



Optique ondulatoire

*RAPPELS DE COURS
ET EXERCICES*

Agnès **MAUREL**

Gilles **BOUCHET**

BELIN

8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

DANS LA COLLECTION BELIN SUP SCIENCES

A. MAUREL

Optique géométrique, cours

A. MAUREL et J.-M. MALBEC

Optique géométrique, rappels de cours et exercices

M. SAINT-JEAN, J. BRUNEAUX et J. MATRICON

Électrostatique et magnétostatique, cours

J. BRUNEAUX, M. SAINT-JEAN et J. MATRICON

Électrostatique et magnétostatique, rappels de cours et exercices

DANS LA COLLECTION BELIN SUP HISTOIRE DES SCIENCES

A. BARBEROUSSE

La mécanique statistique. De Clausius à Gibbs

M. BLAY

La science du mouvement. De Galilée à Lagrange

Photo de couverture © DigitalVision

Schémas : Laurent Blondel/Coredoc

Le code de la propriété intellectuelle n'autorise que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » [article L. 122-5] ; il autorise également les courtes citations effectuées dans un but d'exemple ou d'illustration. En revanche « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » [article L. 122-4].

La loi 95-4 du 3 janvier 1994 a confié au C.F.C. (Centre français de l'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), l'exclusivité de la gestion du droit de reprographie. Toute photocopie d'œuvres protégées, exécutée sans son accord préalable, constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Sommaire

1. Les ondes lumineuses	5
2. Polarisation d'une onde lumineuse	23
3. Interférences à deux ondes par division du front d'onde	49
4. Interférences à deux ondes par division d'amplitude. Le Michelson	81
5. Interférence à trois ondes ou plus. Réseaux	125
6. Diffraction d'une onde lumineuse	173
7. Interférence et diffraction. Réseaux optiques réels	203

Les ondes lumineuses

Un peu d'histoire

Un débat sur la lumière

L'optique connaît un véritable renouveau au XVII^e siècle. Les scientifiques de la première moitié du siècle se consacrent principalement à l'optique géométrique, et dès 1604, Johan Kepler précise les lois de la propagation rectiligne de la lumière. Par ailleurs, des progrès techniques sont réalisés dans la fabrication des instruments optiques. Les premières lunettes à oculaire divergent sont construites au tout début du siècle. Galilée (1564-1642), qui est le premier à s'en servir, publie ses observations du ciel en 1610. Si celles-ci suscitent d'abord une certaine méfiance quant à leur véracité, Kepler démontre dès 1611 leur bien-fondé dans un livre (le *Dioptrique*) entièrement consacré à l'optique géométrique des lentilles et de la lunette astronomique. En 1637, Descartes détermine la loi de la réfraction, dite loi des sinus.

Dans la seconde moitié du siècle, les théories physiques, c'est-à-dire l'étude de la nature de la lumière, prennent leur essor. En 1665, Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) met en évidence les phénomènes de diffraction, tandis que Robert Boyle (1627-1691), puis Robert Hooke (1635-1703) effectuent les premières recherches sur les phénomènes d'interférence. Isaac Newton (1642-1727) démontre que la lumière blanche n'est pas pure et homogène comme on le pensait mais un mélange de lumières homogènes de couleurs différentes. En 1675, Olaus Römer (1644-1710) détermine la vitesse de la lumière.

Jusqu'au milieu du XIX^e siècle, les physiciens vont travailler à l'élaboration d'une théorie de la lumière qui rende compte de tous les phénomènes nouvellement observés. Ils se regroupent autour de deux grandes théories concurrentes, héritières des conceptions de Descartes qui sont reprises et modifiées : certains, comme Newton, considèrent que la lumière est un corps (théorie corpusculaire) ; d'autres, comme Christian Huygens (1629-1695), la rapprochent du mouvement d'un corps sans transport de matière (théorie ondulatoire).

1. LA LUMIÈRE : UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les **ondes lumineuses** appartiennent à la famille des ondes électromagnétiques, décrites par deux champs vectoriels, **électrique** $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et **magnétique** $\vec{B}(\vec{r}, t)$ qui vérifient l'équation d'onde suivante dans un milieu transparent, homogène et isotrope :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

v désigne la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu considéré. Si n est l'**indice optique** du milieu, on a $v = c/n$, où c est la vitesse de la lumière (dans le vide, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

2. LUMIÈRE MONOCHROMATIQUE

Une **onde lumineuse monochromatique** est une onde dont la dépendance temporelle est sinusoïdale. Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

ou en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$$

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ se déduit de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ par la relation :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)$$

\vec{k} est le **vecteur d'onde** associé à la propagation de l'onde lumineuse et ω la **pulsation**. L'onde a donc une double périodicité, temporelle avec $T = 2\pi/\omega$ et spatiale avec $\lambda = 2\pi/k$ (k , module du vecteur d'onde, est appelé le **nombre d'onde**). On définit également la fréquence $f = 1/T = 2\pi/\omega$ de l'onde sinusoïdale.

La relation $\lambda = cT$ permet d'écrire $\omega = kc$.

3. STRUCTURE D'UNE ONDE LUMINEUSE

3.1. Définition

Une onde lumineuse monochromatique est dite :

- **plane** si son champ \vec{E} s'écrit $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - kx)]$, avec \vec{E}_0 de norme constante,

- **sphérique** si son champ \vec{E} s'écrit $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(r, t) = \frac{\vec{A}_0}{r} \exp [i(\omega t - kr)]$, avec \vec{A}_0 de norme constante,

- **cylindrique** si son champ \vec{E} s'écrit $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(r, t) = \frac{\vec{A}_0}{\sqrt{r}} \exp [i(\omega t - kr)]$, avec \vec{A}_0 de norme constante.

Rappelons enfin que si k désigne le nombre d'onde d'une onde se propageant dans le vide à la vitesse c et avec une pulsation ω , l'onde passant dans un milieu d'indice n garde la même pulsation : on dit que la pulsation est un **invariant** de la propagation. Sa vitesse de propagation est donnée par $v = c/n$ et son nombre d'onde devient :

$$k_n = \omega/v = nk$$

3.2. Plan et surface d'onde

Un **plan d'onde** est défini comme le plan localement perpendiculaire au vecteur d'onde en tout point du rayon lumineux.

La **surface d'onde** est alors définie comme l'enveloppe des plans d'onde à un instant donné de la propagation de la lumière dans un faisceau lumineux. Par convention, lorsqu'on représente plusieurs surfaces d'onde, on espace les plans d'onde correspondants d'une distance égale à la longueur d'onde λ le long des rayons lumineux.

4. INTENSITÉ LUMINEUSE

4.1. Définition

L'**intensité lumineuse** (ou **éclairement**) d'une onde décrite par son champ électrique \vec{E} est proportionnelle à la moyenne de $E^2(t)$, notée $\langle E^2 \rangle$ (ou, en notation complexe, à la moyenne de $E(t)E^*(t)$ avec E^* le complexe conjugué de E). Cette moyenne s'effectue sur le temps de réponse τ du détecteur (par exemple l'œil) :

$$I(t) \propto \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t E^2(t') dt'$$

4.2. Expression

Si le temps caractéristique du détecteur est très supérieur à la période $T = 2\pi/\omega$ de $E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$, l'intensité ne dépend pas du temps et s'identifie au carré du module de E :

$$I(t) \propto \frac{E_0^2}{2}$$

PROPAGATION D'UNE ONDE LUMINEUSE

Exercice 1 Longueur d'onde d'une radiation émise par un laser

Un laser émet une radiation rouge de longueur d'onde $\lambda_1 = 0,6329923 \pm 10^{-7} \mu\text{m}$. Calculer la longueur d'onde λ_2 du rayonnement émis dans l'air d'indice $n_2 = 1,00028 \pm 10^{-5}$.

Solution

CONSEIL : se souvenir que la fréquence est un invariant de la propagation.

La fréquence f de l'onde étant conservée, on a $f = \frac{v}{\lambda}$, où v est la vitesse de l'onde dans le milieu considéré : $v = \frac{c}{n}$ (c vitesse de l'onde dans le vide et n indice de réfraction du milieu). La longueur d'onde λ_1 étant donnée dans le vide, on a :

$$f = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{n_2 \lambda_2}$$

On en déduit :

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n_2} = 0,6328151 \mu\text{m}$$

La précision sur la valeur de λ_2 est obtenue en différentiant le logarithme de l'expression ci-dessus (dérivée logarithmique) :

$$\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} - \frac{dn_2}{n_2}$$

On passe des différentielles à l'incertitude Δ en sommant les valeurs absolues :

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta n_2}{n_2}$$

Avec $\Delta\lambda_1 = 10^{-7}$ et $\Delta n_2 = 10^{-5}$, on obtient $\Delta\lambda_2 = 10^{-7}$. On a finalement :

$$\lambda_2 = 0,6328151 \pm 10^{-7} \mu\text{m}$$

Exercice 2 Onde lumineuse émise par une source ponctuelle

On considère un point source O émettant une onde lumineuse monochromatique dans un milieu homogène, isotrope et transparent. Le champ électrique au point source s'écrit :

$$E(O, t) = E_0 \cos(\omega t)$$

1. Quelle est la forme des surfaces d'onde ?
2. Donner l'expression de la surface d'onde dont la différence de phase avec la source est φ .
3. Comment obtenir une onde plane avec une source ponctuelle ?

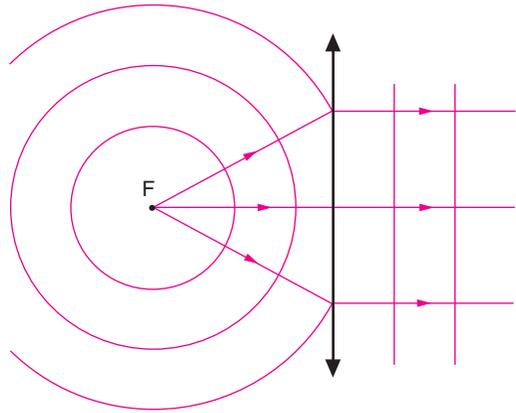
Solution

1. Une source ponctuelle émet une onde sphérique dans un milieu homogène isotrope : les surfaces d'onde sont des sphères de centre O.

2. L'amplitude de l'onde dépend de la position du point M sur la surface d'onde considérée. Puisque l'intensité lumineuse est conservée, l'amplitude décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la source. Notons E_M l'amplitude du champ électrique sur la surface d'onde considérée. La phase de l'onde correspond à la propagation de l'onde (la phase s'écrit $(\omega t - kr)$ pour une onde sphérique). Si φ désigne la différence de phase entre le point considéré et la source, la surface d'onde cherchée a pour équation $\varphi = kr$. Finalement, le champ électrique s'écrit :

$$E(M, t) = E_M \cos(\omega t - \varphi)$$

3. Lorsqu'on se place très loin de la source, les surfaces d'onde sphériques ont un rayon de courbure très important ; on peut donc les assimiler localement à des droites : on retrouve les fronts d'onde d'une onde plane. C'est ce qui se passe par exemple avec les ondes lumineuses émises par le Soleil au niveau de la Terre. Une façon plus rigoureuse de générer une onde plane à partir d'une source ponctuelle est de placer la source dans le plan focal objet d'une lentille convergente : le faisceau émergent de la lentille est un faisceau de rayons parallèles correspondant à une onde plane.



DÉTECTION D'UNE ONDE LUMINEUSE

Exercice 3 Condition de séparation de deux signaux lumineux

On considère une fibre creuse rectiligne : la gaine de la fibre est constituée d'un verre d'indice $n = 1,5$ et on réalise le vide à l'intérieur de la fibre. On éclaire une extrémité de la fibre avec un bref signal lumineux. À l'autre extrémité de la fibre, de longueur $L = 1$ m, on place un détecteur dont le temps de réponse est noté τ .

1. Écrire l'expression de l'onde (notée 1) se propageant dans l'air le long de la fibre, et de celle (notée 2) se propageant dans la gaine de verre le long de la fibre.
2. Au bout de combien de temps le détecteur reçoit-il la première onde ? la seconde ?
3. En déduire le temps de réponse que doit avoir le détecteur pour séparer les deux signaux.

4. Sachant que les détecteurs usuels ont un temps de réponse de 10^{-6} s, quelle devrait être la longueur de la fibre pour qu'un détecteur usuel sépare les deux signaux ?

Solution

CONSEIL : dans la première question, on demande d'écrire le champ électrique associé à chaque onde ; les ondes considérées sont planes et il s'agit simplement de calculer le nombre d'onde k dans chaque milieu. Dans la dernière question, on remarquera que le détecteur ne peut distinguer les deux ondes que si son temps de réponse est inférieur à la différence des temps d'arrivée.

1. Les ondes se propagent dans la direction x de la fibre ; leur pulsation ω est commune puisqu'elle ne dépend pas du milieu de propagation. Le vecteur d'onde s'écrit : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, où la longueur d'onde λ dépend de l'indice du milieu : $\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}$. Le champ électrique de l'onde plane s'écrit $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$. On a donc, dans le milieu 1, d'indice égal à 1 et dans le milieu 2 d'indice $n = 1,5$:

$$E_1(x, t) = E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{1}{c} x \right) \right)$$

$$E_2(x, t) = E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{n}{c} x \right) \right)$$

2. Le temps au bout duquel le détecteur reçoit les deux ondes correspond au temps de parcours de la fibre de longueur L à la vitesse $v_1 = c$ (respectivement $v_2 = \frac{c}{n}$) :

$$T_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{L}{c}$$

$$T_2 = \frac{L}{v_2} = n_2 \frac{L}{c}$$

A.N. $T_1 = 3,33 \cdot 10^{-9}$ s et $T_2 = 5 \cdot 10^{-9}$ s.

3. Pour que le détecteur soit capable de séparer les deux signaux, il faut donc qu'il ait un temps de réponse de l'ordre de 10^{-9} s, ce qui est très au-dessus des performances actuelles des détecteurs.

4. Avec un temps de réponse de l'ordre de $\tau = 10^{-6}$ s, les deux signaux doivent être séparés d'au moins τ . La longueur L' de la fibre doit être telle que :

$$\tau < T'_2 - T'_1 = \frac{L'}{c} (n_2 - 1)$$

D'où

$$L' > \frac{c\tau}{n_2 - 1}$$

A.N. $L' = 600$ m.

Exercice 4 Condition de détection d'un phénomène de battement

On considère deux faisceaux lumineux monochromatiques (issus par exemple de deux sources lasers). Les deux faisceaux sont de longueurs d'onde voisines et de fréquences respectives ω_1 et ω_2 , avec $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$. Les ondes associées aux faisceaux sont caractérisées par leurs champs électriques (supposés colinéaires) \vec{E}_1 et \vec{E}_2 et elles éclairent un détecteur dont le temps de réponse est τ (avec $\tau \gg 1/\omega_1$ et $1/\omega_2$).

On rappelle qu'un détecteur optique est sensible à l'intensité lumineuse reçue, proportionnelle à $\langle E^2 \rangle$, où \vec{E} est le champ électrique associé à l'onde reçue par le détecteur, et $\langle X \rangle$ désigne la moyenne temporelle de X sur le temps caractéristique du détecteur.

1. Expliciter la dépendance temporelle des champs électriques.
2. En déduire la forme du champ électrique associé à l'onde résultante.
3. Écrire l'expression de l'intensité lumineuse mesurée par le détecteur et exprimer une condition sur le temps de réponse du détecteur pour qu'il puisse détecter le phénomène de battement.

Solution

CONSEIL : le battement est obtenu par superposition de deux ondes de fréquences légèrement décalées. On ne s'intéresse pas à la dépendance spatiale de l'onde, la variation de l'intensité lumineuse étant temporelle, puisque dans ce cas, elle est due à un décalage temporel dans le terme de phase. Dans la question 1, on exprimera simplement les champs électriques associés à une onde de pulsation ω_1 et une onde de pulsation ω_2 (la phase spatiale étant désignée par une fonction quelconque, par exemple φ_1 et φ_2); l'onde résultante est décrite par le champ électrique somme des deux champs précédents (question 2). Dans la question 3, on calcule l'intensité résultante en étudiant le temps caractéristique de variation de cette intensité lumineuse. On conclura que le détecteur ne peut distinguer le phénomène de battement que si son temps caractéristique de réponse est inférieur au temps caractéristique de variation de l'intensité lumineuse.

1. Les champs électriques associés aux pulsations respectives ω_1 et ω_2 s'écrivent :

$$E_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$E_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Les deux champs étant colinéaires, on ne considère que les quantités scalaires E_1 et E_2 .

2. Le champ électrique associé à l'onde résultante est la somme des champs électriques définis précédemment :

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

3. L'intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne de $E(t)$:

$$I = K \langle E(t)^2 \rangle$$

$$I = K \langle E_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) + 2E_1 E_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\Delta\omega t + \varphi_2 - \varphi_1)) \rangle$$

La moyenne $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle$ est nulle puisque $\tau \gg 1/\omega_1$ et $1/\omega_2$. La moyenne $\langle \cos(\Delta\omega t + \varphi_2 - \varphi_1) \rangle$ sera nulle si le temps de réponse du détecteur τ est également grand devant $1/\Delta\omega$; si, au contraire $\tau \ll 1/\Delta\omega$, cette moyenne est presque égale à la valeur instantanée. On ne peut rien dire, a priori, si $\Delta\omega$ est du même ordre de grandeur que $1/\tau$.

En résumé, on a :

$$\tau \gg 1/\Delta\omega : \quad I = I_1 + I_2$$

$$\tau \ll 1/\Delta\omega : \quad I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\omega t + \varphi_2 - \varphi_1)$$

Dans ce dernier cas, le phénomène de battement est perçu par le détecteur : si la pulsation des deux ondes n'est pas mesurable, leur écart peut être mesuré.

Exercice 5 Temps de réponse de l'œil

On considère l'application suivante de l'exercice précédent : l'œil est un récepteur dont le temps de réponse est de l'ordre de 0,1 s.

1. Quelles ondes lumineuses l'œil est-il capable de distinguer ?
2. Deux ondes de fréquences légèrement différentes parviennent à l'œil. À quelle condition l'œil est-il susceptible de discerner des battements ?

Solution

1. L'œil perçoit les ondes lumineuses appartenant au spectre visible.
2. Les phénomènes de battement sont discernables par l'œil si la condition établie à l'exercice précédent $\tau \ll 1/\Delta\omega$ est vérifiée, soit avec $\tau_{\text{œil}} = 0,1$ s :

$$\Delta\omega \ll 1/\tau_{\text{œil}} = 10 \text{ Hz}$$

PROPAGATION D'UN PAQUET D'ONDES ET DISPERSION

Exercice 6 Paquet d'ondes quasi-monochromatique

Par définition, un paquet d'ondes quasi-monochromatique est une somme d'ondes planes monochromatiques dont les pulsations ω sont voisines d'une pulsation moyenne ω_0 , et dont les vecteurs d'onde \vec{k} sont voisins (en norme et en direction) d'un vecteur d'onde moyen \vec{k}_0 .

Considérons le cas simple d'un paquet d'ondes se propageant selon l'axe Ox dans un milieu dispersif et dont le champ électrique en x à la date t s'écrit :

$$E(x, t) = a \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(k(\omega)x - \omega t)} d\omega \quad \text{avec} \quad \Delta\omega \ll \omega_0$$

$k(\omega)$ est une fonction de ω ; compte tenu de l'hypothèse, on peut l'exprimer par un développement limité à l'ordre 1 :

$$\hat{k}(\omega) = \hat{k}(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

1. Montrer alors que :

$$E(x, t) = A \left[\frac{\sin \left[\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right) \right]}{\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right)} \right] e^{-i\omega_0 \left(t - \frac{x}{V_\phi} \right)}$$

avec $V_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$ et $V_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$.

2. Interpréter le résultat obtenu.

Solution

CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière si on se laisse guider par l'énoncé. Il s'agit de décrire un paquet d'ondes, c'est-à-dire un ensemble d'ondes de fréquences voisines. À l'inverse des exercices précédents, les fréquences des différentes ondes sont dans ce cas tellement proches qu'on les décrit par un continuum de fréquences, centré autour de la fréquence centrale ω_0 et de largeur $\Delta\omega$.

Lorsqu'on considère la superposition d'ondes de fréquences voisines discrètes ω_i , l'onde résultante est décrite par un champ électrique \vec{E} qui s'exprime comme la somme des champs électriques associés à chacune des ondes :

$$E(x, t) = a \sum_{\omega_i = \omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(k(\omega_i)x - \omega_i t)}$$

Lorsqu'on considère un continuum, l'onde résultante est décrite par l'intégrale des champs électriques du continuum d'ondes :

$$E(x, t) = a \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(k(\omega)x - \omega t)} d\omega$$

C'est le cas dans cet exercice !

On précise maintenant que la bande de fréquence $\Delta\omega$ considérée est très petite, ce qui permet d'effectuer le développement limité au premier ordre suggéré par l'énoncé. Il reste alors à effectuer le calcul de l'intégrale $E(x, t)$, compte tenu de l'expression simplifiée de $k(\omega)$, puis à identifier les expressions de V_g et V_ϕ .

1. Écrivons le champ électrique résultant de la superposition d'un continuum d'ondes :

$$E(x, t) = a \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i \left(k_0 x + \left(\frac{dk_0}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) x - \omega t \right)} d\omega$$

$$E(x, t) = a e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{i \left((\omega - \omega_0) \left(\frac{x}{V_g} - t \right) \right)} d(\omega - \omega_0)$$

soit :

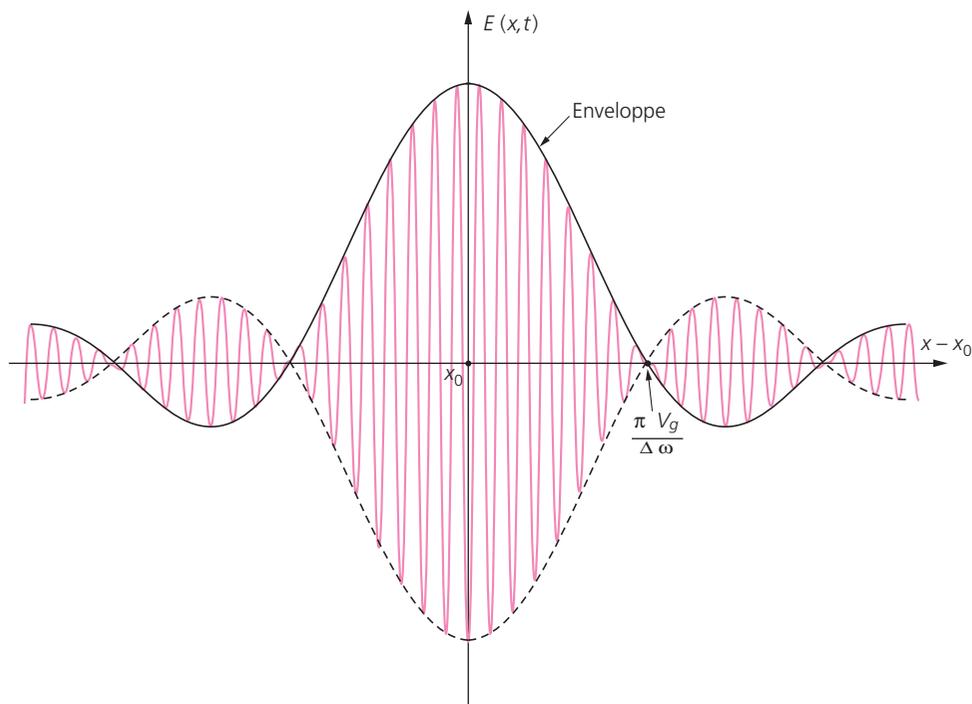
$$E(x, t) = a e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left[\frac{e^{i\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right)} - e^{-i\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right)}}{i \left(\frac{x}{V_g} - t \right)} \right]$$

donc :

$$E(x, t) = 2\Delta\omega a \operatorname{sinc} \left[\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right) \right] e^{-i\omega_0 \left(t - \frac{x}{V_\phi} \right)}$$

où $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$ est la fonction sinus cardinal.

2. On peut considérer que le paquet d'ondes a une enveloppe d'amplitude $\left| 2\Delta\omega a \operatorname{sinc} \left[\Delta\omega \left(\frac{x}{V_g} - t \right) \right] \right|$ maximale à t pour $x_0 = V_g t$, c'est-à-dire que l'enveloppe du paquet d'ondes se déplace à la vitesse V_g , d'où la signification de la vitesse de groupe. Les ondes porteuses (de pulsation moyenne ω_0) défilent à l'intérieur de l'enveloppe à la vitesse relative $V_\phi - V_g$.



À l'ordre envisagé dans le développement limité considéré, le paquet d'ondes se propage sans déformation. On peut noter que sa largeur est de l'ordre de $\Delta x \approx \frac{V_g}{\Delta\omega} 2\pi$, ce que l'on peut écrire $\frac{\Delta x}{V_g} \Delta\omega \approx 2\pi$ ou encore $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ ($\Delta t = \frac{\Delta x}{V_g}$ représente la durée du passage du paquet d'onde en un point donné).

En fait, le passage du paquet d'ondes dans un milieu dispersif implique également une déformation puisque les vitesses de phase des ondes monochromatiques qui le composent sont différentes.

Exercice 7 Paquet d'ondes dans un milieu dispersif

Un paquet d'ondes se propage dans un milieu dispersif tel que $\frac{dn}{d\lambda_0} = -10^5 \text{ m}^{-1}$. Dans cette expression, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ désigne la longueur d'onde dans le vide (c est la vitesse de l'onde dans le vide). On notera λ la longueur d'onde dans le milieu dispersif considéré.

Quelle distance doit-il parcourir pour que la phase au maximum du paquet d'ondes ait varié de 2π ?

On pourra établir : $\frac{1}{V_g} = \frac{1}{V_\phi} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$

Pour les applications numériques, on prendra $\lambda_0 = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$.

Solution

CONSEIL : on traitera l'exercice précédent avant de résoudre celui-ci, ou du moins, on retiendra la forme

du champ électrique associé à un paquet d'ondes : $E(x, t) = A \left[\frac{\sin \left[\Delta\omega \left(t - \frac{x}{V_g} \right) \right]}{\Delta\omega \left(t - \frac{x}{V_g} \right)} \right] e^{-i\omega_0 \left(t - \frac{x}{V_\phi} \right)}$ avec

$$V_\phi = \frac{\omega_0}{k_0} \text{ et } V_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}.$$

Que se passe-t-il de particulier dans un milieu dispersif ? Puisque l'indice dépend de la longueur d'onde ($dn/d\lambda_0$ n'est pas nul, ce qui signifie que l'indice dépend de la pulsation, donc de la longueur d'onde λ), la vitesse des ondes dépendra également de la longueur d'onde, et donc de la fréquence de l'onde considérée dans le paquet. Si on envoie toutes les ondes, c'est-à-dire le paquet d'ondes à un instant $t = 0$ donné, certaines ondes se propageront plus vite que d'autres et on dira que le paquet d'onde se déforme au cours de sa propagation : c'est le phénomène de dispersion.

Établir l'égalité suggérée par l'énoncé ne présente pas de difficulté particulière si on se souvient que $k = \omega/v = n\omega/c$.

La phase varie au maximum du paquet d'ondes car V_g et V_ϕ sont a priori différentes. Comment déterminer le maximum du paquet d'ondes ? Une solution simple consiste à le suivre, c'est-à-dire à se déplacer à la vitesse V_g , qui est la vitesse de propagation du maximum du paquet d'ondes ; ce faisant, on a $t = x/V_g$. La phase du paquet étant simplement définie par $\omega_0(t - x/V_\phi)$, la phase du maximum du paquet d'ondes est donnée par :

$$\omega_0(x/V_g - x/V_\phi)$$

La phase varie de 2π au bout d'une distance L telle que :

$$\omega_0 L (1/V_g - 1/V_\phi) = 2\pi$$

On obtient ainsi :

$$\left| \frac{L}{V_g} - \frac{L}{V_\phi} \right| = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{V_\phi}$$

et, avec $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$:

$$L \left| \frac{1}{V_g} - \frac{1}{V_\phi} \right| = \frac{\lambda_0}{nV_\phi}$$

On a par ailleurs : $\omega = \frac{c}{n}k$. Il vient donc :

$$\frac{1}{V_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{(nd\omega + \omega dn)}{d\omega}$$

Avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, on a $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\lambda_0}{\lambda_0}$. On obtient finalement :

$$\frac{1}{V_g} = \frac{1}{V_\phi} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$$

Avec $\frac{dn}{d\lambda_0} = -10^5 \text{ m}^{-1}$, on a : $L \left(-\frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} \right) = \frac{\lambda_0}{c}$

soit :

$$L = -\frac{d\lambda_0}{dn}$$

A.N. $L = 10^{-5} \text{ m}$.

Exercice 8 Paquet (ou groupe) d'ondes dans le vide

Un paquet d'ondes est obtenu dans le cas présent par la superposition d'ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques, polarisées rectilignement, dont les champs électriques sont du type $A(\omega) \cos(\omega t - kz) \vec{e}$.

On suppose que les ondes se propagent dans le vide, que $0 \leq \omega < \infty$, et on considère le cas où l'amplitude $\delta A(\omega)$ d'un groupe « élémentaire » d'ondes, de pulsations comprises entre ω et $\omega + d\omega$, est donnée par :

$$\delta A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Delta} E_0 e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2} d\omega \quad (\Delta \text{ étant une constante positive})$$

On utilisera : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{2\pi i xy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 \frac{y^2}{\alpha}}$ (x, y et α étant des réels, $\alpha > 0$).

1. Déterminer le champ $\vec{E}(z, t)$ de ce paquet d'ondes.
2. Représenter le profil de ce paquet d'ondes et estimer sa largeur δz .
3. Estimer la durée de passage δt de ce groupe d'ondes en un point z donné.

Solution

CONSEIL : la particularité du paquet dans cet exercice est qu'il contient toutes les fréquences de 0 à l'infini ! La première question ne pose pas de difficulté particulière, puisque l'on donne la forme δA de l'amplitude d'un groupe d'ondes, dit élémentaire, correspondant à des pulsations comprises entre ω et $\omega + d\omega$. Les autres questions en découlent.

1. Selon l'énoncé, le paquet d'ondes proposé est représenté par l'intégrale :

$$\vec{E} = \vec{e} E_0 \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2} \cos(\omega t - kz) d\omega$$

Le sens de propagation étant le même pour toutes les ondes, sachant que la propagation se fait dans le vide, et donc que $\frac{\omega}{k} = c$, nous poserons :

$$\omega t - kz = \omega \left(t - \frac{k}{\omega} z \right) = \omega t' \quad \text{avec } t' \equiv t - \frac{z}{c}$$

On utilise le résultat indiqué par l'énoncé (i.e. la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{2\pi i x y} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 \frac{y^2}{\alpha}} \quad (x \text{ et } y \text{ réels}) \quad (1)$$

Compte tenu des parités, l'expression de \vec{E} s'écrit encore :

$$\vec{E} = \frac{\vec{e}}{\sqrt{\pi} \Delta} E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2} e^{+i\omega t'} d\omega$$

Il suffit d'appliquer (1) avec $\omega = 2\pi x$, $t' = y$ et $\alpha = \frac{4\pi^2}{\Delta^2}$, soit $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\Delta}{2\sqrt{\pi}}$.

Ainsi :

$$\vec{E} = \frac{\vec{e}}{\sqrt{\pi} \Delta} E_0 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2}{\Delta^2} v^2} e^{+i2\pi v t'} dv = \frac{\vec{e}}{\sqrt{\pi}} \frac{2\pi}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{\pi}} \right) e^{-\frac{\Delta^2}{4} t'^2}$$

soit :

$$\vec{E} = \vec{e} E_0 e^{-\frac{\Delta^2}{4} \left(t - \frac{z}{c}\right)^2} \quad (2)$$

2. Ce paquet d'ondes a, à t fixé, un profil gaussien dont la largeur est de l'ordre de c/Δ .

3. À z fixé, la durée de passage du paquet d'ondes en un point est de l'ordre de $\frac{1}{\Delta}$, soit $\delta t \approx \frac{1}{\Delta}$, alors que la largeur spectrale est $\delta \nu \approx \Delta$. On vérifie que $\delta t \delta \nu \approx 1$.

Exercice 9 Formule de dispersion de Sellmeier

La mécanique quantique établit que si un milieu matériel contient des atomes (ou des molécules) à raison de N par unité de volume, l'indice de réfraction pour une onde lumineuse de fréquence ν se calcule par :

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0} \sum_i \frac{\alpha f_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante.}$$

Sans entrer dans les détails, les atomes sont assimilés à des oscillateurs soumis à une force liée au coefficient f_i . Ils présentent une fréquence de résonance ν_i .

La quantité $\frac{e^2}{m_e}$ caractérise une particule de charge e et de masse m_e .

1. Montrer que si l'on prend comme variable la longueur d'onde (dans le vide) au lieu de la fréquence, cette expression peut s'écrire :

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum_i \frac{D_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

Exprimer n_∞^2 ($\lambda \rightarrow \infty$) et D_i .

La dispersion de réfraction de l'hydrogène dans les conditions normales de température et de pression est représentée par :

$$n^2 = 1 + 2,721 \cdot 10^{-4} + \frac{2,11 \cdot 10^{-18}}{\lambda^2 - 7,76 \cdot 10^{-15}} \quad (\lambda \text{ en m})$$

2. Vérifier que l'absorption a lieu dans l'ultraviolet. Déterminer la valeur de $\frac{e^2}{m_e}$ et montrer que la particule peut être assimilée à un électron. On donne la valeur de la masse volumique de H_2 : $9,00 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et on admet que pour H_2 , on a $f_i = 2 \text{ S.I.}$

Solution

CONSEIL : pas de difficulté particulière à signaler dans cet exercice. Laissez-vous guider par l'énoncé !

1) Avec $v = c/\lambda$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide), on exprime n^2 en fonction de λ :

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0 c^2} \sum_i \frac{f_i}{\left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)} = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0 c^2} \sum_i \frac{f_i \lambda_i^2 \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)}$$

Si $\lambda \rightarrow \infty$, l'expression devient :

$$n_\infty^2 = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 m_e \epsilon_0 c^2} \sum_i f_i \lambda_i^2$$

Calculons la différence $n^2 - n_\infty^2$:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e c^2} \left[\sum_i f_i \left(\frac{\lambda^2 \lambda_i^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \right) - \sum_i f_i \lambda_i^2 \right] = \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e c^2} \sum_i \frac{f_i \lambda_i^4}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

On peut donc écrire :

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum_i \frac{D_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

avec

$$D_i = \frac{Ne^2 f_i \lambda_i^4}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e c^2}$$

2. En identifiant, on trouve $\lambda_i^2 = 7,76 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$, soit : $\lambda_i = 0,088 \text{ } \mu\text{m}$. L'absorption a donc bien lieu dans l'ultraviolet.

Avec $D_i = 2,11 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$, $N = \frac{M}{2 \cdot 10^{-3}} N_A$ et $f_i = 2 \text{ S.I.}$, on obtient $\frac{e^2}{m_e} = 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ S.I.}$ (au lieu de $2,8 \cdot 10^{-8} \text{ S.I.}$). Il s'agit donc bien d'électrons.

Exercice 10 Onde évanescente

On considère une onde monochromatique de pulsation ω , dont le vecteur d'onde est par définition $\vec{k} = k_1 \vec{z} + ik_2 \vec{y}$ (k_1 et k_2 sont des constantes réelles positives). On étudie la propagation de cette onde dans l'air.

1. Peut-on dire que cette onde est plane ?
2. Trouver la relation, dite relation de dispersion, entre k_1 , k_2 , ω et c .
3. Indiquer le sens de propagation de l'onde et donner sa vitesse de phase V_ϕ , définie par $V_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$ (où Re désigne la partie réelle). Comparer la vitesse de phase à c , vitesse de l'onde dans l'air ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).
4. Que traduit le comportement de \vec{E} avec y ?

Solution

CONSEIL : une onde évanescente est caractérisée par un champ électrique dont l'amplitude décroît lors de la propagation. À partir de l'expression du vecteur d'onde donnée par l'énoncé, on se laissera guider par les questions pour découvrir les propriétés de cette onde évanescente.

Pour la question 2, on pensera à utiliser l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique.

1. Remarquons que le champ électrique associé à l'onde évanescente peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] \\ &= \vec{E}_0 \exp \left[i \left((k_1 \vec{z} + ik_2 \vec{y}) (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}) - \omega t \right) \right] \\ &= \vec{E}_0 \exp (-k_2 y) \exp [i(k_1 z - \omega t)]\end{aligned}$$

Il s'agit d'une onde plane se propageant dans la direction Oz. Elle est dite non uniforme puisque son amplitude décroît avec y .

2. L'équation de propagation vérifiée par \vec{E} dans un milieu homogène isotrope d'indice n s'écrit :

$$\Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Elle conduit, en projection sur \vec{x} et avec $n = 1$, à :

$$\Delta E = -\frac{\omega^2}{c^2} E$$

Avec $\Delta E = (k_2^2 - k_1^2)E$, la relation de dispersion s'écrit :

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

3. Le terme de phase en $(k_1 z - \omega t)$ traduit une propagation vers les $z > 0$ ($k_1 > 0$), à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$$

D'après la relation de dispersion, $k_1 > \frac{\omega}{c}$, donc $V_\phi > c$.

4. L'amplitude du champ \vec{E} décroît lorsque y croît. L'inverse de k_2 s'apparente à une profondeur de pénétration : on parle d'onde évanescente.

Exercice 11 Mesure du temps de cohérence d'un Laser

On étudie les interférences produites par deux lasers identiques. On considère que ces deux sources émettent des trains d'ondes d'amplitude constante A_0 , qui ont tous la même durée t_c , mais des pulsations ω_1 et ω_2 très légèrement différentes. Chaque onde est caractérisée par une intensité I_0 .

On utilise un détecteur ayant un temps de réponse t_R très supérieur à la période des ondes, mais très inférieur à la durée d'émission des trains d'ondes. On suppose également que la différence de pulsation $\omega_1 - \omega_2$ est très faible de sorte que $t_R \ll 1/(\omega_1 - \omega_2)$.

1. Exprimer l'intensité $I(t)$ mesurée par le détecteur en fonction de I_0 , ω , ω_1 , ω_2 , et des phases aléatoires φ_1 et φ_2 des deux ondes.

Quelle est la valeur moyenne $\langle I \rangle$ calculée sur une durée grande devant t_c ?

2. En supposant que les deux trains d'ondes sont de même durée t_c , déterminer les valeurs moyennes (sur une durée grande devant t_c) :

$$\langle \cos [\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle \quad \text{et} \quad \langle \sin [\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle$$

avec $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ le déphasage entre les deux ondes.

3. Le signal de sortie du détecteur $u(t)$ est traité par un système informatique qui détermine la fonction de corrélation $g(T)$ définie par :

$$g(T) = \frac{\langle I(t)I(t+T) \rangle}{\langle I \rangle^2}$$

a. Calculer $g(T)$.

b. Tracer le graphe de $g(T)$.

c. En déduire une mesure de t_c .

Solution

CONSEIL : nous vous conseillons de traiter l'exercice 4 avant celui-ci. Il s'agit de décrire la réponse d'un détecteur comme la moyenne du signal sur le temps de réponse de l'appareil, c'est-à-dire que le détecteur donne au temps t l'intégrale du signal entre $t - t_R$ et t . La propriété mathématique que nous utilisons est la suivante : l'intégrale d'une fonction $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ entre $t - t_R$ et t est nulle si $t_R \gg \omega$; en revanche, cette intégrale s'identifie à la valeur instantanée $f(t)$ si $t_R \ll \omega$.

Ici, le temps de réponse du détecteur est tel que t_R est très petit devant $1/(\omega_1 - \omega_2)$ et devant t_c , durée du signal. Inversement, t_R est très grand devant $1/\omega_1$ et $1/\omega_2$.

1. L'intensité $I(t)$ mesurée par le détecteur vaut :

$$\begin{aligned} I(t) &= KA_0^2 \langle [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^2 \rangle \\ &= KA_0^2 \langle \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) + 2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle \\ &= KA_0^2 [\langle \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) \rangle + \langle \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle + 2 \langle \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle] \end{aligned}$$

où $\langle X \rangle$ désigne la moyenne réalisée par le détecteur qui s'écrit :

$$\langle X \rangle(t) = \frac{1}{t_R} \int_{t-t_R}^t X(y) dy$$

avec t_R est le temps de réponse du détecteur. Or :

$$\langle \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) \rangle = \langle \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle = 1/2$$

car $t_R \gg 1/\omega_1$ et $1/\omega_2$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 2 \langle \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle \\ = \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)) \rangle + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle \end{aligned}$$

Avec $t_R \gg 1/(\omega_1 + \omega_2)$, il vient :

$$\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)) \rangle = 0$$

En revanche, puisque $t_R \ll 1/(\omega_1 - \omega_2)$, la moyenne de $\cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))$ s'identifie à la valeur instantanée :

$$\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle = \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))$$

L'intensité I_0 d'une des deux ondes est définie par :

$$I_0 = KA_0^2 \langle \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) \rangle = KA_0^2 \langle \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle = \frac{KA_0^2}{2}$$

On a finalement :

$$I(t) = 2I_0 [1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))]$$

L'intensité moyenne sur une durée grande devant t_c vaut alors :

$$\langle I \rangle = 2I_0$$

2. - Si $T > t_c$: $\varphi(t+T) - \varphi(t)$ est aléatoire et les moyennes demandées sont nulles :

$$\langle \cos[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle = \langle \sin[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle = 0$$

- Si $T < t_c$: $\varphi(t+T) - \varphi(t)$ est aléatoire pendant une durée T , puis $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ pendant $t_c - T$.

On a alors :

$$\langle \cos[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle = \frac{1}{t_c} [0 \times T + \cos(0)(t_c - T)] = 1 - \frac{T}{t_c}$$

$$\langle \sin[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle = \frac{1}{t_c} [0 \times T + \sin(0)(t_c - T)] = 0$$

3. Calculons $I(t)I(t + T)$:

$$I(t)I(t + T) = 4I_0^2 \{ 1 + \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi(t)] + \cos [(\omega_1 - \omega_2)(t + T) + \varphi(t + T)] + \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi(t)] \cos [(\omega_1 - \omega_2)(t + T) + \varphi(t + T)] \}$$

Or :

$$\langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi(t)] \rangle = \langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)(t + T) + \varphi(t + T)] \rangle = 0$$

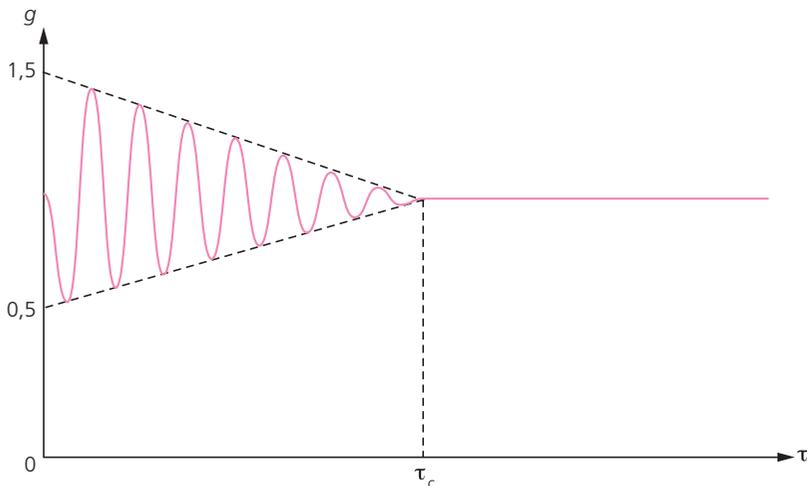
et :

$$\begin{aligned} & \langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi(t)] \cos [(\omega_1 - \omega_2)(t + T) + \varphi(t + T)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos [(\omega_1 - \omega_2)T + \varphi(t + T) - \varphi(t)] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos [(\omega_1 - \omega_2)T] \langle \cos [\varphi(t + T) - \varphi(t)] \rangle - \sin [(\omega_1 - \omega_2)T] \langle \sin [\varphi(t + T) - \varphi(t)] \rangle \} \end{aligned}$$

Donc :

- si $T > t_c$: $g(T) = 1$

- si $T < t_c$: $g(T) = 1 + \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - \omega_2)T] \left| 1 - \frac{T}{t_c} \right|$



Le graphe ci-dessus permet de déterminer la valeur de t_c et donc la valeur de la longueur de cohérence $l_c = ct_c$.

Polarisation d'une onde lumineuse

Un peu d'histoire

Sir David Brewster (1781-1868), plus heureux avec la polarisation qu'avec le kaléidoscope

Sir David Brewster, physicien écossais, est célèbre pour avoir inventé le kaléidoscope et découvert le phénomène de polarisation de la lumière. Né en 1781 à Jedburgh, il entre à l'université d'Edinburgh à 12 ans pour étudier la théologie. C'est vers l'âge de 18 ans qu'il se tourne vers la physique, et notamment vers l'optique, renonçant alors à la carrière ecclésiastique qu'il avait embrassée. Sa contribution essentielle sera, en optique, la découverte de la polarisation de la lumière. Élu en 1815 à la *Royal Society*, il est un des rares physiciens à avoir obtenu les trois principales médailles scientifiques, la *Copley Medal* qu'il obtient l'année de son élection, la *Rumford Medal* en 1818, et la *Royal Medal* en 1830. Brewster est également l'inventeur du kaléidoscope qu'il met au point en 1818 et pour lequel il dépose un brevet en 1819. Il publie la même année un livre détaillant le principe et la construction des kaléidoscopes. Le jouet deviendra très vite populaire, et Brewster aurait probablement fait fortune s'il avait mis autant de soin à déposer son brevet qu'à rédiger son traité ! Il semble en effet que le document ait été mal enregistré, ce qui permit à de nombreuses firmes de commercialiser des kaléidoscopes sans jamais payer de royalties.

1. ONDES POLARISÉES

Une onde plane se propageant dans le vide dans la direction de $\vec{k} = k\vec{i}$ est décrite par son champ dans l'espace (O ; x, y, z) :

$$E_x(x, t) = 0 \quad E_y(x, t) = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \quad E_z(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_2)$$

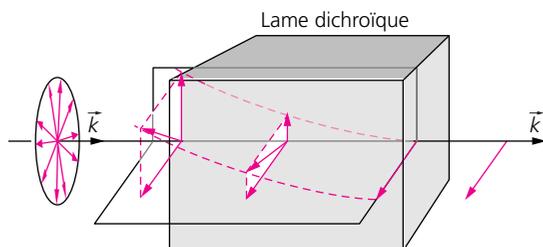
- Si $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est un multiple de π , l'onde est dite **polarisée rectilignement** : la direction de \vec{E}_0 est constante.
- Si $\pi < \varphi < 2\pi$, l'extrémité du champ \vec{E} décrit une ellipse dans le sens trigonométrique : la polarisation est alors dite **elliptique droite** pour un observateur regardant l'onde avancer vers lui ; si $0 < \varphi < \pi$, l'extrémité du champ décrit une ellipse dans le sens des aiguilles d'une montre : la polarisation est dite **elliptique gauche**.
- La polarisation est dite **circulaire gauche** lorsque $\varphi = \pi/2$ (l'extrémité du champ décrit un cercle dans le sens trigonométrique) et elle est dite **circulaire droite** lorsque $\varphi = 3\pi/2$ (l'extrémité du champ décrit un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre).

2. POLARISATION D'UNE ONDE

2.1. Différentes méthodes

Une lumière non polarisée peut être polarisée rectilignement :

- par **réflexion vitreuse**. En envoyant la lumière sur un verre d'indice n en incidence de Brewster ($\tan i_B = n$), le faisceau réfléchi est polarisé dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence ;
- après traversée d'un **matériau dichroïque** (comme certains cristaux ou des feuilles de polaroid). Ces matériaux atténuent la composante du champ dans une direction : la lumière ressort ainsi polarisée dans la direction perpendiculaire.



2.2. Polariseur et analyseur

Un matériau dichroïque peut être utilisé comme **polariseur** ou **analyseur**. Un polariseur permet de polariser une lumière quelconque (de polarisation dite aléatoire) : à la sortie du polariseur, la lumière est polarisée rectilignement dans la **direction** du **polariseur** (direction suivant laquelle le champ n'est pas atténué). Un analyseur est utilisé pour déterminer la direction de polarisation d'une onde polarisée rectilignement ; en modifiant la direction de l'analyseur, on observe l'extinction lorsque la **direction** de l'**analyseur** est perpendiculaire à la direction de polarisation de l'onde.

Soit I l'intensité lumineuse d'une onde polarisée à l'entrée d'un polariseur ; l'intensité lumineuse I' à la sortie du polariseur est donnée par le **loi de Malus** :

$$I' = I \cos^2 \alpha$$

où α est l'angle entre la direction du champ électrique de la lumière polarisée à l'entrée du polariseur, et la direction du polariseur.

Si l'onde lumineuse à l'entrée du polariseur n'est pas polarisée, l'intensité de l'onde à la sortie du polariseur est :

$$I' = I/2$$

3. BIRÉFRINGENCE

3.1. Cristal biréfringent

Un cristal biréfringent a des propriétés optiques anisotropes ; il agit sur la direction du champ électrique d'une onde électromagnétique le traversant. Un cristal biréfringent possède un **axe optique** Δ . Si l'onde incidente sur le cristal est caractérisée par un champ électrique parallèle à Δ , la lame présente un indice n_e dit **extraordinaire** ; si l'onde est caractérisée par un champ électrique perpendiculaire à l'axe optique, la lame présente un indice n_o dit **ordinaire**.

3.2. Lame cristalline

Considérons une lame mince d'épaisseur e taillée dans un matériau biréfringent, parallèlement à l'axe optique, et un rayon en incidence normale sur cette lame (rappelons que la différence de marche entre les deux vibrations décomposées suivant les lignes neutres dans la lame vaut $\delta = (n_o - n_e)e$).

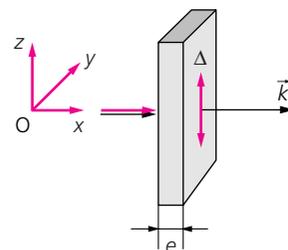
- Si le déphasage φ vaut $2n\pi$, avec n entier, c'est-à-dire $\delta = n\lambda$, la lame est dite **lame d'onde** ; la direction de polarisation est identique en entrée et en sortie de la lame.

- Si le déphasage φ vaut $(2n + 1)\pi$, avec n entier, c'est-à-dire $\delta = (n + 1/2)\lambda$, la lame est dite **lame demi-onde** ; la direction de polarisation en sortie de la lame est alors symétrique de la direction de polarisation en entrée de la lame, par rapport à la ligne neutre perpendiculaire à l'axe optique. On dit que la lame demi-onde symétrise l'état de polarisation par rapport à l'axe perpendiculaire à l'axe optique.

- Si le déphasage φ vaut $(n + 1/2)\pi$, avec n entier, c'est-à-dire $\delta = (n + 1/2)\lambda/2$, la lame est dite **lame quart-d'onde** ; la polarisation de la vibration en sortie de la lame est elliptique, les axes de l'ellipse coïncidant avec les lignes neutres de la lame. La vibration est elliptique droite ou gauche. À 2π près, nous avons :

- pour $0 < \varphi < \pi$, la polarisation en sortie est elliptique gauche ;
- pour $\pi < \varphi < 2\pi$, la polarisation est elliptique droite.

Dans le cas particulier où la polarisation à l'entrée de la lame est symétrique par rapport aux lignes neutres ($\alpha = \pi/4$), l'onde à la sortie de la lame est polarisée circulairement.



4. ACTIVITÉ OPTIQUE

4.1. Définition

Le pouvoir rotatoire ou activité optique est une propriété de certains composés, dits actifs, qui font tourner la direction du champ électrique dans le plan d'onde. Cette propriété est observée pour certains cristaux comme le quartz, ou pour certaines solutions, de sucre (saccharose) par exemple.

4.2. Loi de Biot

L'angle dont tourne la direction de polarisation en traversant une substance optiquement active est proportionnelle à la longueur de substance traversée. Cette loi est appelée **loi de Biot** et s'écrit, de façon générique :

$$\alpha = K L$$

α est l'angle dont tourne la direction de polarisation de la lumière traversant une épaisseur L de substance optiquement active. La constante K dépend de la nature de la substance.

Il est possible de préciser les caractéristiques de K suivant la nature du milieu :

- pour un cristal,

$$K = \rho_\lambda$$

où ρ_λ est le pouvoir rotatoire caractéristique du cristal pour la longueur d'onde λ ;

- pour un liquide ou un gaz (par exemple l'essence de térébenthine ou les vapeurs de camphre),

$$K = [\alpha]_\lambda \mu$$

où $[\alpha]_\lambda$ est le pouvoir rotatoire spécifique pour la longueur d'onde λ et μ la masse volumique du fluide ;

- pour une solution (de sucres ou d'acide tartrique par exemple),

$$K = \sum_i [\alpha]_\lambda^i c_i$$

où $[\alpha]_\lambda^i$ est le pouvoir rotatoire spécifique du composé i en solution pour la longueur d'onde λ et c_i sa concentration.

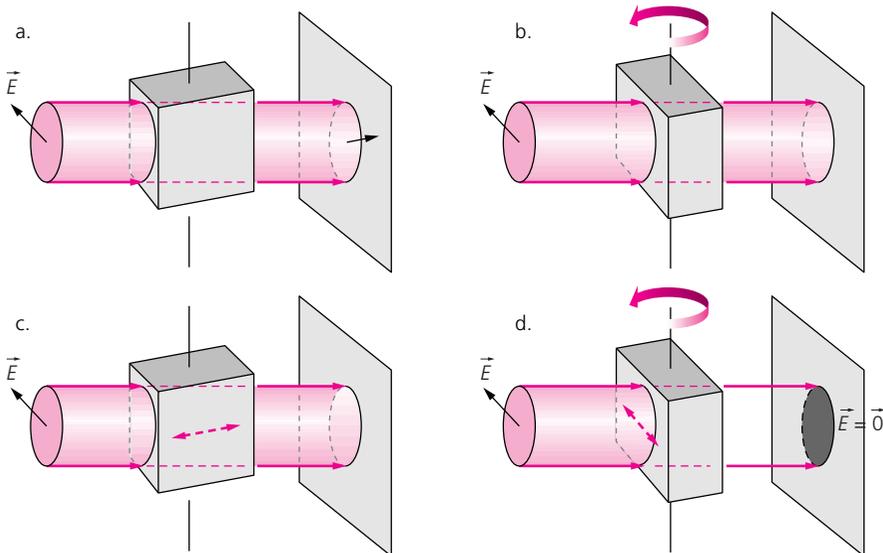
Exercice 1 Comment distinguer le dichroïsme et le pouvoir rotatoire ?

Comment faire la différence entre un matériau doté d'un pouvoir rotatoire et un matériau dichroïque, les deux modifiant la direction de polarisation d'une onde lumineuse qui les traverse ?

Solution

La rotation du vecteur champ électrique lorsque la lumière traverse une substance dotée d'un pouvoir rotatoire ne dépend pas de l'orientation du champ électrique de l'onde incidente ; notamment, le champ électrique conserve son amplitude. En revanche, la modification de l'orientation de la polarisation due à un matériau dichroïque correspond à l'annulation d'une des composantes de ce champ (il y a extinction lorsque le champ incident est orienté selon la direction d'extinction, caractéristique du matériau)."

Ainsi, si on fait tourner le matériau optiquement actif, l'intensité lumineuse recueillie reste constante (figures (a) et (b) ci-dessous) tandis qu'on peut observer l'extinction en faisant tourner un matériau dichroïque (figures (c) et (d) ci-dessous : la flèche de couleur indique la direction d'extinction).



Exercice 2 Décomposition d'une onde polarisée rectilignement

1. Donner le champ électrique associé à une onde plane monochromatique à polarisation rectiligne.
2. Écrire cette onde comme la superposition de deux ondes à polarisations rectilignes orthogonales. Commenter.
3. Écrire cette onde comme la superposition de deux ondes à polarisations circulaires de sens opposés.

Solution

CONSEIL : dans la première question, il faut traduire deux propriétés, le caractère plan de l'onde (le vecteur d'onde est constant au cours de la propagation) et la polarisation rectiligne (le champ électrique est constant au cours de la propagation). La deuxième question n'est pas très difficile : une solution, un peu facile mais correcte, serait de répondre qu'une onde à polarisation rectiligne est la somme de deux ondes à polarisations rectilignes perpendiculaires : elle-même et une onde à polarisation rectiligne d'amplitude nulle. Nous vous proposons une autre famille de solution, ce qui prouve que cette décomposition n'est pas unique. Dans la troisième question en revanche, la réponse est unique, c'est-à-dire que la décomposition d'une onde plane à polarisation rectiligne s'écrit de façon unique comme la somme de deux ondes à polarisation circulaire ; il s'agit d'une astuce d'écriture, que nous soumettons à votre sagacité !

1. Le champ électrique associé à une onde plane monochromatique à polarisation rectiligne s'écrit, dans le plan d'onde ($O ; x, y$) perpendiculaire à la direction de propagation :

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(kz - \omega t) \\ \sin \theta \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

2. On peut simplement écrire cette onde comme la superposition de deux ondes à polarisation rectiligne, l'une \vec{E}_1 portée par Ox et l'autre \vec{E}_2 par Oy :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{E}_1} + E_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix}}_{\vec{E}_2}$$

Remarquons qu'il existe une infinité de décompositions possibles de ce vecteur : il suffit de le projeter dans deux directions perpendiculaires contenues dans le plan d'onde.

3. La décomposition en deux ondes circulaires est cette fois unique :

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \theta) \\ \sin(kz - \omega t + \theta) \end{pmatrix}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t - \theta) \\ \sin(kz - \omega t - \theta) \end{pmatrix}}_{\vec{E}_2}$$

C'est la somme d'une onde circulaire gauche et d'une onde circulaire droite dont les champs électriques ont même amplitude.

Exercice 3 Décomposition d'une onde polarisée elliptiquement

1. Écrire le champ électrique associé à une onde plane monochromatique à polarisation elliptique.
2. Écrire cette onde comme la superposition de deux ondes à polarisation circulaire. Représenter les polarisations correspondantes.

Solution

CONSEIL : comme dans l'exercice précédent, on se propose dans cet exercice d'écrire une onde, ici à polarisation elliptique, comme la somme de deux ondes de polarisations différentes (ici, la somme de deux polarisations circulaires). Si la première question ne pose pas de problème (il s'agit d'une application directe du cours), la seconde nécessite une astuce d'écriture.

1. Une onde plane monochromatique à polarisation elliptique a un vecteur champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(kz - \omega t) \\ \sin \theta \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}$$

2. On peut écrire cette onde comme la somme de deux ondes à polarisation circulaire :

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{E_0}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\frac{E_0}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}}_{\vec{E}_2}$$

C'est la somme d'une onde circulaire gauche et d'une onde circulaire droite dont les champs électriques ont des amplitudes différentes : si on note L et l les longueurs des grand et petit axes de l'ellipse décrite par l'extrémité du champ \vec{E} , la polarisation de l'onde circulaire gauche a une amplitude égale à $(L + l)/2$ et celle de l'onde droite a une amplitude égale à $(L - l)/2$.

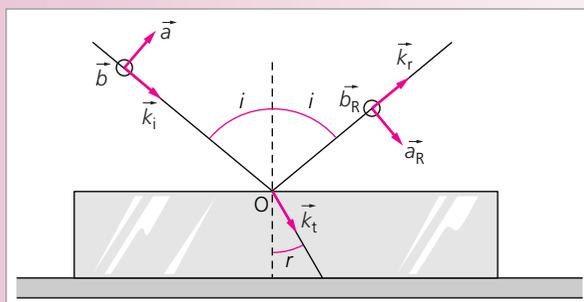
Exercice 4 Polarisation rectiligne par réflexion vitreuse.

Incidence brewsterienne

On considère la réflexion d'un faisceau de lumière non polarisé sur une lame de verre d'indice n . a et b sont les composantes du champ électrique incident, respectivement dans le plan et perpendiculairement au plan d'incidence. La théorie électromagnétique permet d'exprimer les amplitudes des composantes du champ réfléchi a_R dans le plan d'incidence, et b_R dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence, en fonction de a et b . On obtient les formules dites de Fresnel :

$$a_R = a \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)} \quad b_R = -b \frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}$$

où i est l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction.



1. Montrer qu'il existe une incidence particulière, qu'on notera i_B (incidence de Brewster), pour laquelle la vibration dans le plan d'incidence est supprimée. Calculer i_B pour $n = 1,5$. Que peut-on dire de la lumière réfléchie ?

2. Montrer que sous incidence de Brewster, les rayons réfléchi et réfracté sont perpendiculaires.

Solution

CONSEIL : cet exercice porte sur la polarisation rectiligne par réflexion ; il s'agit presque d'une question de cours. Si cette méthode de polarisation n'est pas à votre programme, qu'importe ! vous avez tous les éléments pour répondre aux questions posées.

1. La vibration dans le plan d'incidence est supprimée si, quelle que soit l'amplitude de la vibration incidente a , l'amplitude a_R est nulle, c'est-à-dire si :

$$\sin(i - r) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(i + r) = 0$$

avec $\cos(i - r)$ et $\sin(i + r)$ non nuls et, d'après la loi de réfraction de Descartes, $\sin i = n \sin r$. On ne retient pas la solution $\sin(i - r) = 0$ qui conduit à $i = r$, soit $i = r = 0^\circ$. Un développement limité au voisinage de $i = r = 0$ donne :

$$\frac{a_R}{a} = -\frac{b_R}{b} = \frac{n - 1}{n + 1}$$

ce qui montre que a_R est non nul en incidence normale.

La solution $\cos(i + r) = 0$ conduit à la valeur de l'angle de Brewster i_B tel que $i_B + r = \pi/2$.

Avec :

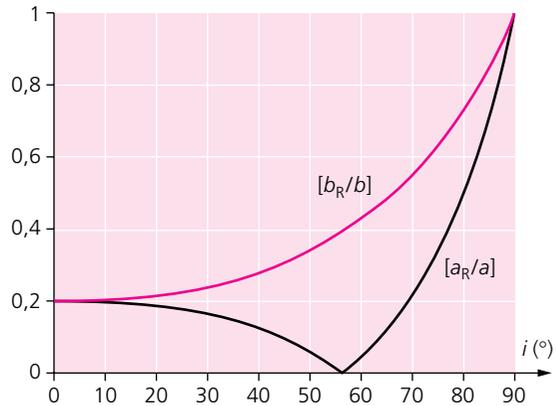
$$\sin i_B = n \sin(\pi/2 - i_B) = n \cos i_B$$

on obtient donc :

$$i_B = \arctan(n)$$

Sous incidence de Brewster, l'onde réfléchie est polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence : c'est une méthode pour polariser la lumière naturelle.

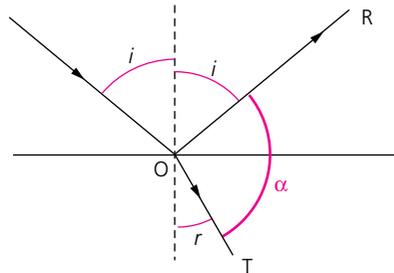
La courbe ci-contre montre les variations de $|a_R|$ (en noir) et $|b_R|$ (en couleur) en fonction de l'angle d'incidence i pour $n = 1,5$ (indice du verre) ; l'angle de Brewster est alors égal à $56,31^\circ$.



2. Notons α l'angle formé par le rayon réfléchi OR et le rayon réfracté OT.

Les trois angles i , r et α sont reliés par la relation : $i + \alpha + r = \pi$. Pour l'incidence de Brewster i_B , on a, d'après la question 1, $i_B + r = \pi/2$. D'où :

$$\alpha = \pi/2$$



Les rayons réfracté OT et réfléchi OR forment un angle de $\pi/2$: ils sont donc perpendiculaires.

Exercice 5 Polarimètre de Laurent.

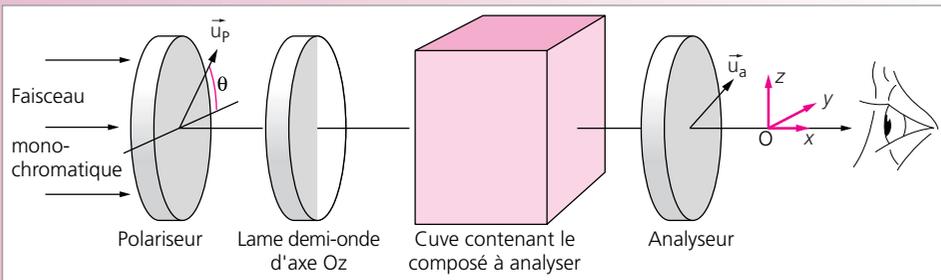
Précision de la mesure angulaire

Voici le principe du polarimètre de Laurent.

Un faisceau de lumière monochromatique de polarisation aléatoire traverse un polariseur ; le faisceau de lumière polarisée à la sortie du polariseur traverse une pastille formée dans sa première moitié d'une lame demi-onde (dont l'axe optique Δ est porté par l'axe z) et dans sa seconde moitié d'un verre (non biréfringent). Cette pastille génère une onde polarisée La direction u_p du polariseur fait un angle θ avec la direction Oy . Les deux demi faisceaux, celui qui a traversé la lame demi-onde (partie gauche) et celui qui a traversé le verre non biréfringent (partie droite), traversent alors la cuve pleine puis tombent sur un analyseur. L'observateur compare les intensités des deux demi-faisceaux à la sortie de l'analyseur.

Dans un réglage préliminaire en l'absence de la cuve, l'égalité de pénombre est obtenue à la sortie de l'analyseur. La mesure de l'angle α dont a tourné le plan de polarisation, une fois la cuve insérée, est déterminée en faisant tourner l'analyseur de façon à retrouver l'égalité de pénombre.

On suppose θ supérieur à 45° .



1. Préciser la relation entre l'angle α et l'angle β dont on fait tourner l'analyseur pour retrouver l'égalité de pénombre.

2. On note I_0 l'intensité lumineuse à la sortie de l'analyseur lorsque l'égalité de pénombre est obtenue. Lorsque l'équipénombre n'est pas réalisée, on note I_1 l'intensité du faisceau issu de l'analyseur dans la partie droite, et I_2 dans la partie gauche. Calculer le contraste C , défini par :

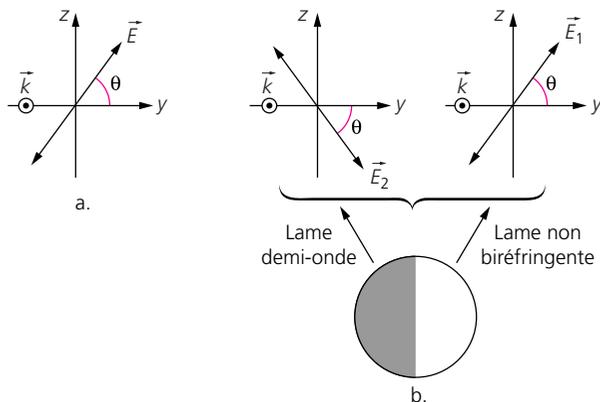
$$C = \frac{I_2 - I_1}{I_0}$$

3. Si l'œil peut déceler un contraste minimum de 3 %, déterminer la précision angulaire lors de la recherche de l'équipénombre. Donner l'allure de l'erreur en fonction de θ et faire l'application numérique pour $\theta = 80^\circ$. Quel angle θ entre le polariseur et l'axe Oy a-t-on intérêt à choisir ?

Solution

CONSEIL : cet exercice porte sur le principe de fonctionnement du polarimètre de Laurent, dispositif qui permet de mesurer l'activité optique (ou pouvoir rotatoire) d'une substance.

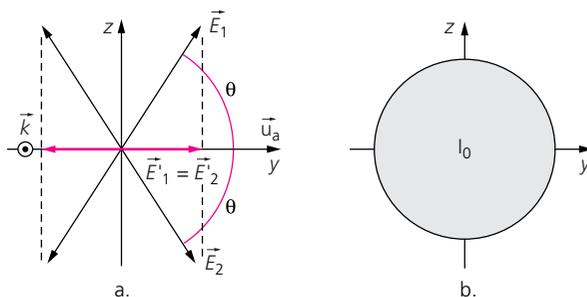
1. À la sortie du polariseur, le champ \vec{E} est polarisé dans une direction faisant un angle θ avec l'axe Oy . À la sortie de la lame demi-onde (partie gauche), le champ \vec{E}_2 est « symétrisé » par rapport l'axe Oy , perpendiculaire à l'axe optique.



La figure ci-dessus donne le champ électrique \vec{E} dans le plan d'onde, (a) \vec{E}_2 à la sortie du polariseur et (b) $\vec{E}_1 = \vec{E}$ à la sortie de la pastille.

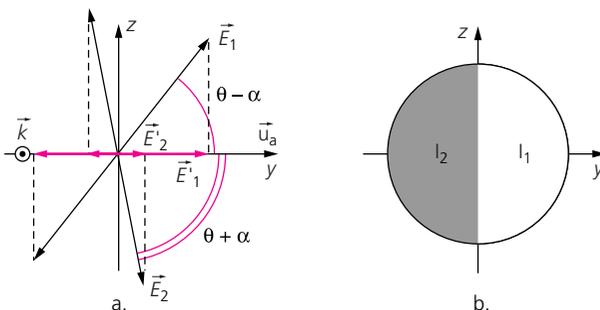
• Lors du réglage préliminaire, l'égalité de pénombre est obtenue lorsque la direction de l'analyseur est portée par l'axe y (avec θ supérieur à 45°).

La figure (a) ci-contre représente, lors du réglage préliminaire sans la cuve, les champs (\vec{E}_1 et \vec{E}_2) avant l'analyseur et (\vec{E}'_1 et \vec{E}'_2) après l'analyseur sur les deux moitiés de lame. La figure (b) illustre l'égalité des intensités lumineuses pour un observateur placé derrière l'analyseur.



• Lorsqu'on ajoute la cuve contenant la substance active, les plans de polarisation des deux ondes (\vec{E}_1 et \vec{E}_2) tournent d'un angle α : l'égalité de pénombre est perdue.

La figure (a) ci-contre représente, une fois la cuve insérée, les champs (\vec{E}_1 et \vec{E}_2) avant l'analyseur et (\vec{E}'_1 et \vec{E}'_2) après l'analyseur sur les deux moitiés de lame. La figure (b) illustre la perte de l'égalité d'intensité pour un observateur placé derrière l'analyseur.

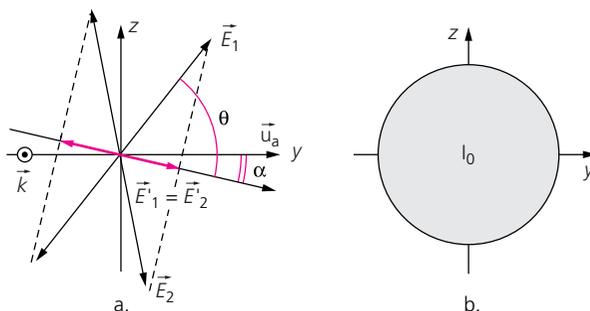


Pour retrouver l'équipénombre, il faut faire tourner l'analyseur d'un angle β égal à α .

La figure (a) ci-contre représente, le réglage étant fait, les champs (\vec{E}_1 et \vec{E}_2) avant l'analyseur et (\vec{E}'_1 et \vec{E}'_2) après l'analyseur sur les deux moitiés de lame. La figure (b) illustre l'égalité d'intensité (retrouvée!) pour un observateur placé derrière l'analyseur.

On a donc :

$$\beta = \alpha$$

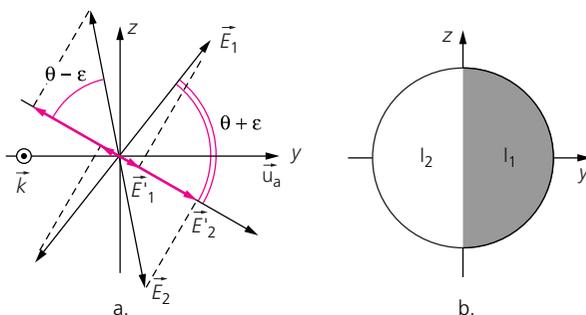


2. Lorsque l'équipénombre est réalisée, on est dans le cas de la figure précédente. L'intensité incidente I étant donnée ($I = |E_1|^2 = |E_2|^2$), on a d'après la loi de Malus :

$$I_0 = I \cos^2 \theta$$

Lorsque l'équipénombre n'est pas réalisée, on note ε l'angle entre la position de l'analyseur réalisant l'équipénombre et la position considérée.

Considérons une position de l'analyseur faisant un angle égal à ε par rapport à la position réalisant l'équipénombre. La figure (a) ci-contre représente les champs (\vec{E}_1 et \vec{E}_2) avant l'analyseur et (\vec{E}'_1 et \vec{E}'_2) après l'analyseur sur les deux moitiés de lame. La figure (b) illustre l'égalité des intensités lumineuses pour un observateur placé derrière l'analyseur.



\vec{E}'_1 (resp. \vec{E}'_2) fait un angle $\theta + \varepsilon$ (resp. $\theta - \varepsilon$) avec la direction de l'analyseur. La loi de Malus donne donc :

$$I_1 = I \cos^2(\theta + \varepsilon)$$

$$I_2 = I \cos^2(\theta - \varepsilon)$$

Le contraste C est ainsi égal à :

$$C = \frac{\cos^2(\theta - \varepsilon) - \cos^2(\theta + \varepsilon)}{\cos^2 \theta} = 4 \tan \theta \cos \varepsilon \sin \varepsilon$$

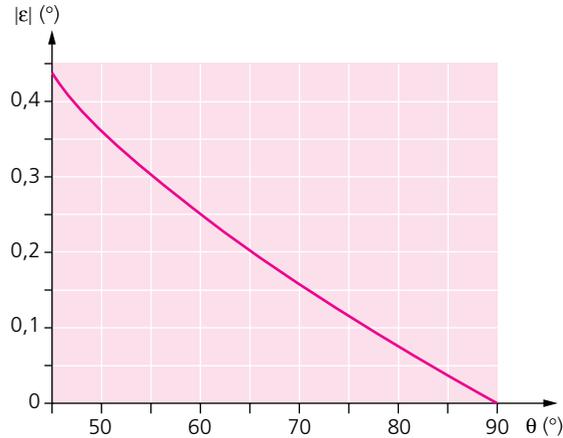
$$C = 2 \tan \theta \sin 2\varepsilon$$

3. L'œil peut déceler un contraste minimum C_{\min} de 3 %. La direction de l'analyseur peut donc varier de ε autour de la position réelle donnant l'équipénombre sans que l'œil puisse distinguer les variations correspondantes des intensités I_1 et I_2 .

La valeur de ε se déduit de la question précédente; ε étant faible, la relation $C = 2 \tan \theta \sin 2\varepsilon$ s'écrit, au premier ordre :

$$\varepsilon \approx \frac{C_{\min}}{4 \tan \theta}$$

La courbe $\varepsilon(\theta)$ est donnée ci-dessous :



Pour $\theta = 80^\circ$, on obtient :

$$\varepsilon = 0,0013 \text{ rad} = 0,076^\circ$$

La courbe montre qu'on a intérêt à choisir θ voisin de 90° , ce qui minimise l'erreur absolue ε sur la détermination de l'angle α .

Exercice 6 Polarimétrie. Polarimètre de Laurent

On étudie à l'aide d'un polarimètre de Laurent une substance dextrogyre. La cuve polarimétrique a une longueur L de 20 cm. Pour différentes concentrations, on mesure l'angle α dont il faut faire tourner l'analyseur pour retrouver l'égalité de pénombre.

Les résultats de l'expérience sont donnés dans le tableau ci-dessous :

C (g/l)	20	40	60	80	100
α (°)	2,2	4,7	7,2	9,7	12,2

- Déterminer le pouvoir rotatoire spécifique de la substance analysée.
- Quelle concentration du même soluté permettrait de faire tourner le plan de polarisation d'un angle de 8° dans une cuve deux fois plus longue ?

Solution

CONSEIL : cet exercice suppose qu'on connaisse le principe de fonctionnement d'un polarimètre de Laurent ; nous vous renvoyons donc à l'exercice précédent si ce n'est pas le cas.

Pour déterminer le pouvoir rotatoire de la substance analysée, il faut simplement utiliser la loi de Biot, qui relie l'angle α au pouvoir spécifique, à la longueur de la cuve et la concentration de la substance. La seconde question renvoie à cette même loi, utilisée cette fois en connaissant le pouvoir rotatoire, la longueur de la cuve et l'angle α : la concentration apparaît comme la seule inconnue !

1. La loi de Biot pour une substance en solution s'écrit : $\alpha = [\alpha]LC$, où $[\alpha]$ est le pouvoir rotatoire spécifique de la substance à analyser, L la longueur de la cuve et C la concentration de la substance en solution.

La courbe ci-dessous confirme la loi de Biot : l'angle α est une fonction linéaire de la concentration C . L'équation de la droite est donnée par :

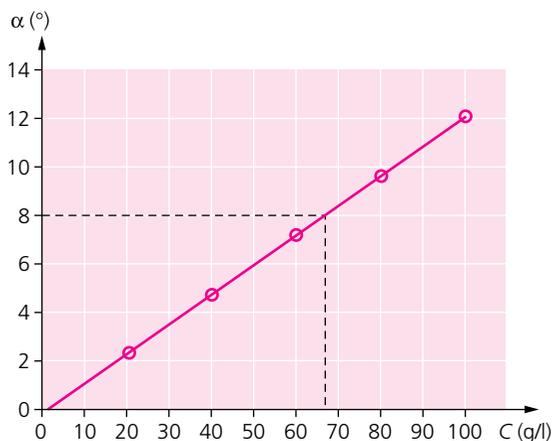
$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta c} (c - c_1) + \alpha_1$$

où $(\alpha_1 ; c_1)$ sont deux valeurs particulières de l'angle et la concentration, par exemple $(2,2^\circ ; 20 \text{ g}\cdot\text{l}^{-1})$.

