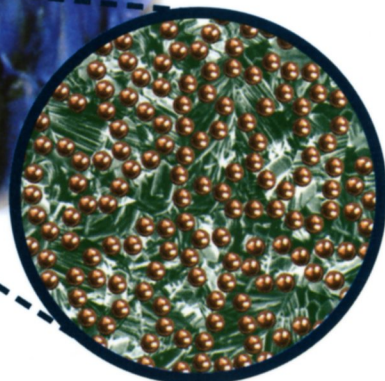


Rhéophysique des pâtes et des suspensions

**Philippe Coussot
Christophe Ancey**





Rhéophysique des pâtes et des suspensions

Philippe Coussot
Christophe Ancey



7, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

ISBN : 2-86883-401-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les " copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective ", et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, " toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite " (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences 1999

Avant-propos

De nombreux matériaux utilisés dans l'industrie lors de la préparation ou la mise en œuvre d'un produit sont des suspensions au sens large, c'est-à-dire des mélanges d'un fluide et de particules solides d'une taille caractéristique supérieure à 1 nm environ. Il s'agit par exemple des peintures, des encres, des produits cosmétiques, du béton frais, des désherbants ou encore des produits alimentaires tels que les compotes, les soupes, les sauces, etc. La composition de ces suspensions résulte d'un compromis entre, d'une part, le besoin de les rendre suffisamment fluides pour faciliter leur manipulation et d'autre part, le désir de maximiser la fraction solide qui constitue en général le matériau actif lors de la mise en œuvre. L'un des problèmes-clés consiste alors à être capable de prédire au mieux les caractéristiques des écoulements de suspensions en fonction de leurs composants (caractéristiques du liquide interstitiel, granulométrie, charges à la surface des particules, pH, etc.). Cet ouvrage a précisément pour objectif de fournir des outils de base en vue d'une meilleure compréhension des liens entre les propriétés mécaniques des suspensions concentrées et leur structure interne. Alors que les dissipations d'énergie de type hydrodynamique sont prédominantes au sein des suspensions diluées, divers types d'interaction entre particules peuvent jouer un rôle considérable vis-à-vis du comportement des pâtes ou des suspensions concentrées. Dans ce cadre, les propriétés physiques des particules et leurs comportements collectifs s'avèrent déterminants. Ces caractéristiques font de la rhéologie des suspensions concentrées un domaine aux frontières de la mécanique des fluides, de la mécanique des sols, de la physique des milieux granulaires et de la matière divisée.

Nous avons essayé de présenter dans cet ouvrage un cadre unifié, quoique simplifié, permettant une compréhension des liens entre le comportement macroscopique et les phénomènes physiques au niveau mésoscopique pour les suspensions concentrées réelles, dont les caractéristiques physiques (granulométrie, interactions, etc.) sont complexes.

Dans le premier chapitre, nous proposons un rappel des bases de mécanique des milieux continus et de rhéologie, en détaillant l'origine physique de ces fondements. On passe aussi en revue les principaux types de comportement mécanique des fluides et leur origine physique probable en s'appuyant sur un schéma conceptuel général des fluides.

Le second chapitre concerne la rhéophysique des suspensions concentrées. Nous mettons en valeur le rôle crucial des interactions entre particules et la correspondance entre un type d'interaction prédominant au cours de l'écoulement et un type de comportement mécanique. Ceci nous amène à distinguer deux familles de suspensions concentrées : les suspensions ordinaires (molles) formées de particules en interaction

« molle » (colloïdale ou hydrodynamique) et les suspensions granulaires formées de particules en interaction « dure » et qui forment un réseau de contacts (direct ou lubrifié) d'un bout à l'autre de l'échantillon.

Les suspensions granulaires (dures) ont des propriétés mécaniques très particulières qui résultent du caractère non local de leur comportement, c'est-à-dire que le mouvement d'une particule donnée est assez largement conditionné par le mouvement de l'ensemble des autres particules en contact avec la première par l'intermédiaire du réseau. Ainsi ces suspensions granulaires méritent d'être étudiées de manière spécifique (chap. 3), notamment en s'appuyant sur des connaissances issues du domaine de la mécanique des sols ou de la physique des milieux granulaires.

Le quatrième chapitre aborde en détail le problème fondamental de la détermination expérimentale du comportement des suspensions concentrées. En particulier nous nous attachons à montrer la difficulté de réaliser des mesures pertinentes, c'est-à-dire reflétant le comportement du matériau homogène et constant, avec des suspensions concentrées.

Les chapitres 5, 6 et 7 s'intéressent enfin au comportement de trois types de matériaux qui permettent de passer en revue une large gamme de phénomènes physiques résultant d'évolutions et de structures internes très différentes : le magma, la neige et la boue. Les raisonnements proposés pour expliquer les comportements mécaniques de ces matériaux peuvent être appliqués à des suspensions industrielles ayant des caractéristiques analogues.

Cet ouvrage est le fruit de notre travail mais aussi de discussions avec de nombreux chercheurs que nous souhaitons remercier ici. En particulier Henri Van Damme a été l'un des moteurs de l'étude des pâtes et suspensions concentrées en France, il a en outre apporté un grand soutien et des conseils très utiles à ce projet. Nous remercions aussi François Chevoir, Marie Clément et Christophe Lanos pour leur relecture du manuscrit ainsi que Didier Lesueur et Pierre-Gilles de Gennes pour leurs remarques judicieuses sur le contenu de l'ouvrage, et Franck Radjaï pour son aide matérielle. L'Institut National des Sciences de l'Univers a apporté un soutien financier indispensable au programme de recherches à l'origine de cet ouvrage. Merci enfin à Suzanne Laval pour son appui au départ de ce projet et à Jean-Marc Quilbé pour la confiance qu'il nous a accordée.

Table des matières

Chapitre 1 Eléments de rhéophysique

1.1 Introduction.....	1
1.2 Concepts de base.....	3
1.2.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?.....	3
1.2.2 Les variables de l'écoulement.....	7
1.2.3 Continuité du milieu.....	8
1.2.4 Les forces	11
1.3 Principes de la mécanique des milieux continus.....	17
1.3.1 Conservation de la masse.....	17
1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement.....	18
1.3.3 Les fluctuations temporelles.....	19
1.3.4 La turbulence.....	20
1.3.5 Résolution d'un problème d'écoulement.....	21
1.3.6 Milieu continu généralisé.....	22
1.4 Lois de comportement.....	23
1.4.1 Généralités.....	23
1.4.2 Le tenseur des taux de déformation.....	24
1.4.3 Forme simplifiée de la loi de comportement.....	24
1.4.4 Cisaillement simple.....	25
1.4.5 Élongation	27
1.4.6 Dissipations d'énergie.....	28
1.5 Principaux types de comportement.....	29
1.5.1 Généralités.....	29
1.5.2 Fluide newtonien.....	30
1.5.3 Vers des propriétés plus complexes	31
1.5.4 Thixotropie	32
1.5.5 Fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants.....	33
1.5.6 Fluides à seuil.....	34
1.5.7 Viscoélasticité.....	37
Annexe 1.1 Conservation de l'énergie.....	39
Annexe 1.2 Modèle de Eyring.....	40

Chapitre 2 Les suspensions molles

2.1 Introduction.....	43
2.2 Décomposition du tenseur des contraintes.....	47
2.3 Interactions hydrodynamiques.....	48
2.3.1 Généralités.....	48
2.3.2 Viscosité d'une suspension à faible concentration.....	51
2.3.3 Viscosité d'une suspension à concentration modérée.....	52
2.3.4 Viscosité d'une suspension à concentration élevée.....	55
2.3.5 Influence de la configuration	58
2.3.6 Influence de la forme des particules	61
2.3.7 Traînée hydrodynamique.....	62
2.4 Mouvements browniens.....	63
2.4.1 Diffusion brownienne.....	63
2.4.2 Influence sur le comportement de la suspension.....	64
2.5 Interactions colloïdales.....	67
2.5.1 Généralités.....	67
2.5.2 Les forces colloïdales.....	68

2.5.3 Stabilité de la suspension.....	70
2.5.4 Potentiel d'interaction moyen	72
2.5.5 Suspension colloïdale diluée.....	73
2.5.6 Suspension colloïdale concentrée.....	74
2.6 Contacts entre particules.....	87
2.6.1 Définition.....	87
2.6.2 Conséquences sur le comportement de la suspension	88
2.7 Effets inertiels	89
2.8 Classification rhéophysique des suspensions.....	91
Annexe 2.1 Décomposition du tenseur des contraintes	95

Chapitre 3 Les suspensions dures

3.1 Introduction.....	101
3.2 Les interactions entre particules.....	102
3.2.1 Généralités.....	102
3.2.2 Les contacts frictionnels.....	104
3.2.3 Les contacts collisionnels.....	106
3.3 Propriétés physiques des suspensions granulaires.....	110
3.3.1 Seuils de concentration.....	111
3.3.2 Le réseau de contacts	115
3.3.3 La dilatance.....	116
3.3.4 Couplage des phases.....	117
3.3.5 Ségrégation.....	121
3.4 Régimes d'écoulement.....	122
3.4.1 Principaux régimes.....	122
3.4.2 Couplage des phases.....	127
3.5 Le régime frictionnel.....	129
3.5.1 Généralités.....	129
3.5.2 Comportement d'une suspension granulaire en compression.....	130
3.5.3 L'état critique.....	133
3.5.4 Le critère de Coulomb.....	134
3.5.5 Modélisation du comportement aux faibles déformations.....	137
3.5.6 Modélisation du comportement aux grandes déformations.....	137
3.6 Le régime lubrifié.....	140
3.7 Le régime collisionnel.....	141
3.7.1 Généralités.....	141
3.7.2 Comportement collisionnel des suspensions granulaires.....	141
3.7.3 Comportement collisionnel pour les suspensions non granulaires.....	143
3.8 Régimes intermédiaires.....	145
3.8.1 Généralités.....	145
3.8.2 Écoulements à surface libre	146
Annexe 3.1 Écoulement uniforme sur un plan incliné	153

Chapitre 4 Rhéométrie

4.1 Introduction.....	159
4.2 Effets perturbateurs des expériences de rhéométrie	161
4.2.1 Les dimensions du rhéomètre.....	161
4.2.2 Le glissement aux parois.....	163
4.2.3 La fracturation.....	169
4.2.4 Le creusement	172
4.2.5 L'évaporation.....	174
4.2.6 La migration.....	175
4.2.7 Consignes générales pour réaliser des mesures avec des suspensions.....	178

4.3 Les différentes géométries d'écoulement : avantages et inconvénients dans le cas de tests avec des suspensions concentrées.....	179
4.3.1 Le rhéomètre cône-plan.....	179
4.3.2 Le rhéomètre plan-plan.....	182
4.3.3 Le rhéomètre à cylindres coaxiaux	183
4.3.4 Le rhéomètre capillaire.....	187
4.3.5 Le plan incliné.....	189
4.4 Procédures expérimentales spécifiques.....	195
4.4.1 Palier de contrainte ou de vitesse.....	195
4.4.2 Détermination de la courbe d'écoulement.....	197
4.4.3 Détermination du seuil de contrainte.....	201
4.4.4 Évaluation de la thixotropie.....	202
Annexe 4.1 Stabilité d'un écoulement en cisaillement simple.....	206

Chapitre 5 Le magma

5.1 Introduction.....	209
5.2 Propriétés physiques des magmas.....	210
5.2.1 Composition	210
5.2.2 Propriétés thermiques.....	211
5.2.3 Changements de phase.....	214
5.2.4 La sédimentation.....	217
5.3 Propriétés rhéologiques.....	219
5.3.1 Généralités.....	219
5.3.2 Teneur en silice.....	219
5.3.3 Teneur en eau.....	220
5.3.4 Température.....	221
5.3.5 Effet de la pression.....	221
5.3.6 Effet de la cristallisation.....	221
5.3.7 Effet de la présence de gaz.....	223
5.3.8 Synthèse.....	224

Chapitre 6 La neige et les avalanches

6.1 Introduction.....	227
6.2 La neige : formation et propriétés.....	228
6.2.1 Formation de la neige.....	228
6.2.2 Métamorphoses de la neige.....	228
6.2.3 Propriétés thermiques.....	230
6.2.4 Propriétés mécaniques.....	231
6.3 Propriétés rhéologiques.....	232
6.3.1 Les avalanches : définition et types de mouvement	233
6.3.2 Nature du matériau transporté.....	233
6.3.3 Caractéristiques macroscopiques de l'écoulement	236

Chapitre 7 La boue

7.1 Introduction.....	241
7.2 Propriétés physiques des boues naturelles.....	242
7.2.1 Généralités.....	242
7.2.2 L'eau.....	243
7.2.3 L'argile.....	243
7.2.4 Les grains	245

7.3 Propriétés mécaniques des mélanges eau-argiles	245
7.3.1 Généralités	245
7.3.2 Rhéologie des suspensions eau-argiles du groupe 1.....	247
7.3.3 Rhéologie des suspensions eau-argiles du groupe 2.....	251
7.3.4 Influence de divers paramètres.....	254
7.4 Propriétés mécaniques des mélanges eau-argiles-grains	255
7.5 Classification des mélanges boueux	258
7.5.1 La fracturation des pâtes	258
7.5.2 La sédimentation.....	258
7.5.3 Synthèse.....	259
Index	265

Principales notations

Symboles

a	vecteur accélération
<i>a</i>	taux d'élongation
<i>b</i>	distance entre les centres de deux particules voisines
b	densité de force de volume
<i>B_a</i>	nombre de Bagnold (éq. 3.32)
<i>B_r</i>	nombre de Brinkman (éq. 5.6)
<i>C_f</i>	nombre de contact (éq. 3.14)
<i>C</i>	couple
<i>C_p</i>	chaleur spécifique
<i>dv</i>	élément de volume
<i>dσ</i>	élément de surface
<i>D_{II}</i>	second invariant de D
<i>D_a</i>	nombre de Davis (éq. 3.12)
D	tenseur des taux de déformation (éq. 1.24)
D[*]	tenseur des taux de déformation local
<i>f</i>	coefficient de frottement
<i>e</i>	coefficient de restitution
	ou énergie interne
	ou épaisseur d'un écoulement
<i>E</i>	module élastique d'une particule
	ou énergie fournie à un fluide
<i>F_V</i>	force de traînée hydrodynamique
<i>g</i>	gravité
<i>G_z</i>	nombre de Graetz (éq. 5.7)
<i>G'</i>	module élastique de la suspension
<i>G''</i>	module visqueux de la suspension
<i>G[*]</i>	nombre de prédominance hydrodynamique-tension superficielle (éq. 5.12)
<i>h</i>	distance entre les surfaces de deux particules voisines
<i>h₀</i>	épaisseur non cisailée
<i>H</i>	hauteur de suspension
	ou épaisseur cisailée
<i>i</i>	pente d'un plan ou d'un canal incliné
i, j, k	vecteurs unitaires d'un repère orthonormé
<i>k</i>	constante de Boltzmann (1,38.10 ⁻²³ J/K)
<i>k₀</i>	perméabilité
<i>K</i>	coefficient de traînée
	ou exposant du modèle de Herschel-Bulkley

