94
 impulsif 21
 logique 11
 numérique 11
 périodique 9
 rampe 23
 sinusoidal 18, 20
 sinusoidal redressé double alter-
 nance 23
 sinusoidal redressé simple alter-
 nance 23
 triangulaire 22
 sous-échantillonnage
 signaux à bande étroite 122
 stationnaires 9, 34
 structure
 canonique 205, 206
 directe 205
 sur-échantillonnage 142, 143
 synthèse du filtre numérique 183
 système(s)
 continu 34
 de transmission 31
 de transmission linéaires 34
 linéaires 33
 stationnaire 34

T

taux de modulation 61
 théorème
 central limite 223
 de l'échantillonnage 116
 de Parseval 56
 de Plancherel 35
 de Shannon 116, 118
 fondamental des filtres 39
 théorie
 de la communication 4
 du signal 4
 traitement
 de l'information 4
 du signal 4
 transformation
 adaptée 193
 d'Euler 193
 homographique 195
 transformée
 de Fourier 24, 27
 à fenêtre glissante 172
 discrète 152, 153
 inverse 24
 propriétés 24
 rapide 156
 de Gabor 173
 de Laplace 184, 224
 en ondelettes 174
 en z 183
 translation 18, 26, 225
 transmission en bande de base 59

V

valeur

efficace 94

moyenne 93

quadratique moyenne 93

Z

zéro 48

SCIENCES SUP

Série Aide-mémoire

Francis Cottet

TRAITEMENT DU SIGNAL

Cet aide-mémoire s'adresse principalement aux étudiants d'IUT, de Licence et Master, ainsi qu'aux élèves ingénieurs. Il intéressera également les ingénieurs et techniciens en exercice.

L'ouvrage, qui offre une approche pragmatique, est composé de deux grandes parties : le traitement des signaux analogiques et le traitement des signaux numériques. L'aspect « théorie du signal » est limité au strict nécessaire pour la compréhension des modèles utilisés, les bases mathématiques indispensables sont rappelées en annexe.



ISBN 2 10 049690 5

www.dunod.com



FRANCIS COTTET est professeur à l'École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique (ENSMA) de Poitiers. Il anime une équipe de recherche sur les systèmes temps réel au sein du laboratoire LISI.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



DUNOD