La pente de la droite est donnée par $p = \frac{\Delta\alpha}{\Delta c} = \frac{12,2 - 2,2}{100 - 20} \text{ }^\circ \cdot \text{l}\cdot\text{g}^{-1} = 0,125 \text{ }^\circ \cdot \text{l}\cdot\text{g}^{-1}$.

On en déduit l'équation de la droite $\alpha(C)$ (α en $^\circ$ et C en $\text{g}\cdot\text{l}^{-1}$) :

$$\alpha = 0,125C - 0,3$$



La pente de la courbe est égale, d'après la loi de Biot, à $[\alpha] L$. Avec $L = 20 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$, il vient :

$$[\alpha] = p/L = 0,0625 \text{ }^\circ \cdot \text{dm}^2 \cdot \text{g}^{-1} = 6,25 \text{ }^\circ \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$$

2. La courbe définie en 1. permet de calculer la valeur de la concentration C qui fait tourner d'un angle de 8° le plan de polarisation dans une cuve de 20 cm de long : $\alpha = 0,125C - 0,3 = 8$ donne $C = 61,6 \text{ g}\cdot\text{l}^{-1}$.

Dans une cuve deux fois plus longue, la concentration nécessaire est deux fois plus faible, soit pour une cuve de 40 cm de long :

$$C = 30,8 \text{ g}\cdot\text{l}^{-1}$$

Exercice 7 Diminution de l'intensité lumineuse à travers des filtres

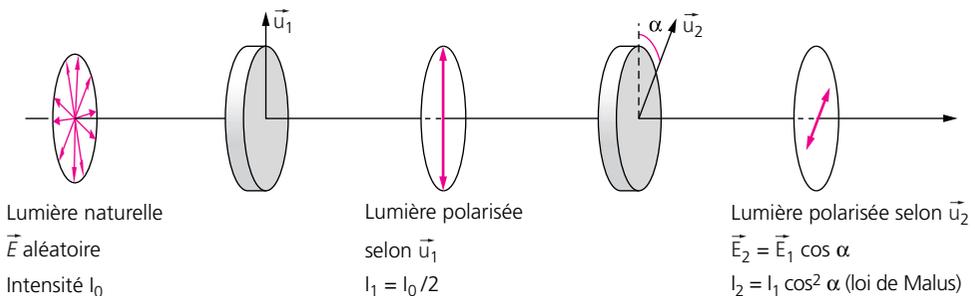
Un faisceau lumineux de polarisation aléatoire et d'intensité $I_0 = 10 \text{ W/m}^2$ traverse deux filtres Polaroid : un premier d'axe vertical et un second dont l'axe fait un angle $\alpha = 60^\circ$ avec la verticale. On note I_1 l'intensité en sortie du premier filtre et I_2 l'intensité en sortie du second filtre.

1. Exprimer l'intensité I_2 en sortie du second filtre en fonction de I_1 .
2. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .
3. En déduire I_2 en fonction de I_0 .

Solution

CONSEIL : la lumière incidente sur le premier filtre n'est pas polarisée ; l'intensité de l'onde émergente polarisée dans la direction du filtre a donc une intensité deux fois plus faible. Cette onde rencontre alors le second filtre ; on utilisera simplement la loi de Malus puisque l'onde incidente est cette fois polarisée.

Représentons les variations du champ électrique et de l'intensité lumineuse lors de la propagation de la lumière à travers les deux filtres.



1. La loi de Malus permet d'exprimer l'intensité du faisceau à la sortie du second polariseur puisque le faisceau incident sur le polariseur est polarisé. Avec α l'angle entre la direction de polarisation du faisceau incident et celle du polariseur, on a :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

2. Ici, la loi de Malus n'est pas directement applicable car le faisceau incident n'est pas polarisé (il faut moyenner sur toutes les directions du champ dans la lumière naturelle). La moyenne de la fonction \cos^2 étant égale à $1/2$, on a donc :

$$I_1 = I_0/2$$

3. Les deux relations précédentes donnent finalement :

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha = 1,25 \text{ W/m}^2$$

Exercice 8 Détermination de l'angle entre deux filtres

Un faisceau de lumière non polarisée qui passe à travers deux filtres Polaroid voit son intensité se réduire d'un facteur p égal à 90 %. Quel est l'angle entre les axes des filtres ?

Solution

CONSEIL : avant de résoudre cet exercice, il est préférable de traiter le précédent, c'est son petit-frère !

Reprenons l'exercice précédent. Avec α l'angle entre les axes des filtres, on a :

$$I' = \frac{I}{2} \cos^2 \alpha$$

où I' est l'intensité du faisceau issu des deux filtres et I l'intensité du faisceau incident.

Avec $\frac{I - I'}{I} = p = 90 \%$, on en déduit :

$$\alpha = \arccos \sqrt{2(1 - p)}$$

A.N. $\alpha = 63,4^\circ$.

Exercice 9 Filtrés Polaroid

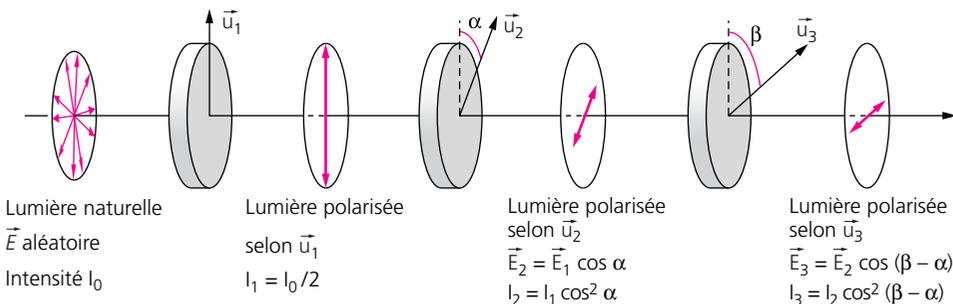
Un faisceau de lumière non polarisée passe à travers trois filtres. Le premier a son axe disposé verticalement, le deuxième à 30° de la verticale et le troisième à 60° de la verticale, soit à 30° du deuxième.

1. Quelle est l'intensité transmise à travers les trois filtres ?
2. Même question si le deuxième et le troisième filtre sont intervertis sans modifier leur orientation.

Solution

CONSEIL : comme dans les exercices précédents, on utilise ici deux résultats : une lumière non polarisée qui traverse un filtre voit son intensité diminuée de moitié ; une lumière polarisée qui traverse un filtre voit son intensité modifiée suivant la loi de Malus.

1. À travers les trois filtres, les variations du champ électrique et les intensités lumineuses sont données sur la figure ci-dessous :



- À travers le premier filtre, l'intensité est réduite de moitié :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

- À travers le deuxième filtre, la loi de Malus donne :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha$$

- À travers le troisième filtre, la loi de Malus s'applique à nouveau :

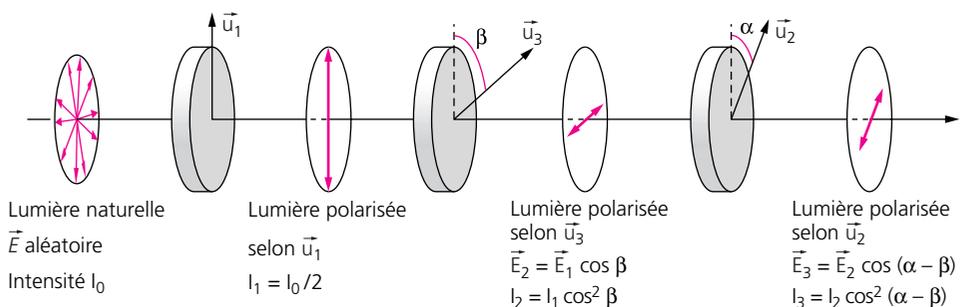
$$I_3 = I_2 \cos^2(\beta - \alpha) = \frac{I_0}{2} \cos^2(\beta - \alpha) \cos^2 \alpha$$

Avec $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 60^\circ$, on obtient finalement :

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^4 30^\circ = 28,13 \%$$

28,13 % de l'intensité est donc transmis.

2. Si on inverse les filtres 2 et 3, on observe les variations du champ électrique et de l'intensité lumineuse indiquées sur la figure ci-dessous :



- À travers le premier filtre, l'intensité est réduite de moitié :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

- À travers le deuxième filtre, la loi de Malus donne :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \beta = \frac{I_0}{2} \cos^2 \beta$$

- À travers le troisième filtre, la loi de Malus s'applique à nouveau :

$$I_3 = I_2 \cos^2(\beta - \alpha) = \frac{I_0}{2} \cos^2 \beta \cos^2(\beta - \alpha)$$

Il vient donc :

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ = 9,375 \%$$

On en déduit que la valeur de l'intensité transmise dépend de l'ordre des filtres.

Exercice 10 Détermination du pouvoir rotatoire du quartz

Un faisceau de lumière monochromatique non polarisée d'intensité $I_0 = 20 \text{ W/m}^2$ traverse deux filtres Polaroid disposés perpendiculairement : l'axe du premier filtre (le polariseur) est vertical, l'axe du second filtre (l'analyseur) est horizontal.

1. Quelle est l'intensité mesurée en sortie des deux filtres ?

On insère alors une lame de quartz d'épaisseur $e = 2 \text{ mm}$ entre le polariseur et l'analyseur, et on observe qu'il faut faire tourner l'axe de l'analyseur d'un angle $\alpha = 42^\circ$ vers la droite pour que l'intensité reçue en sortie soit nulle.

2. Quelle est l'angle de rotation du plan de polarisation du champ électrique à travers le quartz, en admettant que cet angle est compris entre 0° et 90° ?

3. Que vaut l'intensité lumineuse reçue en sortie avant rotation de l'analyseur ?

L'angle de rotation du champ électrique varie avec l'épaisseur e de quartz traversée suivant la loi de Biot : $\alpha = \rho e$, où ρ est le pouvoir rotatoire du quartz.

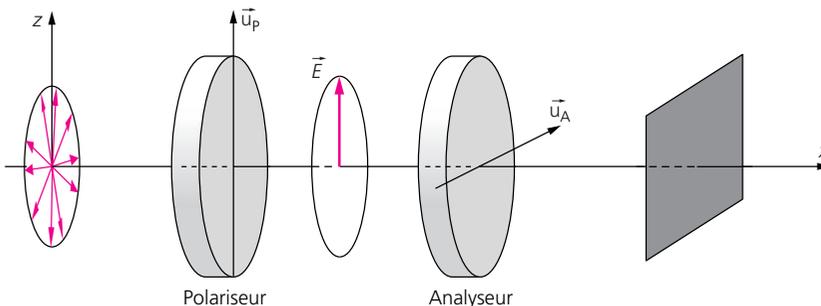
4. Quelle est la valeur numérique de ρ ?

5. En partant de la situation initiale polariseur et analyseur croisés, pour quelle épaisseur minimale (non nulle) du quartz l'intensité lumineuse en sortie serait nulle sans qu'il soit nécessaire de faire tourner l'analyseur ?

Solution

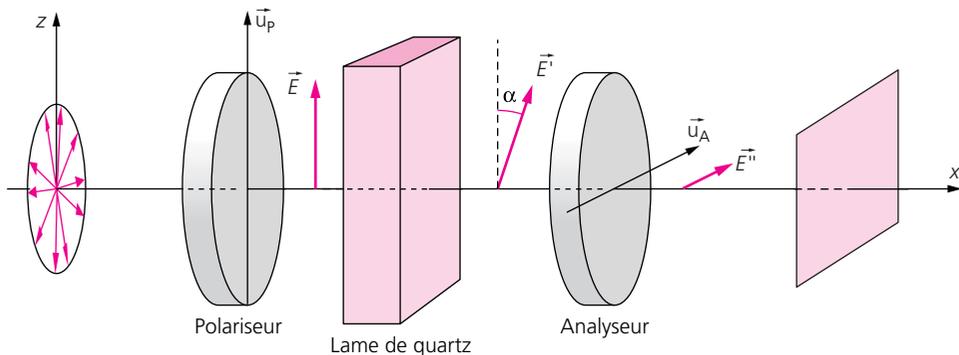
CONSEIL : une petite variante dans cet exercice par rapport aux trois précédents : l'introduction d'une lame de quartz, optiquement active. En faisant tourner la direction de polarisation du champ émergent du polariseur, elle modifie l'intensité de l'onde émergent de l'analyseur (par rapport à la situation sans lame) puisque l'angle entre le champ incident et l'analyseur est modifié (loi de Malus).

1. Le montage sans la lame de quartz est représenté ci-dessous :



À la sortie du polariseur, l'onde est polarisée suivant \vec{u}_p , son intensité est $I_1 = I_0/2 = 10 \text{ W/m}^2$. L'analyseur et le polariseur étant croisés, la direction \vec{u}_A est orthogonale à \vec{E} : le champ électrique est nul à la sortie de l'analyseur. L'intensité lumineuse à la sortie de l'analyseur est donc également nulle.

2. Lorsqu'on insère entre le polariseur et l'analyseur la lame de quartz, optiquement active, le plan de polarisation tourne d'un angle α' au passage de la lame. Le champ électrique \vec{E}' à l'entrée de l'analyseur n'est plus perpendiculaire à la direction \vec{u}_A de l'analyseur : la pénombre est perdue (\vec{E}'' à la sortie de l'analyseur est nul, voir p. suivante).



Pour rétablir la pénombre, il faut tourner l'analyseur de l'angle α de façon à retrouver la perpendicularité entre \vec{E}' et \vec{u}_A , soit $\alpha' = \alpha = 42^\circ$.

3. Nous avons vu dans la première question que l'intensité lumineuse à la sortie du polariseur est égale à $I_1 = I_0/2$. La lumière garde la même intensité lumineuse après avoir traversé la lame de quartz. L'intensité lumineuse avant rotation de l'analyseur est donnée par la loi de Malus, le champ \vec{E}' à la sortie de la lame de quartz faisant un angle égal à $\beta = \pi/2 - \alpha$ avec la direction \vec{u}_A de l'analyseur :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \beta = \frac{I_0}{2} \sin^2 \alpha = 4,48 \text{ W/m}^2$$

4. Appliquons la loi de Biot :

$$\alpha = \rho e$$

avec $\alpha = 42^\circ$ et $e = 2 \text{ mm}$, il vient : $\rho = 21^\circ/\text{mm}$.

5. L'intensité lumineuse en sortie de l'analyseur sera nulle si la lame de quartz fait tourner le champ électrique de $n180^\circ$ (avec n entier). L'épaisseur minimale e_0 est donnée par la loi de Biot :

$$e_0 = \frac{180}{\rho} = 8,6 \text{ mm}$$

Exercice 11 Étude de la cinétique de l'hydrolyse du saccharose par polarimétrie

Soit la réaction d'hydrolyse du saccharose S en glucose G et en fructose F :



La cinétique de la réaction est du premier ordre en concentration de saccharose : $-\frac{d[S]}{dt} = k[S]$ (où $[S]$ est la concentration en saccharose et k la constante de vitesse de la réaction) et s'accompagne d'une modification du pouvoir rotatoire de la solution. Il est donc possible d'étudier cette cinétique par polarimétrie, à l'aide d'un polarimètre de Laurent.

1. Rappeler l'action d'une lame demi-onde uniaxe sur une onde polarisée rectilignement.

On prépare une solution de saccharose, de concentration initiale en saccharose c_0 , additionnée d'acide chlorhydrique servant de catalyseur. On mesure au cours du temps l'angle $\alpha(t)$ de rotation du plan de polarisation de la lumière à travers la solution (on note l la longueur de la colonne liquide traversée).

t (min)	0	7,18	18	27,05	36,80	56,07	101,70
α (°)	24,09	21,405	17,73	15	12,40	7,80	0,30

On note $\alpha_\infty = -10,74^\circ$ la limite de α quand $t \rightarrow \infty$.

On rappelle la loi de Biot : $\alpha = \sum_i ([\alpha_i]c_i)L$, où $[\alpha_i]$ est le pouvoir rotatoire de la substance i active en solution, c_i sa concentration, et L la longueur de la colonne liquide traversée par la lumière.

Soit $c = c_0 - x$ la concentration de saccharose au temps t .

- Exprimer $\alpha(t)$ en fonction de L , c_0 , x , $[\alpha_S]$, $[\alpha_G]$ et $[\alpha_F]$.
- Exprimer de même les valeurs α_0 et α_∞ de l'angle α aux temps $t = 0$ et $t = \infty$.
- En déduire x en fonction de α , α_0 , α_∞ , et c_0 .
- Quelle est l'équation différentielle satisfaite par x ?
- Intégrer l'équation de vitesse de réaction et en déduire une expression de x en fonction du temps, puis de α en fonction du temps.
- En déduire l'expression du produit kt en fonction de α .
- Proposer une méthode pour calculer la constante de vitesse k .
- Calculer k à partir des valeurs du tableau ci-dessus et en déduire le temps T de demi-réaction.

Solution

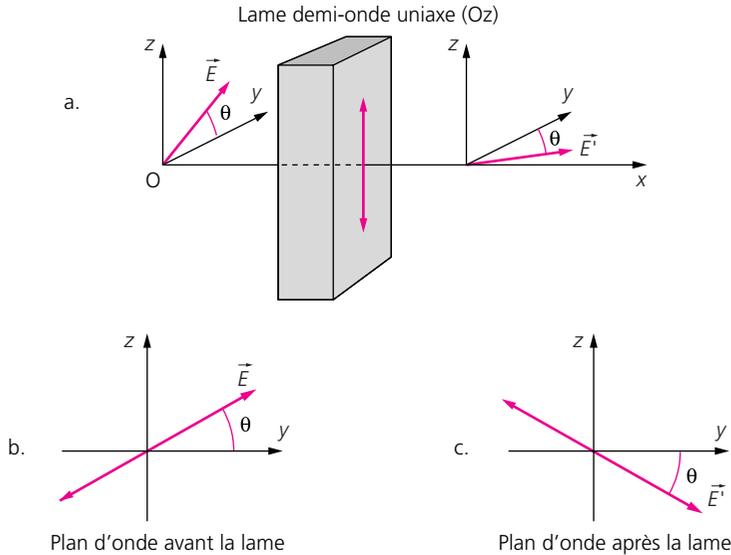
CONSEIL : l'originalité de cet exercice vient du fait que le polarimètre de Laurent est utilisé comme instrument de mesure, non pas seulement pour mesurer le pouvoir rotatoire d'une solution mais pour étudier la cinétique d'une réaction chimique, au cours de laquelle du saccharose est consommé pour former du glucose et du fructose. Si vos connaissances en cinétique chimique sont vagues, on retiendra simplement que l'on cherche à déterminer une constante k (appelée constante de vitesse) qui est l'inverse du temps caractéristique de disparition du saccharose ; on a donc besoin de connaître la loi de variation de la concentration $[S]$ en fonction du temps.

Pour le physicien, on retiendra également que l'activité optique de l'ensemble des trois produits a priori actifs (l'eau ne l'est pas) change au cours du temps car la concentration de chacun des constituants varie ; ainsi, si on arrive à relier l'angle α mesuré par le polarimètre de Laurent (nous vous renvoyons à l'exercice 5 pour le fonctionnement du polarimètre) à la concentration $[S]$, le tour est joué !

Remarquons que le pouvoir rotatoire de chacun des constituants n'est pas donné, ce qui signifie qu'ils interviennent dans les équations intermédiaires mais pas dans le résultat final.

1. Une lame demi-onde d'axe z « symétrise » l'état de polarisation d'une onde par rapport à la direction perpendiculaire à son axe optique.

La figure page suivante montre la modification du champ électrique avant et après la lame demi-onde d'axe Oz (a), ainsi que les champs électriques dans le plan d'onde avant la lame (b) et dans le plan d'onde après la lame (c).



2. Le pouvoir rotatoire de la solution s'exprime comme la somme des pouvoirs rotatoires de chacun des solutés :

$$\alpha = \sum_i ([\alpha_i] c_i) L$$

Lors de l'hydrolyse du saccharose, une mole de saccharose S consommée fournit une mole de fructose F et une mole de glucose G . Si $[S] = c_0 - x$ désigne la concentration de saccharose à un instant t donné (c_0 est la concentration initiale de saccharose), on a :

$$[F] = [G] = x$$

D'où :

$$\alpha(t) = (c_0 - x) L [\alpha_S] + x L ([\alpha_G] + [\alpha_F])$$

3. À $t = 0$, la réaction s'amorce : $x = 0$. On en déduit la valeur de α_0 :

$$\alpha_0 = c_0 L [\alpha_S]$$

Si on attend suffisamment longtemps (t tend vers l'infini), la réaction est totale et x tend vers c_0 . On a donc :

$$\alpha_\infty = c_0 L ([\alpha_G] + [\alpha_F])$$

4. Les deux questions précédentes permettent d'exprimer x en fonction de α , α_0 , α_∞ et c_0 . En effet, on a :

$$\alpha(t) = (c_0 - x) \frac{\alpha_0}{c_0} + x \frac{\alpha_\infty}{c_0}$$

$$x = c_0 \frac{\alpha(t) - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha_0}$$

5. La vitesse de la réaction s'écrit $v = -\frac{d[S]}{dt} = k[S]$ puisque la réaction est d'ordre 1 par rapport au saccharose. Avec $[S] = c_0 - x$, on a donc :

$$\frac{dx}{dt} = k(c_0 - x)$$

6. Cette équation différentielle est du premier ordre avec second membre. La solution s'écrit comme la somme de la solution de l'équation sans second membre : $\frac{dx}{dt} + kx = 0$ et de la solution particulière obtenue aux temps longs ($\frac{dx}{dt} = 0$ et $x = c_0$). On a donc :

$$x(t) = c_0 + A \exp(-kt)$$

La constante d'intégration A est déterminée grâce à la condition initiale $x(0) = 0$, soit $c_0 + A = 0$. On a finalement :

$$x(t) = c_0(1 - \exp(-kt))$$

Puisque $x = c_0 \frac{\alpha(t) - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha_0}$, on a :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + (\alpha_\infty - \alpha_0)(1 - \exp(-kt))$$

7. Reprenons l'expression de $\alpha(t)$ et isolons le terme $\exp(-kt)$:

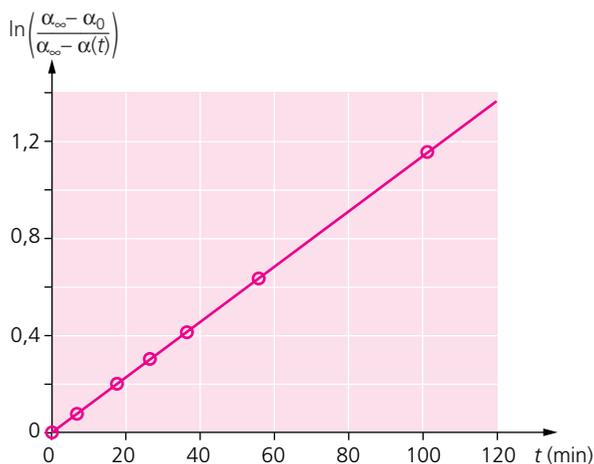
$$\exp(-kt) = \frac{\alpha_\infty - \alpha(t)}{\alpha_\infty - \alpha_0}$$

Prenons le logarithme de cette expression :

$$kt = -\ln\left(\frac{\alpha_\infty - \alpha(t)}{\alpha_\infty - \alpha_0}\right) = \ln\left(\frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha(t)}\right)$$

8. Pour calculer la constante de vitesse de la réaction k , il suffit de mesurer $\alpha(t)$. Il est alors possible de tracer la courbe représentative de $f(t) = \ln\left(\frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha(t)}\right)$. Le calcul mené permet de prévoir que la fonction f est une droite de pente k , constante de vitesse cherchée.

9. La courbe ci-dessous représente $f(t)$ avec les valeurs du tableau :



La constante k est la pente de la courbe. On trouve $k = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}$.

Le temps T de demi-réaction correspond à une concentration en saccharose diminuée de moitié, soit $[S] = c_0/2$ et $x(T) = c_0/2$. On en déduit la valeur de $\alpha(T)$ correspondante :

$$\alpha(T) = c_0/2 \frac{\alpha_0}{c_0} + c_0/2 \frac{\alpha_\infty}{c_0} = \frac{\alpha_0 + \alpha_\infty}{2}$$

La fonction $f(t) = \ln\left(\frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\alpha_\infty - \alpha(t)}\right)$ vaut alors : $f(T) = \ln 2$

On en déduit :

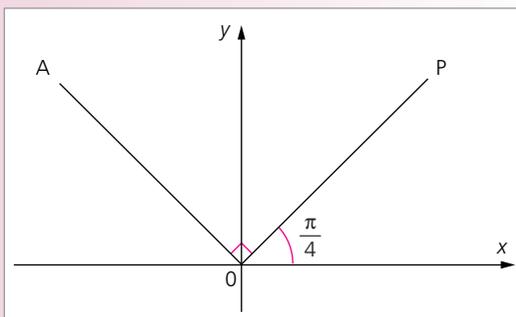
$$T = \ln 2/k \approx 61 \text{ min}$$

Exercice 12 Lumière transmise par une lame entre polariseurs croisés

Un faisceau de lumière blanche traverse un ensemble de deux polariseurs croisés P et A. Entre P et A, on place une lame biréfringente, les faces étant perpendiculaires au faisceau incident et l'axe optique Ox étant disposé par rapport à P comme indiqué ci-contre.

L'épaisseur de la lame est $e = 0,25 \text{ mm}$; les indices ordinaire n_o et extraordinaire n_e sont tels que $n_e - n_o = -0,173$.

On considère l'intervalle de longueurs d'onde comprises entre $0,550$ et $0,581 \mu\text{m}$ et on admet que $\Delta n = n_e - n_o$ est indépendant de λ dans cet intervalle.



1. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles aucune lumière n'émerge de A ?
2. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles la lumière sortant de A a même intensité que celle issue de P ?
3. Quelles sont les longueurs d'onde pour lesquelles la position de A n'influe pas sur l'intensité émergente, c'est-à-dire qu'une rotation quelconque de A ne modifie pas cette intensité issue de A ?

Solution

CONSEIL : pour traiter cet exercice, il faut bien comprendre comment le champ électrique est modifié à chaque étape de la propagation.

• À la sortie du polariseur P, la lumière est polarisée rectilignement dans une direction faisant un angle de $\pi/4$ par rapport à Ox ; l'amplitude du champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$E_x = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \quad E_y = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\omega t}$$

On a également l'intensité lumineuse à la sortie du polariseur :

$$I_P = a^2$$

• Après traversée de la lame, on a :

$$E_x = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \quad E_y = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

avec

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) e \quad (1)$$

• Après traversée de l'analyseur, on obtient le champ (vibrant selon A) en projetant E_x et E_y sur cet axe :

$$E_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_y - E_x) = \frac{a}{2} (e^{i(\omega t - \varphi)} - e^{i\omega t}) \quad \text{soit} \quad E_A = \frac{a}{2} (e^{-i\varphi} - 1) e^{i\omega t}$$

On en déduit l'intensité lumineuse $I_A = K E_A E_A^*$ à la sortie de l'analyseur, où K est une constante :

$$I_A = K \frac{a^2}{4} [1 + 1 - 2 \cos \varphi] = K a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2)$$

Nous sommes maintenant armés pour traiter toutes les questions. On voit que I_A dépend de la longueur d'onde λ car φ dépend de λ (équation 1). L'intensité émergente de l'analyseur varie donc entre 0 et Ka^2 lorsque φ (donc λ) varie.

1. Les longueurs d'onde pour lesquelles $I = 0$ sont données par : $\frac{\varphi}{2} = p\pi$ donc $\varphi = 2p\pi$ (p entier).

Avec (1) : $p = (n_o - n_e) \frac{e}{\lambda} = \frac{43,25}{\lambda}$ avec $\lambda \in [0,550 \mu\text{m}; 0,581 \mu\text{m}]$ exprimé en μm , soit :

$$74,4 \leq p \leq 78,6$$

p	75	76	77	78
λ (μm)	0,577	0,569	0,562	0,554

Pour ces radiations, $\varphi = 2p\pi$ et la lame est une lame d'onde.

2. $I_{\max} = Ka^2$ est obtenu lorsque la lame est demi-onde. On a alors $\varphi = (2p + 1)\pi$ (p entier).

Soit :

$$p + \frac{1}{2} = \frac{43,25}{\lambda} \quad \text{et donc} \quad 73,9 \leq p \leq 78,1$$

p	74	75	76	77	78
λ (μm)	0,581	0,573	0,565	0,558	0,551

3. L'analyseur ne joue aucun rôle sur l'intensité lorsque la vibration issue de la lame est circulaire. La lame se comporte donc comme une lame quart d'onde.

$\varphi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi$ (p entier), soit

$$p + \frac{1}{2} = \frac{86,50}{\lambda} \quad \text{et donc} \quad 148,4 \leq p \leq 156,8$$

p	149	150	151	152	153	154	155	156
λ (μm)	0,579	0,575	0,571	0,567	0,564	0,560	0,556	0,553

Exercice 13 Écriture matricielle de Jones

On se propose de décrire la propagation d'une onde lumineuse plane, monochromatique, sous forme matricielle. On se place pour cela dans \mathbb{C} (en notation complexe). Dans le cas le plus général, l'onde s'écrit dans le plan d'onde ($O; x, y$) :

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \exp(i\omega t) \\ \sin \theta \exp(i(\omega t + \varphi)) \end{pmatrix}$$

On appelle vecteur de Jones l'amplitude complexe du champ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ telle que

$\vec{E} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp(i\omega t)$. Un polariseur agit sur le champ électrique d'une onde par

le biais d'un opérateur représenté par une matrice 2×2 notée P . De même, on note L la matrice correspondant à l'opérateur d'action d'une lame biréfringente.

1. Écrire le vecteur de Jones pour une onde à polarisation rectiligne et circulaire.
2. Écrire la matrice P_α pour un polariseur dont l'axe fait un angle α avec la direction Ox dans le plan d'onde ($O; x, y$).
3. Écrire la matrice L_β correspondant à l'opérateur de l'action d'une lame biréfringente introduisant un retard de phase β entre les composantes E_x et E_y du champ électrique.
4. Comment écrire l'intensité lumineuse d'une onde dans le formalisme de Jones ? Calculer l'intensité lumineuse à la sortie d'un polariseur $P_{\pi/4}$, puis à la sortie d'une lame $L_{\pi/2}$.

Solution

CONSEIL : cet exercice est un peu atypique. Il s'appuie sur un formalisme mathématique adapté à la description de la propagation d'une onde décrite par son champ électrique. Dans ce formalisme, le passage de l'onde à travers un instrument optique simple (lame, polariseur, etc.) est décrit par une relation vectorielle entre le champ sortant E' et le champ entrant $E : E' = AE$ où A est une matrice qui représente l'action de l'instrument optique sur le champ électrique.

On s'intéresse dans ce cas à l'écriture de la matrice A dans les cas particuliers de polariseurs et de lames cristallines. Pas de difficulté à signaler, si ce n'est qu'il faut traduire les relations connues pour la polarisation d'une onde en terme de relations matricielles.

1. Par identification, on obtient :
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(i\varphi) \end{pmatrix}.$$

Pour une onde à polarisation rectiligne, on a $\varphi = 0$. Le vecteur de Jones est alors réel :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Pour une onde à polarisation circulaire $\varphi = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

2. Le polariseur a pour effet de supprimer une des composantes du champ : il s'agit donc d'une projection sur la direction de l'axe du polariseur. La projection sur Ox correspond à la matrice :

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour projeter selon une direction faisant un angle α avec l'axe Ox , on peut effectuer sur le champ \vec{E} une rotation d'angle $-\alpha$, projeter sur l'axe Ox puis effectuer une rotation d'angle α . Le projecteur P_α s'écrit donc :

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

3. La lame biréfringente a pour effet d'introduire un déphasage β entre les deux composantes du champ électrique. Si on a à l'entrée de la lame $\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \exp(i\omega t) \\ \sin \theta \exp(i(\omega t + \varphi)) \end{pmatrix}$,

on aura en sortie : $\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \exp(i\omega t) \\ \sin \theta \exp(i(\omega t + \varphi + \beta)) \end{pmatrix}$.

La matrice L_β s'écrit donc simplement :

$$L_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\beta) \end{pmatrix}$$

4. L'intensité lumineuse est proportionnelle à la moyenne du carré du champ électrique : $I = KEE^*$, où K est une constante de proportionnalité et $*$ indique le complexe conjugué.

En notation matricielle, si on note $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(i\varphi) \end{pmatrix}$, l'intensité est donc de la forme :

$$I_0 = K {}^t X^* X$$

où ${}^t X$ la transposée de X (pour un vecteur ou une matrice). Notons $I_0 = KE_0^2$

• À la sortie d'un polariseur $P_{\pi/4}$ ($\alpha = \pi/4$), on a :

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\text{sortie}} = P_{\pi/4} X$$

L'intensité correspondant à Y s'écrit donc :

$$I_1 = K {}^t Y^* Y = K {}^t X^* ({}^t P_{\pi/4}^* P_{\pi/4}) X = K {}^t X^* P_{\pi/4}^2 X$$

On a en effet ${}^t P_{\pi/4}^* = P_{\pi/4}$, car $P_{\pi/4}$ est réelle et symétrique. On peut aussi remarquer que $P_{\pi/4}^2 = P_{\pi/4}$ car toute opération de projection f vérifie $f \circ f = f$. On a donc :

$$I_1 = K {}^t X^* P_{\pi/4} X = K(a^*, b^*) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = K(|a^2| + |b^2| + a^*b + ab^*)/2$$

Remarquons que $|a^2| = E_0^2 \cos^2 \theta$, $|b^2| = E_0^2 \sin^2 \theta$, et :

$$(a^*b + ab^*) = E_0^2 \sin \theta \cos \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2E_0^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

On a donc :

$$I_1 = (I_0/2)(1 + \sin 2\theta \cos \varphi)$$

Pour une onde incidente polarisée rectilignement ($\varphi = 0$), on retrouve le résultat suivant :

– si $\theta = n\pi$ (polarisation suivant Ox) ou $\theta = \pi/2 + n\pi$ (polarisation suivant Oy), l'intensité lumineuse est réduite de moitié lors de la traversée du polarisateur ;

– si $\theta = \pi/4 + n\pi$, la polarisation est suivant la direction du polarisateur et l'onde ne « voit » pas le polarisateur ; son intensité lumineuse n'est pas modifiée ;

– si $\theta = 3\pi/4 + n\pi$, la polarisation est suivant la direction perpendiculaire à celle du polarisateur ; on observe « l'extinction » ($I_1 = 0$) en sortie du polarisateur.

• À la sortie de la lame $L_{\pi/2}$ ($\beta = \pi/2$), on a :

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\text{sortie}} = L_{\pi/2} X$$

L'intensité correspondant à Y s'écrit donc :

$$I_2 = K {}^t Y^* Y = K {}^t X^* ({}^t L_{\pi/2}^* L_{\pi/2}) X$$

avec ${}^t L_{\pi/2}^* L_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$I_2 = K(a^*, b^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = K(|a^2| + |b^2|) = KE_0^2 = I_0$$

On retrouve le résultat suivant : une lame biréfringente n'agit pas sur l'amplitude de l'onde et ne modifie donc pas son intensité lumineuse.

Interférences à deux ondes par division du front d'onde

Un peu d'histoire

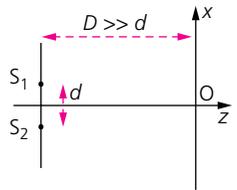
Thomas Young insulté par ses contemporains

Thomas Young (1773-1829) est un médecin anglais, auteur d'une thèse sur la production de la voix humaine. Lorsqu'il commence à s'intéresser à l'optique, il a donc une bonne connaissance des phénomènes de propagation du son. Il découvre les interférences en faisant passer la lumière issue d'une source ponctuelle à travers deux petits trous voisins. Ces trous se comportent en effet comme deux sources cohérentes émettant des faisceaux divergents par diffraction. Sur un écran éloigné, Young observe alors des franges d'interférences dans la zone de recouvrement des faisceaux. Il effectue des mesures qu'il interprète sur la base d'un modèle ondulatoire, ce qui lui permet d'évaluer la longueur d'onde de la lumière pour différentes couleurs, comme le rouge ($0,70 \mu\text{m}$) et le violet ($0,42 \mu\text{m}$). Mais à l'époque, la théorie « officielle » penche pour une conception corpusculaire de la lumière et la publication de ses travaux est couverte d'injures par ses pairs.

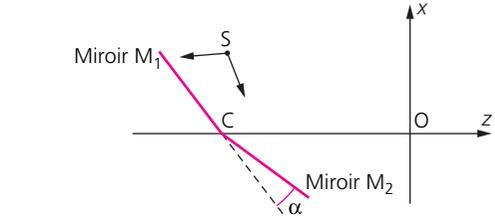
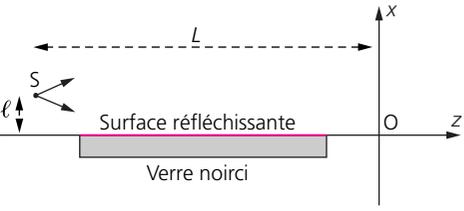
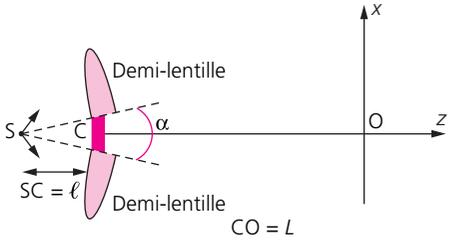
Rappel de cours

Les interférences à deux ondes par division du front d'onde résultent de la superposition de deux ondes issues de deux sources cohérentes. La plupart des dispositifs interférentiels se ramènent à l'étude des trous de Young, comme le rappelle le tableau ci-dessous (le biprisme de Fresnel est traité dans l'exercice 12).

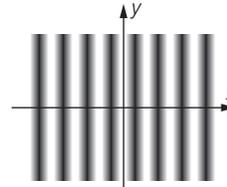
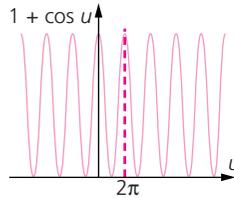
Trous de Young

<p>Trous de Young Interférences à 2 ondes</p>		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\gamma = \frac{2\pi d}{\lambda D}$ </div> <p>Remarque : si l'écran (O; x, y) est placé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f', il suffit de remplacer D par f' dans l'expression de γ.</p>
---	---	--

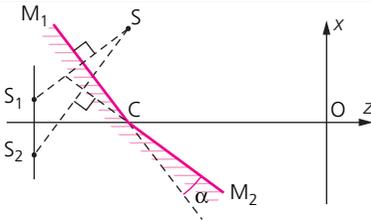
Systèmes équivalents aux trous de Young

Types de pupilles	Schéma du système
<p>Miroirs de Fresnel</p>	
<p>Miroirs de Lloyd</p>	
<p>Bilentille de Billet</p>	

$$I(x, y) = 2I_0 (1 + \cos \gamma x)$$



Système équivalent



Paramètres

S_1 et S_2 sont les images de S respectivement à travers M_1 et M_2 .

$$d = S_1 S_2 = 2SC \sin \alpha$$

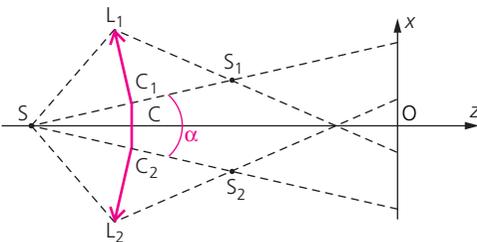
$$D \approx CO$$



S_1 est confondu avec S , et S_2 est l'image de S à travers le miroir.

$$d = 2\ell \quad D = L$$

Les sources S_1 et S_2 sont déphasées de π puisque l'onde qui a subi une réflexion sur le miroir (issue de S_2) a été déphasée de π , tandis que celle qui atteint directement l'écran (issue de S_1) ne subit aucun déphasage.



S_1 est l'image de S à travers la demi-lentille L_1 (de centre C_1) et S_2 l'image de S à travers la demi-lentille L_2 (de centre C_2).

$$d = S_1 S_2 \approx \ell^2 \alpha / (\ell - f')$$

(pour α faible ; f' est la distance focale de L_1 et de L_2)

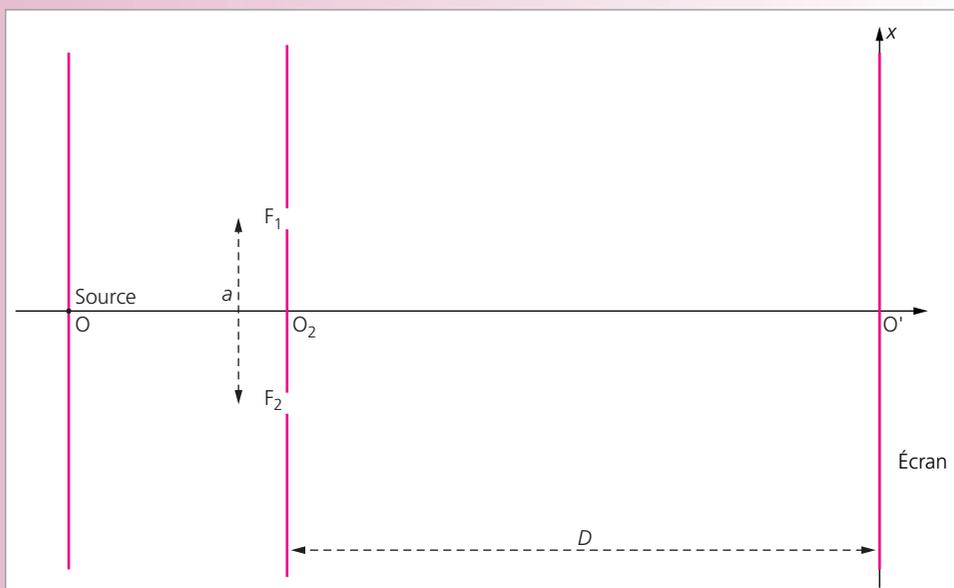
$$D \approx SO$$

Exercice 1 Interférences à deux ondes

On considère le dispositif des trous de Young ci-dessous permettant d'obtenir deux sources en phase. La source principale est équidistante des deux trous F_1 et F_2 considérés comme quasi-punctuels, situés dans le même plan vertical, et distants de $F_1F_2 = a$. La source émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

À la distance $D \gg a$ du plan des trous, on place un écran, également vertical.

On donne : $a = 6 \text{ mm}$, $D = 1,5 \text{ m}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$.



1. Soient deux rayons issus de la source et arrivant sur l'écran à une distance x de O , après être passés respectivement par F_1 et F_2 . Déterminer la différence de marche et le déphasage entre ces rayons.

2. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

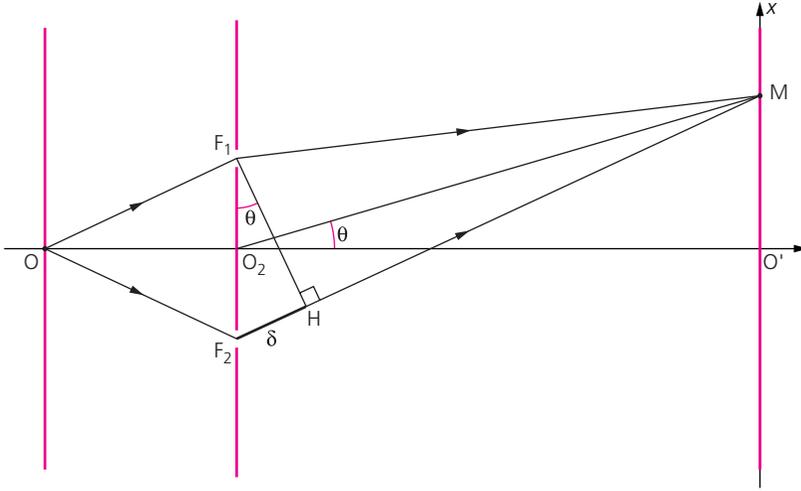
3. En déduire la valeur de l'interfrange.

Solution

1. Considérons deux rayons issus de la source et arrivant sur l'écran en $M(x)$: un des rayons parcourt le trajet OF_1M , l'autre parcourt OF_2M .

Issus de la même source, les deux rayons ont parcouru la même distance lorsqu'ils arrivent en F_1 et F_2 : les trous F_1 et F_2 se comportent comme deux sources en phase.

- Les rayons considérés arrivent en M . Sur l'exemple p. suivante, le rayon issu de F_2 parcourt une distance plus grande que celui issu de F_1 et on note $\delta = F_2H$ la « différence de marche » entre les deux rayons (F_1 et H sont dans un plan équiphasé). Notons que la différence de marche est une différence de chemins optiques : elle coïncide ici formellement avec une distance car l'indice optique n est égal à 1.



On note θ l'angle $\widehat{F_2F_1H}$; cet angle est à peu près égal à $\widehat{MO_2O'}$: cette approximation revient à considérer F_2M et O_2M parallèles, ce qui est à peu près exact compte tenu que $D \gg a$.

Pour un angle θ petit, la différence de marche δ est donnée par : dans le triangle (F_2F_1H) , $\delta = a \sin \theta \approx a \theta$

Or, dans le triangle (MO_2O') , $x/D = \tan \theta \approx \theta$

Finalement, on a :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

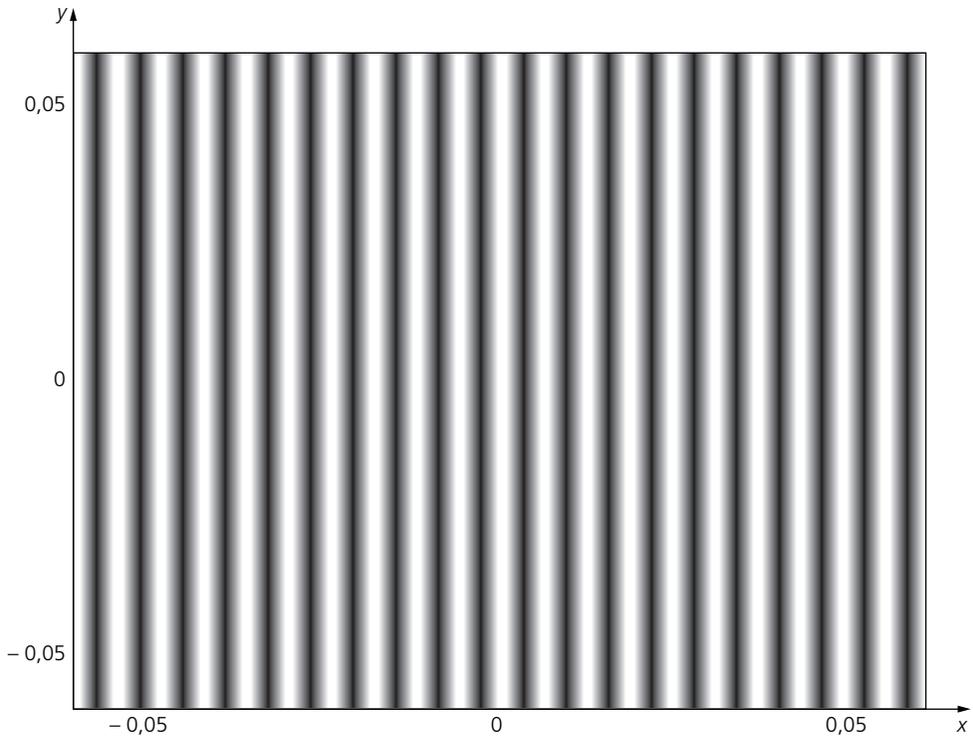
• Le déphasage entre les deux rayons se déduit aisément de la différence de marche puisque $\delta/\lambda = \varphi/2\pi$, où φ est le déphasage et λ la longueur d'onde de la radiation considérée. On a donc :

$$\varphi = 2\pi \frac{ax}{\lambda D}$$

2. L'intensité de la lumière sur l'écran correspond à la superposition de l'onde 1 issue de F_1 et de l'onde 2 issue de F_2 . Si E_1 désigne le champ électrique (en notation complexe) associé à l'onde 1 et E_2 celui associé à l'onde 2, on a $E_2 = E_1 e^{i\varphi}$. L'intensité lumineuse résultant de la superposition des ondes 1 et 2 s'écrit $I = K(E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*)$, où K est une constante et $*$ désigne le complexe conjugué. Les deux ondes ont même amplitude $E_1 E_1^* = E_2 E_2^*$. On a finalement $I(x) = I_0(1 + \cos \varphi)$, où $2I_0$ est l'intensité en $x = 0$. On en déduit que :

- lorsque $\cos \varphi = 1$ ($\varphi = 2k\pi$), l'intensité est maximale (égale à $2I_0$); on observe une frange brillante;
- lorsque $\cos \varphi = -1$ ($\varphi = (2k + 1)\pi$), l'intensité est nulle; on observe alors une frange sombre.

On a ainsi une alternance de franges brillantes et sombres dont l'intensité varie continûment. L'exemple page suivante correspond à $I(x, y)$ pour $a = 0,1$ mm; $\lambda = 600$ nm; $D = 1$ m (x et y sont exprimés en m).



3. La valeur de l'interfrange correspond à la période de l'intensité lumineuse observée sur l'écran. On la calcule en raisonnant sur deux franges successives, sombres ou brillantes. Soient x_n et x_{n+1} deux valeurs de x sur l'écran pour lesquelles on observe une frange brillante. On a donc :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= 2(n+1)\pi \\ \varphi_n &= 2n\pi\end{aligned}$$

L'interfrange i est définie par : $i = x_{n+1} - x_n$

Or :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{\lambda D}{2\pi a} \varphi_{n+1} = \frac{\lambda D(n+1)}{a} \\ x_n &= \frac{\lambda D}{2\pi a} \varphi_n = \frac{\lambda D n}{a}\end{aligned}$$

Finalement :

$$i = \frac{\lambda D}{a} = 0,125 \text{ mm}$$

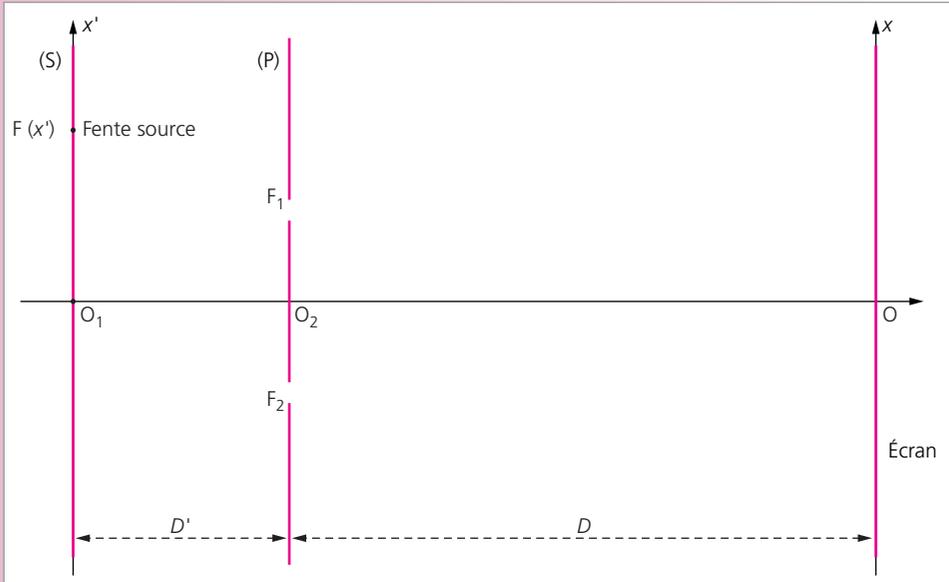
Exercice 2 Déplacement latéral de la source dans l'expérience des trous de Young

On réalise l'expérience de Young de la façon suivante : une plaque P est percée de deux fentes étroites F_1 et F_2 identiques, parallèles entre elles et distantes de a . Une fente source F très fine est éclairée par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

Toutes les fentes sont contenues dans des plans perpendiculaires à celui de la figure. On note x' la distance de F au centre O_1 du plan S. S est située à une distance D' de P. À la distance $D \gg a$ du plan des fentes, on place un écran, également vertical.

1. Soient deux rayons issus de la source et arrivant sur l'écran à une distance x de O, après être passés respectivement par F_1 et F_2 . Déterminer la différence de marche et le déphasage entre ces rayons.

2. Comment est modifiée l'image sur l'écran par rapport à la situation usuelle où F est équidistante des deux fentes F_1 et F_2 ? On donnera la position du centre de la figure d'interférence.



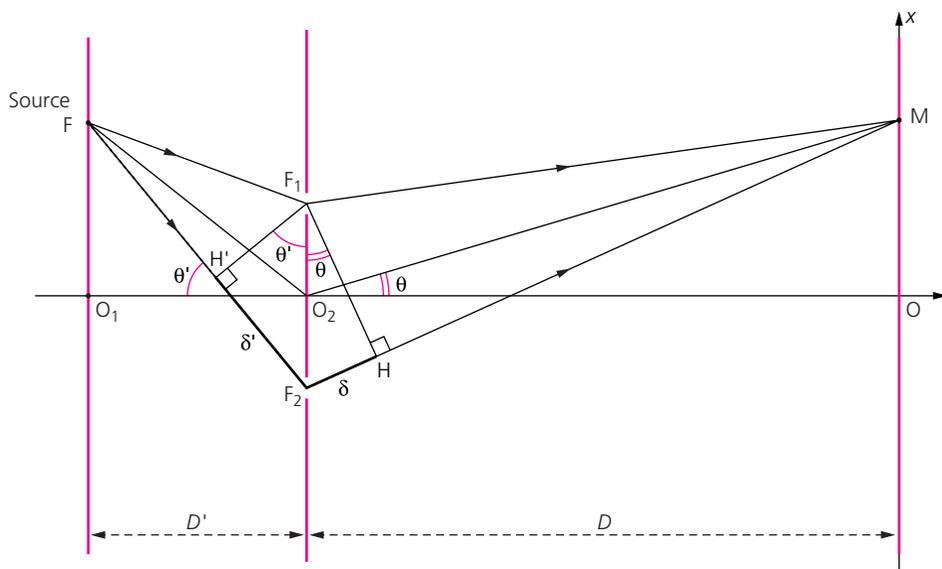
Solution

CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté particulière. On y reprend le dispositif classique des trous de Young mais en décalant cette fois la source mère (ici une fente F) de sorte que les ondes arrivant en F_1 et F_2 ne sont pas en phase ; en effet, dans le dispositif classique, on a $[FF_1] = [FF_2]$, d'où la différence de chemin optique $[FF_1M] - [FF_2M] = [F_1M] - [F_2M] = \delta$. À cette expression classique s'ajoute maintenant celle de la différence de chemin $\delta' = [FF_1] - [FF_2]$. L'éclairement sur l'écran est, comme toujours, donné par $I(M) = I_0(1 + \cos \varphi)$, avec ici $\varphi = 2\pi(\delta + \delta')/\lambda$.

1. Reprenons le schéma du montage et représentons les chemins parcourus par deux rayons issus de la source et arrivant au point $M(x)$ sur l'écran, après être passés respectivement par F_1 ou F_2 .

La source est décentrée : les deux rayons ont parcouru des distances différentes lorsqu'ils arrivent en F_1 et F_2 . Sur l'exemple, le rayon arrivant en F_1 a parcouru une distance plus petite que celui arrivant en F_2 et on note δ' la « différence de marche » entre les deux rayons.

Les rayons considérés arrivent en M. Sur l'exemple, le rayon issu de F_1 parcourt une distance plus petite (à nouveau) que celui issu de F_2 et on note δ la différence de marche entre les deux rayons (F_1 et H' sont dans un plan équiphase). Au total, la différence de marche entre les deux rayons est égale à $\delta + \delta'$.



- Calcul de δ . On note θ l'angle $\widehat{F_2F_1H}$; cet angle est à peu près égal à $\widehat{MO_2O}$. Ce calcul a déjà été effectué dans l'exercice 1. On obtient :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

- Calcul de δ' . Notons θ' l'angle $\widehat{F_2F_1H'}$.

Il vient pour la différence de marche :

dans le triangle (F_2F_1H') , $\delta' = a \sin \theta' \approx a \tan \theta'$

Or, dans le triangle (FO_2O_1) , $\tan \theta' = x'/D'$

Finalement, on a :

$$\delta' = \frac{ax'}{D'}$$

La différence de marche totale vaut :

$$\Delta = \delta + \delta' = a \left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{D'} \right)$$

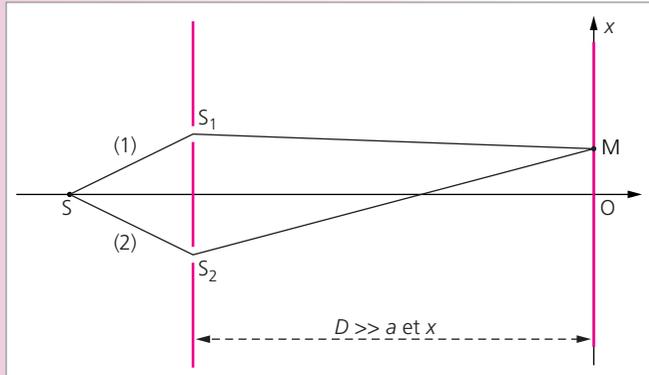
- Le déphasage entre les deux rayons se déduit aisément de la différence de marche puisque $\Delta/\lambda = \varphi/2\pi$, où φ est le déphasage et λ la longueur d'onde de la radiation considérée. On a donc :

$$\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{x'}{D'} \right)$$

2. L'intensité de l'éclairage sur l'écran est de la forme $I(x) = I_0(1 + \cos \varphi)$. Dans le cas usuel, $x' = 0$ et la frange centrale correspondant à $\varphi = 0$ est en $x = 0$. Ici, la figure d'interférence est décalée : la frange centrale est en $x = -x'$. Toute la figure d'interférence est décalée de $-x'$ (vers le bas si la source a été décalé vers le haut).

Exercice 3 Trous de Young en présence d'une lame de verre

On considère un dispositif de trous de Young éclairé par une source monochromatique S émettant une onde monochromatique de longueur d'onde λ . On pose $S_1S_2 = a$.



1. Calculer le déphasage $\Delta\varphi(x) = \varphi_2 - \varphi_1$ en un point M de l'écran repéré par sa position $(x, 0, 0)$.

2. En déduire l'expression de l'intensité $I(x)$. On calculera la position x_0 de la frange centrale (définie par $\Delta\varphi(x_0) = 0$).

3. Donner l'expression de l'interfrange i .

On interpose devant le trou S_1 une lame de verre d'indice n et d'épaisseur e .

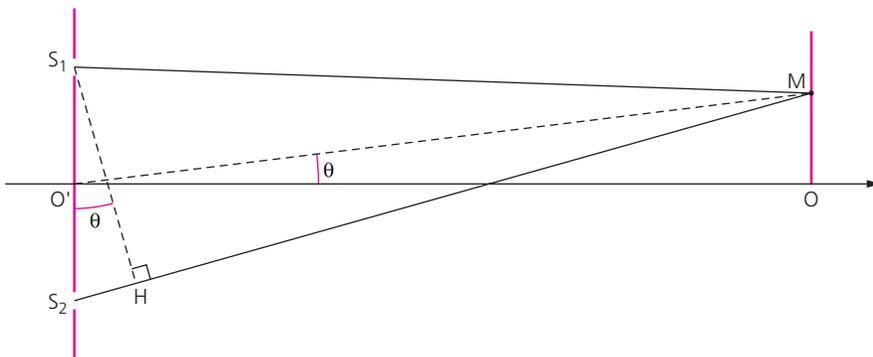
4. En supposant que les rayons traversant la lame sont presque en incidence normale, déterminer le nouveau déphasage $\Delta\varphi'(x) = \varphi'_2 - \varphi'_1$ au point M de l'écran.

5. Comment la figure d'interférence est-elle modifiée ? Donner la nouvelle position x'_0 de la frange centrale.

Solution

CONSEIL : l'introduction d'une lame de verre provoque une différence de marche entre l'onde issue de S_1 et celle issue de S_2 . On a en effet $\delta = [SS_1M] - [SS_2M] = [S_1M] - [S_2M] = S_1A + nAB + BM - S_2M$, où A est le point d'entrée dans la lame et B le point de sortie (en prenant 1 pour l'indice optique de l'air et n pour celui du verre). La figure d'interférence évolue puisque la différence de chemin optique n'est plus la même.

1. Le déphasage $\Delta\varphi(x)$ est liée à la différence de marche entre les rayons issus des deux sources : $\Delta\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda}([SS_2M] - [SS_1M]) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M)$.



Cette différence de marche $S_2M - S_1M$ est égale à la distance S_2H . Introduisons l'angle $\theta = \widehat{OO'M}$, où O' est le milieu de S_1S_2 . Dans l'approximation des faibles angles, on peut considérer S_1H perpendiculaire à $O'M$. L'angle θ est donc également l'angle $\widehat{S_2S_1H}$. On en déduit :

$$\Delta\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} S_2H \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} a\theta$$

Par ailleurs, dans le triangle $(O'MO)$, on a : $\theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D}$. Finalement, la différence de phase s'écrit en fonction de x :

$$\Delta\varphi(x) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}$$

2. L'onde en M est la superposition des deux ondes y arrivant. Le champ résultant s'écrit :

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

Les deux ondes sont issues de la même source S , elles ont donc même amplitude et même pulsation :

$$E_1(x) = E_0 \exp(i\omega t - ikSS_1M)$$

$$E_2(x) = E_0 \exp(i\omega t - ikSS_2M)$$

On a donc :

$$E(x) = E_0 \exp(i\omega t - ikSS_1M) + E_0 \exp(i\omega t - ikSS_2M)$$

$$E(x) = E_0 \exp(i\omega t - ikSS_2M) (1 + \exp(i\Delta\varphi(x)))$$

L'intensité $I(x)$ se déduit : $I(x) = K|E(x)|^2$ (où K est une constante)

$$I(x) = KE_0^2(1 + \exp(i\Delta\varphi(x))(1 + \exp(-i\Delta\varphi(x)))$$

$$I(x) = 2KE_0^2(1 + \cos \Delta\varphi(x))$$

La frange centrale est obtenue pour $\Delta\varphi(x_0) = 0$, soit $x_0 = 0$. Avec I_0 l'intensité en x_0 , on a $I_0 = I(0) = 2KE_0^2$. D'où :

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right)$$

3. L'interfrange i correspond à la distance entre deux franges successives (brillantes ou sombres). L'intensité lumineuse a la périodicité de la fonction cosinus, donc :

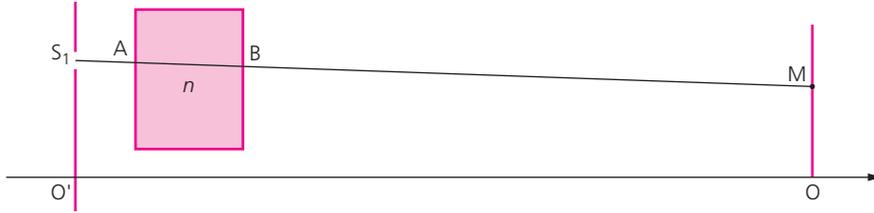
$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

4. La présence de la lame de verre modifie le chemin optique $[SS_1M]$:

$$[SS_1M] = SS_1 + S_1A + nAB + BM$$

Ajoutons à cette expression $AB - AB$; il vient :

$$[SS_1M] = SS_1M + (n - 1)AB$$



En incidence quasi normale, $AB \approx e$; on a finalement : $[SS_1M] = SS_1M + (n - 1)e$, soit le nouveau déphasage :

$$\Delta\varphi'(x) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} - \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)e$$

5. Le nouveau déphasage contient un terme constant (indépendant de x). La figure d'interférence est donc simplement déplacée parallèlement à l'écran. Ainsi, la nouvelle position de la frange centrale, toujours définie par $\Delta\varphi'(x'_0) = 0$ est obtenue pour $x'_0 = \frac{(n - 1)eD}{a}$. La figure est décalée vers le haut de l'écran.

Exercice 4 Trous de Young

On reproduit l'expérience des fentes de Young avec deux fentes très fines S_1 et S_2 parallèles, séparées d'une distance $a = 2 \text{ mm}$. On observe les franges d'interférences sur un écran parallèle aux fentes S_1 et S_2 , et placé à une distance $D = 2 \text{ m}$ au delà des fentes. La distance b entre les franges brillantes d'ordre 5 situées de part et d'autre de la frange centrale est de 5 mm.

1. Calculer la valeur de l'interfrange i , et la longueur d'onde λ de la radiation utilisée.

On place sur la fente S_1 une fine lame de verre d'indice de réfraction $n = 1,5$ et d'épaisseur $e = 20 \text{ }\mu\text{m}$. On note z le déplacement de la frange centrale sur l'écran.

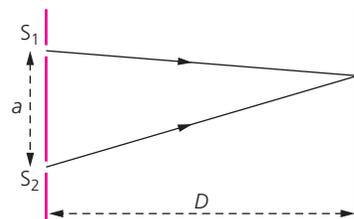
2. Calculer la variation de chemin optique Δ due à l'introduction de la lame de verre. Calculer la valeur de z .

La fente source S éclairant S_1 et S_2 est située à une distance $D' = 0,5 \text{ m}$ en avant de S_1 et S_2 , dans le plan médiateur. On déplace la fente S parallèlement à elle-même d'une distance z' , dans un plan parallèle à S_1S_2 .

3. Quelle doit être la valeur de z' pour que la frange centrale revienne à la position initiale de la question 1 ?

Solution

CONSEIL : dans cet exercice, on ajoute au dispositif de Young une lame de verre (comme dans l'exercice 3) et on déplace la source mère S (comme dans l'exercice 2). Introduire un déphasage entre les deux ondes revient à déplacer la figure d'interférence observée sur l'écran et donc, à décaler la frange centrale. Ici, on cherche à ce que les deux effets se compensent.



1. Entre les franges brillantes d'ordre -5 et $+5$, on a 10 interférences ; il vient donc :

$$i = b/10 = 0,5 \text{ mm}$$

L'interfrange est liée à la longueur d'onde λ , la distance D à l'écran et la distance a entre les deux fentes, par la relation $i = \lambda D/a$, soit :

$$\lambda = \frac{ai}{D} = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$$

2. Une lame d'indice n et d'épaisseur e introduit une différence de marche :

$$\Delta = e(n - 1) = 10 \text{ }\mu\text{m}$$

Le déplacement correspondant sur l'écran est donné par :

$$z = \frac{\Delta D}{a} = 10 \text{ mm}$$

3. Pour que la frange centrale revienne à sa position initiale, il faut que la différence de marche introduite par le déplacement de la fente source soit la même que (c'est-à-dire compense) la différence de marche introduite par la lame de verre.

Or la différence de marche Δ' due au déplacement de la fente source est reliée à la distance de la source aux fentes, et à la distance a entre les deux fentes (voir l'exercice 2) :

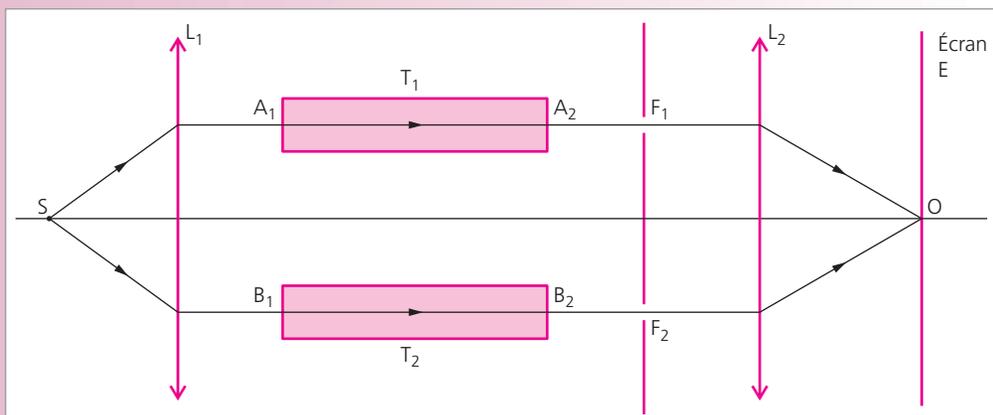
$$\Delta' = \frac{z'a}{D}$$

Avec $\Delta' = \Delta$, il vient :

$$z' = \frac{\Delta D}{a} = 10 \text{ mm}$$

Exercice 5 Mesure de l'indice de l'air dans un montage différentiel des trous de Young

Soit le montage différentiel des trous de Young représenté sur la figure ci-dessous.



Entre les deux lentilles L_1 et L_2 sont disposés deux tubes T_1 et T_2 de longueur $L = 10$ cm. Lorsque ces tubes sont remplis d'air, on observe une frange brillante au centre O du champ d'interférence sur l'écran d'observation E . La source émet une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$. On réalise progressivement le vide dans le tube T_1 . On voit alors 53 franges brillantes défilent lentement en O . À la fin du pompage, on observe une frange sombre.

1. Exprimer les chemins optiques δ_1 et δ_2 le long des rayons issus de S , traversant T_1 et T_2 et atteignant le point O de l'écran avant le pompage. Que vaut la différence de chemin optique entre ces deux rayons ?
2. Exprimer la différence de marche δ entre les deux chemins optiques après le pompage.
3. Quelles sont les positions x_0 et x'_0 des centres de la figure d'interférence sur l'écran ?
4. En déduire la valeur de l'indice n de l'air pour la radiation utilisée.

Solution

CONSEIL : cet exercice est une application (quasiment directe) de l'exercice 3 ; ici, ce n'est pas une lame de verre qui est intercalée mais un « bloc » d'indice égal à 1 puisqu'il s'agit d'un tube dans lequel on fait le vide. Cependant, l'indice n de l'air n'est ici pas égal à 1, puisque c'est précisément la différence $n - 1$ que l'on cherche à déterminer.

1. Dans le premier cas considéré (T_1 et T_2 remplis d'air) les deux rayons issus de S et convergeant en O , parcourent le même chemin optique (n est l'indice optique dans les conditions de l'expérience) :

$$\delta_1 = \delta_2 = n(SA_1 + A_1A_2 + A_2O) = n(SB_1 + B_1B_2 + B_2O)$$

Les deux ondes arrivant en O sont en phase et on observe une frange brillante en O .

2. À la fin du pompage, les deux chemins optiques sont différents car l'indice dans T_1 a changé : il y a le vide dans le tube T_1 soit $n_1 = 1$.

$$\begin{aligned}\delta'_1 &= n(SA_1 + A_2O) + A_1A_2 = \delta_1 + (1 - n)A_1A_2 \\ \delta'_2 &= \delta_2 = \delta_1\end{aligned}$$

La différence de marche entre les deux rayons est donc égale à :

$$\delta = \delta_2 - \delta'_1 = (n - 1)A_1A_2 = (n - 1)L$$

3. Cette différence de marche provoque le défilement des franges (la modification de la figure d'interférence n'est pas subite car le vide est obtenu progressivement). 53 franges défilent, puis on observe une frange sombre en O à la fin du pompage : cela signifie que $N = 53,5$ interfranges séparent l'origine O de la nouvelle position du centre de la figure d'interférence. Cette dernière est repérée par l'abscisse $x'_0 = Ni$, où i est l'interfrange. L'observation de la figure d'interférence se fait dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f' ; l'interfrange est donc donnée par $i = \lambda f' / a$. Le déphasage avant le pompage est :

$$\Delta\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'}$$

Le déphasage après pompage est :

$$\Delta\varphi'(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} - \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} \left(x - \frac{\delta f'}{a} \right)$$

Le déplacement sur l'écran correspond à la différence entre la nouvelle position du centre de la figure d'interférence :

$$x'_0 = \frac{\delta f'}{a}$$

et l'ancienne :

$$x_0 = 0$$

4. Nous avons donc :

$$Ni = x'_0 - x_0$$

$$N \frac{\lambda f'}{a} = \frac{\delta f'}{a} = (n - 1) \frac{L f'}{a}$$

D'où l'indice n de l'air :

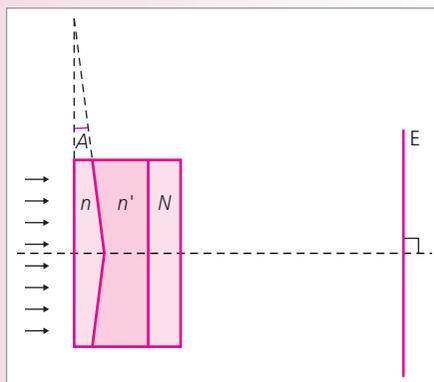
$$n = N \frac{\lambda}{L} + 1 = 1,00029$$

Exercice 6 Biprisme de Fresnel

Une onde lumineuse plane de longueur d'onde λ rencontre normalement la face d'entrée d'un système optique transparent dont le premier verre, d'indice n , est un biprisme de petit angle A .

Qu'observe-t-on sur un écran E disposé perpendiculairement à la direction incidente ?
On se place dans l'approximation des petits angles.

Application numérique : $A = 5,0^\circ$; $n = 1,520$;
 $n' = 1,500$; $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$.

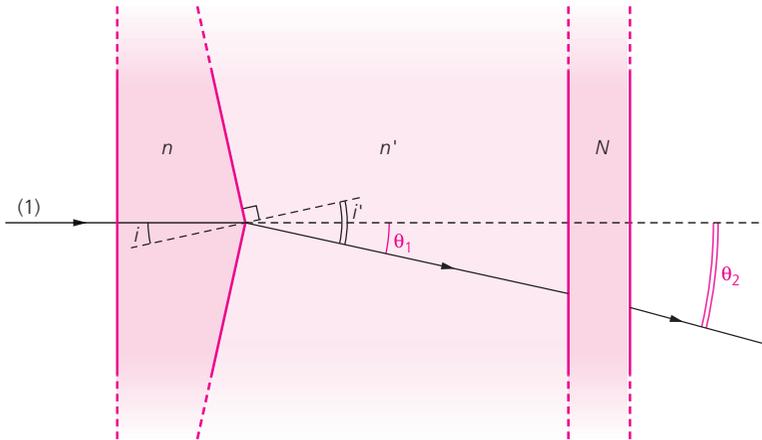
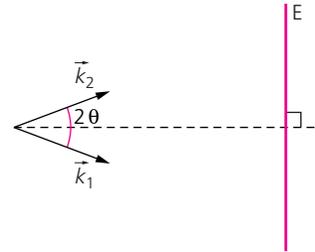


Solution

CONSEIL : montrer qu'on obtient l'interférence de deux ondes planes dont les vecteurs d'onde forment un angle 2θ (que l'on calculera), puis, que θ ne dépend pas de l'indice N du dernier verre. L'intensité observée s'écrit alors classiquement $I(y) = I_0 \sin^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} y \sin \theta \right]$ (voir également l'exercice 8).

Il s'agit d'un phénomène d'interférences entre deux ondes planes ; l'interfrange est donnée classiquement par $i = \lambda / (2 \sin \theta)$ dans un plan perpendiculaire à la direction moyenne.

Pour les calculs pratiques, l'énoncé suppose les angles petits en radians. Il suffit alors de déterminer l'angle θ ; pour cela, on suit par exemple un rayon (1) dévié vers le bas (voir figure ci-dessous). La lame à faces parallèles joue un rôle et on a : $\theta_1 = i' - i$ avec $ni = n'i'$ (loi de Kepler) et $i = A$.



On a ainsi :

$$\theta_1 = i' - i = \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) A = (n - n') \frac{A}{n'}$$

D'autre part, θ_2 est relié à θ_1 par : $n'\theta_1 = N\theta_2 = \theta_2$ (où θ_2 est l'angle que fait le rayon réfracté à travers la lame d'indice N et la normale à cette lame). Autrement dit, θ_2 ne dépend pas de N .

Ainsi :

$$\theta_2 = n'\theta_1 = (n - n')A$$

et finalement :

$$i = \Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_2} \approx \frac{\lambda}{2\theta_2} = \frac{\lambda}{2(n - n')A}$$

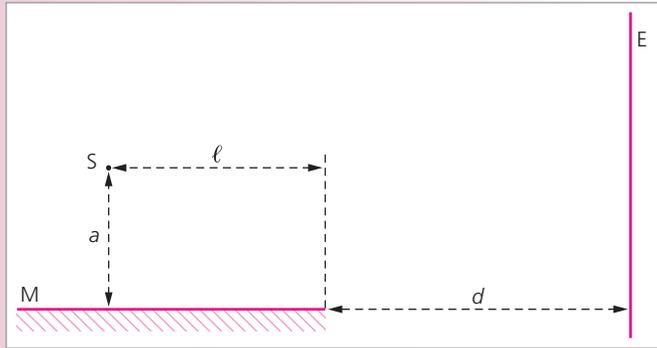
A.N. $i = 0,20$ mm.

On observe donc sur l'écran E une figure d'interférence constituée d'un ensemble de franges alternativement sombres et brillantes, de pas égal à 0,20 mm.

Exercice 7 Miroir de Lloyd

On considère le montage de la figure ci-après dit du miroir de Lloyd, constitué d'une lame de verre plane utilisée comme miroir plan. La figure d'interférence est observée sur un écran perpendiculaire au miroir.