L		chaleur latente
	ou	longueur caractéristique d'un écoulement
Le		nombre de Leighton (éq. 3.27)
m		masse d'une particule
n		nombre de particules par unité de volume
	ou	paramètre du modèle de Herschel-Bulkley
$\mathbf{n}$		vecteur normal unitaire
N		force normale
$N_{i=1,2}$		première et seconde différences de contraintes normales
N_r		nombre de répulsion (éq. 2.33)
p		pression au sein de la suspension
p_0		pression au sein du fluide interstitiel
p_g		pression motrice
p_a		pression atmosphérique
Pe		nombre de Péclet (éq. 2.28)
Pe_c		nombre de Péclet colloïdal (éq. 2.35)
Pe_t		nombre de Péclet pour les transferts de chaleur (éq. 5.6)
P		puissance dissipée
q		état de contrainte
	ou	débit par unité de largeur
$\mathbf{q}$		flux de chaleur
Q		débit
r		taille caractéristique d'une particule (racine cubique de son volume)
	ou	distance par rapport à un axe
R		rayon d'une particule sphérique
	ou	rayon d'un outil cylindrique
Re		nombre de Reynolds (éq. 2.53)
Re_p		nombre de Reynolds particulaire (éq. 2.54)
R_H		rayon hydraulique (surface/périmètre mouillé)
t		temps
$\mathbf{t}$		vecteur contrainte (éq. 1.4)
T		contrainte tangentielle adimensionnée par le seuil de contrainte ou une contrainte normale
T		température
$\mathbf{T}$		déviateur du tenseur des contraintes
T_0		temps de relaxation de la structure
	ou	température de référence
T_c^*		temps caractéristique de restructuration d'un réseau de particules
T_{II}		second invariant de $\mathbf{T}$
T_b		temps caractéristique de diffusion brownienne (éq. 2.26)
T_c		temps caractéristique de déplacement d'une particule colloïdale (éq. 2.42)
T_E		temps caractéristique d'un fluide viscoélastique
T_h		temps caractéristique de l'écoulement ($1/\dot{\gamma}$)

T_N		temps caractéristique de rapprochement de deux particules sous l'action d'une force normale (éq. 3.30)
u, v, w		composantes de la vitesse
$\mathbf{u}$		vitesse locale en un point de la suspension
$\bar{\mathbf{u}}$		vitesse moyenne (au cours du temps)
$\mathbf{u}'$		terme fluctuant de la vitesse
U		vitesse moyenne d'un écoulement
V		vitesse relative d'une particule et du fluide ou de deux particules
W		état d'énergie des éléments d'un fluide
x, y, z		coordonnées dans un repère ($O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$)
y_0		épaisseur cisailée au sein de l'écoulement à surface libre d'un fluide à seuil
γ		déformation en cisaillement simple
γ_c		déformation critique
$\dot{\gamma}$		gradient de vitesse
$\dot{\gamma}_R$		gradient de vitesse à la distance R de l'axe
Γ		nombre de transition colloïdal-hydrodynamique (éq. 2.38)
ε		rugosité d'une particule
	ou	émissivité
φ		angle de frottement interne
ϕ_c		concentration critique (pour la formation d'un réseau)
ϕ_m		concentration d'entassement maximal
ϕ		concentration volumique solide
Φ		potentiel total d'interaction entre une particule et ses voisines
Φ_0		potentiel d'interaction à l'équilibre d'une particule avec toutes ses voisines
Φ_b		potentiel d'interaction de Born
Φ_a		potentiel d'interaction de van der Waals
Φ_e		potentiel d'interaction électrostatique
ι		variable quelconque
κ^{-1}		longueur de Debye (éq. 2.32)
λ		paramètre de structure
	ou	conductivité thermique
μ		viscosité apparente ($\tau/\dot{\gamma}$)
μ_0		viscosité du fluide interstitiel
μ_E		viscosité élongationnelle
$\bar{\mu}$		viscosité des particules
ρ		masse volumique moyenne de la suspension
ρ_0		masse volumique du fluide interstitiel
ρ_p		masse volumique des particules
ρ'		masse volumique déjaugée ($\rho - \rho_0$)
σ		contrainte normale
	ou	tension interfaciale
	ou	constante de rayonnement

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots$	composantes de Σ
$\sigma_{i=1,2,3}$	contraintes normales
σ'	pression effective (au sein du squelette granulaire)
σ_e	surface élémentaire représentative
Σ	tenseur des contraintes
Σ^*	tenseur des contraintes local
Ξ	tenseur des contraintes modifié (incluant les termes liés aux fluctuations)
τ	contrainte tangentielle
τ_c	seuil de contrainte
τ_p	contrainte à la paroi
$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \dots$	composantes de $\mathbf{T}$
ζ	rapport d'aspect
ou	fonction inverse de la loi de comportement en cisaillement simple ($\dot{\gamma} = \zeta(\tau)$)
η	viscosité relative de la suspension (μ/μ_0)
Ω	volume
ou	vitesse de rotation d'un outil autour d'un axe
Ω_e	volume élémentaire représentatif
ψ	fréquence de sortie d'un puits de potentiel au sein d'un fluide

Opérateurs

$\frac{\partial a}{\partial t}$	dérivée partielle
$\frac{da}{dt}$	différentielle totale
$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k}$	gradient
$\nabla \cdot a = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}$	divergence
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	produit vectoriel
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	produit tensoriel (tenseur $\mathbf{C}$ tel que $C_{ij} = a_i b_j$)

*« On ne vous demande ni d'être humble ni d'être superbe.
On vous demande de répondre lorsqu'on vous interroge.
N'oubliez pas que vous êtes un amalgame nocturne de forêts,
de marécages, de fleuves rouges, amalgame peuplé par
des bêtes gigantesques et fabuleuses qui s'entredévorent.
Il n'y a pas de quoi faire le mariole ! »*

Jean Cocteau - « Le testament d'Orphée »

Éléments de rhéophysique

1.1 Introduction

Notre vie de tous les jours nous amène à manipuler des fluides de toutes sortes tels que des mousses, crèmes, savons, vernis, peintures, sauces, soupes, compotes, gelées, purées, pâtes de gâteaux, etc. Leur fluidité, ou à l'inverse, leur viscosité, varie d'un matériau à l'autre et conditionne leur réponse aux sollicitations qu'on leur impose. Par exemple si la mousse à raser était aussi peu visqueuse que l'eau, elle tomberait dans le lavabo avant que nous n'ayons le temps de nous raser. D'autres facteurs conditionnent la façon dont un fluide s'écoule. Il y a d'abord les efforts appliqués par l'extérieur au fluide. Ils sont de deux types : des forces exercées par le biais d'un contact direct avec le fluide, c'est par exemple le cas lorsqu'on malaxe une pâte ; des forces exercées à distance sans contact direct telles que la gravité qui est à l'origine des écoulements à surface libre de fluides naturels sur des terrains pentus. Ensuite, pour déterminer précisément la manière dont le fluide s'écoule il faut aussi prendre en compte l'état du fluide en termes de vitesse et de position au moment où l'on commence à appliquer ces efforts. On pourrait s'attendre alors à ce que les caractéristiques des écoulements de fluides différents, soumis à des actions extérieures et dans des conditions initiales identiques, soient les mêmes. Il n'en est rien car la viscosité du fluide module ses réactions vis-à-vis des actions extérieures.

Cette viscosité est donc une propriété intrinsèque du fluide qui résulte des interactions mutuelles des éléments dont il est constitué : atomes, molécules, chaînes de polymère, bulles, gouttes, grains, etc. Ces éléments sont en général relativement proches les uns des autres et, pour déplacer l'un d'entre eux par rapport à ses voisins, il faut exercer un effort. Ceci signifie qu'une déformation (macroscopique) du fluide nécessite de vaincre les résistances locales aux déplacements relatifs de ses éléments constitutifs. Les efforts exercés par l'extérieur ne servent donc pas seulement, comme

dans le cas d'un corps rigide, à augmenter la vitesse de l'ensemble des éléments mais aussi à vaincre les résistances internes lors de leurs mouvements relatifs. Ainsi, en l'absence de pesanteur, un corps rigide peut être animé d'un mouvement uniforme dans le vide même s'il n'est soumis à aucune force extérieure. En revanche, il est impossible de maintenir un écoulement permanent d'un fluide à peu près au repos dans un récipient à travers un orifice de ce récipient sans appliquer constamment une force, ou plus précisément une différence de pression sur le fluide, par un piston ou par l'action de la pesanteur par exemple. On doit donc apporter de l'énergie pour vaincre ce qu'on appelle les dissipations d'énergie par viscosité, c'est-à-dire le travail des résistances internes lors des déplacements relatifs des éléments qui résultent dans ce cas précis de l'élongation à laquelle est soumis le fluide pour traverser l'orifice. Pour des efforts extérieurs et des conditions d'écoulement identiques, la proportion d'énergie dissipée par viscosité est d'autant plus grande et la vitesse atteinte par le fluide d'autant plus faible que le fluide est plus visqueux.

Dans cet ouvrage, nous nous plaçons résolument dans le cadre de la rhéophysique des fluides, c'est-à-dire que nous nous intéressons tout particulièrement à l'origine physique des écoulements ou des lois de comportement des fluides plutôt qu'aux détails de ces caractéristiques dans le cadre de la mécanique. Dans ces conditions, nous commençons (§ 1.2.1) par examiner la situation des fluides complexes et notamment des suspensions concentrées par rapport à la classification physique usuelle [1-4] des matériaux. Ceci nous amène à proposer une définition rhéophysique d'un fluide, qui intègre à la fois des caractéristiques mécaniques et physiques. Nous définissons ensuite les outils de la mécanique des fluides, autant que possible à partir de concepts physiques. La première hypothèse, très utile pour simplifier l'approche mathématique, consiste à considérer que nous avons affaire à un milieu continu à notre échelle d'observation. Cette hypothèse mérite d'être expliquée et justifiée (*cf.* § 1.2.3) d'autant plus précisément que nous avons l'intention de l'appliquer aux suspensions, qui sont *a priori* des milieux plus hétérogènes que des liquides ordinaires. Ensuite nous pouvons définir les principes généraux de mécanique des milieux continus (*cf.* § 1.3) : principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et enfin de l'énergie. Ce cadre nous servira *a priori* de référence dans le reste de cet ouvrage mais on verra que dans certaines situations (par exemple dans le cas des suspensions granulaires) une description macroscopique adaptée des écoulements nécessite de sortir de ce cadre. De manière générale au cours de ce chapitre seuls les principes et les équations indispensables à la compréhension du reste de l'ouvrage sont abordés. Plusieurs ouvrages de référence développent de façon plus détaillée les thèmes de la mécanique des fluides ou de la rhéologie [5-15]. La particularité de notre présentation réside dans le fait qu'elle tente autant que possible de montrer l'origine physique des principes de la mécanique, ce qui nous permet notamment de mieux discuter la validité des hypothèses à la base de ces principes dans le cas des suspensions.

Certains fluides, et tout particulièrement de nombreuses suspensions concentrées, ne coulent pas sous l'action de la seule gravité lorsqu'ils sont appliqués sur des surfaces en

pente. Il semble même qu'ils puissent reprendre une certaine consistance lorsqu'on les laisse au repos (avant séchage ou prise). Ceci nous amène à remarquer que certains fluides peuvent se comporter très différemment des liquides simples (eau, huile, etc.), qui répondent presque immédiatement (en s'écoulant) à toute sollicitation extérieure et, en première approximation, conservent la même consistance quelles que soient les conditions. Il faut donc envisager le fait que la résistance à l'écoulement de ces matériaux n'est pas caractérisée par un seul coefficient (la viscosité) mais par plusieurs paramètres qui dépendent éventuellement des conditions d'écoulement. Ces relations constituent ce qu'on appelle la loi de comportement d'un matériau. À nouveau, un cadre mathématique adapté doit être mis en place pour traduire et déterminer expérimentalement cette loi de comportement (*cf.* § 1.4). Nous nous attachons ensuite à décrire les caractéristiques les plus fréquentes du comportement des fluides en dégagant les raisons physiques de ces comportements (*cf.* § 1.5).

1.2 Concepts de base

1.2.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Le caractère fluide qui qualifie un type de comportement mécanique du matériau considéré ne doit pas être confondu avec l'état physique (notamment liquide ou solide) du matériau. En première approximation le comportement de matériaux relativement simples peut être associé à leur état physique. Les matériaux à l'état solide sont des corps élastiques lorsqu'on leur impose de petites déformations : sous l'action d'une force suffisamment faible, ils se déforment quelque peu puis reprennent leur forme initiale lorsqu'on relâche cette force. Si l'effort appliqué dépasse une valeur critique, le corps solide ne reprend pas sa forme initiale, il a un comportement plastique. Ces caractéristiques mécaniques sont en général associées à une répartition ordonnée dans l'espace des éléments constitutifs du matériau (atomes ou molécules) qui sont alors situés dans des positions de minimum d'énergie desquelles ils ne peuvent pas facilement sortir. Ainsi, dans des conditions ordinaires, l'agitation thermique ne leur permet pas de s'extraire de ces positions (*cf.* Fig. 1.1a). Si l'effort appliqué au matériau est relativement faible les éléments sont, seulement provisoirement, quelque peu déplacés et peuvent rapidement se replacer dans leur position d'équilibre lorsqu'on relâche l'effort, ce qui explique l'élasticité du matériau. Lorsque le matériau est soumis à un effort suffisamment grand, certaines particules sont extraites de leur position d'équilibre initiale, ce qui brise au moins localement l'arrangement initial, les propriétés macroscopiques du matériau étant alors modifiées de manière irréversible (plasticité). Les propriétés mécaniques des corps solides sont donc associées à une configuration particulière, c'est-à-dire une distribution spécifique de leurs éléments dans l'espace.

Au contraire, chaque particule (molécule ou atome) d'un gaz est animée de mouvements erratiques résultant de l'agitation thermique qui l'amène en général à parcourir une grande distance (par rapport à sa taille) dans une direction donnée avant

d'entrer en collision avec une autre particule (*cf.* Fig. 1.1b). Après cette collision la particule reprend son mouvement dans une autre direction. La pression au sein d'un gaz ou contre une paroi imperméable résulte de ces collisions. Un gaz peut être déformé de manière quelconque sans que ses propriétés mécaniques soient modifiées. La viscosité d'un gaz provient des transferts de quantité de mouvement par chocs entre couches animées d'un mouvement moyen. Compte tenu de la faible densité de particules, la viscosité d'un gaz est très faible.

La matière à l'état liquide possède des caractéristiques intermédiaires. Bien que les molécules ou atomes soient maintenus les uns contre les autres en général par le biais des forces de van der Waals, il n'existe pas d'agencement ordonné à longue distance. En revanche, les éléments du liquide sont animés de mouvements erratiques résultant de l'agitation thermique. Ces mouvements sont loin d'avoir une amplitude comparable à celle des éléments d'un gaz mais permettent au moins à chaque élément du liquide de s'éloigner progressivement de sa position initiale en l'absence d'un mouvement moyen du liquide (*cf.* Fig. 1.1c). Il en résulte que le liquide ne possède pas de configuration privilégiée de ses éléments notamment vis-à-vis de ses propriétés mécaniques.

Dans certaines conditions, notamment après un refroidissement rapide, les liquides peuvent aussi se trouver dans un état intermédiaire entre l'état solide et l'état liquide : l'état vitreux. L'agitation thermique des éléments est alors fortement atténuée au point que ceux-ci sont animés de mouvements erratiques de faible amplitude autour d'une position d'équilibre comme au sein d'un solide. En revanche le désordre continue de régner à longue distance comme dans un liquide ordinaire. Les éléments sont cependant dans des positions d'équilibre provisoires car cette organisation instantanée est au moins partiellement détruite en cours d'écoulement. Il est par conséquent plus difficile de mouvoir les éléments les uns par rapport aux autres et la viscosité des liquides augmente rapidement lorsqu'ils entrent dans l'état vitreux.

Il existe d'autres types de matériaux qu'il ne semble pas possible de faire entrer dans la classification précédente. Les fluides viscoélastiques, par exemple à base de polymères, en sont un exemple typique. Selon que les caractéristiques du mouvement qui leur est imposé permettent ou non à leurs molécules de se désenchevêtrer, ces matériaux se comportent soit comme des solides élastiques soit comme des liquides (*cf.* § 1.5.7). Les suspensions concentrées ou les pâtes qui sont l'objet de cet ouvrage sont aussi des matériaux complexes. En effet, nous avons d'abord affaire à des matériaux qui sont en général constitués d'au moins deux populations d'éléments de tailles et de propriétés très différentes : les molécules du liquide interstitiel et les particules en suspension. On ne sait pas *a priori* si, pour décrire le comportement du matériau, on doit privilégier les interactions entre les molécules ou entre les particules. Toutefois, lorsque la concentration solide est suffisamment grande, on peut se représenter une suspension ou une pâte comme l'empilement désordonné d'éléments (des cellules comprenant une particule et du liquide) qui restent en contact grâce aux forces de van der Waals comme les molécules d'un liquide, et dont les interactions mutuelles jouent un rôle déterminant

sur le comportement de l'ensemble du matériau (*cf.* chap. 2). En outre, les pâtes ont d'une part un comportement analogue à celui d'un liquide puisqu'elles peuvent être déformées de manière quelconque sans perdre leurs propriétés mécaniques, et d'autre part un comportement analogue à celui d'un solide dans certaines conditions puisqu'elles cessent de s'écouler si l'effort qui leur est appliqué est insuffisant (inférieur au seuil de contrainte). Les caractéristiques physiques et mécaniques des suspensions concentrées présentent finalement de fortes analogies avec celles des liquides à l'état vitreux, la variable gouvernant la transition vers cet état concentré (analogue à l'état vitreux) étant la concentration solide.

Les suspensions granulaires, que l'on définira pour l'instant comme des mélanges d'un grand nombre de particules non colloïdales dans un liquide ou dans un gaz (*cf.* chap. 3), forment une catégorie de matériaux dont les caractéristiques physiques et mécaniques semblent encore plus difficilement associables à l'un des états de base de la matière. Dans certaines situations d'écoulement, une suspension granulaire semble se comporter comme un liquide ordinaire, c'est le cas par exemple des sables mouvants dans lesquels on s'enfonce facilement ou de la poudre qui s'écoule dans un sablier. Dans d'autres cas, au contraire, par exemple si les grains se distribuent légèrement différemment du cas précédent pour former un réseau de contacts directs permanents, une suspension granulaire peut avoir la résistance d'un solide très rigide. Enfin une suspension granulaire sèche très dilatée en écoulement rapide à surface libre a des caractéristiques proches de celles d'un gaz puisqu'alors le mouvement est conditionné par les collisions entre particules (*cf.* § 3.7.3). Notons par ailleurs que les suspensions granulaires ne peuvent pas non plus simplement être rangées dans la catégorie des fluides thixotropes (*cf.* § 1.5.4) en considérant que la distribution instantanée des particules correspond à un état du matériau. En effet, comme l'agitation thermique des particules est négligeable, l'état atteint au moment de l'arrêt de l'écoulement subsiste au repos, contrairement aux effets de la thixotropie, fondamentalement réversibles.

Nous constatons ainsi que les différents états physiques de la matière ne suffisent pas à classer les comportements mécaniques des matériaux et notamment des pâtes et suspensions. Les gaz et les liquides sont en général considérés comme des fluides mais d'autres types de matériaux semblent pouvoir entrer dans cette catégorie. Nous proposons donc ici une définition rhéophysique de la structure d'un fluide qui intègre les propriétés physiques et mécaniques communes aux matériaux *a priori* fluides passés en revue ci-dessus. On considère qu'un fluide est formé en plaçant dans un volume délimité de l'espace un certain nombre d'éléments de formes, de tailles, et de natures variées (atomes, molécules, billes de verre, globules rouges, micelles, cailloux, etc.). Ces éléments interagissent de manières diverses et sont distribués dans l'espace de façon désordonnée à longue distance. Enfin les propriétés mécaniques du fluide, après un temps de repos suffisant, ne varient pas sensiblement lorsque les éléments sont redistribués dans l'espace d'une manière quelconque et plus ou moins aléatoire. Ceci traduit notamment l'absence d'une configuration privilégiée mais n'exclut pas un comportement élastique pour de faibles déformations associé à une configuration

privilégiée provisoire. Notons que les suspensions granulaires ne font pas partie des fluides selon cette définition. Dans la suite, on parlera de déformation lorsque les éléments du fluide sont redistribués dans l'espace et d'écoulement pour qualifier le mouvement résultant d'une déformation.

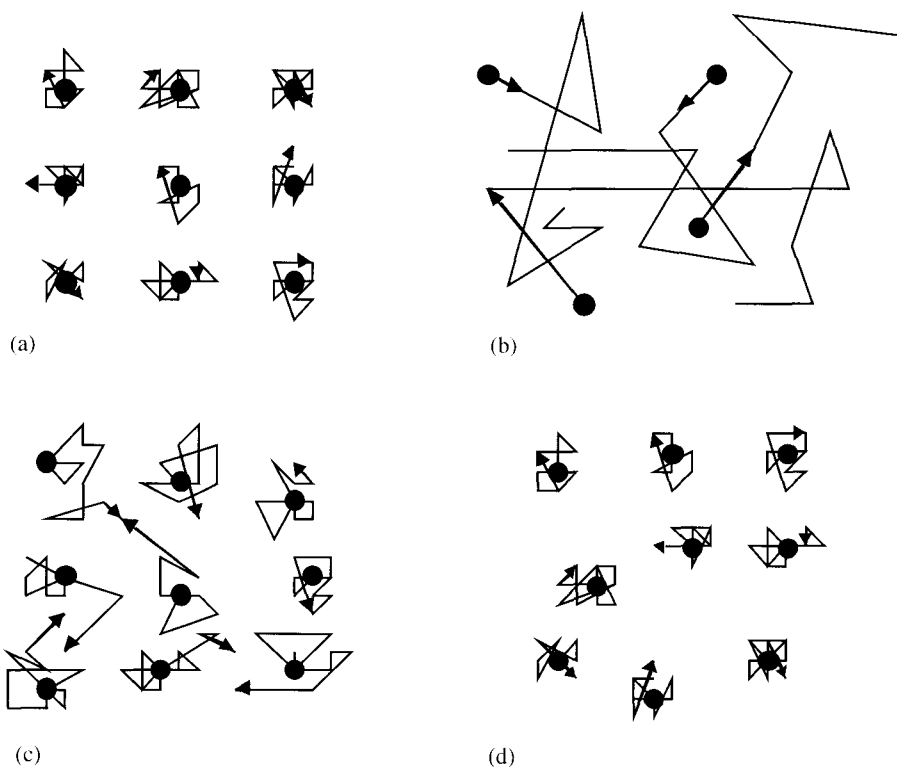


Fig. 1.1 : Aspect schématique des évolutions de la structure interne de différents corps simples macroscopiquement au repos. La trajectoire suivie par chaque élément (représenté par une sphère sombre) durant une certaine période est représentée par une série de lignes brisées. Dans un solide (a) les éléments du solide (atomes ou molécules) sont distribués dans l'espace de manière ordonnée. Chaque élément oscille autour de sa position d'équilibre. Dans un gaz (b) les éléments sont animés de mouvements de grande amplitude pratiquement indépendants les uns des autres. Dans un liquide (c) les éléments sont animés de mouvements erratiques de faible amplitude suffisante toutefois pour leur permettre de sortir de leur position d'équilibre provisoire au bout d'un certain temps. Il n'existe par d'ordre à longue distance. Dans l'état vitreux (d) l'agitation des éléments est fortement réduite mais le désordre règne à longue distance.

Si l'on sait décrire avec précision les interactions entre éléments on est *a priori* capable de prédire les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide formé par un ensemble de tels éléments en fonction des forces qui lui sont appliquées. Si le fluide ne comprend que quelques éléments, cette tâche est relativement aisée. Lorsque le système étudié contient un très grand nombre d'éléments il est extrêmement difficile, même à l'aide des ordinateurs modernes, de prédire les mouvements de chaque élément. Ceci est devenu récemment possible seulement pour des suspensions modèles constituées d'un nombre relativement limité de particules grossières immergées dans un fluide non visqueux (écoulement granulaire sec) ou de particules colloïdales dans un liquide moyennant des hypothèses simplificatrices concernant les interactions. Ainsi, il reste important en vue des applications pratiques et pour une bonne compréhension physique des phénomènes, de disposer d'outils analytiques pour décrire les propriétés collectives d'un ensemble d'éléments, autrement dit d'un fluide, en mouvement. Cette tâche est grandement facilitée lorsqu'on peut s'appuyer sur le formalisme et les outils de la mécanique des milieux continus.

1.2.2 Les variables de l'écoulement

Compte tenu du fait qu'un fluide ne possède pas une configuration de référence vis-à-vis de ses propriétés mécaniques, les déformations qu'il a subies par rapport à sa position initiale (ou plus généralement une position de référence) ne jouent aucun rôle particulier. Nous verrons cependant (cf. § 1.5) que ceci n'est pas strictement vrai pour des fluides viscoélastiques ou à seuil qui possèdent une configuration privilégiée provisoire. Pour décrire l'écoulement d'un fluide il est essentiel de connaître les mouvements relatifs instantanés des différents éléments, autrement dit la variable la plus importante est la vitesse. Une première possibilité consiste à suivre la vitesse de chaque élément du fluide, il s'agit dans ce cas d'une description dite lagrangienne du mouvement. Étudier le mouvement revient alors à décrire la trajectoire de chacun de ces éléments à partir de leur position initiale. Ce type de description est évidemment particulièrement adapté à l'étude de déformations limitées ou pour des matériaux qui possèdent une configuration préférentielle. Plus fréquemment, dans le cas des écoulements de fluide, on s'intéresse à la vitesse à un instant donné en un point du fluide (description dite eulérienne). Cette vitesse est alors celle de l'élément qui passe en ce point en cet instant précis. Étudier le mouvement consiste dans ce cas à décrire l'évolution dans le temps de la distribution des vitesses locales au sein du matériau.

Deux autres variables caractérisent l'état du fluide : la masse volumique, qui permet d'apprécier le nombre d'éléments par unité de volume, et la température, qui donne une idée de l'agitation des éléments. Pour un gaz, cette température est proportionnelle aux fluctuations de vitesse (cf. § 3.7.3). Nous utilisons aussi une approche eulérienne pour décrire ces variables. En résumé nous cherchons à prévoir les évolutions, dans l'espace et dans le temps, de trois variables caractérisant l'état et les mouvements du matériau : sa masse volumique ρ , sa vitesse $\mathbf{u}$ et sa température T . Ces variables sont des

fonctions de l'instant t considéré et de la position locale $\mathbf{x}$ dont les composantes sont (x, y, z) dans un référentiel orthogonal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ fixe. Les composantes de la vitesse dans le même référentiel sont (u, v, w) .

1.2.3 Continuité du milieu

En fait, il n'est pas aussi simple qu'il y paraît de parler de la vitesse d'un élément bien précis du fluide situé en un point précis. En effet, ceci suppose implicitement que le fluide soit constitué par la juxtaposition d'éléments infiniment petits, ce qui n'est évidemment jamais le cas. En pratique, lorsqu'on mesure par des moyens ordinaires la valeur de l'une des variables ci-dessus en un point donné, on mesure la valeur moyenne de cette variable sur un petit volume englobant un certain nombre d'éléments du fluide. Ainsi, dans le cas d'un liquide ordinaire, c'est la plupart du temps la vitesse moyenne d'un groupe d'environ 10^{15} molécules que l'on enregistre. Par ailleurs, la mesure de la masse volumique doit de toute façon être réalisée sur un volume comprenant un nombre d'éléments suffisamment grand pour que le résultat représente bien la valeur moyenne autour d'un point donné, et suffisamment petit vis-à-vis des variations macroscopiques (à l'échelle de l'observateur) de cette variable. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les valeurs des variables vitesse, masse volumique et température sont donc associées à des moyennes d'ensemble sur des volumes élémentaires représentatifs (Ω_e). Nous verrons qu'une définition *a priori* de ce volume élémentaire représentatif en vue d'un traitement de l'écoulement dans le cadre de la mécanique des milieux continus est délicate car ses dimensions sont intimement liées aux conditions nécessaires pour la validité de l'hypothèse du milieu continu sous leurs différents aspects, conditions qui résultent en partie du comportement mécanique du matériau.