On note d la distance du bord du miroir à l'écran et a la distance de la source S au miroir. Enfin, la distance horizontale de S au bord du miroir est notée ℓ .



1. Justifier qu'on observe sur l'écran l'interférence de deux ondes et préciser lesquelles. Comparer l'amplitude des deux ondes.

2. Représenter la zone d'interférence.

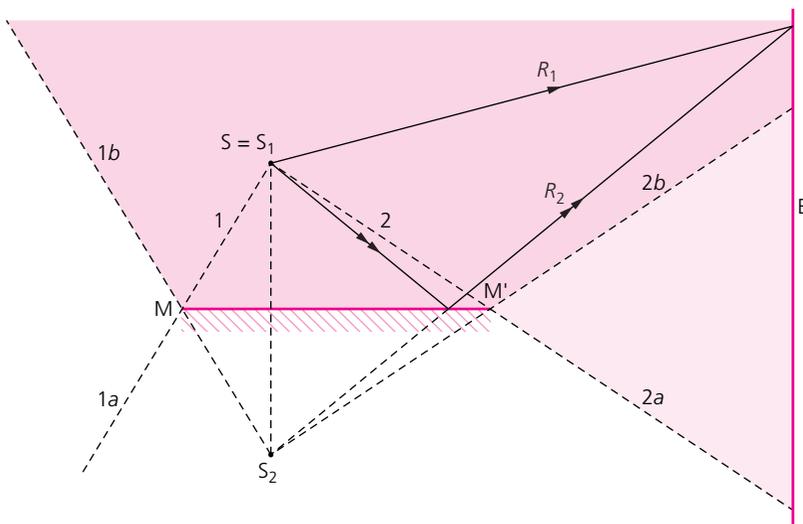
3. Déterminer la distance entre les deux sources S_1 et S_2 qui permettent de se ramener au cas des trous de Young. Quelle est la distance entre les deux sources et l'écran ?

4. En déduire l'expression de l'intensité sur l'écran. Quelle est la forme des franges obtenues ?

Solution

CONSEIL : la difficulté de cet exercice consiste à déterminer les deux sources équivalentes qui permettent de ramener l'étude de ce système interférentiel à celui des trous de Young.

1. Sur l'écran, on observe l'interférence de l'onde issue directement de la source et de celle qui, issue de la source, se réfléchit sur le miroir et atteint l'écran. Il s'agit d'un phénomène d'interférence par division du front d'onde ; ainsi, si A est l'amplitude de l'onde sphérique issue de S , les deux ondes incidentes sur l'écran ont même amplitude, égale à A .



2. La zone d'interférence correspond à la région de l'espace où les deux sous-faisceaux, celui issu directement de S (compris entre 1-1a et 2-2a) et celui issu de S et réfléchi par le miroir (compris entre 1-1b et 2-2b), se croisent (zone de couleur sombre sur la figure).

3. Les deux sous-faisceaux sont coniques de sommets S_1 et S_2 , où S_1 coïncide avec S et S_2 est l'image de S à travers le miroir. Ce système interférentiel est équivalent à celui des trous de Young. Il est aisé de voir que les deux sources S_1 et S_2 sont distantes de $2a$ parallèlement à l'écran d'observation.

Les deux sources sont distantes de l'écran de $(\ell + d)$.

4. Il suffit de reprendre le résultat obtenu pour les trous de Young :

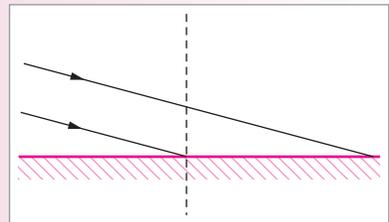
$$I(x) = I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{2a}{\lambda(\ell + d)} x \right) \right]$$

On observe une alternance de franges brillantes et sombres dont l'intensité varie continûment, sur la partie de l'écran où les deux sous-faisceaux se croisent.

Exercice 8 Interférence des ondes incidentes et réfléchies sur un miroir

Une onde plane monochromatique arrive sur un miroir plan M avec un angle d'incidence proche de $\pi/2$.

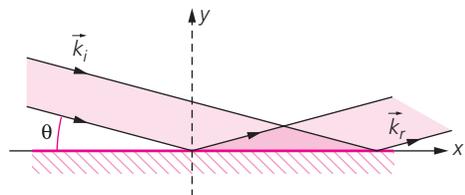
1. Quelles ondes sont susceptibles d'interférer? Définir la zone où sont localisées ces interférences.
2. Calculer l'éclairement dans cette zone d'interférence.
3. Qu'observe-t-on si on place un écran parallèlement au miroir? si on place un écran perpendiculairement au miroir?



Solution

CONSEIL : cet exercice traite en détail l'interférence de deux ondes planes.

1. Considérons l'angle θ que fait le vecteur d'onde incident avec le miroir (l'angle θ est petit). Le faisceau incident est réfléchi sur le miroir avec un angle $-\theta$. Les ondes incidentes et réfléchies sont cohérentes puisque issues de la même source. Leur zone d'interférence correspond à la zone où les faisceaux incident et réfléchi se croisent.



2. Le champ électrique associé à l'onde incidente s'écrit, en notation complexe :

$$E_i(\vec{r}) = E_0 \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

où \vec{k}_i est le vecteur d'onde incident :

$$\vec{k}_i = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \approx \vec{i} - \theta \vec{j}$$

Le champ électrique associé à l'onde réfléchie par le miroir s'écrit :

$$E_r(\vec{r}) = -E_0 \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k}_r \cdot \vec{r})$$

où \vec{k}_r est le vecteur d'onde réfléchi :

$$\vec{k}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \approx \vec{i} + \theta \vec{j}$$

Dans la zone d'interférence, l'onde résultante s'écrit :

$$E(\vec{r}) = E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}) - \exp(-i\vec{k}_r \cdot \vec{r})]$$

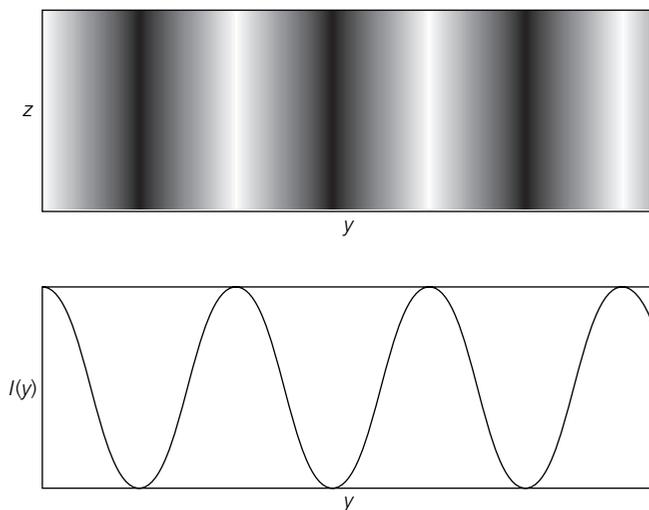
$$E(x, y, z) = E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ik(x - \theta y)) - \exp(-ik(x + \theta y))]]$$

$$E(x, y, z) = 2E_0 \exp(i\omega t) \exp(-ikx) \sin(k\theta y)$$

On en déduit l'éclairement $I(x, y, z) = KE(x, y, z) E^*(x, y, z)$, avec $I_0 = 4KE_0^2$ l'intensité maximale :

$$I(x, y, z) = I_0 \sin^2(k\theta y)$$

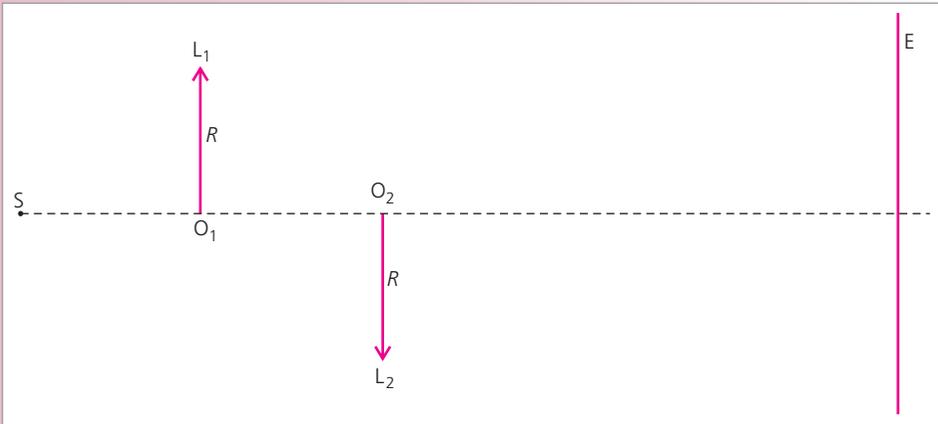
3. Si on place un écran parallèlement au miroir, c'est-à-dire à $y = \text{constante}$, on observe un éclairement constant. Si on place un écran perpendiculairement au miroir, on observe des franges parallèles à l'axe Oz. On a représenté ci-dessous la figure d'interférence dans le plan (O ; y, z) (en haut) et l'allure des variations de $I(y)$ (en bas).



Exercice 9 **Bilenteille de Meslin**

Soit S une source ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; soient L_1 et L_2 deux demi-lentilles convergentes de rayon R et de même distance focale f' , placées comme indiqué ci-dessous.

On admettra, sans le démontrer, qu'une onde lumineuse portée par un rayon passant par le foyer d'une lentille, subit un déphasage de $-\pi$ (ou de façon équivalente, une différence de marche de $-\lambda/2$).



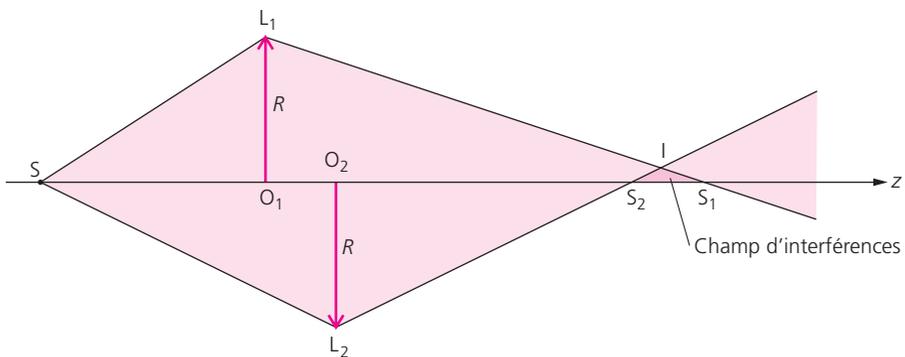
1. Déterminer le champ d'interférence et la différence de marche entre deux rayons qui interfèrent (les notations sont à préciser).

2. Qu'observe-t-on sur l'écran E placé à la distance D de la source S ? Déterminer le nombre de franges brillantes visibles dans le plan de l'écran E .

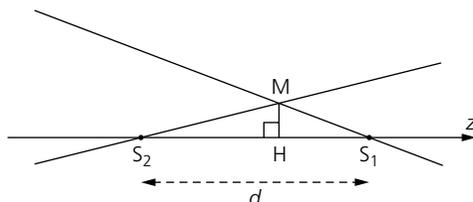
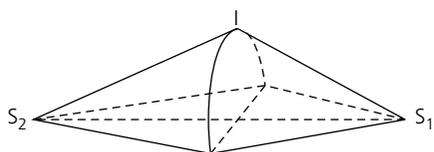
On donne : $f' = 20$ cm ; $d = O_1O_2 = 10$ cm ; $R = 2$ cm ; $\lambda = 0,5$ μm ; $SO_1 = 30$ cm ; $D = 85$ cm.

Solution

1. Compte tenu des données de l'énoncé, le problème est traduit ci-dessous (la formule de Newton permet de déterminer $O_1S_1 = 60$ cm et $O_2S_2 = 40$ cm).



Le champ d'interférence est le volume $V_{S_2S_1}$ indiqué ci-dessous.



Cherchons la différence de marche en un point M du champ d'interférence. Notons H la projection du point M sur l'axe optique. On pose $HM = \rho$ et $S_2H = z$ ($z > 0$).

On a alors $HS_1 = d - z$ (avec $d = S_2S_1 = O_1O_2 = 10$ cm).

Soit δ la différence de marche cherchée; on choisit de poser $\delta \equiv l_1 - l_2$, avec l_1 (resp. l_2) le chemin optique du rayon ayant traversé la lentille L_1 (resp. L_2).

On a :

$$l_1 = SS_1 + S_1M = SS_1 - \sqrt{\rho^2 + (d - z)^2} \text{ (le signe } - \text{ provient de l'orientation de } S_1M)$$

$$l_2 = SS_2 + S_2M - \frac{\lambda}{2} = SS_2 + \sqrt{\rho^2 + z^2} - \frac{\lambda}{2}$$

Le terme $-\frac{\lambda}{2}$ provient du passage de l'onde sphérique à travers le foyer S_2 .

La différence de marche s'écrit alors :

$$\delta = l_1 - l_2 = (SS_1 - SS_2) + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\rho^2 + (d - z)^2} - \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Or : $SS_1 - SS_2 = d$ (en considérant les rayons qui cheminent le long de l'axe). De plus, si l'on admet que $\rho^2 \ll z^2$ et $\rho^2 \ll (d - z)^2$ (dimensions transversales du second ordre), il vient :

$$\delta = l_1 - l_2 \approx d + \frac{\lambda}{2} - (d - z) \left[1 + \frac{\rho^2}{2(d - z)^2} \right] - z \left[1 + \frac{\rho^2}{2z^2} \right]$$

soit :

$$\delta \approx \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho^2}{2} \left[\frac{1}{d - z} + \frac{1}{z} \right]$$

2. Si l'écran E est placé à 85 cm de la source S, on a précisément :

$$z = d - z = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\lambda}{2} - \frac{2\rho^2}{d}$$

On montre ainsi que $\delta = \text{Cte}$ si et seulement si $\rho = \text{Cte}$: on observe donc des franges d'interférences en forme de demi-anneaux à centre noir ($\delta = \frac{\lambda}{2}$ si $\rho = 0$).

Les anneaux « brillants » correspondent à $\delta = m\lambda$ ($m \in \mathbb{Z}$), donc à :

$$\rho = \sqrt{\frac{d}{2}\lambda \left(m' + \frac{1}{2} \right)} \quad \text{avec} \quad m' = -m$$

A.N. $\rho = 0,158\sqrt{m' + \frac{1}{2}}$ (en mm)

Pour calculer le nombre de franges brillantes, déterminons ρ_{\max} géométriquement. On vérifie que dans ce cas précis : $\frac{\rho_{\max}}{R} = \frac{d-z}{O_1S_1} = \frac{z}{O_1S_1}$ (homothétie évidente), donc $\rho_{\max} = 1,667$ mm.

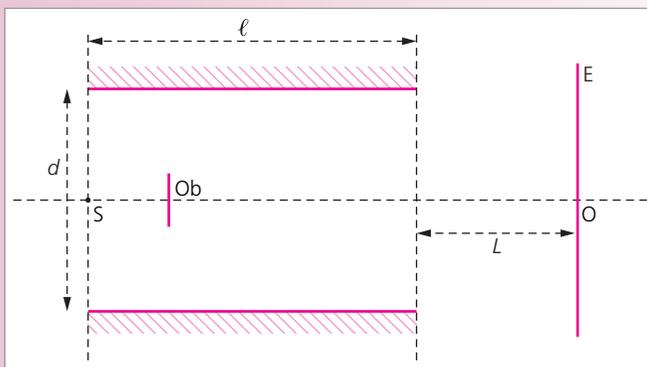
On s'assure que cette valeur est inférieure à celle qu'on aurait obtenue en utilisant le point S_2 , c'est-à-dire $\frac{\rho_{\max}}{R} = \frac{z}{O_2S_2}$; on se trouve dans la région du champ comprise entre I et S_1 (voir la première figure).

On trouve donc $m' = E \left[\frac{2\rho_{\max}^2}{\lambda d} - \frac{1}{2} \right] = 111$ franges (ou anneaux) brillantes (où $E[x]$ est la partie entière de x).

Exercice 10 Système interférentiel à une source et deux miroirs parallèles

On considère deux miroirs M_1 et M_2 placés symétriquement, de part et d'autre d'un axe Ox horizontal; en O est disposé un écran perpendiculaire aux miroirs. La distance entre les deux miroirs est notée d et la longueur des miroirs ℓ . Les extrémités droites des miroirs sont à la distance L de l'écran. Enfin, une source S , placée sur l'axe à la distance $(L + \ell)$ de l'écran, émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

On souhaite que le système ne fasse intervenir que les interférences des deux images directes de S à travers M_1 et M_2 . Pour cela, on utilise un obturateur Ob entre la source et l'écran.



1. Quelles caractéristiques (distance à la source et dimension) doit avoir l'obturateur pour éviter que la lumière émise par la source n'atteigne directement l'écran ?
2. Quel type de miroir doit-on utiliser si on ne veut pas être gêné par les réflexions multiples (plus d'une réflexion) ?

3. Donner la taille D de la figure d'interférence sur l'écran, en ne considérant que les ondes portées par les rayons ayant subi une seule réflexion. La dimension et la position de l'obturateur peuvent-elles modifier la taille de cette figure ? Comment faut-il idéalement les choisir pour que cela ne soit pas le cas ?

On suppose dans la suite que les conditions sont réunies pour que l'image d'interférence observée sur l'écran corresponde bien à l'interférence des ondes se propageant le long de rayons ayant subi une seule réflexion.

4. Donner l'expression de l'éclairement sur l'écran.

5. Combien de franges d'interférence observe-t-on sur l'écran ?

Solution

CONSEIL : on souhaite observer sur l'écran E l'interférence des deux ondes issues de S et se réfléchissant une fois sur l'un des miroirs. Dans les deux premières questions, on précise les caractéristiques du dispositif pour qu'il soit effectivement un système interférentiel à deux ondes. Sans obturateur, on obtient en effet un système interférentiel à trois ondes au moins : l'onde issue directement de S et les deux ondes issues de S et se réfléchissant sur l'un des miroirs. Les réflexions multiples doivent être de la même façon d'amplitude négligeable.

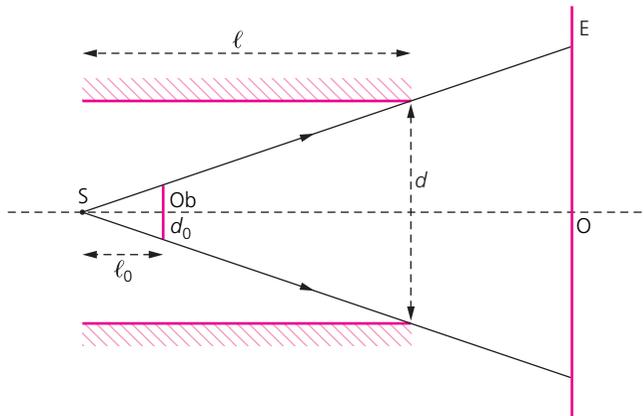
1. Le faisceau issu de S et susceptible de toucher directement l'écran (sans subir de réflexion sur les miroirs) est un faisceau conique d'angle θ tel que $\tan \theta = d/2\ell$. Notons ℓ_0 la distance de la source à l'obturateur : il faut que la taille minimale de l'obturateur soit égale à

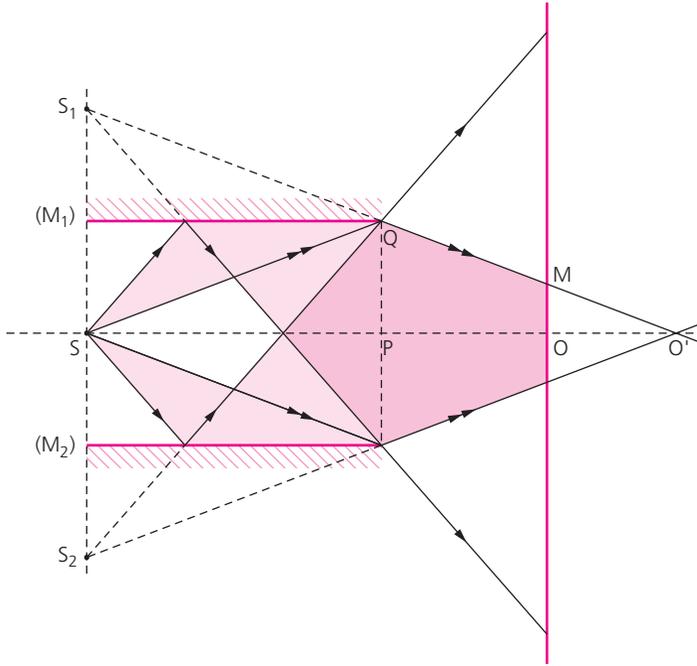
$$d_0 \geq \frac{\ell_0}{\ell} d$$

pour que ce faisceau soit effectivement arrêté.

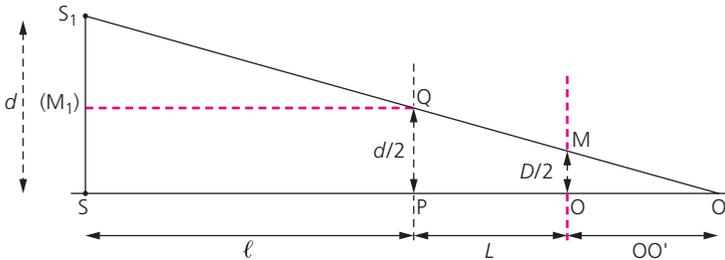
2. Il suffit de choisir un miroir partiellement réfléchissant pour qu'à chaque réflexion, l'onde portée par le rayon lumineux perde en intensité. On pourra alors négliger la contribution des rayons ayant subi des réflexions multiples.

3. On a représenté page suivante les faisceaux lumineux qui rencontrent l'écran après une seule réflexion sur un des deux miroirs. Les sources S_1 et S_2 sont les images de S à travers chacun des miroirs ($SS_1 = SS_2 = d$) : tout se passe comme si les rayons issus de S et se réfléchissant sur M_1 (ou M_2) provenaient de S_1 (ou S_2). Considérons le faisceau issu de S et ne subissant qu'une réflexion sur M_1 ; ce faisceau est délimité sur la figure par deux rayons. Le rayon indiqué par une simple flèche correspond au rayon qui rencontre M_1 avec l'incidence la plus faible et qui ne touche pas M_2 après réflexion. Le rayon indiqué par une double-flèche est le rayon qui rencontre M_1 avec l'incidence la plus grande.





La zone d'interférence (en sombre) correspond à l'intersection des deux faisceaux. Notons M le point extrême de la figure d'interférence sur l'écran (avec $OM = D/2$) et considérons le triangle SS_1O' .



Les triangles (SS_1O') , (PQO') et (OMO') sont semblables. On a donc :

$$\frac{d}{L + \ell + OO'} = \frac{d/2}{L + OO'} = \frac{D/2}{OO'}$$

On en déduit $OO' = \ell - L$, d'où la taille D de la figure d'interférence observée sur l'écran :

$$D = \frac{\ell - L}{\ell} d$$

Sur la figure ci-dessus, on a placé l'écran entre S et O' ($\ell > L$). Si cela n'est pas le cas, c'est-à-dire si O est situé au delà de O' , on n'observe plus de figure d'interférence sur l'écran.

Si l'obturateur est plus grand que d_o , on limite le faisceau de rayons qui ne subissent qu'une seule réflexion : on diminue donc la taille de la zone d'interférence. En revanche, si la taille et la position de l'obturateur sont telles que $d_o = \frac{\ell_o}{\ell}d$, la zone d'interférence est maximale.

4. Tout se passe comme si on disposait de deux sources cohérentes S_1 et S_2 , images directes de S sur les miroirs M_1 et M_2 , distantes de $2d$ et placées à la distance $(L + \ell)$ de l'écran. On observe donc sur l'écran un éclairement de la forme :

$$I(y) = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2dy}{L + \ell} \right)$$

caractéristique de l'interférence de deux ondes cohérentes distantes de $2d$, à la distance $(L + \ell)$ de l'écran d'observation.

5. L'expression de l'interfrange est donnée par $i = \frac{\lambda(L + \ell)}{2d}$. Le nombre de franges observées est donc égal à N_f :

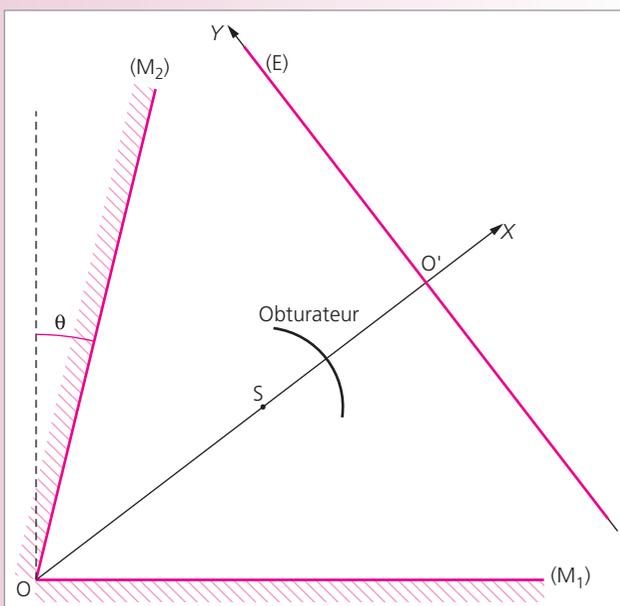
$$N_f = E \left(\frac{D}{i} \right) = E \left(\frac{\ell - L}{\ell} \frac{2d^2}{\lambda(L + \ell)} \right)$$

où $E(X)$ désigne la partie entière de X .

Exercice 11 Système interférentiel à deux miroirs inclinés

On considère deux miroirs plans M_1 et M_2 disposés comme indiqué ci-contre, avec un angle proche de $\pi/2$ (égal à $\pi/2 - \theta$). On place sur la bissectrice OX des deux miroirs une source ponctuelle S émettant une onde monochromatique de longueur d'onde λ . La source S est à la distance d de O .

1. Montrer que la source primaire donne naissance, après une double réflexion des rayons lumineux sur les deux miroirs, à deux sources secondaires S'_1 et S'_2 qu'on caractérisera.



Les deux sources secondaires émettent des ondes cohérentes qui interfèrent. On observe ces interférences sur un écran $O'YZ$ placé perpendiculairement à la bissectrice des deux miroirs ; on note D la distance OO' . On a placé un obturateur de façon à bloquer la lumière issue de S susceptible d'atteindre directement l'écran d'observation.

2. Préciser la taille L du champ d'interférence en fonction de D et θ .

3. Donner l'expression de l'ordre d'interférence $p(M)$ en un point M de l'écran.

4. Quelle est l'aspect de la figure d'interférence ? Quelle est la valeur de l'interfrange ?

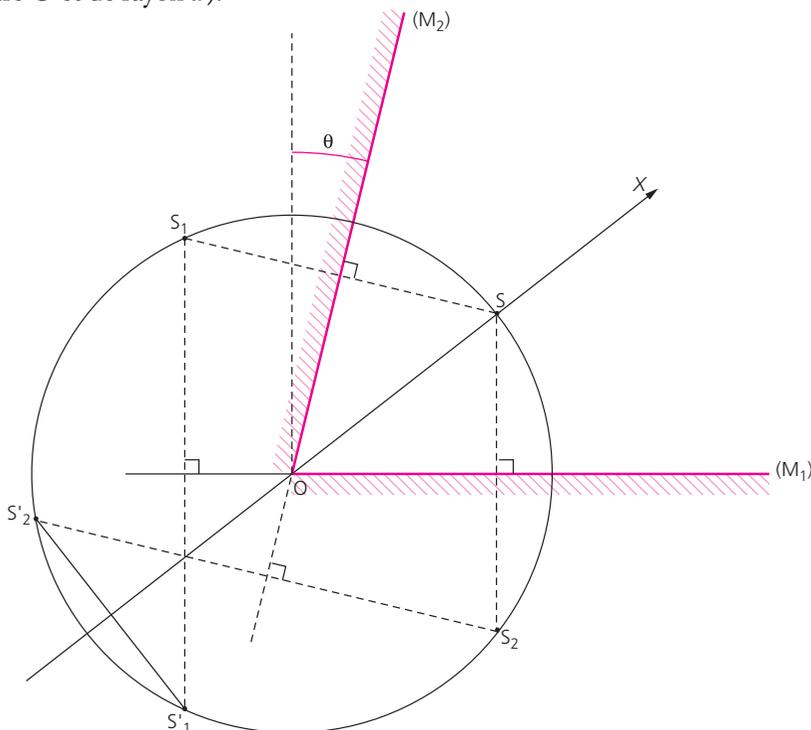
La source S émet maintenant une lumière contenant deux raies monochromatiques de longueur d'onde λ_1 et λ_2 .

5. Donner l'expression de l'éclairement sur l'écran.

Solution

CONSEIL : contrairement à l'exercice précédent, on s'intéresse ici à un système interférentiel à deux ondes issues de la double réflexion de rayons provenant d'une même source. L'exercice consiste de nouveau à déterminer la position des sources équivalentes.

1. La source placée sur la bissectrice émet un faisceau lumineux qui se réfléchit sur M_2 (image S_1), puis sur M_1 (S'_1); après cette double réflexion, le faisceau semble provenir de l'image S'_1 de S par les deux miroirs. De même, le faisceau issu de S se réfléchit sur M_1 (image S_2) puis sur M_2 (image S'_2) et semble provenir après cette double réflexion de l'image S'_2 . S'_1 et S'_2 sont donc des sources secondaires cohérentes telles que $OS = OS'_1 = OS'_2$ (toutes les images sources appartiennent à un cercle de centre O et de rayon d).



2. Le champ d'interférence correspond à la zone où les deux faisceaux, semblant provenir de S'_1 et S'_2 , se superposent. Cette zone (coloriée p. suivante) est limitée par les prolongements des rayons OS'_1 et OS'_2 .

Soit S' le symétrique de S par rapport à O . Remarquons que $S'S_1$ est parallèle à M_2 et que $S'S_2$ est parallèle à M_1 . Les miroirs formant un angle égal à $\pi/2 - \theta$, on a $\widehat{S'S_1S'_1} = \theta$. On en déduit $\widehat{S'OS'_1} = 2\theta$. La zone limitée par OS'_1 et OS'_2 est donc un cône d'angle 4θ . La largeur de la zone d'interférence sur l'écran placé à la distance $D > OS$ de O est donc égale à :

$$L = 2D \tan 2\theta \approx 4\theta D$$

3. L'ordre d'interférence est lié à la différence de marche $\delta(M)$: $p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda}$,

où $\delta(M) = S'_1M - S'_2M \approx \overrightarrow{S'_1S'_2} \cdot \frac{\overrightarrow{S'M}}{S'M}$. Avec $\overrightarrow{S'_1S'_2} = 2d \sin 2\theta \vec{j} \approx 4d\theta \vec{j}$ et $\overrightarrow{S'M} = \overrightarrow{S'O'} + \overrightarrow{O'M} = S'O' \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$, on a donc :

$$\delta(M) = \frac{4Y\theta d}{S'M}$$

Si on considère un point M au voisinage de O' , on a $Y, Z \ll S'O' = D + d$, soit finalement :

$$\delta(M) = \frac{4Y\theta d}{D + d} \quad \text{et} \quad p(M) = \frac{4Y\theta d}{(D + d)\lambda}$$

4. L'éclairement s'écrit : $I(M) = I_0(1 + \cos \varphi(M))$, où $\varphi(M) = 2\pi p(M)$. On a donc :

$$I(Y, Z) = I_0 \left(1 + \cos \frac{8\pi Y\theta d}{(D + d)\lambda} \right)$$

La figure d'interférence est donc constituée de franges parallèles à l'axe $O'Z$.

L'interfrange est définie par la distance entre deux maxima (ou minima) de la figure d'interférence, soit $i = \Delta Y$ pour $\Delta p = 1$. Puisque :

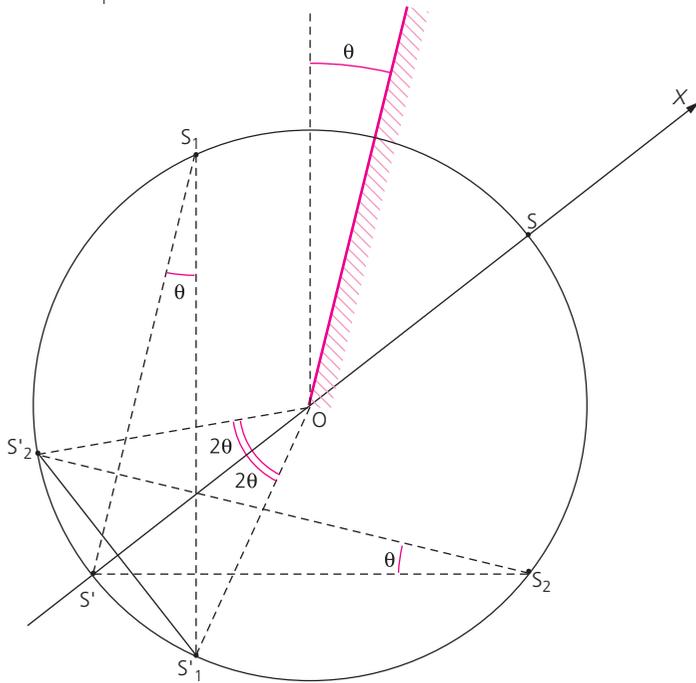
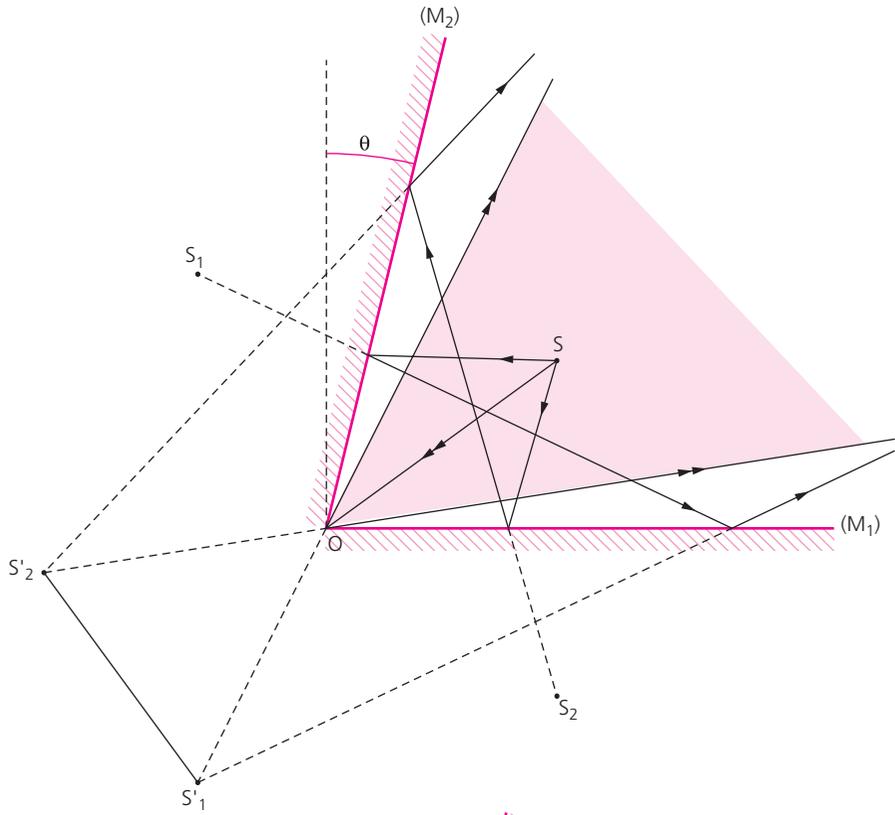
$$\Delta p = \frac{4\theta d}{(D + d)\lambda} \Delta Y$$

on a finalement :

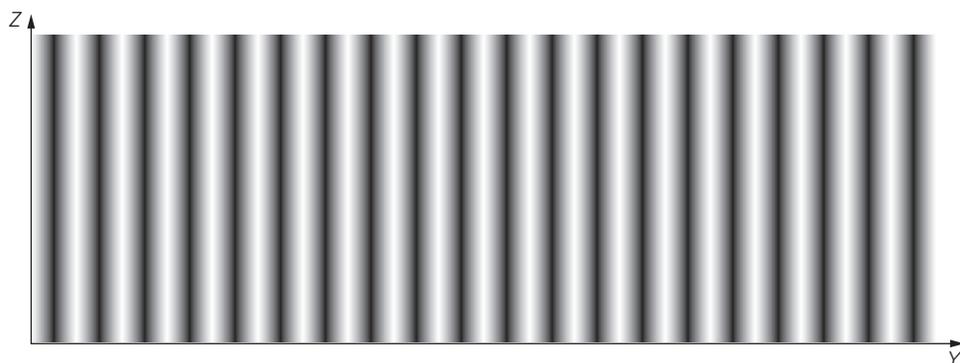
$$i = \frac{(D + d)\lambda}{4\theta d}$$

5. Les deux radiations du doublet étant incohérentes entre elles, elles n'interfèrent pas et on observe sur l'écran la somme de leur intensité : $I(Y, Z) = I_1(Y, Z) + I_2(Y, Z)$. D'après la question précédente, on a donc :

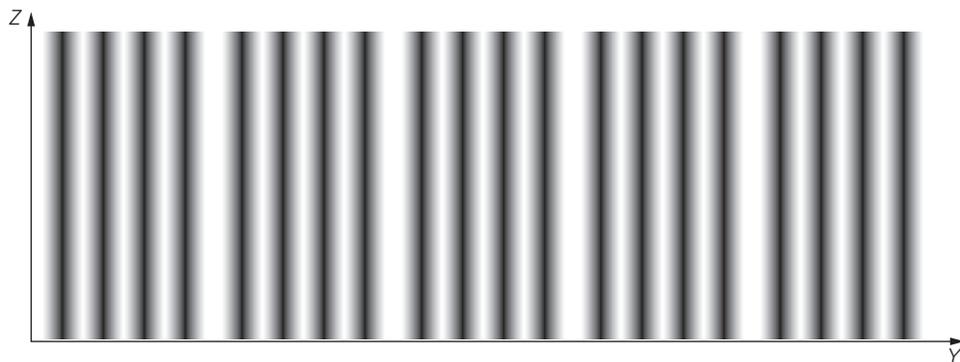
$$\begin{aligned} I(Y, Z) &= I_0 \left(1 + \cos \frac{8\pi Y\theta d}{(D + d)\lambda_1} \right) + I_0 \left(1 + \cos \frac{8\pi Y\theta d}{(D + d)\lambda_2} \right) \\ I(Y, Z) &= I_0 \left(2 + \cos \frac{8\pi Y\theta d}{(D + d)\lambda_1} + \cos \frac{8\pi Y\theta d}{(D + d)\lambda_2} \right) \\ I(Y, Z) &= 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{4\pi Y\theta d}{(D + d)} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \cos \left[\frac{4\pi Y\theta d}{(D + d)} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \right) \end{aligned}$$



La figure ci-dessous donne la figure d'interférence sur l'écran, (a) en lumière monochromatique à $\lambda_1 = 546$ nm et (b) en lumière contenant deux longueurs d'onde $\lambda_1 = 546$ nm et $\lambda_2 = 436,8$ nm. On a pris $\theta = 1^\circ$, $d = 5$ mm et $D = 1$ m. La taille de l'écran suivant Y est de 3,1 cm.



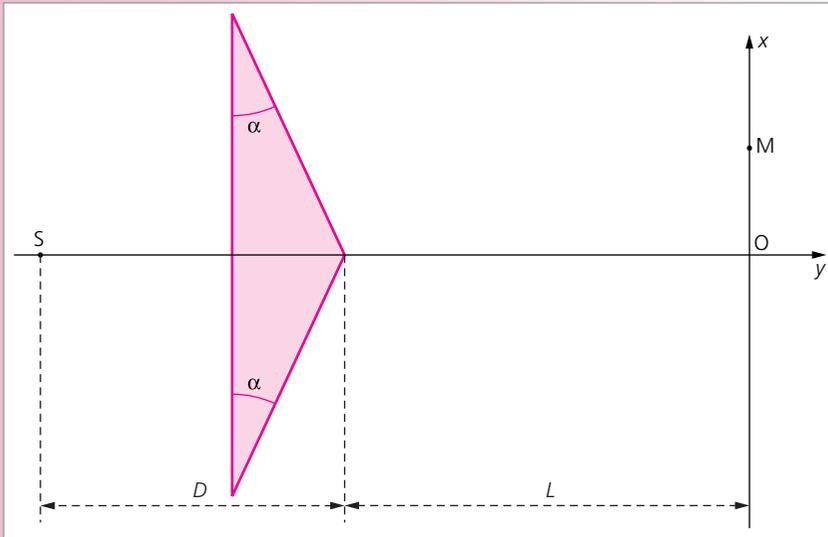
(a)



(b)

Exercice 12 Biprisme de Fresnel en lumière blanche

On considère un biprisme d'angle au sommet α (avec α petit) et d'indice $n = 1,5$. Le biprisme est éclairé par une source de lumière ponctuelle S . On observe la figure d'interférences sur un écran placé perpendiculairement au biprisme à la distance $L = 3$ m de son sommet.



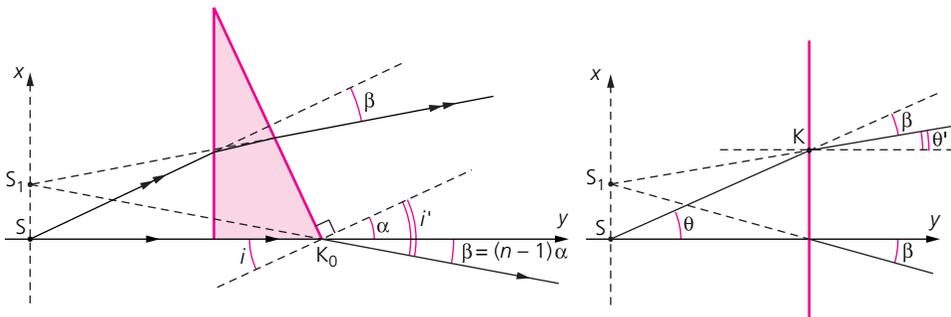
La source, à la distance $D = 2 \text{ cm}$ du sommet du biprisme, émet une lumière blanche ($400 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}$). On effectue l'observation dans le plan de l'écran.

1. Rappeler les caractéristiques de la figure d'interférence lorsque la source émet une seule radiation; on précisera notamment la largeur de la figure d'interférence et le nombre de franges sombres observées sur l'écran.
2. Combien de cannelures sombres observe-t-on en M en lumière blanche? Faire l'application numérique pour $x = 10 \text{ mm}$.

Solution

CONSEIL : ce dispositif, dont on montrera facilement qu'il est équivalent au système interférentiel des trous de Young, est étudié en lumière blanche. Dans la première question, on caractérise la position des sources équivalentes et dans la seconde, on traite le problème de l'interférence de deux ondes contenant le spectre complet du visible.

1. Le système interférentiel est identique à celui des trous de Young avec S_1 et S_2 symétriques par rapport à S , images respectives de S par les deux prismes. Construisons l'image S_1 de S par un des prismes.



La figure précédente représente à gauche la construction de l'image S_1 de S à travers le prisme et à droite la construction de S_1 en négligeant l'épaisseur du prisme.

Le rayon issu de S en incidence normale sur la face d'entrée du prisme atteint la face de sortie avec un angle $i = \alpha$; la loi de réfraction de Descartes donne $i' = ni = n\alpha$. La déviation de ce rayon par le prisme est donc égale à :

$$\beta = i' - \alpha = (n - 1)\alpha$$

Ce résultat est valable pour tout rayon dès que l'angle α est petit : la déviation de tous les rayons traversant le prisme est alors égale à β .

Calculons la position du point S_1 . Pour cela, remarquons que S_1 est l'intersection du faisceau de droites correspondant aux rayons émergent du prisme. Négligeons l'épaisseur du prisme; le rayon SK issu de S et incident sur le prisme avec un angle d'incidence θ émerge du prisme dans la direction S_1K avec un angle θ' (par rapport à l'axe Oy) tel que :

$$\theta' = \theta - \beta$$

Dans le repère $(S; y, x)$, le point K a pour coordonnées $K = (D \cos \theta; D \sin \theta) \approx (D; D\theta)$.

La droite faisant un angle θ' par rapport à l'axe Oz et passant par le point K a pour équation :

$$x - D\theta = \theta'(y - D)$$

soit :

$$x = (\theta - \beta)y + \beta D$$

L'intersection $S_1(y_1, x_1)$ vérifie cette équation quelle que soit la valeur de θ , ce qui impose :

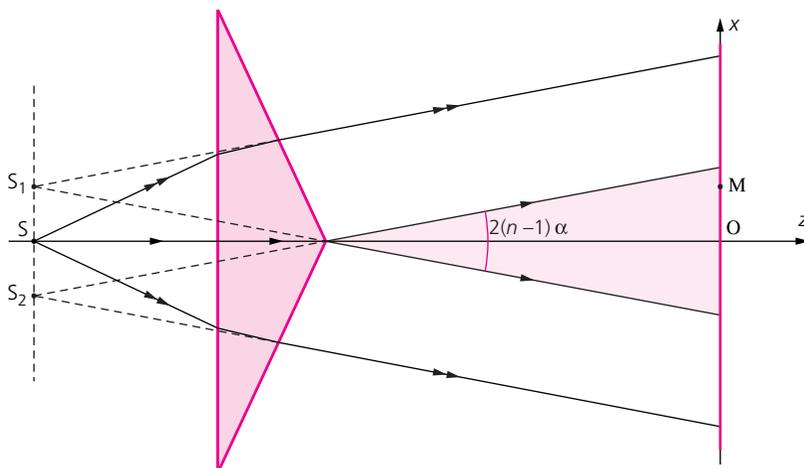
$$y_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = \beta D = (n - 1)\alpha D$$

On obtient de même pour le point S_2 (par symétrie) :

$$y_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = -\beta D = -(n - 1)\alpha D$$

La distance S_1S_2 est donc donnée par :

$$S_1S_2 = 2(n - 1)\alpha D$$



Nous avons vu au début de la solution que l'angle $\widehat{S_1K_0S}$ (et par symétrie, l'angle $\widehat{S_2K_0S}$) est égal à $\beta = (n - 1)\alpha$. La zone d'interférence correspond à la zone de recouvrement des deux faisceaux semblant provenir de S_1 et S_2 (zone colorée sur la figure p. précédente) : c'est la zone comprise entre les rayons S_1K_0 et S_2K_0 . La taille de la zone d'interférence sur l'écran est donc donnée par :

$$d = 2(n - 1)\alpha L$$

La figure d'interférence est caractérisée par une succession de franges claires et sombres, deux franges sombres étant distantes de :

$$i = \frac{\lambda(D + L)}{2(n - 1)\alpha D}$$

2. En lumière blanche, on observe sur l'écran un blanc d'ordre supérieur. La différence de marche $\delta(M)$ au point $M(x)$ est donnée par :

$$\delta(M) = \frac{\overline{S_1S_2SM}}{SM} \approx \frac{S_1S_2x}{L + D} = \frac{2(n - 1)\alpha Dx}{L + D}$$

On observe donc dans le spectroscope un spectre cannelé : les cannelures sombres correspondent aux radiations éteintes $\left(\delta = \frac{2n + 1}{2}\lambda\right)$. Dans le visible, cette condition s'écrit :

$$\lambda_v \leq \frac{4(n - 1)\alpha Dx}{(L + D)(2k + 1)} = \lambda \leq \lambda_r$$

soit :

$$\frac{2(n - 1)\alpha Dx}{(L + D)\lambda_r} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{2(n - 1)\alpha Dx}{(L + D)\lambda_v} - \frac{1}{2}$$

L'application numérique donne $14,9 \leq k \leq 28,4$. On observe donc 14 cannelures en M, correspondant aux valeurs entières de k de 15 à 28.

Interférences à deux ondes par division d'amplitude. Le Michelson

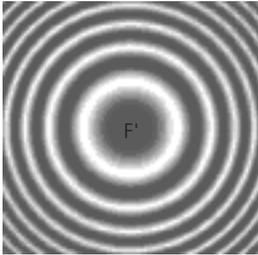
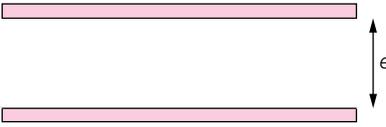
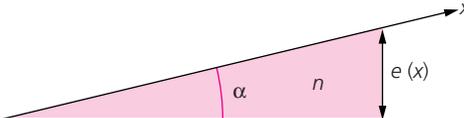
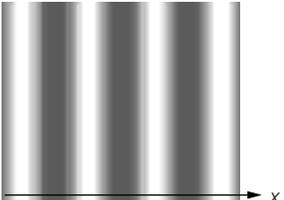
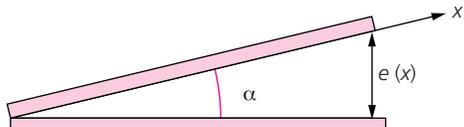
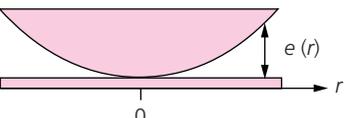
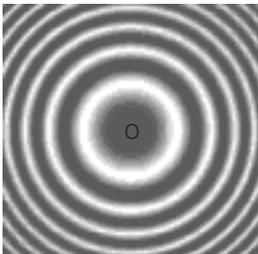
Un peu d'histoire

Albert Abraham Michelson (1852-1931)

Albert Abraham Michelson naît en Prusse en 1852 mais émigre très tôt aux États-Unis. C'est en tant qu'officier de marine qu'il s'intéresse à la physique, avec succès puisqu'il devient professeur à l'université de Chicago en 1893, et reçoit le prix Nobel en 1907.

Michelson est resté célèbre parmi les physiciens grâce à l'interféromètre qui porte son nom. Son idée était d'utiliser un dispositif interférentiel pour mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, milieu hypothétique dans lequel la lumière se serait propagée (on ne pouvait pas imaginer à l'époque qu'une onde puisse se propager dans le vide). Il effectua sa première mesure avec un dispositif rudimentaire en 1881, mesure qu'il affina en 1887 avec Morley grâce à un dispositif plus complet. En 1890, Michelson reprit une idée de Fizeau qui en 1868 avait proposé d'utiliser un montage interférentiel pour mesurer le diamètre des étoiles, comme alternative aux grands télescopes. Il développa pendant plusieurs années le principe des interféromètres stellaires, effectuant la mesure du diamètre de quatre des satellites de Jupiter. Enfin, en 1892, il mesura le mètre étalon de Sèvres, en utilisant comme unité de référence la longueur d'onde de la raie rouge du cadmium. Depuis 1983, le mètre étalon est défini par le trajet parcouru par la lumière dans le vide, pendant une durée de $1/299\,792\,458$ s, définition qui aurait bien surpris Michelson, adepte de l'éther !

INTERFÉRENCES PAR DIVISION D'AMPLITUDE

Type de lame	Type de franges	Forme des franges
<p>Lame de verre à faces parallèles</p> 	Franges d'égale inclinaison	<p>Anneaux</p> 
<p>Lame d'air à faces parallèles</p> 		
<p>Lame de verre d'épaisseur variable</p> 	Franges d'égale épaisseur	<p>Franges rectilignes</p> 
<p>Coin d'air à deux faces planes</p> 		
<p>Coin d'air à une face sphérique (rayon R) et une face plane</p> 	Franges d'égale épaisseur	<p>Anneaux de Newton</p> 

Localisation	Ordre d'interférence
à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille convergente	$p = \frac{\cos r}{\lambda} + \frac{1}{2}$ <p>(si i désigne l'angle d'incidence de l'onde sur la lame, r est l'angle de réfraction avec $\sin i = n \sin r$)</p>
	$p = \frac{\cos i}{\lambda}$
dans un plan voisin de la lame (extérieur ou intérieur à la lame)	$p = \frac{2n\alpha}{\lambda}x + \frac{1}{2}$
	$p = \frac{2\alpha}{\lambda}x$
dans un plan voisin de la lame	$p = \frac{r^2}{R\lambda} + \frac{1}{2}$ <p>(r est la distance à O sur l'écran)</p>

LAMES À FACES PARALLÈLES

Exercice 1 Interférence des ondes réfléchies par une lame à faces parallèles

Un faisceau cylindrique de lumière monochromatique (de longueur d'onde λ) arrive en incidence proche de l'incidence normale sur une lame à faces parallèles. On note e l'épaisseur de la lame et $n = 1,5$ son indice pour cette longueur d'onde.

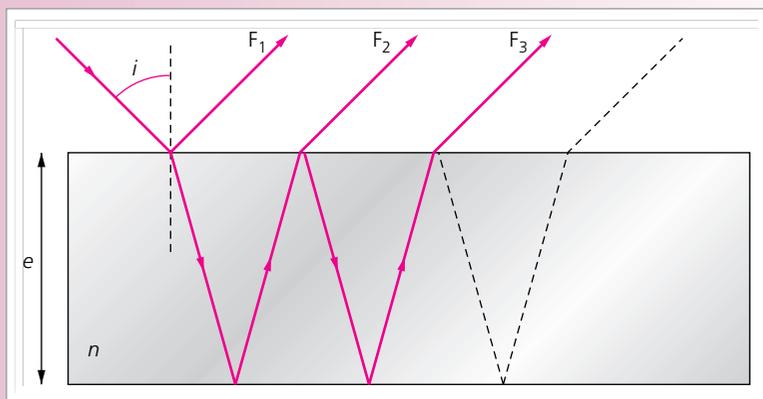
On note F_1 le faisceau directement réfléchi par la face supérieure de la lame et F_i les faisceaux suivants (voir schéma).

1. Montrer que les amplitudes des faisceaux 1 et 2 sont très grandes devant celles des faisceaux suivants.

On rappelle qu'en incidence normale, les coefficients énergétiques de réflexion R et de transmission T à une interface air (indice 1)/verre (indice n) ou verre/air sont donnés par :

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad T = 1 - R.$$

2. En déduire qu'on peut décrire correctement le phénomène en ne considérant que des interférences à deux ondes. Où se forment les franges d'interférence ?



On place un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente disposée parallèlement à la lame. On note f' la distance focale de la lentille.

- Calculer la différence de marche entre les rayons réfléchis correspondant à F_1 et F_2 .
- En déduire l'ordre d'interférence dans la direction i en fonction de n , e , λ et i (on donnera une expression approchée en incidence quasi normale), puis en un point M de l'écran situé à la distance r du centre, en fonction de n , e , λ , f' et r . Exprimer l'ordre d'interférence p_0 au centre de l'écran.
- On suppose que le centre de l'écran correspond à une frange sombre. Calculer le rayon R_k des anneaux brillants.
- Quelle est l'aspect de la figure d'interférence ?

Solution

CONSEIL : cet exercice peut être considéré comme une question de cours. Il s'agit de traiter le cas de l'interférence à deux ondes (il faut le montrer!) pour une lame d'épaisseur constante (franges d'égale inclinaison localisées à l'infini, ou franges d'Haidinger). Si la lame d'épaisseur constante n'est pas à votre programme, qu'importe ! laissez-vous guider par l'énoncé.

1. Notons A_0 l'amplitude du faisceau incident. L'amplitude A_1 du faisceau réfléchi est donnée par $|A_1| = \sqrt{R}A_0$. Le faisceau F_2 est d'abord transmis, puis subit une réflexion avant d'être de nouveau transmis ; l'amplitude A_2 du second faisceau réfléchi par la lame est donnée par $A_2 = \sqrt{R}TA_0$. Raisonnons maintenant par récurrence. Le faisceau F_n ($n > 1$) subit deux transmissions, une à son entrée dans la lame et une à sa sortie ; il subit ensuite $(2n - 3)$ réflexions dans la lame. On a donc :

$$A_n = \sqrt{R}TR^{n-2}A_0 \quad (n > 1)$$

Il suffit alors de remarquer que A_1 et A_2 sont proportionnelles à \sqrt{R} tandis que les amplitudes A_3, A_4, \dots sont au moins en $R\sqrt{R}$. Avec $R = 0,04$, les amplitudes A_1 et A_2 sont environ 20 fois plus grandes que A_3, A_4, \dots

2. D'après la question précédente, on peut ne considérer que l'interférence à deux ondes correspondant aux faisceaux F_1 et F_2 . Les franges d'interférence sont localisées à l'infini (les deux faisceaux étant parallèles) ou dans le plan focal image d'une lentille convergente.

3. Notons i' l'angle que fait le rayon réfracté dans la lame avec la normale à celle-ci. La différence de marche entre deux rayons est donnée par $\delta = \delta_2 - \delta_1$ où $\delta_1 = \lambda/2$ correspond à la réflexion sur la face supérieure de la lame (déphasage égal à π), et $\delta_2 = 2ne \cos i'$ à la différence de marche due à la traversée dans la lame. Il vient donc :

$$\delta = 2ne \cos i' - \lambda/2$$

4. L'ordre d'interférence p dans la direction i est donné par $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne \cos i'}{\lambda} - \frac{1}{2}$. La loi de Descartes pour la réfraction relie l'angle d'incidence i à l'angle réfracté dans la lame i' : $\sin i = n \sin i'$. On a donc $\cos i' = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n}$; on en déduit l'expression de $p(i)$:

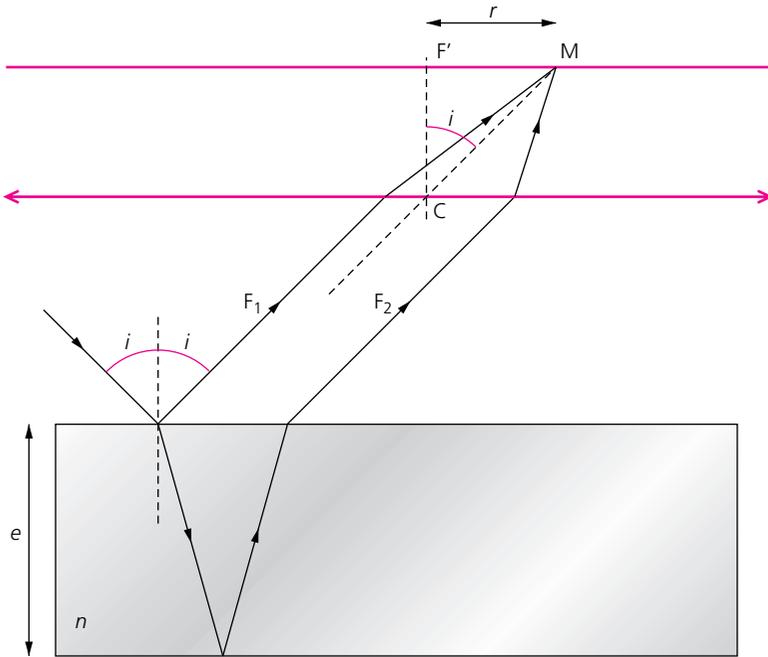
$$p(i) = \frac{2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

En incidence quasi normale, il est possible d'effectuer un développement limité de cette expression :

$$p(i) \approx \frac{2en}{\lambda} - \frac{ei^2}{\lambda n} - \frac{1}{2}$$

Sur l'écran d'observation, dans le plan focal de la lentille, on a $r = F'M = f' \tan i \approx f'i$. On a donc :

$$p(r) \approx \frac{2en}{\lambda} - \frac{er^2}{\lambda n f'^2} - \frac{1}{2}$$



L'ordre d'interférence p_0 au centre de l'écran est donné par :

$$p_0 = p(0) \approx \frac{2en}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

5. Les franges d'interférence sont données par $p(r) = \text{constante}$: ce sont donc des anneaux concentriques. Les franges brillantes sont obtenues pour $p(R_k)$ entiers tandis que les franges sombres correspondent à $p(R'_k)$ demi-entiers. Le centre de l'écran correspondant à une frange sombre, l'ordre d'interférence au centre de l'écran s'écrit donc $p_0 = N + 1/2$, où N est entier. Le premier anneau brillant est obtenu pour $p(R_1) = N$, le deuxième pour $p(R_2) = N - 1$, etc. jusqu'au k -ième anneau brillant, correspondant à $p(R_k) = N + 1 - k$. On a alors :

$$p(R_k) = \frac{2en}{\lambda} - \frac{eR_k^2}{\lambda n f'^2} - \frac{1}{2} = -\frac{eR_k^2}{\lambda n f'^2} + N + \frac{1}{2} = N + 1 - k$$

$$\frac{eR_k^2}{\lambda n f'^2} = k - \frac{1}{2}$$

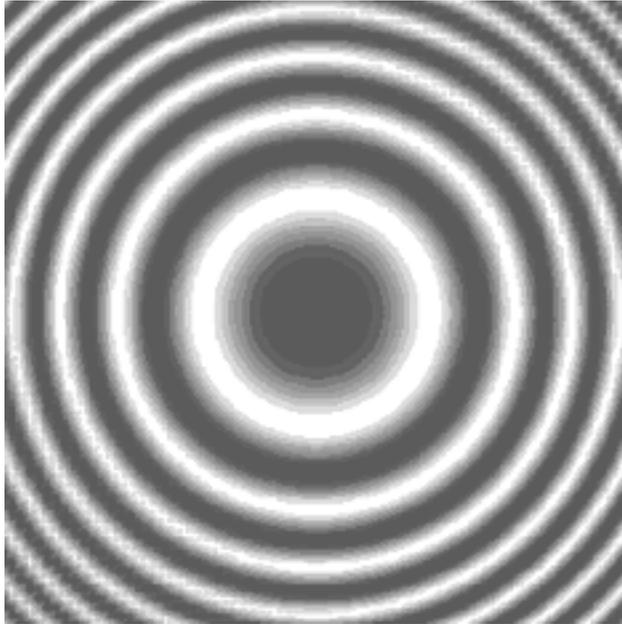
Soit R_k :

$$R_k = \sqrt{\frac{\lambda n f'^2 (k - 1/2)}{e}}$$

6. Les interférences à deux ondes correspondent à un éclairement I tel que :

$$I(M) = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p(r))$$

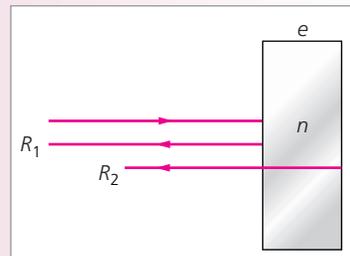
L'aspect de la figure d'interférence est donné sur la figure ci-dessous :



Exercice 2 Irisation d'une lame d'eau

On considère une lame d'eau dans l'air ; l'épaisseur de la lame est notée e et son indice est égal à 1,3. Le Soleil éclaire la lame en incidence normale. On rappelle les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$



1. Justifier les propositions suivantes : « les deux rayons R_1 et R_2 , R_1 directement réfléchi sur la face d'entrée de la lame et R_2 ayant subi un aller-retour dans la lame, ont à peu près même amplitude » et « nous pouvons limiter l'étude à l'interférence des deux ondes associées à R_1 et R_2 ».

2. Quel est le déphasage entre ces deux rayons ?

3. Écrire, en un point M de l'espace, le champ électrique résultant et l'intensité associée aux deux ondes.

4. À quelle condition la lame apparaîtra-t-elle colorée ?

Solution

CONSEIL : les premières questions de cet exercice sont classiques (interférences à deux ondes par le biais d'une lame à faces parallèles). Seule la question 4 est atypique : il s'agit, en lumière polychromatique (la lumière du Soleil contient tout le spectre du visible), de trouver une condition pour que la lame paraisse colorée et qu'elle ne renvoie que certaines longueurs d'onde. Dans le cas contraire, elle paraîtra blanche. On étudiera donc les variations de l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde.

1. Reprenons les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission aux interfaces air/eau et eau/air (avec $n(\text{air}) = 1$ et $n(\text{eau}) = 1,5$). Nous avons :

• pour l'interface air/eau : $r_1 = -0,2$; $t_1 = 0,8$.

• pour l'interface eau/air : $r_2 = 0,2$; $t_2 = 1,2$.

Notons A_0 l'amplitude de l'onde incidente dans l'air. Le rayon R_1 subit une seule réflexion air/eau. Son amplitude est égale à :

$$A_1 = r_1 A_0$$

A.N. $A_1 = -0,2A_0$.

Le rayon R_2 subit une transmission air/eau, une réflexion eau/air et une transmission eau/air :

$$A_2 = t_1 r_2 t_2 A_0$$

A.N. $A_2 = 0,192 A_0$.

Les deux amplitudes A_1 et A_2 sont proches. La différence de signe signifie que les deux ondes sont déphasées de π .

Pour négliger les réflexions multiples dans l'étude et ne considérer que l'interférence des deux ondes associées à R_1 et R_2 , il faut que les amplitudes des ondes portées par les rayons ayant subi plus d'une réflexion dans la lame d'eau soient négligeables. Calculons l'amplitude de l'onde ayant subi deux réflexions dans la lame :

$$A_3 = t_1 (r_2)^3 t_2 A_0$$

A.N. $A_3 = 0,0077A_0$.

Cette amplitude est bien négligeable devant $A = A_1 = A_2$ (environ 25 fois plus faible) et elle sera d'autant plus faible que le nombre de réflexions sera grand.

2. Le déphasage entre les deux ondes 1 et 2 est lié au chemin parcouru par R_2 dans la lame. Choisissons l'onde 1 comme référence de phase : l'onde 2 est déphasée de π (réflexion air/eau du rayon 1) et a parcouru la distance $2e$ dans un milieu d'indice n , d'où une différence de marche $\delta = 2ne$. Le déphasage entre les deux ondes s'écrit finalement :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne + \pi$$

3. On observe l'interférence entre les deux ondes planes, déphasées de φ ; le champ électrique résultant de la superposition des deux ondes s'écrit :

$$E(M) = A \left(e^{ikx} + e^{i(kx+\varphi)} \right)$$

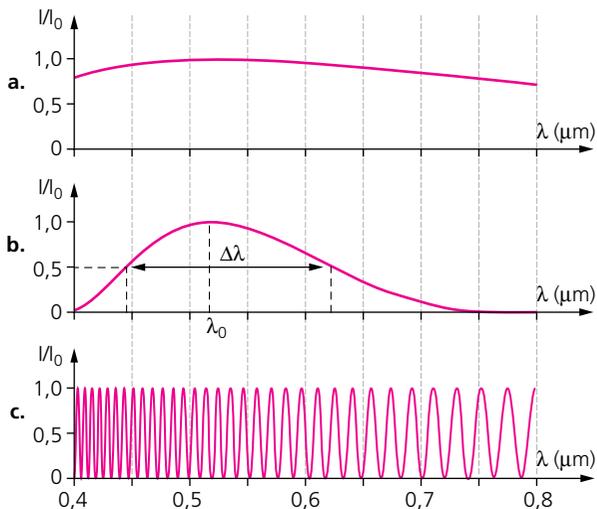
où x désigne la direction de propagation des deux ondes planes.

L'intensité associée s'écrit (avec I_0 l'intensité maximale) :

$$I(x, y) = 2KA^2(1 + \cos \varphi) = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \varphi)$$

où K est une constante.

4. Remarquons que l'intensité lumineuse en un point M de l'espace ne dépend pas de la position du point puisque φ est indépendant de x et y . Les courbes ci-contre montrent les variations de l'intensité lumineuse I en fonction de la longueur d'onde (400 nm < λ < 800 nm) pour des épaisseurs (a) $e = 0,1 \mu\text{m}$, (b) $e = 0,3 \mu\text{m}$ et (c) $e = 10 \mu\text{m}$.



L'intensité lumineuse dépend de la longueur d'onde; éclairée en lumière blanche, la lame renvoie une intensité lumineuse plus ou moins forte en fonction de la longueur d'onde du spectre visible. Nous voyons que pour e petit ($0,1 \mu\text{m}$), l'intensité lumineuse est à peu près égale à I_0 quelle que soit la longueur d'onde : la lame apparaîtra blanche puisqu'elle renvoie toute la lumière du spectre avec la même intensité. Pour $e = 10 \mu\text{m}$, l'intensité lumineuse varie très rapidement et atteint sa valeur maximale pour de nombreuses valeurs de la longueur d'onde. La lame ne renvoie qu'un nombre discret de longueurs d'onde mais si ce nombre est très grand, l'œil moyenne leurs valeurs et la lame apparaît à nouveau blanche. Pour $e = 0,3 \mu\text{m}$ en revanche, l'intensité atteint sa valeur maximale pour une seule valeur de la longueur d'onde et décroît nettement autour : la lame apparaîtra alors de la couleur associée à la longueur d'onde λ_0 du maximum.

Quel critère dégager pour discriminer les trois comportements mis en évidence ? C'est la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ qui nous permet de conclure. Considérons le cas (b) : à la valeur $1/2$ correspond sur la courbe $I(\lambda)/I_0$ deux valeurs de longueurs d'onde espacées de $\Delta\lambda$. Plus généralement, si $\Delta\lambda$ ne peut être défini, cela correspondra au cas (a) ; si $\Delta\lambda$ est très faible, on sera dans le cas (c) ; enfin, si $\Delta\lambda$ est unique et de l'ordre de la gamme de longueurs d'onde considérées, on est assuré d'être dans le cas (b). Évaluons la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$:

$$I = \frac{I_0}{2} = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \varphi)$$

d'où :

$$\cos \varphi = 0$$

soit :

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2ne + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Deux valeurs successives λ_1 et λ_2 vérifiant cette condition (avec $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$) sont telles que :

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} 2ne + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{\lambda_1} 2ne + \pi = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$$

On obtient :

$$e = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4n \Delta\lambda}$$

Imposons que la longueur d'onde λ_0 corresponde à un maximum :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne + \pi = 2K\pi$$

$$e = (2K - 1) \frac{\lambda_0}{4n}$$

On doit donc avoir K tel que :

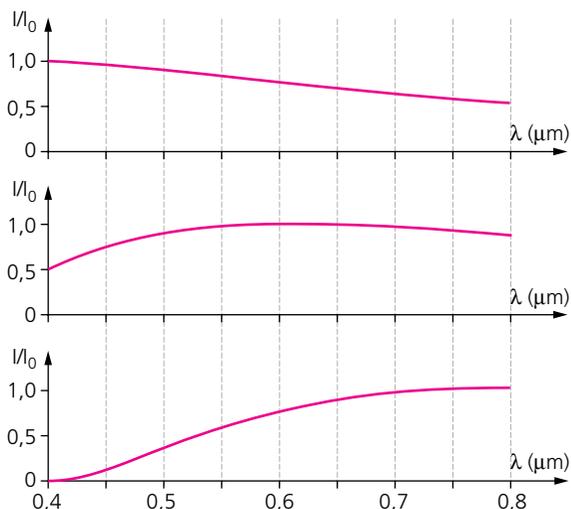
$$K \approx \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_0 \Delta\lambda}$$

Avec $\Delta\lambda$ de l'ordre de 100 nm, on a $\lambda_1 = \lambda_0 - \Delta\lambda/2$ et $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$. On procède de la manière suivante : on choisit K tel que $K \approx \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_0 \Delta\lambda}$; prenons par exemple $\lambda_0 = 400$ nm (bleu), 600 nm (jaune) et 800 nm (rouge). On obtient $K = 2$ ou 3. On détermine alors e avec $e = (2K - 1) \frac{\lambda_0}{4n}$.

La variation de l'intensité lumineuse I en fonction de la longueur d'onde est donnée sur la figure ci-dessous pour $K = 1, 2$ ou 3.

• Pour $K = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} e(\text{bleu}) &\approx 0,077 \mu\text{m}, \\ e(\text{jaune}) &\approx 0,10 \mu\text{m}, \\ e(\text{rouge}) &\approx 0,15 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

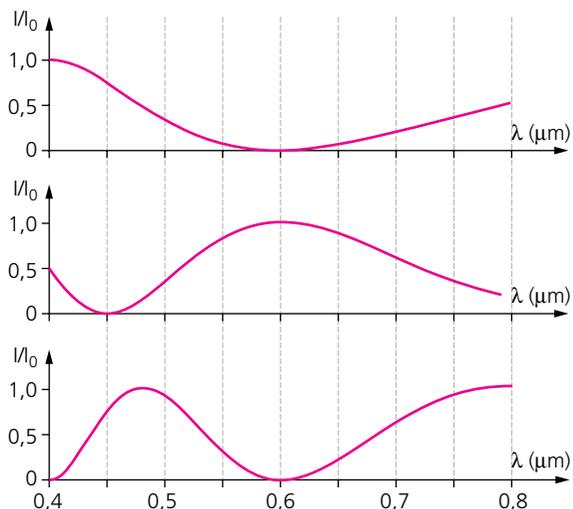


- Pour $K = 2$, on obtient :

$$e(\text{bleu}) \approx 0,23 \mu\text{m},$$

$$e(\text{jaune}) \approx 0,34 \mu\text{m},$$

$$e(\text{rouge}) \approx 0,46 \mu\text{m}.$$

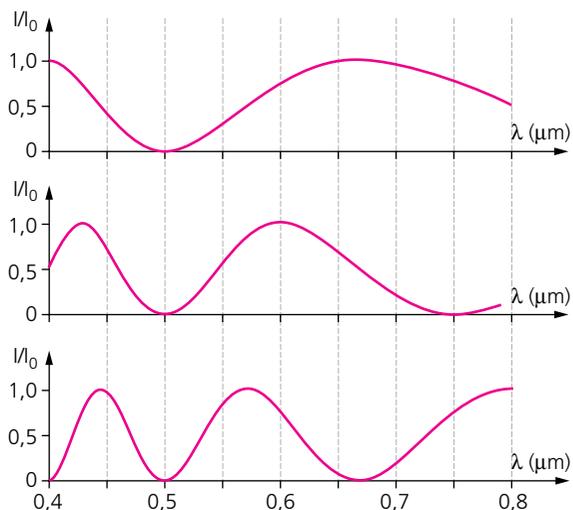


- Pour $K = 3$, on obtient :

$$e(\text{bleu}) \approx 0,38 \mu\text{m},$$

$$e(\text{jaune}) \approx 0,57 \mu\text{m},$$

$$e(\text{rouge}) \approx 0,77 \mu\text{m}.$$



En conclusion, pour des épaisseurs de lame de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}$, les longueurs d'onde sont mal séparées car l'intensité varie peu sur la gamme de longueurs d'onde du visible. Pour des épaisseurs de lame supérieures à $0,4 \mu\text{m}$, l'intensité varie rapidement sur la gamme du visible de sorte qu'il est difficile d'observer une seule longueur d'onde. La meilleure séparation est obtenue pour des épaisseurs de lame de l'ordre de $0,3 \mu\text{m}$. Autour de cette valeur, une faible variation d'épaisseur provoque un changement de couleur de la lame, ce qui explique l'aspect irisé de certaines lames d'eau, par exemple des bulles de savon (d'indice voisin de celui de l'eau).

Exercice 3 Traitement anti-reflet des vitres

Le traitement anti-reflet d'un verre consiste à déposer sur une vitre de verre d'indice $n_1 = 1,5$ une couche mince d'un matériau d'indice n_2 . Supposons qu'une lame non traitée, d'épaisseur e et d'indice n , soit éclairée en incidence normale par une lumière monochromatique d'intensité I_0 .

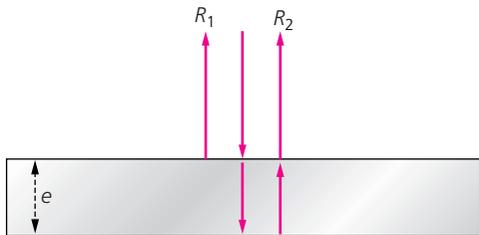
1. Montrer que l'on peut réduire l'étude à celle de l'interférence de deux ondes que l'on précisera.
2. À quelle condition l'intensité lumineuse (pour une longueur d'onde donnée) de l'onde réfléchie par la vitre est-elle nulle ?
3. Lorsque la lumière incidente est blanche, montrer que l'on peut atténuer au maximum les radiations visibles.

Solution

CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent.

1. Reprenons le résultat de l'exercice précédent : on peut limiter l'étude à celle de l'interférence de deux rayons, celui, R_1 , directement réfléchi par la lame et celui, R_2 , qui effectue un aller-retour dans la lame avant de ressortir dans la même direction que R_1 .

La figure ci-contre montre les rayons R_1 et R_2 susceptibles d'interférer (tous les rayons représentés se propagent en fait dans la même direction que le rayon incident).