Pour faciliter la description mathématique que l'on envisage d'entreprendre, on a tout intérêt à ce que ces variables, qui sont aussi des fonctions, soient continûment différentiables (ce qui assure leur continuité simple) dans l'espace et dans le temps. De cette manière on pourra utiliser un seul jeu d'équations faisant intervenir des différentielles d'espace ou de temps pour décrire le mouvement du fluide en tout point (sinon il faut ajouter des relations particulières entre les variables de part et d'autre des surfaces de discontinuités). Pour cela il faut entre autres que la différence entre les valeurs des variables associées à deux points voisins (Δt), c'est-à-dire à deux volumes élémentaires voisins, soit très faible devant la différence de valeur de cette variable (ΔI) entre deux points séparés par une longueur macroscopique typique de l'écoulement. (Pour un écoulement à surface libre il s'agit par exemple de la différence de vitesses entre le fond et la surface libre.) De même, les variations dans le temps de la valeur d'une variable en un point particulier doivent être très faibles devant les variations dans le même temps de la différence macroscopique évoquée ci-dessus.

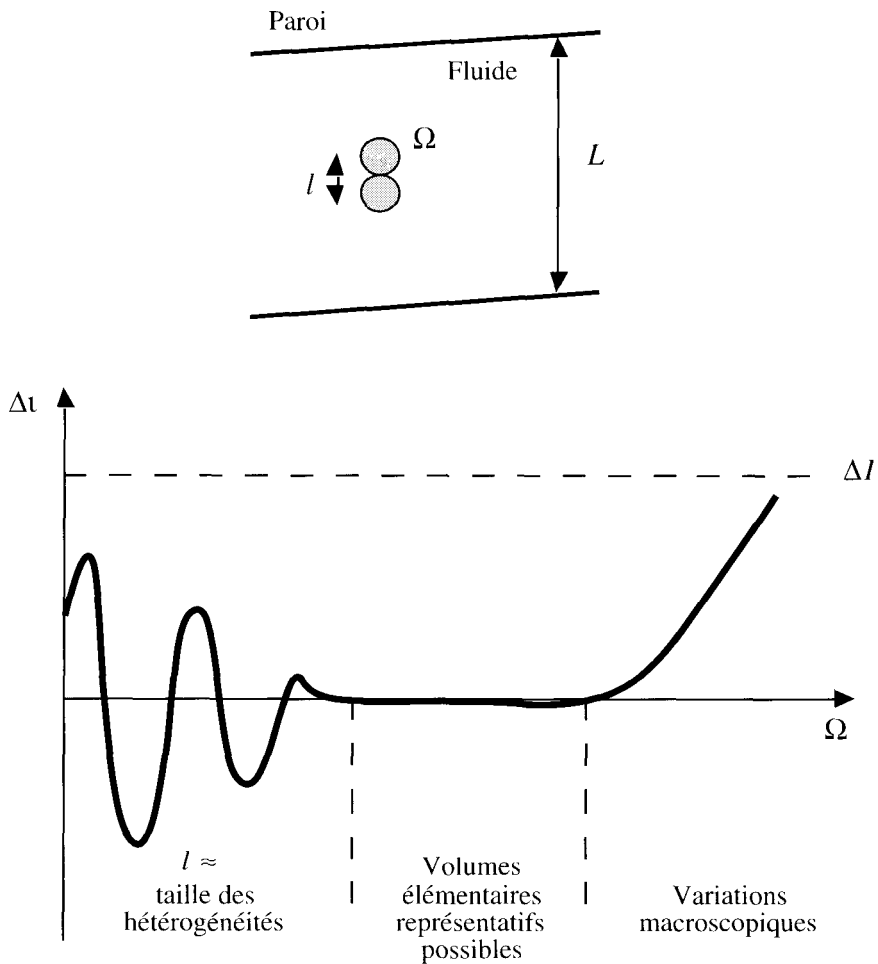


Fig. 1.2 : Variations possibles de la différence (Δt) de valeur de la variable d'un volume (Ω) à un autre voisin (à une distance l) lorsque ce volume augmente. Pour des valeurs de l'ordre du volume des hétérogénéités du matériau Δt peuvent être du même ordre que la différence (ΔI) de valeur de cette variable sur une distance macroscopique (L). Lorsque Ω englobe un certain nombre d'éléments de base du fluide, Δt est très faible devant ΔI . On peut alors choisir le volume élémentaire représentatif (Ω_e) dans cette gamme. Lorsque Ω est trop grand la valeur de Δt correspond aux variations macroscopiques de la variable et donc Δt est naturellement de l'ordre de ΔI .

De cette définition il ressort d'abord que l'hypothèse du milieu continu est nécessairement associée à une gamme d'échelles d'observation. En effet, si on observe à notre échelle l'écoulement d'un liquide simple constitué d'un très grand nombre de molécules, on peut facilement diviser l'espace en une multitude de très petits volumes

qui contiennent chacun beaucoup de molécules. On conçoit facilement qu'on a alors de grandes chances pour que, d'un petit volume à un autre voisin, la variation de la variable soit faible devant la variation macroscopique de cette variable. Si en revanche on se place à une échelle d'observation si petite que les groupes de molécules utilisés pour mesurer une variable ne peuvent plus contenir que quelques éléments, le milieu a de grandes chances d'être discontinu car d'un groupe à l'autre la masse volumique, la vitesse ou la température peuvent varier sensiblement (*cf.* Fig. 1.2). Pour les liquides ordinaires de même que pour des suspensions colloïdales, ce problème n'intervient évidemment que dans des situations d'écoulement très particulières, l'échelle d'observation étant en général extrêmement grande devant la taille des éléments constitutifs du fluide.

Dans le cas le plus favorable les variations dans l'espace de la variable considérée (τ) sont linéaires, on a alors $\Delta\tau = \Delta I / N$ où N est le nombre de volumes élémentaires du fluide rencontrés sur une distance égale à la dimension caractéristique de l'écoulement (L). Dans ce cas l'hypothèse de continuité ($\Delta\tau \ll \Delta I$) de la variable τ est valide dès que $N > 10$. Pour une suspension granulaire, au sein de laquelle le rôle des grosses particules vis-à-vis de la viscosité de l'ensemble de la suspension est déterminant, si on peut considérer que le volume élémentaire représentatif est constitué d'une particule entourée de liquide, l'hypothèse du milieu continu peut donc être valable à partir du moment où la dimension caractéristique de l'écoulement est égale à dix diamètres de particules. Toutefois, si quelques très grosses particules sont immergées dans une suspension qui peut être considérée comme continue en l'absence de ces particules, le matériau est discontinu localement au niveau de ces gros éléments mais ceux-ci induisent en général des perturbations mineures de l'écoulement dans son ensemble. Par conséquent on peut négliger en première approximation ces éléments.

En fait, nous n'avons envisagé pour l'instant qu'un critère géométrique de continuité du milieu. Des différences notables de vitesse d'un groupe d'éléments à un autre voisin peuvent être observées même lorsque ces groupes sont très petits devant le volume de suspension simplement à cause du comportement collectif de ces groupes, autrement dit à cause du comportement mécanique de la suspension. Par exemple, si l'organisation du matériau considéré est telle qu'un écoulement se traduit par la séparation du matériau en deux parties à peu près rigides et glissant l'une contre l'autre, la vitesse relative entre deux éléments voisins situés de part et d'autre de la surface de glissement est du même ordre que la vitesse macroscopique de l'écoulement. Le matériau considéré est alors discontinu.

Pour les liquides simples dans des conditions ordinaires, ce type de problème se présente encore une fois très rarement probablement du fait du désordre et de l'agitation thermique qui règnent dans ces milieux. Pour d'autres fluides le problème est précisément beaucoup plus délicat car les variations spatiales d'une variable τ , qui dépendent de la distribution des efforts entre les éléments du fluide et de leurs réactions à ces efforts, sont très loin d'être linéaires. Notamment dans le cas d'un fluide à seuil dans certaines géométries d'écoulement, la vitesse peut varier très rapidement sur une

épaisseur relativement petite (cf. chap. 4). Dans ces conditions, les variations macroscopiques de la vitesse sont du même ordre que celles aux bornes de cette région de variations rapides et, pour que l'hypothèse du milieu continu soit valide, il faut que le nombre de volumes élémentaires dans la zone de variation rapide de la vitesse soit suffisamment grand. Le nombre de volumes élémentaires sur une distance caractéristique de l'écoulement doit donc être largement supérieur à 10 mais la valeur critique à dépasser dépend malheureusement des conditions d'écoulement car l'épaisseur cisailée tend vers zéro lorsque la contrainte à la paroi tend vers le seuil de contrainte de la suspension. Avec une suspension granulaire confinée en écoulement frictionnel (cf. § 3.5) la situation est bien plus critique car quelles que soient les dimensions de l'échantillon (pour une taille de particules fixée) des surfaces de fracture, ou plus précisément des bandes de cisaillement, ont tendance à se former au-delà d'une certaine déformation. Dans ce cas il n'existe pas de critère simple de continuité du matériau. Ces exemples montrent qu'il n'est pas possible d'énoncer des critères universels de continuité d'un fluide surtout lorsqu'on cherche à englober les suspensions concentrées. Seules des conditions suffisantes, notamment géométriques, peuvent être proposées. La continuité dépend en fait des caractéristiques du matériau et de l'écoulement si bien que l'hypothèse de continuité doit toujours être validée *a posteriori*. Dans la suite de cet ouvrage nous supposons *a priori* que le matériau considéré est continu, les surfaces de discontinuité éventuelles étant envisagées comme des singularités de l'écoulement.

1.2.4 Les forces

Le mouvement d'un fluide est conditionné en partie par les forces extérieures qui s'exercent sur lui et par les forces mutuelles entre ses éléments constitutifs. Ces forces peuvent être séparées en deux catégories. La première comprend des forces dites de volume telles que les forces électromagnétiques, les forces de gravité, ou les forces inertielles, qui varient en général très lentement avec la distance (par rapport à la taille des éléments du fluide) et s'exercent à très grande distance. Considérons un volume élémentaire représentatif Ω_e comprenant un certain nombre d'éléments du fluide (des molécules du liquide et des particules solides pour une suspension) et tel que la continuité du milieu soit assurée lorsqu'on décrit les évolutions des valeurs des variables en segmentant l'espace en des volumes analogues. La force extérieure s'exerçant sur ce volume est obtenue en faisant la somme des efforts exercés par les forces extérieures sur chaque élément ($\mathbf{F}_i$) de Ω_e :

$$\mathbf{F}_{\Omega_e} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (1.1)$$

On définit alors la densité de force extérieure en un point de l'espace : $\mathbf{b} = \mathbf{F}_{\Omega_e} / \Omega_e$. Un volume quelconque (Ω) peut être divisé en un certain nombre de volumes élémentaires.

Lorsque $\mathbf{b}$ est constant au sein de Ω la force extérieure totale qui s'applique sur ce volume s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{vol.} = \mathbf{b}\Omega \quad (1.2)$$

Lorsque la seule force de volume est la gravité ($\mathbf{g}$), on a $\mathbf{b} = \rho\mathbf{g}$.

La seconde catégorie de forces comprend les forces de surface ($\mathbf{F}_{surf.}$), qui agissent entre deux éléments très proches mais décroissent rapidement avec la distance. Pour un liquide ordinaire il s'agit surtout des forces de van der Waals qui ont essentiellement une action entre deux molécules voisines. Pour une suspension, il peut s'agir soit des forces entre molécules du liquide interstitiel, soit des forces d'interaction entre les particules dont certaines sont de type électrostatique (*cf.* chap. 2) et peuvent donc s'exercer à plus grande distance à travers le liquide. Néanmoins, l'amplitude de ces forces décroît encore rapidement avec la distance et il paraît raisonnable de négliger leur action au-delà de la particule voisine. Dans le cas contraire, il est cependant possible de définir des volumes (que l'on appellerait alors éléments) englobant quelques éléments de fluides tels que la force liée à ce type d'interaction et exercée par un tel volume sur les volumes environnants ne s'étende pas au-delà des voisins directs.

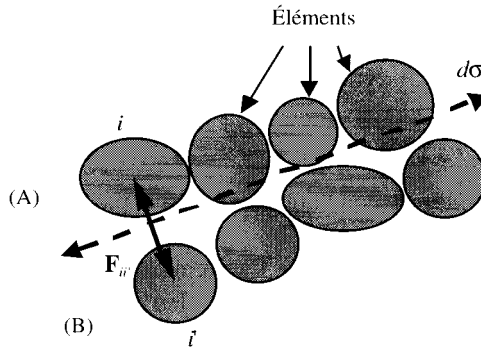


Fig. 1.3 : Forces entre éléments à l'origine des forces de surface.

Considérons un élément de surface $d\sigma$ au sein du fluide et centré autour d'un point de l'espace $\mathbf{x}$. On s'intéresse à l'effort exercé par le fluide situé d'un côté (B) de cette surface, sur le fluide situé de l'autre côté (A). Compte tenu de la courte distance d'action des forces de surface définies ci-dessus, seuls les éléments de fluide situés tout près de cette surface subissent une force provenant des éléments de fluide situés le long de la surface de l'autre côté (B). En première approximation chaque élément (i) subit en fait une force ($\mathbf{F}_{ij}$) essentiellement due à chaque élément (j) lui faisant face au travers de cette surface (*cf.* Fig. 1.3). Finalement la force totale exercée par le fluide situé du côté B sur le fluide situé du côté A peut s'écrire sous la forme d'un vecteur $d\mathbf{F}$ tel que

$$d\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{ii'} \quad (1.3)$$

Si $\mathbf{F}_{ii'}$ est à peu près constant $d\mathbf{F}$ est proportionnel à la surface considérée $d\sigma$. Il est donc naturel de considérer la variable définie par le vecteur $\mathbf{t}_\sigma(\mathbf{x}) = d\mathbf{F}/d\sigma$. Lorsque la surface considérée est suffisamment grande $\mathbf{t}_\sigma$ est la valeur moyenne de la force par unité de surface exercée par chaque élément sur l'élément qui lui fait face le long de cette surface. Cependant, comme pour les autres variables, pour que la variable $\mathbf{t}_\sigma(\mathbf{x})$ soit continûment différentiable, il faut que la surface considérée autour de $\mathbf{x}$ ne soit ni trop grande, car sinon les variations de $\mathbf{t}_\sigma$ d'un point à un autre seront du même ordre que les variations entre les bornes de l'échantillon, ni trop petite (de l'ordre de la surface de quelques éléments), car sinon les variations de $\mathbf{t}_\sigma$ d'un point à un autre seront associées aux discontinuités intrinsèques du fluide. Nous appellerons surface élémentaire ($d\sigma_e$) la surface minimum qui peut être utilisée pour cela. Comme précédemment dans le cas du volume élémentaire, quelques arguments géométriques pour l'évaluation de cette surface élémentaire peuvent être énoncés mais sa valeur exacte dépend aussi des propriétés mécaniques du fluide. En admettant que cette surface élémentaire soit connue, on peut finalement définir le vecteur contrainte $\mathbf{t}$ en un point $\mathbf{x}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{t} = \lim_{d\sigma \rightarrow d\sigma_e} \frac{d\mathbf{F}}{d\sigma} \quad (1.4)$$

Nous avons en fait jusqu'ici négligé la possibilité que les éléments du fluide exercent les uns sur les autres des couples. Cette hypothèse classique ne peut pas être justifiée simplement et il est même possible qu'au sein d'une suspension granulaire les particules en contact direct exercent des couples les unes sur les autres qui jouent un rôle significatif vis-à-vis du comportement global de la suspension. L'état actuel des connaissances dans ce domaine sera discuté au paragraphe 1.3.6. Nous ferons cependant cette hypothèse simplificatrice dans l'ensemble de cet ouvrage.

Le vecteur contrainte identifié plus haut peut naturellement se décomposer en un terme orienté selon la normale ($\mathbf{n}$) à l'élément de surface considéré et un terme perpendiculaire à $\mathbf{n}$: $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}$ (cf. Fig. 1.4). Le premier terme est une contrainte normale qui résulte d'efforts de pression des éléments les uns sur les autres. L'amplitude de ce terme est proportionnelle à la fois à la façon dont les éléments du fluide sont entassés les uns sur les autres, cet aspect est primordial dans le cas extrême d'une suspension granulaire, et aux forces d'attraction ou de répulsion entre ces éléments, cet aspect prévalant dans le cas d'un liquide ordinaire. Le second terme est une contrainte dite tangentielle qui provient du fait que les éléments situés d'un côté de la surface tendent à entraîner les éléments situés de l'autre côté dans un mouvement de glissement perpendiculaire à la direction de $\mathbf{n}$. Pour un liquide ordinaire ce type de contrainte tangentielle résulte nécessairement du mouvement relatif des couches d'éléments de part et d'autre de la surface considérée. Ceci n'est pas vrai pour des suspensions concentrées au sein desquelles les particules interagissent fortement. Ainsi, deux grains en contact direct ne peuvent glisser en frottant l'un sur l'autre que si on

exerce sur eux une force relative suffisamment grande. Dans le cas contraire il n'y a pas de mouvement relatif de glissement mais la force tangentielle relative peut ne pas être nulle. Le même phénomène se produit avec des suspensions colloïdales concentrées au sein desquelles les particules interagissent fortement par l'intermédiaire de forces électrostatiques. Cette faculté des suspensions concentrées à supporter localement des efforts tangentiels sans mouvement relatif de leurs éléments est à l'origine de l'existence d'un seuil de contrainte macroscopique (cf. § 1.5.6).

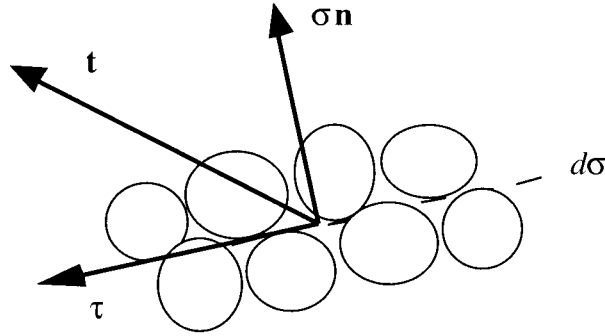


Fig. 1.4 : Décomposition du vecteur contrainte en une composante tangentielle (τ) et une composante normale ($\sigma \mathbf{n}$) à l'élément de surface.

Considérons maintenant un volume de fluide de longueur caractéristique r . Le principe fondamental de la dynamique ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext.}$) appliquée à ce volume en tenant compte des deux types de forces qui ont été identifiées, s'écrit au premier ordre :

$$\rho r^3 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{vol.} + \mathbf{F}_{surf.} = r^3 \mathbf{b} + r^2 \Delta \mathbf{t} \quad (1.5)$$

où $\mathbf{a}$ est l'accélération moyenne des éléments du volume et $\Delta \mathbf{t}$ représente la somme des vecteurs contrainte qui s'exercent sur la surface extérieure du volume considéré (les forces de surface à l'intérieur du volume s'annulant deux à deux). Lorsque r tend vers zéro dans les limites admissibles vis-à-vis de l'hypothèse du milieu continu, l'équation (1.5) conduit au premier ordre à $\Delta \mathbf{t} = 0$. Comme ceci est vrai entre autres pour tout volume parallélépipédique on en déduit que la contrainte ($\mathbf{t}_{-x}$) sur la facette de normale $-\mathbf{i}$ est l'opposée de la contrainte qui s'exerce sur la facette opposée (de normale $\mathbf{i}$). On peut obtenir un résultat analogue dans les autres directions. En le décomposant sur les trois axes du repère, le vecteur contrainte donné par (1.4) s'appliquant sur la facette de normale $\mathbf{i}$ peut naturellement s'écrire :

$$\mathbf{t}_x = \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} + \sigma_{xc} \mathbf{k} \quad (1.6)$$

avec $\sigma_{xx} = \sigma$. De même, pour les facettes de normale $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$, le vecteur contrainte s'appliquant sur chacune des facettes s'écrit respectivement $\mathbf{t}_y = \sigma_{yx}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \sigma_{yz}\mathbf{k}$ et $\mathbf{t}_z = \sigma_{zx}\mathbf{i} + \sigma_{zy}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k}$. On en déduit l'expression au premier ordre du vecteur $\mathbf{t}_{-x} = -\sigma_{xx}\mathbf{i} - \sigma_{xy}\mathbf{j} - \sigma_{xz}\mathbf{k}$ et des expressions analogues pour $\mathbf{t}_{-y}$ et $\mathbf{t}_{-z}$.

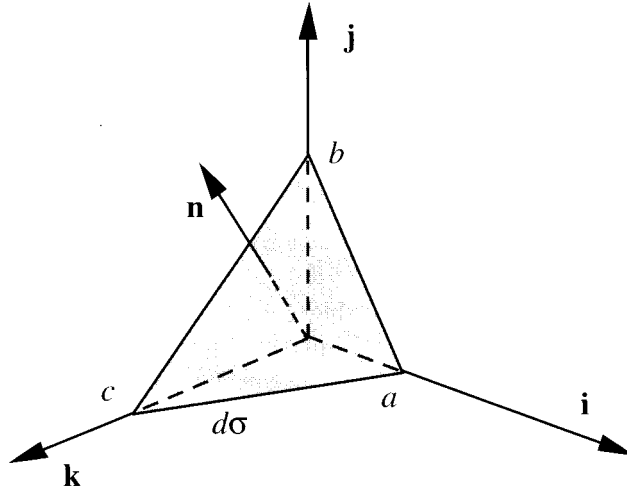


Fig. 1.5 : Tétraèdre utilisé pour déduire le vecteur contrainte sur un élément de surface de normale $\mathbf{n}$ quelconque.

Considérons maintenant un volume cubique dont les normales aux différentes facettes sont respectivement parallèles aux trois axes du repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le couple total s'exerçant sur ce volume par rapport à l'axe $\mathbf{k}$ vaut $2(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})$. Compte tenu de notre hypothèse d'absence de couple s'appliquant sur les éléments du fluide, on obtient alors :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (1.7)$$

On peut réitérer ce raisonnement pour le couple par rapport aux deux autres axes ce qui nous donne naturellement $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ et $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$.

Pour connaître le vecteur contrainte qui s'exerce sur une facette de normale quelconque $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$ on peut s'intéresser au vecteur contrainte $(\mathbf{t} = \sigma_a\mathbf{i} + \sigma_b\mathbf{j} + \sigma_c\mathbf{k})$ s'exerçant sur un tétraèdre formé en joignant le point origine et le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ par l'intermédiaire de trois droites orientées selon chacun des trois axes (cf. Fig. 1.5). Si l'on connaît les valeurs des différentes composantes de la contrainte identifiées ci-dessus, on peut calculer le vecteur contrainte selon les trois facettes qui se trouvent respectivement dans les plans

$x=0$, $y=0$, et $z=0$. Lorsque le volume du tétraèdre tend vers zéro on a encore, d'après l'expression (1.5), $\Delta \mathbf{t} = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sigma_a &= a\sigma_{xx} + b\sigma_{xy} + c\sigma_{xz} \\ \sigma_b &= a\sigma_{xy} + b\sigma_{yy} + c\sigma_{yz} \\ \sigma_c &= a\sigma_{xz} + b\sigma_{yz} + c\sigma_{zz}\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ceci nous montre qu'on peut finalement exprimer la force exercée le long d'un petit élément $d\sigma$ de fluide de normale unitaire sortante quelconque $\mathbf{n}$ sous la forme :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}d\sigma = (\Sigma \cdot \mathbf{n})d\sigma\tag{1.9}$$

où Σ est un tenseur symétrique (d'après (1.7) et les relations analogues) appelé tenseur des contraintes et dont les composantes de la partie triangulaire supérieure incluant la diagonale sont notées $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$. Notons que l'expression (1.9) définit une convention de signe pour la contrainte puisqu'on a choisi la normale sortante (orientée de la face intérieure vers la face extérieure) pour calculer la contrainte exercée par l'extérieur sur la surface considérée. Il convient aussi de remarquer que l'expression de ce tenseur dépend du repère de représentation choisi. Son expression dans un autre repère obtenu par une rotation du repère initial représentée par une matrice $\mathbf{R}$ est $\Sigma_R = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{R}^T$. Notons que le tenseur Σ possède trois invariants (qui ne dépendent pas du repère choisi) : sa trace, son déterminant et le second invariant défini de la façon suivante :

$$\Sigma_{II} = (1/2)[(tr\Sigma)^2 - tr(\Sigma^2)]\tag{1.10}$$

En simplifiant, on peut dire que cette variable exprime l'intensité du cisaillement. Il existe toujours un repère particulier dans lequel seules les composantes diagonales du tenseur des contraintes sont non nulles. Ces composantes sont les valeurs propres de ce tenseur et sont appelées contraintes principales. Bien entendu celles-ci ne varient pas avec le repère considéré, ce qui explique la constance des trois invariants ci-dessus.

Remarquons enfin qu'un volume de fluide ne tend à se déformer que si on lui applique des contraintes différentes sur ses différentes facettes. Par exemple, si on applique une pression identique le long de la surface d'un ballon de baudruche rempli d'air, celui-ci se comprime quelque peu mais ne se déforme pas. Si on l'écrase entre ses deux mains, ce qui correspond essentiellement à une contrainte normale selon une seule direction, il s'allonge dans le plan perpendiculaire. Au contraire, lorsqu'on applique une force identique sur les trois facettes d'un ballon cubique celui-ci ne se déforme pas et les contraintes principales sont toutes égales. Il est donc naturel de décomposer le tenseur des contraintes en un terme dit de pression qui se rapporte aux contraintes qui ne peuvent pas induire une déformation du fluide et un terme appelé déviateur du tenseur des contraintes qui se rapporte à des contraintes tendant à déformer le fluide. Compte

tenu des remarques précédentes on définit le terme de pression (p) dans le cas général comme la moyenne des contraintes principales, autrement dit :

$$p = -\frac{\text{tr}\Sigma}{3} \quad (1.11)$$

Dans ce cas on a :

$$\Sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} \quad (1.12)$$

où $\mathbf{T}$ est le déviateur du tenseur des contraintes.

1.3 Principes de la mécanique des milieux continus

1.3.1 Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse exprime le fait qu'en l'absence de sources de masse, l'ensemble de la matière se conserve dans toute transformation thermodynamique. Compte tenu des mouvements du fluide cela signifie par exemple qu'au sein d'un volume immatériel fixe Ω de surface extérieure Σ , le taux de variation de la masse totale est égal au flux d'éléments à travers la surface extérieure du volume considéré. Le volume d'éléments qui traverse un élément de surface $d\sigma$ pendant un intervalle de temps dt vaut $(\mathbf{u}dt \cdot \mathbf{n})d\sigma$. On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \rho dv \right) = - \int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \rho d\sigma \quad (1.13)$$

La validité de l'équation (1.13) sur chaque volume élémentaire de l'échantillon de fluide implique que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.14)$$

qui est l'expression locale du principe de conservation de la masse. Pour un gaz, les variations de la masse volumique en cours d'écoulement peuvent être très importantes. Pour un liquide en revanche (*a fortiori* pour un solide) la masse volumique varie relativement peu et une forme simplifiée ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) de l'équation (1.14) peut souvent être utilisée en pratique. Cette simplification est en général aussi valable pour des mélanges liquide-solide, lorsque l'écoulement n'est pas diphasique (vitesse moyenne du solide différente de la vitesse moyenne du liquide), puisque la masse volumique de chaque phase est à peu près constante. La situation des écoulements de mélanges gaz-solide est un peu particulière : le comportement du mélange et la masse volumique sont souvent dictés par la phase solide, on peut alors souvent négliger la présence du gaz ; par conséquent, la masse volumique de ces mélanges peut varier sensiblement lorsque les particules solides se rapprochent ou s'éloignent les unes des autres que ce soit par migration à travers le gaz ou parce que celui-ci se comprime ou se dilate.

1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Le principe de conservation de la quantité de mouvement résulte directement du principe fondamental de la dynamique selon lequel toute modification du mouvement d'un corps induit une force et réciproquement. Plus précisément, l'accélération que subit un corps rigide est égale à la somme des forces s'exerçant sur lui divisée par sa masse. Dans le cas d'un fluide ce principe s'applique à ses éléments constitutifs. Considérons un volume de fluide Ω soumis à une force de volume de densité $\mathbf{b}$ et à l'ensemble des contraintes s'exerçant sur les différentes facettes de fluide que l'on peut identifier à l'intérieur de ce volume et sur sa surface extérieure (cf. Fig. 1.6). Dans ce cas la somme des forces extérieures s'exerçant sur les différents éléments de ce volume s'écrit :

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{b} \Omega_i + \sum_{\text{facettes}} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (1.15)$$

Dans le second terme du membre de droite, les contraintes mutuelles au sein du fluide, qui s'exercent de part et d'autre d'une facette entièrement comprise dans le volume considéré, s'annulent deux à deux et il ne reste que les contraintes s'exerçant le long de la surface frontière (Σ) du volume considéré.