2. Toujours d'après l'exercice précédent, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \varphi)$$

avec

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne + \pi$$

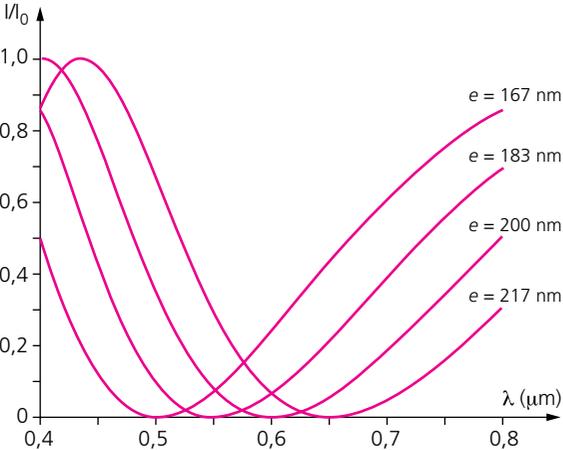
Cette intensité est nulle si $\cos \varphi = -1$, soit :

$$(2k + 1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne + \pi \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

$$e = k \frac{\lambda}{2n} \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

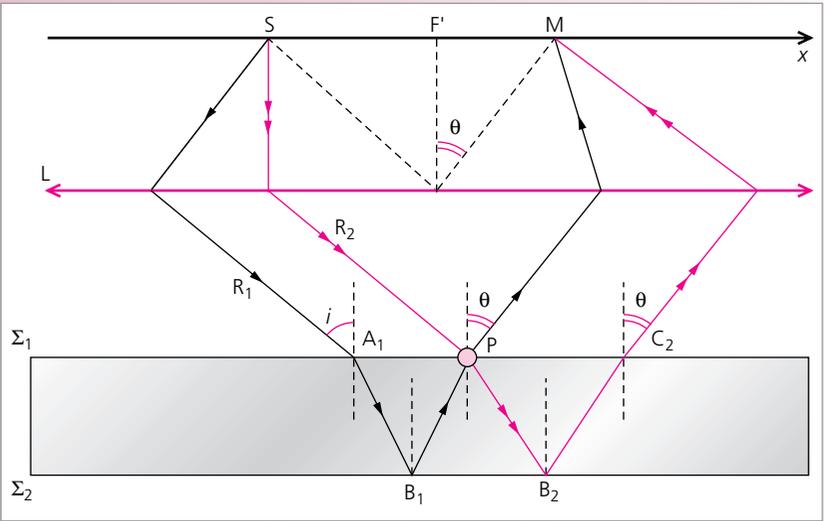
3. L'épaisseur e de la lame peut conduire à éteindre complètement une longueur d'onde mais pas toutes, puisque la condition établie en 2. ne peut pas être vérifiée pour toutes les longueurs d'onde du visible. Une solution pour atténuer au maximum les reflets de la vitre consiste à annuler une des radiations centrales, de sorte que les autres longueurs d'onde (voisines de la centrale) aient une intensité faible. Notons qu'il est souhaitable de prendre $k = 1$, afin que l'intensité varie peu.

La figure ci-contre illustre les variations de l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde pour quelques radiations centrales éteintes. En pratique, on ne construit pas de vitres de si faible épaisseur mais on accole à la vitre une pellicule d'épaisseur e . La lumière réfléchie est essentiellement un mélange de violet et de rouge.



Exercice 4 Franges de Whezwell-Quetet

Une source ponctuelle S est située dans le plan focal objet d'une lentille (F' , x , y). On note f' la distance focale de la lentille. Le faisceau parallèle issu de la lentille tombe avec une incidence notée i sur une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n , les faces de la lame étant perpendiculaires à l'axe optique de la lentille. La face supérieure de la lame Σ_1 est dépolie, ce qui provoque un phénomène de diffusion de la lumière incidente ; la face inférieure de la lame Σ_2 est réfléchissante. On admet que la diffusion de la lumière par une particule produit un déphasage qui ne dépend que de la taille et de la forme de cette particule.



On considère les interférences de rayons diffusés par la même particule, c'est-à-dire typiquement de deux rayons R_1 et R_2 : le rayon R_1 incident en A_1 sur Σ_1 est réfracté dans la lame, subit une réflexion sur Σ_2 , et chemine de Σ_2 vers Σ_1 qu'il atteint en P où se trouve une particule diffusante ; il est alors diffusé par la particule P dans la direction θ . Le rayon R_2 arrive directement en P sur Σ_1 , est diffusé par P dans la lame vers Σ_2 qui le réfléchit vers Σ_1 où il subit finalement une réfraction avec un angle de sortie égal à θ . La lumière portée par les deux rayons R_1 et R_2 est en fait diffusée par P dans toutes les directions mais on ne considère qu'une direction θ particulière.

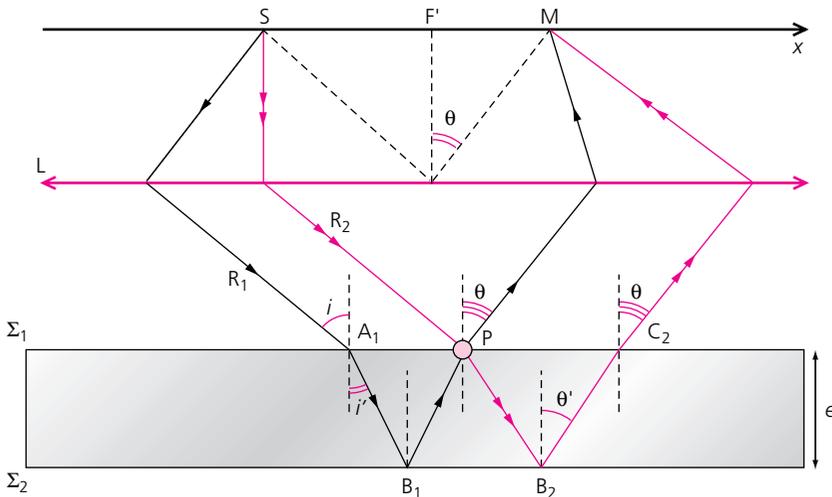
Dans la suite, on considère des angles i et θ faibles.

1. Calculer la différence de chemins optiques des trajets suivis par R_1 et R_2 .
2. Quelle est la forme des franges d'interférence observées dans le plan focal objet de la lentille (F' , x , y) ?

Solution

1. Considérons les chemins optiques SA_1B_1P le long du rayon R_1 et SPB_2C_2 le long du rayon R_2 . La différence de marche entre les deux rayons (dans la direction θ) est :

$$\delta = [SA_1B_1PM] - [SPB_2C_2M]$$



Puisque $[SA_1] = [SP]$ (la lentille n'introduit pas de différence de marche entre deux rayons issus de la source), on a : $\delta = [A_1B_1PM] - [PB_2C_2M]$

Notons i' (respectivement θ') l'angle de réfraction dans la lame pour un angle d'incidence égal à i (respectivement θ). La loi de Descartes pour la réfraction donne, pour des angles i et θ faibles : $i' = i/n$ et $\theta' = \theta/n$.

Par ailleurs, on a : $A_1B_1 = B_1P = e/\cos i'$ et $PB_2 = B_2C_2 = e/\cos \theta'$. Pour de faibles angles, $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$, soit finalement :

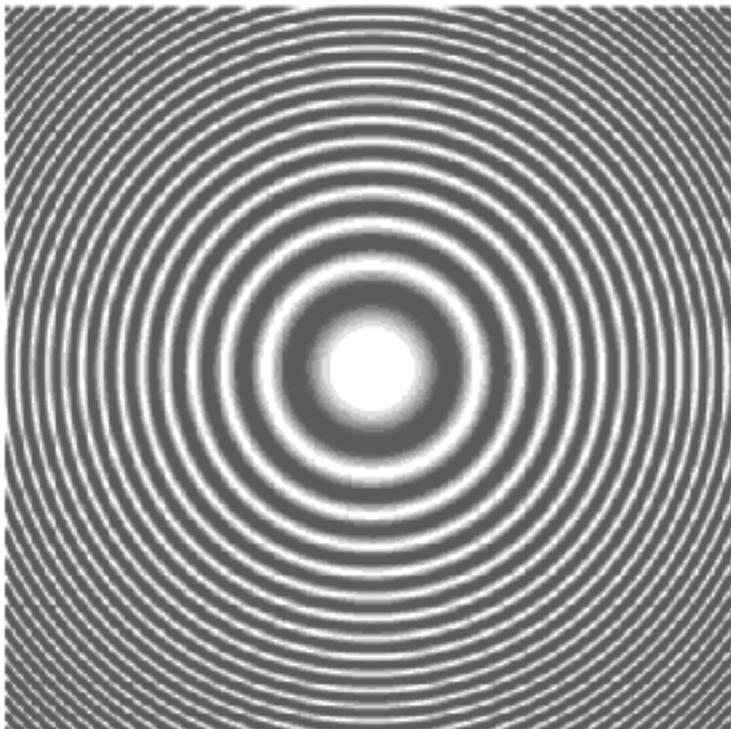
$$\delta = 2ne \left(\frac{1}{\cos} - \frac{1}{\cos \theta'} \right) \approx 2ne \left(\frac{1}{1 - i'^2} - \frac{1}{1 - \theta'^2} \right) \approx 2ne (i'^2 - \theta'^2)$$

D'où $\delta \approx 2 \frac{e}{n} (i^2 - \theta^2)$

2. Les deux rayons déphasés de $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$ interfèrent en un point M de l'écran d'observation, placé dans le plan focal de la lentille (le plan focal objet pour la source S devient le plan focal image pour les rayons émergeant de la lame, le sens de propagation de la lumière étant inversé). Si $r = F'M$ désigne la distance de M au centre de l'écran, correspondant à la projection du centre de la lentille sur l'écran, on a $\tan \theta = r/f' \approx \theta$. On observe l'interférence de deux ondes planes ; l'intensité résultante s'écrit :

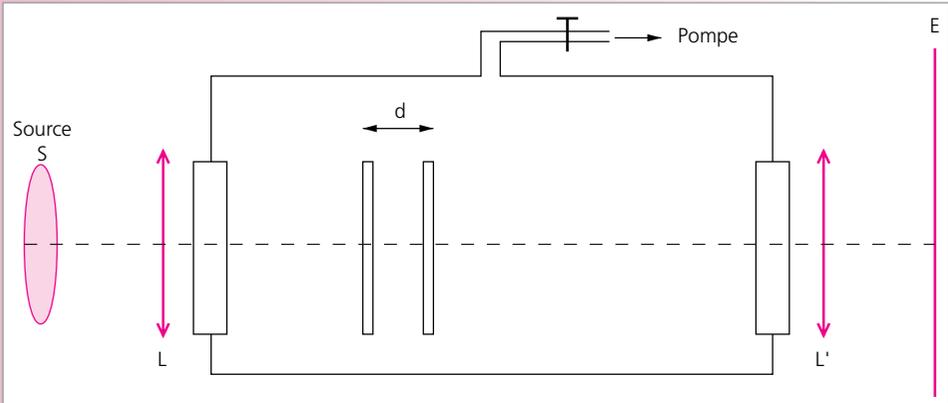
$$I(r) = I_0(1 + \cos \delta(r)) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2e}{n} \left(i^2 - \frac{r^2}{f'^2} \right) \right) \right)$$

Les franges sont des cercles concentriques alternativement clairs et sombres.



Exercice 5 Mesure interférentielle de l'indice d'un gaz

Pour mesurer l'indice de l'air, on fait le vide dans une enceinte contenant un ensemble de deux lames de verre parallèles distantes de d (et d'épaisseur négligeable). L'ensemble est éclairé par une source S étendue monochromatique.



1. Qu'observe-t-on sur l'écran ? Y a-t-il un intérêt à « traiter » les lames de verre ?
 2. L'indice de l'air, dans les conditions normales, est voisin de 1,003. Combien d'anneaux voit-on défilier au centre lorsqu'on fait le vide dans l'appareil ? Dans quel sens se déplacent-ils ?
- Application numérique : $\lambda = 0,56 \mu\text{m}$; $d = 1 \text{ mm}$.

Solution

CONSEIL : cet exercice est une application de l'exercice 1 (franges d'égale inclinaison données par une lame d'air d'épaisseur constante). Attention cependant, l'observation est faite ici par transmission et non par réflexion. Pour la lame d'air, le déphasage de π entre la première et la seconde onde n'existe ni en réflexion ni en transmission. Pour les sceptiques, nous vous renvoyons à l'exercice 6, où ce point est traité dans les questions 1 et 2 pour une lame de verre.

1. On observe des franges d'égale inclinaison, localisées à l'infini, et donc dans le plan focal image E de la lentille. Avec des verres non traités, le contraste n'est pas bon ; il est fortement conseillé (si possible) d'utiliser plutôt un interféromètre de Fabry-Pérot (voir chapitre suivant).

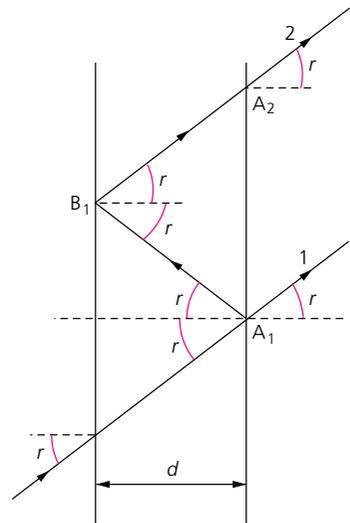
2. Pour de l'air d'indice n , la différence de marche est, entre deux rayons consécutifs qui interfèrent :

$$\delta = [A_1B_1A_2] = n(A_1B_1 + B_1A_2)$$

$$\delta = 2nd \cos r$$

(en transmission, on n'a pas de déphasage supplémentaire), soit :

$$\delta = 2nd \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) \quad \text{si } r \text{ est petit}$$



Le rayon d'un anneau va être proportionnel à r : pour δ donné (on suit un anneau donné), si n décroît, r décroît également. Un anneau d'ordre m fixé voit donc son rayon diminuer, et va disparaître (éventuellement) au centre si n diminue.

La variation d'ordre d'interférence au centre est : $\Delta p = \frac{2d}{\lambda}(n - 1)$

A.N. $\Delta p = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,56 \cdot 10^{-6}} (3 \cdot 10^{-3}) = 10,7.$

Ainsi, 10 anneaux disparaissent au centre lors de l'établissement du vide.

Inversement, il suffit de mesurer la variation d'ordre d'interférence au centre pour avoir une mesure de l'indice n :

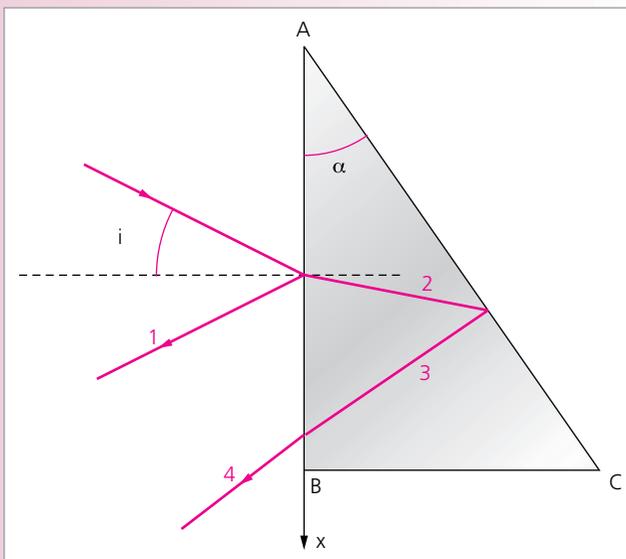
$$n = \frac{\Delta p \lambda}{2d} + 1$$

Conclusion : cet appareil est capable de détecter une variation d'indice de $3 \cdot 10^{-3}$ lors de l'établissement du vide.

LAMES OU COINS D'ÉPAISSEUR VARIABLE

Exercice 6 Interférences par réflexion sur un prisme

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ arrive avec l'incidence i sur un prisme ABC en verre, d'indice $n = 1,5$ pour cette longueur d'onde, et d'angle au sommet α . On étudie l'interférence des deux ondes issues de la réflexion de l'onde incidente sur les faces AB et AC.



1. Comparer les amplitudes des champs électriques associés aux ondes qui interfèrent (on utilisera les résultats de l'exercice 1).

2. Pourrait-on observer des interférences par transmission ?

3. Où sont localisées les franges d'interférence (on ne mènera pas de calcul) ?

On se place maintenant dans le cas où l'onde arrive en incidence normale sur la face AB.

4. Calculer la figure d'interférence sur la face AB, qu'on assimile au plan de localisation des franges, en fonction de x , α , et n pour α petit.

Solution

CONSEIL : cet exercice porte sur les franges d'égale épaisseur (ou franges de Fizeau) d'une lame à épaisseur variant linéairement (pour les connaisseurs !). Les questions 1 à 3 sont qualitatives ; on se souviendra de l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour une incidence quasi normale : $r = \frac{1-n}{1+n}$ et $t = \frac{2}{1+n}$. Pour traiter la question 4, nous vous conseillons d'exprimer les composantes des vecteurs d'onde associés aux deux ondes susceptibles d'interférer, les champs électriques qui leurs sont associés s'écrivant alors aisément.

1. Le tableau suivant regroupe les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface air-verre (on se place en incidence quasi-normale et on utilise les coefficients de réflexion et de transmission donnés dans l'exercice 1).

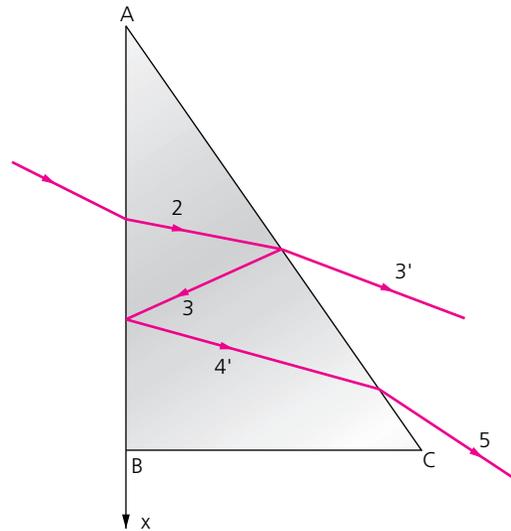
	Expression littérale et A.N.
Onde 1 réfléchie sur AB	$A_1 = \frac{1-n}{1+n}A = -0,2A$
Onde 2, issue de 1 et transmise en AB	$A_2 = \frac{2}{1+n}A = 0,8A$
Onde 3, issue de 2 et réfléchie sur AC	$A_3 = \frac{n-1}{n+1}A_2 = 0,16A$
Onde 4, issue de 3 et transmise en AB	$A_4 = \frac{2n}{n+1}A_3 = 0,192A$

Les deux ondes qui interfèrent en réflexion sont les ondes 1 et 4, dont les champs électriques ont les amplitudes respectives $-0,2A$ et $0,192A$. Les ondes ont à peu près la même amplitude et sont déphasées de π (signe $- = \exp(i\pi)$ pour la première amplitude).

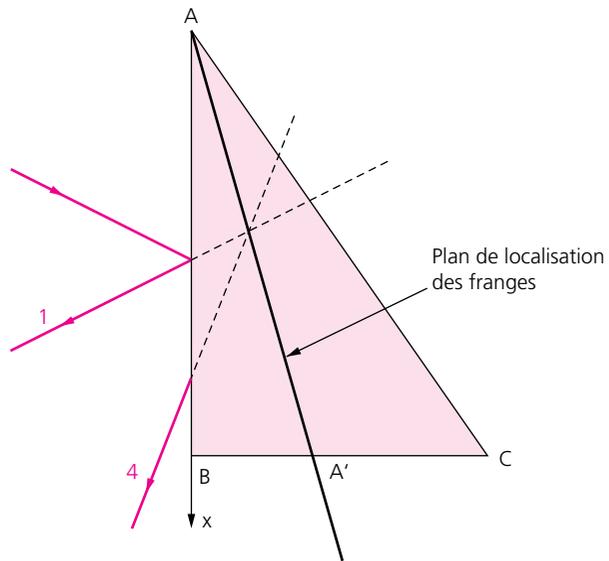
2. On construit un tableau similaire pour deux ondes susceptibles d'interférer en transmission :

	Expression littérale et A.N.
Onde 3', issue de 2 et transmise en AC	$A_{3'} = \frac{2n}{1+n}A_2 = 0,96A$
Onde 4', issue de 3 et réfléchie en AB	$A_{4'} = \frac{n-1}{n+1}A_3 = 0,032A$
Onde 5, issue de 4' et transmise en AC	$A_5 = \frac{2n}{n+1}A_{4'} = 0,0384A$

Les deux ondes susceptibles d'interférer en transmission sont les ondes 3' et 5, d'amplitudes respectives $0,96A$ et $0,0384A$ (notons qu'ici, il n'y a pas de déphasage de π entre les deux ondes). En transmission, on observera essentiellement l'onde 3' d'amplitude très importante devant celle de l'onde 5. Le phénomène d'interférence entre ces deux ondes ne sera donc pas très net (notamment, on ne pourra pas voir d'extinction).

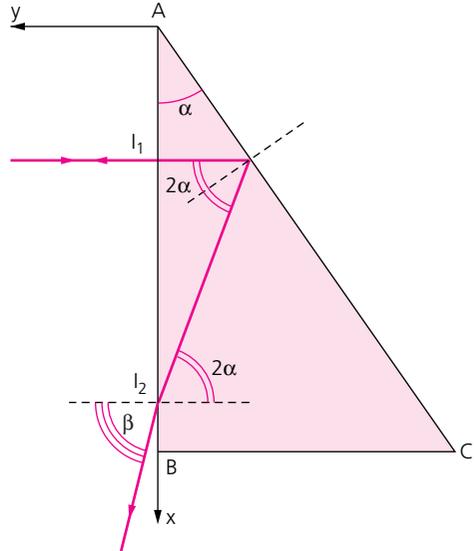


3. Les deux ondes interfèrent à l'endroit où elles se rencontrent; sur la figure ci-contre, il apparaît que cette zone est située dans la lame ou dans son voisinage proche (les angles d'incidence, de réfraction et l'angle du prisme étant faibles). Dans la pratique, on effectue l'observation « sur la lame », ce qui est un abus de langage pour dire qu'on observe la figure d'interférence des ondes portées par les rayons 1 et 2 sur la face AB (question suivante). Nous développons dans la question 4 le cas de l'incidence normale.



4. On se place dans le cas où l'onde arrive en incidence normale sur le prisme. Précisons la zone d'interférence des rayons 1 et 2 dans ce cas. Le rayon 1 est porté par la droite d'équation $x = x_0$; le rayon 2 est porté par la droite passant par le point $I_2(x_0(1 + \tan \alpha \tan 2\alpha); 0)$ et faisant un angle β avec l'axe Ax . L'équation de cette droite s'écrit donc $x - x_0(1 + \tan \alpha \tan 2\alpha) = y \tan \beta$. Son intersection avec la droite $x = x_0$ donne le point I d'intersection des rayons : $I(x_0; -x_0 \tan \alpha \tan 2\alpha / \tan \beta)$. L'angle β est donné par la loi de la réfraction : $\sin \beta = n \sin 2\alpha$.

Avec α petit, il vient $\beta \approx 2\alpha n$, soit $I(x_0; -x_0\alpha/n)$: le point I est paramétré par x_0 . Lorsque x_0 varie, le point I décrit la zone d'interférence d'équation $y = -x\alpha/n$, autrement dit, la zone d'interférence est une droite faisant un angle $-\alpha/n$ (faible) avec l'axe Ax . Dans le calcul qui suit, on suppose que cette droite est confondue avec Ax : la figure d'interférence correspond à la répartition d'intensité lumineuse $I(x, z)$ sur le plan $(A; x, z)$, où Az est la direction perpendiculaire au plan du prisme.



Exprimons les vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 des ondes susceptibles d'interférer. On a $\vec{k}_1 = k(0; 1; 0)$ et $\vec{k}_2 = k(\sin \beta; \cos \beta; 0) \approx k(2n\alpha; 1; 0)$ avec $k = 2\pi/\lambda$. Le champ électrique E résultant de la superposition des deux ondes en un point $M(x; z)$ de la zone d'interférence s'écrit :

$$E(M) = E_0 \left(\exp \left(i \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM} \right) + \exp \left(i \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM} \right) \right)$$

$$E(x, z) \approx E_0 \left(1 + e^{ik2n\alpha x} \right)$$

et l'éclairement en M :

$$I(x, z) \approx \frac{I_0}{2} (1 + \cos(2kn\alpha x))$$

On observe des franges parallèles à l'axe Oz , alternativement claires et sombres, de périodicité spatiale égale à l'interfrange i :

$$i = \frac{\lambda}{2n\alpha}$$

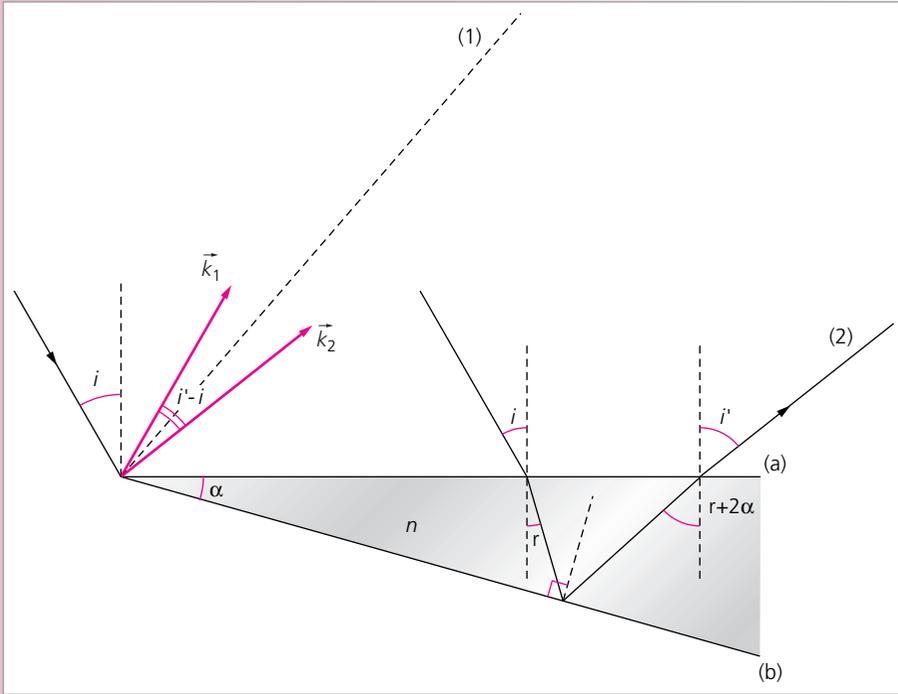
Exercice 7 Coin de verre

Une onde lumineuse monochromatique plane de longueur d'onde λ_0 rencontre un coin de verre d'indice n dont les faces font entre elles un angle α très petit. Le plan d'incidence est perpendiculaire à l'arête du coin, et l'angle d'incidence est i .

1. Déterminer l'interfrange Δx de la figure d'interférence obtenue par réflexion sur les faces de la lame lorsque $i = 0$.
2. La source n'est pas parfaitement monochromatique, mais elle émet une lumière dont le spectre est de largeur $\Delta\lambda$, centré sur λ . Lorsque deux trains d'onde émis par la source se superposent après avoir parcouru des chemins optiques supérieurs à la longueur de cohérence L de la source, ils ne sont plus cohérents : on observe alors un brouillage des franges.

On admettra que la longueur de cohérence est donnée par $L = \lambda^2/\Delta\lambda$. Application numérique : calculer α et la finesse $\lambda/\Delta\lambda$ de la source si les franges disparaissent à une distance $l = 8 \text{ cm}$ du sommet du coin d'air.

On donne $\lambda = 0,55 \text{ }\mu\text{m}$, $i = 0$, $\Delta x = 0,21 \text{ mm}$ et $n = 1,5$.



Solution

CONSEIL : comme dans l'exercice précédent, on étudie des franges d'égalité d'épaisseur d'une lame d'épaisseur variant linéairement. En se rappelant l'aspect de la figure d'interférence déterminée précédemment, la tâche est donc grandement facilitée! Rappelons, à toutes fins utiles, que l'interfrange correspond à la périodicité, sur l'écran d'observation, de la figure d'interférence et qu'il est donc bien pertinent d'en parler ici pour des franges d'égalité d'épaisseur!

La question 2 n'est pas simple car elle fait appel à la notion de cohérence du train d'onde émis par la source. Nous retiendrons qu'il y a interférence si la différence de marche introduite par l'interféromètre n'excède pas la longueur de cohérence.

1. Reprenons l'expression de l'intensité lumineuse déterminée dans l'exercice précédent :

$$I(x, z) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(kn \sin 2\alpha x)) \approx \frac{I_0}{2} (1 + \cos(2kn\alpha x))$$

L'interfrange s'écrit ainsi :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha}$$

2. Application numérique : $i = 0$ et λ est ici la longueur d'onde dans le vide; ainsi,

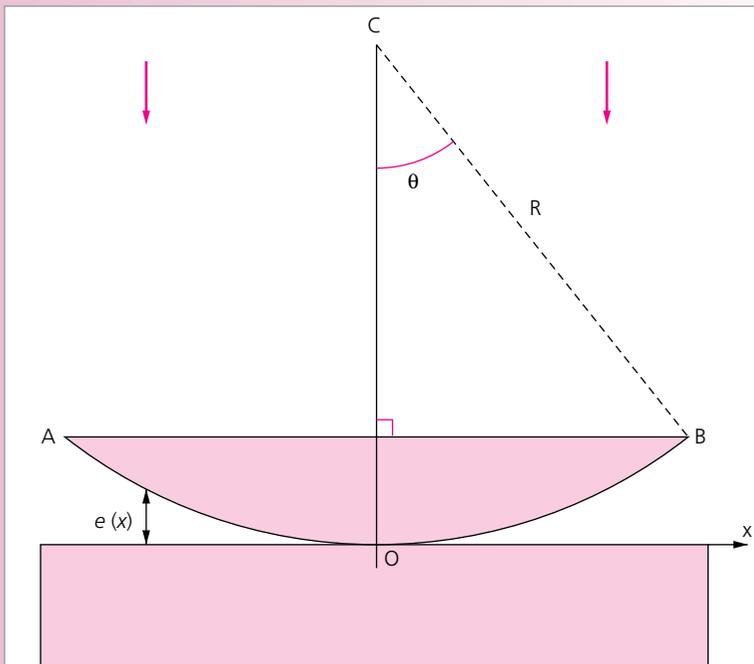
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha} \text{ soit } \alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x} = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

À la distance l du sommet du coin de verre, la différence de marche est $\delta \approx 2n/\alpha$; elle correspond à la longueur de cohérence du train d'onde, en ordre de grandeur. L'ordre d'interférence correspondant s'écrit : $P_l = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2n/\alpha}{\lambda}$

Les franges disparaissant à la distance l , on a : $P_l \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$; ainsi $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2n/\alpha} = \frac{\Delta x}{l} = 2,6 \cdot 10^{-3}$.

Exercice 8 Les anneaux de Newton

On considère le dispositif des anneaux de Newton. On utilise pour cela une lentille plan convexe de rayon R et d'angle d'ouverture θ . La lentille repose par sa face courbe en O sur un plan de verre Ox. Il existe donc entre le plan et la lentille une lame d'air d'épaisseur $e(x)$ variable, avec $e(0) = 0$. On suppose que e reste faible devant le rayon R de la face courbe. Une source monochromatique étendue éclaire la lentille en incidence normale.



1. Rappeler quelles ondes interfèrent et préciser le lieu de localisation des franges d'interférence.
2. Calculer la différence de marche $\delta(x)$ entre deux rayons susceptibles d'interférer.
3. Exprimer $e(x)$ en fonction de x ; décrire la figure d'interférence. Quel aspect a la frange centrale ?

Solution

CONSEIL : voici un autre grand classique ! Il s'agit d'une lame d'épaisseur variable, dont une des faces est sphérique (la figure d'interférence, localisée sur la lame, est formée d'anneaux appelés anneaux de Newton). Comme dans l'exercice 6, pas de panique si vous découvrez cette lame pour la première fois : laissez-vous guider par l'énoncé.

1. Les rayons qui interfèrent sont de deux types : ceux (R_1 sur la figure ci-contre) directement réfléchis par la face courbe de la lame d'air (qui correspond à la face courbe de la lentille) et ceux qui, réfractés dans la lame d'air, sont réfléchis par la face plane de la lame (R_2 sur la figure). Les rayons se coupent sur la face courbe de la lame d'air ; c'est donc sur la lentille qu'est localisée la figure d'interférence. Dans la pratique, les dimensions de la lame étant très faibles ($e(x)$ est très petit) on dit que les franges d'interférence sont localisées sur le plan Ox .

2. Calculons la différence de marche entre les deux rayons R_1 et R_2 .

Le rayon de courbure R étant très grand devant l'épaisseur de la lentille, le rayon R_2 sort en incidence quasi normale de la lame (les rayons R_1 et R_2 sont confondus sur le dessin ci-contre et leurs trajectoires sont quasi rectilignes). R_2 a parcouru dans l'air une distance égale à $2e(x)$; il a subi une réflexion d'un milieu d'indice égal à 1 (la lame d'air) vers un milieu d'indice $n > 1$ (le plan de verre sur lequel repose la lentille), ce qui conduit à un déphasage de π (ou une différence de marche de $\lambda/2$) entre les deux rayons. Finalement, la différence de marche entre R_1 et R_2 s'écrit :

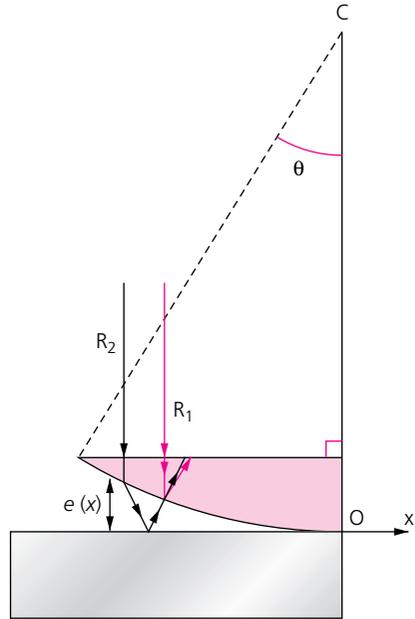
$$\delta = 2e(x) + \lambda/2$$

3. La lentille est une portion de sphère ; on a donc $R^2 = x^2 + (R - e(x))^2$. Avec $e(x) \ll R$, il vient :

$$e \approx \frac{x^2}{2R}$$

La figure d'interférence correspond à celle de deux ondes planes déphasées de $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$, soit :

$$I(x) = I_0(1 + \cos \varphi(x)) = I_0 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{R} \right) \right)$$



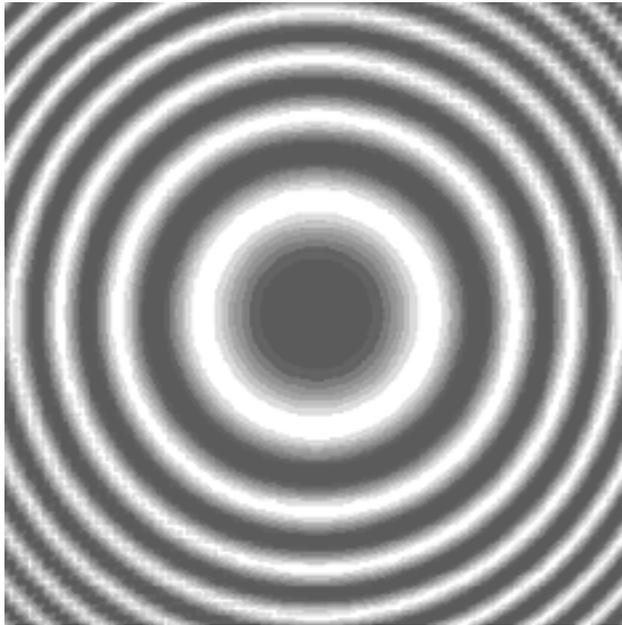
Les zones d'égalité d'intensité sont des cercles concentriques de centre O. Les franges sombres correspondent à $I(x_k) = 0$, soit :

$$x_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (\text{avec } k \text{ entier})$$

Les franges claires correspondent à des rayons x_k tels que $I(x) = 2I_0$, soit :

$$x_k = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R\lambda}$$

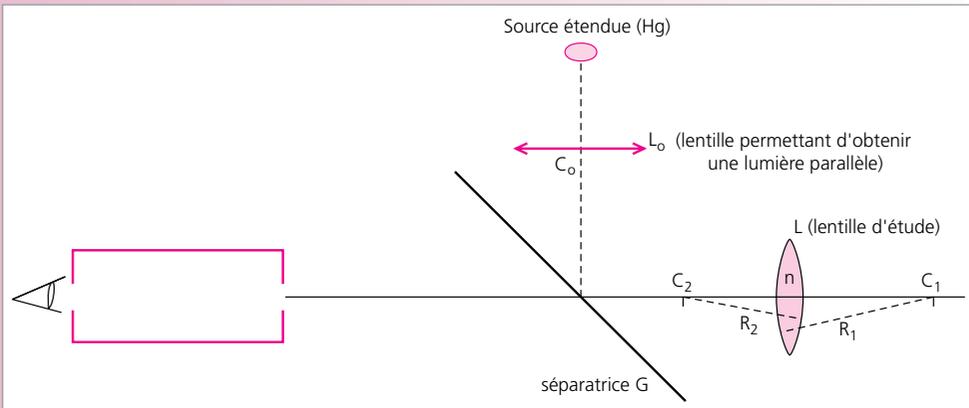
Notons que la frange centrale ($x_k = 0$) est toujours sombre.



Exercice 9 Franges d'égalité d'épaisseur données par une lentille mince

On étudie les franges d'égalité d'épaisseur produites par une lentille mince convergente de 0,25 dioptrie et d'indice $n = 1,50$, en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 0,546 \mu\text{m}$ (raie verte du mercure).

Le dispositif est représenté sur la figure suivante. La source est située dans le plan focal objet d'une lentille L convergente, derrière laquelle on a placé une lame séparatrice faisant un angle de 45° avec l'axe optique de la lentille. Perpendiculairement à cet axe, on dispose un banc optique sur lequel sont alignés la lentille qui sert de lame, la séparatrice et un viseur qui permet de faire la mise au point sur la lentille-lame.

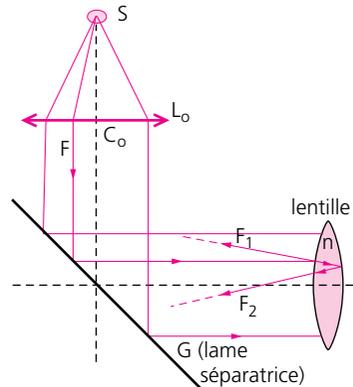


1. Décrire ce qui se passe ; quels rayons sont susceptibles d'interférer ?
2. Calculer la différence de marche entre ces deux rayons et en déduire l'expression de l'ordre d'interférence.
3. Calculer les rayons des premiers anneaux sombres en supposant qu'il se forme un point noir au centre.

Solution

CONSEIL : il s'agit de l'interférence par une lame dont les deux faces sont sphériques. L'exercice n'est pas très compliqué, à condition de bien comprendre le montage (qui pourrait être repris pour n'importe quelle lame étudiée en réflexion). Pour cela, concentrons-nous pour répondre à la question 1 en gardant à l'esprit que deux rayons sont susceptibles d'interférer, ou du moins les deux seuls pris en compte.

1. La source placée dans le plan focal objet de la lentille L_0 émet une onde sphérique, qui, en traversant la lentille, devient une onde plane, ou du moins un faisceau de rayons parallèles entre eux. Une partie du faisceau arrivant sur la lame séparatrice G est réfléchi vers la lentille-lame tandis que l'autre partie, directement transmise par G , est simplement perdue ! Les rayons incidents sur la lentille-lame sont partiellement renvoyés vers G après réflexion sur les faces avant et arrière de la lentille. La lentille est une lame et, comme pour l'exercice 6, nous ne retiendrons que deux « familles » de rayons : ceux (F_1) qui ont subi une réflexion sur la face d'entrée de la lentille, et ceux (F_2) qui, réfractés dans la lentille, sont réfléchis sur la face de sortie puis de nouveau réfractés dans l'air.



Ces rayons se croisent au niveau de la lentille (interférences localisées). Le viseur permet d'observer les franges d'interférence qui se forment au voisinage immédiat de la lentille-lame (d'où l'utilisation d'une lame séparatrice plutôt que d'un miroir qui aurait empêché l'observation).

2. Calculons les rayons des anneaux au niveau de la lentille d'étude. Le dispositif expérimental assure une incidence quasi normale sur la surface de la lentille. On raisonnera sur

une lentille biconvexe, de rayons de courbure $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ et dont l'épaisseur sur l'axe est e . La vergence de la lentille est alors $C = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

À la distance ρ de l'axe optique, on montre facilement que l'épaisseur de la lentille s'écrit (en se souvenant qu'une lentille est mince si son épaisseur est petite devant ses rayons de courbure) :

$$e(\rho) \simeq e - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = e - \frac{C}{2(n-1)} \rho^2$$

Or, la différence de marche totale vaut :

$$\delta = 2ne(\rho) \cos r + \frac{\lambda_0}{2} \approx 2ne(\rho) + \frac{\lambda_0}{2}$$

où $r \approx 0$ est l'angle de réfraction dans la lentille. La différence de marche $\lambda_0/2$ provient de la réflexion de F_1 sur la face d'entrée air/verre de la lentille-lame.

L'ordre d'interférence s'écrit :

$$p(\rho) = \frac{\delta(\rho)}{\lambda_0} = \left[\frac{2n}{\lambda_0} e + \frac{1}{2} \right] - \frac{n}{(n-1)} \frac{C}{\lambda_0} \rho^2 = p_{\text{centre}} - \frac{n}{(n-1)} \frac{C}{\lambda_0} \rho^2$$

On observe donc des anneaux alternativement sombres (p demi-entier) et brillants (p entier).

3. Les rayons des anneaux sont donnés par :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{\lambda_0}{C} \right) \sqrt{p_{\text{centre}} - p}}$$

On aura remarqué que, dans cette configuration, la différence de marche décroît à partir du centre.

A.N. : on suppose qu'il se forme un point noir au centre (p_{centre} demi-entier); les rayons des premiers anneaux noirs (sur L) sont donnés par :

$$\rho = \sqrt{k} \sqrt{\left(\frac{0,5}{1,5} \right) \left(\frac{0,546 \cdot 10^{-6}}{0,25} \right)} = 0,853 \sqrt{k} \text{ (en mm)}$$

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

Exercice 10 Franges de lames minces données par l'interféromètre de Michelson

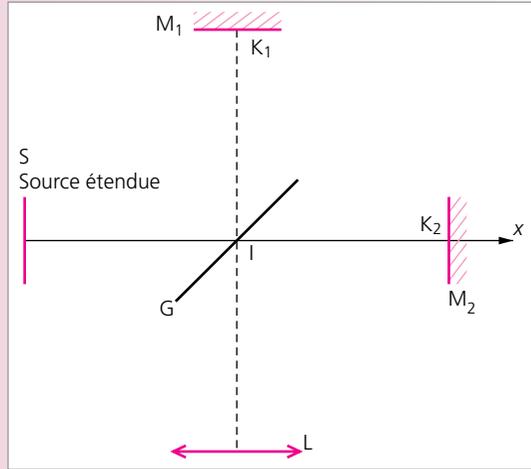
Dans l'interféromètre de Michelson, dont le principe est reproduit sur la figure page suivante, on suppose que la séparatrice G est infiniment mince et qu'elle n'introduit pas de déphasage par réflexion.

La source S est étendue et monochromatique ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$).

1. Depuis la position de référence où les bras IK_1 et IK_2 sont de même longueur, on déplace M_2 de 1 centimètre en translation selon x . On observe la figure d'interférence dans le plan focal image de la lentille L .

Qu'observe-t-on ? Quelle est la variation de l'ordre d'interférence au centre si l'on place sur l'un des bras une lame mince d'épaisseur $7,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5$?

2. On revient à la position $IK_1 = IK_2$ et on fait pivoter M_2 d'un angle α très faible autour d'un axe perpendiculaire au plan de figure et passant par K_2 . Qu'observe-t-on sur le miroir M_1 ? Exprimer l'éclairement en un point P de M_1 tel que $K_1P = X$. Que vaut l'interfrange i^* ?



Solution

CONSEIL : pas de difficulté particulière à signaler dans cet exercice, un classique du Michelson utilisé ici pour observer les franges d'égalé inclinaison (question 1) ou d'égalé épaisseur (2).

1. Le système est équivalent à une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur e . Avec une source étendue, on observe des franges d'égalé inclinaison à l'infini, donc des anneaux. La différence de marche s'écrit : $\delta = 2e \cos i$

L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right)$$

d'où :

$$p_{\text{centre}} = \frac{2e}{\lambda} \quad \text{et} \quad i = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{p_{\text{centre}} - p}$$

Les rayons des anneaux d'ordre donné p dans le plan focal de la lentille vérifient :

$$\rho_p = f' i = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{p_{\text{centre}} - p}$$

Avec une lame mince :

$$|\Delta p_{\text{centre}}| = \frac{2e'(n-1)}{\lambda}$$

$$\text{A.N. } |\Delta p_{\text{centre}}| = \frac{2 \times 7,5 (1,5 - 1)}{0,5} = 15.$$

Ainsi, 15 anneaux disparaissent (en bloc) ou apparaissent au centre lors de l'introduction de la lame.

2. L'ensemble se comporte comme un coin d'air d'angle α très faible, dont l'arête passe par K_1 . On observe donc, avec une source étendue en incidence quasi normale, des franges d'égale épaisseur localisées sur le coin d'air équivalent, d'interfrange $i^* \approx \frac{\lambda}{2\alpha}$.

Comme $\delta = 2e(p) \cos i \approx 2e(p)$ (incidence quasi normale), l'éclairement s'écrit :

$$I \approx 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{2e}{\lambda} \right) \right] \quad \text{avec } e = \alpha X$$

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(4\pi \frac{\alpha X}{\lambda} \right) \right]$$

On retrouve bien $i^* = \frac{\lambda}{2\alpha}$.

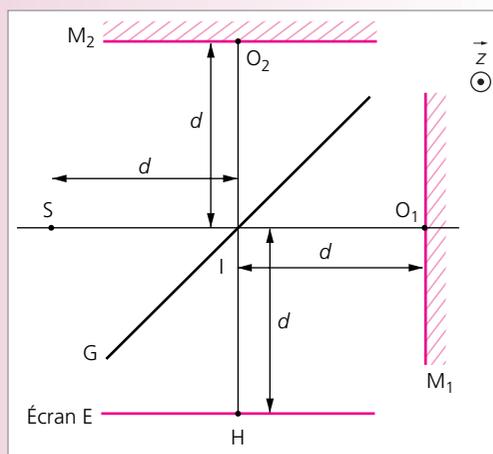
Exercice 11 Interféromètre de Michelson

Un interféromètre de Michelson est éclairé par une source monochromatique ponctuelle S. Initialement, $IS = IM_1 = IM_2 = IM$ (H est situé sur un écran).

Les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaires et disposés à 45° de la séparatrice G.

On impose aux miroirs M_1 et M_2 une petite rotation d'angle α dans le même sens autour des axes (O_1, \vec{z}) et (O_2, \vec{z}) .

On donne : $d = 1 \text{ m}$; $\alpha = 1^\circ$; $\lambda = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$.



Qu'observe-t-on sur l'écran ?

Solution

CONSEIL : un autre classique du Michelson, utilisé ici pour observer les franges d'égale épaisseur du coin d'air.

On pose $IS = IO_1 = O_2I = IH = d$ (voir figure p. suivante).

Par réflexion sur la face semi-réfléchissante de la séparatrice G, le miroir M_1 a une image M_1'' qui fait un angle 2α avec M_2 : il s'agit du cas du coin d'air. On peut donc remplacer le système (M_1', M_2') par le système équivalent (M_1'', M_2') .

La source S est monochromatique ponctuelle ; on obtient donc des franges rectilignes délocalisées. L'interfrange vérifie la formule :

$$i = \frac{\lambda HJ}{S'_1 S'_2}$$

où S'_1 (resp. S'_2) est le projeté orthogonal de H par rapport à M''_1 (resp. M'_2) sur le plan parallèle à l'écran E et passant par le point J (image du point H par rapport à O_2).

Or,

$$HJ = 4d \cos^2 \alpha$$

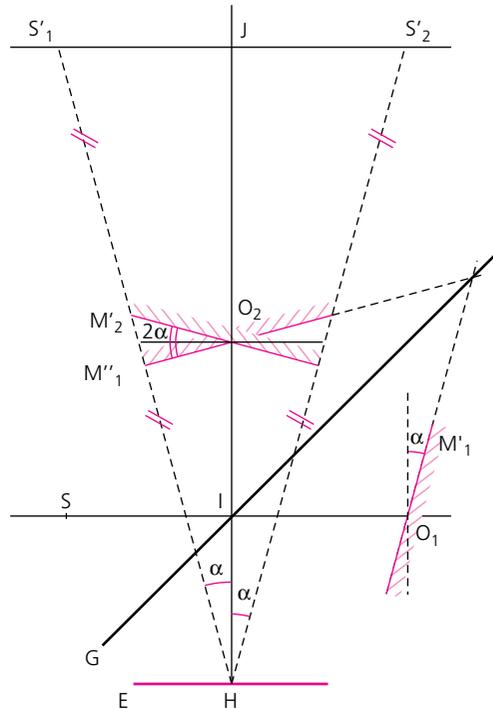
et

$$S'_1 S'_2 = 4d \sin 2\alpha$$

Ainsi :

$$i = \frac{\lambda 4d \cos^2 \alpha}{4d \sin 2\alpha} = \frac{\lambda}{2 \tan \alpha}$$

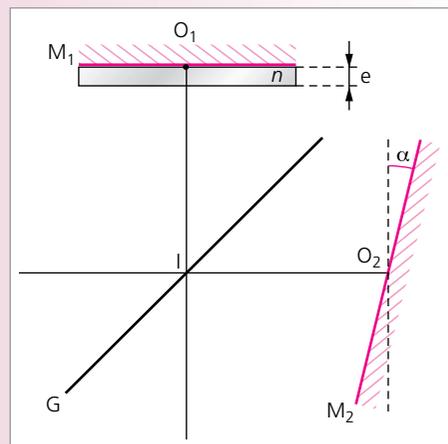
$$i = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$



Exercice 12 Coin d'air avec Michelson – frange achromatique

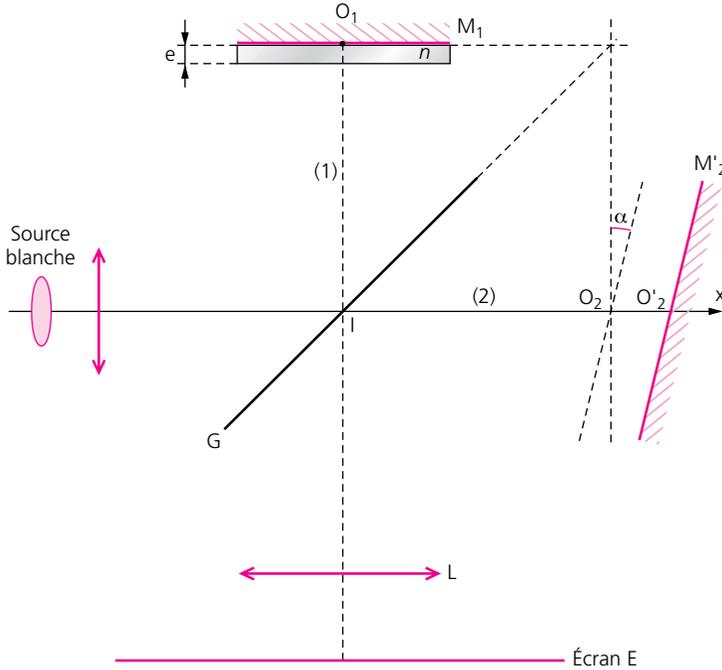
On considère l'interféromètre représenté sur la figure ci-contre, éclairé en lumière blanche. $IO_1 = O_2I$ et le miroir M_2 a pivoté d'un angle α par rapport à la « position de référence ». On néglige les déphasages introduits par la séparatrice. La lame accolée au miroir a un indice $n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$, avec $\alpha = 1,510$ et $\beta = 18 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2$. On donne $e = 10 \mu\text{m}$.

1. Qu'observe-t-on ?
2. Comment varie l'ordre d'interférence « au centre » si l'on translate M_2 de x_2 ?
3. Constaté qu'il existe une position x_2 telle que $\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_{x_2} = 0$ pour $\lambda = 0,56 \mu\text{m}$. Décrire alors les phénomènes observés en mettant au point sur le coin d'air équivalent.



Solution

1. Le dispositif est rappelé sur la figure ci-dessous. En lumière monochromatique, le miroir M_2 étant incliné d'un angle α par rapport à la « position de référence », on observerait les franges du coin d'air (franges d'égalité épaisseur) projetables sur un écran E conjugué de (M_1, M'_2) par L . L'introduction de la lame ne provoque alors qu'une translation de la frange centrale.



En lumière blanche, du fait de la dispersion sur les longueurs d'onde, les franges du coin d'air ne sont observables que pour une différence de marche très faible ($P_e \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$). L'adjonction de la lame introduit, en incidence quasi normale, une différence de marche supplémentaire $\delta(2-1) = -2e(n-1)$ [signe $-$ car $\delta(2-1) = L_2 - L_1$] qui d'ailleurs dépend de λ .

Pour $\lambda_m = 0,56 \mu\text{m}$, $n_{\lambda_m} = 1,567$ et $\delta(2-1) = -11,35 \mu\text{m}$ [soit $P_m = \frac{\delta}{\lambda_m} = -20,26$].

On en conclut que dans la position $IO_1 = IO_2$, les franges sont inobservables en lumière blanche car hors du champ. Il faut translater le miroir M_2 afin que la différence de marche au centre soit voisine de 0.

2. Si M_2 est déplacé de x_2 (algébriquement) par rapport à la position de référence, la différence de chemin optique s'écrit :

$$\delta(2-1) = 2x_2 - 2e(n-1)$$

et l'ordre d'interférence au centre :

$$p(\lambda) = \frac{2x_2}{\lambda} - \frac{2e}{\lambda}(n-1) \quad (1)$$

Remarque : la translation à effectuer pour avoir une figure observable sera de l'ordre de $\frac{11,35}{2} = 5,67 \mu\text{m}$.

3. Une telle translation étant réalisée, étudions $p(\lambda, x)$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_x = -\frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2e}{\lambda^2}(n-1) - \frac{2e}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda} \quad \text{avec} \quad n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

On constate que $\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_x = 0$ pour $\frac{2x}{\lambda} - \frac{2e}{\lambda}(n-1) = p(\lambda) = -2e \frac{dn}{d\lambda} = 4e \frac{\beta}{\lambda^3}$

Soit, dans notre cas, pour :

$$x_2 = e(n-1) + 2e \frac{\beta}{\lambda^2} = e \left[\alpha - 1 + 3 \frac{\beta}{\lambda^2} \right] \quad (2)$$

Cette position dépend bien sûr de λ mais on observe que $x_2 = x_2(p, \lambda)$, donc :

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda}\right)_p = - \left(\frac{\partial x_2}{\partial p}\right)_\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_{x_2}$$

De ce fait, si $\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_{x_2} = 0$, on aura $\left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda}\right)_p = 0$ $\left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial p}\right)_\lambda = \frac{\lambda}{2} \neq 0\right]$

Cela signifie que la valeur de x_2 fournie par (2) est stationnaire en λ ; en conséquence, il y a existence d'une frange achromatique (il s'agit d'une frange blanche résultant de la superposition des intensités).

On donne $\lambda_m = 0,56 \mu\text{m}$ (ce qui correspond au maximum de sensibilité de l'œil en vision diurne). Pour cette longueur d'onde, (2) fournit $x_2 = +6,82 \mu\text{m}$ et (1)

$$p(\lambda_m) = 4e \frac{\beta}{\lambda_m^3} = 4,10.$$

L'ordre est presque entier et voisin de zéro (encore observable). En $x_2 = +6,82 \mu\text{m}$, l'ordre va varier lentement lorsque λ varie autour de λ_m . En effet :

$$\lambda \neq \lambda_m, \quad x_2 = x_2(\lambda_m) \quad p(\lambda) = \frac{2x_2}{\lambda} - \frac{2e}{\lambda} \left[\alpha - 1 + \frac{\beta}{\lambda^2} \right] = \frac{2e\beta}{\lambda} \left(\frac{3}{\lambda_m^3} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

ce qui fournit le tableau de variations :

λ (μm)	0,4	0,45	0,5	0,56	0,6	0,65	0,7	0,751
p	3	3,7	4,008	4,1	4,073	3,987	3,87	3,739

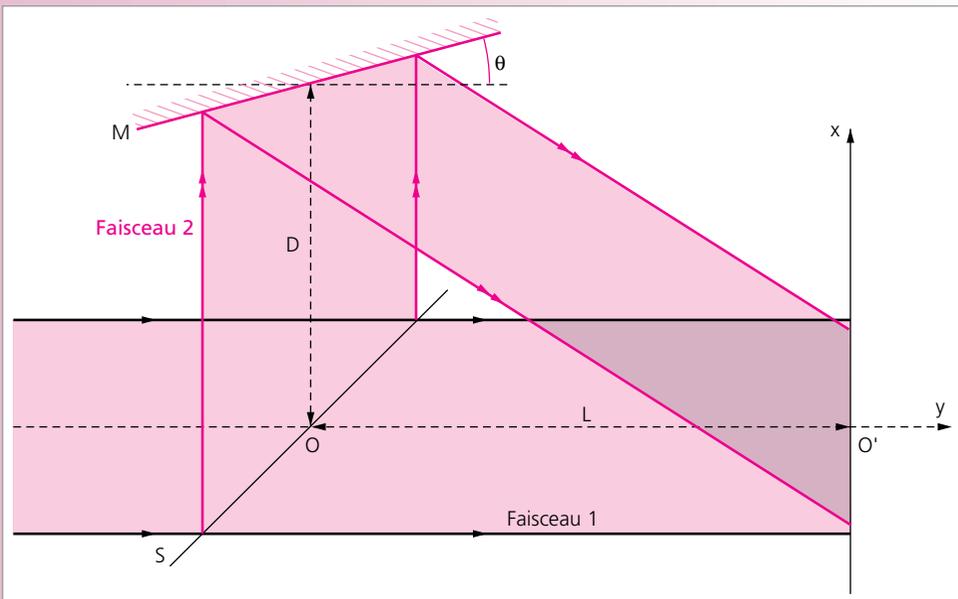
Ainsi, à l'exclusion des faibles longueurs d'onde, il existe un état d'interférences lentement variables (et voisin d'un maximum) en $x_2(\lambda_m)$ où p présente un maximum pour λ_m . La différence de marche varie peu avec λ .

On en conclut que l'on observera, au « centre du champ », une frange blanche (par superposition des intensités), appelée « frange achromatique ». En dehors du centre, il faut tenir compte de la différence de marche supplémentaire due au coin d'air $[2\gamma\alpha]$ et des irisations apparaîtront de part et d'autre de cette frange blanche.

AUTRES SYSTÈMES INTERFÉRENTIELS

Exercice 13 Interféromètre à miroir et séparatrice

On considère le système interférentiel suivant, constitué d'une séparatrice S inclinée à 45° par rapport au faisceau lumineux incident. La séparatrice effectue une division d'amplitude égale entre les ondes transmises et réfléchies. Une partie du faisceau, notée 1, n'est pas déviée tandis que l'autre, notée 2, est réfléchi dans la direction Ox perpendiculaire vers un miroir M susceptible de tourner autour d'un axe fixe. On note θ l'angle de rotation du miroir par rapport à l'horizontale, et on suppose dans la suite θ petit. Le faisceau 2 réfléchi par le miroir est susceptible d'interférer avec le faisceau 1. On place un écran d'observation dans le plan $(O'; y, z)$. Soit L la distance entre la séparatrice et l'écran, et D entre la séparatrice et le miroir. On admettra que les deux ondes arrivent en O' en phase.



1. La figure page suivante illustre le parcours des deux rayons portant les ondes 1 et 2 susceptibles d'interférer en un point P de l'écran. On note x la hauteur du rayon 1 au niveau de la séparatrice (respectivement x_0 la hauteur du rayon 2 au niveau de la séparatrice). Quelle déviation subit le rayon réfléchi par le miroir? En déduire une relation entre θ , L et D qui traduit que les rayons 1 et 2 se coupent en O' lorsque $x = x_0 = 0$.

2. Exprimer la différence de marche δ en P entre les rayons 1 et 2, en fonction de x , x_0 , L et D .

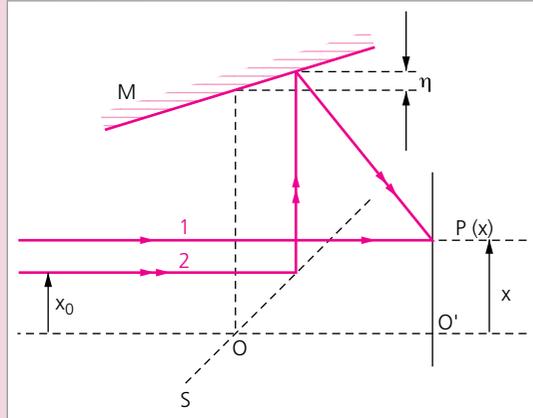
Dans la suite, on négligera, sans le justifier, la hauteur η .

3. Exprimer x_0 en fonction de x , L et D . Donner une expression approchée de δ pour θ petit en fonction de x , L et D .

4. En déduire l'expression de l'éclairement en M en fonction de x et de θ .

5. Donner le facteur de visibilité des franges observées sur l'écran.

6. Reprendre les questions précédentes si la séparatrice introduit un facteur f entre les amplitudes des ondes transmise et réfléchi.

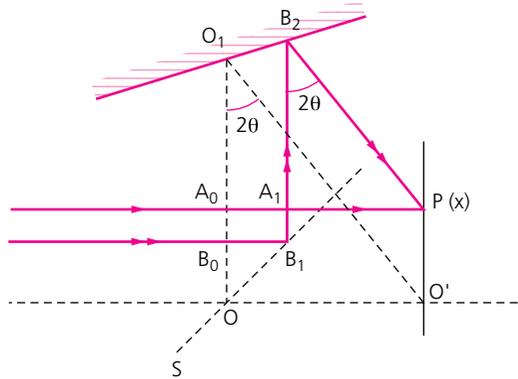


Solution

CONSEIL : la principale difficulté de cet exercice consiste à calculer la différence de marche entre les deux rayons 1 et 2.

1. Le rayon réfléchi par le miroir subit une déviation égale à 2θ . Les rayons 1 et 2 se coupent en O' pour $x = x_0 = 0$ si le triangle OO_1O' (la position du point O_1 est indiquée ci-contre), rectangle en O a un angle $\widehat{OO_1O'}$ égal à 2θ . La relation cherchée s'écrit donc :

$$\tan 2\theta = \frac{L}{D}$$



2. Les ondes arrivant en O' étant en phase, écrivons la différence de chemin optique $\delta = \delta_2(P) - \delta_1(P)$ au point P comme :

$$\delta = \delta_2(P) - \delta_1(P) = \delta_2(P) - \delta_2(O') - (\delta_1(P) - \delta_1(O'))$$

Avec les notations de la figure ci-dessus, les points A_0 et B_0 étant en phase (ils sont sur un même plan d'onde), on a :

$$\delta = [B_0B_1B_2P] - [OO_1O'] - ([A_0A_1P] - [OO'])$$

$$\delta = B_0B_1 + B_1B_2 + B_2P - OO_1 - O_1O' - A_0P + OO'$$

Exprimons les différentes distances mises en jeu ; nous utiliserons la relation établie en 1 avec, dans le triangle A_1B_2P :

$$\tan 2\theta = \frac{L}{D} = \frac{A_1P}{A_1B_2} = \frac{L - x_0}{A_1B_2}, \quad \sin 2\theta = \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}} = \frac{L - x_0}{B_2P}$$

Nous avons donc :

$$B_0B_1 = x_0 \text{ car la séparatrice fait un angle de } 45^\circ \text{ avec la verticale}$$

$$B_1B_2 = B_1A_1 + A_1B_2 = x - x_0 + \frac{L - x_0}{L}D$$

$$B_2P = (L - x_0) \frac{\sqrt{D^2 + L^2}}{L}$$

Et avec, par construction :

$$OO_1 = D, \quad O_1O' = \sqrt{D^2 + L^2} \quad \text{et} \quad A_0P = OO' = L$$

Revenons à l'expression de la différence de marche δ . Nous avons finalement :

$$\delta = x - \frac{x_0}{L} \left(D + \frac{\sqrt{D^2 + L^2}}{L} \right)$$

3. La relation entre x et x_0 est obtenue en écrivant dans le triangle A_1PB_2 :

$$\tan 2\theta = \frac{A_1P}{A_1B_2}$$

En négligeant η comme indiqué dans l'énoncé, on a $A_1B_2 \approx D - x$, avec $A_1P = L - x_0$, soit en utilisant la relation établie en 1 :

$$x_0 = \frac{L}{D}x$$

Il vient finalement δ en fonction de x , L et D :

$$\delta = -\sqrt{1 + \frac{L^2}{D^2}}x$$

Utilisons maintenant le fait que l'angle θ est faible : alors $\tan 2\theta \approx 2\theta \ll 1$, soit, d'après la relation établie en 1, $L \ll D$. Nous pouvons effectuer un développement limité de l'expression de δ ; à l'ordre 2 en θ (ou en L/D), il vient :

$$\delta \simeq -\left(1 + \frac{L^2}{2D^2}\right)x$$

4. L'éclairement en M correspond à l'intensité lumineuse résultant de la combinaison des deux ondes incidentes en M . Notons E_1 et E_2 les amplitudes complexes des champs électriques qui leurs sont associés :

$$E_1(M) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{et} \quad E_2(M) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

avec $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_1(M)$ et $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_2(M)$. Le champ de l'onde résultante en M s'écrit :

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \left(1 + e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta} \right)$$

et l'éclairement en M :

$$I(M) = KE(M)E^*(M) = 2A_0^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right)$$

où K est une constante et $*$ désigne le complexe conjugué. D'après la question précédente, on obtient finalement $I(M)$ en fonction de x et θ :

$$I(M) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + \frac{L^2}{2D^2} \right) x \right) \right]$$

5. La visibilité des franges est définie par :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 1$$

6. L'amplitude A_1 de l'onde transmise par la séparatrice et l'amplitude A_2 de l'onde réfléchi par la séparatrice vérifient : $f = A_2/A_1$. La différence de chemin optique entre les deux ondes reste inchangée. En revanche, l'expression du champ électrique associé à l'onde résultante au point M s'écrit ici :

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) = E_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \left(A_1 + A_2 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \delta} \right)$$

d'où l'éclairement en M :

$$I(x) = KE(M)E^*(M) = I_0 \left[1 + \frac{2f}{1+f^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + \frac{L^2}{2D^2} \right) x \right) \right]$$

L'éclairement maximal est égal à $\frac{(1+f)^2}{1+f^2} I_0$ tandis que l'éclairement minimal est égal à

$\frac{(1-f)^2}{1+f^2} I_0$, d'où la visibilité :

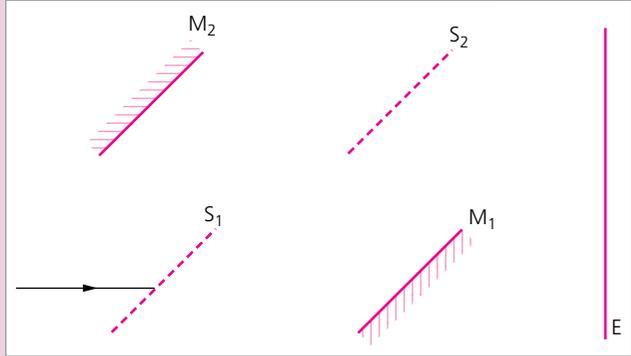
$$V = \frac{2f}{1+f^2}$$

Exercice 14 Principe de l'interféromètre de Mach-Zenhder

Le système interférentiel de Mach-Zenhder est représenté sur la figure p. suivante. Les deux séparatrices et les deux miroirs sont parallèles entre eux et on considère une onde plane incidente sur la première séparatrice avec un angle de 45° .

1. Décrire ce qui se passe dans le système interférentiel. Montrer qu'il s'agit d'un système interférentiel à division d'amplitude.

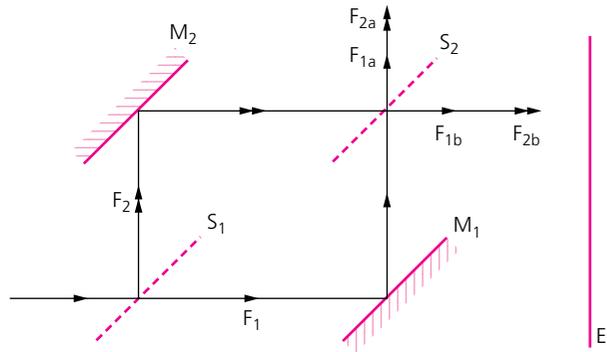
2. Déterminer l'aspect de la figure d'interférence sur l'écran d'observation E lorsque l'on tourne le miroir M_1 d'un angle α (petit).



Solution

CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière à condition de poser clairement le problème. Pour cela, il faut décrire le chemin des deux ondes arrivant sur l'écran d'observation lorsque le miroir M_1 n'a pas pivoté ($\alpha = 0$), ainsi que l'amplitude de leur champ électrique (en se souvenant qu'une séparatrice laisse passer 50 % de l'intensité lumineuse et en réfléchit le restant). Lorsque le miroir a pivoté d'un angle α , une des ondes voit sa direction de propagation modifiée, donc la direction de son vecteur d'onde. On écrira alors les composantes des vecteurs d'onde associés aux deux ondes qui se superposent sur l'écran : les champs électriques s'expriment simplement en fonction des amplitudes et des vecteurs d'onde précédemment calculés (nous vous conseillons d'adopter la notation complexe). L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré du module du champ électrique résultant (qui est la somme des deux champs électriques).

1. Notons A l'amplitude de l'onde incidente et $I_0 = KA^2$ l'intensité lumineuse associée. Sur la première séparatrice S_1 , le faisceau F incident est séparé en deux ; chaque sous-faisceau transporte une intensité égale à $I_0/2$, soit une amplitude égale à $A/\sqrt{2}$. Une partie F_1 n'est pas déviée et l'autre F_2 est dévié de 90° vers le miroir

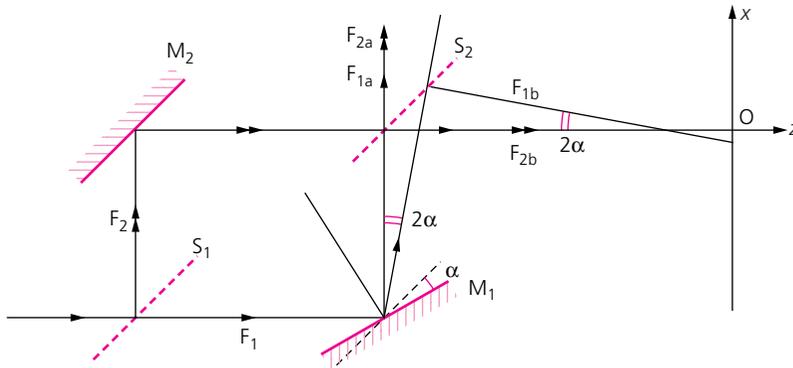


M_2 . F_1 rencontre le miroir M_1 et se réfléchit à 90° vers la séparatrice S_2 ; en S_2 , F_1 se sépare en deux sous-faisceaux, F_{1a} non dévié et F_{1b} dévié à 90° . Les faisceaux de F_{1a} et F_{1b} portent des ondes de même amplitude $A/2$.

Le sous-faisceau F_2 se réfléchit sur M_2 à 90° et atteint la séparatrice S_2 . Il se sépare en deux sous-faisceaux F_{2a} , dévié à 90° et F_{2b} , non dévié. Ces deux faisceaux portent des ondes d'amplitude $A/2$.

Les faisceaux susceptibles d'interférer sont F_{2a} et F_{1a} ou F_{2b} et F_{1b} . Leurs amplitudes ont été divisées par rapport à celle de l'onde incidente : il s'agit donc d'un système interférentiel à division d'amplitude.

2. Il y a deux zones d'interférence, celle qui correspond au recouvrement des deux faisceaux F_{1a} et F_{2a} (au-dessus de S_2) et celle qui correspond au recouvrement des deux faisceaux F_{1b} et F_{2b} (à droite de S_2). Sur l'écran E, on observe l'interférence des faisceaux F_{1b} et F_{2b}



Après rotation du miroir M_1 d'un angle α , on obtient deux ondes planes dont les directions de propagation font entre elles un angle 2α . Le champ électrique résultant de la superposition des deux ondes planes s'écrit :

$$E(M) = \frac{A}{2} \left[\exp(i\vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM}) + \exp(i\vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM}) \right]$$

avec $\vec{k}_1 = k(-\sin 2\alpha; 0; \cos 2\alpha)$ et $\vec{k}_2 = k(0; 0; 1)$, $k = 2\pi/\lambda$ et $OM(x; y; 0)$.

$$E(x, y) = \frac{A}{2} \left[\exp(-ik \sin 2\alpha x) + 1 \right]$$

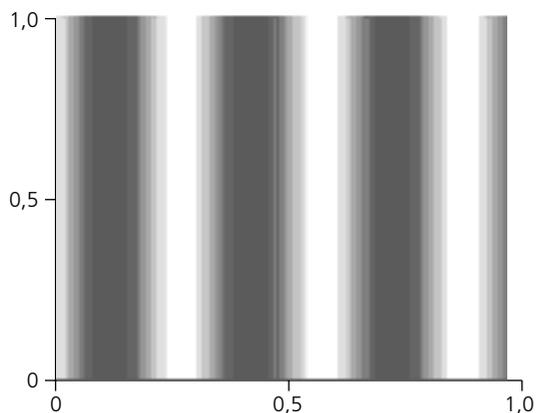
d'où l'intensité résultante sur l'écran $(O; x, y)$:

$$I(x, y) = \frac{I_0}{4} [1 + \cos(k \sin 2\alpha x)] \approx \frac{I_0}{4} [1 + \cos(2k\alpha x)]$$

La figure d'interférence est formée de franges alternativement sombres et brillantes, de périodicité égale à l'interfrange i :

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

La figure ci-contre représente la figure d'interférence observée sur l'écran d'observation E pour $\lambda = 600 \text{ nm}$; $\alpha = 10^{-3} \text{ rad}$; l'écran a pour dimension réelle $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$.



Exercice 15 Interféromètre de Mach-Zehnder ; influence d'une lame à faces parallèles

On considère un interféromètre à deux séparatrices. L'onde incidente rencontre une première séparatrice Σ_1 semi-réfléchissante : le faisceau horizontal est séparé en deux. Chacun des deux faisceaux rencontre un miroir (M_1 ou M_2) placé à 45° par rapport à l'horizontale, à la distance L de la séparatrice. Les deux faisceaux ainsi réfléchis se rencontrent sur une seconde séparatrice semi-réfléchissante Σ_2 , équidistante des deux miroirs (on note L' la distance de Σ_2 à M_1 et M_2).

On s'intéresse à l'interférence des deux faisceaux ressortant horizontalement de cette séparatrice, la figure d'interférence étant recueillie sur un écran E vertical placé à la distance D de la seconde séparatrice.

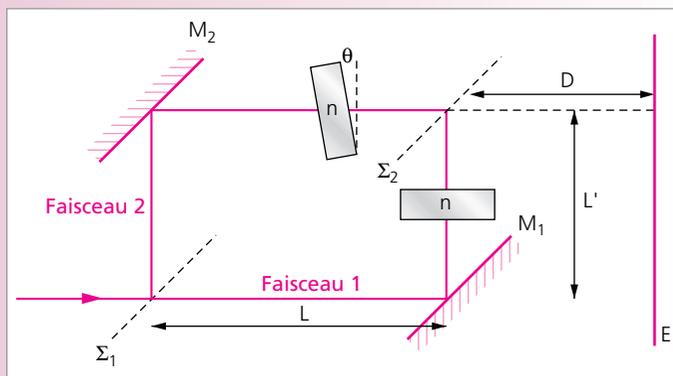
On exprimera les amplitudes complexes des champs électriques associés aux ondes lumineuses sous la forme : $E(M, t) = E(M) \exp(i\omega t)$. On note E_0 l'amplitude complexe de l'onde incidente.

Pour chaque séparatrice, les coefficients complexes de réflexion r et de transmission t pour les amplitudes s'écrivent :

$$r = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Donner les expressions des amplitudes complexes E_1 et E_2 des champs électriques associés aux ondes lumineuses au niveau de l'écran d'observation.

2. En déduire l'expression de l'éclairement sur l'écran d'observation.



On introduit une lame à faces parallèles, d'indice n et d'épaisseur e , entre le miroir M_1 et la séparatrice Σ_2 .

3. Comment est modifié l'éclairement sur l'écran d'observation ?

4. Pour quelle valeur de e l'éclairement sur l'écran est-il nul ? Pour quelle valeur est-il maximal ?

On intercale une seconde lame, identique à la première, entre le miroir M_2 et la séparatrice Σ_2 , inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale. On supposera que l'angle θ reste faible.

5. Exprimer la différence de marche entre les deux faisceaux.

6. Comment s'exprime l'éclairement sur l'écran ?

Solution

CONSEIL : avant d'aborder cet exercice, nous vous conseillons de traiter l'exercice précédent, afin de bien comprendre le comportement de l'interféromètre de Mach-Zehnder.

1. Le faisceau 1 est issu du faisceau incident d'amplitude complexe E_0 , qui a subi une transmission sur la séparatrice Σ_1 : l'amplitude de l'onde associée au faisceau 1 au niveau du miroir M_1 s'écrit donc $tE_0 \exp(ikL)$. La réflexion sur le miroir M_1 modifie sa phase de π : son amplitude complexe au niveau de la séparatrice Σ_2 est donc $tE_0 \exp[ik(L + L' + \pi)]$. L'onde subit enfin une réflexion sur la séparatrice Σ_2 ; son amplitude au niveau de l'écran s'écrit finalement :

$$E_1 = \frac{1}{2}E_0 e^{ik\delta}$$

où $\delta = L + L' + 3\pi/2 + D$ est le chemin optique de la source à l'écran le long du chemin emprunté par le faisceau 1. Le même raisonnement appliqué au faisceau 2 (réflexion sur Σ_1 , réflexion totale sur M_2 et transmission sur Σ_2) conduit à :

$$E_2 = \frac{1}{2}E_0 e^{ik\delta}$$

les chemins optiques des deux faisceaux étant identiques.