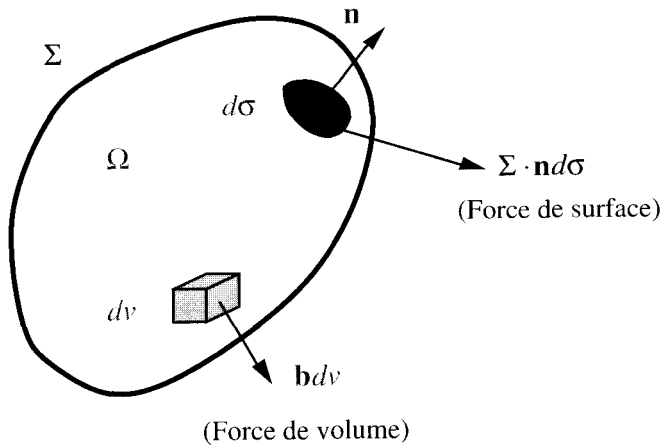


Fig. 1.6 : Principales forces s'exerçant sur les éléments du fluide : force de volume et force de surface.

Pour calculer l'accélération d'un élément du volume considéré il faut tenir compte du fait que la vitesse que l'on utilise ($\mathbf{u}$) n'est pas nécessairement la vitesse du même élément de fluide d'un instant à l'autre puisqu'elle n'est associée qu'à une position à un instant donné. L'accélération d'un élément de fluide s'écrit en fait :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.16)$$

où $d\mathbf{x} = \mathbf{u}dt$ est le chemin parcouru par l'élément de fluide situé en $\mathbf{x}$ à t pendant l'intervalle de temps dt . De cette manière on suit effectivement un élément de fluide et on en déduit :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.17)$$

En sommant les expressions du principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque élément compris dans le volume considéré on obtient, en utilisant (1.15) et (1.17) et après quelques manipulations mathématiques :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{b} d\mathbf{v} + \int_{\Sigma} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) d\sigma \quad (1.18)$$

De cette expression valable quel que soit le volume fluide considéré, on déduit l'expression locale du principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{b} + \nabla \cdot \Sigma \quad (1.19)$$

1.3.3 Les fluctuations temporelles

Les fluides étant constitués d'une assemblée désordonnée d'éléments de formes *a priori* diverses et éventuellement soumis aux effets de l'agitation thermique, les évolutions des valeurs des variables associées à des volumes élémentaires ne sont pas régulières mais au contraire fluctuent autour de valeurs moyennes. En pratique cependant on mesure ces valeurs sur des périodes finies qui en général ne permettent pas d'observer ces fluctuations. Plus précisément on peut par exemple exprimer la vitesse instantanée en un point donné sous la forme :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (1.20)$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ est la valeur moyenne (dans le temps) de la vitesse et $\mathbf{u}'$ sa valeur fluctuante. On admet que $\bar{\mathbf{u}}$ est la valeur mesurée par l'expérimentateur si l'enregistrement a une durée finie, supérieure à celle nécessaire pour que la moyenne de la variable sur cette durée soit très proche de la moyenne au bout d'un temps très long, et inférieure à celle au-delà de laquelle des évolutions temporelles significatives de l'écoulement se produisent. Dans le cas d'un écoulement dont le temps caractéristique des évolutions temporelles de la vitesse moyenne (dans le temps) est Θ on peut adopter la définition suivante :

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{u} dt \text{ avec } \bar{\mathbf{u}}(\theta^*) = \text{Cst. pour } \Theta > \theta^* > \theta \quad (1.21)$$

On peut définir de manière analogue les termes fluctuants et moyens des autres variables. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont valables *a priori* uniquement lorsqu'on y introduit les valeurs instantanées des variables. Les expressions correspondantes pour les valeurs moyennes des variables se déduisent en moyennant ces équations dans le temps (sur une durée adaptée). Au cours de cette opération tous les termes proportionnels à une variable ou à deux variables dont les fluctuations sont supposées sans corrélation donnent des termes analogues mettant en jeu la valeur moyenne de la variable. En revanche, il existe dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement un terme qui n'est pas linéaire par rapport à la vitesse ou l'une de ses dérivées, il s'agit du terme $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de l'équation (1.12) dont la moyenne n'est pas égale au produit de la moyenne de chaque facteur, on a en effet :

$$\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} \quad (1.22)$$

Moyennant quelques hypothèses (système ergodique et opérateur moyenne dans le temps permutant avec les opérateurs de différentiation) on peut montrer que $\overline{\rho \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}$ s'écrit aussi $\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'})$. On constate alors que l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit, avec les valeurs moyennes des variables (que l'on notera pour simplifier dans la suite sans le signe de barre), de manière analogue à l'expression locale à condition d'utiliser un tenseur des contraintes modifié [16] :

$$\Xi = \Sigma - \rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \quad (1.23)$$

Rappelons que les valeurs des variables s'entendent aussi toujours comme des valeurs moyennes sur des volumes élémentaires. Le tenseur Ξ n'échappe pas à la règle. D'un point de vue général l'expression (1.23) permet d'inclure dans le tenseur des contraintes un terme lié au transport de quantité de mouvement à travers le fluide. Une même expression permet alors de traduire la résistance à l'écoulement liée aussi bien aux frottements ou aux contacts des éléments les uns avec les autres, qui sont à l'origine du tenseur des contraintes Σ , qu'à la turbulence (cf. § 1.3.4) de l'écoulement, à l'agitation thermique (cf. § 3.7.3) ou au mouvement brownien (cf. § 2.4.2) de ces éléments. Notons enfin que l'on peut faire apparaître au sein de (1.23) un terme de pression résultant des fluctuations de vitesse ($tr(\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'})/3$).

1.3.4 La turbulence

Lorsqu'on augmente progressivement la vitesse d'écoulement d'un fluide on constate que les fluctuations au cours du temps de la valeur locale des différentes variables autour d'une valeur moyenne deviennent de plus en plus importantes jusqu'à devenir prédominantes. Il s'agit de ce qu'on appelle la turbulence. Comme en particulier les vitesses locales fluctuent dans toutes les directions autour de la vitesse moyenne ce phénomène accélère la diffusion au sein du fluide. On observe alors facilement la turbulence au travers de cet effet : un colorant injecté dans un écoulement turbulent

diffuse beaucoup plus rapidement dans les directions perpendiculaires à celle de la vitesse moyenne du fluide. La turbulence se produit lorsque l'inertie des éléments du fluide est trop grande devant les dissipations d'énergie visqueuse liées au mouvement moyen. On peut alors quantifier ce phénomène à l'aide d'un nombre adimensionnel (le nombre de Reynolds) calculé à partir du rapport des énergies correspondantes (cf. § 2.7). Remarquons que la valeur limite de ce nombre au-delà de laquelle la turbulence est significative dépend des conditions initiales et aux limites de l'écoulement car ce phénomène a un caractère non local marqué.

Le problème de la turbulence provient du fait qu'il n'est pas possible dans l'état actuel des connaissances de déterminer directement les évolutions des termes fluctuants de la vitesse en fonction des autres variables (moyennes). Notamment, du fait du caractère non local de la turbulence, il n'est plus envisageable de déterminer par des expériences indépendantes l'équivalent d'une loi de comportement du fluide en régime turbulent par le biais d'expériences indépendantes et de prédire les caractéristiques d'écoulements dans d'autres conditions. L'« état » de la turbulence est indissociable des caractéristiques de l'écoulement. Dans le cas général, pour modéliser un écoulement au sein d'une géométrie nouvelle le second terme de Ξ doit finalement être estimé par des procédures relativement complexes. Sauf exceptions clairement mentionnées, la loi de comportement des suspensions telle qu'elle est envisagée dans le cadre de cet ouvrage correspond à des écoulements laminaires, c'est-à-dire pour lesquels les phénomènes de turbulence sont négligeables.

1.3.5 Résolution d'un problème d'écoulement

Il faut adjoindre aux équations ci-dessus des conditions initiales et aux limites suffisantes pour que le problème soit bien posé et possède une solution d'un point de vue mathématique. En simplifiant on peut dire qu'il faut connaître en chaque point trois composantes au total parmi celles de la vitesse ou du tenseur des contraintes, selon des axes indépendants. En pratique c'est souvent le cas, on connaît ou on suppose donné, par exemple, le débit au cours du temps à l'amont d'un écoulement à surface libre ainsi que la géométrie au sein de laquelle se produit l'écoulement (la vitesse est donc nulle le long des parois). De même, pour un écoulement dans une conduite le débit ou la différence de pression entre les extrémités nous est donné et on suppose en général que la vitesse est nulle aux parois.

Considérons maintenant un problème d'écoulement à température constante et pour lequel les fluctuations temporelles de la vitesse sont négligeables et les conditions initiales et aux limites sont connues. Dans ce cas les équations (1.14) et (1.19) régissent *a priori* le mouvement. Or, on est en présence de quatre équations mettant en jeu dix inconnues ($\rho, u, v, w, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$). On ne peut donc pas *a priori* résoudre un problème quelconque d'écoulement sans informations supplémentaires, ou plus précisément sans relations supplémentaires entre ces variables. Ces relations constituent

ce qu'on appelle la loi de comportement du matériau. En l'absence de variations de température, on exprime souvent cette loi de comportement sous la forme de six expressions donnant Σ en fonction de ρ et $\mathbf{u}$. Sauf mention explicite on s'intéressera dans la suite de cet ouvrage essentiellement aux caractéristiques de la loi de comportement en l'absence d'échanges thermiques. Le problème est du même type, quoique plus complexe, lorsqu'on s'intéresse en outre à des écoulements au sein desquels les variations de température sont significatives. De nouvelles variables interviennent ($T, e, \mathbf{q}$) dont les évolutions sont régies par le principe de conservation de l'énergie (cf. Annexe 1.1) et qui doivent être reliées entre elles et aux autres variables par l'intermédiaire de la loi de comportement. Lorsque les fluctuations temporelles de la vitesse liées à une agitation interne des éléments du fluide ne sont pas négligeables, le tenseur additionnel dans (1.23) peut être déterminé directement en fonction de l'état local du matériau et des caractéristiques de l'écoulement. Dans ce cas, (1.23) est l'expression de la loi de comportement du matériau. Ceci n'est pas vrai lorsque les fluctuations temporelles résultent de la turbulence de l'écoulement (cf. 1.3.4).

Lorsqu'on connaît la loi de comportement d'un matériau, rien ne s'oppose plus alors, en théorie, à la résolution du problème. En pratique, cependant, le système d'équations dont on dispose est très complexe et, dans l'état actuel des connaissances une résolution même numérique ne peut pas aboutir dans le cas général. Il est souvent nécessaire de simplifier le problème en supposant que certains phénomènes ou caractéristiques de l'écoulement jouent un rôle mineur. C'est par exemple le cas dans les modélisations numériques d'écoulements à surface libre reposant sur les équations de Saint-Venant qui sont obtenues en intégrant les équations (1.14) et (1.19) sur l'épaisseur de l'écoulement. On néglige alors certains effets de pression ou de contraintes normales. Pour d'autres écoulements plus complexes, on verra (cf. chap. 5 et 6) que des modélisations très simplifiées sont développées, qui ne prennent en compte que quelques phénomènes supposés prédominants.

1.3.6 Milieux continus généralisés

Nous venons de présenter les concepts qui fondent la mécanique des milieux continus classique. Il est tout à fait possible de ne pas se limiter aux hypothèses restrictives sous-jacentes à cette représentation mathématique des matériaux et de construire d'autres représentations en généralisant certaines notions et en partant sur de nouvelles hypothèses. Par exemple, dans la définition des contraintes donnée à l'éq. (1.4), nous avons écarté la possibilité de couples s'exerçant entre les éléments du milieu. De même dans la définition de la déformation (cf. § 1.4.2), on se limite usuellement aux gradients de déplacement (d'où parfois la désignation de la mécanique des milieux classiques comme la théorie du premier gradient) mais on pourrait pousser le développement à des termes d'ordre supérieur pour rendre compte d'une microdéformation locale. De nombreux travaux ont été consacrés au développement de milieux continus généralisés (voir par exemple [17 à 20]). À l'heure actuelle, très peu de ces recherches ont abouti à

des applications en rhéologie des suspensions. On peut quand même citer la théorie des milieux micropolaires (ou de Cosserat) où le mouvement local est défini à travers un déplacement et une rotation solide (censée décrire la rotation des particules) et où l'état dynamique local est décrit à l'aide d'une densité de forces surfaciques et de couples (voir par exemple [21] pour une description complète en mécanique des sols). Il n'est toutefois pas encore clairement établi dans quelle mesure le champ de vitesse de rotation (spin) des particules est continu. Plusieurs expériences montrent au contraire une non-corrélation de cette variable à l'échelle des particules (phénomène dit de frustration), ce qui semble remettre en cause l'intérêt de cette théorie pour les suspensions.

1.4 Lois de comportement

1.4.1 Généralités

Lorsque les échanges thermiques sont négligeables, la loi de comportement d'un matériau telle que nous l'avons identifiée est une relation entre les contraintes et le mouvement du fluide. D'un point de vue physique on cherche donc à déterminer les efforts entre deux groupes d'éléments du fluide situés de part et d'autre d'une surface en fonction du mouvement de ces groupes. Ces efforts dépendent à la fois du mouvement des deux groupes mais aussi de l'histoire de leur mouvement qui a influencé leur état. Cette notion d'état ne joue en général aucun rôle lorsqu'on a affaire à un liquide ordinaire dans des conditions d'écoulement habituelles, c'est-à-dire notamment dans des temps suffisamment longs par rapport au temps caractéristique lié à l'agitation thermique : à chaque instant (si la température reste constante) les molécules sont dans un état d'agitation identique et doivent interagir les unes avec les autres de manière *similaire*. En revanche, l'état du système peut jouer un rôle crucial pour des suspensions concentrées au sein desquelles des particules exercent les unes sur les autres des interactions qui peuvent varier sensiblement au cours du temps ou en fonction de la vitesse d'écoulement. Cet état peut *a priori* être caractérisé par une variable locale. Notons que pour certains types de matériaux il peut être préférable d'utiliser un tenseur plutôt qu'un scalaire. Quoi qu'il en soit, compte tenu de la courte portée des actions mutuelles entre les différents éléments du fluide, les contraintes s'exerçant sur un petit volume de fluide dépendent surtout de l'histoire du mouvement dans un environnement très proche de ce volume (c'est ce qu'on appelle le principe d'action locale). Encore une fois, nous verrons que dans le cas particulier des suspensions granulaires ce principe n'est certainement pas toujours vérifié (*cf.* § chap.3). De très nombreux types de lois de comportement ont été proposées en théorie, des plus simples au plus complexes. Parmi ces dernières, rares sont celles qui ont pu être validées par des expériences. En pratique, il nous semble plus utile de se référer à un schéma simple et raisonnable physiquement qui permet d'inclure les principales lois effectivement observées. Pour cela on suppose que les contraintes locales en un point dépendent seulement de l'état du système et des déformations à l'instant considéré dans un volume représentatif englobant ce point. Il nous faut donc disposer d'outils mathématiques pour quantifier les déformations.