2. L'éclairement $I(x)$ sur l'écran en un point $M(x)$ s'écrit, les deux faisceaux étant cohérents :

$$I = K|E_1 + E_2|^2 = K|E_0|^2 = I_0$$

où K est une constante. L'éclairement sur l'écran est égal à l'intensité du faisceau incident.

3. La présence de la lame à faces parallèles modifie la valeur du chemin optique du premier faisceau : $\delta_1 = \delta + (n - 1)e$. On a donc :

$$E'_1 = \frac{1}{2}E_0 e^{ik(\delta + (n-1)e)} \quad E_2 = \frac{1}{2}E_0 e^{ik\delta}$$

d'où la nouvelle expression de l'éclairement :

$$I' = K|E'_1 + E_2|^2 = K(E'_1 + E_2)(E_1'^* + E_2^*)$$

$$I' = \frac{K}{4}E_0^2 \{1 + e^{ik(n-1)e}\} \{1 + e^{-ik(n-1)e}\}$$

$$I' = \frac{1}{2}I_0^2 (1 + \cos[k(n-1)e])$$

4. L'éclairement I' dépend de la valeur de e . Il est nul si $\cos[k(n-1)e] = -1$ et maximal si $\cos[k(n-1)e] = 1$. On a donc, pour m entier :

$$I = 0 \quad \text{si} \quad e = \frac{2m+1}{2(n-1)}\lambda$$

$$I = I_0 \quad \text{si} \quad e = \frac{2m}{2(n-1)}\lambda$$

5. Le chemin optique δ_1 est toujours de la forme :

$$\delta_1 = \delta + (n - 1)e$$

Le chemin optique du faisceau 2 s'écrit maintenant :

$$\delta'_2 = \delta + n\text{IJ} - \text{IH}$$

où IJ est la distance parcourue par le faisceau dans la lame et IH la distance qu'il parcourait dans l'air en l'absence de lame (voir figure ci-contre).

L'angle d'incidence du faisceau dans la lame est égal à θ , l'angle de réfraction r dans la lame est donné par la loi de Descartes : $\sin \theta = n \sin r$.

K est le point du bord de la lame opposé à I, le long de la normale à la lame passant par I ($\text{IK} = e$). Dans le triangle IJK, rectangle en K, nous pouvons calculer la distance :

$$\text{IJ} = \frac{e}{\cos r} = \frac{ne}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

Dans le triangle IHK, rectangle en K, nous pouvons calculer la distance $\text{IH} = \frac{e}{\cos \theta}$.

On a finalement :

$$\delta'_2 = \delta + \left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} - \frac{1}{\cos \theta} \right] e$$

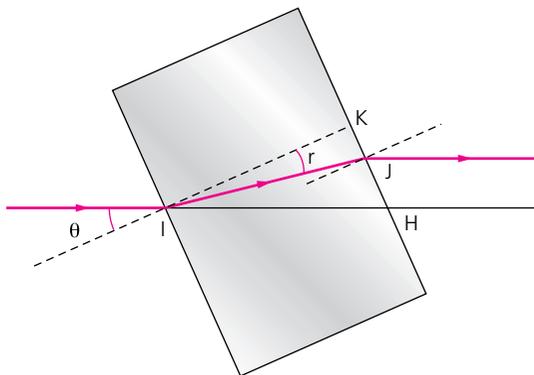
et la différence de marche entre les deux faisceaux s'écrit $\delta' = \delta'_2 - \delta'_1$:

$$\delta' = \left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} - \frac{1}{\cos \theta} - (n - 1) \right] e$$

Avec θ petit, on a $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin \theta \approx \theta$. On obtient à l'ordre 2 :

$$\delta' \approx \left[n \left(1 + \frac{\theta^2}{2n^2} \right) - \left(1 + \frac{\theta^2}{2} \right) - (n - 1) \right] e$$

$$\delta' \approx \frac{(1 - n)}{2n} \theta^2 e$$



6. On a :

$$E'_1 = \frac{1}{2}E_0e^{ik\delta_1}, \quad E''_2 = \frac{1}{2}E_0e^{ik\delta_2} = \frac{1}{2}E_0e^{ik(\delta_1+\delta')}$$

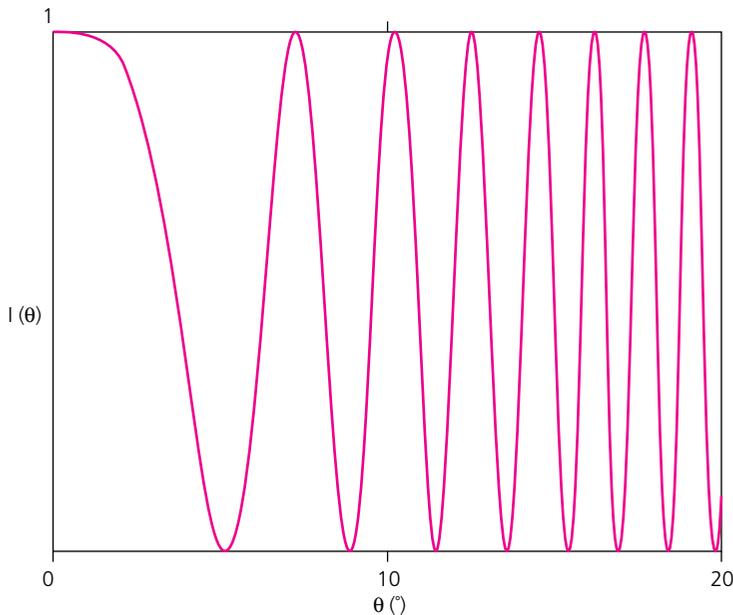
d'où la nouvelle expression de l'éclairement :

$$I'' = K|E'_1 + E''_2|^2$$

$$I'' = \frac{K}{4}E_0^2[1 + e^{ik\delta'}][1 + e^{-ik\delta'}]$$

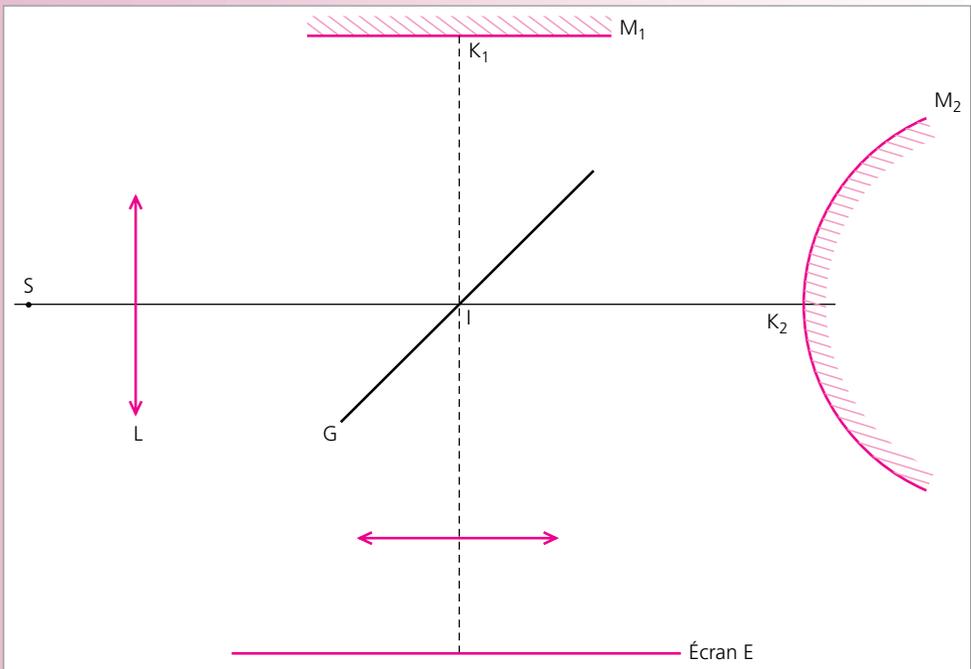
$$I'' = \frac{1}{2}I_0^2[1 + \cos(k\delta')] = \frac{1}{2}I_0^2 \left[1 + \cos \left(\frac{(1-n)}{n} \pi \frac{e}{\lambda} \theta^2 \right) \right]$$

La figure ci-dessous montre les variations de $I''(\theta)$ pour $n = 1,5$, $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $e = 1,2 \text{ mm}$.



Exercice 16 Interféromètre de Twyman

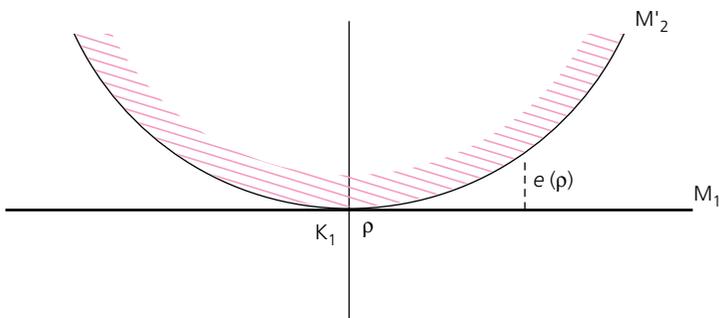
On considère l'interféromètre de la figure p. suivante où M_2 est un miroir sphérique (au lieu d'être plan). S est une source monochromatique (de longueur d'onde $\lambda = 546,1 \text{ nm}$) et ponctuelle située au foyer de la lentille L . On a : $IK_1 = IK_2$. Le rayon de M_2 est $R = 10 \text{ m}$. Le plan d'observation E est le conjugué de M_1 par le système optique (grandissement $|\gamma| = 1$). On néglige tout déphasage.



Calculer les rayons des trois premiers anneaux. Le résultat est-il le même pour un miroir convexe et un miroir concave ? Comment se déplacent les anneaux lorsqu'on translate M_2 le long de IK_2 ?

Solution

Le symétrique de K_2 par rapport à G est un cercle tangent en K_1 à M_1 .



L'incidence étant normale, on observe par réflexion des anneaux de Newton à centre brillant ($\delta = 0$ en K_1 en l'absence de tout déphasage).

Comme $e(\rho) = \frac{\rho^2}{2R}$, la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent est :

$$\delta = 2e = \frac{\rho^2}{R}$$

Les anneaux brillants ont des rayons ρ_m tels que : $\delta = m\lambda$

$$\rho_m = \sqrt{m} \sqrt{\lambda R}$$

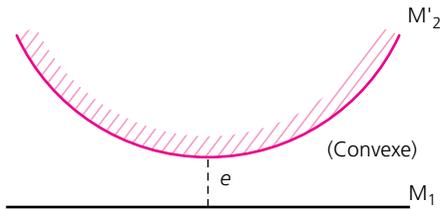
A.N. $\sqrt{\lambda R} = 2,34 \text{ mm}$ $\rho_1 = 2,34 \text{ mm}$

$\rho_2 = 3,31 \text{ mm}$

$\rho_3 = 4,05 \text{ mm}$

Ce résultat est indépendant de la nature du miroir.

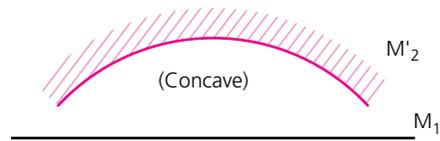
Supposons qu'on éloigne M_2 de I. On obtient alors les schémas suivants :



e croît avec ρ . Pour un anneau donné :

$$\delta = 2e = m\lambda$$

Si e croît, on voit donc l'anneau (m)
« rentrer vers le centre ».



Conclusion inverse : les anneaux naissent
au centre et se dilatent.

I

nterférence à trois ondes ou plus. Réseaux

Un peu d'histoire

Les raies fantômes des réseaux

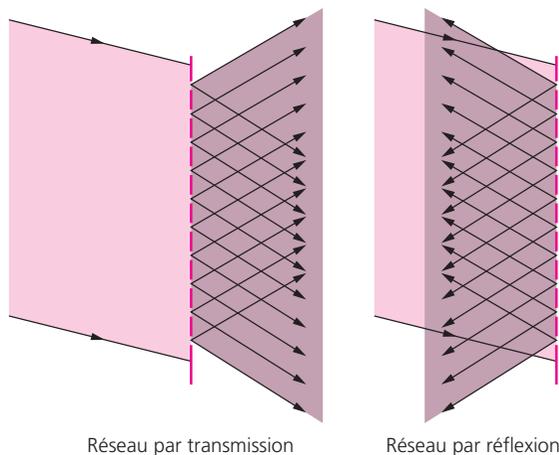
Les *ghosts* (« fantômes » en anglais) sont des raies parasites dans la figure d'interférence générée par les réseaux, principalement dues aux imperfections dans le tracé de leurs traits. En effet, si les traits ne sont pas rigoureusement rectilignes, parallèles et équidistants, les images données par le réseau sont altérées, de sorte que ce dernier perd de son efficacité. Les principales erreurs d'espacement peuvent être périodiques sur toute la surface du réseau, progressives ou complètement aléatoires.

Ainsi, les *ghosts* de Rowland sont les raies parasites qui apparaissent lors d'une erreur périodique du pas du réseau ; elles sont disposées symétriquement par rapport à la raie principale, à une distance d'autant plus grande que l'erreur est petite. Un deuxième type de *ghosts* a été découvert par Lyman en 1901 : leur origine semble être la superposition de deux erreurs périodiques, incommensurables l'une avec l'autre. Une erreur progressive, par exemple due à un changement de température, peut donner au réseau des propriétés de focalisation. Enfin, les erreurs aléatoires conduisent à l'apparition de raies satellites distribuées irrégulièrement. L'altération accidentelle du profil des sillons, combinée aux irrégularités de surface, provoque à travers le spectre une diffusion de lumière d'autant plus importante que la longueur d'onde est petite.

1. DÉFINITION DES RÉSEAUX OPTIQUES

On appelle réseau un système interférentiel constitué de N trous alignés, avec N très grand, typiquement de l'ordre de 100. Lorsque les trous peuvent être considérés comme ponctuels, on parle de réseaux optiques parfaits, par opposition aux réseaux réels constitués de fentes de taille finie. Ces trous peuvent être des ouvertures laissant passer la lumière. On parle alors de réseaux par transmission : chaque trou réémet de la lumière vers l'avant.

Il existe également des réseaux par réflexion : dans ce cas, le réseau est constitué d'encoches gravées sur un plan opaque. Les encoches se comportent comme des sources qui réémettent la lumière vers l'arrière. Dans les deux cas, la distance entre les trous ou entre les gravures est constante : c'est le pas du réseau.



Réseau par transmission

Réseau par réflexion

2. INTERFÉRENCES À N ONDES

2.1. Superposition de N ondes

N ondes sont susceptibles d'interférer en un point de l'espace si elles sont issues de sources cohérentes entre elles ; dans la pratique, seules des ondes issues de la même source sont susceptibles d'interférer.

Le champ électrique \vec{E} résultant en un point M de l'espace s'écrit, d'après le principe de superposition, comme la somme des champs \vec{E}_i associés aux N ondes :

$$\vec{E}(M, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{E}_i(M, t)$$

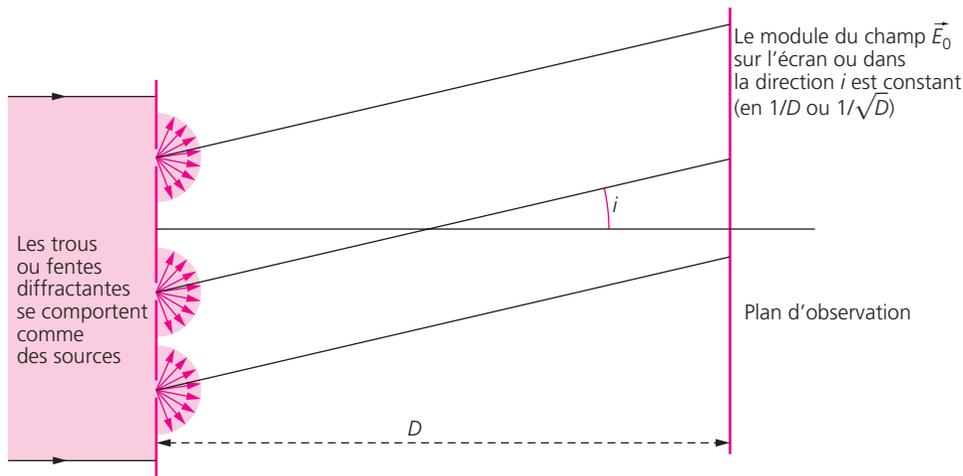
L'intensité résultante s'écrit $I = KEE^*$, où $*$ désigne le complexe conjugué.

2.2. Onde lumineuse émise par un trou « diffractant »

Comme pour les interféromètres à 2 ondes, les interféromètres à N ondes, auxquels appartiennent les réseaux optiques parfaits, font souvent intervenir un écran percé de trous ou de fentes fines, et éclairé par un faisceau lumineux. On dit que les trous « diffractent » la lumière vers l'avant (ou dans le cas de réseaux par réflexion, vers l'arrière).

La diffraction est traitée au chapitre suivant : nous retiendrons simplement ici qu'un « trou diffractant » se comporte comme une source ponctuelle, c'est-à-dire que le trou émet une onde sphérique appelée ondelette (c'est le principe de Huygens). Lorsqu'il s'agit d'une fente, assimilée à une ligne de trous continus, l'onde émise est cylindrique.

Dans tous les cas, on observe l'interférence de ces ondes loin de leurs sources, i.e. à une distance latérale D très grande devant toutes les autres longueurs du problème. Aussi, la décroissance du champ électrique en $1/r$ ou en $1/\sqrt{r}$, caractéristique des ondes sphériques ou cylindriques, est simplement prise en compte en posant $r \approx D$, de sorte qu'il n'y a pas de dépendance du module du champ par rapport à la distance à l'une des sources.



3. EXPRESSION DE L'INTENSITÉ POUR UN RÉSEAU

3.1. Intensité dans la direction i

Considérons un réseau optique parfait de pas a , éclairé par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ , et supposons que le faisceau arrive en incidence normale sur le réseau. Les ondes issues des N trous interfèrent et l'intensité lumineuse dans une direction faisant un angle i faible avec la normale au réseau, est donnée par :

$$I(i) = I_0 \left[\frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} ai$$

3.2. Formule des réseaux

Sous le nom de formule des réseaux, on désigne la loi donnant les directions angulaires i d'observation pour lesquelles l'interférence de N ondes, issues de trous diffractant une lumière parallèle incidente sur le réseau avec un angle i_0 , correspond à un maximum d'intensité lumineuse. Autrement dit, l'interférence de ces N ondes est constructive. Les maxima d'intensité lumineuse sont obtenus dans les directions i telles que :

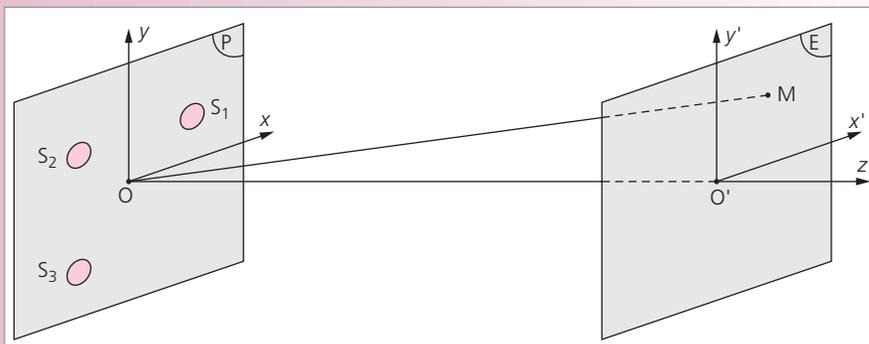
$$i = i_0 + \frac{n\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad n \text{ entier}$$

SYSTÈMES INTERFÉRENTIELS À TROIS ONDES

Exercice 1 Interférence à trois sources ponctuelles dans un plan

On éclaire en incidence normale un plan P ($O ; x, y$) percé de trois petits trous ; on admet que ce dispositif est équivalent à trois sources ponctuelles S_1, S_2 et S_3 , a priori non alignées dans P. La lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde λ . On place à la distance D de P un écran d'observation E ($O' ; x', y'$) parallèle à P. On considère que D est très grand devant les distances entre les sources.

1. Donner l'expression de la différence de marche des trois rayons arrivant en un point M de E issu des différentes sources (on prendra une référence de phase arbitraire).
2. En déduire l'expression du champ électrique en M résultant de la superposition des trois ondes issues des sources.
3. Écrire finalement l'éclairement sur le plan d'observation.
4. Que devient la figure d'interférence si les trois sources sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de centre O ?
5. Même question si les trois sources sont aux sommets d'un triangle isocèle ($S_1S_2 = S_1S_3$) rectangle en S_1 , confondu avec O.



On note \vec{r}_1, \vec{r}_2 et \vec{r}_3 les vecteurs position des trois sources dans P.

Solution

CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté particulière ; il suffit d'écrire le principe de superposition des trois ondes sphériques issues de chacune des sources (on pensera à poser la distance d'une des sources à un point M de l'écran à peu près égale à D). L'intensité lumineuse résultante est proportionnelle au carré du module du champ résultant.

1. On prend comme référence de phase celle, fictive, d'une source qui serait placée en O. La différence de marche en M entre les rayons issus de la source S_i ($i = 1, 2$ ou 3) et celui qui serait issu du point O en M s'écrit :

$$\delta_i = S_iM - OM \approx \frac{\vec{r}_i \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_i = \overrightarrow{OS_i}$$

2. L'amplitude complexe $E(M)$ du champ électrique résultant en M est la somme des champs associés à chaque onde. L'onde sphérique issue de S_i a pour champ électrique $E_i(M)$ en M :

$$E_i(M) = E_0 \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{OM}}{OM} \right)$$

où E_0 décroît en $1/S_i M \approx 1/D$ (avec D très grand devant les autres longueurs). On en déduit l'expression de $E(M)$:

$$E(M) = E_0 \sum_{i=1}^3 \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{OM}}{OM} \right)$$

3. L'éclairement observé sur l'écran est donné par $I(M) = K|E(M)|^2 = K E(M) E(M)^*$, où $*$ indique le complexe conjugué et K est une constante. On a donc :

$$I(M) = K E_0^2 \left[\sum_{i=1}^3 \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{OM}}{OM} \right) \right] \left[\sum_{i=1}^3 \exp \left(-\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{OM}}{OM} \right) \right]$$

Soit finalement, avec $I_0 = K E_0^2$:

$$I(M) = I_0 \left[3 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{OM}}{OM} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{OM}}{OM} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \cdot \vec{OM}}{OM} \right) \right]$$

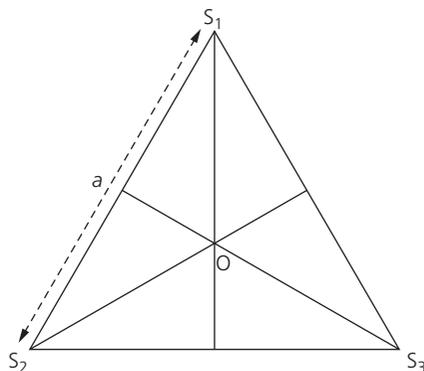
4. Notons a la longueur d'un côté du triangle (la figure ci-contre indique la disposition des trois sources aux sommets d'un triangle équilatéral). Les vecteurs position des sources s'écrivent :

$$\vec{r}_1 = (0 ; a/\sqrt{3} ; 0)$$

$$\vec{r}_2 = (-a/2 ; -a/2\sqrt{3} ; 0)$$

et

$$\vec{r}_3 = (a/2 ; -a/2\sqrt{3} ; 0)$$



Avec $\vec{OM} = (x' ; y' ; D)$ et $OM \approx D$, il vient :

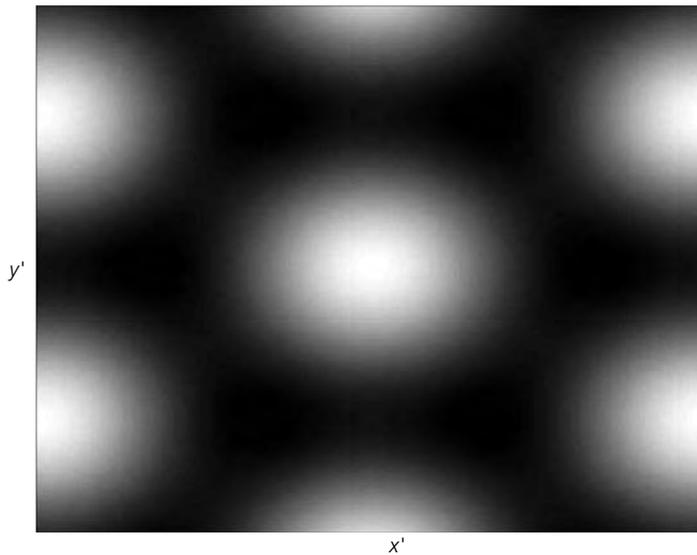
$$I(x', y') \approx I_0 \left[3 + 2 \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} (x' + \sqrt{3}y') \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} (2x') \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} (-x' + \sqrt{3}y') \right) \right]$$

Avec $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ et $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, il vient :

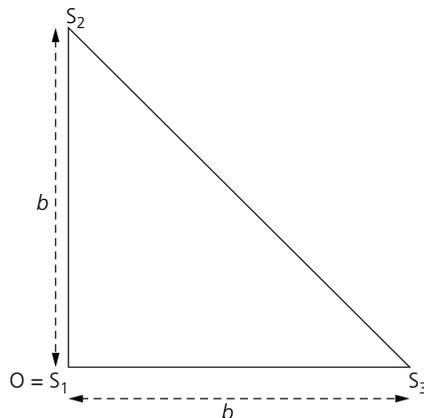
$$I(x', y') \approx I_0 \left[1 + 4 \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} x' \right) \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} \sqrt{3} y' \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda D} x' \right) \right]$$

$$I(x', y') \approx I_0 \left[1 + 4 \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} x' \right) \left(\cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} \sqrt{3} y' \right) + \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda D} x' \right) \right) \right]$$

On montre ci-dessous la figure d'interférence pour 3 sources aux sommets d'un triangle équilatéral avec $\lambda = 600 \text{ nm}$, $a = 0,5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ m}$ (x et y sont compris entre $-\lambda D/a$ et $\lambda D/a$).



5. La figure ci-dessous indique la disposition des trois sources aux sommets d'un triangle isocèle rectangle. On pose $S_1S_2 = S_1S_3 = b$.



Les vecteurs position des sources s'écrivent : $\vec{r}_1 = (0 ; 0 ; 0)$ $\vec{r}_2 = (b ; 0 ; 0)$ et $\vec{r}_3 = (0 ; b ; 0)$. Avec $\vec{OM} = (x' ; y' ; D)$ et $OM \approx D$, il vient :

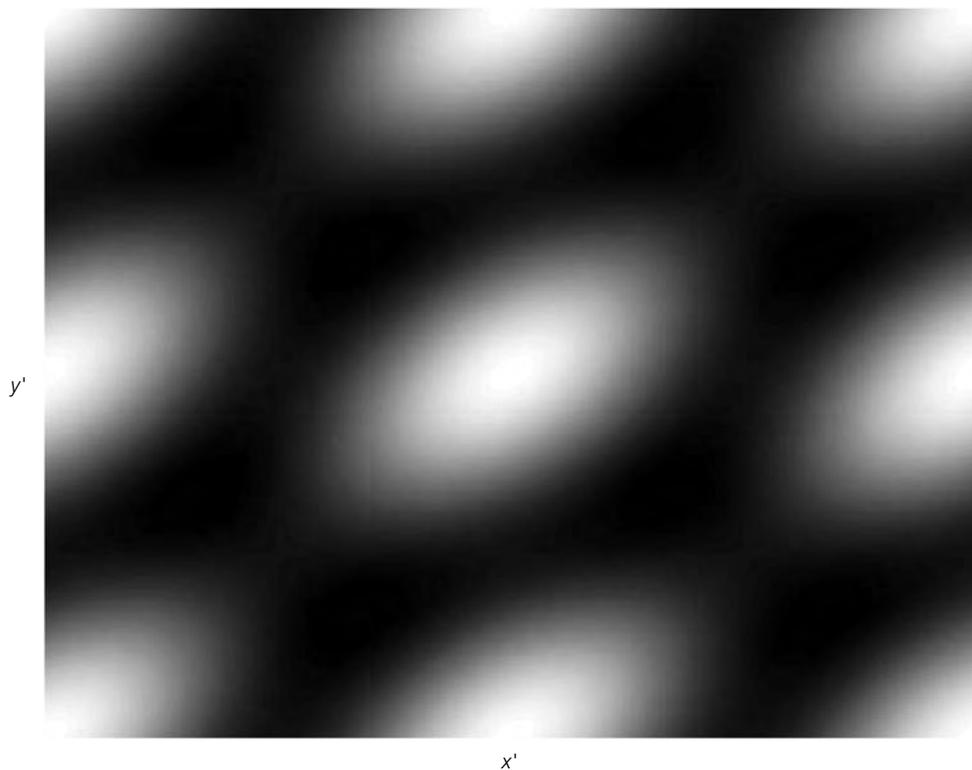
$$I(x', y') \approx I_0 \left[3 + 2 \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} x' \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} y' \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi b}{\lambda D} (x' - y') \right) \right]$$

Avec $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$ et $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, on peut également écrire $I(x', y')$ sous la forme :

$$I(x', y') \approx I_0 \left[1 + 4 \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} (x' + y') \right) \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} (x' - y') \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda D} (x' - y') \right) \right]$$

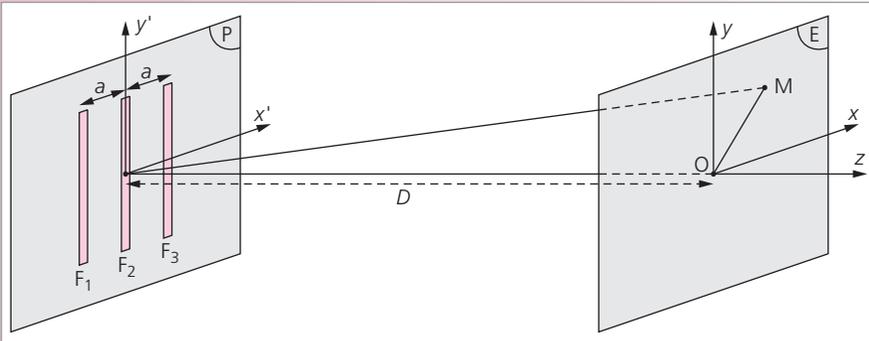
$$I(x', y') \approx I_0 \left[1 + 8 \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} (x' - y') \right) \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} x' \right) \cos \left(\frac{\pi b}{\lambda D} y' \right) \right]$$

La figure ci-dessous montre la figure d'interférence pour 3 sources aux sommets d'un triangle isocèle rectangle avec $\lambda = 600 \text{ nm}$, $b = 0,5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ m}$ (x' et y' sont compris entre $-\lambda D/a$ et $\lambda D/a$).



Exercice 2 Système interférentiel à trois fentes fines parallèles

On considère le système interférentiel suivant, constitué de trois fentes fines parallèles F_1 , F_2 et F_3 considérées comme infiniment fines et équidistantes ($F_1F_2 = F_2F_3 = a$). Le système est éclairé par une source monochromatique. On observe les phénomènes d'interférence sur un écran parallèle au dispositif et situé à la distance D de celui-ci. Soit O le point où la normale au dispositif interférentiel passant par F_2 coupe l'écran et M un point voisin de O . On admet que OM est très petit devant D .



1. a. Donner l'expression du champ électrique résultant de la superposition, au point M , des ondes issues des trois fentes. En déduire l'intensité I au point M ; représenter graphiquement les variations de I en fonction de la différence de phase entre deux rayons issus de deux fentes consécutives.

1. b. Calculer le rapport des intensités des différents pics et la distance qui sépare les franges les plus brillantes.

2. On obture la fente centrale F_2 . Exprimer l'intensité au point M et calculer l'interfrange i .
A. N. $a = 0,30 \text{ mm}$; $D = 2,90 \text{ m}$; $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Solution

CONSEIL : dans le plan $(O ; x, z)$, on retrouve le problème de trois trous (si on néglige l'épaisseur des fentes, ce qui est suggéré dans l'énoncé). Rappelons-nous que la longueur des fentes dans la direction Oy rend la figure d'interférence plus lumineuse mais ne change pas l'expression des variations de l'intensité lumineuse observée dans le plan $(O ; x, y)$. Il suffit donc de mener le calcul dans ce plan.

1. a. Plaçons-nous dans le plan $(O ; x, z)$ et considérons l'onde arrivant au niveau des fentes.

Les trois rayons arrivant respectivement en F_1 , F_2 et F_3 sont en phase. Ce n'est plus le cas lorsque les rayons arrivent en M :

- F_1 est en avance de δ_1 par rapport à F_3 ;
- F_2 est en retard de δ_2 par rapport à F_3 .

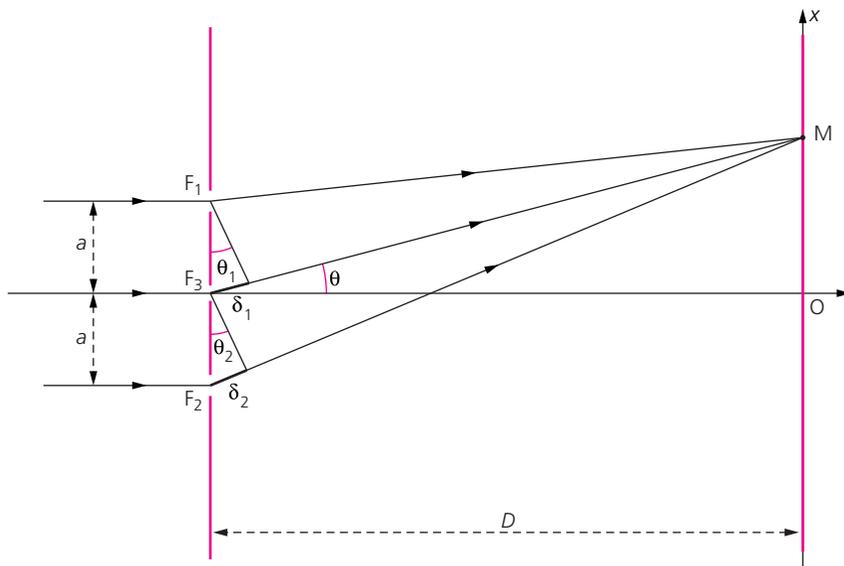
Pour exprimer δ_1 , on utilise : $\delta_1 = a \sin \theta_1 \approx a \theta_1$

De même : $\delta_2 = a \sin \theta_2 \approx a \theta_2$

Or $D \gg a$, ce qui permet d'écrire : $\theta \approx \theta_1 \approx \theta_2$ et $\tan \theta = x/D$, où x repère la position de M. On en déduit la différence de marche et le déphasage :

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta = ax/D$$

$$\varphi = 2\pi ax/\lambda D$$



Écrivons les champs électriques complexes des ondes issues de F₁, F₂ et F₃ en prenant F₂ pour référence :

$$E_1 = a e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$E_2 = a e^{i\omega t}$$

$$E_3 = a e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Le champ E résultant est la somme des champs E_1 , E_2 et E_3 :

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = a e^{i\omega t} [1 + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}]$$

$$E = a e^{i\omega t} (1 + 2 \cos \varphi)$$

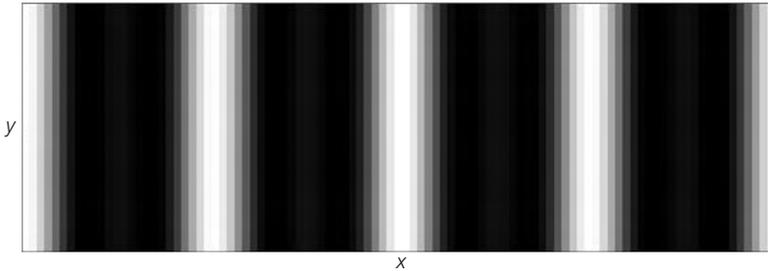
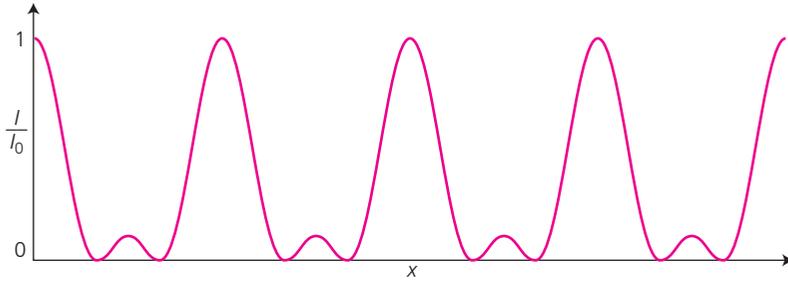
L'intensité est définie par :

$$I = K |E|^2 = K a^2 (1 + 2 \cos \varphi)^2$$

où K est une constante. En posant I_0 l'intensité en O ($\varphi = 0$), il vient :

$$I = \frac{I_0}{9} (1 + 2 \cos \varphi)^2$$

La fonction $I(x)$ et l'aspect de la figure d'interférence sur l'écran sont donnés ci-après :



1. b. L'intensité maximale est obtenue pour $\cos \varphi = +1$. On obtient également des maxima secondaires pour $\cos \varphi = -1$.

En effet avec :

$$I(\varphi) = \frac{I_0}{9} (1 + 2 \cos \varphi)^2$$

on a :

$$I'(\varphi) = -4 \frac{I_0}{9} \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi)$$

Les valeurs de φ telles que $(1 + 2 \cos \varphi) = 0$ correspondent à un minimum ($I = 0$) tandis que les valeurs de φ telles que $\sin \varphi = 0$ correspondent à des maxima d'intensité.

Les maxima sont obtenus pour :

- $\varphi = 2k\pi, \quad I(2k\pi) = I_p = I_0$
- $\varphi = (2k + 1)\pi \quad I((2k + 1)\pi) = I_s = \frac{I_0}{9}$

On en déduit le rapport des intensités entre les pics des maxima principaux et des maxima secondaires :

$$R = \frac{I_p}{I_s} = 9$$

La distance angulaire entre les franges les plus brillantes correspondant à $\Delta\varphi = 2\pi$, avec $\varphi = 2\pi ax/\lambda D$, on calcule la distance Δx correspondante sur l'écran :

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$$

2. Si on obture la fente centrale, on retrouve le dispositif des trous de Young à deux fentes distantes de $2a$. L'intensité lumineuse sur l'écran est alors donnée par :

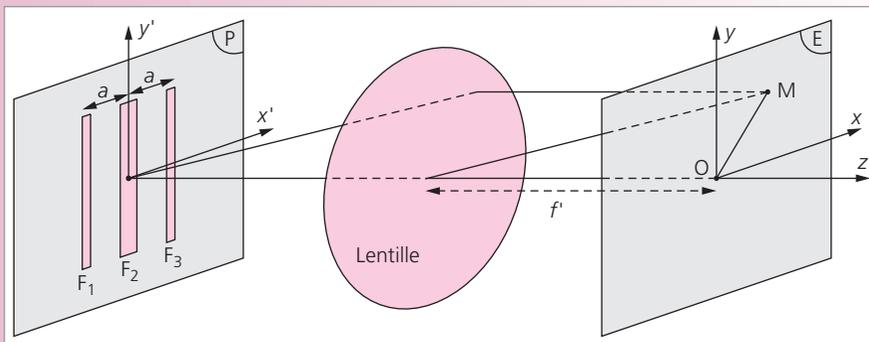
$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right)$$

où $i = \frac{\lambda D}{2a}$ est l'interfrange.

Exercice 3 Système interférentiel de Young avec trois fentes de largeurs différentes

On reprend la configuration du système interférentiel à trois fentes, alignées sur l'axe F_2x' , de l'exercice précédent mais on suppose maintenant que la fente centrale a une largeur double des deux autres. On admet pour le calcul de la figure d'interférence que l'amplitude du champ électrique associé à l'onde émise par une fente fine est simplement proportionnelle à sa largeur.

Calculer la figure d'interférence sur un écran d'observation (O ; x, y) placé dans le plan focal image d'une lentille convergente, de distance focale f' , parallèle au plan des trois fentes.



Solution

CONSEIL : la résolution de cet exercice nécessiterait la prise en compte de la taille finie des fentes, c'est-à-dire le phénomène de diffraction par une fente que nous ne souhaitons pas aborder ici. Dans l'énoncé, on nous indique une autre procédure : il s'agit de considérer que l'amplitude de l'onde issue d'une fente est proportionnelle à la largeur de celle-ci. Ainsi, la fente centrale émet une onde d'amplitude double de celles issues des deux autres fentes.

Il suffit de reprendre le calcul de l'exercice précédent en considérant la contribution « double » de la fente centrale : les amplitudes complexes des champs électriques associés aux ondes issues de F_1 , F_2 et F_3 , s'écrivent en prenant F_2 pour référence :

$$E_1 = a e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$E_2 = 2a e^{i\omega t}$$

$$E_3 = a e^{i(\omega t - \varphi)}$$

avec

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \tan \theta$$

Le champ électrique résultant E est la somme des champs E_1 , E_2 et E_3 :

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = ae^{i\omega t} [2 + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}]$$

$$E = 2ae^{i\omega t} (1 + \cos \varphi)$$

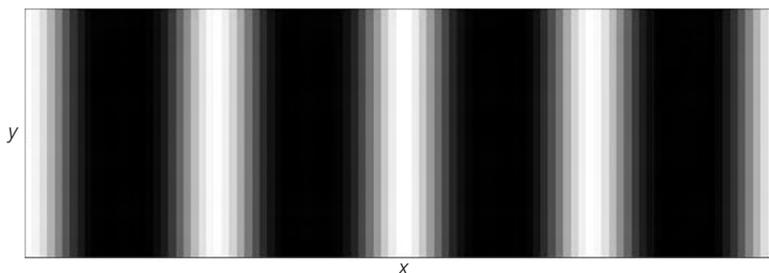
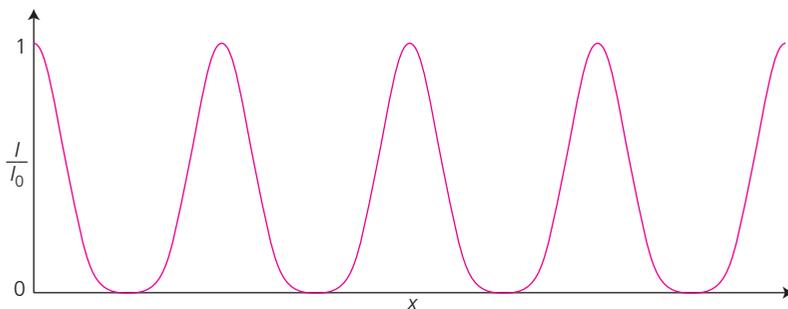
L'intensité a donc pour expression :

$$I = K|E|^2 = \frac{I_0}{4} (1 + \cos \varphi)^2$$

où K est une constante. L'angle θ définit la direction des rayons qui convergent, après la lentille, en un point M de l'écran d'observation tel que $\tan \theta = \frac{x}{f'}$. On a donc sur l'écran un éclairement invariant suivant y et variant en x selon la loi :

$$I(x) = \frac{I_0}{4} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f'} x \right) \right]^2$$

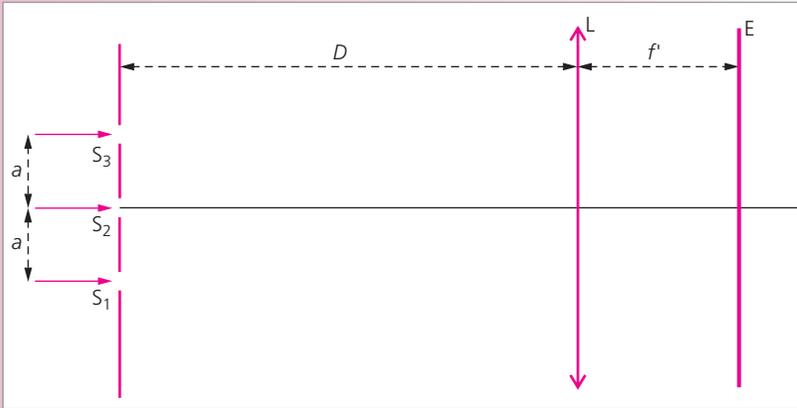
La fonction $I(x)$ et l'aspect de la figure d'interférence sur l'écran sont donnés ci-dessous :



Exercice 4 **Système interférentielle à trois sources alignées.**
Influence d'une lame

On considère le système interférentiel d'Young comptant trois trous S_1 , S_2 et S_3 alignés et équidistants (la distance entre deux sources est notée a). On effectue l'observation dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f' . La longueur d'onde de l'onde incidente est égale à 600 nm.

1. Quelle est l'éclairement observé sur l'écran ?

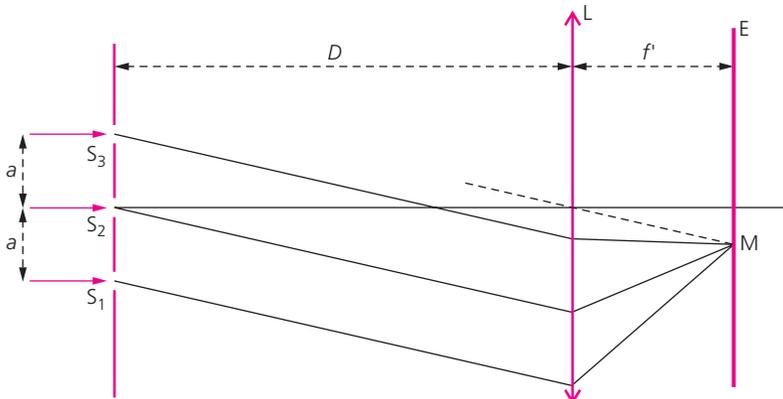


On interpose une lame à faces parallèles d'indice $n = 1,5$ et d'épaisseur e juste derrière la source S_1 .

2. Quelle est l'aspect de la nouvelle figure d'interférence ?
3. Pour quelles valeurs de l'épaisseur de la lame la figure d'interférence n'est pas modifiée ?
4. Mêmes questions si l'on place une seconde lame identique devant la source S_3 .

Solution

1. Reprenons le résultat de l'exercice 2 où la distance D est remplacée par la distance focale f' de la lentille (la figure ci-dessous montre la trajectoire des trois rayons issus de S_1 , S_2 et S_3 et atteignant le point M sur l'écran d'observation).



Les amplitudes complexes des champs électriques associés aux ondes en un point $M(x)$ de l'écran s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_1 &= A e^{i(\omega t + \varphi)} \\ E_2 &= A e^{i\omega t} \\ E_3 &= A e^{i(\omega t - \varphi)} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi a}{\lambda f'} x \end{aligned}$$

Le champ électrique résultant en M vaut $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ et l'intensité lumineuse s'écrit $I(x) = K E(x)E(x)^*$, où $*$ désigne le complexe conjugué et K est une constante. Dans le plan focal image de la lentille convergente, $I(x)$ a pour expression :

$$I(x) = \frac{I_0}{9} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f'} x \right) \right]^2$$

2. La présence de la lame induit un retard de phase φ_1 de S_1 par rapport aux deux autres sources : $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} e(n - 1)$. Récrivons les champs électriques associés aux ondes issues des trois sources :

$$\begin{aligned} E_1 &= A e^{i(\omega t + \varphi + \varphi_1)} \\ E_2 &= A e^{i\omega t} \\ E_3 &= A e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned}$$

On en déduit le champ électrique résultant :

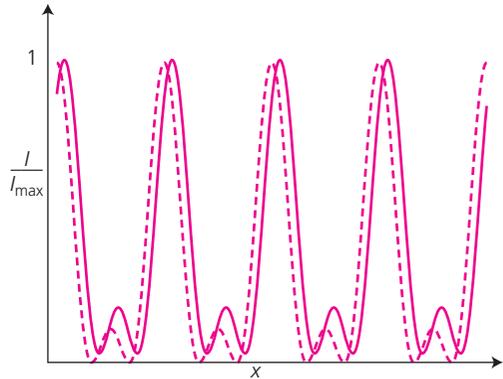
$$E = A e^{i\omega t} \{ e^{i(\varphi + \varphi_1)} + 1 + e^{-i\varphi} \}$$

On a donc :

$$I = K A^2 (3 + 2 \cos \varphi + 2 \cos(\varphi + \varphi_1) + 2 \cos(2\varphi + \varphi_1))$$

$$I(x) = I_0 \frac{3 + 2 \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{f'} + (n - 1)e \right) \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{2ax}{f'} + (n - 1)e \right) \right)}{5 + 4 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (n - 1)e \right)}$$

Les variations de l'intensité lumineuse sont représentées ci-contre : en traits pointillés, on a représenté $I(x)$ en l'absence de la lame et en traits pleins, on a représenté $I(x)$ en présence de la lame pour $e = 1 \mu\text{m}$, $a = 0,5 \text{ mm}$, $f' = 1 \text{ m}$ (avec $n = 1,5$ et $\lambda = 600 \text{ nm}$). Dans la pratique, on observe donc le défilement des franges et une variation de l'intensité des franges brillantes (en général, l'intensité des pics secondaires est trop faible comparée à celle des pics principaux pour être détectée par l'œil, de sorte qu'on ne voit pas la variation de leur intensité lorsqu'on intercale la lame).



3. Pour que la figure d'interférence ne soit pas modifiée, il faut que le déphasage φ_1 soit un multiple de 2π , soit :

$$e = k \frac{\lambda}{(n-1)} \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

La plus petite valeur de e ne modifiant pas la figure d'interférence est donc $e_{\min} = \frac{\lambda}{(n-1)} = 1,2 \mu\text{m}$.

4. La différence de phase φ_1 est cette fois également appliquée à S_3 . On a donc :

$$E_1 = A e^{i(\omega t + \varphi + \varphi_1)}$$

$$E_2 = A e^{i\omega t}$$

$$E_3 = A e^{i(\omega t - \varphi + \varphi_1)}$$

On en déduit le champ résultant :

$$E = A e^{i\omega t} \{ e^{i(\varphi + \varphi_1)} + 1 + e^{i(-\varphi + \varphi_1)} \} = A e^{i\omega t} [2 \cos \varphi e^{i\varphi_1} + 1]$$

On a donc :

$$I = KA^2 [1 + 4 \cos \varphi (\cos \varphi + \cos \varphi_1)]$$

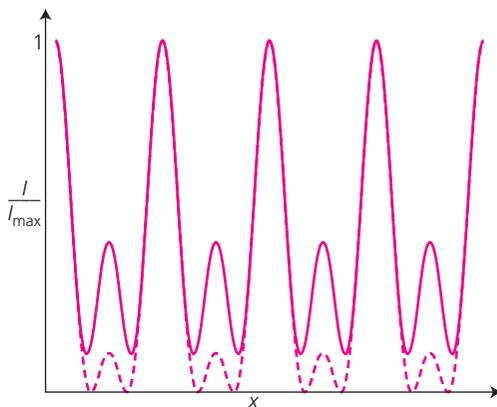
$$I(x) = I_0 \frac{1 + 4 \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \left[\cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (n-1) e \right) \right]}{5 + 4 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (n-1) e \right)}$$

Les variations de l'intensité lumineuse sont représentées ci-contre : en traits pointillés, on a représenté $I(x)$ en l'absence des deux lames et en traits pleins, on a représenté $I(x)$ en présence des deux lames pour $e = 1 \mu\text{m}$, $a = 0,5 \text{ mm}$, $f' = 1 \text{ m}$ (avec $n = 1,5$ et $\lambda = 600 \text{ nm}$). Ici, on n'observe pas de déplacement de la figure d'interférence : la seule manifestation de la présence des lames est la variation d'intensité des pics secondaires.

La condition pour que la figure d'interférence ne soit pas modifiée est la même qu'avec une seule lame :

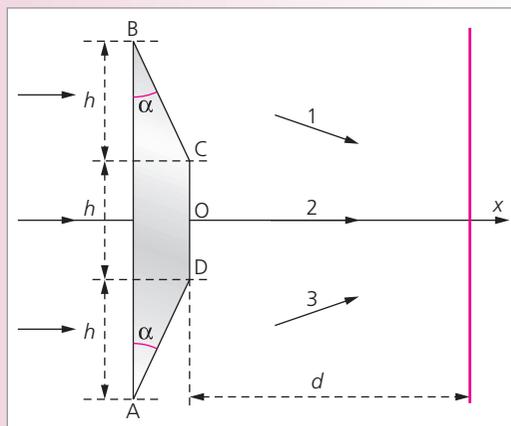
$$e = k \frac{\lambda}{(n-1)} \quad \text{avec } k \text{ entier}$$

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{(n-1)} = 1,2 \mu\text{m}$$



Exercice 5 Interférence à trois ondes à travers une lame prismatique

On considère la lame prismatique de la figure ci-contre, d'indice n et d'angle α très petit. On désigne par h la distance CD, qui correspond également à la distance verticale des points B à C et des points D à A. Une onde plane est envoyée en incidence normale sur la face AB de la lame et on considère les trois ondes 1, 2 et 3, respectivement transmises par les faces BC, CD et DA de la lame. L'observation a lieu sur un écran situé à la distance d de la face de sortie de la lame prismatique.



On écrit les champs électriques associés aux trois ondes sous la forme :

$$E_1(x, y, t) = E_{10} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})}$$

$$E_2(x, y, t) = E_{20} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})}$$

$$E_3(x, y, t) = E_{30} e^{i(\omega t - \vec{k}_3 \cdot \vec{OM})}$$

où E_{10} , E_{20} et E_{30} sont des nombres complexes.

- Déterminer les vecteurs d'onde \vec{k}_1 , \vec{k}_2 et \vec{k}_3 .
- Aux points C et D, les ondes 1 et 2 ou 2 et 3 sont égales : traduire ces égalités sur les fonctions E_{10} , E_{20} et E_{30} .
- En déduire l'expression du champ électrique résultant en un point M de l'écran. On utilisera le fait que l'angle α est petit.
- Déterminer la figure d'interférence sur l'écran d'observation.

Solution

1. Les vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_3 sont portés par la direction d'émergence pour un prisme d'angle au sommet α . Avec α petit, la formule du prisme nous donne une déviation D égale à $D = (n - 1)\alpha$. On en déduit :

$$\vec{k}_1 = k(\cos D; -\sin D) \quad \text{et} \quad \vec{k}_3 = k(\cos D; \sin D)$$

L'onde 2 n'est pas déviée, donc :

$$\vec{k}_2 = k(1; 0)$$

2. Écrivons l'égalité des champs électriques des ondes 1 et 2 au point C(0 ; h) :

$$E_{10} e^{ik \sin D h} = E_{20}$$

De même pour les champs électriques des ondes 2 et 3 au point $D(0 ; -b)$:

$$E_{20} = E_{30} e^{ik \sin D b}$$

3. Au point $M(d ; y)$, le champ électrique résultant est la somme des champs électriques associés aux ondes 1, 2 et 3 :

$$E_1(d, y, t) = E_{10} e^{i(\omega t - kd \cos D + ky \sin D)}$$

$$E_2(d, y, t) = E_{20} e^{i(\omega t - kd)}$$

$$E_3(d, y, t) = E_{30} e^{i(\omega t - kd \cos D - ky \sin D)}$$

Avec α petit, l'angle de déviation D est également petit. Nous avons donc $\sin D \approx D$ et $\cos D \approx 1$. Utilisons les expressions de E_{30} et E_{10} de la question 2 :

$$E_1(d, y, t) = E_{20} e^{i(\omega t - kd + kDy - kDh)}$$

$$E_2(d, y, t) = E_{20} e^{i(\omega t - kd)}$$

$$E_3(d, y, t) = E_{20} e^{i(\omega t - kd - kDy - kDh)}$$

4. La figure d'interférence correspond à l'intensité résultante sur l'écran, soit :

$$I(y) = K[E_1(d, y, t) + E_2(d, y, t) + E_3(d, y, t)][E_1(d, y, t) + E_2(d, y, t) + E_3(d, y, t)]^*$$

où * désigne le complexe conjugué et K une constante.

$$I(y) = K |E_{20}|^2 \{1 + e^{-ikDh}[e^{ikDy} + e^{-ikDy}]\} \{1 + e^{ikDh}[e^{ikDy} + e^{-ikDy}]\}$$

$$I(y) = K |E_{20}|^2 [1 + 2e^{-ikDh} \cos(kDy)] [1 + 2e^{ikDh} \cos(kDy)]$$

$$I(y) = K |E_{20}|^2 \{1 + 2 \cos(kDy)[e^{ikDh} + e^{-ikDh}] + 4 \cos^2(kDy)\}$$

$$I(y) = K |E_{20}|^2 [1 + 4 \cos(kDy) \cos(kDh) + 4 \cos^2(kDy)]$$

Au centre de l'écran, en $y = 0$, l'intensité I_0 s'écrit $I_0 = K |E_{20}|^2 [5 + 4 \cos(kDh)]$, soit finalement :

$$I(y) = I_0 \frac{1 + \cos(kDy) \cos(kDh) + \cos^2(kDy)}{5 + \cos(kDh)}$$

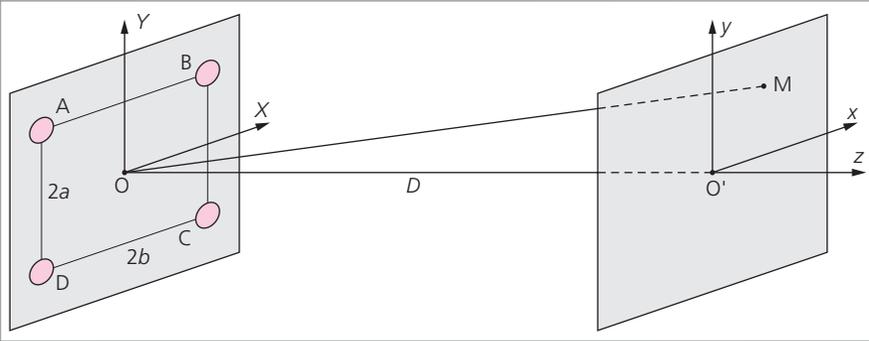
La figure ci-contre représente l'intensité lumineuse en niveaux de gris dans le plan de l'écran d'observation ($C; y, z$).



SYSTÈMES INTERFÉRENTIELS À QUATRE SOURCES

Exercice 6 Système interférentiel à quatre trous

On considère un système interférentiel à quatre trous A, B, C et D formant les sommets d'un rectangle de côtés $2a$ et $2b$. À la distance D du plan contenant les quatre trous, on place un écran d'observation. On a $D \gg a$ et b .



1. Déterminer les distances AM, BM, CM et DM (on effectuera un développement limité à l'ordre 1).
2. Donner les expressions des champs électriques associés à ces quatre ondes au point M.
3. Comment se simplifient ces expressions si on considère la zone centrale de l'écran de petite taille par rapport au rectangle que forment les quatre sources ?
4. En déduire l'aspect de la figure d'interférence.

Solution

1. Soit O le centre du rectangle avec les quatre sources en $A(-b ; a ; 0)$, $B(b ; a ; 0)$, $C(b ; -a ; 0)$ et $D(-b ; -a ; 0)$. Le point M de l'écran est repéré par ses coordonnées courantes dans le plan $(O' ; x, y)$ où O' a pour coordonnées $O'(0 ; 0 ; D)$ dans le repère $(O ; X, Y, z)$: $M(x ; y ; D)$.

Les distances AM, BM, CM et DM s'écrivent :

$$AM = \sqrt{(x + b)^2 + (y - a)^2 + D^2} \approx D \left(1 + \frac{(x + b)^2 + (y - a)^2}{2D^2} \right)$$

$$BM \approx D \left(1 + \frac{(x - b)^2 + (y - a)^2}{2D^2} \right)$$

$$CM \approx D \left(1 + \frac{(x - b)^2 + (y + a)^2}{2D^2} \right)$$

$$DM \approx D \left(1 + \frac{(x + b)^2 + (y + a)^2}{2D^2} \right)$$

2. Les champs électriques correspondent à des ondes sphériques et sont de la forme :

$$E_A(M) = \frac{E_0}{AM} e^{ikAM}$$

$$E_B(M) = \frac{E_0}{BM} e^{ikBM}$$

$$E_C(M) = \frac{E_0}{CM} e^{ikCM}$$

$$E_D(M) = \frac{E_0}{DM} e^{ikDM}$$

On garde le développement à l'ordre 1 dans le terme de phase et on se limite à $AM = BM = CM = DM = D$ pour le terme introduisant la décroissance de l'amplitude des ondes sphériques :

$$E_A \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{(x+b)^2 + (y-a)^2}{2D}\right)$$

$$E_B \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{(x-b)^2 + (y-a)^2}{2D}\right)$$

$$E_C \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{(x-b)^2 + (y+a)^2}{2D}\right)$$

$$E_D \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{(x+b)^2 + (y+a)^2}{2D}\right)$$

3. Dans la zone centrale de l'écran, on a x et $y \ll a$ et b . On a donc $(x+b)^2 \approx b^2 + 2bx$ (de même pour les autres carrés). Il vient :

$$E_A \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{a^2 + b^2}{2D}\right) \exp\left(ik \frac{xb - ay}{D}\right)$$

$$E_B \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{a^2 + b^2}{2D}\right) \exp\left(ik \frac{-xb - ay}{D}\right)$$

$$E_C \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{a^2 + b^2}{2D}\right) \exp\left(ik \frac{-xb + ay}{D}\right)$$

$$E_D \approx \frac{E_0}{D} \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{a^2 + b^2}{2D}\right) \exp\left(ik \frac{xb + ay}{D}\right)$$

4. L'expression de l'intensité au point $M(x; y; D)$ s'écrit :

$$I(x, y) = K(E_A + E_B + E_C + E_D) (E_A + E_B + E_C + E_D)^*$$

où K désigne une constante et X^* désigne le complexe conjugué de X .

$$I(x, y) \approx \frac{KE_0^2}{D^2} \left[\exp\left(ik\frac{xb - ay}{D}\right) + \exp\left(ik\frac{-xb - ay}{D}\right) + \exp\left(ik\frac{-xb + ay}{D}\right) + \exp\left(ik\frac{xb + ay}{D}\right) \right] \times CC$$

où CC indique le complexe conjugué du terme qui le précède. Il vient donc :

$$I(x, y) \approx 16\frac{KE_0^2}{D^2} \cos^2\left(k\frac{xb}{D}\right) \cos^2\left(k\frac{ay}{D}\right)$$

L'intensité I_0 au centre C de l'écran est $I_0 = I(0,0) = 16KE_0^2/D^2$. Il vient finalement :

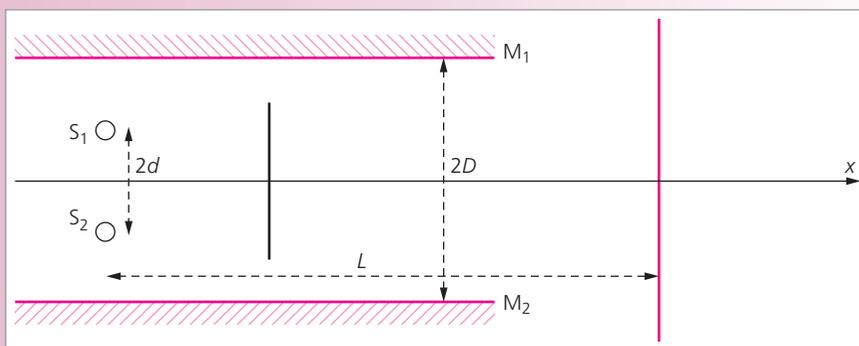
$$I(x, y) \approx I_0 \cos^2\left(k\frac{xb}{D}\right) \cos^2\left(k\frac{ay}{D}\right)$$



On a représenté ci-dessus la figure d'interférence observée sur l'écran d'observation pour $D = 5$ m ; $a = 1$ mm ; $b = 0,5$ mm ; $\lambda = 600$ nm et un écran carré de 12 mm de côté.

Exercice 7 Interféromètre à deux sources incohérentes entre deux miroirs parallèles

On considère le système interférentiel suivant : deux sources S_1 et S_2 , distantes de $2d$, sont placées symétriquement de part et d'autre d'un axe Ox ; on dispose également deux miroirs M_1 et M_2 parallèles à Ox et symétriques par rapport à ce même axe, les deux miroirs étant distants de $2D$. Enfin, on place un obturateur de façon à « bloquer » la lumière directe des deux sources pouvant illuminer un écran d'observation E placé perpendiculairement à l'axe Ox et à la distance L des deux sources. On suppose que les miroirs sont imparfaits, de sorte que les faisceaux réfléchis par les miroirs perdent en intensité lumineuse et on négligera l'amplitude des ondes portées par des rayons ayant subi plus d'une réflexion.



1. Décrire les ondes qui arrivent en un point M de l'écran.
2. Donner l'expression de l'éclairement observé sur l'écran.
3. Quel est l'aspect de la figure d'interférence ? Donner l'expression de l'interfrange et du contraste des franges.
4. Étudier, en fonction de L , la variation de la figure d'interférence. Justifier les expressions de « franges parfaitement visibles » et de « franges complètement brouillées ».

Solution

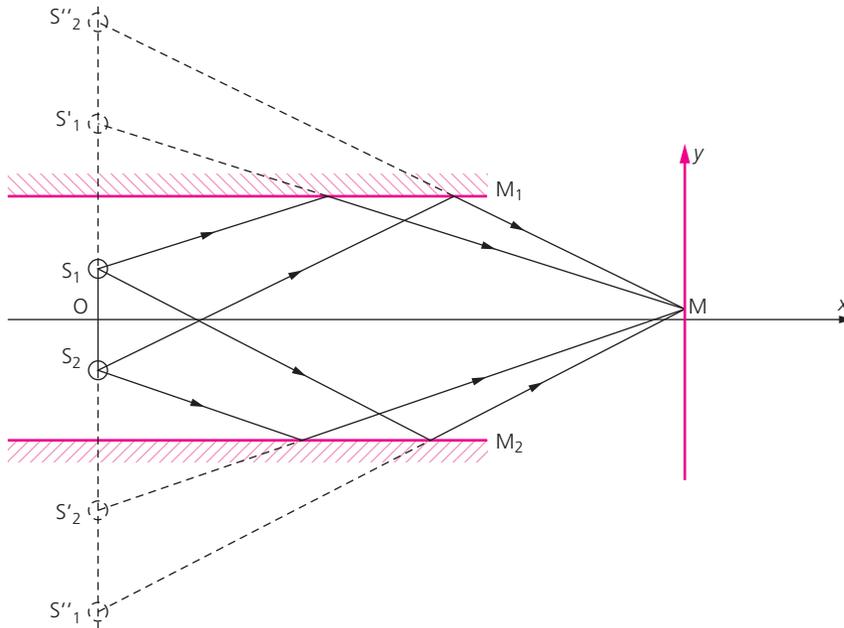
CONSEIL : cet exercice présente une difficulté. Un bilan rapide des ondes dont on ne néglige pas l'amplitude nous montrera que quatre ondes seulement sont à considérer. Deux sont issues de la source S_1 et deux de la source S_2 . Cependant, ces deux sources étant quelconques, elles sont incohérentes et les ondes issues de S_1 n'interfèrent pas avec celles issues de S_2 . Il convient donc de calculer les champs électriques résultant de la superposition des deux ondes issues de la même source, puis d'en déduire les intensités lumineuses. La figure d'interférence correspond à la somme de ces deux intensités lumineuses.

1. L'éclairement sur l'écran est l'intensité résultant de la superposition de 4 ondes :
 - l'onde issue de S_1 et réfléchie sur M_1 semble provenir de S'_1 (voir p. suivante)
 - l'onde issue de S_1 et réfléchie sur M_2 semble provenir de S''_1
 - l'onde issue de S_2 et réfléchie sur M_2 semble provenir de S'_2
 - l'onde issue de S_2 et réfléchie sur M_1 semble provenir de S''_2 .

Les deux ondes issues de S_1 sont susceptibles d'interférer ainsi que les deux ondes issues de S_2 ; en revanche, les sources S_1 et S_2 étant incohérentes, les ondes n'interfèrent pas entre sources différentes : seules leurs intensités s'additionnent. Notons O_1 le milieu de

$S'_1S''_1$ et O_2 le milieu de $S'_2S''_2$. S'_1 est à la distance $2D - d$ de l'axe et S''_1 à la distance $2D + d$; O_1 est à la distance d en dessous de l'axe Ox . De façon symétrique, O_2 est à d au-dessus de l'axe Ox .

Dans les deux cas, la distance $S'_1S''_1$ entre les deux sources pouvant interférer vaut $4D$.



2. On peut reprendre le résultat des trous de Young pour les couples (S'_1, S''_1) et (S'_2, S''_2) en tenant compte du fait que le milieu d'un couple n'est pas sur l'axe : le centre de la figure d'interférence est décalé de $+d$ ou $-d$ sur l'écran d'observation. On obtient

- pour le couple (S'_1, S''_1) :

$$I_1(y, z) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} (y - d) \right) \right]$$

- pour le couple (S'_2, S''_2) :

$$I_2(y, z) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} (y + d) \right) \right]$$

L'intensité observée sur l'écran s'écrit finalement :

$$I(y, z) = I_0 \left[2 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} (y + d) \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} (y - d) \right) \right]$$

$$I(y, z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} y \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} d \right) \right]$$

3. La figure d'interférence est formée de franges parallèles à l'axe z alternativement claires et sombres. L'interfrange i est donnée par la périodicité spatiale des franges suivant y :

$$i = \frac{\lambda L}{4D}$$

Le contraste des franges est défini par :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Nous avons :

$$I_{\max} = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} d \right) \right]$$

$$I_{\min} = 2I_0 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} d \right) \right]$$

soit :

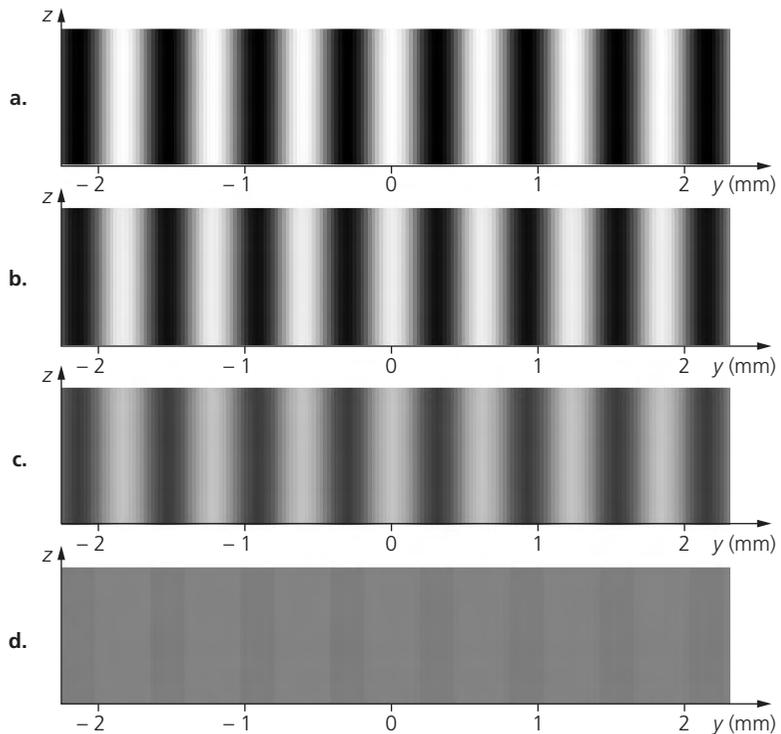
$$V = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4D}{L} d \right)$$

4. Les franges sont dites « parfaitement visibles » lorsque le contraste V est égal à 1 ou -1 , c'est-à-dire :

$$D = n \frac{\lambda L}{8d} \quad \text{où } n \text{ est entier}$$

Les franges sont dites « complètement brouillées » lorsque le contraste est nul, c'est-à-dire :

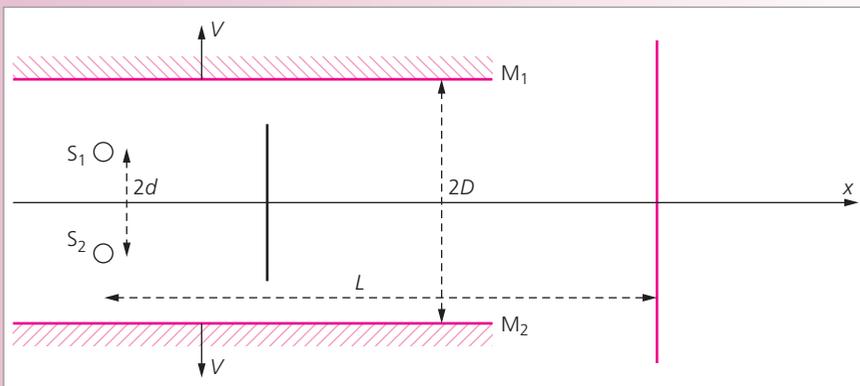
$$D = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda L}{8d}$$



Les figures page précédente montrent l'aspect de la figure d'interférence $I(y, z)$ pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, $D = 0,5 \text{ mm}$, $L = 2 \text{ m}$, avec (a) des franges parfaitement visibles, $d = 0,3 \text{ mm}$; (b) $d = 0,35 \text{ mm}$, (c) $d = 0,4 \text{ mm}$ et (d) des franges complètement brouillées, $d = 0,45 \text{ mm}$.

Exercice 8 Interféromètre à deux sources entre deux miroirs parallèles mobiles

On reprend le système interférentiel de l'exercice précédent. On place maintenant les miroirs sur un dispositif qui les éloigne l'un de l'autre à la vitesse constante V .



1. Donner l'expression du contraste en fonction du temps. Quelle est sa période temporelle ?
2. Si on part d'une situation dans laquelle les franges sont complètement brouillées, au bout de combien de temps les franges seront-elles pour la première fois visibles, si on admet qu'elles le deviennent pour un contraste supérieur à 70 % ?

Solution

CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière si on s'appuie sur les résultats de l'exercice précédent, en tenant compte du fait que la distance entre les deux miroirs est maintenant une fonction du temps.

1. Nous avons déterminé dans l'exercice précédent l'expression du contraste pour une distance fixe entre les miroirs et égale à $2D$. Dans cet exercice, la distance $2D(t)$ entre les deux miroirs est une fonction du temps et croît suivant la loi :

$$2D(t) = 2(D + Vt)$$

avec $D(t = 0) = D$. Nous en déduisons l'expression du contraste $V(t)$:

$$V(t) = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4(D + Vt)}{L} d \right)$$

La périodicité temporelle T du contraste est donc :

$$T = \frac{\lambda L}{4Vd}$$

2. Partant d'une situation où les franges sont brouillées, le contraste à $t = 0$ est nul, c'est-à-dire que la distance initiale D entre un des miroirs et l'axe vérifie, d'après l'exercice précédent :

$$D = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{8d}$$

Le contraste augmente alors avec le temps suivant la loi donnée en 1. Il devient égal à $V_0 = 0,7$ lorsque le temps t_0 vérifie :

$$|V(t_0)| = \left| \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4(D + Vt_0)}{L} d \right) \right| = \left| \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4Vt_0}{L} d \right) \right|$$

Nous avons donc :

$$t_0 = \frac{\lambda L}{8\pi Vd} \arcsin(V_0)$$

INTERFÉRENCES À N ONDES, RÉSEAUX

Exercice 9 Formules du réseau

On considère un réseau optique parfait dont le pas est noté a et qui comporte N fentes parallèles à l'axe Ox et alignées suivant l'axe Oy . Le réseau est éclairé par un faisceau de lumière monochromatique (parallèle à Oz) de longueur d'onde λ . Les fentes sont numérotées de 0 à $N - 1$, la fente 0 correspondant à l'une des extrémités du réseau.

On observe la figure d'interférence du réseau sur un écran (O' ; X , Y) placé à la distance D de ce dernier.

Enfin, on supposera que l'écran est suffisamment éloigné du réseau pour que l'amplitude d'une onde issue d'une des fentes soit la même en tout point de l'écran, quelle que soit la fente dont est issue l'onde.

1. Pourquoi peut-on considérer que l'amplitude du champ électrique de l'onde issue du m -ième trou, en un point M de l'écran, est constante lorsqu'on fait varier le numéro m de la fente ou le point M sur l'écran ?

2. Calculer le déphasage en un point M de l'écran, entre les deux ondes issues du m -ième trou et du trou 0.

3. Déterminer le champ résultant de la superposition des ondes diffractées par les N trous (on rappelle qu'un trou diffractant se comporte comme une source ponctuelle).

4. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(X, Y)$ sur l'écran (on posera I_0 l'intensité lumineuse en $Y = 0$).

5. Quelle distance sépare deux maxima d'intensité sur l'écran ? Combien de maxima observe-t-on sur un écran de 4 cm (suivant Y) si $N = 100$, $\lambda = 600$ nm, $D = 3$ m et $a = 0,1$ mm ?