1.4.2 Le tenseur des taux de déformation

La particularité des éléments d'un fluide est leur capacité à se mouvoir les uns par rapport aux autres. Dans le cas où le fluide s'écoule et en l'absence de glissement à la paroi, un mouvement en masse de l'ensemble du fluide est impossible, celui-ci se déforme effectivement. Dans ce cas la vitesse est différente d'un point à un autre, autrement dit le tenseur gradient de vitesse ($\nabla \mathbf{u}$) est non nul. Ce tenseur comprend d'abord des termes qui peuvent être associés à une élongation du matériau, il s'agit des termes qui sont situés sur sa diagonale : $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial z$. En effet lorsqu'un fluide est par exemple soumis à un écoulement tel que seuls ces termes sont non nuls et sont de plus constants, cela signifie que chaque composante de la vitesse est proportionnelle à la distance du point considéré par rapport à l'origine (cf. § 1.4.5). Par conséquent, un échantillon de fluide subit au cours du temps selon les directions considérées une extension ou une contraction progressives. Au contraire, les termes du tenseur gradient de vitesse qui ne sont pas situés sur la diagonale sont associés à un cisaillement du matériau. Si par exemple seul le terme $\partial u/\partial y$ est non nul la vitesse varie seulement dans la direction y et des couches de fluides parallèles au plan Oxz glissent les unes par rapport aux autres. On cisaille donc le matériau dans la direction y . Toutefois si $\partial v/\partial x$ est aussi non nul et vaut $-\partial u/\partial y$, le mouvement du fluide est en fait un mouvement de rotation de l'ensemble des éléments autour d'un point fixe. Ce type de mouvement en masse ne donne *a priori* pas lieu à des interactions particulières entre éléments voisins, et ne doit donc pas avoir d'influence sur les contraintes au sein du fluide.

Dans le cadre de l'étude de la loi de comportement, il est par conséquent naturel de s'intéresser au tenseur des taux de déformations $\mathbf{D}$, la partie symétrique de $\nabla \mathbf{u}$, qui ne retient que les mouvements relatifs de cisaillement :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (1.24)$$

Les composantes de ce tenseur ne sont pas influencées par les rotations, puisqu'à chaque fois que deux termes symétriques par rapport à la diagonale de $\nabla \mathbf{u}$ ont une valeur opposée comme dans l'exemple ci-dessus, le terme qui leur correspond dans $\mathbf{D}$ est égal à leur somme qui est nulle. Notons que lorsque la masse volumique du fluide est constante on a d'après (1.14) :

$$\text{tr} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.25)$$

1.4.3 Forme simplifiée de la loi de comportement

Finalement, en tenant compte des diverses simplifications réalisées jusqu'à maintenant, la loi de comportement d'un matériau doit s'exprimer sous la forme d'une relation entre

le tenseur des contraintes en chaque point en fonction du tenseur des taux de déformation et de l'état instantané du fluide, qui pourrait être aussi décrit à l'aide d'un tenseur pour prendre en compte une anisotropie de cet état mais qu'il est la plupart du temps suffisant de décrire à l'aide d'une seule variable λ :

$$\Sigma = f(\mathbf{D}, \lambda) \quad (1.26)$$

Une équation supplémentaire donnant les variations de λ en fonction de l'histoire des caractéristiques de l'écoulement doit évidemment être adjointe à (1.26) pour que la loi de comportement soit complète. L'histoire de l'écoulement intervient donc par l'intermédiaire de l'état qu'il a atteint à l'instant considéré.

En fait, pour déterminer, ou tout du moins caractériser expérimentalement la loi de comportement d'un matériau, il faut *a priori* mesurer le champ des vitesses et le champ des contraintes au sein de ce matériau pendant un écoulement. En pratique il est souvent seulement possible de mesurer d'une part une vitesse moyenne d'écoulement dans une section ou la vitesse de rotation d'une surface donnée, et d'autre part un couple sur un outil, une différence de pression ou encore une force appliquée sur l'ensemble du fluide. On ne peut donc pas dans ces conditions déduire directement la forme tensorielle de la relation (1.26). Il est donc particulièrement utile de se placer dans des conditions telles que la forme du tenseur $\mathbf{D}$ soit la plus simple possible. De cette façon le nombre de relations entre les composantes de $\mathbf{D}$ et celles de Σ à déterminer par la mesure est réduit. C'est l'objectif de la rhéométrie que de réaliser des écoulements simples de ce type, pour lesquels on maîtrisera en outre au mieux les déformations du fluide en les faisant varier dans une gamme la plus large possible. Le lecteur intéressé par ces aspects pourra utilement se reporter aux textes théoriques plus complets et rigoureux de Coleman *et al.* [10] ou Piau [15] pour plus de détails concernant les écoulements dits viscosimétriques pour lesquels l'expression de la loi de comportement peut se simplifier. On s'intéresse ci-après à deux types d'écoulement simple, d'une part le cisaillement simple, qui est un écoulement viscosimétrique, et d'autre part l'élongation, qui n'en est pas un.

1.4.4 Cisaillement simple

On s'intéresse donc le plus souvent à une situation, appelée cisaillement simple, telle qu'il existe un repère dans lequel le tenseur $\mathbf{D}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

où $\dot{\gamma}$ est le gradient de vitesse. On obtient une expression de ce type par exemple lors du cisaillement permanent d'un fluide entre deux plans parallèles en mouvement relatif de translation (*cf.* Fig. 1.7) à la vitesse V . En effet, en l'absence d'autres actions

extérieures sur le fluide (la gravité est notamment négligée), on peut facilement montrer en écrivant l'équilibre des forces sur des volumes de contrôle parallélépipédiques dont deux faces sont parallèles au plan de glissement, que la contrainte tangentielle dans tous les plans parallèles aux surfaces solides est constante. En outre par raison de symétrie la vitesse ne peut avoir de composante non nulle dans une direction autre que celle de la vitesse relative des plans. Cette vitesse n'a pas de raison particulière de varier à l'intérieur d'un plan donné, les couches de fluide associées à ces plans glissent donc en quelque sorte les unes sur les autres parallèlement aux plans. Finalement, comme le tenseur des contraintes ne varie pas d'un plan à l'autre le tenseur des taux de déformation est aussi constant puisque ces deux tenseurs sont liés par (1.26). Le seul terme non nul de $\mathbf{D}$, $\partial u / \partial y$, est constant entre les deux surfaces solides et on en déduit la distribution des vitesses suivante :

$$u = \dot{\gamma} y ; v = w = 0 \quad (1.28)$$

De plus, d'après (1.28), le gradient de vitesse s'écrit $\dot{\gamma} = V/H$ où H est l'épaisseur de fluide cisailée. Enfin on peut aussi montrer que la contrainte tangentielle le long de chaque plan s'écrit $\tau = F/S$ où F est la force appliquée aux plans dans la direction du mouvement et S la surface cisailée.

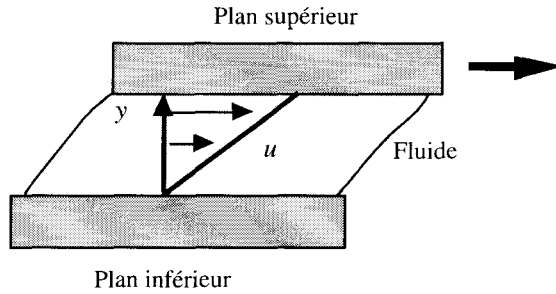


Fig. 1.7 : Cisaillement entre deux plans parallèles en mouvement relatif. Dans ce cas la distribution de vitesse du fluide placé entre les deux plans est du type (1.28).

Lorsque $\mathbf{D}$ s'écrit sous la forme (1.27) on peut montrer (à l'aide des principes de la mécanique rationnelle (cf. [15])) que le tenseur des contraintes s'exprime dans le même repère sous la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

La pression est reliée à la masse volumique par une équation d'état (notamment pour les gaz) ou bien on suppose que la masse volumique est constante, ce qui permet de considérer la pression comme une variable inconnue à la place de ρ . Dans ces conditions, en admettant que la pression $p = 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ a été déterminée indépendamment, le tenseur des contraintes ne comprend plus que trois inconnues. On définit alors la contrainte tangentielle :

$$\tau = \sigma_{12} \quad (1.30)$$

et les première et seconde différences de contraintes normales :

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} ; N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (1.31)$$

La viscosité apparente (μ) est quant à elle définie de la manière suivante :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.32)$$

Pour ce cisaillement simple on se trouve donc dans des conditions telles que les différentes variables caractérisant le tenseur des contraintes, τ , N_1 , N_2 , sont les seules fonctions de $\dot{\gamma}$, qui caractérise quant à lui complètement le tenseur $\mathbf{D}$. On comprend mieux dans ce cadre tout l'intérêt de la rhéométrie, qui ramène la recherche d'une expression tensorielle du type (1.26) à la recherche de trois relations entre scalaires. Dans ce cas particulier, on est donc en principe capable, en prenant des mesures adaptées en termes d'efforts tangentiels et normaux de déterminer complètement la forme de (1.26). Les principales géométries d'écoulement permettant de réaliser de telles mesures sont décrites en détail au chapitre 4. Il est important de noter que cette approche simplificatrice peut masquer un certain nombre de difficultés. Ainsi, on infère en général la relation tensorielle générale (1.26) la plus simple à partir de l'expression déterminée en cisaillement simple alors qu'une multitude de relations tensorielles compatibles avec cette expression sont *a priori* possibles.

1.4.5 Élongation

Les écoulements d'élongation sont aussi parfois utilisés pour caractériser le comportement d'un fluide. Dans ce cas toutes les composantes tangentielles (liées à un cisaillement) du tenseur des taux de déformations sont nulles et $\mathbf{D}$ peut s'écrire dans un repère approprié sous la forme :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

où b , c et d sont trois constantes telles que $b + c + d = 0$ (d'après (1.14)). Dans le cas de l'élongation simple uniaxiale, le profil des vitesses s'exprime :

$$u = ax ; v = -\frac{a}{2}y ; w = -\frac{a}{2}z \quad (1.34)$$

où a est une constante. Ce type d'écoulement est obtenu si l'on parvient à étirer un cylindre de fluide à une vitesse exponentielle. On a alors $b = a$ et $c = d = -a/2$. De plus le tenseur des contraintes n'a pas de composantes tangentielles non nulles et la viscosité élongationnelle vaut par définition :

$$\mu_E = \frac{N_1(a)}{a} \quad (1.35)$$

1.4.6 Dissipations d'énergie

Connaissant les efforts et les déformations au sein du fluide, on peut calculer la puissance des efforts intérieurs dans un volume donné Ω . Celle-ci s'écrit :

$$P = \sum_i d\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i \quad (1.36)$$

où i représente un contact entre deux surfaces élémentaires contiguës (de surface $d\sigma$ et de normale $\mathbf{n}_i$) dans le volume Ω et $\mathbf{u}_i$ est la vitesse relative de ces surfaces. Par définition la force locale s'écrit $d\mathbf{F}_i = \Sigma \cdot \mathbf{n}_i d\sigma$ et la vitesse relative vaut $u_i = \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$ où $d\mathbf{x}$ est le vecteur joignant les centres des éléments du fluide de part et d'autre de la surface considérée. La puissance dissipée (dP) strictement au sein d'un volume élémentaire représentatif centré autour d'un point peut être calculée en ajoutant les puissances dissipées le long de surfaces de normales orientées selon les trois directions possibles ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, ou $\mathbf{k}$), ce qui nous donne finalement $dP = \text{tr}(\Sigma \cdot \mathbf{D})d\Omega_e$. On en déduit alors la puissance dissipée au sein d'un volume quelconque Ω :

$$P = \int_{\Omega} \text{tr}(\Sigma \cdot \mathbf{D})dv \quad (1.37)$$

On obtient un résultat analogue par une approche rigoureuse faisant intervenir l'écriture détaillée du principe de conservation de l'énergie (cf. Annexe 1.1). Cette expression a un sens particulier dans le cadre d'une étude des lois de comportement puisqu'elle représente les dissipations d'énergie liées à la résistance aux mouvements relatifs des éléments les uns contre les autres, il s'agit donc de ce qu'on appellent les dissipations visqueuses.

1.5 Principaux types de comportement

1.5.1 Généralités

Nous nous proposons ici de dégager les grandes familles de comportement à partir d'une approche physique conceptuelle générale de l'écoulement d'un fluide (qui ne peut toutefois pas prétendre s'appliquer à tout système). On considère un fluide quelconque que l'on suppose formé d'éléments qui exercent des forces mutuelles les uns sur les autres. Fondamentalement, la force entre deux éléments voisins varie en fonction de la distance qui les sépare. Un élément donné se trouve soumis à diverses forces émanant des éléments qui l'environne et son énergie potentielle varie donc en fonction de sa position dans l'espace ou plus précisément de la distribution dans l'espace des autres éléments. On appellera inclusion (à ne pas confondre avec le terme « inclusion » utilisé au début du chapitre 2) l'espace laissé libre par ces éléments. L'énergie potentielle d'un élément donné augmente lorsqu'on cherche à le faire sortir de l'inclusion dans laquelle il se trouve puisqu'on le rapproche alors provisoirement de certains de ses voisins. Il faut donc fournir une certaine énergie potentielle à un élément pour qu'il puisse se déplacer d'une inclusion à une autre. En fait cette énergie varie d'un élément à un autre du fait que les efforts, et donc l'énergie potentielle, se distribuent d'une manière relativement complexe à travers le réseau d'éléments désordonné. Lorsqu'on applique un effort au fluide on fournit aux éléments de l'énergie qui est capable de faire sortir une certaine proportion d'éléments de leur inclusion. Les éléments qui se déplacent ainsi sont ceux pour lesquels la barrière d'énergie était inférieure à l'énergie fournie. Finalement, cette fraction d'éléments définitivement déplacés hors de leur inclusion initiale permet au fluide de s'écouler macroscopiquement. La fréquence de sortie d'une inclusion est proportionnelle à la fraction d'éléments dont l'énergie potentielle est suffisamment forte pour sortir grâce à l'énergie fournie, donc à la probabilité de sortie, et proportionnelle à la vitesse à laquelle les éléments passent d'une inclusion à une autre. Cette fréquence de sortie (ψ) est donc une fonction-clé pour décrire ce type de mouvement, qui varie d'un matériau à l'autre selon la façon dont les forces se distribuent au sein du fluide et, pour un matériau donné, varie essentiellement en fonction de l'énergie fournie au réseau d'éléments (E). Cette fonction est malheureusement inconnue dans l'état actuel des connaissances. Ceci nous amènera notamment à aborder les lois de comportement des suspensions sous un angle un peu différent (*cf.* chap.2) du cadre général proposé ici. Pour l'instant nous supposerons en outre qu'en se replaçant dans une nouvelle inclusion un élément reperd l'énergie potentielle qui lui a été fournie pour son déplacement. Ceci revient à admettre que tout se passe comme si on devait pousser une sphère en haut d'une colline et que celle-ci roulait tout seule au bas de l'autre versant sous l'action de son poids. Nous verrons ultérieurement que cette hypothèse est raisonnable pour des liquides ordinaires mais fausse pour d'autres types de matériau.