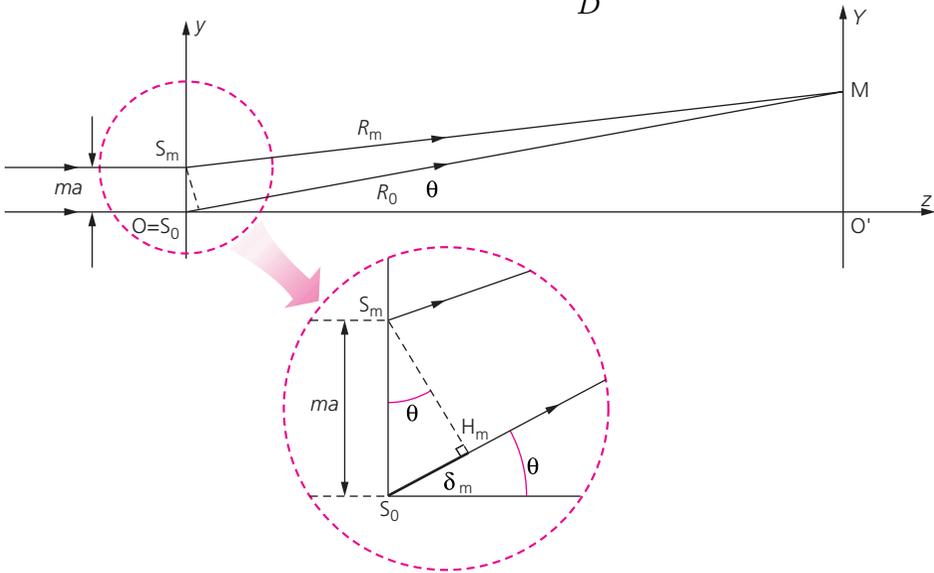
Solution

CONSEIL : cet exercice est une question de cours ! On se propose simplement de retrouver les formules du réseau optique parfait. Seule originalité par rapport aux formules données dans le résumé de cours : l'observation se fait sur un écran placé à distance finie du réseau, et non selon une direction angulaire donnée.

1. L'onde diffractée par la m -ième fente est une onde cylindrique. L'amplitude du champ électrique associé décroît donc comme l'inverse de la racine carré de la distance $S_m M$ de la fente au point M de l'écran. A priori, l'amplitude du champ varie donc lorsqu'on fait varier le numéro m de la source ou la position du point M sur l'écran. Dans le cas que nous étudions, on nous précise que la distance D du réseau à l'écran est très grande devant la taille du réseau. Aussi, nous pouvons considérer que la distance $S_m M$ est égale à D : l'amplitude du champ électrique de l'onde sur l'écran est donc bien constante.

2. Le déphasage entre les deux ondes issues des fentes S_0 et S_m et arrivant en un point M de l'écran, dépend du chemin géométrique des deux rayons R_0 et R_m qui les transportent. Soit δ_m la différence de ces chemins (différence de marche), on a :

$$\delta_m = ma \sin \theta \approx ma \frac{Y}{D}$$



Le déphasage se déduit de la différence de marche, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\varphi_m = k\delta = mka \frac{Y}{D}$$

3. Le champ électrique $E(X, Y)$ au point $M(X ; Y)$ est la somme des champs associés aux ondes issues des N fentes. Nous avons vu en 1 que l'amplitude E_0 de ces ondes est indépendante du numéro de la fente et de la position du point M sur l'écran. On a donc :

$$E(X, Y) = E_0 \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(im \frac{kaY}{D}\right)$$

Nous retrouvons la somme de N termes d'une suite géométrique de raison $\exp\left(i\frac{kaY}{D}\right)$.

Avec $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$, on obtient :

$$E(X, Y) = E_0 \frac{1 - \exp\left(-iN\frac{kaY}{D}\right)}{1 - \exp\left(-i\frac{kaY}{D}\right)}$$

En exploitant $\exp(ix) - \exp(-ix) = 2i \sin x$, on obtient finalement :

$$E(X, Y) = E_0 \exp\left(-i(N-1)\frac{kYa}{2D}\right) \frac{\sin\left(N\frac{kYa}{2D}\right)}{\sin\left(\frac{kYa}{2D}\right)}$$

4. L'intensité lumineuse résultante sur l'écran s'écrit $I(X, Y) = K E(X, Y) E^*(X, Y)$:

$$I(X, Y) = K E_0 E_0^* \frac{\sin^2\left(N\frac{kYa}{2D}\right)}{\sin^2\left(\frac{kYa}{2D}\right)}$$

Effectuons le développement limité de $I(X, Y)$, pour $Y \ll 1$ (avec $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$). On obtient :

$$I_0 = N^2 K E_0 E_0^*$$

On en déduit l'expression de $I(X, Y)$ en fonction de I_0 :

$$I(X, Y) = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{kYa}{2D}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{kYa}{2D}\right)}$$

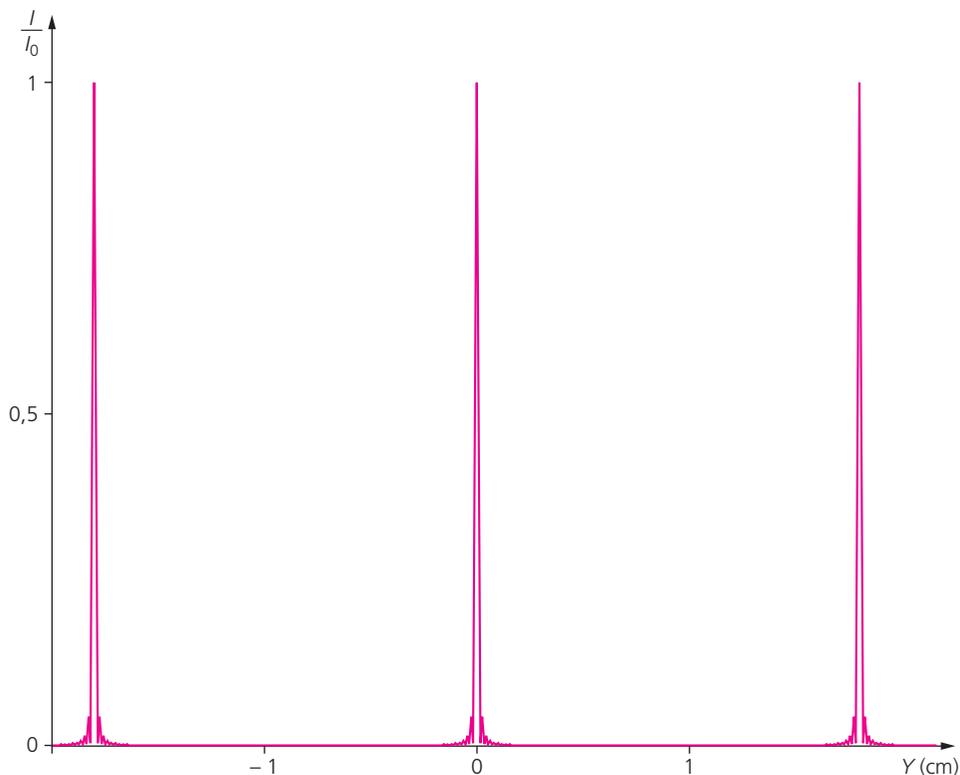
5. Les maxima d'intensité lumineuse sont obtenus pour des valeurs Y_n de Y telles que $\frac{kYa}{2D} = n\pi$, avec n entier (on a alors $I = I_0$), soit :

$$Y = \frac{2Dn\pi}{ka} = \frac{nD}{a}\lambda$$

La distance entre deux maxima d'intensité est donc :

$$\Delta Y = \frac{D}{a}\lambda$$

L'application numérique donne $\Delta Y = 1,8 \text{ cm}$: on observe donc 3 maxima d'intensité sur l'écran, comme illustré sur la figure ci-dessous :



Exercice 10 Étude d'un réseau de pas variable

Calculer l'intensité lumineuse donnée par un réseau en réflexion, pour lequel les abscisses x_k des N traits ont pour expression :

$$x_k = a \left(k + \varepsilon \sin \frac{2\pi k}{p} \right) \quad \text{avec } \varepsilon \ll 1$$

Solution

CONSEIL : on retrouve dans cet exercice le calcul de la figure d'interférence d'un réseau. La particularité vient ici du fait que la distance entre deux traits du réseau dépend des numéros des traits : l'abscisse x_k qui repère le trait k est « presque » classique ; en effet, le terme ak correspond à l'abscisse du trait k pour un réseau de pas constant égal à a , et le terme en facteur de ε correspond à l'écart à ce comportement. Avec $\varepsilon \ll 1$, nous nous attendons à observer un effet faible. Cependant, pour le calcul de l'intensité résultante, il est nécessaire de revenir au calcul du champ électrique résultant de la superposition des N ondes, chaque onde ayant la même amplitude mais un déphasage « non classique ».

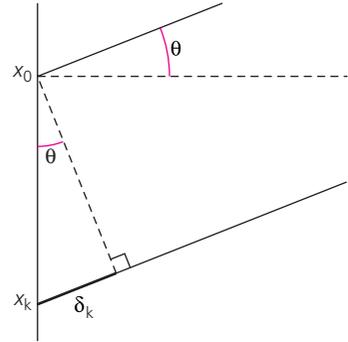
Calculons le champ électrique E résultant de la superposition des N ondes diffractées par les N traits. Soit E_k le champ électrique, en notation complexe, associé à l'onde k (diffractée par le trait k en x_k). Dans la direction θ , le champ s'écrit :

$$E_k(\theta) = E_0 e^{i\varphi_k}$$

où E_0 est l'amplitude commune à toutes les ondes et $\varphi_k = 2\pi \delta_k/\lambda$ est le déphasage de l'onde k par rapport à l'onde 0, dont la phase est choisie comme référence. La différence de marche δ_k correspond à la différence entre les trajets géométriques des rayons diffractés, dans la direction θ , par les deux traits situés en x_0 et x_k . Avec $x_0 = 0$, on obtient $\delta_k = x_k \sin \theta$ (voir schéma ci-contre).

Le champ résultant $E(\theta)$ s'écrit donc

$$E(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} E_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x_k \sin \theta}$$



Avec

$$x_k = a \left(k + \varepsilon \sin \frac{2\pi k}{p} \right)$$

et en posant

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \quad \text{et} \quad \psi = \frac{2\pi}{p}$$

nous pouvons écrire

$$E(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} E_0 e^{ik\varphi} e^{i\varepsilon\varphi \sin(k\psi)}$$

Finalement, avec $\varepsilon \ll 1$, nous pouvons effectuer le développement limité de la seconde exponentielle, avec $\exp X \approx 1 + X$, pour $X \ll 1$:

$$E(\theta) \approx \sum_{k=0}^{N-1} E_0 e^{ik\varphi} [1 + i\varepsilon\varphi \sin(k\psi)]$$

En développant $\sin X = \frac{1}{2i} [e^{iX} - e^{-iX}]$, il vient :

$$E(\theta) = E_0 \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\varphi} + \varepsilon E_0 \frac{\varphi}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik(\varphi+\psi)} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik(\varphi-\psi)} \right]$$

La première somme correspond au terme classique pour un réseau de pas constant : c'est le terme dominant, puisque, comme nous l'avons souligné dans le « conseil », l'écart au réseau de pas constant est mesuré par $\varepsilon \ll 1$. Les deux sommes en facteur de ε correspondent à l'écart à ce comportement classique, écart dû à la variation du pas du réseau.

Quoi qu'il en soit, nous retrouvons trois séries géométriques de raisons respectivement égales à $e^{i\varphi}$, $e^{i(\varphi+\psi)}$ et $e^{i(\varphi-\psi)}$, de sorte qu'on peut utiliser le résultat :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

On obtient :

$$E(\theta) = E_0 \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} + \varepsilon E_0 \frac{\varphi}{2} \left[\frac{1 - e^{iN(\varphi+\psi)}}{1 - e^{i(\varphi+\psi)}} - \frac{1 - e^{iN(\varphi-\psi)}}{1 - e^{i(\varphi-\psi)}} \right]$$

Posons :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = e^{i\frac{(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ B &= \frac{\varphi}{2} \left[\frac{1 - e^{iN(\varphi+\psi)}}{1 - e^{i(\varphi+\psi)}} - \frac{1 - e^{iN(\varphi-\psi)}}{1 - e^{i(\varphi-\psi)}} \right] \\ &= \frac{\varphi}{2} \left[e^{i\frac{(N-1)(\varphi+\psi)}{2}} \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi+\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi+\psi)}{2}\right]} - e^{i\frac{(N-1)(\varphi-\psi)}{2}} \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi-\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi-\psi)}{2}\right]} \right] \end{aligned}$$

Le champ E s'écrit $E = E_0(A + \varepsilon B)$. On calcule l'intensité $I = KEE^*$ (avec $I_0 = KE_0^2$), où K est une constante à l'ordre 1 en ε :

$$I = I_0 (AA^* + \varepsilon (AB^* + A^*B))$$

On a :

$$AA^* = |A|^2 = \left[\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

et $(AB^* + A^*B) = 2\text{Re}(AB^*)$, où Re désigne la partie réelle :

$$AB^* = \frac{\varphi}{2} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \left[e^{i\frac{(N-1)\psi}{2}} \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi+\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi+\psi)}{2}\right]} - e^{-i\frac{(N-1)\psi}{2}} \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi-\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi-\psi)}{2}\right]} \right]$$

soit

$$\text{Re}(AB^*) = \frac{\varphi}{2} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \cos\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right) \left[\frac{\sin\left[\frac{N(\varphi+\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi+\psi)}{2}\right]} - \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi-\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi-\psi)}{2}\right]} \right]$$

On en déduit l'expression de l'intensité lumineuse :

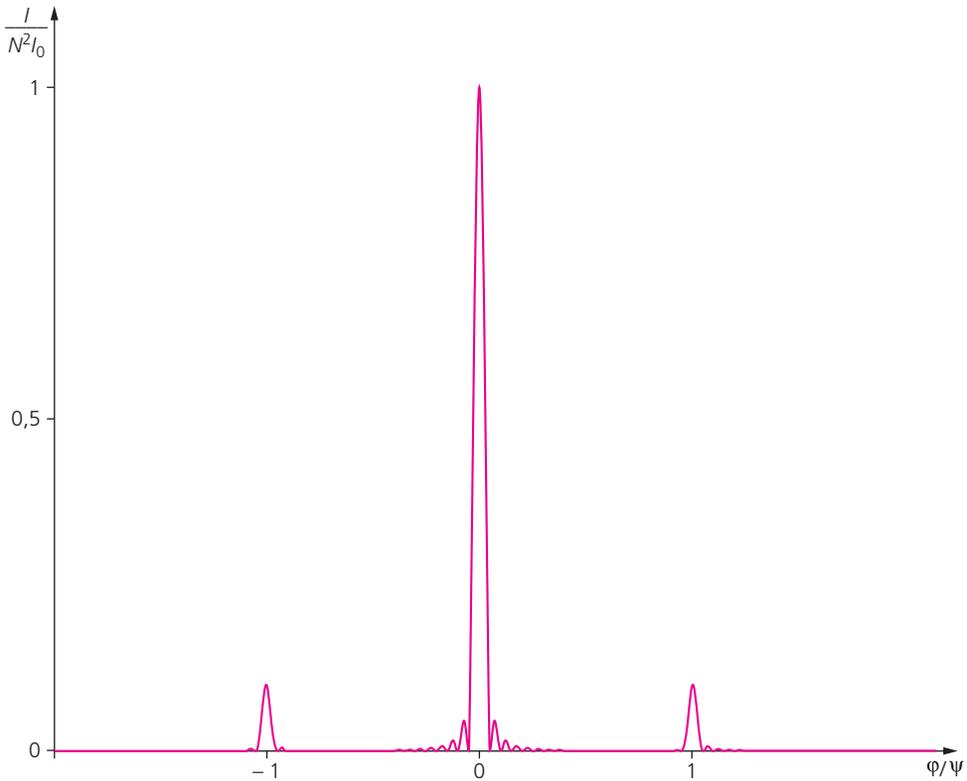
$$I(\theta) = I_0 \left\{ \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + \varepsilon\varphi \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \cos\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right) \left[\frac{\sin\left[\frac{N(\varphi+\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi+\psi)}{2}\right]} - \frac{\sin\left[\frac{N(\varphi-\psi)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{(\varphi-\psi)}{2}\right]} \right] \right\}$$

avec, rappelons-le, $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta$ et $\psi = \frac{2\pi}{p}$.

Le maximum principal d'ordre n correspond à $\varphi_n = 2n\pi$ avec n entier, soit des valeurs de θ_n telles que $\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta_n = 2n\pi$ (comme pour un réseau parfait) : l'intensité maximum vaut alors $N^2 I_0$.

Les maxima secondaires dus au terme en ε correspondent, pour le même ordre n , à des valeurs voisines de φ_n telles que $\varphi_n \pm \psi = n\pi$ soit des valeurs de θ de part et d'autre de θ_n . La figure p. suivante illustre l'allure de la courbe I en fonction de φ , au voisinage du maximum central $\varphi_0 = 0$ pour $\varepsilon = 0,5$, $\lambda = 600$ nm, $N = 100$, $a = 0,1$ mm, $p = 5$ (cette courbe a été calculée avec le terme quadratique en ε^2 qui devient important pour cette valeur de ε mais qui permet que le maximum en $\varphi = \pm\psi$ soit visible).

Ces raies secondaires sont appelées des *ghosts* (voir encadré en début de chapitre) lorsqu'elles résultent d'un défaut de construction du réseau.



Exercice 11 Réseau de Fraunhofer partiellement obturé

Un réseau de Fraunhofer est formé de $3N + 1$ fentes (que l'on supposera infiniment fines). Le réseau est éclairé en incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

On admettra que l'intensité lumineuse I d'un réseau formé de n motifs identiques est le produit de l'intensité I_r d'un réseau de n trous, par l'intensité I_m produite par un motif unique :

$$I = I_m I_r$$

Pour la longueur d'onde λ , on notera I_0 l'intensité lumineuse due à une fente unique et on rappelle que l'intensité lumineuse produite par un réseau formé de n trous distants de a , dans la direction faisant un angle i avec la normale au réseau, est donnée par :

$$I_r = \left[\frac{1 \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i = ka \sin i$$

1. Donner l'expression de l'intensité lumineuse dans la direction i .

2. a. On obture (périodiquement) une fente sur trois, y compris la première et la dernière. Comment est modifiée l'expression de l'intensité lumineuse ?

2. b. Déterminer les maxima d'intensité de ce réseau.

Solution

CONSEIL : il faut ici se laisser guider par l'énoncé qui nous indique la façon de calculer l'intensité lumineuse d'un réseau formé d'un motif quelconque. La seule difficulté est de déterminer la périodicité du réseau et la nature du motif.

1. Le réseau considéré contient $(3N+1)$ motifs distants de a , chaque motif étant constitué d'une fente unique. L'intensité lumineuse d'un motif est noté I_0 . On obtient l'intensité du réseau :

$$I_i = \left[\frac{1}{(3N+1)} \frac{\sin\left((3N+1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i.$$

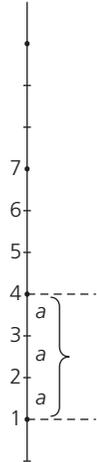
2. a. Lorsqu'un trou sur 3 est obturé, on obtient un nouveau réseau comportant N motifs identiques distants de $3a$, comme indiqué sur la figure ci-contre. Un motif est constitué de 2 trous distants de a .

I_m correspond au système interférentiel des trous de Young pour deux trous distants de a , soit :

$$I_m = I_0 \frac{1 + \cos \varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i$$

I_r est simplement donné par :

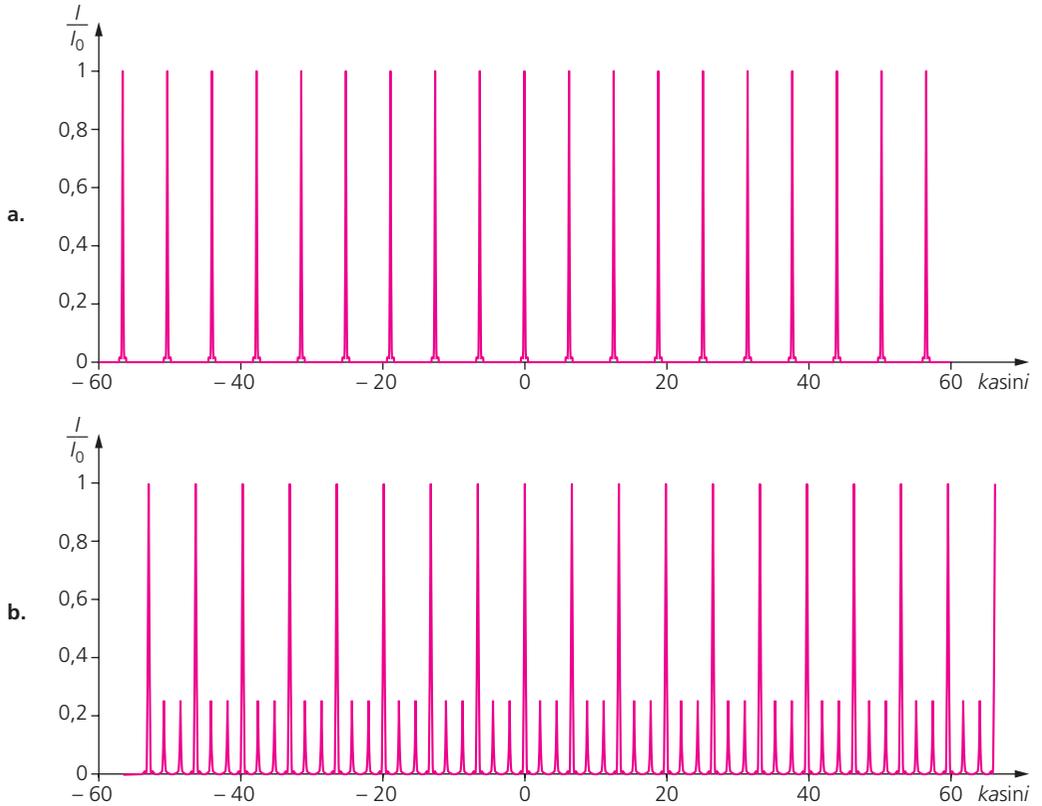
$$I_r = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{où} \quad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (3a) \sin i = 3\varphi$$



On en déduit la forme de l'intensité lumineuse pour ce nouveau réseau :

$$I(i) = \frac{I_0}{N^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\sin^2\left(3N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(3\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Les figures p. suivante illustrent la modification de l'intensité lumineuse suivant que les trous sont obturés ou non. La figure (a) correspond à l'intensité lumineuse $I(i)$ pour le réseau étudié en 1 (les trous n'étant pas obturés), et la figure (b) à celle du réseau étudié en 2 (lorsqu'un trou sur trois est obturé). Nous avons pris $\lambda = 546 \text{ nm}$, $N = 10$ et $a = 5 \mu\text{m}$.



2. b. Les maxima correspondent à $3\frac{\varphi}{2} = K\pi$, soit $\varphi = 2\frac{K\pi}{3}$.

Si $K = 3K'$: $I = I_0$ et $\varphi = 2K'\pi$ → maximum

$K = 3K' + 1$: $I = \frac{I_0}{4}$ et $\frac{\varphi}{2} = K'\pi + \frac{\pi}{3}$ → maximum secondaire

$K = 3K' + 2$: $I = \frac{I_0}{4}$ et $\frac{\varphi}{2} = K'\pi + \frac{2\pi}{3}$ → maximum secondaire

Exercice 12 Réseau formé de deux sous-réseaux

On considère un réseau plan formé de $2N$ fentes supposées infiniment fines et parallèles, numérotées de 1 à $2N - 1$. La distance entre les fentes (0) et (1) est a , celle entre (1) et (2) est b , celle entre (2) et (3) est a et ainsi de suite, la distance entre deux fentes valant alternativement a ou b .

On admettra que l'intensité lumineuse I d'un réseau formé de n motifs identiques est le produit de l'intensité I_r d'un réseau de n trous, par l'intensité I_m qui serait produite par un motif unique :

$$I = I_m I_r$$

Pour la longueur d'onde λ , on notera I_0 l'intensité lumineuse due à une fente unique et on rappelle que l'intensité lumineuse produite par un réseau de n trous distants de a , dans la direction faisant un angle i avec la normale au réseau, est donnée par :

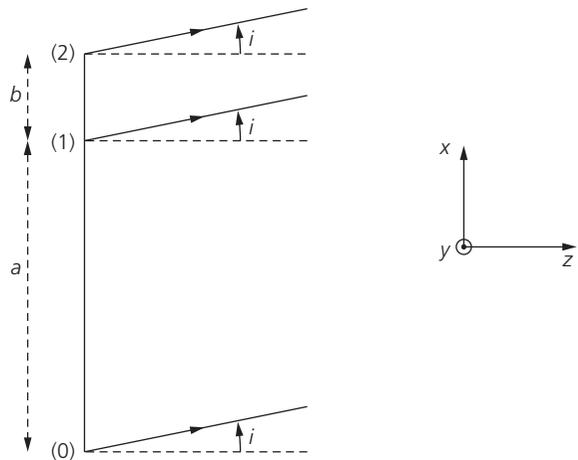
$$I_r = \left[\frac{1 \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i = ka \sin i$$

1. Établir l'expression de l'intensité issue de l'ensemble du réseau dans la direction angulaire i .
 2. Tracer l'allure de la courbe $I(i)$ pour $a = 3b$.
- A.N. Le réseau comporte 600 traits/mm et $\lambda = 500$ nm.

Solution

CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent, compte tenu de l'indication donnée pour le calcul de l'intensité lumineuse donnée par le réseau. La seule difficulté consiste donc à déterminer le motif du réseau. Mais attention, il y a un piège !

1. Le réseau contient N motifs identiques distants de $(a + b)$, un motif étant formé de 2 trous distants de a . Notons que, si on se place à un endroit quelconque du réseau, il est difficile de déterminer si le motif est formé de deux trous distants de b ou de deux trous distants de a : c'est l'extrémité du réseau et le nombre de trous qui permettent de conclure. En effet, le réseau commence par deux trous distants de a correspondant au motif (0). Ce motif se répète un



nombre entier de fois jusqu'au motif $N - 1$. Si on choisissait de considérer le motif formé de deux trous distants de b , le réseau complet serait constitué du sous-réseau formé de $(N - 1)$ motifs et, à chacune de ses extrémités, d'un trou isolé (le trou (0) et le trou $(N - 1)$). Il est bien sûr plus judicieux de choisir le premier motif !

Considérons notre réseau, judicieusement choisi. D'après l'énoncé, l'intensité $I(i)$ dans la direction faisant un angle i avec la normale au réseau s'écrit $I(i) = I_r(i) I_m(i)$. I_m correspond au système interférentiel des trous de Young pour deux trous distants de a ,

soit :

$$I_m = I_0 \frac{1 + \cos \varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i$$

I_r est simplement donné par :

$$I_r = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin \left(N \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right]^2 \quad \text{où} \quad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (a + b) \sin i = \left(1 + \frac{b}{a} \right) \varphi$$

On en déduit la forme de l'intensité lumineuse pour ce nouveau réseau :

$$I(i) = \frac{I_0}{N^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\sin^2 \left(N \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{\varphi}{2} \right)}$$

2. On se place dans le cas $a = 3b$:

$$\frac{1}{(a + b)} = \frac{1}{4b} = 300 \text{ motifs/mm} = n$$

et

$$\lambda = 500 \text{ nm} (600 \text{ traits/mm} \leftrightarrow 300 \text{ motifs/mm})$$

Les maxima principaux correspondent à : $\frac{4\pi b}{\lambda} \sin i = K\pi$ donc

$$\sin i = K \frac{\lambda}{4b} = Kn\lambda \simeq 0,15K$$

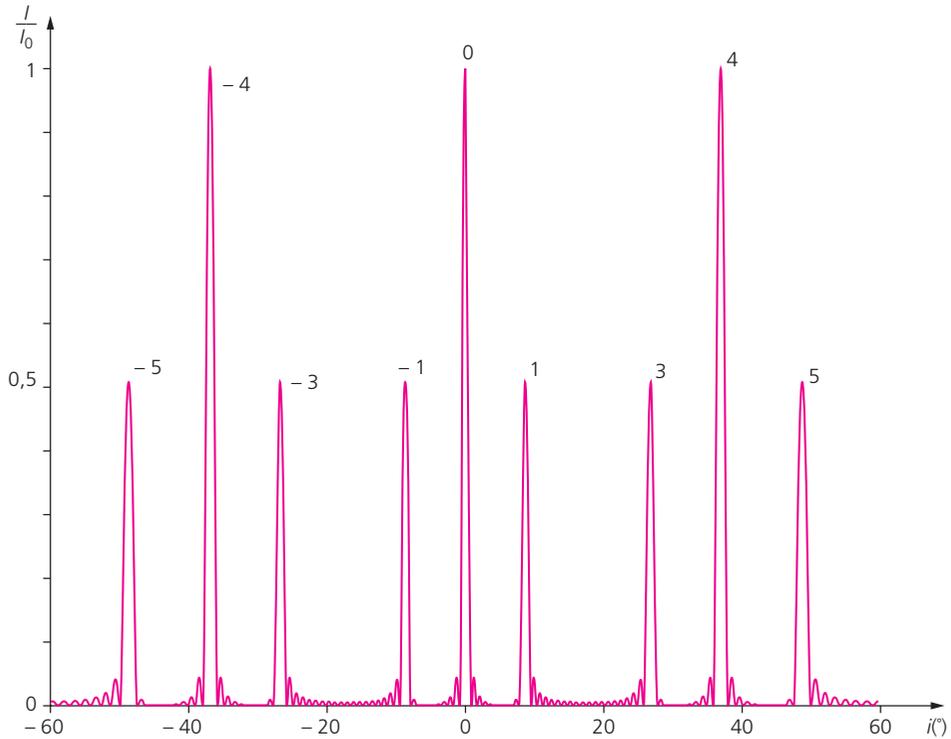
La condition $|\sin i| < 1$ donne les valeurs possibles de K égales à 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 , ± 6 (soit 13 valeurs possibles).

La fonction d'interférence par un motif « module » l'intensité de chacun des maxima par le coefficient :

$$\cos^2 \left(\frac{a\pi}{\lambda} \sin i \right) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} (3b) K \frac{\lambda}{4b} \right) = \cos^2 \left(\frac{3}{4} K\pi \right)$$

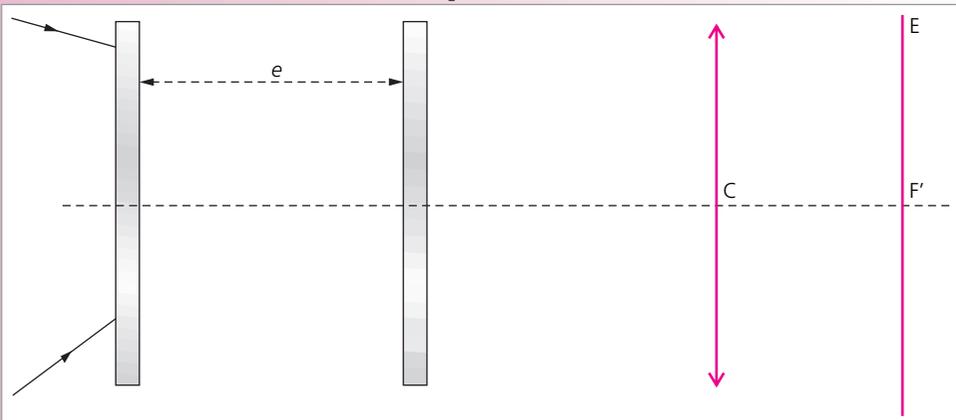
K	0	1	2	3	4	5	6
$\cos^2 \left(\frac{a\pi}{\lambda} \sin i \right)$	1	0,5	0	0,5	1	0,5	0
i (°)	0	8,6	17,4	26,7	36,9	48,6	64

D'où les ordres observables, avec les intensités relatives, représentés p. suivante.



Exercice 13 Interféromètre de Fabry-Pérot

On considère un interféromètre de Fabry-Pérot constitué d'une lame d'air d'épaisseur e comprise entre deux lames de verre. Les surfaces en vis-à-vis sont caractérisées par leurs coefficients de réflexion R et de transmission T en intensité. On éclaire l'interféromètre avec une source étendue monochromatique.



Dans la suite, on néglige l'épaisseur des lames. L'observation se fait sur un écran E placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. On note i une des directions (quelconque) de l'onde incidente sur la lame.

1. Calculer le déphasage $\varphi(i)$ entre deux ondes transmises par le système interférentiel dans la direction faisant l'angle i avec la normale aux lames.
2. En déduire l'expression de l'intensité $I(i)$ dans la direction i . Quelle est la forme de $I(M)$ en un point M de l'écran d'observation ?
3. Calculer le contraste C des franges et donner l'allure de la courbe $C(R)$.
4. Donner l'allure des courbes $I(\varphi)$ pour $R = 0,3$ et $R = 0,9$.
La finesse F des franges est définie par le rapport de la différence de phase entre deux maxima consécutifs, à la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi$ d'un anneau brillant sur la courbe $I(\varphi)$.
5. Représenter I_{\min}/I_{\max} en fonction de R . En déduire une valeur R_{\min} de R en deçà de laquelle il n'est pas possible de définir la finesse.
6. Calculer F pour les valeurs de R proches de 1 et donner l'allure de la courbe $F(R)$.

Solution

CONSEIL : avant de commencer la résolution de cet exercice, remarquons que négliger l'épaisseur des lames revient à négliger la translation des rayons due à la réfraction dans la lame. Attention également, on considère ici un phénomène d'interférence entre une infinité d'ondes (ce qui intervient dans la série géométrique qu'il convient de faire apparaître).

1. Considérons les deux ondes transportées par deux rayons R_1 et R_2 transmis par l'interféromètre. Le déphasage entre les deux rayons s'écrit :

$$\delta = [B_1A_2B_2] - [B_1C_1]$$

Avec

$$B_1A_2 = A_2B_2 = \frac{e}{\cos i}$$

$$B_1B_2 = 2e \tan i$$

et

$$B_1C_1 = B_1B_2 \sin i,$$

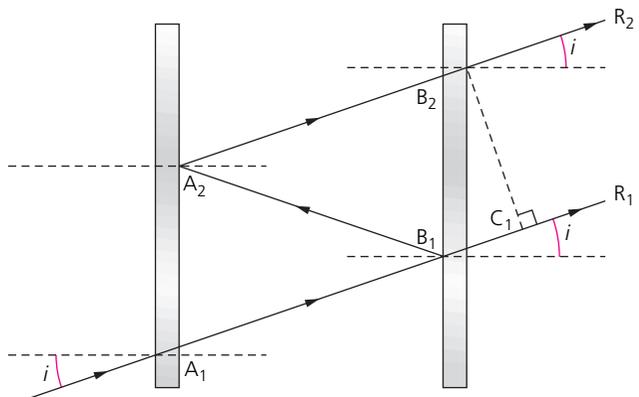
on obtient :

$$\delta(i) = \frac{2e}{\cos i} - 2e \sin i \tan i$$

$$\delta(i) = \frac{2e}{\cos i} (1 - \sin^2 i) = 2e \cos i$$

On en déduit le déphasage $\varphi(i)$:

$$\varphi(i) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(i) = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i$$



2. Notons A l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente et r (respectivement t) le coefficient de réflexion en amplitude (respectivement de transmission). Nous avons alors $r^2 = R$ et $t^2 = T$. L'onde transportée par le rayon R_1 a subi deux transmissions; son amplitude à la sortie de l'interféromètre est égale à :

$$A_1 = t^2 A = TA$$

Le champ électrique associé, en choisissant cette onde pour référence de phase, s'écrit :

$$E_1(i) = A_1$$

L'onde transportée par le rayon R_2 a subi deux transmissions et deux réflexions; son amplitude est égale à :

$$A_2 = t^2 r^2 A = TRA$$

Le déphasage de cette onde avec celle servant de référence de phase est égale à $\varphi(i)$ (d'après la question précédente); son champ électrique est donc égal à :

$$E_2(i) = A_2 e^{i\varphi(i)}$$

En continuant le raisonnement, le rayon R_n a donc subi $2n-2$ réflexions et 2 transmissions. Son amplitude A_n est donc égale à :

$$A_n = t^2 r^{2n-2} A = TR^{n-1} A$$

Cette onde a un déphasage égale à $n\varphi(i)$ par rapport à la première; son champ électrique s'écrit :

$$E_n(i) = A_n e^{in\varphi(i)}$$

Le champ électrique résultant est la somme de tous les champs des ondes transmises par l'interféromètre (il y en a une infinité) :

$$E(i) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\varphi(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} TR^{n-1} A e^{in\varphi(i)}$$

$$E(i) = \frac{T}{R} A \sum_{n=1}^{\infty} [e^{i\varphi(i)}]^n$$

Nous retrouvons une série géométrique de la forme $\sum a^n$; on sait alors que si le module de a est inférieur à 1, la série infinie est égale à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$$

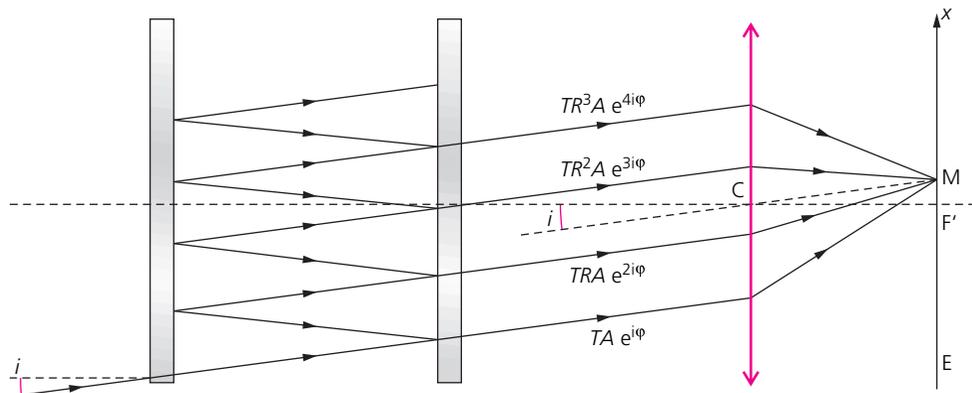
Avec $R < 1$ et $|\exp(iX)| = 1$ (quel que soit X), nous avons donc :

$$E(i) = TA \frac{e^{i\varphi(i)}}{1 - R e^{i\varphi(i)}}$$

L'intensité $I(i)$ dans la direction i est proportionnelle à EE^* :

$$I(i) = KT^2 A^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi(i)}$$

$$I(i) = KT^2 A^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} e \cos i \right)}$$



Les rayons émergent de l'interféromètre dans la direction i et contribuant à l'intensité lumineuse au point M sont représentés sur la figure ci-dessus.

Tous les rayons ont la même direction et convergent donc, derrière la lentille, en un point $M(x, y)$ de l'écran tel que $F'M = r = f' \tan i$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ (il y a invariance par rotation autour de l'axe Oz). Si l'angle i considéré est petit, nous avons $r = f' i$. L'intensité $I(r)$ sur l'écran s'écrit :

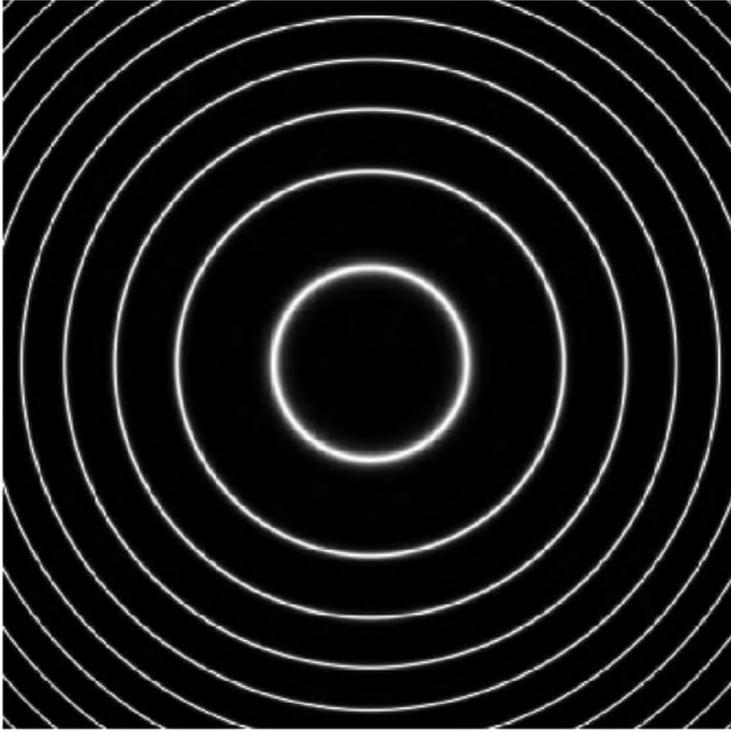
$$I(r) = K \frac{T^2 A^2}{1 + R^2 - 2R \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} e \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right) \right)}$$

Notons I_{\max} l'intensité maximale sur l'écran ; nous avons :

$$I_{\max} = K \frac{T^2 A^2}{1 + R^2 - 2R} = K \frac{T^2 A^2}{(1 - R)^2}$$

L'intensité $I(r)$ s'écrit en fonction de I_{\max} :

$$I(r) = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} e \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right) \right)}$$



On a représenté ci-dessus la figure d'interférence sur l'écran d'observation pour $e = 0,1 \text{ mm}$; $f' = 1 \text{ m}$; $\lambda = 600 \text{ nm}$; $R = 0,8$ et une taille d'écran de $2,5 \text{ cm}$.

3. Le contraste C est défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Nous avons calculé I en fonction de I_{\max} à la question précédente :

$$I(r) = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} e \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)\right)}$$

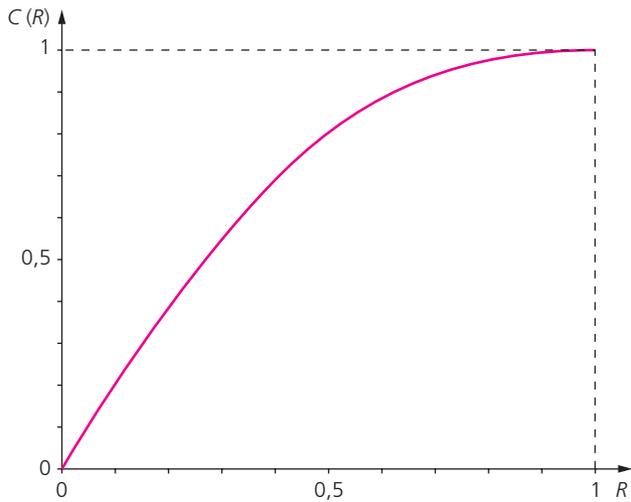
Exprimons I_{\min} :

$$I_{\min} = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 + 2R} = I_{\max} \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^2$$

D'où le contraste :

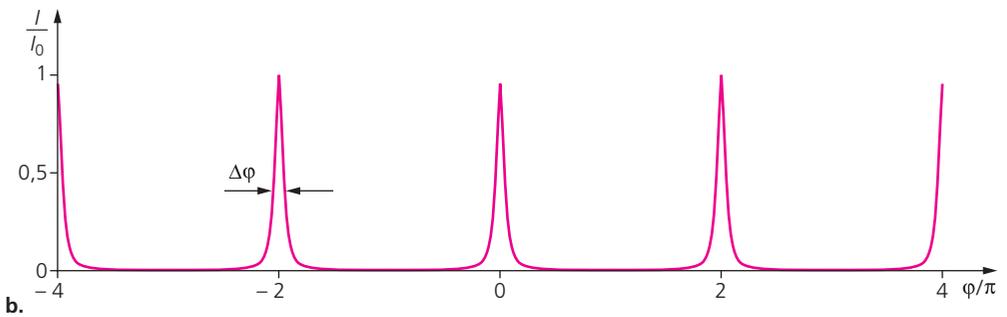
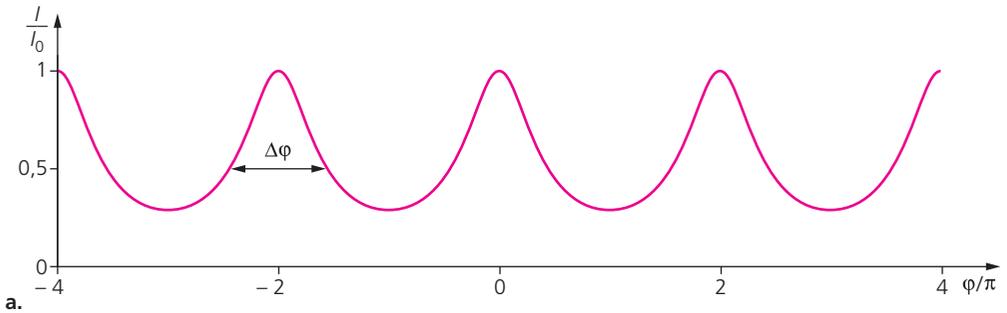
$$C = \frac{1 - \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - R}{1 + R}\right)^2} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

La courbe $C(R)$ est donnée ci-dessous (R est compris entre 0 et 1, comme T).



4. $I(\varphi)$ a pour expression :

$$I(\varphi) = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$



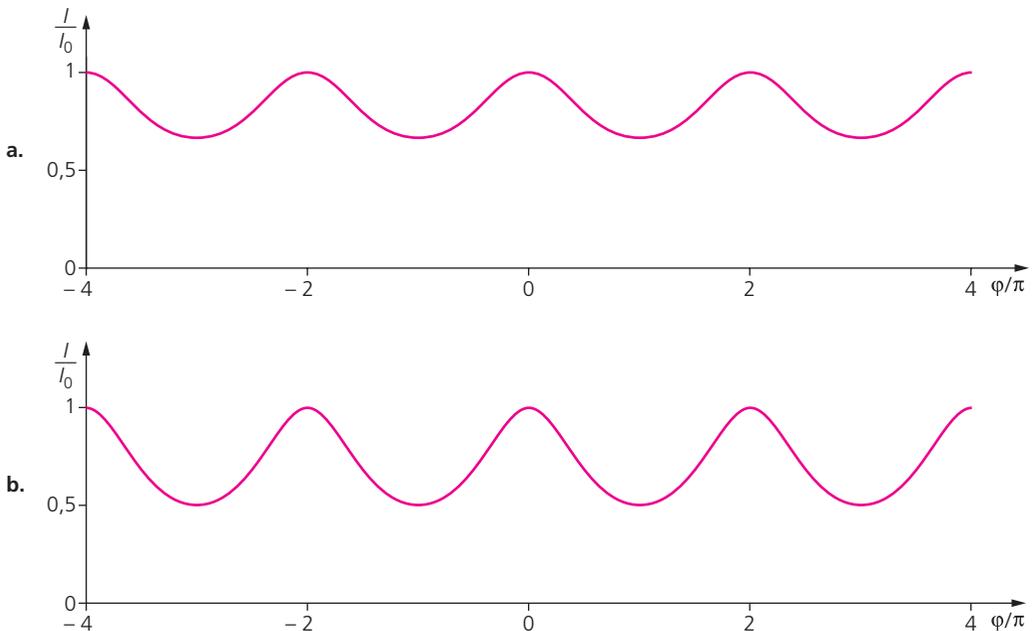
Les courbes $I(\varphi)$ ci-dessus correspondent à (a) $R = 0,3$ et (b) $R = 0,9$.

5. La valeur de I_{\min} a été calculée :

$$\frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \left(\frac{1 - R}{1 + R} \right)^2$$

Pour que la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi$ puisse être définie, il faut que la valeur minimale de I soit inférieure à $I_{\max}/2$. On doit donc avoir :

$$R > R_{\min} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \approx 0,17$$



Les courbes $I(\varphi)$ ci-dessus correspondent à (a) $R = 0,1$ et (b) $R = R_{\min}$.

6. La différence de phase entre deux maxima est égale à 2π . Calculons la largeur $\Delta\varphi$ à mi-hauteur d'une frange brillante sur les courbes $I(\varphi)$. L'intensité est égale à $I_{\max}/2$ pour des valeurs de $\varphi = 2k\pi \pm \Delta\varphi/2$ (avec k entier) qui vérifient :

$$\frac{I_{\max}}{2} = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = I_{\max} \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

soit

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{-1 - R^2 + 4R}{2R}$$

Lorsque R est proche de 1, la quantité $\frac{-1 - R^2 + 4R}{2R}$ est proche de 1, c'est-à-dire que $\Delta\varphi$ est très petit (on peut le vérifier sur les courbes précédentes). Nous avons alors

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 - \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2$$

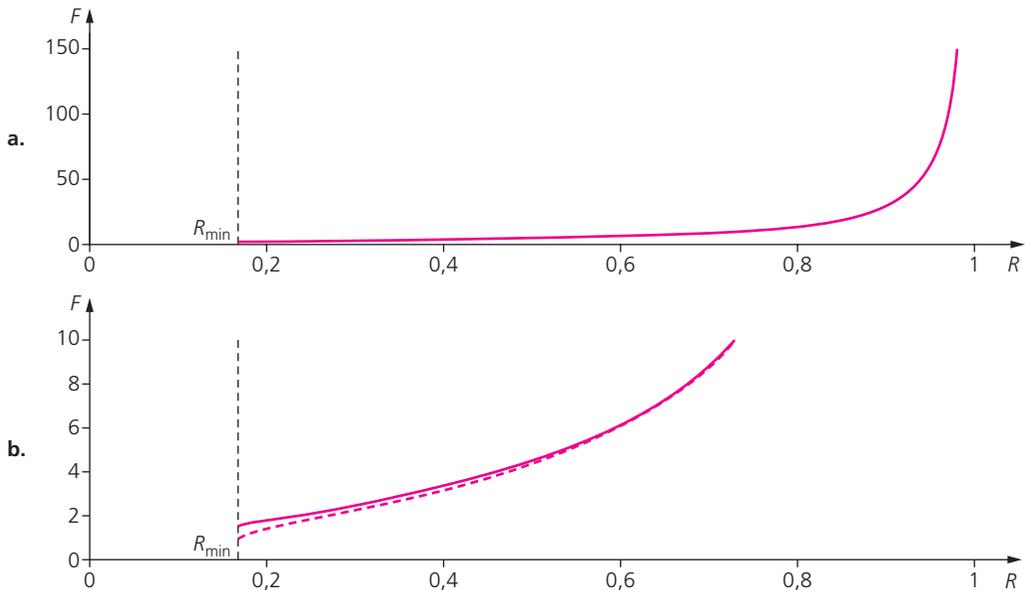
et il vient :

$$\Delta\varphi \approx \frac{2(1 - R)}{\sqrt{R}}$$

D'où l'expression de la finesse F :

$$F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \approx \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R}$$

Les courbes de la figure suivante donnent le comportement de F pour R compris entre R_{\min} et 1. À titre indicatif, on donne la courbe exacte en pointillés : pour des valeurs de R inférieures à environ 0,5, on note une différence entre la courbe réelle et la courbe approchée.



Les courbes ci-dessus représentent la finesse F des franges en fonction de R ; (--) la courbe réelle donnée par la valeur de $\cos \varphi$ et (-) la courbe approchée pour R proche de 1; (b) est un agrandissement de (a).

Exercice 14 Réseau de fentes à intensités variables

Un faisceau de rayons parallèles, issus d'une source ponctuelle monochromatique (de longueur d'onde λ) située à l'infini, arrive perpendiculairement sur un plan opaque percé d'une infinité de fentes très fines, parallèles et équidistantes de a , et numérotées $0, 1, 2, \dots, N$, etc.

On suppose que la fente p se comporte comme une source ponctuelle d'une onde dont l'intensité lumineuse I_p dépend du numéro p de la fente suivant la loi $I_p = \frac{I_0}{2^p}$, où I_0 est une constante.

1. Établir l'expression de l'intensité de l'onde émise par le réseau infini dans la direction faisant un angle θ avec la normale au réseau.

2. Quelle est l'allure des variations de l'intensité en fonction de $\sin \theta$?

3. Calculer le contraste $\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ des franges observées sur un écran placé loin du réseau.

Solution

CONSEIL : dans cet exercice, on considère un réseau formé d'une infinité de fentes (comme dans l'exercice précédent, on doit faire apparaître une série géométrique infinie), assimilées à des trous. Chaque fente diffracte une onde d'intensité lumineuse dépendant du numéro de la fente (la fente diffractante se comportant comme une source ponctuelle). La seule difficulté consiste donc à traduire cette condition en terme d'amplitude du champ électrique associé à l'onde diffractée par le trou p (rappelons que le terme de décroissance en $1/r$ de l'amplitude du champ électrique n'est pas pris en compte lorsqu'on se place suffisamment loin du réseau). En effet, le principe de superposition qu'il convient d'appliquer pour un réseau concerne les champs électriques associés aux ondes diffractées et non les intensités lumineuses.

1. L'intensité lumineuse de l'onde p (diffractée par le trou p) s'écrit $I_p = \frac{I_0}{2^p}$. L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré du module du champ électrique ($I = K |E|^2$, où K est une constante, qui contient ici la décroissance en $1/D$ du champ où D est la distance latérale du réseau à l'endroit de l'observation), nous pouvons écrire que l'amplitude réelle $|E_p|$ du champ électrique associé à l'onde p dépend ici de la fente :

$$|E_p| = \frac{E_0}{2^{\frac{p}{2}}} \quad \text{avec } I_0 = K E_0^2$$

À l'amplitude réelle du champ, il convient d'associer une phase. Prenons comme référence de phase celle de l'onde émise dans la direction θ par le trou 0. La phase de l'onde émise par le trou p , dans la même direction, s'écrit :

$$\varphi_p = p\varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

Finalement, le champ électrique associé à l'onde émise par le trou p dans la direction θ s'écrit, en notation complexe :

$$E_p(\theta) = \frac{E_0}{2^{\frac{p}{2}}} e^{i p \varphi}$$

Le champ électrique résultant E s'écrit comme la somme des champs associés à toutes les ondes émises par le réseau.

Le champ associé à l'onde émise dans la direction principale θ s'écrit, en posant $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$:

$$E(\theta) = E_0 \left[\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^{1/2}} e^{i \varphi} + \frac{1}{2^{2/2}} e^{2i \varphi} + \dots + \frac{1}{2^{p/2}} e^{pi \varphi} + \dots \right]$$

Nous retrouvons une série géométrique de la forme Σa^n avec $a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \varphi}$; on sait alors que si la norme de a est inférieure à 1, la série est égale à :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

Avec $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \varphi} \right| \approx 0,7 < 1$, on obtient :

$$E(\theta) = E_0 \frac{1}{1 - \frac{e^{i \varphi}}{\sqrt{2}}}$$

d'où on déduit finalement l'intensité résultante $I = KEE^*$:

$$I(\theta) = KE_0^2 \frac{1}{\frac{3}{2} - \sqrt{2} \cos \varphi}$$

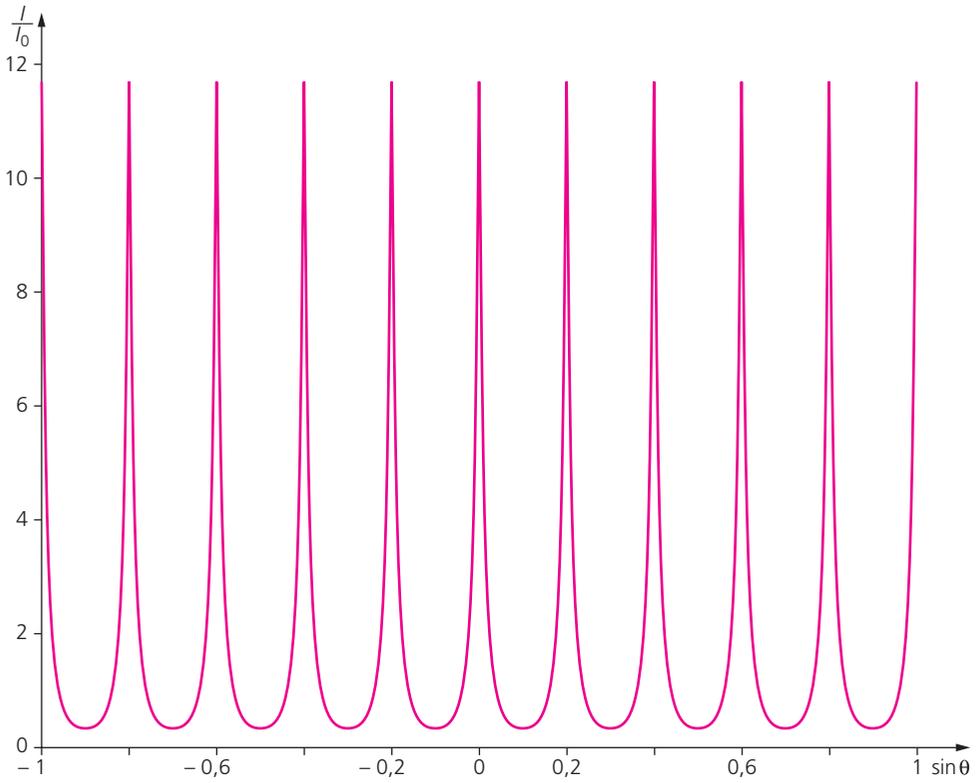
$$I(\theta) = \frac{2I_0}{3 - 2\sqrt{2} \cos \varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

2. L'intensité I est donc une fonction périodique de θ .

$$I_{\max} = \frac{2I_0}{3 - 2\sqrt{2}} = 11,7 I_0 \quad \text{pour} \quad a \sin \theta = K\lambda \quad (\text{interférences constructives})$$

$$I_{\min} = \frac{2I_0}{3 + 2\sqrt{2}} = 0,34 I_0 \quad \text{pour} \quad a \sin \theta = \left(K + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (\text{interférences destructives})$$

La forme de l'intensité lumineuse est donnée p. suivante.



3. Le contraste vaut :

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 0,943$$

Il s'agit d'une valeur assez élevée.

Diffraction d'une onde lumineuse

Un peu d'histoire

Grimaldi et la découverte de la diffraction

La diffraction a sans doute été découverte par Francesco Grimaldi (1618-1663), un jésuite italien de Bologne. Son ouvrage *De lumine*, paru en 1665, commence ainsi : « La lumière se propage non seulement directement, par réfraction ou par réflexion mais aussi d'une quatrième façon, par diffraction. »

Grimaldi relate qu'en plaçant de petits objets, comme des fils, dans un faisceau de lumière blanche et en observant sur un écran l'éclairement correspondant, il constate l'apparition de franges irisées, qu'il ne peut expliquer dans le cadre de l'optique géométrique. Il appelle diffraction ce comportement atypique de la propagation lumineuse, qu'il suppose dû à un changement de trajectoire de la lumière à proximité d'objets opaques. Les notes de Grimaldi laissent penser, mais sans certitude, qu'il a également observé des interférences à deux ondes.

1. LE PHÉNOMÈNE DE DIFFRACTION

Les phénomènes de diffraction interviennent lorsqu'on place un obstacle de dimension caractéristique d sur le trajet d'un faisceau lumineux. On observe alors une dispersion du faisceau, dans une direction faisant un angle $\alpha = \lambda/d$ avec sa direction d'incidence.

Le phénomène de diffraction ne devient observable que si la taille de l'obstacle est à la longueur d'onde de la lumière incidente.

2. PUPILLE ET TRANSMITTANCE

Lorsque les objets considérés sont des ouvertures planes percées dans des écrans opaques, on parle de **pupilles** diffractantes ou de **diaphragmes**.

La **transmittance** $t(M)$ en un point M d'une pupille est définie par le rapport :

$$t(M) = \frac{E(M)}{E_i(M)}$$

où $E(M)$ désigne le champ électrique au point M et $E_i(M)$ le champ incident au point M . Ainsi, $t(M) = 0$ si le point M est opaque et $t(M) = 1$ si le point M est un trou.

3. ONDE DIFFRACTÉE DANS UNE DIRECTION DONNÉE

3.1. Rappel du principe de Huygens-Fresnel

Le principe de Huygens-Fresnel est fondamental pour calculer des figures de diffraction :

- toute surface élémentaire dS entourant le point M d'une surface d'onde se comporte comme la source secondaire d'une onde sphérique ;
- l'onde sphérique émise a même fréquence que l'onde incidente ;
- l'amplitude de l'onde émise est proportionnelle à celle $E(M)$ de l'onde incidente en M , et à la surface élémentaire dS .

3.2. Expression

• Soit une pupille Ω dans le plan (O, x, y) , caractérisée par sa transmittance $t(x, y)$ et éclairée par une onde plane d'amplitude E_0 et de vecteur d'onde \vec{k}_0 . Chaque élément de surface dS autour du point $M(x; y)$ diffracte une onde d'amplitude :

$$t(x, y) E_0 dx dy.$$

L'approximation de Fraunhofer (ou de diffraction à l'infini) se limite à l'étude des ondes diffractées dans des directions faisant des angles petits par rapport à la normale au plan de la pupille. Cela revient par exemple à effectuer l'observation sur un écran placé loin de la pupille (la distance pupille-écran étant supposée grande devant la taille de la pupille et la longueur d'onde). Choisissons une référence de phase en un point O sur la pupille.

Dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} , le déphasage entre les rayons diffractés en M et en O est donné par :

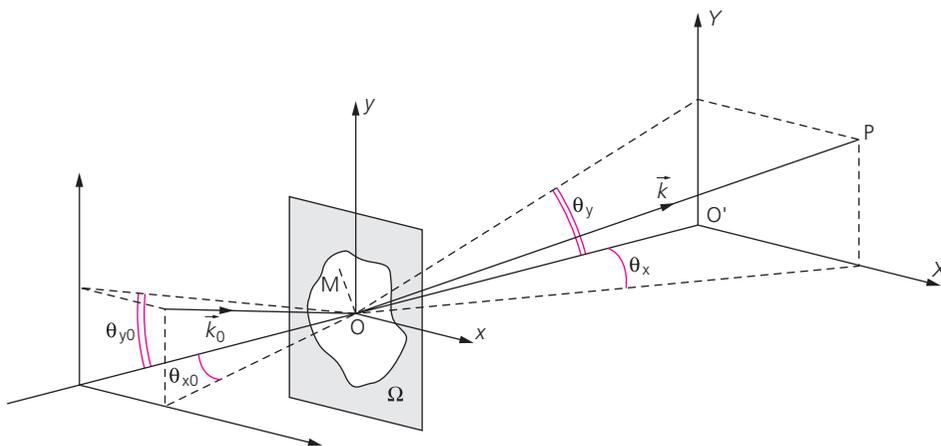
$$\varphi(M) = \overrightarrow{OM} \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k})$$

• Finalement, l'onde diffractée dans la direction repérée par \vec{k} a pour amplitude :

$$E(\vec{k}) = \frac{E_0}{S} \int_{\Omega} \exp(-i((k_x - k_{0x})x + (k_y - k_{0y})y)) \, dx \, dy$$

où la surface totale S est une constante. On choisit cependant d'omettre cette normalisation ; l'intensité résultante s'écrit en effet avec une constante de proportionnalité K :

$$I(\vec{k}) = KE_0^2 \left| \int_{\Omega} \exp(-i((k_x - k_{0x})x + (k_y - k_{0y})y)) \, dx \, dy \right|^2$$



• Avec les angles θ_x et θ_{x0} (contenus dans le plan $OO'X$) et les angles θ_y et θ_{y0} (contenus dans les plan $OO'Y$) définis ci-dessus, ces expressions deviennent (tous les angles étant supposés faibles) :

$$E(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{S} \int_{\Omega} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}((\theta_x - \theta_{x0})x + (\theta_y - \theta_{y0})y)\right) \, dx \, dy$$

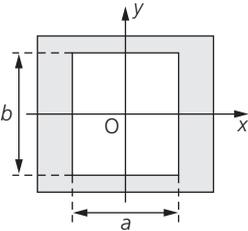
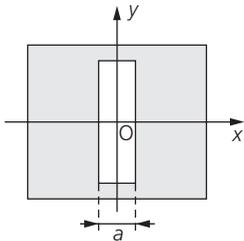
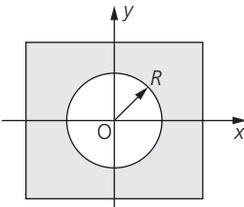
avec $I(\theta_x, \theta_y) = K E(\theta_x, \theta_y) E^*(\theta_x, \theta_y)$.

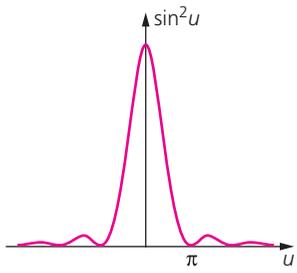
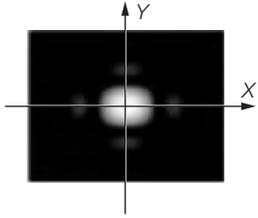
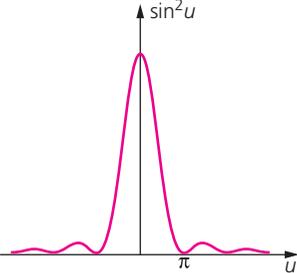
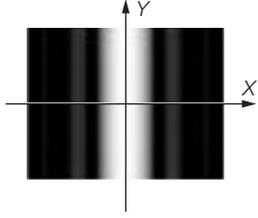
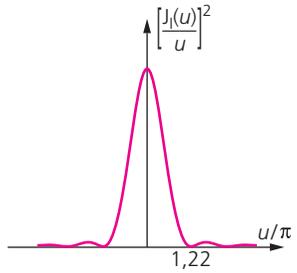
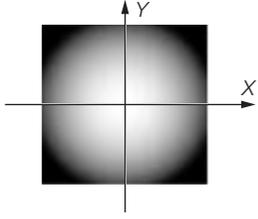
L'observation de la figure de diffraction se fait généralement dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' , ou sur un écran placé à une distance D loin de la pupille (O' ; X, Y). L'intensité $I(X, Y)$ s'exprime alors en fonction des coordonnées (X, Y) du point P considéré, puisque :

$$\theta_x \approx X/L \quad \text{et} \quad \theta_y \approx Y/L \quad (\text{avec } L = f' \text{ ou } D).$$

Les expressions de $I(X, Y)$ pour des pupilles de forme classique sont données dans le tableau p. suivante. On a considéré le cas où l'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente ($L = f'$).

Diffraction par une pupille

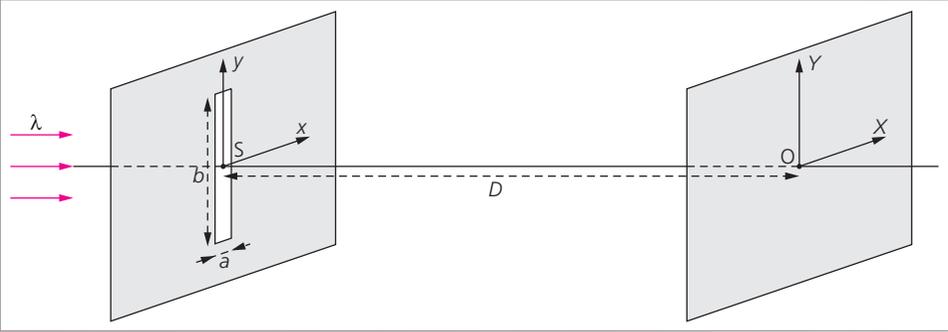
Type de pupille	Schéma de la pupille	Paramètres
Pupille rectangulaire		$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda f'}$ $\beta = \frac{\pi b}{\lambda f'}$
Fente 1D		$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda f'}$
Fente circulaire		$\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda f'}$ $J_1(u) = \frac{2u}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-z^2} \cos(uz) dz$ <p>(Fonction de Bessel d'ordre 1)</p>

Intensité	Fonction	Figure de diffraction dans (O'; X, Y)
$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \alpha X \operatorname{sinc}^2 \beta Y$		
$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \alpha X$		
$I(\rho) = 4I_0 \left[\frac{J_1(\alpha\rho)}{\alpha\rho} \right]^2$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$		

DIFFRACTION PAR UNE PUPILLE RECTANGULAIRE

Exercice 1 Diffraction élémentaire par une fente

On considère une fente rectangulaire de largeur $a = 0,1 \text{ mm}$ et de longueur $b \gg a$ contenue dans le plan $(S; x, y)$. La fente est éclairée sous incidence normale par un faisceau parallèle de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$. La figure de diffraction est observée sur un écran $(O; X, Y)$ placé à $D = 1 \text{ m}$ de la fente.



1. Donner l'expression de l'amplitude de l'onde résultante en un point $M(X; Y)$ de l'écran.
2. En déduire l'éclairement $I(X, Y)$ sur l'écran.
3. Donner les positions des 3 premiers maxima et des 3 premiers minima.
4. Préciser comment la figure de diffraction est modifiée lorsqu'on fait subir à la fente diffractante une translation dans le plan $(S; x, y)$; une rotation; une homothétie.
5. Donner l'expression de l'éclairement si l'écran est maintenant placé dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Solution

CONSEIL : cet exercice est fondé sur l'exemple classique de la diffraction par une fente de taille finie. Rappelons seulement que placer un écran « loin » de la pupille signifie qu'un point correspond à l'intersection de rayons diffractés dans une même direction : on dit qu'un faisceau parallèle forme un point à l'infini. Rappelons également qu'à défaut d'indication contraire, la transmittance d'une pupille est considérée comme égale à 1.

1. D'après le principe de Huygens, le champ électrique $E(\theta_x, \theta_y)$ associée à l'onde diffractée dans la direction $(\theta_x; \theta_y)$ est la résultante des champs associés à toutes les ondelettes issues de la fente, et atteignant le point M sur l'écran. Nous avons donc :

$$E(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_x x\right) dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_y y\right) dy$$

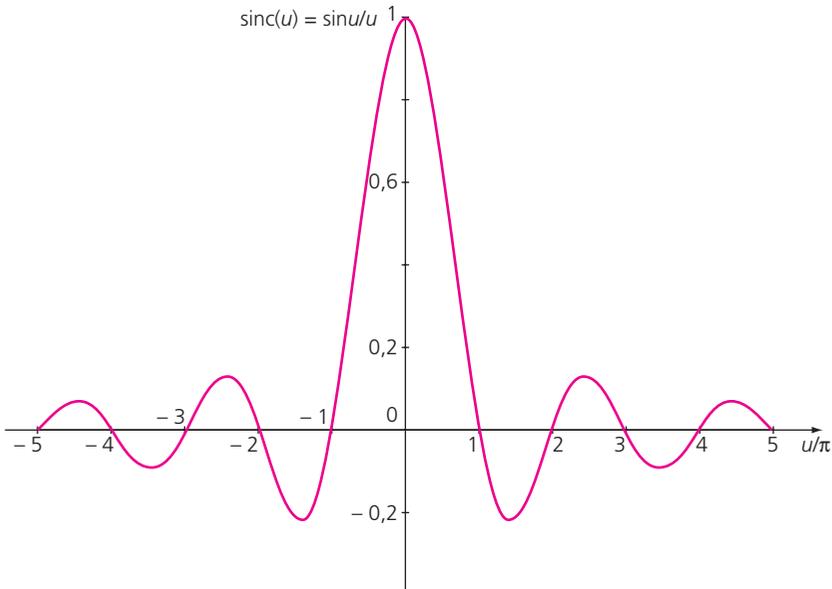
$$E(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \left[\frac{\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_x x\right)}{-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_x} \right]_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_y y\right)}{-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_y} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$E(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \frac{\sin\left(\frac{\pi\theta_x a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi}{\lambda}\theta_x} \frac{\sin\left(\frac{\pi\theta_y b}{\lambda}\right)}{\frac{\pi}{\lambda}\theta_y}$$

soit finalement :

$$E(\theta_x, \theta_y) = E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\theta_x a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\theta_y b}{\lambda}\right)$$

La fonction sinus cardinal ($\operatorname{sinc} u = \frac{\sin u}{u}$) admet un maximum en 0, et s'annule pour u multiple de π .



Sur l'écran d'observation, nous avons :

$$\theta_x \approx \frac{X}{D} \quad \text{et} \quad \theta_y \approx \frac{Y}{D}$$

soit l'expression du champ électrique :

$$E(X, Y) = E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi X a}{\lambda D}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi Y b}{\lambda D}\right)$$

Lorsque $b \gg a$, la figure de diffraction est modifiée. En effet, le phénomène devient bidimensionnel car le problème est invariant par translation suivant y : le vecteur d'onde a alors une composante nulle suivant y ($\theta_y = 0$). On a donc :

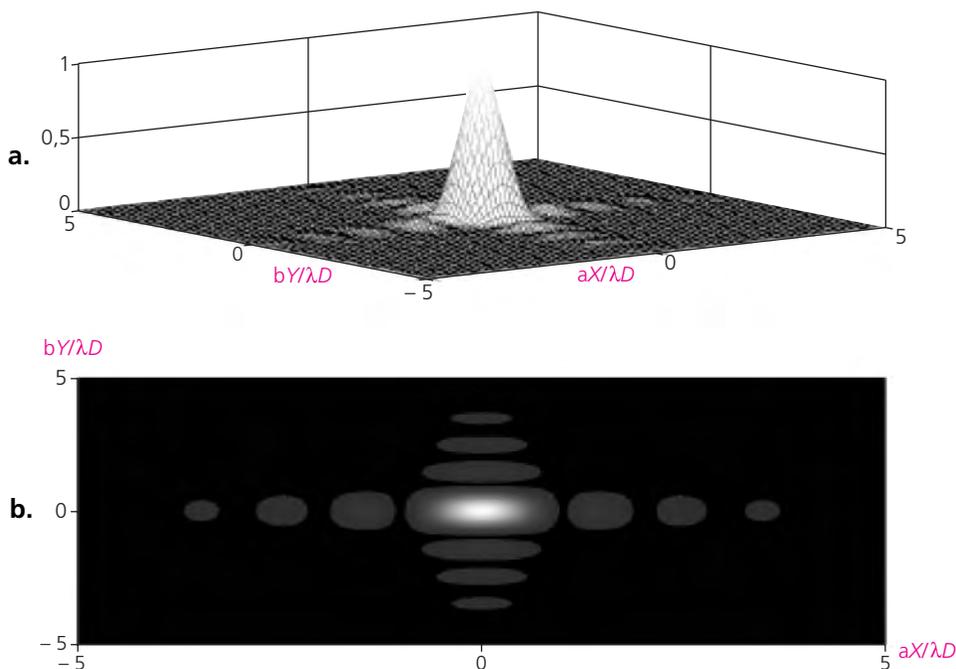
$$E(\theta_x, \theta_y = 0) = E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\theta_x a}{\lambda}\right)$$

soit :

$$E(X, Y) \approx E_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi X a}{\lambda D} \right)$$

2. L'intensité résultante est donnée par $I(X, Y) = K E(X, Y) E(X, Y)^*$, où K est une constante de proportionnalité et $*$ désigne le complexe conjugué. On a donc, avec $I_0 = K(E_0)^2$:

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda D} X \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda D} Y \right)$$



Les figures ci-dessus montrent l'aspect de la figure de diffraction $I(X, Y)$ par une fente rectangulaire, (a) en représentation 3D, où la troisième dimension indique la valeur de I , et (b) en niveaux de gris.

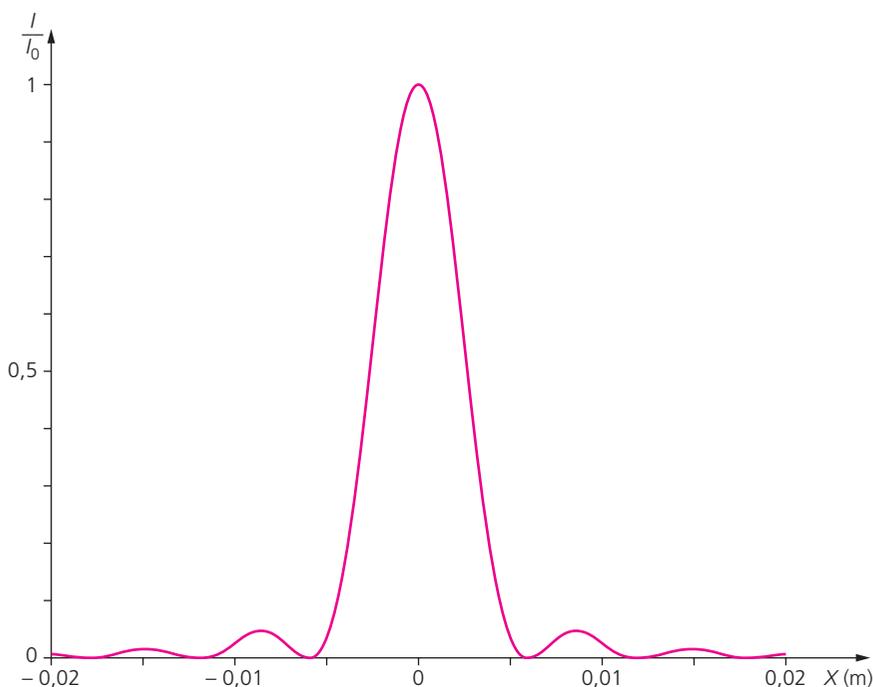
Lorsque $b \gg a$, l'intensité prend la forme simplifiée :

$$I(X, Y) \approx I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda D} X \right)$$

3. Les positions des premiers maxima et des premiers minima sont données par les maxima et les minima (les zéros) de la fonction sinus cardinal. Les minima d'éclairement sont donnés par $X = n \lambda D/a$ avec n entier strictement positif, qui traduit la condition sur les angles $\pi \sin \theta_x a/\lambda = n\pi$. Rappelons que le terme $k\theta_x$ provient de la projection du vecteur d'onde \vec{k} sur l'axe Ox , avec $\sin \theta_x \approx \theta_x$: on doit donc avoir $\sin \theta_x < 1$. Le premier maximum d'éclairement est obtenu pour $X = 0$, tandis que les maxima suivants sont donnés par $X = (n + 1/2) \lambda D/a$ avec n entier strictement positif.

	minimum	maximum
Position du premier	$X_{m1} = \lambda D/a = 6 \text{ mm}$	$X_{M1} = 0$
Position du deuxième	$X_{m1} = 2\lambda D/a = 12 \text{ mm}$	$X_{M2} = 3\lambda D/2a = 9 \text{ mm}$
Position du troisième	$X_{m1} = 3\lambda D/a = 18 \text{ mm}$	$X_{M3} = 5\lambda D/2a = 15 \text{ mm}$

Le tableau ci-dessus donne les positions des premiers maxima et minima d'éclairement pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 0,1 \text{ mm}$ (avec $b \gg a$); sur la figure qui suit, on a représenté la fonction $I(X)$ correspondante.



4. • Lorsqu'on fait subir à la fente une translation dans le plan qui la contient, la figure de diffraction est traduite suivant la même transformation. En effet, soit t la translation telle que $t(x; y) = (x'; y') = (x - \alpha; y - \beta)$. Le champ électrique E_t associé à l'onde diffractée par la fente traduite d'un vecteur (α, β) s'écrit :

$$E_t(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_x x'\right) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\theta_y y'\right) dy'$$

avec sur l'écran, $\theta_x \approx \frac{X - \alpha}{D}$ et $\theta_y \approx \frac{Y - \beta}{D}$

Nous obtenons :

$$E_t(X, Y) = E(X - \alpha, Y - \beta)$$

donc finalement :

$$I_t(X, Y) = I(X - \alpha, Y - \beta)$$

ce qui correspond à une figure de diffraction ayant subi une translation t : elle suit le déplacement imposé à la fente diffractante.

• Une rotation change l'orientation des axes Sx et Sy dans le plan de la fente, ce qui modifie du même angle l'orientation des axes OX et OY de la figure de diffraction. Soit r la rotation d'angle φ telle que :

$$r(x; y) = (x'; y') = (x \cos \varphi - y \sin \varphi; x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

Le champ électrique E_r associé à l'onde diffractée ayant subi une rotation s'écrit :

$$E_r(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_x x'\right) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_y y'\right) dy'$$

Avec sur l'écran, $\sin \theta_x = \frac{X \cos \varphi - Y \sin \varphi}{D}$ et $\sin \theta_y = \frac{X \sin \varphi + Y \cos \varphi}{D}$ nous obtenons :

$$E_r(X, Y) = E(X \cos \varphi - Y \sin \varphi, X \sin \varphi + Y \cos \varphi)$$

On a finalement :

$$I_r(X, Y) = I(X \cos \varphi - Y \sin \varphi, X \sin \varphi + Y \cos \varphi)$$

qui correspond à la figure de diffraction ayant subi une rotation d'angle φ .

• Lorsqu'on fait subir à la fente une homothétie, elle reste une fente fine, au sens où sa longueur est toujours très grande devant sa largeur. Soit h l'homothétie de rapport γ :

$$h(x; y) = (\gamma x; \gamma y)$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$E_h(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \int_{-\gamma a/2}^{\gamma a/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_x x\right) dx \int_{-\gamma b/2}^{\gamma b/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_y y\right) dy$$

Avec le changement de variable $u = x/\gamma$ et $v = y/\gamma$:

$$E_h(\theta_x, \theta_y) = \frac{E_0}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_x \gamma u\right) \gamma du \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \theta_y \gamma v\right) \gamma dv$$

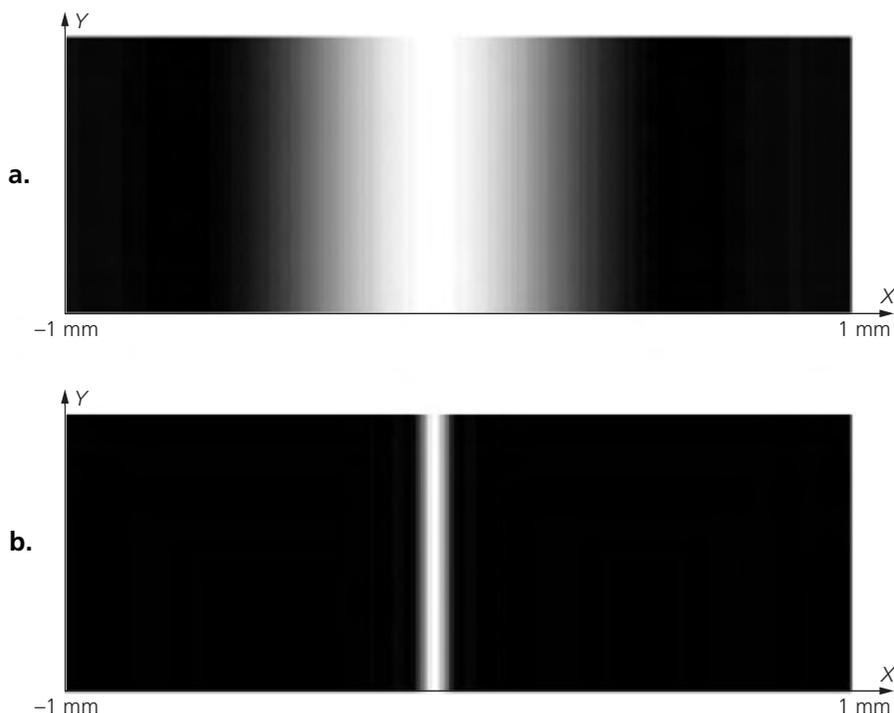
Sur l'écran, nous obtenons :

$$E_h(X, Y) = \gamma^2 E(\gamma X, \gamma Y)$$

Nous en déduisons :

$$I_h(X, Y) = \gamma^4 I(\gamma X, \gamma Y)$$

Lorsque $\gamma > 1$, la figure de diffraction se resserre. C'est une propriété générale des phénomènes de diffraction : l'extension de la figure obtenue est d'autant plus petite que la taille de l'objet diffractant est grande. La figure ci-dessous illustre la modification de la figure d'interférence lorsque la fente subit une homothétie : (a) $a = 0,1$ mm et (b) $a = 1$ mm, soit un facteur d'homothétie égal à 10 ($\lambda = 600$ nm, $D = 1$ m).

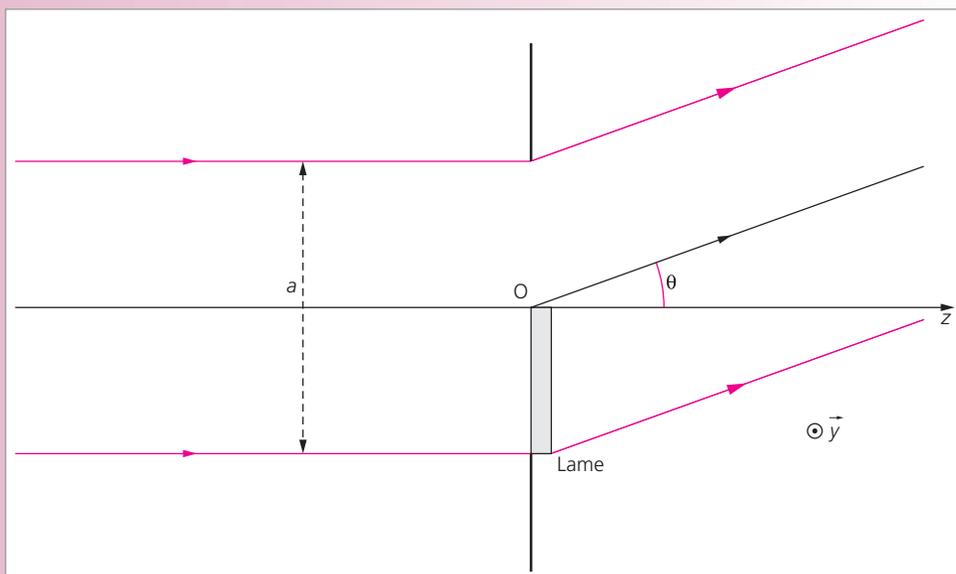


5. Lorsqu'on place l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente, les résultats précédents sont modifiés de la façon suivante :

- la translation de la fente diffractante ne modifie pas la figure de diffraction car tous les rayons issus de la fente dans la direction θ convergent au point M tel que $\tan \theta = OM/f'$ et ce quelle que soit la position du centre de la fente ;
- la rotation ou l'homothétie de la fente provoquent une rotation ou une homothétie de la figure de diffraction ; les expressions des intensités se déduisent des questions précédentes en remplaçant D par f' .

Exercice 2 Diffraction par une fente comportant une lame à retard de phase

Une fente de centre O de largeur a et de hauteur très supérieure à a est éclairée, sous incidence normale, par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ .



Ayant placé sur une moitié de la fente une lame transparente très mince dont le seul effet est de créer un déphasage φ supplémentaire, on étudie l'intensité diffractée dans la direction θ (qu'on suppose petit).

1. Calculer cette intensité diffractée. Vérifier que, pour $\varphi = 0$, on retrouve la figure de diffraction par une fente (exercice 1).
2. Que se passe-t-il pour $\varphi = \pi/2$? Donner l'aspect de la figure de diffraction observée sur un écran placé loin de la fente.
3. Même question pour $\varphi = \pi$.

Solution

CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière si on applique le principe de Huygens-Fresnel : chaque point de la fente diffractante se comporte comme une source secondaire, qui émet une ondelette sphérique. En absence de lame, tous les points sources de la fente sont en phase ; lorsqu'une lame est introduite sur la moitié de la fente, les points sources de cette moitié sont déphasés de φ par rapport à ceux de l'autre moitié.

Rappelons que, comme dans l'exercice précédent, la décroissance du champ électrique associé à l'onde sphérique (décroissance en $1/r$, où r est la distance de la source au point de l'espace considéré) est négligée, c'est-à-dire qu'on se place suffisamment loin de la source pour considérer que la distance d'un point de la fente au point M sur l'écran est égale à la distance latérale du centre de la fente à M .

1. D'après le principe de Huygens-Fresnel, le champ électrique E associé à l'onde diffractée dans la direction θ (avec θ petit) est donné par :

$$E(\theta) = A \int_{-\frac{a}{2}}^0 \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}x\theta + i\varphi\right) dx + A \int_0^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}x\theta\right) dx$$

Avec $u = \frac{\theta}{\lambda}$, il vient :

$$E(\theta) = e^{i\varphi + i\pi\frac{ua}{2}} \left[\frac{\sin\left(\pi\frac{ua}{2}\right)}{\pi u} \right] + e^{-i\pi\frac{ua}{2}} \left[\frac{\sin\left(\pi\frac{ua}{2}\right)}{\pi u} \right]$$

$$E(\theta) = A\frac{a}{2} \operatorname{sinc}\left(\pi\frac{ua}{2}\right) [1 + e^{i(\pi ua + \varphi)}] e^{-i\pi\frac{ua}{2}} \quad (\text{où } \operatorname{sinc} u = \frac{\sin u}{u})$$

• L'intensité lumineuse I est donnée par $I(\theta) = KE(\theta)E(\theta)^*$ (K est une constante de proportionnalité et $*$ désigne le complexe conjugué), d'où :

$$I(\theta) = K \left(\frac{Aa}{2}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\frac{ua}{2}\right) [1 + \cos(\pi ua + \varphi)]$$

$$I(\theta) = \frac{K}{2} (Aa)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\frac{ua}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi ua + \varphi}{2}\right)$$

Si I_0 désigne l'intensité lumineuse en $\theta = 0$ (qu'on suppose non nulle), on a, avec $\operatorname{sinc}^2 0 = 1$, $I_0 = \frac{K}{2} (Aa)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, soit :

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\frac{ua}{2}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi ua + \varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi}{2}} \right]^2$$

• Lorsque $\varphi = 0$, on a $I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\frac{ua}{2}\right) \cos^2\left(\pi\frac{ua}{2}\right)$. Avec :

$$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{X}{2}\right) \cos^2\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{X}{2}\right) \cos^2\left(\frac{X}{2}\right)}{\left(\frac{X}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2(X)}{X^2} = \operatorname{sinc}^2(X)$$

il vient finalement :

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi ua) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\sin \theta}{\lambda}$$

qui correspond à la figure de diffraction par une fente simple.

2. Pour $\varphi = \pi/2$, on obtient, avec $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$:

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi ua}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \right]^2$$

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{\frac{\pi ua}{2}} - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right)}{\frac{\pi ua}{2}} \right]^2$$

soit finalement :

$$I(\theta) = I_0 \left[\operatorname{sinc}^2(\pi ua) - \frac{\pi ua}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \right]^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\sin \theta}{\lambda}$$

Si l'observation se fait sur un écran placé à une distance D très grande, $\sin \theta \approx x/D$ et on obtient :

$$I(x, y) = I_0 \left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda D} x\right) - \frac{\pi a}{2\lambda D} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{2\lambda D} x\right) \right]^2$$

où I_0 est l'intensité au centre de l'écran.

3. Pour $\varphi = \pi$, on doit tout d'abord revoir la définition de I_0 , l'intensité en $\theta = 0$ étant nulle. Pour simplifier, nous partons de :

$$I(\theta) \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi ua + \pi}{2}\right)$$

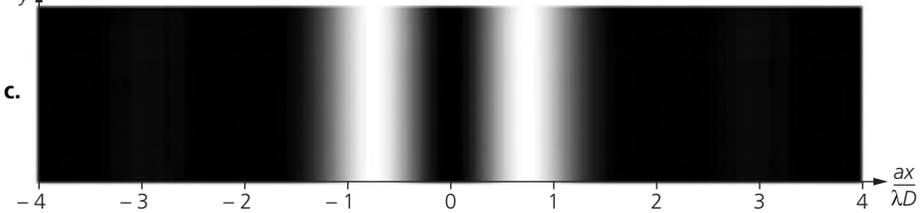
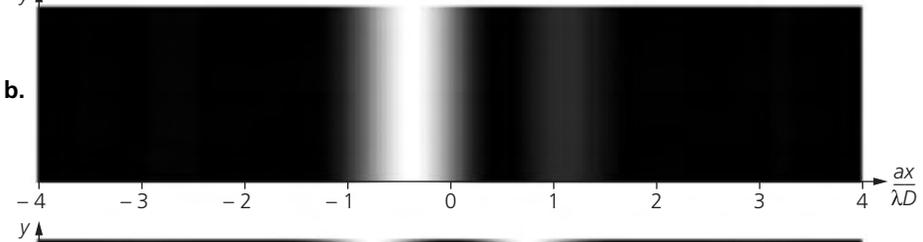
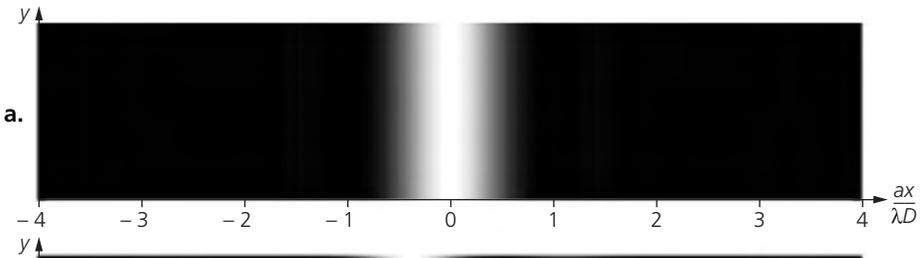
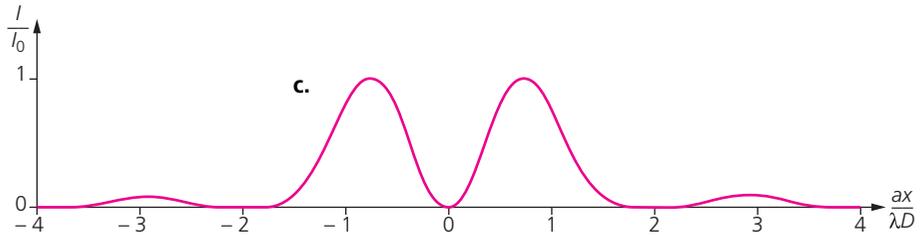
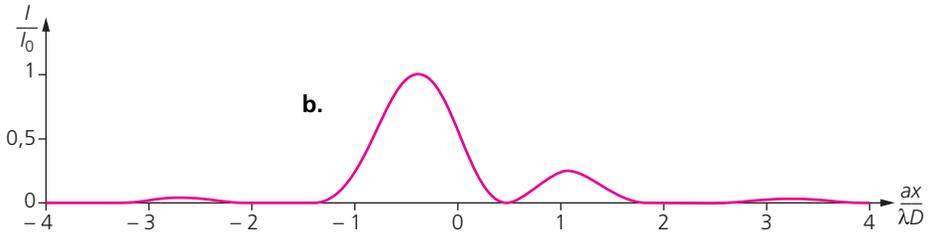
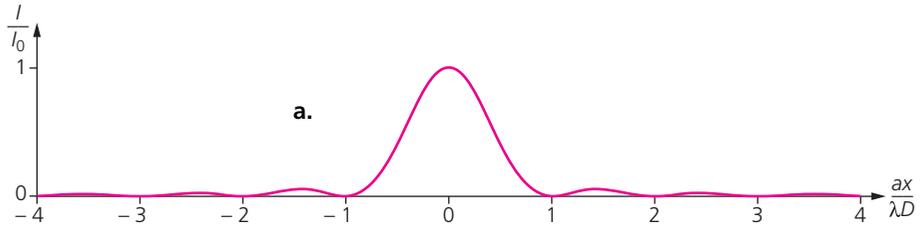
$$I(\theta) \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi ua}{2}\right)$$

Posons $f(u) = \operatorname{sinc}^2(\pi u) \sin^2(\pi u)$. Cette fonction admet un maximum pour $\tan \pi u = 2\pi u$, qui est atteint lorsque $u_m = 0,3710$; on a alors $f_m = 0,5251$.

Notons I_0 l'intensité lumineuse maximale obtenue pour $a x_0 / \lambda D = 0,7420$. Il vient :

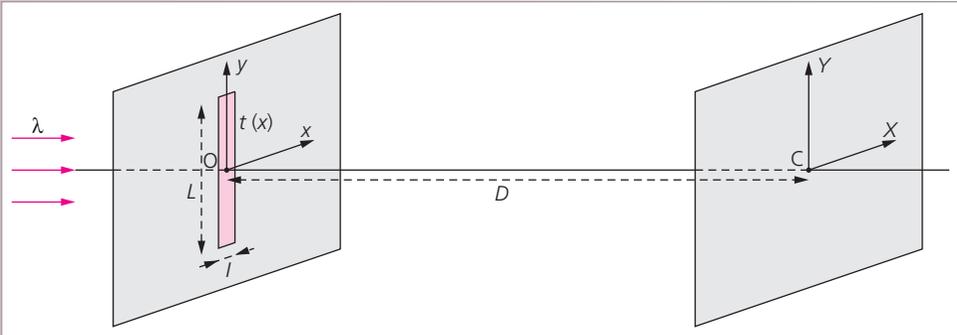
$$I(x, y) \propto \alpha I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{2\lambda D} x\right) \sin^2\left(\frac{\pi a}{2\lambda D} x\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1/f_m = 1,9045$$

Les figures p. suivante illustrent l'allure des figures de diffraction observées pour (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2$ et (c) $\varphi = \pi$.



Exercice 3 Apodisation

On considère une fente transparente de centre O , de longueur L (suivant y) et de largeur l (suivant x). La fente, contenue dans le plan $(O; x, y)$, est munie d'un filtre de coefficient de transmission en amplitude noté $t(x)$ et égal à $t(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ pour $|x| < l/2$ et $t(x) = 0$ ailleurs; elle est éclairée en incidence normale par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .



1. Donner, sous forme intégrale, l'expression du champ électrique (en notation complexe) associé à l'onde diffractée dans le plan $(O; x, z)$, dans une direction faisant un angle θ faible avec l'axe Oz .
2. Calculer le champ en fonction de $u = \frac{l\pi \sin \theta}{\lambda}$.
3. Quelle est l'expression de l'éclairement observé sur un écran placé très loin de la fente diffractante (à la distance D) ?
4. Comparer avec l'éclairement qu'on observerait sans le filtre. Conclure.

Solution

CONSEIL : l'exercice ne présente pas de difficulté particulière si on prend soin d'écrire le principe de Huygens, qui permet de déterminer le champ électrique élémentaire dE associé à un élément de surface ds de la surface diffractante. Le champ total s'écrit par simple intégration sur la surface totale.

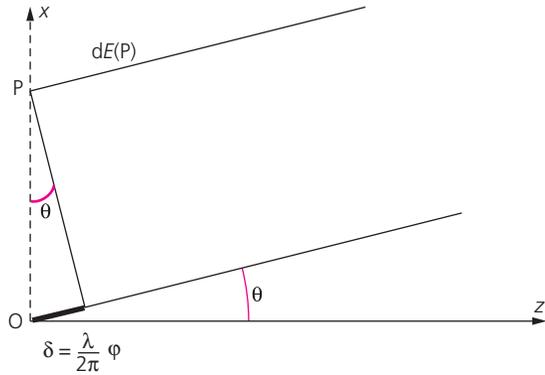
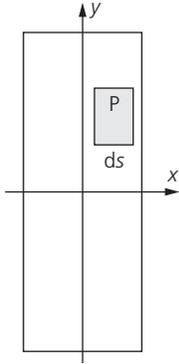
1. Le principe de Huygens prévoit que l'amplitude élémentaire $dE(P)$ de l'onde diffractée par la surface élémentaire ds (autour de P) dans la direction θ est proportionnelle à l'aire ds . Prenons comme référence de phase celle en O , on a :

$$dE(P) = A t(x) e^{i\varphi} ds$$

Avec $ds = dx dy$ et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$, il vient :

$$E(\theta) = \int_F dE = \int_F \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx dy$$

Remarquons que le calcul conduit ici à $\sin \theta$ (au lieu de θ dans les exercices précédents). Tous les calculs étant valables pour θ petit, les deux expressions sont bien équivalentes.



2. Avec $t(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$, on a :

$$E(\theta) = A \int_F \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \exp\left(i\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}x\right) dx dy$$

$$E(\theta) = \frac{A}{2} \int_F \left[\exp\left(i\frac{\pi}{l}x\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{l}x\right) \right] \exp\left(i\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}x\right) dx dy$$

$$E(\theta) = \frac{A}{2} \int_F \left[\exp\left(i\left(\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)x\right) + \exp\left(i\left(-\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)x\right) \right] dx dy$$

$$E(\theta) = \frac{A}{2} L \left[\frac{\exp\left(i\left(\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)x\right)}{i\left(\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} + \frac{\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)x\right)}{i\left(-\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$E(\theta) = AL \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \sin \theta l}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \sin \theta l}{\lambda}\right)}{\left(-\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]$$

$$E(\theta) = AL \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi \sin \theta l}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi \sin \theta l}{\lambda}\right)}{\left(-\frac{\pi}{l} + \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]$$

$$E(\theta) = 2AL \frac{\frac{\pi}{l}}{\left(\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi \sin \theta l}{\lambda}\right)$$

Avec $u = \frac{l\pi \sin \theta}{\lambda}$, on a :

$$E(\theta) = 2\pi AS \frac{\cos u}{4u^2 - \pi^2}$$

où $S = Ll$ est la surface de la fente.

3. L'éclairement $I(\theta)$ est donné par $I(\theta) = KE(\theta) E(\theta)^*$, où K est une constante de proportionnalité et $*$ indique le complexe conjugué, soit :

$$I(u) = 4K\pi^2 A^2 S^2 \left(\frac{\cos u}{4u^2 - \pi^2} \right)^2$$

Pour $\theta = 0$, $u = 0$ et $I(0) = I_0 = 4K \frac{A^2 S^2}{\pi^2}$. On a donc :

$$I(u) = I_0 \left(\frac{\cos u}{\frac{4u^2}{\pi^2} - 1} \right)^2$$

4. Sans filtre, $t(x) = 1$ pour $|x| < l/2$ et $t(x) = 0$ ailleurs. Un calcul identique donne :

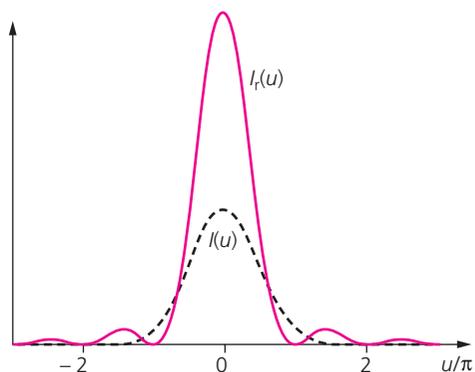
$$\begin{aligned} E_r(\theta) &= A \int_F \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx dy \\ E_r(\theta) &= AL \left[\frac{\exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right)}{i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}} \right]_{-l/2}^{l/2} = AL \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi \sin \theta}{\lambda} l\right)}{\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}} \right] = AS \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

Soit :

$$I_r(u) = KA^2 S^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

La figure ci-contre donne l'allure des courbes $I(u)$ (---) et $I_r(u)$ (—).

L'apodisation (utilisation du filtre sinusoïdal) permet d'élargir la frange centrale ; le maximum est est diminué d'un facteur $4/\pi^2 \approx 0,4$ ainsi que les maxima secondaires qui disparaissent presque totalement. L'apodisation d'un signal permet de réduire les phénomènes d'interférence.



Exercice 4 Podisation

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour un filtre de coefficient de transmission en amplitude $t(x) = \frac{2}{l} |x|$ pour $|x| < l/2$ et $t(x) = 0$ ailleurs.

Solution

CONSEIL : cet exercice est identique dans l'esprit au précédent, avec une transmittance de forme différente. Nous verrons que l'effet obtenu n'est pas du tout le même !

1. Comme pour l'exercice précédent, le principe de Huygens permet d'écrire :

$$dE = A t(x) e^{i\varphi} ds$$

Avec $ds = dx dy$ et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$, il vient :

$$E(\theta) = \int_F dE = \int_F \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx dy$$

2. Avec $t(x) = \frac{2}{l} |x|$, on a :

$$E(\theta) = A \int_F \frac{2}{l} |x| \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx dy$$

$$E(\theta) = AL \left(\int_{-l/2}^0 \frac{2}{l} (-x) \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx + \int_0^{l/2} \frac{2}{l} x \exp\left(i \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x\right) dx \right)$$

Posons $\zeta = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x$:

$$E(\theta) = -AL \frac{\lambda}{\pi l \sin \theta} \frac{\lambda}{2\pi \sin \theta} \left(\int_{-u}^0 \zeta \exp(i\zeta) d\zeta - \int_0^u \zeta \exp(i\zeta) d\zeta \right)$$

$$E(\theta) = -\frac{ALl}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi l \sin \theta} \right)^2 \int_0^u \zeta (\exp(i\zeta) + \exp(-i\zeta)) d\zeta$$

Avec $u = \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}$, on a :

$$E(u) = -\frac{AS}{u^2} \int_0^u \zeta \cos \zeta d\zeta$$

où $S = Ll$ est la surface de la fente. Remarquons que $\int \zeta \cos \zeta d\zeta = \cos \zeta + \zeta \sin \zeta$

$$E(u) = -\frac{AS}{u^2} [\cos \zeta + \zeta \sin \zeta]_0^u = -\frac{AS}{u^2} (\cos u - 1 + u \sin u)$$

Avec $\cos u - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$, $\sin u = 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right)$, et en introduisant la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(u) = \sin u/u$, on a finalement :

$$E(u) = AS \text{sinc}\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

3. L'éclairement $I(u)$ est donné par $I(u) = K E(u) E(u)^*$ (où K est une constante et $*$ indique le complexe conjugué), soit :

$$I(u) = K(AS)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2$$

Pour $\theta = 0$, $u = 0$ et $I(0) = I_0 = K \frac{(AS)^2}{4}$. On a donc :

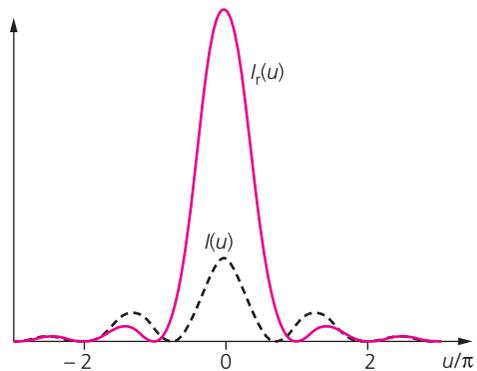
$$I(u) = 4I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2$$

4. Comme précédemment, on a, sans filtre :

$$I_r = 4KA^2 S^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = I_{0R} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

La figure ci-contre illustre l'allure des courbes $I(u)$ (---) et $I_r(u)$ (—).

La podisation a pour effet d'augmenter l'intensité des maxima secondaires ; comme pour l'apodisation, l'intensité du maximum central est diminuée (pour la podisation d'un facteur 4) mais sa largeur est cette fois réduite.



AUTRES TYPES DE PUPILLES DIFFRACTANTES

Exercice 5 Éléments de symétrie d'une figure de diffraction

Soit une onde plane incidente éclairant sous incidence normale une pupille diffractante P . La pupille est placée dans le plan $(O; x, y)$ et elle est caractérisée par son coefficient de transmission en amplitude $t(x, y)$. On observe la figure de diffraction sur un écran placé dans le plan focal image $(O'; x', y')$ d'une lentille convergente L . Le point O' coïncide avec l'image géométrique, à travers L , du faisceau diffracté dans la direction $(0; 0; 1)$.

D'après le principe de Huygens-Fresnel, le champ électrique élémentaire dE associé à l'onde diffractée dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ par un élément de surface $dS = dx dy$ de la pupille centré en M s'écrit :

$$dE(\alpha, \beta) = A t(x, y) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)\right] dx dy$$

(où A est un coefficient de proportionnalité).

1. Montrer que O' est le centre de symétrie de la figure de diffraction observée sur l'écran si la pupille admet O comme centre de symétrie.
2. Montrer que si $t(x, y)$ est réel, cette propriété est encore vraie pour une pupille de forme quelconque.
3. Montrer que la figure de diffraction reste identique à elle-même si on translate la pupille dans son plan.
4. Montrer que si l'on effectue sur la pupille des affinités de rapport ν_x suivant O_x et ν_y suivant O_y , la nouvelle figure de diffraction se déduit de l'ancienne par des affinités de rapport $\frac{1}{\nu_x}$ suivant O'_x et $\frac{1}{\nu_y}$ suivant O'_y , à condition que le coefficient de transmission soit constant sur la pupille.

Solution

CONSEIL : cet exercice traite des propriétés générales de symétrie de la figure de diffraction, en fonction des propriétés de la pupille diffractante. Pas de difficulté majeure à signaler !

Le champ associé à l'onde diffractée par la pupille P dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ est la somme des contributions sur toutes les surfaces élémentaires de la pupille :

$$E(\alpha, \beta) = \int_P A t(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy \quad (1)$$

1. Dans le plan focal image de la lentille L , le faisceau diffracté dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ converge au point $P(x'; y')$, tel que $x' = \alpha f'$ et $y' = \beta f'$ et l'intensité lumineuse en P est proportionnelle à EE^* .

Montrons que si O est un centre de symétrie pour la pupille, O' est un centre de symétrie pour la figure de diffraction. Traduisons d'abord l'hypothèse « O est centre de symétrie de la pupille ». Cela signifie d'une part que la géométrie de la pupille admet O comme centre de symétrie : si un point $M(x; y)$ appartient à la pupille, alors son symétrique de coordonnées $(-x; -y)$ appartient également à la pupille. Par ailleurs, $t(x, y)$ doit respecter cette symétrie géométrique, de sorte qu'on doit avoir $t(x, y) = t(-x, -y)$.

Nous voulons en conclure que O' est centre de symétrie pour la figure de diffraction, c'est-à-dire montrer que $I(-x', -y') = I(x', y')$, ce qui revient à montrer que $|E(-\alpha, -\beta)| = |E(\alpha, \beta)|$.

Effectuons le changement de variable $X = -x$ et $Y = -y$ dans l'expression de $E(-\alpha, -\beta)$:

$$\begin{aligned} E(-\alpha, -\beta) &= \int_P A t(x, y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (-\alpha x - \beta y) \right] dx dy \\ &= \int_P A t(-X, -Y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \beta Y) \right] dX dY \\ &= \int_P A t(X, Y) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \beta Y) \right] dX dY \end{aligned}$$

Ainsi, $E(-\alpha, -\beta) = E(\alpha, \beta)$, ce qui permet de conclure.

2. Nous voulons généraliser le résultat précédent au cas où la forme de la pupille P est quelconque mais $t(x, y)$ est réel, autrement dit, nous voulons montrer que $I(-\alpha, -\beta) = I(\alpha, \beta)$. Remarquons que l'expression de $E(\alpha, \beta)$ donnée par l'équation (1) vérifie :

$$E(\alpha, \beta)A^* = E^*(-\alpha, -\beta)A$$

et de façon équivalente $E^*(\alpha, \beta)A = E(-\alpha, -\beta)A^*$. Il vient immédiatement :

$$I(-\alpha, -\beta) = K E(-\alpha, -\beta) E^*(-\alpha, -\beta) = I(\alpha, \beta)$$

ce qui termine la démonstration.

3. Si on translate la pupille P dans son plan ($P \xrightarrow{\vec{l}} P_1$), le champ E_1 diffracté dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ par la « nouvelle » pupille P_1 se déduit du précédent (le champ E diffracté par P) par la relation, déduite de (1) :

$$E_1(\alpha, \beta) = E(\alpha, \beta) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{l} \right]$$

et par suite :

$$I_1(\alpha, \beta) = K E_1(\alpha, \beta) E_1^*(\alpha, \beta) = I(\alpha, \beta)$$

Les relations $x' = \alpha f'$ et $y' = \beta f'$ restant inchangées (l'image O' du faisceau diffracté dans la direction normale à la pupille n'est pas modifiée par sa translation), on a également $I_1(x', y') = I(x', y')$, ce qui termine la démonstration.

Notons que, lorsque l'observation se fait sur un écran placé loin de la pupille, le centre de la figure de diffraction est défini par rapport à l'image à l'infini du faisceau émergeant de la pupille : ce centre coïncide avec la projection d'un point « central » de la pupille sur l'écran. Ainsi, la figure de diffraction se translate sur l'écran de la même façon que la pupille se déplace dans son plan (voir exercice 1, question 4 de ce chapitre).

4. La nouvelle pupille se déduit de l'ancienne par les affinités de rapport v_x suivant O_x et v_y suivant O_y telles que : $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow M_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $X = v_x x$ et $Y = v_y y$.

Que devient le coefficient de transmission $t(x, y)$? On ne peut pas supposer que le matériau formant la pupille est quelconque. Notamment, s'il est inhomogène, connaître ses propriétés sur un domaine P ne nous donne pas ses propriétés sur un domaine P_1 plus grand. En tout état de cause, même si on suppose P_1 plus petit que P , changer la taille de la pupille revient à changer ses propriétés : on n'aura pas, a priori, de relation entre les figures de diffraction observées.

Si la pupille est homogène, elle peut cependant être anisotrope. Dans le cas le plus simple, une direction sur la pupille P correspond à un rapport x/y constant et une direction sur la pupille P_1 à X/Y constant. On ne pourra donc conclure que si les directions x/y et X/Y coïncident, c'est-à-dire si $v_x = v_y$.

Finalement, on ne peut pas dire grand-chose si t n'est pas constant ! Faisons donc cette hypothèse.

Le champ électrique E_1 associé à l'onde diffractée dans la direction $(\alpha ; \beta)$ par la nouvelle pupille s'écrit alors :

$$E_1(\alpha, \beta) = \int_{P_1} A t \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha X + \beta Y) \right] dX dY$$

soit :

$$E_1(\alpha, \beta) = \int_P A t \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha v_x x + \beta v_y y) \right] v_x v_y dx dy$$

(par le changement de variables $X = v_x x$ et $Y = v_y y$, le domaine d'intégration est à nouveau P).

Donc :

$$E_1(\alpha, \beta) = v_x v_y E(v_x \alpha, v_y \beta)$$

et

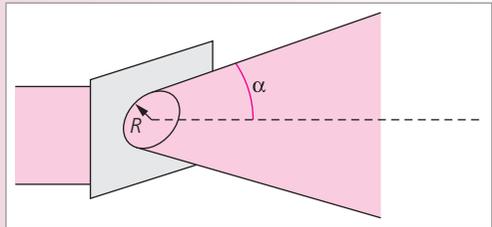
$$I_1(x', y') = (v_x v_y)^2 I(v_x x', v_y y')$$

Sur l'écran, on obtient donc une nouvelle figure de diffraction à partir de l'ancienne, par des affinités de rapports $\frac{1}{v_x}$ suivant O'_x et $\frac{1}{v_y}$ suivant O'_y .

On peut en tirer la règle simple suivante : une dilatation de la pupille de diffraction dans une direction donnée entraîne une contraction de la figure de diffraction dans la direction correspondante.

Exercice 6 La diffraction et l'analyse dimensionnelle

On envoie un faisceau parallèle de lumière monochromatique perpendiculairement à un trou circulaire de rayon R , percé dans un écran opaque. On observe que le faisceau émergent n'est plus parallèle et qu'il présente une ouverture angulaire d'angle α autour de la direction d'incidence. En modifiant le diamètre ($2R$) du trou, on constate que la valeur de α change.



On propose dans cet exercice d'utiliser uniquement l'analyse dimensionnelle pour commenter cette expérience.

1. Montrer que l'optique géométrique ne permet pas d'expliquer ce phénomène.
2. Quelle type de grandeur faudrait-il adjoindre ?
3. Montrer que le modèle corpusculaire de la lumière, qui suppose que la lumière est formée de particules ponctuelles se déplaçant à la vitesse c , ne permet pas davantage d'expliquer le phénomène.
4. Montrer enfin qu'une analyse dimensionnelle fine permet d'explicitier complètement la dépendance de $\sin \alpha$, à une constante multiplicative près.

Solution

CONSEIL : cet exercice est atypique puisqu'il aborde le problème de la diffraction par le biais de l'analyse dimensionnelle. Souvenons-nous que l'analyse dimensionnelle implique d'identifier les grandeurs physiques pertinentes du problème ; on essaiera alors de déterminer l'expression de l'angle α , caractéristique du phénomène de diffraction, en fonction de ces grandeurs en raisonnant sur leurs dimensions.

1. Pour effectuer une analyse dimensionnelle, il faut considérer les grandeurs du problème. Ici, α et R sont respectivement un angle et une distance. Dans le cadre de l'optique géométrique, la seule grandeur supplémentaire que l'on peut introduire est l'indice optique n du milieu. Pour construire α , il faut donc écrire $\alpha = K R^x n^y$, où K est une constante. Or R a la dimension d'une longueur tandis que n et α sont sans dimension. La seule combinaison dimensionnellement acceptable pour construire α est donc $x = 0$:

$$\alpha = K n^y$$

Mais on sait que lorsque R varie avec n constant, α varie également. On ne peut donc pas supposer que α est indépendant de R : l'optique géométrique ne permet pas d'expliquer le phénomène de diffraction.

2. Pour construire α dépendant de R , il manque dans le modèle géométrique une grandeur ayant la dimension d'une longueur. Soit λ cette grandeur ; on peut alors écrire :

$$\alpha = K R^x \lambda^{-x}$$

3. Dans le modèle corpusculaire, on introduit une grandeur supplémentaire, la vitesse c . On a donc :

$$\alpha = K R^x n^y c^z$$

Il vient $x + z = 0$ (pour les longueurs), et $z = 0$ (pour le temps). À nouveau, on trouve $x = z = 0$, ce qui implique α indépendant de R : le modèle corpusculaire n'est pas satisfaisant pour expliquer le phénomène de diffraction.

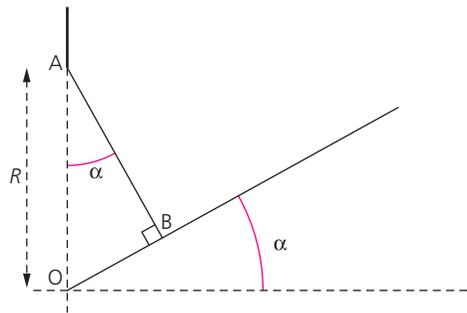
4. Nous allons utiliser des considérations géométriques. Soit le triangle OAB où O est le centre du trou, A un des bords du trou et B la projection de A sur la direction OO' du rayon extrême du faisceau diffracté.

Posons donc $OB = k\lambda$ avec k une constante. Dans le triangle OAB, rectangle en B, on a :

$$\sin \alpha = OB/OA = OB/R$$

L'analyse dimensionnelle donne donc finalement :

$$\sin \alpha \approx k \frac{\lambda}{R}$$



Exercice 7 Diffraction par une pupille circulaire

Une pupille circulaire de rayon R est éclairée sous incidence normale. Le champ électrique associé à l'onde diffractée par la pupille de transparence unité dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ s'écrit :

$$E(\alpha, \beta) = A \int_s \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy$$

1. Montrer que $E(\alpha, \beta)$ se déduit de $E(\alpha, 0)$. Pour $\beta = 0$, on pose $\alpha = \sin \theta$ et $\gamma = \cos \theta$. Faire alors le changement de variable $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$ et montrer que :

$$E(\theta) = A \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos \psi \right) \right] r dr d\psi$$

2. Exprimer l'éclairement $I(\theta)$ dans la direction θ .

On rappelle que les fonctions de Bessel J_n d'ordre n sont définies, pour $n = 0$ et 1 , par :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \theta} d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^v u J_0(u) du = v J_1(v)$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n .

Solution

CONSEIL : cet exercice est en fait une question de cours. Si ce n'est pas à votre programme, laissez-vous guider par l'énoncé !

1. Le champ électrique associé à l'onde diffractée dans la direction $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$, avec z perpendiculaire au plan de la pupille, s'écrit :

$$E(\alpha, \beta) = A \int_s \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy$$

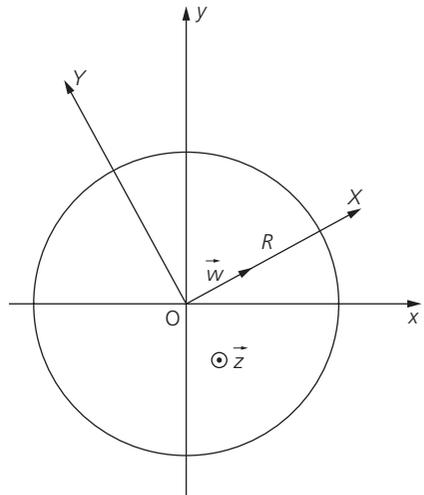
• En observant que le domaine d'intégration est un disque de rayon R , on ne change pas le résultat par une rotation des axes autour de $O\vec{z}$.

Soit (\vec{X}, \vec{Y}) la nouvelle base normée, choisie de telle sorte que $\vec{w} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$ soit vecteur directeur de $(O; \vec{X})$, alors : $\vec{w} = \alpha_1 \vec{X} + \beta_1 \vec{Y}$ avec $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\beta_1 = 0$.

D'après les propriétés énoncées :

$$E(\alpha, \beta) = E(\alpha_1, \beta_1) = E\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0\right)$$

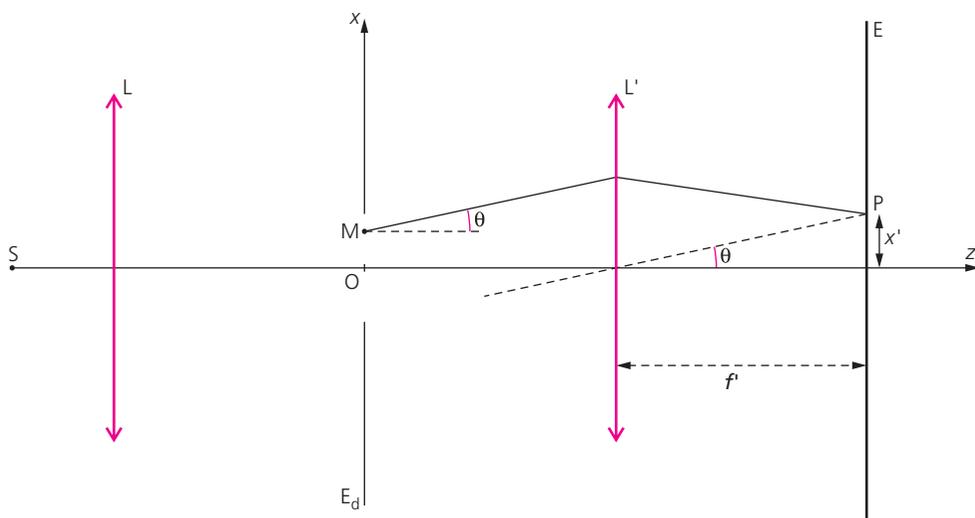
En conclusion, il suffit de connaître $E(\xi, 0)$ pour en déduire $E(\alpha, \beta)$ (ce résultat exprime simplement que toutes les directions sont équivalentes).



• Considérons donc des rayons diffractés parallèlement à un plan méridien du dispositif classique de l'étude de la diffraction, schématisé ci-dessous. Soit $M(x; y)$ un point courant de la pupille et $P(x'; 0)$ un point de l'écran E sur lequel on recueille la figure de diffraction. On pose :

$$x = r \cos \psi \quad \text{et} \quad y = r \sin \psi \quad \text{avec} \quad \psi \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad r \in [0, R]$$

$$\alpha = \sin \theta \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{x'}{f'}$$



Il vient :

$$E(\theta) = A \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp -i \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos \psi \right) r \, dr \, d\psi$$

2. On pose $v \equiv \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta$ et $u \equiv \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta$ (u et v sont sans dimension, $u \in [0, v]$).

L'expression de E s'écrit alors :

$$E(\theta) = A \left[\int_0^v u \, du \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \psi} \, d\psi \right\} \right] \left[\frac{\lambda}{2\pi \sin \theta} \right]^2$$

ou encore :

$$E(v) = A (\pi R^2) \left[\int_0^v u \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \psi} \, d\psi \right\} \, du \right] \frac{2}{v^2} = A (\pi R^2) \left[\int_0^v u J_0(u) \, du \right] \frac{2}{v^2}$$

Avec les données de l'énoncé, le terme entre crochets vaut : $\int_0^v J_0(u) u \, du = v J_1(v)$

Donc :

$$E(v) = A (\pi R^2) \left(\frac{2J_1(v)}{v} \right)$$

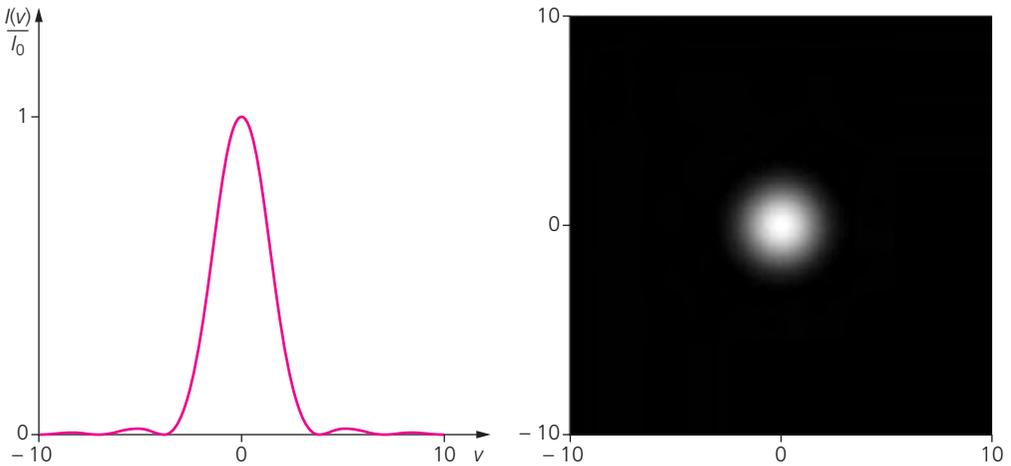
avec

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} R \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

L'intensité associée est de la forme : $I \propto E E^*$, d'où :

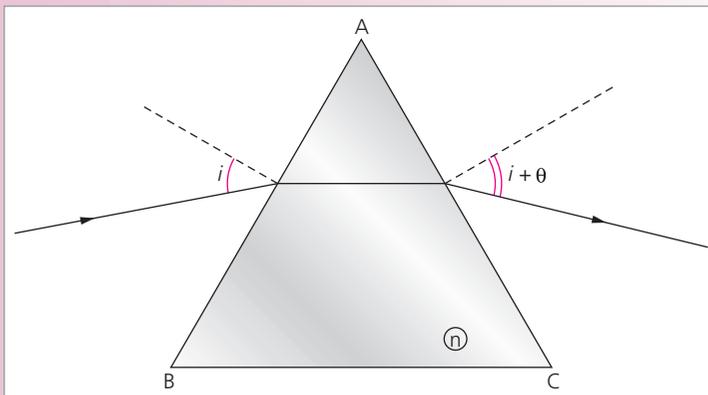
$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{J_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} R \sin \theta} \right]^2$$

Les figures ci-dessous montrent l'allure de la fonction $I(v)$ (avec $v = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta$) et l'aspect de la figure de diffraction observée sur un écran.



Exercice 8 Diffraction par un prisme

Soit un prisme de verre d'indice n , dont la section droite est un triangle équilatéral de côté a . Une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) éclaire toute la face AB sous l'incidence i correspondant au minimum de déviation.



On considère la face AC de sortie comme une ouverture diffractante et on cherche l'expression du champ électrique associé à l'onde diffractée dans la direction $i + \theta$ ($\theta \ll i$). On pose $x = AI = AI'$.

1. Exprimer le champ diffracté par la face AC dans la direction θ (on commencera par énoncer le principe de Huygens pour les points de la face AC recevant l'onde réfractée dans le prisme).
2. En déduire l'intensité lumineuse $I(\theta)$. Tracer la courbe correspondante.
3. Quelle est la valeur de θ_m pour le premier minimum ? Faire l'application numérique pour $n = 1,5$, $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $a = 1 \text{ cm}$.

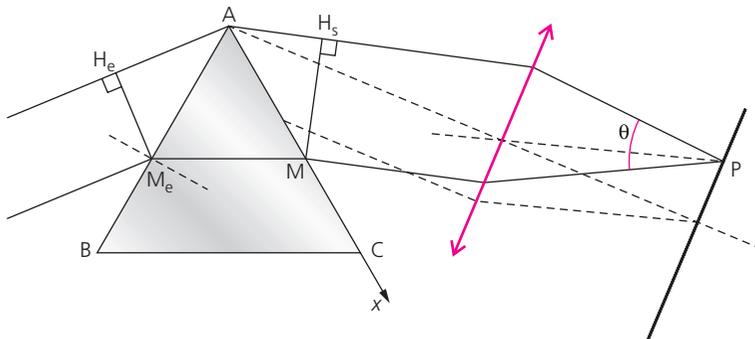
Solution

CONSEIL : cet exercice n'est pas simple mais il est intéressant. Avant même de traduire les informations de l'énoncé (on est au minimum de déviation, le prisme est un « triangle équilatéral », etc.), concentrons-nous sur le problème majeur : depuis quand un prisme, que nous connaissons bien en optique géométrique, est-il une pupille diffractante ? En fait, si on se réfère au principe de Huygens-Fresnel : « tout point atteint par une onde se comporte comme une source secondaire... », tous les points de la face de sortie AC du prisme sont bien atteints par une onde ! La principale difficulté consiste donc à écrire précisément ce que nous donne le principe de Huygens-Fresnel. Le triangle équilatéral signifie que l'angle au sommet du prisme est égal à $\alpha = \pi/3$; le minimum de déviation signifie que l'angle d'incidence vérifie $i_m = \arcsin(n \sin \alpha/2)$.

1. Comme le suggère l'énoncé, étudions la face de sortie du prisme. L'onde incidente, caractérisée par une amplitude E_0 sur la face AB du prisme, se propage dans le prisme et atteint une surface élémentaire dS_M centrée sur un point courant M de la face AC, en sortie du prisme. En M, on peut appliquer le principe de Huygens-Fresnel : la surface dS_M se comporte comme une source secondaire, c'est-à-dire qu'elle émet une onde dont l'amplitude est proportionnelle à celle $E_0(M)$ de l'onde qu'elle reçoit, et proportionnelle à sa surface élémentaire dS_M . Si on choisit le point A comme référence de phase, l'onde émise par dS_M dans la direction θ s'écrit donc :

$$dE_M(\theta) = E_0(M) \exp(i\vec{k} \cdot (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP}))dS_M$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$) de l'onde diffractée dans la direction θ , et le point P est l'image géométrique (c'est-à-dire l'image à l'infini) du faisceau diffracté dans la direction θ et recueilli, par exemple, sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. Sur la figure ci-dessous, on choisit de former l'image géométrique du faisceau de l'incidence $\theta = i_m$ au foyer image de la lentille.



Le point A étant le sommet du prisme, il reçoit l'onde plane non déformée de sorte que $E_0 = E_0(A)$. Par ailleurs, les points M_c et H_c sont en phase. On a donc :

$$E_0 = E_0(A) = E_0(M) e^{-ik\delta_c(A, M)}$$

où

$$\delta_c(A, M) = [H_c A] - [M_c M] = H_c A - n M_c M$$

est la différence de marche entre le rayon issu du faisceau incident arrivant en A et celui arrivant en M. On a donc finalement :

$$dE_M(\theta) = E_0 \exp(ik\delta_c(A, M)) \exp(i\vec{k} \cdot (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP})) dS_M$$

Nous retrouvons une expression classique, avec $\vec{k} \cdot (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP}) = k\delta_s(A, M)$, où $\delta_s(A, M) = -[AH_s] = AH_s$ est la différence de marche entre les deux rayons diffractés dans la direction θ , celui issu de M et celui issu de A.

$$dE_M(\theta) = E_0 e^{ik(\delta_c(A, M) + \delta_s(A, M))} dS = E_0 e^{ik\delta_M(\theta)} dS_M$$

Le champ résultant s'écrit :

$$E(\theta) = \iint_{\text{face AC}} dE_M(\theta) = E_0 \iint_{\text{face AC}} e^{ik\delta_M(\theta)} dS_M$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_M(\theta) &= \delta_c(A, M) + \delta_s(A, M) \\ &= H_c A - n M_c M + AH_s \end{aligned}$$

qu'il nous reste à calculer ! Voilà le moment de faire appel à nos connaissances sur le prisme : au minimum de déviation, l'angle d'incidence (repéré par rapport à la normale à la face d'entrée) et l'angle de sortie (repéré par rapport à la normale à la face de sortie) sont égaux entre eux. Ainsi :

$$i = i_m = \arcsin(n \sin(\alpha/2))$$

où α est l'angle au sommet du prisme (la figure est symétrique par rapport à la bissectrice du prisme et le rayon réfracté dans la lame est perpendiculaire à cette bissectrice). Ici, le triangle est équilatéral de sorte que $\alpha = \pi/3$.

On a donc :

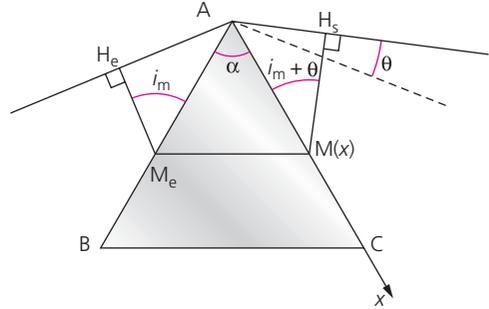
$$H_c A = AM_c \sin i_m = AM \sin i_m = AM n \sin(\alpha/2) = n x/2$$

$$AH_s = AM \sin(i_m + \theta) \approx AM(\sin i_m + \theta \cos i_m) = n x/2 + x \theta \cos i_m$$

$$M_c M = 2AM \sin(\alpha/2) = x$$

Il vient :

$$\delta_M(\theta) = H_c A - n M_c M + AH_s = x \theta \cos i_m$$



Reportons ce résultat dans l'expression du champ diffracté :

$$E(\theta) = E_0 \int_0^a e^{ik\theta x \cos i_m} dx = E_0 \frac{e^{ika\theta \cos i_m} - 1}{\cos i_m \theta}$$

soit en utilisant le sinus cardinal ($\text{sinc}(u) = \sin u/u$) :

$$E(\theta) = E_0 e^{ika\theta \cos i_m/2} \text{sinc}(ka\theta \cos i_m/2)$$

$$E(\theta) = E_0 e^{i\frac{\pi}{\lambda} a\theta \cos i_m} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} a\theta \cos i_m\right)$$

2. On en déduit l'intensité lumineuse $I(\theta) = K E(\theta)E^*(\theta)$ en fonction de θ , avec $I_0 = I(0) = K E_0^2$:

$$I(\theta) = KEE^* = I_0 \text{sinc}^2\left[\frac{\pi}{\lambda} \theta a \cos i_m\right]$$

Tout se passe donc comme si le faisceau était diffracté par une fente de largeur $a \cos i_m$.

La courbe $I(\theta)$ est donnée ci-contre pour $n = 1,5$, $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $a = 1 \text{ cm}$.

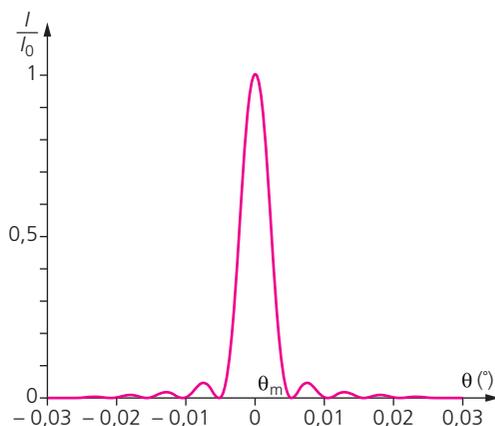
3. Le premier minimum correspond à $I(\theta_m) = 0$ soit $\frac{\pi}{\lambda} \theta a \cos i_m = \pi$ (premier zéro de la fonction sinc) donc :

$$\theta_m = \frac{\lambda}{a \cos i_m}$$

Avec $n = 1,5$, on calcule :

$$i_m = \arcsin(n \sin \alpha/2) = 48,6^\circ$$

soit $\theta_m = 0,0052^\circ$.



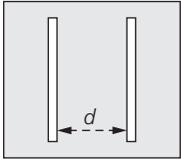
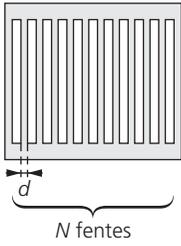
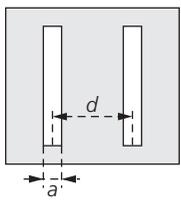
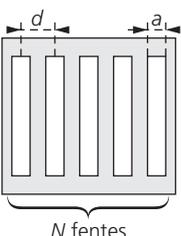
Interférence et diffraction. Réseaux optiques réels

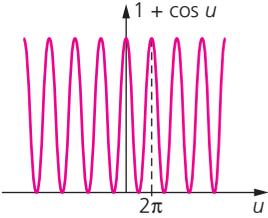
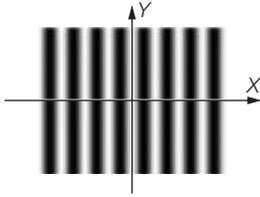
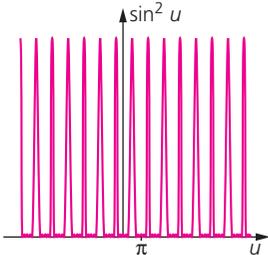
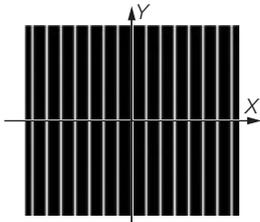
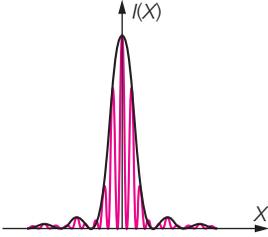
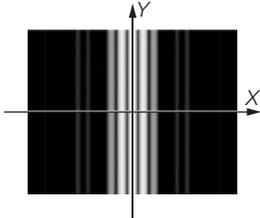
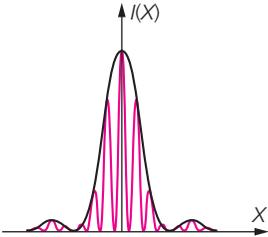
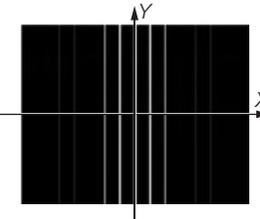
Un peu d'histoire

L'Académie attribue un prix à Augustin Fresnel (1788-1827)

À sa sortie de l'École polytechnique, Augustin Fresnel intègre le corps des Ponts et Chaussées. Tout en poursuivant sa carrière d'ingénieur loin de la capitale, il s'intéresse à l'optique à partir de 1814, avec succès puisque parallèlement aux travaux de Young en Angleterre, il établit les bases de la théorie ondulatoire et reçoit le soutien d'Arago. Les deux hommes font cause commune et entrent en guerre contre les Laplaciens (groupe de physiciens dirigés par Laplace), restés fidèles à la conception de Newton pour qui la lumière est composée de petits grains. La réaction des Laplaciens est immédiate : en 1817, ils organisent un concours chapeauté par l'Académie des sciences, espérant imposer le point de vue corpusculaire et ainsi, contrer Fresnel et Arago. Le sujet retenu porte sur les franges de diffraction et le jury est composé de cinq membres. Un seul, Arago, est favorable à la théorie ondulatoire ; Biot, Poisson et Laplace sont partisans de la thèse concurrente tandis que Gay-Lussac est considéré comme neutre. Seuls deux dossiers seront déposés, dont celui de Fresnel qu'il présente anonymement sous le titre *Natura est simplex et fecunda*. Malgré les critiques de Poisson et de Biot qui proposeront notamment l'annulation du concours, Fresnel reçoit le prix de l'Académie en 1819. Il semble en effet que Gay-Lussac se soit laissé convaincre par sa brillante démonstration, et que Laplace lui-même ait arbitré en sa faveur. Cette reconnaissance faite à Fresnel, de la part des plus fervents défenseurs de la théorie corpusculaire, marque le triomphe de sa rivale ondulatoire.

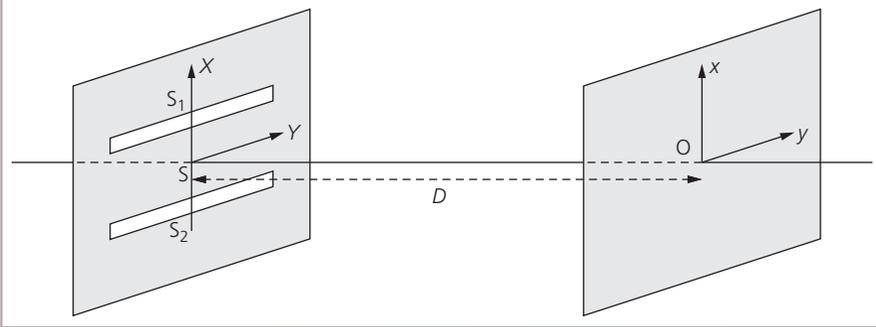
En 1830, trois ans après la mort de Fresnel, Arago salue l'œuvre de son ami dans un discours à l'Académie des sciences : les franges de diffraction, dit-il, « se déduisent de la théorie de notre confrère avec un degré de précision dont auparavant aucune recherche de physique n'avait offert un si frappant exemple. J'oserais presque affirmer qu'à l'égard de la diffraction, (nos successeurs) n'ajouteront rien d'essentiel aux découvertes dont Fresnel a enrichi la science ».

Type de pupille	Schéma de la pupille	Paramètres
Diffraction par des trous		
Fentes de Young idéales (interférences à 2 ondes)		$\gamma = \frac{2\pi d}{\lambda f'}$
Réseau parfait à N fentes (interférences à N ondes)		$\gamma = \frac{\pi d}{\lambda f'}$
Diffraction par des pupilles de taille finie		
Fentes de Young		$\gamma = \frac{2\pi d}{\lambda f'}$ $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda f'}$
Réseau réel à N fentes		$\gamma = \frac{\pi d}{\lambda f'}$ $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda f'}$

Intensité	Fonction	Figure de diffraction dans (O', X, Y)
$I(X, Y) = 2I_0 (1 + \cos \gamma X)$		
$I(X, Y) = I_0 \left[\frac{\sin(N\gamma X)}{\sin(\gamma X)} \right]^2$		
$I(X, Y) = 2I_0 (1 + \cos \gamma X) \text{sinc}^2 \alpha X$		
$I(X, Y) = I_0 \left[\frac{\sin(N\gamma X)}{\sin(\gamma X)} \right]^2 \text{sinc}^2 \alpha X$		

Exercice 1 Diffraction par 2 fentes ; cas de sources incohérentes

On considère le dispositif de la figure suivante : deux fentes lumineuses, de largeur a et de longueur très grande devant leur largeur, sont éclairées par deux sources distinctes (incohérentes). Leurs centres S_1 et S_2 sont distants de $2A$.



1. Déterminer la figure d'interférence sur un écran d'observation placé à une distance D très grande devant a et A , parallèlement au plan des fentes.
2. Que se passe-t-il si on remplace l'écran placé loin des fentes par un écran placé au foyer image d'une lentille convergente ?

Solution

CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté si on se souvient que des ondes issues de sources incohérentes n'interfèrent pas. Ici, les ondes issues d'une même fente interfèrent (c'est la diffraction par une fente) ; en revanche, deux ondes issues de deux fentes éclairées par des sources distinctes n'interfèrent pas. Dans ce dernier cas, l'intensité finale est simplement la somme des intensités résultantes pour chaque fente.

1. La configuration étant invariante par translation selon Oy , on se place dans le plan SOx . Les deux sources sont incohérentes ; l'intensité lumineuse observée sur l'écran est la somme des intensités dues à chacune des fentes. Dans la direction angulaire θ (avec $\theta \ll 1$), l'onde diffractée par une fente est décrite par le champ électrique :

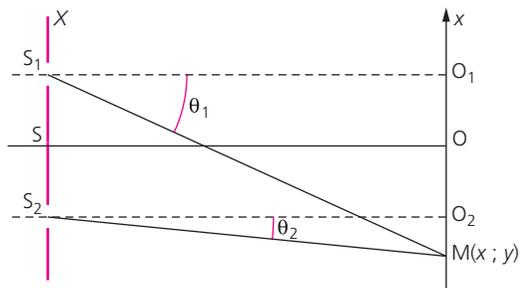
$$E(\theta) = E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}X\theta\right) dX = aE_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right)$$

Les intensités I_1 et I_2 associées aux deux fentes sont données par :

$$I_1(\theta) = I_2(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right)$$

Sur l'écran, pour la fente centrée en S_1 , l'angle θ s'écrit (voir la figure ci-contre) :

$$\theta_1 \approx (x - A)/D$$



Pour la fente centrée en S_2 , l'angle θ s'écrit :

$$\theta_2 \approx (x + A)/D$$

L'intensité résultante est la somme de I_1 et I_2 :

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = I_0 \left[\text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a x - A}{\lambda D} \right) + \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a x + A}{\lambda D} \right) \right]$$



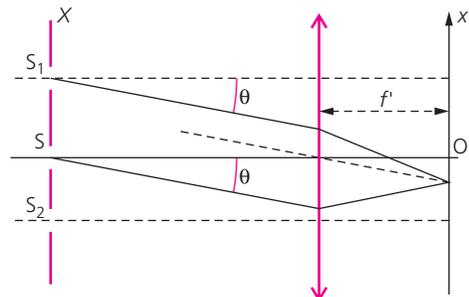
La figure ci-dessus illustre l'allure de l'intensité observée sur un écran placé loin des deux fentes diffractantes.

2. Lorsqu'on remplace l'écran placé loin des fentes par un écran disposé dans le plan focal d'une lentille convergente, les angles θ pour les deux sources s'expriment de la même façon (figure ci-contre) :

$$\theta \approx \frac{x}{f'}$$

L'intensité résultante est la somme de I_1 et I_2 :

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = 2I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a x}{\lambda f'} \right)$$





Cette différence entre les deux observations est aisée à comprendre si on se souvient que la figure de diffraction par une fente dans le plan focal d'une lentille convergente reste inchangée lorsqu'on translate la fente parallèlement à la lentille : ainsi, les deux fentes parallèles sont « vues » de la même façon dans le plan focal de la lentille. Au contraire, lorsqu'on effectue l'observation sur un écran loin de la fente, la figure de diffraction est translatée lorsqu'on translate la fente ; les deux fentes parallèles donnent donc deux images translatées.

Exercice 2 Diffraction par 2 fentes ; cas de sources cohérentes

On considère le dispositif de l'exercice précédent. Les fentes lumineuses sont éclairées par une même onde monochromatique.

1. Calculer la figure d'interférence sur un écran d'observation placé à une distance D très grande devant a et A , parallèlement au plan des fentes.
2. Que se passe-t-il si on remplace l'écran placé loin des fentes par un écran placé au foyer image d'une lentille convergente ?

Solution

CONSEIL : nous pouvons reprendre les résultats de l'exercice précédent ; cependant, les sources (les deux fentes) étant cette fois cohérentes, il faut d'abord sommer les champs électriques avant de calculer l'intensité résultante.

1. Il est important de préciser la référence de phase, que l'on prend identique pour les deux sources ; soit S le milieu de S_1S_2 la référence de phase. Dans la direction θ , l'onde

diffractée par la fente i ($i = 1$ et 2) est décrite par le champ électrique E_i :

$$E_1(\theta) = E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}X\theta\right) dX = aE_0 \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right)$$

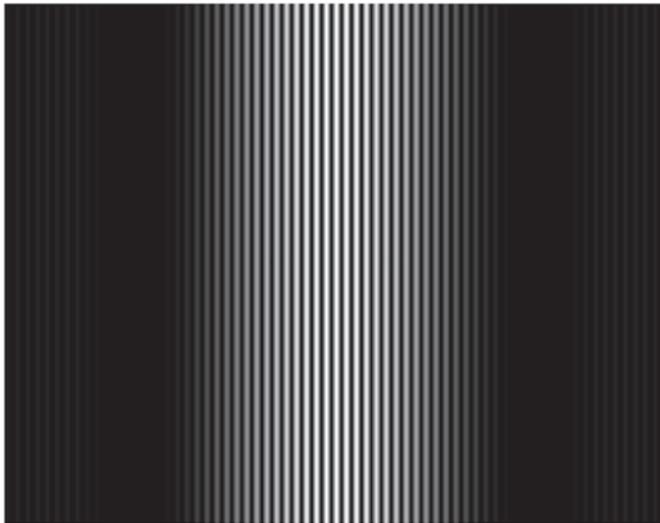
$$E_2(\theta) = E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}X\theta\right) dX = aE_0 \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right)$$

D'où le champ résultant :

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_1(\theta) + E_2(\theta) \\ &= aE_0 \left[\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \right] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right) \\ &= 2aE_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\theta\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\theta\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'intensité résultante dans la direction $\theta \approx \frac{x}{D}$:

$$I(x) = I_0 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{Ax}{D}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \frac{x}{D}\right) \right]^2$$



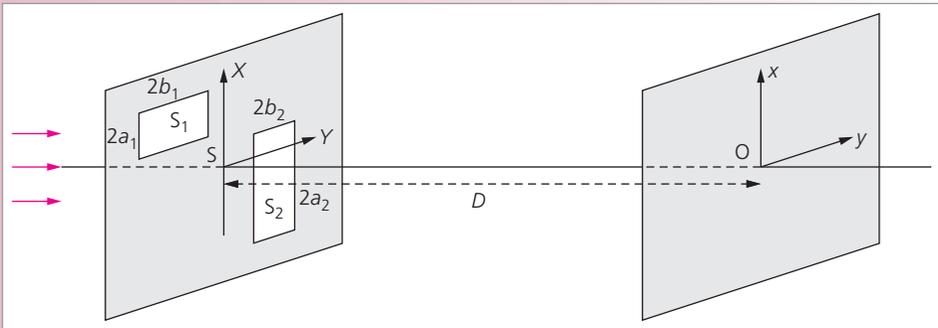
La figure ci-dessus montre l'allure de l'intensité observée sur un écran placé loin des deux fentes diffractantes.

Remarquons que nous retrouvons dans l'expression de la figure de diffraction le terme de diffraction par une fente (terme en sinus cardinal) et le terme d'interférence (en cosinus). Ce dernier terme était absent dans le premier exercice, puisque des sources incohérentes ne donnent pas lieu à des phénomènes d'interférence entre les ondes issues des deux fentes.

2. Lorsqu'on remplace l'écran placé loin des fentes par un écran situé dans le plan focal d'une lentille convergente, l'aspect de la figure de diffraction reste inchangé. En effet, l'expression de θ dépend cette fois d'une référence de phase fixe (pour nous celle au point S), de sorte que $\theta \approx x/D$ devient simplement $\theta \approx x/f'$.

Exercice 3 Diffraction par des motifs formés de deux rectangles

On considère deux fentes rectangulaires de côtés $2a_1$ et $2b_1$ (respectivement $2a_2$ et $2b_2$). Les deux rectangles, de centres S_1 et S_2 , sont contenus dans un plan éclairé en incidence normale par une lumière monochromatique.



On note les coordonnées de $S_1(X_1 ; Y_1)$ et de $S_2(X_2 ; Y_2)$.

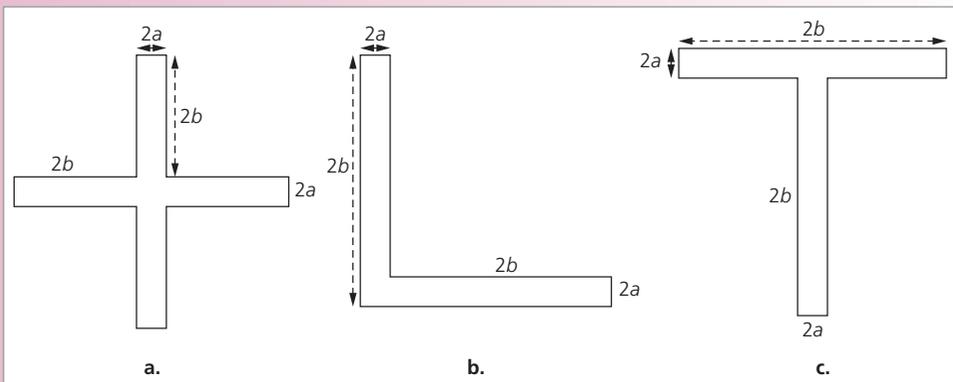
1. Au point M d'un écran, on note $dE_P(M)$ le champ électrique associé à l'ondelette issue d'un élément de surface ds centré autour d'un point P de la fente 1. Cet écran est placé à la distance D , très grande devant toutes les dimensions du problème (X_1, Y_1, a_1 et b_1). Calculer $dE_P(M)$ en fonction de PM , ds et du nombre d'onde k . Donner l'expression approchée de PM dans le terme de phase.

On considère une zone de l'écran éloignée du centre.

2. Donner une forme approchée de PM , puis de $dE_P(M)$ en fonction de D, X_1, Y_1, a_1 et b_1 .

3. En déduire l'expression du champ électrique résultant associé à chacune des deux fentes, ainsi que le champ résultant pour les deux fentes.

On considère maintenant les cas particuliers suivants :



4. Exprimer les champs électriques associés aux ondes diffractées dans les cas particuliers (a), (b) et (c) en considérant $a \ll b$. En déduire l'aspect de la figure de diffraction par une croix, un L et un T.

Solution

CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière dans le formalisme (il s'agit de sommer les champs résultant de la diffraction par deux fentes. En revanche, les calculs sont (un peu !) lourds.

1. D'après le principe de Huygens-Fresnel, l'ondelette sphérique, issue d'un point $P(X; Y)$ de la fente S_1 et diffractée dans une direction telle qu'elle atteigne le point $M(x; y)$ de l'écran, est associée au champ élémentaire :

$$dE_P(M) = E_0 \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{PM}}}{PM} ds$$

L'écran étant très éloigné des fentes, nous assimilons la distance PM (au dénominateur) à la distance D du plan des fentes à l'écran. Pour le terme de phase, nous calculons PM avec $\vec{PM} = \vec{PS}_1 + \vec{S}_1\vec{S} + \vec{SO} + \vec{OM}$. Avec $S_1(X_1; Y_1; 0)$, $S(0; 0; 0)$, $O(0; 0; D)$, $M(x; y; D)$ et P un point de la fente centrée en S_1 , il vient :

$$\vec{PM} = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec ξ variant entre $-a_1$ et a_1 et ζ variant entre $-b_1$ et b_1 . La distance D étant très grande devant toutes les autres longueurs (a_1 , X_1 et Y_1), la distance PM s'écrit donc :

$$PM = \sqrt{D^2 + (x - X_1 + \xi)^2 + (y - Y_1 + \zeta)^2}$$

$$PM \approx D \left(1 + \frac{(x - X_1 + \xi)^2}{2D^2} + \frac{(y - Y_1 + \zeta)^2}{2D^2} \right)$$

Notons que l'élément de surface ds autour du point P s'écrit $ds = d\xi d\zeta$.

2. Puisque la zone de l'écran que nous considérons est éloignée du centre, nous pouvons effectuer le développement limité suivant :

$$PM \approx D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{x(-X_1 + \xi)}{D^2} + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{y(-Y_1 + \zeta)}{D^2} \right)$$

$$PM \approx D \left(1 + \frac{OM^2}{2D^2} + \frac{x(-X_1 + \xi)}{D^2} + \frac{y(-Y_1 + \zeta)}{D^2} \right)$$

La contribution du point P au champ électrique s'écrit donc :

$$dE_P(x, y) = \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \exp \left[ik \left(\frac{-xX_1 - yY_1}{D} \right) \right] \exp \left[ik \left(\frac{x\xi + y\zeta}{D} \right) \right] d\xi d\zeta$$

3. Le champ électrique associé à l'onde diffractée par la fente 1 est la somme de toutes les contributions des points P :

$$E_1(x, y) = \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{-b_1/2}^{b_1/2} dE_P(x, y)$$

$$E_1(x, y) = \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \exp \left[ik \left(\frac{-xX_1 - yY_1}{D} \right) \right] \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \exp \left(ik \frac{x\xi}{D} \right) d\xi \\ \times \int_{-b_1/2}^{b_1/2} \exp \left(ik \frac{y\zeta}{D} \right) d\zeta$$

$$E_1(x, y) = a_1 b_1 \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \exp \left[ik \left(\frac{-xX_1 - yY_1}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa_1}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb_1}{2D} \right)$$

De même pour la fente 2 :

$$E_2(x, y) = a_2 b_2 \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \exp \left[ik \left(\frac{-xX_2 - yY_2}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa_2}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb_2}{2D} \right)$$

Le champ électrique pour les deux fentes est la somme des deux champs associés à chacune des fentes, avec :

$$E(x, y) = E_1(x, y) + E_2(x, y)$$

$$E(x, y) = \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \\ \times \left\{ a_1 b_1 \exp \left[ik \left(\frac{-xX_1 - yY_1}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa_1}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb_1}{2D} \right) + \right. \\ \left. + a_2 b_2 \exp \left[ik \left(\frac{-xX_2 - yY_2}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa_2}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb_2}{2D} \right) \right\}$$

Cette forme est un peu lourde, mais nous allons voir qu'elle se simplifie dans des cas particuliers !

4. Reprenons la fonction d'onde pour les cas particuliers suivants.

- Une croix : on a alors $S = S_1 = S_2$, soit $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0$ et $a_1 = b_2 = a$; $b_1 = a_2 = b$.

Le champ électrique prend la forme :

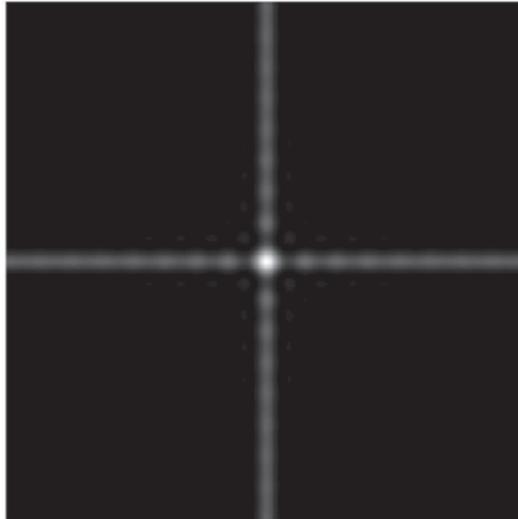
$$E(x, y) = 2ab \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \\ \times \left\{ \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb}{2D} \right) + \operatorname{sinc} \left(k \frac{xb}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{ya}{2D} \right) \right\}$$

L'hypothèse $a \ll b$ permet de remplacer les sinus cardinaux qui font intervenir la largeur a par l'unité (la fonction sinus cardinal devient une enveloppe très large, assimilable à une enveloppe de hauteur constante égale à 1). On en déduit l'expression de l'intensité résultante :

$$I(x, y) = \frac{I_0}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(k \frac{yb}{2D} \right) + \operatorname{sinc} \left(k \frac{xb}{2D} \right) \right]^2$$

où I_0 est l'intensité au centre de l'écran.

L'aspect de la figure de diffraction par une croix est donné sur la figure ci-dessous pour $b = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$; $\lambda = 600 \text{ nm}$ (l'écran est un carré de côté 10 mm).



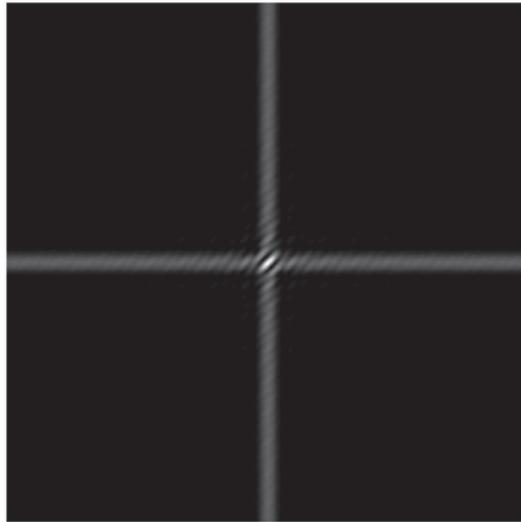
- Pour le L, on place le point S à l'intersection des deux barres du L. Avec $a \ll b$, on a donc : $X_1 = b$, $Y_1 = 0$, $a_1 = b$, $b_1 = a$ et $X_2 = 0$, $Y_2 = b$, $a_2 = a$, $b_2 = b$.

$$E(x, y) = \frac{E_0}{D} \exp \left[ik \left(D + \frac{OM^2}{2D} \right) \right] \\ \times ab \left\{ \exp \left[ik \left(\frac{-xb}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xb}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{ya}{2D} \right) + \right. \\ \left. + \exp \left[ik \left(\frac{-yb}{D} \right) \right] \operatorname{sinc} \left(k \frac{xa}{2D} \right) \operatorname{sinc} \left(k \frac{yb}{2D} \right) \right\}$$

Comme précédemment, on considère les sinus cardinaux contenant a comme égaux à l'unité, d'où l'intensité résultante :

$$I(x, y) = \frac{I_0}{4} \left[\text{sinc}^2\left(k\frac{xb}{2D}\right) + \text{sinc}^2\left(k\frac{yb}{2D}\right) + 2 \text{sinc}\left(k\frac{xb}{2D}\right) \text{sinc}\left(k\frac{yb}{2D}\right) \cos\left(k\frac{(x-y)b}{D}\right) \right]$$

On a représenté ci-dessous l'aspect de la figure de diffraction par un L pour $b = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$; $\lambda = 600 \text{ nm}$ (l'écran est un carré de côté 5 mm).



• Pour un T, on choisit S à l'intersection des deux barres du T. Avec $a \ll b$, on a donc : $X_1 = Y_1 = X_2 = 0, Y_2 = -b. a_1 = b_2 = a; a_2 = b_1 = b$;

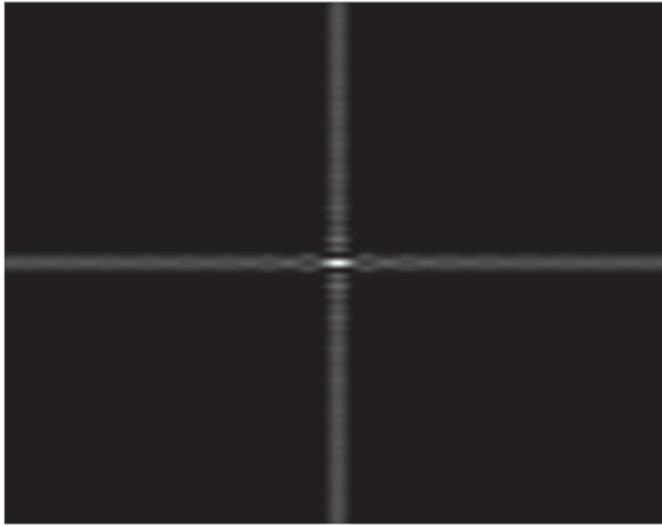
Le champ électrique prend la forme :

$$E(x, y) = \frac{E_0}{D} \exp\left[ik\left(D + \frac{OM^2}{2D}\right)\right] \\ \times ab \left\{ \text{sinc}\left(k\frac{xa}{2D}\right) \text{sinc}\left(k\frac{yb}{2D}\right) + \exp\left[ik\left(\frac{yb}{D}\right)\right] \text{sinc}\left(k\frac{xb}{2D}\right) \text{sinc}\left(k\frac{ya}{2D}\right) \right\}$$

D'où l'intensité résultante :

$$I(x, y) = \frac{I_0}{4} \left[\text{sinc}^2\left(k\frac{xb}{2D}\right) + \text{sinc}^2\left(k\frac{yb}{2D}\right) + 2 \text{sinc}\left(k\frac{xb}{2D}\right) \text{sinc}\left(k\frac{yb}{2D}\right) \cos\left(k\frac{yb}{D}\right) \right]$$

On a représenté l'aspect de la figure de diffraction par un T pour $b = 1 \text{ mm}$; $D = 1 \text{ m}$; $\lambda = 600 \text{ nm}$ (l'écran est un carré de côté 10 mm).



Exercice 4 **Diffraction par une répartition aléatoire de particules**

On considère un écran percé aléatoirement de petits disques de rayons identiques r . On éclaire cette plaque en incidence normale avec une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

On observe la figure de diffraction sur un écran E placé dans le plan focal image d'une lentille convergente, de distance focale f' .

1. Rappeler l'expression du champ électrique $E_0(X, Y)$ associé à l'onde diffractée (sur l'écran d'observation) par un seul trou circulaire T_0 dont le centre est en $O(0 ; 0)$.
2. Comment s'écrit le champ électrique $E_u(X, Y)$ associé à l'onde diffractée par un trou voisin T_u , translaté de T_0 par le vecteur $\vec{u}(a ; b)$ dans le plan de la plaque ? On exprimera E_u en fonction de E_0 .
3. En déduire l'expression du champ électrique correspondant à la distribution aléatoire de disques.
4. Écrire finalement l'éclairement observé sur l'écran ; on distinguera l'éclairement au foyer image F' de la lentille et en dehors du foyer image.
5. Conclure qu'en dehors du point F' , cette figure est analogue à celle que produirait une ouverture circulaire de rayon R ; on donnera l'expression de R en fonction de r .

Solution

CONSEIL : avant de résoudre cet exercice, nous vous conseillons de traiter le cas de la diffraction par un trou circulaire (exercice 7 du chapitre 6), la difficulté étant ici d'écrire le champ électrique résultant de la diffraction par une distribution aléatoire de trous circulaires.

1. Le trou T_0 diffracte la lumière et l'onde diffractée est décrite par le champ électrique $E_0(\theta)$ dans la direction θ :

$$E_0(v) = A(\pi r^2) \left(\frac{2J_1(v)}{v} \right)$$

où J_1 désigne la fonction de Bessel d'ordre 1 et $v = \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta$.

Dans le plan focal d'une lentille convergente, nous avons : $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{f'}$.

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\xi \cos \theta} d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^v \xi J_0(\xi) d\xi = v J_1(v)$$

2. Le trou T_u est identique au trou T_0 traduit du vecteur $\vec{u}(a; b)$. D'après les résultats de l'exercice 1 du chapitre 6, nous savons que le champ électrique E_u se déduit du champ électrique E_0 par la relation :

$$E_u(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (aX + bY)\right)$$

3. Le champ électrique résultant de la distribution des N disques s'écrit :

$$E(v) = \sum_{\vec{u}} E_u(v) = E_0(v) \sum_i \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right)$$

où la somme porte sur l'ensemble des vecteurs translation $\vec{u}(a_i; b_i)$ qui permettent de passer de T_0 à T_u .

4. L'intensité lumineuse I sur l'écran s'écrit $I \propto EE^*$, soit :

$$I(v) \propto E_0(v) E_0^*(v) \sum_i \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right) \sum_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_j X + b_j Y)\right)$$

$$I(v) = I_0(v) \sum_i \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right) \sum_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_j X + b_j Y)\right)$$

• Au foyer image F' , nous avons $X = Y = 0$, de sorte que $\exp\left(\pm i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right) = 1$.

Chaque somme vaut donc N , d'où :

$$I(F') = N^2 I_0(F')$$

Le point focal image apparaît N^2 fois plus lumineux qu'avec un seul trou.

• En dehors de F' , nous avons :

$$I(v) = I_0(v) \left[\sum_{i,j=i} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_j X + b_j Y)\right) + \sum_i \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_i X + b_i Y)\right) \sum_{j \neq i} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (a_j X + b_j Y)\right) \right]$$

où la première somme regroupe les termes correspondant à $i = j$ et la seconde les termes correspondant à $i \neq j$. La première somme représente N termes identiques et égaux à 1 ; la seconde somme contient $N(N - 1)$ termes. Cette dernière somme possède un nombre pair de termes, qu'on peut regrouper en $N(N - 1)/2$ termes conjugués, par exemple pour $i = 1, j = 2$: $\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f'}((a_1 - a_2)X + (b_1 - b_2)Y)\right)$ et pour $i = 2, j = 1$: $\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f'}((a_1 - a_2)X + (b_1 - b_2)Y)\right)$. Il vient finalement :

$$I(v) = I_0(v) \left[N + 2 \sum_i \sum_{j \neq i} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}((a_i - a_j)X + (b_i - b_j)Y)\right) \right]$$

La distribution de trous étant aléatoire, on a $\sum_i a_i = \sum_i b_i = 0$. Le terme de phase du cosinus varie donc aléatoirement, d'où :

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}((a_i - a_j)X + (b_i - b_j)Y)\right) = 0$$

Il vient donc :

$$I(M) = N I_0(M)$$

5. D'après la question précédente, la figure de diffraction est équivalente à celle obtenue avec un seul trou de rayon $R = r$. La figure de diffraction est cependant N^2 fois plus lumineuse au foyer image F' et N fois plus lumineuse ailleurs.

Exercice 5 Diffraction par des spores

En source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm, les deux premiers minima annulaires de diffraction donnés par une lame couverte de spores (petits disques qui se comportent comme des disques diffractants) ont pour rayons angulaires $i_1 = 1^\circ 30'$ et $i_2 = 2^\circ 45'$.

Calculer le diamètre des spores. On utilisera les résultats de l'exercice précédent.

Solution

CONSEIL : cet exercice est identique dans l'esprit à l'exercice précédent. La différence vient ici de la nature de l'objet diffractant : le disque diffractant est opaque alors qu'il était formé d'un trou dans l'exercice précédent. On se souviendra donc simplement du théorème de Babinet : hormis l'image géométrique de l'objet, la figure de diffraction est identique pour les deux objets.

Les rayons angulaires cités dans l'énoncé sont ceux qui annulent la fonction de diffraction d'une pupille circulaire simple (voir l'exercice précédent) :

$$I_0(v) = \left[2 \frac{J_1(v)}{v} \right]^2 \quad \text{avec} \quad v = 2\pi \frac{R}{\lambda} \sin i$$

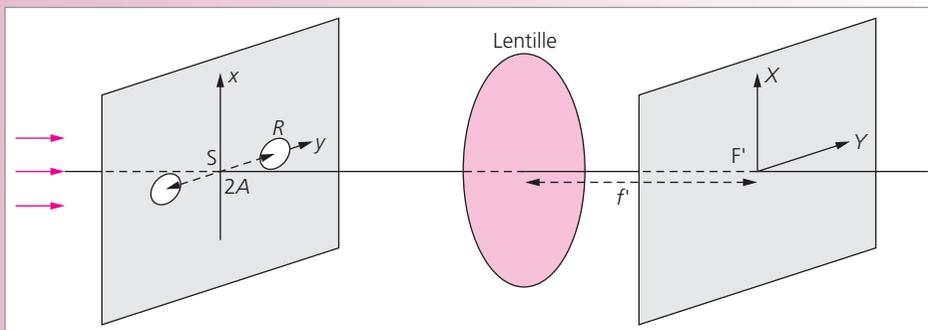
Les deux premiers minima sont obtenus pour $v_1 = 3,83$ et $v_2 = 7,02$ (voir l'exercice 7 du chapitre 6).

On trouve alors :

$$2R = \frac{3,83 \times \lambda}{\pi \sin i_1} = \frac{7,02 \times \lambda}{\pi \sin i_2} \approx 28 \mu\text{m}$$

Exercice 6 Diffraction par deux trous circulaires

On considère 2 trous circulaires de rayon R , distants de $2A$; l'ensemble est contenu dans un plan $(S; x, y)$ éclairé par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . On choisit S au milieu des deux trous.



1. Écrire le champ électrique associé à l'onde résultant de la diffraction par les deux trous.
2. En déduire l'expression de l'éclairement sur l'écran placé dans le plan focal image de la lentille.

Solution

1. Reprenons le résultat établi à l'exercice 4. Le champ électrique associé à l'onde diffractée par le disque de centre $S_1(A; 0)$ s'écrit :

$$E_1(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} AY\right)$$

avec $v = \frac{2\pi}{\lambda} R \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{f'}$ et $E_0(v) = A(\pi r^2) \left(\frac{2J_1(v)}{v}\right)$.

On a de même pour le champ associé à l'onde diffractée par le disque de centre S_2 :

$$E_2(v) = E_0(v) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda f'} AY\right)$$

d'où le champ électrique associé à l'onde résultante :

$$E(v) = E_0(v) \left[\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f'}AY\right) + \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda f'}AY\right) \right]$$

$$E(v) = 2E_0(v) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}AY\right)$$

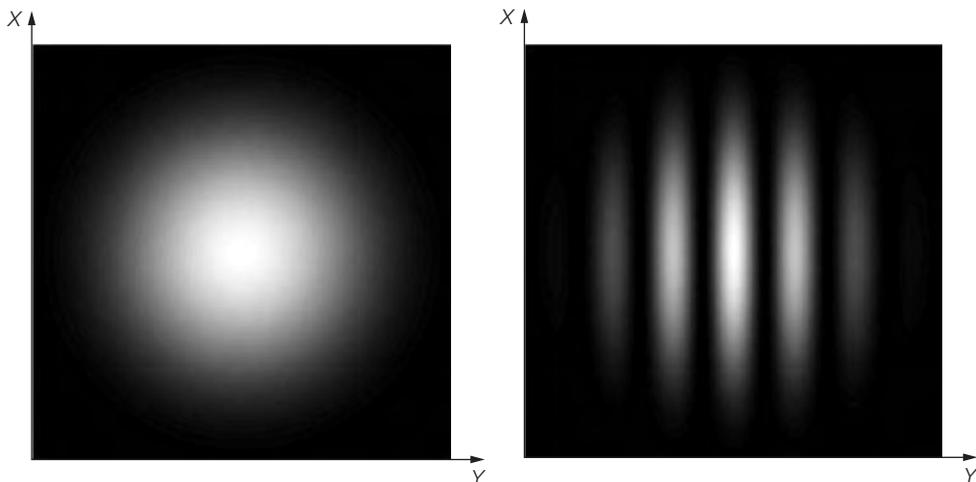
2. L'intensité lumineuse sur l'écran s'écrit $I(v) = K E(v)E(v)^*$, où K est une constante et $*$ désigne le complexe conjugué. Notons $I_0(v) = K E_0(v)E_0(v)^*$ l'intensité lumineuse produite par un seul trou circulaire. Alors :

$$I(v) = 4I_0(v) \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}AY\right)$$

Soit en posant I_0 l'intensité maximum, obtenue en $X = Y = 0$ (la fonction $2J_1(v)/v$ atteint son maximum, égal à 1, en $v = 0$) :

$$I(X, Y) = I_0 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}R\sqrt{X^2 + Y^2}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda f'}R\sqrt{X^2 + Y^2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'}AY\right) \right]^2$$

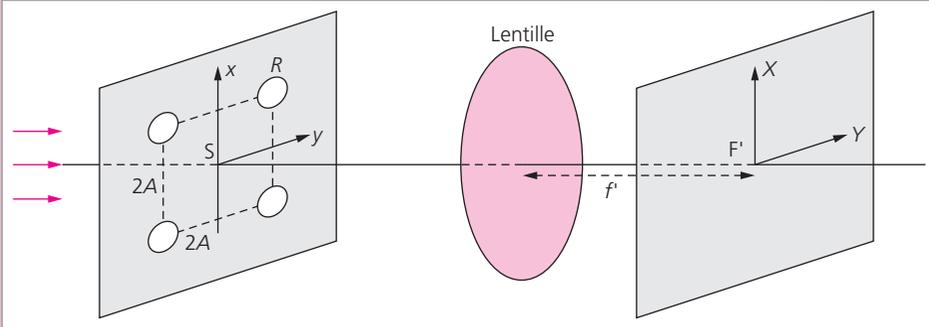
L'intensité lumineuse résultante est le produit de la fonction de diffraction par un trou circulaire, avec le terme d'interférence de deux ondes issues de deux trous distants de A .



On a représenté l'allure des figures de diffraction par un trou circulaire de rayon R (à gauche) et par deux trous circulaires de rayon R , distants de $3R$ (à droite).

Exercice 7 Diffraction par quatre trous circulaires

On considère quatre trous circulaires de rayon R placés aux sommets d'un carré de côté $2A$; l'ensemble est contenu dans un plan $(S; x, y)$ éclairé par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Le point S est le centre du carré.



On traitera l'exercice précédent avant d'aborder celui-ci.

Donner l'expression de l'intensité $I(X, Y)$ sur l'écran d'observation, placé dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Solution

Reprenons les résultats de l'exercice précédent. Le champ électrique associé à l'onde diffractée par le disque de centre S_i (où $i = 1, 2, 3, 4$) s'écrit :

$$E_1(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(X + Y)\right) \quad E_2(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(X - Y)\right)$$

$$E_3(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(-X + Y)\right) \quad E_4(v) = E_0(v) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(-X - Y)\right)$$

avec

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} R \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{f'} \quad \text{et} \quad E_0(v) = A(\pi r^2) \left(\frac{2J_1(v)}{v}\right)$$

D'où le champ électrique de l'onde résultante :

$$E(v) = E_0(v) \left[\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(X + Y)\right) + \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(X - Y)\right) \right. \\ \left. + \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(-X + Y)\right) + \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda f'} A(-X - Y)\right) \right]$$

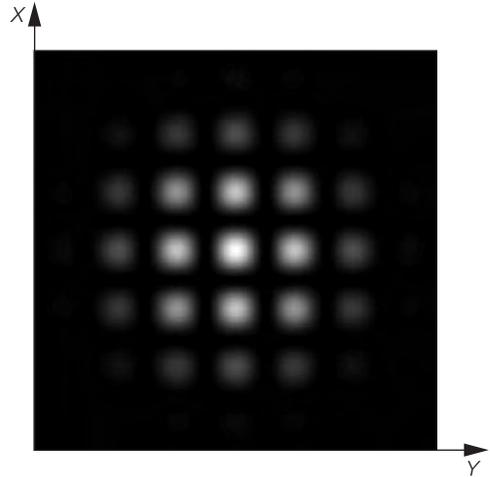
$$E(v) = 2E_0(v) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'} A(X + Y)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'} A(X - Y)\right) \right]$$

$$E(v) = 4E_0(v) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'} AX\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda f'} AY\right)$$

Posons I_0 l'intensité maximum sur l'écran, obtenue pour $X = Y = 0$. L'intensité lumineuse sur l'écran est donnée par :

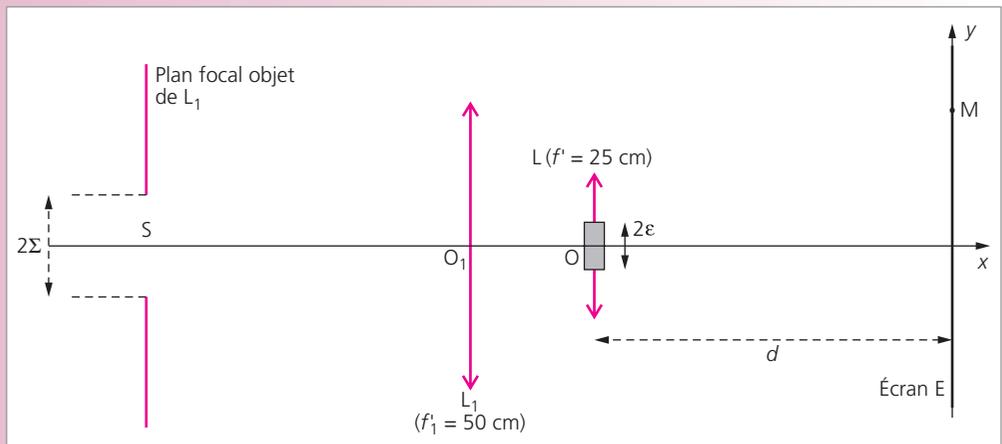
$$I(X, Y) = I_0 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda f'} R \sqrt{X^2 + Y^2} \right)}{\frac{2\pi}{\lambda f'} R \sqrt{X^2 + Y^2}} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda f'} AX \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda f'} AY \right) \right]^2$$

On a représenté ci-contre l'allure de la figure de diffraction par quatre trous circulaires de rayon R , disposés aux sommets d'un carré de côté $3R$.



Exercice 8 Billettes de Billet et fente source monochromatique large

On réalise la figure d'interférence des billettes de Billet avec le dispositif représenté ci-dessous.



La fente source S de largeur 2Σ est uniformément éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . S est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1 . La bilentille L est obtenue en coupant en deux une lentille convergente de distance focale f' , et en éloignant les deux demi-lentilles d'une distance égale à 2ε . On supposera dans la suite que ε est petit devant toutes les autres longueurs du problème. L'observation se fait sur un écran placé à la distance d de la bilentille (avec d grand devant Σ).

1. Calculer, à une constante près, l'intensité créée en $M(y)$ par la fente élémentaire de largeur $d\xi$, située à la distance ξ de l'axe. En déduire que l'intensité totale en M s'écrit :

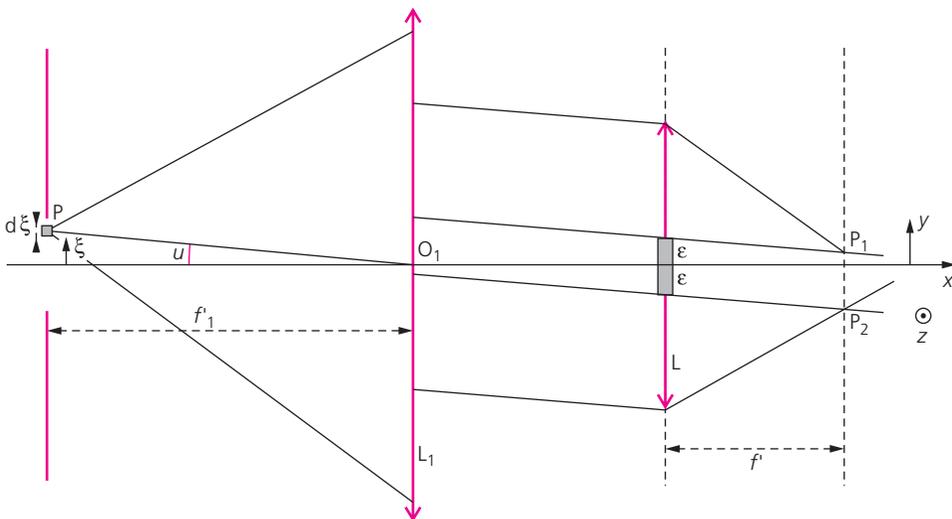
$$I(M) = \text{Cte} \left[1 + \text{sinc} \left\{ \frac{4\pi\varepsilon d\xi}{(d-f)f'_1\lambda} \right\} \cos \left\{ \frac{4\pi\varepsilon y}{(d-f)\lambda} \right\} \right]$$

2. Sur le champ d'interférence, cette intensité passe d'une valeur maximale I_{\max} à une valeur minimale I_{\min} . Calculer le contraste $\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

Solution

CONSEIL : la principale difficulté de cet exercice est de calculer la différence de marche entre deux rayons issus d'un point P de la fente source et atteignant un point M de l'écran, une des ondes ayant rencontré la demi-lentille du haut et l'autre onde la demi-lentille du bas. On calculera les déphasages entre ces deux ondes avant et après la bilentille.

1. Une bande source de largeur $d\xi$ et parallèle à Pz est assimilable à une source rectiligne ; chaque demi-lentille en donne une image rectiligne parallèle à Pz dans les conditions de Gauss (voir figure ci-dessous) : ces deux sources images centrées en P_1 et P_2 dans le plan focal image des demi-lentilles L sont cohérentes mais ne sont plus en phase.



Notons respectivement f' et f'_1 les distances focales des lentilles L et L_1 . Les ordonnées des images P_1 et P_2 de P dans le plan focal de la bivalentille sont :

$$y_{P_1} = \varepsilon - f'u = \varepsilon - \frac{f'}{f'_1}\xi \quad \text{et} \quad y_{P_2} = -\varepsilon - \frac{f'}{f'_1}\xi$$

(la distance entre les deux sources est égale à 2ε).

Dans la suite, on note P' le milieu de $[P_1P_2]$ et P'' le point de l'écran ayant même ordonnée que P' . La différence de marche de deux ondes issues de P et interférant en un point M du champ d'interférence s'écrit :

$$\delta(P, M) = [PP_2M] - [PP_1M] = \{[PP_2] - [PP_1]\} + \{[P_2M] - [P_1M]\} = \delta_0 + \delta_1$$

avec :

- $\delta_0 = [PP_2] - [PP_1]$

$$\approx P_2H = 2\varepsilon u$$

où u désigne l'angle que fait $P'x$

avec PO_1 , et $u \approx \tan u = \frac{\xi}{f'_1}$.

Finalement :

$$\delta_0 = 2\varepsilon u = 2\varepsilon \frac{\xi}{f'_1}$$

- $\delta_1 = [P_2M] - [P_1M]$

$$\approx P_2H' = 2\varepsilon \theta$$

où θ désigne l'angle que fait $P'x$ avec $P'M$. On a donc $\theta \approx \tan \theta = \frac{P''M}{P'P''}$. La distance $P'P''$ de l'axe des sources P_1 et P_2 à l'écran est égale à $(d - f')$. Avec $y_{P''} = -\frac{f'}{f'_1}\xi$, on a

$P''M = \frac{f'}{f'_1}\xi + y$. D'où finalement :

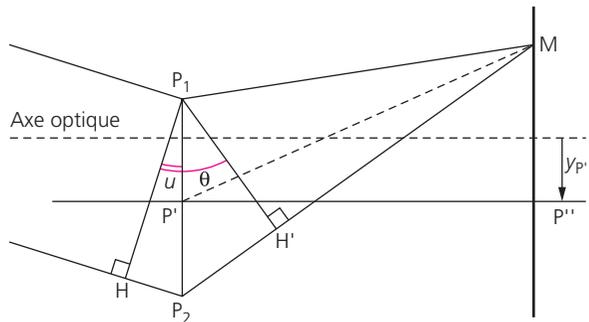
$$\delta_1 = \frac{2\varepsilon \left(y + \frac{f'}{f'_1}\xi \right)}{d - f'}$$

Le déphasage entre les deux ondes issues de P et interférant au point M s'écrit donc :

$$\delta(P, M) = 2\varepsilon \left[\frac{\xi}{f'_1} + \frac{\left(y + \frac{f'}{f'_1}\xi \right)}{d - f'} \right] = \frac{2\varepsilon}{(d - f')} \left[y + \frac{d}{f'_1}\xi \right]$$

L'intensité en M est, à un coefficient K près :

$$dI(M, \xi) = K \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P, M) \right) \right] d\xi$$



Intégrons sur la largeur 2Σ de la fente source :

$$I(y, z) = \int_{-\Sigma}^{+\Sigma} K \left[1 + \cos \left\{ \frac{4\pi\varepsilon}{(d-f')\lambda} \left(y + \frac{d}{f_1'} \xi \right) \right\} \right] d\xi$$

$$I(y, z) = 2K\Sigma \left[1 + \frac{\cos \left(\frac{4\pi\varepsilon y}{(d-f')\lambda} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{4\pi\varepsilon}{(d-f')} \frac{d\Sigma}{\lambda f_1'} \right)}{\frac{\varepsilon d (2\Sigma) 2\pi}{(d-f') \lambda f_1'}} \right]$$

$$I(y, z) = I_0 \frac{\left[1 + \cos \left(\frac{4\pi\varepsilon y}{(d-f')\lambda} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{4\pi\varepsilon}{(d-f')} \frac{d\Sigma}{\lambda f_1'} \right) \right]}{\left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{4\pi\varepsilon}{(d-f')} \frac{d\Sigma}{\lambda f_1'} \right) \right]}$$

où I_0 est l'intensité maximale, obtenue en $y = 0$.

On obtient ainsi le même terme que pour une fente infiniment fine, mais avec une visibilité :

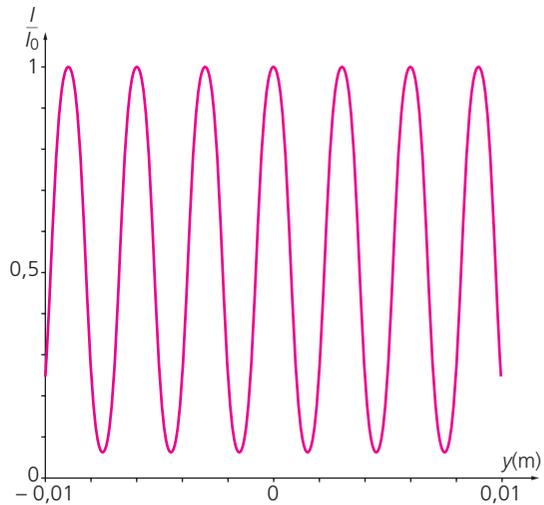
$$V = \operatorname{sinc} \left(\frac{4\pi\varepsilon d\Sigma}{(d-f') \lambda f_1'} \right)$$

On montre ci-contre $I(y)$ pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$, $\Sigma = 2 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ m}$, $f' = 1 \text{ m}$ et $f_1' = 10 \text{ m}$.

2. Le contraste Γ vaut :

$$\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |V|$$

$$= \left| \operatorname{sinc} \left(2\pi \frac{2\varepsilon d\Sigma}{(d-f) \lambda f_1} \right) \right|$$

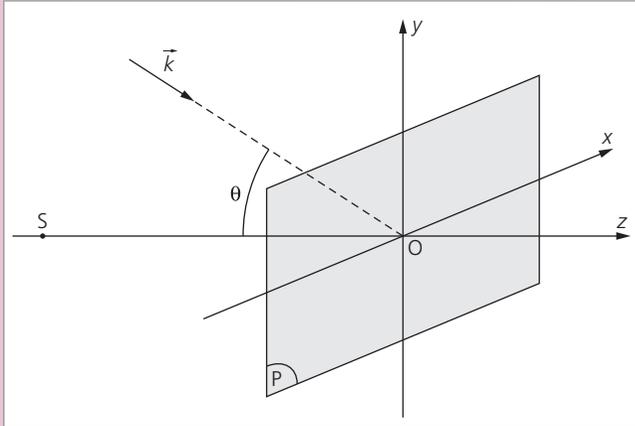


Exercice 9 Principe de l'holographie

Une source ponctuelle monochromatique (S) engendre, sur une plaque photographique (P), une onde associée au champ électrique :

$$E_1 = a_1(x, y) \exp [i(\varphi_1(x, y) - \omega t)] = \bar{a}_1(x, y) \exp(-i\omega t)$$

$\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$ est la phase de cette onde, et toutes les grandeurs sont définies dans le plan de la plaque qui coïncide avec xOy .



On admettra que dans des conditions d'utilisation bien choisies, la plaque une fois développée possède en chaque point $(x; y)$ un facteur de transmission $T(x, y) = T_0 - \beta I(x, y)$, où T_0 et β sont des constantes.

1. La source (S) éclairant seule la plaque, montrer qu'après développement $T(x, y)$ ne contient aucun renseignement sur φ_1 .

On considère maintenant une onde plane Σ_0 de même pulsation ω que (S), et dont le vecteur d'onde \vec{k} est dans le plan yOz et fait l'angle θ avec Oz . On désigne par E_0 le champ électrique associé à l'onde diffractée par Σ_0 dans le plan xOy de la plaque (P), soit :

$$E_0 = a_0(x, y) e^{i(\varphi_0(x, y) - \omega t)} = \bar{a}_1(x, y) e^{-i\omega t}$$

2. Montrer que a_0 est une constante, et donner l'expression de $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$ sachant que, par convention, $\varphi_0(0, 0) = 0$.

3. La plaque (P) est éclairée en même temps par la source (S) et par l'onde plane Σ_0 . Donner l'expression du champ $E = E_0 + E_1$ associé à l'onde résultante. En déduire le facteur de transmission $T(x, y)$ de la plaque une fois développée et montrer que $T(x, y)$ contient à présent un renseignement sur φ_1 . La plaque une fois développée constitue un hologramme.

4. L'hologramme obtenu à la question 3) est replacé dans le plan xOy et éclairé par Σ_0 seule, la source (S) étant supprimée. Quelle est l'expression du champ associé à l'onde transmise par l'hologramme ? Montrer qu'il se compose de plusieurs termes et que l'un d'eux permet de reconstituer E_1 .

5. Montrer que l'on peut généraliser le résultat précédent au cas où (S) est un objet éclairé, se comportant comme une source étendue. En déduire que l'on peut ainsi percevoir une sensation de relief. Indiquer sommairement la précaution à prendre.

6. Dans certaines conditions, l'onde associée à E_1 peut être reconstituée en éclairant l'hologramme par une onde différente de l'onde de référence Σ_0 utilisée pour l'enregistrement. On éclaire l'hologramme obtenu à la question 4) par une onde plane Σ'_0 d'amplitude a'_0 , de fréquence ω' et d'incidence θ' . Donner l'expression du champ E'_0 correspondant à Σ'_0 . Montrer que l'onde transmise par l'hologramme obtenu en 4), éclairé par Σ'_0 , permet encore de restituer l'onde associée à E_1 . Quelle est alors la relation entre θ , θ' , ω et ω' ?

Solution

1. Par hypothèse :

$$I = KE_1 E_1^* = K [a_1(x, y) e^{i(\varphi_1 - \omega t)}] [a_1(x, y) e^{-i(\varphi_1 - \omega t)}]$$

soit : $I = K a_1^2(x, y)$ et $T = T_0 - \beta a_1^2(x, y)$

La phase φ_1 n'intervient donc plus : le facteur de transmission T ne contient aucun renseignement sur φ_1 .

2. Pour une onde plane, l'amplitude a_0 est par définition constante.

L'origine de la phase étant choisie au point O, on a :

$$\varphi_0(x, y) = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} \quad \text{avec ici} \quad \vec{k} = k [\cos(\theta) \vec{z} - \sin(\theta) \vec{y}]$$

L'angle θ est positif (sur la figure de l'énoncé) et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

Ainsi :

$$\varphi_0(x, y) = -ky \sin \theta \quad (z = 0 \text{ sur la plaque (P)})$$

3. On éclaire la plaque (P) simultanément par la source (S) et par l'onde plane Σ_0 . On a alors :

$$E = E_0 + E_1 = a_0 e^{-i(ky \sin \theta + \omega t)} + a_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)}$$

$$I = KEE^* = a_0^2 + a_1^2 + a_0 a_1 \left[e^{i(\varphi_1 + ky \sin \theta)} + e^{-i(\varphi_1 + ky \sin \theta)} \right]$$

Le coefficient de transmission vaut alors :

$$T = T_0 - \beta [a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos(\varphi_1 + ky \sin \theta)]$$

Cette fois, T contient un terme en $\cos(\varphi_1 + ky \sin \theta)$.

4. On éclaire l'hologramme par Σ_0 seule. De manière générale, l'onde transmise (en $z = 0^+$) se déduit de l'onde incidente (en $z = 0^-$) par :

$$E_{\text{trans}} = TE_{\text{inc}} \quad (\text{par définition de } T)$$

Ici :

$$E_{\text{trans}} = (T_0 - \beta I) a_0 e^{i(\varphi_0 - \omega t)} = (T_0 - \beta I) a_0 e^{-i(ky \sin \theta + \omega t)}$$

On obtient différents termes :

- $[T_0 - \beta (a_0^2 + a_1^2)] a_0 e^{i(\varphi_0 - \omega t)}$: peu d'intérêt ici ;
- $-\beta a_0^2 a_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)}$: il permet de reconstituer S_1 à un coefficient d'amplitude près ; c'est ce terme qui rend possible l'observation de l'objet ;
- $-\beta a_0^2 a_1 e^{-i(\varphi_1 + 2ky \sin \theta) - i\omega t}$: ce dernier terme est plus compliqué. Le terme $e^{-i(\varphi_1 + \omega t)}$ correspond à une onde convergente. L'ensemble correspond donc à une image réelle déformée, située du côté des $z > 0$.

5. Si (S) est une source étendue, ce qui vient d'être énoncé peut être répété à condition que l'on puisse parler de l'onde S_1 résultante au point M du plan (P). Cela suppose donc que l'objet étendu soit éclairé en lumière cohérente. L'onde transmise contient alors toute l'information, et en particulier l'information relative au relief de l'objet.

6. On utilise cette fois une onde plane Σ'_0 telle que $E'_0 = a'_0 \exp[i(-k'y \sin \theta' - \omega't)]$. Le terme utile dans l'onde transmise par l'hologramme sera :

$$-\beta a_0 a'_0 a_1 \exp[i(\varphi_1 + (k \sin \theta - k' \sin \theta')y) - i\omega't]$$

On peut reconstituer E_1 , à un coefficient d'amplitude près, s'il est possible d'annuler le terme en y , c'est-à-dire ici :

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' \quad \text{donc} \quad \omega \sin \theta = \omega' \sin \theta'$$

En lumière blanche, un phénomène de dispersion gêne l'observation.

Remarque : il s'agit ici d'une approche simplifiée. La technique de l'holographie nécessite des cohérences spatiale et temporelle élevées. L'idée de l'holographie fut (re)découverte par le physicien anglais Gabor en 1947, mais ce n'est qu'en 1962 (après l'invention des lasers en 1960) que les américains Leith et Upanieks réussirent à obtenir les premières images holographiques. Différentes méthodes ont été proposées depuis. Les applications au traitement optique des signaux sont variées.

Exercice 10 Réseau de Fraunhofer à traits larges

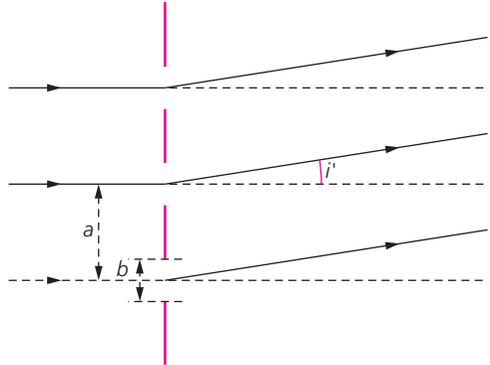
Un réseau plan comporte N bandes transparentes rectilignes parallèles, de même largeur b et de longueur très grande devant b , percées dans un écran opaque. Les axes de deux bandes consécutives sont séparés par une même distance a . On éclaire ce réseau par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ sous incidence normale.

1. Déterminer l'intensité diffractée à l'infini par ce réseau, dans la direction angulaire i' .
2. Discuter des situations particulières suivantes : $a = b$, puis $a = 2b$, puis $a = 3b$.

Solution

1. Appliquons l'expression générale pour un réseau plan : l'intensité résultante est le produit de la fonction I_i d'intensité pour le réseau formé d'un motif et de la fonction I_d caractéristique d'un motif du réseau :

$$I = I_d I_i$$



Avec les notations adaptées à la figure :

$$I_i = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)} \right]^2 \quad \text{fonction d'interférence}$$

$$I_d = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda} \sin i' \right] \quad \text{fonction de diffraction}$$

d'où l'expression de l'intensité résultante :

$$I(i') = I_0 \left[\frac{\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin i' \right)}{N} \frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)} \right]^2 \quad (1)$$

2. • Cas $a = b$

Il s'agit alors, physiquement, d'une fente unique de largeur $Na = Nb$. On obtient, avec (1) :

$$I(i') = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2 \left(N \frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right)^2} = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi Na}{\lambda} \sin i' \right]$$

• Cas $a = 2b$

Les zéros de la fonction de diffraction sont :

$$\sin i' = \alpha' = m \frac{\lambda}{b} = 2m \frac{\lambda}{a}$$

(la demi-largeur angulaire de la tache centrale vaut $2\lambda/a$), alors que les maxima principaux de la figure d'interférence vérifient : $\alpha' = \sin i' = K\lambda/a$. Il n'existe donc pas de maximum principal pair puisqu'ils correspondent aussi à des zéros de la fonction de diffraction ($I_d = 0$) ; dans la tache centrale de diffraction, il existe trois maxima principaux observables pour les ordres $K = -1$, $K = 0$ et $K = 1$.

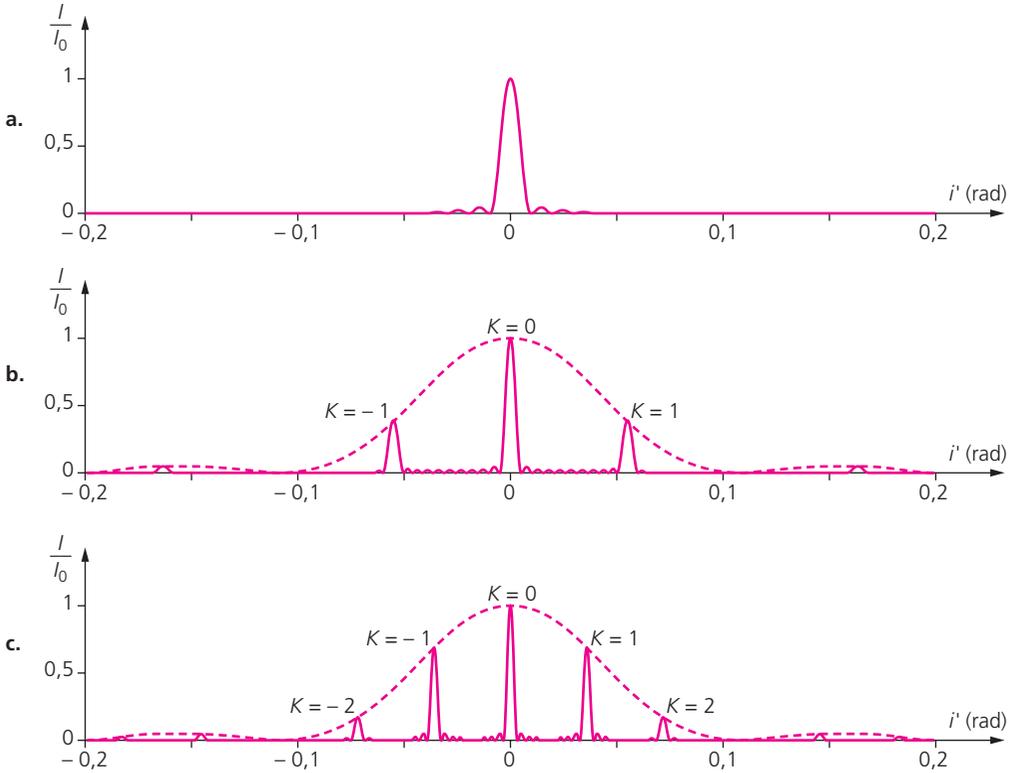
• Cas $a = 3b$

Les zéros de la fonction de diffraction sont :

$$\sin i' = \alpha' = m \frac{\lambda}{b} = 3m \frac{\lambda}{a}$$

Ils coïncident avec les maxima principaux de la fonction d'interférence multiples de 3 : $K = 3m$ [qui sont donc éteints !]. On observe donc dans la frange centrale cinq maxima principaux, associés aux ordres $K \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

On a représenté page suivante l'allure de l'intensité lumineuse $I(i')$ donnée par le réseau (a) avec $a = b$, (b) avec $a = 2b$ et (c) avec $a = 3b$. On a pris $\lambda = 600 \text{ nm}$; $N = 10$; $b = 5 \text{ }\mu\text{m}$. Les courbes en pointillés indiquent la fonction de diffraction I_d .



Exercice 11 Réseau de Fraunhofer

Un réseau de Fraunhofer est caractérisé par des intervalles opaques et transparents de même largeur.

Montrer qu'il ne donne que des maxima d'ordre impair, et qu'environ 40 % de l'intensité maximale se trouve dans chaque maximum du 1^{er} ordre.

Solution

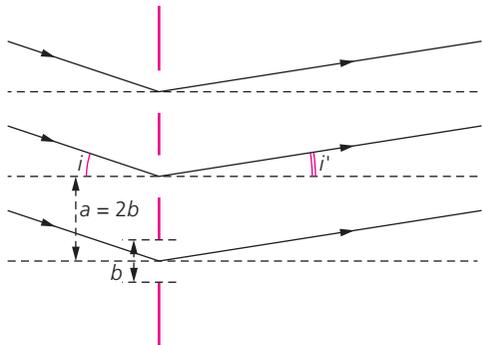
Pour un tel réseau de N fentes (ou N motifs), on a :

$$I = I_d I_i$$

avec :

$$I_d = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} b (\sin i' - \sin i) \right]$$

où i est l'angle d'incidence et i' l'angle indiquant la direction de diffraction considérée (i' varie de $-\pi$ à π avec i fixé). I_i est la fonction d'interférence pour le réseau formé d'un motif et I_d la fonction



caractéristique d'un motif du réseau :

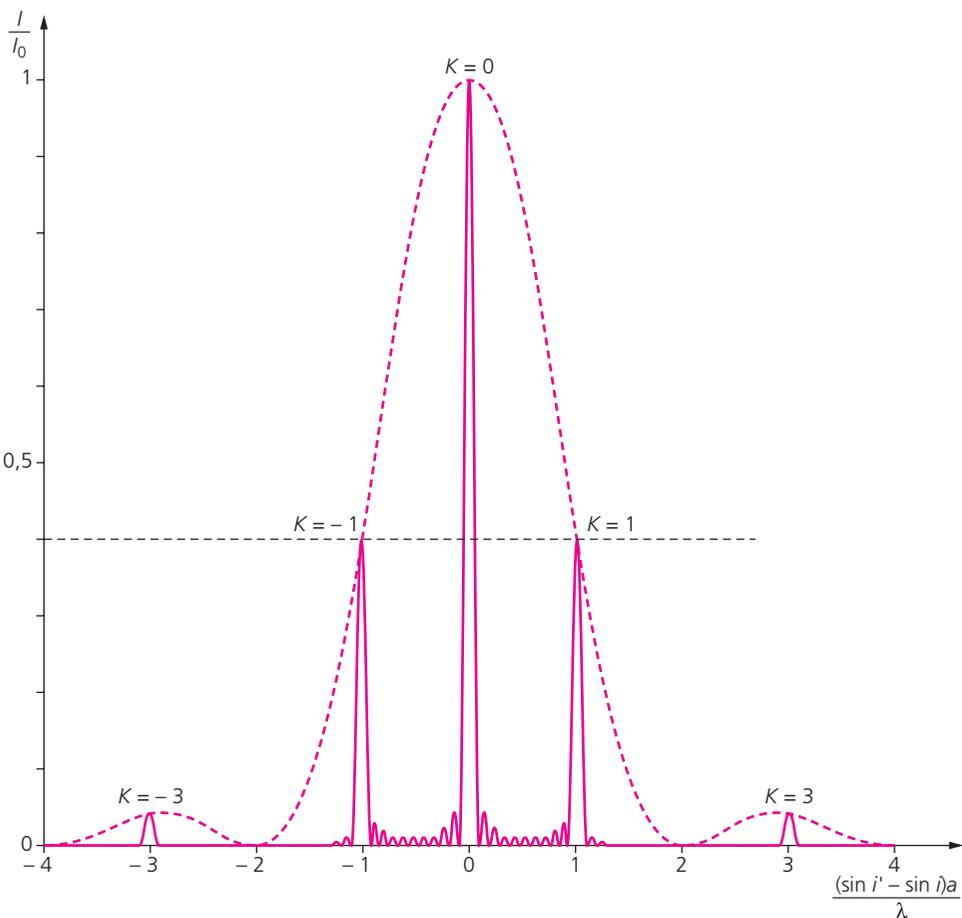
$$I_i = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i)$$

Les maxima de la fonction d'interférences vérifient :

$$\sin i'_K - \sin i = \frac{K\lambda}{a} = \frac{K\lambda}{2b} \quad (K \text{ entier}, a = 2b)$$

Les minima de la fonction de diffraction satisfont à :

$$\sin i' - \sin i = m \frac{\lambda}{b} \quad (m \text{ entier non nul})$$



On constate que si $K = 2p$ (ordre pair), alors $I = 0$. Par suite, seules sont visibles les raies associées aux maxima d'ordre impair (ainsi bien sûr que l'ordre $K = 0$, image géométrique de la source).

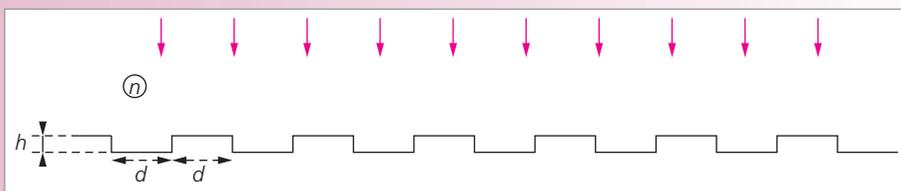
Pour $K = \pm 1$,

$$I_d = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} I_0 \approx 0,4 I_0$$

On a représenté page précédente l'allure de l'intensité lumineuse donnée par le réseau (la courbe en pointillés représente la fonction de diffraction). Ainsi, environ 40 % de l'intensité maximale se trouve dans chaque maximum du 1^{er} ordre.

Exercice 12 Réseau de phase

Une onde lumineuse plane éclaire en incidence normale un réseau de diffraction de phase dont le profil est représenté sur la figure ci-dessous.



Le réseau est tracé sur une lame de verre d'indice n .

1. Donner l'expression de l'intensité lumineuse recueillie dans la direction angulaire i' .
2. Déterminer la profondeur h des traits telle que l'intensité du maximum central soit nulle pour la longueur d'onde λ_0 .
3. Quel est alors l'angle de diffraction correspondant au premier maximum ?

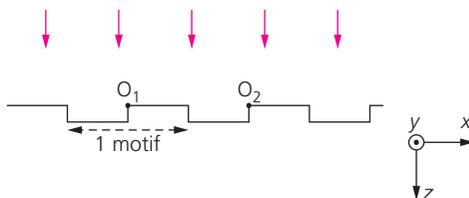
Solution

1. On étudie un réseau de phase en incidence normale. Le pas d'un motif est ici $a = 2d$ (un motif étant constitué d'un creux et d'un relief comme indiqué sur la figure ci-contre).

Supposons qu'il existe N motifs semblables (de longueur totale $L = Na = 2Nd$). L'intensité diffractée dans la direction d'angle i' par un tel réseau est :

$$I(i') = I_d(i') I_i(i')$$

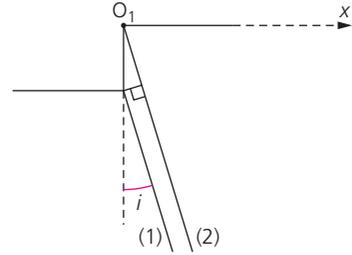
où I_i est la fonction d'intensité pour le réseau formé d'un motif, et I_d la fonction caractéristique d'un motif du réseau. L'expression de I_d n'est pas classique : calculons-la !



- Calcul du champ électrique E_1 associé à l'onde diffractée par le motif de centre O_1
On peut appliquer le principe de Huygens-Fresnel :

$$E_1 = A \left[\int_{-d}^0 e^{i\varphi} e^{-ikx \sin i'} dx + \int_0^d e^{-ikx \sin i'} dx \right]$$

avec : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (nb - b \cos i') \approx \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)b$
(i' est très petit : on peut comparer (1) et (2) sur la figure ci-contre). On trouve alors aisément :



$$E_1 = A \left[e^{i\varphi} \frac{(1 - e^{+ikd \sin i'})}{-ik \sin i'} + \frac{(e^{-ikd \sin i'} - 1)}{-ik \sin i'} \right]$$

Soit :

$$E_1 = 2Ad e^{i\frac{\varphi}{2}} \text{sinc} \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right] \cos \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$E_1 = Ad \text{sinc} \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right] \left[e^{i(\varphi + \frac{\pi d}{\lambda} \sin i')} + e^{-i\frac{\pi d}{\lambda} \sin i'} \right] \quad (1)$$

L'expression (1) permet de trouver :

$$I_1 = KE_1 E_1^* = 4KA^2 d^2 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right] \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$= I_{0(1)} \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right] \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' + \frac{\varphi}{2} \right)$$

et par suite :

$$I_d = I_0 \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right] \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Rappelons d'autre part que

$$I_i = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin \left(N \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin i' = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin i'$$

D'où l'expression de l'intensité lumineuse recueillie dans la direction i' :

$$I(i') = I_0 \left[\text{sinc} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' \right) \cos \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin i' + \frac{\pi b}{\lambda} (n-1) \right) \frac{\sin \left(N \frac{2\pi d}{\lambda} \sin i' \right)}{N \sin \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin i' \right)} \right]^2$$

2. Pour que l'intensité du maximum central ($i' = 0$) soit nulle, il faut (et il suffit) que $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 0$. Donc (pour λ_0) :

$$\frac{\pi}{\lambda_0} (n-1)b = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi$$

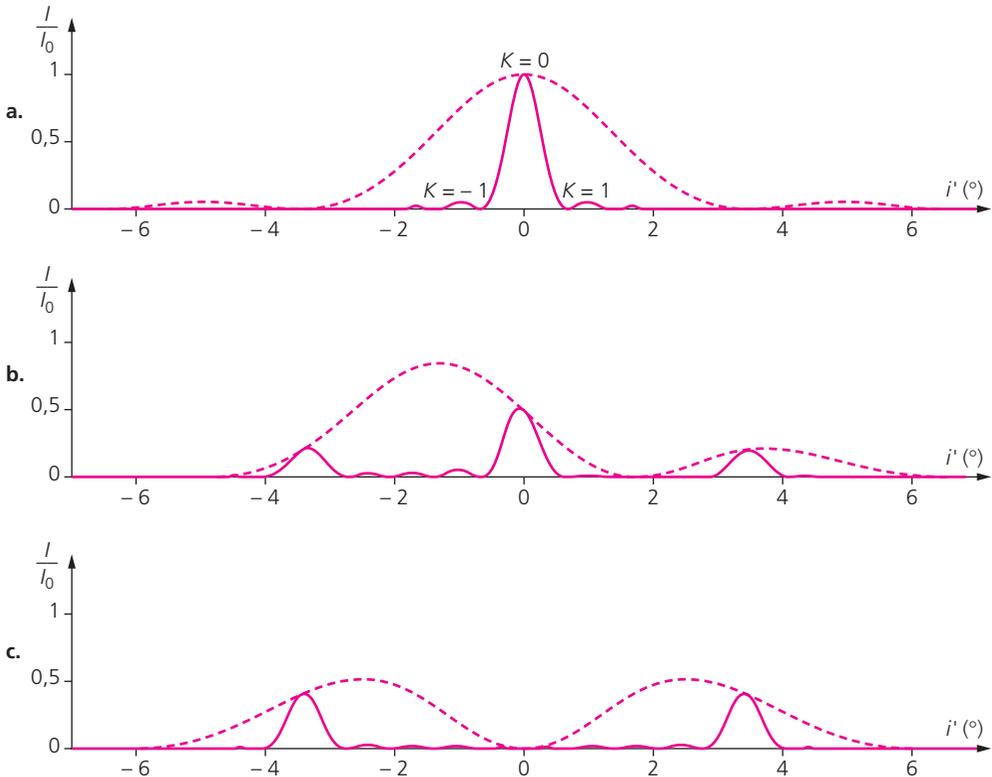
soit :

$$b_m = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0}{(n-1)}$$

Ce cas est illustré sur la figure (c) ci-après.

3. Les minima de I_d correspondent à $\sin i' = K \frac{\lambda}{d} = 2K \frac{\lambda}{a}$ et les minima de I_i à $\sin i' = K \frac{\lambda}{2d}$.

Seuls les maxima d'ordres ± 1 tels que $\sin i' = \pm \frac{\lambda}{2d} = \pm \frac{\lambda}{a}$ situés à l'intérieur de la tache centrale de diffraction auront une amplitude notable.

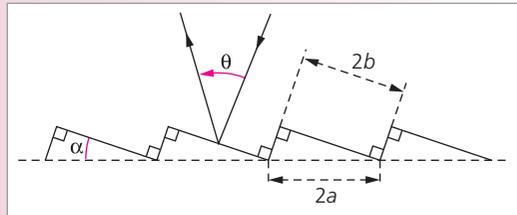


On a représenté l'allure de l'intensité I recueillie dans la direction i' (les courbes en pointillés indiquent la fonction de diffraction I_d) pour (a) $b = \frac{m}{(n-1)}\lambda$; (b) $b = \frac{m+1/4}{(n-1)}\lambda$, et (c) $b = \frac{m+1/2}{(n-1)}\lambda$ (extinction de la frange centrale).

Les paramètres sont les suivants : $m = 100$, $\lambda = 600 \text{ nm}$, $n = 1,5$, $N = 5$ et $d = 5 \text{ }\mu\text{m}$.

Exercice 13 Réseau échelette

Un réseau échelette est constitué de N bandes réfléchissantes planes parallèles, de longueur infinie, de même largeur $2b$ et décalées perpendiculairement les unes par rapport aux autres d'une même distance $2a$.



Le matériau placé entre deux bandes consécutives ne réfléchit pas la lumière. On appelle α l'angle entre les bandes réfléchissantes et la direction d'ensemble du réseau.

On éclaire le réseau normalement à la direction des bandes réfléchissantes par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ). On étudie la lumière diffractée dans un plan de section principale.

1. Déterminer l'amplitude diffractée par une bande dans une direction angulaire θ .
2. En déduire l'amplitude et l'intensité diffractées (dans la direction θ) pour l'ensemble du réseau.
3. On observe les rayons diffractés dans une direction voisine de celle de l'onde incidente. On suppose que cette direction est pratiquement celle d'un maximum principal. Montrer que l'ordre associé est $p_0 = 3$, avec les données suivantes :

$$\alpha \approx 10^\circ \quad a = 3 \text{ }\mu\text{m} \quad \lambda = 656 \text{ nm}$$

4. Déterminer α pour que la direction de l'onde incidente soit rigoureusement celle du maximum principal d'ordre $p_0 = 3$. Montrer qu'alors les maxima principaux d'ordres différents de p_0 sont pratiquement éteints. On supposera θ petit.

Solution

Remarquons avant de commencer que a , b et α sont liés par la relation : $b = a \cos \alpha$

1. Le calcul du champ électrique associé à l'onde diffractée par une bande de largeur $2b$ est, d'après le principe de Huygens-Fresnel :

$$E = A \int_{-b}^{+b} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \theta} dx = 2bA \operatorname{sinc} \left[\frac{2b\pi}{\lambda} \sin \theta \right]$$

2. L'intensité diffractée par l'ensemble du réseau s'obtient directement :

$$I = I_i I_d$$

où I_i est l'intensité lumineuse caractéristique d'un réseau :

$$I_i = \left[\frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \overrightarrow{O_j O_{j+1}}$$

et I_d l'intensité lumineuse que produirait un seul motif du réseau :

$$I_d = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{2b\pi}{\lambda} \sin \theta \right]$$

avec les notations de la figure ci-contre.

• Calculons ϕ . Avec $\overrightarrow{O_j O_{j+1}} = 2a\vec{x}$, $\vec{u} \cdot \vec{x} = \sin \alpha$ et $\vec{u}' \cdot \vec{x} = \sin(\theta - \alpha)$, il vient :

$$\phi = -\frac{4\pi}{\lambda} a [\sin \alpha + \sin(\alpha - \theta)]$$

L'intensité lumineuse dans la direction θ s'écrit finalement :

$$I(\theta) = I_0 \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) \frac{\sin \left(N \frac{\phi(\theta)}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\phi(\theta)}{2} \right)} \right]^2$$

avec

$$\phi = -\frac{4\pi}{\lambda} a [\sin \alpha + \sin(\alpha - \theta)]$$

3. Les maxima principaux satisfont à $\frac{\phi}{2} = -m\pi$, soit

$$\sin \alpha + \sin(\alpha - \theta) = \frac{m\lambda}{2a}$$

Le nombre entier m s'identifie à p_0 pour $\theta \approx 0$ (p_0 entier), soit $\frac{4a}{\lambda} \sin \alpha \approx p_0$.

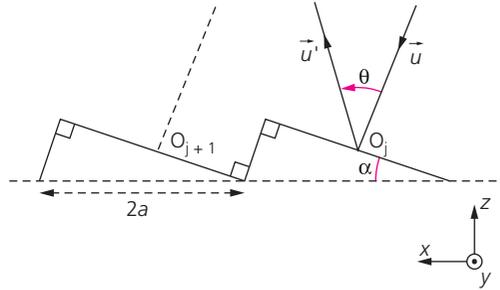
Avec $\frac{4a}{\lambda} \sin \alpha = 3,18$, on a $p_0 = 3$.

4. L'égalité rigoureuse est obtenue pour $\frac{4a}{\lambda} \sin \alpha = p_0 = 3$, soit $\sin \alpha = 0,164$ et :

$$\alpha = 9^\circ 26' \quad (\text{angle de blaze})$$

Pour θ nul, I_d est maximale et vaut 1. Lorsque θ s'écarte de 0, I_d décroît. Supposons que θ soit assez faible pour les maxima voisins de $\theta = 0$. Alors :

$$\sin(\alpha - \theta) \approx \sin \alpha - \theta \cos \alpha$$



et pour les maxima :

$$\frac{2a}{\lambda} [2 \sin \alpha - \theta \cos \alpha] = m \quad \text{soit} \quad \frac{2a}{\lambda} \theta \cos \alpha = p_0 - m$$

(avec $\lambda \ll 2a$, ce qui est supposé dans l'énoncé).

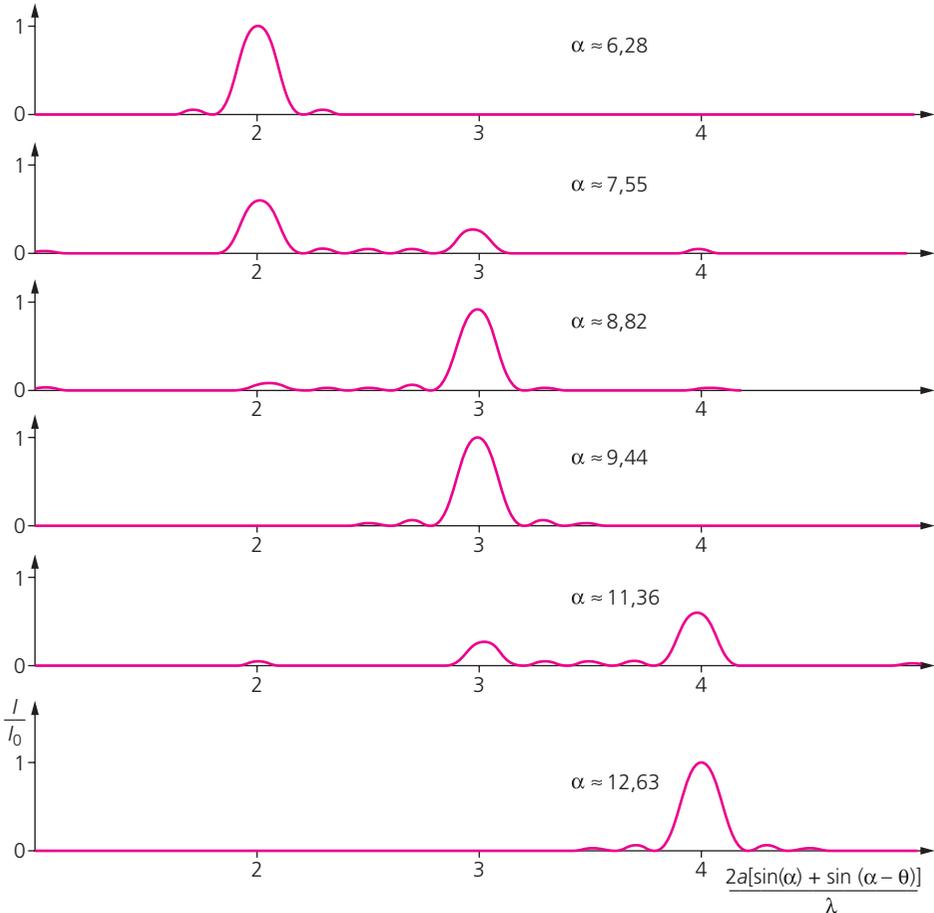
En outre, $a \cos \alpha = b$, donc $\frac{2b}{\lambda} \theta = p_0 - m$ est entier.

Ainsi :

$$I_d = \text{sinc}^2 \left[\frac{(2b) \pi}{\lambda} \sin \theta \right] = \text{sinc}^2 [(p_0 - m) \pi] = 0 \quad (\text{avec } p_0 - m \neq 0)$$

On en déduit que les maxima principaux d'ordres différents de p_0 sont éteints. L'intérêt est que toute l'intensité lumineuse est diffractée dans l'ordre p_0 : c'est l'effet de blaze.

Voici la figure d'interférence observée dans la direction θ en faisant varier l'angle α (on a représenté en abscisse une fonction de θ : $f(\theta) = [\sin \alpha + \sin(\alpha - \theta)]2a/\lambda$ pour $\lambda = 656 \text{ nm}$; $N = 5$; $a = 3 \text{ }\mu\text{m}$. L'effet de blaze est observé pour $\alpha = \arcsin(p\lambda/4a)$, avec p entier.

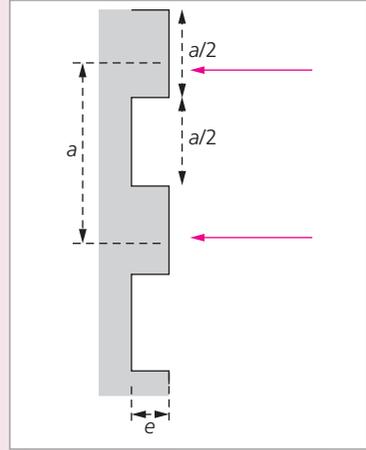


Exercice 14 Réseau créneau par réflexion

On considère le réseau de la figure ci-contre : l'incidence est quasi normale ($i \ll 1$), les bandes rectangulaires sont très longues, de largeur $\frac{a}{2}$, décalées alternativement de e .

Montrer qu'on peut choisir e de telle sorte que seuls les ordres $+1$ et -1 soient visibles.

Discuter.



Solution

On s'intéresse à l'onde diffractée par le réseau, le m -ième motif du réseau étant formé par l'ensemble en creux (de centre B_m) et en relief (de centre A_m).

On supposera que i est suffisamment petit (de même que e) de sorte que les parties en relief ne perturbent pratiquement pas la figure de diffraction des parties en creux.

Un trait (bande) réfléchissant en relief de centre A_m de largeur $\frac{a}{2}$ et de longueur $l \gg a$ diffracte une onde dans la direction i . Le champ électrique qui lui est associé s'écrit :

$$E_{A_m}(i) = A \frac{a}{2} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi \left(\frac{a}{2} \right)}{\lambda} \sin i \right] e^{i\varphi_{A_m}(i)}$$

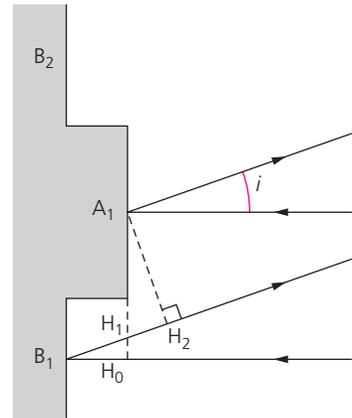
$\varphi_{A_m}(i)$ est la phase, dans la direction angulaire i , de l'onde diffractée par A_m relativement à une origine arbitraire (ou non précisée).

Un trait (bande) réfléchissant en creux de centre B_m de largeur $\frac{a}{2}$ diffracte une onde dans la direction i . Le champ électrique qui lui est associé s'écrit :

$$E_{B_m}(i) = A \frac{a}{2} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi \left(\frac{a}{2} \right)}{\lambda} \sin i \right] e^{i\varphi_{B_m}(i)}$$

Le retard de phase $\varphi(i) = \varphi_{B_m}(i) - \varphi_{A_m}(i)$ se calcule grâce à la figure ci-dessus :

$$\varphi(i) = \varphi_{B_m}(i) - \varphi_{A_m}(i) = \frac{2\pi}{\lambda} (H_0 B_m + B_m H_2)$$



avec

$$H_0 B_m = e \quad \text{et} \quad H_2 B_m = \frac{e}{\cos i} + \left(\frac{a}{2} - e \tan i \right) \sin i$$

Donc :

$$\varphi(i) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{a}{2} \sin i + e(1 + \cos i) \right] \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{a}{2} i + 2e \right]$$

L'onde diffractée par un motif de largeur a (un motif est formé d'un creux et d'un relief) est ainsi :

$$E_m(i) = E_{A_m}(i) + E_{B_m}(i) \approx \frac{Aa}{2} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{2\lambda} i \right] e^{i\varphi_{A_m}(i)} [1 + e^{i\varphi(i)}]$$

Le réseau est constitué de N motifs identiques de longueur $L = Na$. Notons :

$$\psi = \varphi_{A_{m+1}}(i) - \varphi_{A_m}(i) \approx -\frac{2\pi}{\lambda} ai$$

Le calcul complet donne :

$$E(i) = \sum_{m=1}^N E_m(i) \approx \frac{Aa}{2} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{2\lambda} i \right] \sum_{m=1}^N \exp(i(m-1)\psi) [1 - e^{i\varphi(i)}]$$

De sorte que :

$$I(i) = KEE^* = I_0 \left[\underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{2} i + 2e \right) \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{2\lambda} i \right)}_{\text{(I)}} \underbrace{\frac{\sin \left(N \frac{\pi a}{\lambda} i \right)}{N \sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} i \right)}}_{\text{(II)}} \right]^2$$

Le terme (I) représente la fonction de diffraction par un motif et le terme (II) est le terme d'interférence des ondes issues des N motifs. L'aspect général dépend en particulier de la valeur de φ , donc de e .

Les maxima principaux d'interférence correspondent à $i = K \frac{\lambda}{a}$ (K entier). Pour ces valeurs :

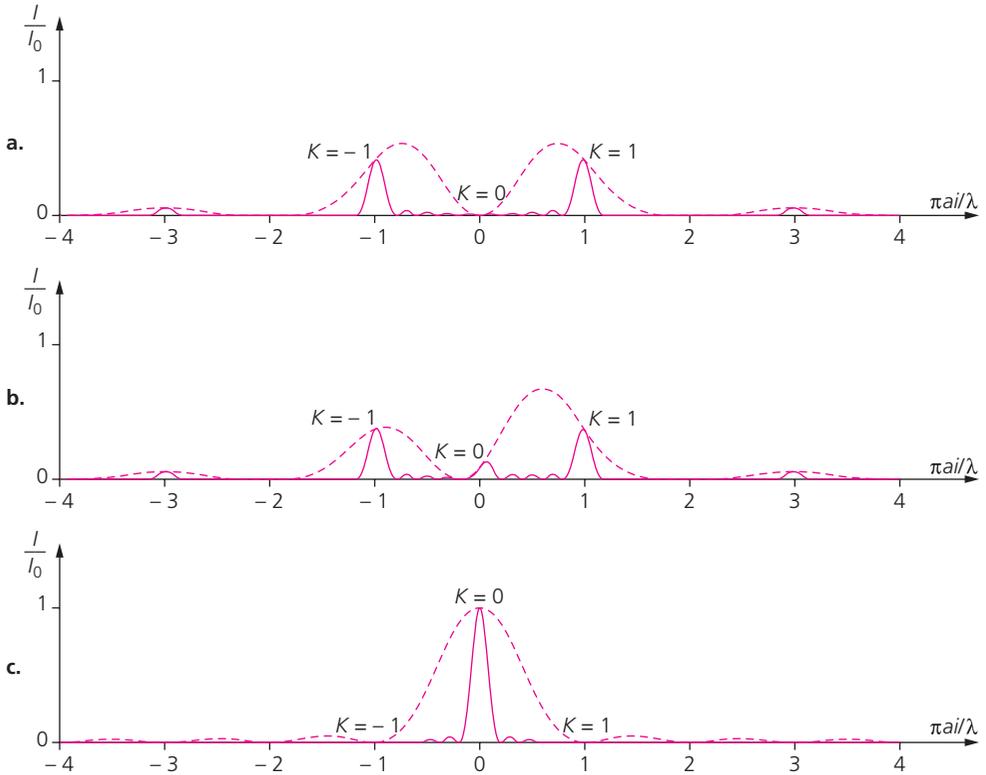
$$I_d = I_0 \left[\cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} + K \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(K \frac{\pi}{2} \right) \right]^2$$

Seuls les ordres $K = 0$ et $K = \pm 1$ appartiennent à la partie centrale du « $\operatorname{sinc} []$ » et sont a priori visibles (les ordres $K = \pm 3$ sont également observables, mais restent beaucoup moins lumineux).

Il suffit alors d'annuler l'ordre 0 pour répondre à la question, ce qui est réalisé si $\frac{2\pi e}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, soit :

$$e = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

Cela est vrai en particulier avec une épaisseur $1/4$ d'onde. La figure suivante (b) illustre le cas de l'épaisseur $\frac{1}{4}$ d'onde.



Voilà l'allure de l'intensité lumineuse I/I_0 recueillie dans la direction i' pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, $N = 5$, $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$ pour différentes valeurs de e : (a) $e = \lambda/4 = 0,15 \text{ }\mu\text{m}$, (b) pour une valeur non « remarquable » de $e = 0,18 \text{ }\mu\text{m}$ et (c) $e = \lambda/2 = 0,3 \text{ }\mu\text{m}$. On a représenté I/I_0 en fonction de $\pi a i / \lambda$; la courbe en pointillés indique l'enveloppe de l'intensité donnée par la fonction I_d/I_0 .

Imprimé en France par Chirat – 42540 Saint-Just-la-Pendue
N° d'imprimeur : 7295 - N° d'édition : 003032-01
Dépôt légal : Février 2003