Dans la suite, nous considérons pour simplifier un cisaillement simple obtenu en plaçant le fluide entre deux plans parallèles en mouvement relatif. On applique une contrainte tangentielle τ au fluide ce qui lui fournit une certaine énergie. Dans ces

conditions on peut s'intéresser au mouvement relatif de deux couches particulières d'éléments supposées planes et parallèles (en s'affranchissant des problèmes liés au désordre dans la distribution des éléments autour de cette surface). Lors d'un mouvement élémentaire d'une inclusion à une autre voisine le travail fourni à un élément s'écrit en première approximation τb^3 où b est la distance moyenne entre les centres de deux éléments. L'énergie élémentaire fournie à chaque élément vaut donc $E = \tau b^3$. La vitesse d'avancement d'un élément d'une couche par rapport aux éléments de l'autre couche est directement déterminée par la distance parcourue lors de chaque saut multipliée par la fréquence de sortie. En interpolant ce qui se passe du niveau local vers le niveau macroscopique on en déduit la vitesse moyenne relative des deux couches d'éléments considérées, ce qui nous donne finalement la loi de comportement du fluide en cisaillement simple :

$$\dot{\gamma} = \psi(\tau b^3) \quad (1.38)$$

1.5.2 Fluide newtonien

Le comportement le plus simple est obtenu à partir de l'expression (1.38) en supposant que la fréquence de saut est simplement proportionnelle à l'énergie fournie :

$$\psi(E) \propto E \quad (1.39)$$

On obtient alors à partir de (1.38) et (1.39) le comportement dit newtonien, qui s'exprime en cisaillement simple sous la forme (cf. Fig. 1.8) :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.40)$$

où μ est ici une constante du matériau. Notons que l'approche de Eyring détaillée en Annexe 1.2 repose sur des concepts analogues. Chaque particule a une probabilité d'extraction de son inclusion qui diminue avec l'énergie de la particule selon une loi de Boltzmann. De cette façon, on peut prédire essentiellement aux très faibles vitesses le caractère newtonien des liquides simples, et les évolutions de la viscosité avec la température et la pression sont en assez bon accord avec la réalité.

La description mathématique complète du comportement newtonien est possible au moyen de la formulation tensorielle suivante :

$$\Sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (1.41)$$

Un certain nombre de fluides sont newtoniens dans les conditions usuelles d'écoulement. C'est le cas de l'eau, des huiles ordinaires, des sirops, de la glycérine, des alcools. Puisque ce comportement est associé à des propriétés physiques particulières on comprendra aisément que le caractère newtonien d'un fluide n'est en

général plus valable dans des conditions d'écoulement extrêmes (vitesse très lente ou très rapide par exemple). Les liquides simples ont notamment un comportement essentiellement élastique lorsque des sollicitations très courtes leur sont appliquées. Vis-à-vis de l'étude des fluides complexes, le modèle newtonien constitue surtout une façon commode d'exprimer, en première approximation, la résistance au cisaillement d'un fluide quelconque, à partir du moment où l'on n'est pas capable (ou que cela ne présente pas d'intérêt) de déterminer précisément le comportement réel du fluide, c'est-à-dire en particulier dans une large gamme de gradients de vitesse. Ce type d'approche se justifie dans certaines situations pratiques. L'un des objectifs de cet ouvrage est précisément d'apporter des éléments pour juger dans quelles conditions on peut se satisfaire ou non de cette démarche simplificatrice.

1.5.3 Vers des propriétés plus complexes

Nous avons jusqu'ici supposé qu'un élément restituait d'une manière ou d'une autre, immédiatement après avoir été extrait de son inclusion initiale, une énergie égale à celle qu'il avait emmagasinée pour en sortir. Ceci paraît assez réaliste pour des liquides ou des fluides constitués de très petits éléments soumis à une agitation brownienne importante. Dans ce cas, chaque élément reperd rapidement par agitation thermique l'énergie qui lui a été fournie. Notons au passage que lorsque le mouvement brownien est ainsi important notre description de la distribution des éléments dans l'espace doit être comprise comme une image instantanée ou une moyenne à définir. Pour des systèmes composés d'éléments plus gros (des suspensions par exemple) l'agitation thermique n'est pas assez puissante pour imposer à chaque élément de restituer rapidement l'énergie qui lui a été fournie. Par conséquent, l'énergie à fournir pour extraire un élément de son inclusion varie en fonction de l'état instantané d'énergie de cet élément, qui dépend lui-même de l'histoire de la suspension. Dans le cadre de cette approche simplifiée, il n'est pas raisonnable de chercher à décrire cet état en prenant en compte son influence exacte sur la loi de comportement et ses variations le long de diverses directions. Nous supposons donc que cet état peut être correctement décrit par une variable locale représentée par un scalaire (W) dans chaque volume élémentaire du fluide. W pourrait représenter le décalage de la barrière d'énergie moyenne (W) des éléments résultant de l'écoulement.

Comme la profondeur des puits de potentiel est remontée de W , tout se passe maintenant comme si l'énergie fournie aux éléments valait $E + W$. W évolue au cours du temps en fonction de l'énergie initiale des éléments et du temps laissé aux éléments pour relaxer (sans toutefois l'atteindre en général) vers leur état d'énergie initial au cours de chaque phase élémentaire du mouvement. Ce dernier correspond bien entendu au temps caractéristique de l'écoulement ($T_h = 1/\dot{\gamma}$). Comme on est souvent plus apte à décrire directement les évolutions en cours d'écoulement d'un paramètre de structure (λ) du fluide, tel que le nombre de liens entre des particules ou la taille d'agrégats, on introduit les variations de l'état d'énergie sous la forme d'une fonction $W(\lambda)$. Dans ce

cadre la loi de comportement en cisaillement simple s'exprime maintenant :

$$\begin{aligned} \psi(E + W(\lambda)) &\propto \dot{\gamma} \\ \lambda(t) &= \mathcal{F}(\lambda_0, \dot{\gamma}(t' < t)) \end{aligned} \quad (1.42)$$

où $\mathcal{F}$ est une fonctionnelle inconnue *a priori* et λ_0 l'état initial du fluide. Notons que le schéma le plus naturel consiste à utiliser comme paramètre de structure (λ) le décalage de la barrière d'énergie moyenne (W) des éléments résultant de l'écoulement, ce qui s'écrit $W(\lambda) = \lambda$.

1.5.4 Thixotropie

Dans sa plus grande généralité l'équation (1.42) montre que le comportement du fluide, ou encore sa viscosité, évolue au cours du temps alors que les conditions aux limites sont fixées (la vitesse de rotation de l'outil ou le couple appliqué). Il s'agit du phénomène dit de thixotropie. On distingue aussi quelquefois la thixotropie de l'anti-thixotropie ou rhéopexie, selon que la viscosité respectivement décroît ou croît au cours du temps. Si le premier phénomène est couramment observé en pratique et semble correspondre à une propriété physique claire (la déstructuration du fluide en cours d'écoulement conduit logiquement à diminuer provisoirement la profondeur de la barrière d'énergie potentielle des éléments) le second phénomène est plus rare. Il est important de bien distinguer la thixotropie, qui correspond à des évolutions temporelles de la viscosité, de la rhéofluidification (cf. § 1.5.5), qui correspond à des évolutions de la viscosité en fonction du régime d'écoulement. Certains matériaux sont thixotropes au point qu'ils donnent l'impression de se liquéfier littéralement au cours d'un écoulement. C'est le cas par exemple des mélanges eau-laponite (une argile de synthèse) qui peuvent avoir l'aspect relativement solide d'une mayonnaise après quelques heures de repos et en revanche couler comme de l'huile peu visqueuse après une légère agitation. Notons enfin que tout fluide est *a priori* thixotrope car sa réaction à une sollicitation n'est pas immédiate. L'importance de la thixotropie dans l'écoulement d'un matériau peut être évaluée à partir du nombre de Déborah, défini comme le rapport du temps caractéristique d'une évolution significative de la viscosité et du temps caractéristique de l'écoulement. Lorsque le nombre de Déborah est très petit devant un la thixotropie est négligeable.

La fonctionnelle $\mathcal{F}$ de l'équation (1.42) est en général très mal connue et les modèles proposés pour représenter les phénomènes de thixotropie reposent donc sur des spéculations concernant les évolutions de la microstructure. Une solution possible consiste à considérer qu'à chaque instant le taux de variation de W est égal à la différence entre un taux d'excitation (ou de déstructuration) des éléments proportionnel à la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma} = l/T_h$ et un taux de relaxation (ou de restructuration) proportionnel à une fréquence caractéristique du matériau l/T_0 , ce qui nous donne :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{F(W)}{T_0} - \frac{G(W)}{T_h} \quad (1.43)$$

où F et G sont deux fonctions inconnues *a priori*.

1.5.5 Fluides rhéofluidifiants ou rhéoépaississants

Lorsque le temps de l'expérience est grand devant T_0 les éléments parviennent à oublier leur état de référence et on atteint un régime permanent. Dans ce cas le membre de gauche de (1.43) est négligeable et λ est donc une fonction de T_0/T_h seul. En supposant T_0 fixé, la contrainte tangentielle est quant à elle une fonction de $\dot{\gamma}$ seul. En supposant que la fréquence de saut adoptée dans le cas newtonien est toujours valable on a alors une expression du type :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} - \frac{W(\dot{\gamma})}{b^3} \quad (1.44)$$

En pratique on constate que de nombreux fluides ont effectivement une viscosité apparente ($\tau/\dot{\gamma}$) qui varie avec le gradient de vitesse (cf. Fig. 1.8). Ce type de comportement est donc obtenu dès que les éléments du fluide conservent une énergie propre qui varie avec $\dot{\gamma}$. Lorsque la barrière d'énergie correspondant aux extractions augmente avec le gradient de vitesse ($W < 0$), on a affaire à un fluide dit rhéoépaississant, tel que μ croît avec $\dot{\gamma}$. Dans le cas contraire ($W > 0$) il s'agit d'un fluide dit rhéofluidifiant. La plupart des suspensions sont rhéofluidifiantes. Comme pour la thixotropie ceci résulte d'un phénomène physique à peu près clairement identifié : en régime permanent les particules ne se replacent pas immédiatement dans une position de minimum d'énergie potentielle et conservent donc en moyenne un niveau d'énergie d'autant plus élevé que l'écoulement est rapide car le temps qui leur est laissé pour cette opération est plus court (cf. § 2.4). Le rhéoépaississement est beaucoup plus rarement observé sauf dans des cas très particuliers, par exemple avec des suspensions très concentrées (concentrations volumiques supérieures à 50 %) de particules sphériques uniformes entre lesquelles les interactions colloïdales sont négligeables. On note alors une augmentation brutale de la viscosité à partir d'un gradient de vitesse donné qui pourrait résulter d'une transition ordre-désordre [22], les particules étant plus ou moins alignées aux faibles gradients de vitesse et dispersées aléatoirement aux forts gradients de vitesse. Dans le cadre de notre schéma conceptuel on peut considérer que dans ce cas la barrière d'énergie augmente très rapidement si un désordre s'installe. Un effet inverse (rhéofluidification) est observé pour des suspensions diluées : aux très faibles gradients de vitesse, le mouvement brownien peut devenir significatif, tendant alors à augmenter les mouvements fluctuants des particules, et du même coup la viscosité du mélange (cf. § 2.3). L'agitation diminue donc vers les fortes vitesses et tout se passe comme si l'amplitude de la barrière d'énergie diminuait. Le caractère rhéofluidifiant de certaines suspensions a aussi été expliqué à partir de l'hypothèse, douteuse pour des mélanges désordonnés et concentrés de particules anisotropes, que les particules en forme de plaquettes s'alignent d'autant plus que la vitesse est grande.

En pratique le modèle la plus simple pour représenter la rhéofluidification ou le rhéoépaississement est une loi de puissance :

$$\tau = a \dot{\gamma}^n \quad (1.45)$$

où a et n sont deux paramètres du matériau. La forme tensorielle associée en général à (1.45) est :

$$\mathbf{T} = 2^n a (\sqrt{-D_{II}})^{n-1} \mathbf{D} \quad (1.46)$$

où $D_{II} = (1/2)[(tr\mathbf{D})^2 - tr(\mathbf{D}^2)]$ est le second invariant de $\mathbf{D}$.

L'équation (1.45) donne une viscosité $\mu = a\dot{\gamma}^{n-1}$ qui décroît avec $\dot{\gamma}$ lorsque n est inférieur à 1 (rhéofluidification) et croît avec $\dot{\gamma}$ dans le cas contraire (rhéoépaississement). Divers autres modèles plus complexes ont été proposés dans la littérature notamment dans le cas de suspensions ayant un comportement newtonien avec une viscosité différente aux faibles et forts gradients de vitesse, μ_0 et μ_∞ [15, 23] (voir § 2.4) :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = f(\dot{\gamma}) \text{ avec } f(0) = 1 \text{ et } \dot{\gamma} \rightarrow \infty \quad f(\dot{\gamma}) \rightarrow 0 \quad (1.47)$$

1.5.6 Fluides à seuil

Dans certains cas, la distribution des forces au sein du fluide est telle que celui-ci possède certaines caractéristiques d'un solide : la configuration actuelle des particules ne peut pas être légèrement modifiée de manière définitive comme pour les liquides simples en déplaçant quelques éléments ou quelques groupes d'éléments. En fait, il existe une structure plus ou moins rigide d'éléments en interaction qui s'étend d'un bout à l'autre de l'échantillon. Pour provoquer un écoulement à vitesse extrêmement faible il faut imposer au fluide une force qui permet d'extraire de manière définitive un nombre fini d'éléments de leur inclusion (avec une barrière d'énergie E_0). Dans ces conditions la fréquence de saut est nulle tant que l'énergie fournie n'a pas dépassé la valeur limite E_0 . En reprenant une forme analogue au cas newtonien pour la fréquence de saut au-delà de cette limite, on a :

$$\begin{aligned} \psi(E) &= 0 \quad \text{quand } E < E_0 \\ \psi(E - E_0 + W) &\propto \dot{\gamma} \quad \text{quand } E > E_0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

En régime permanent, la loi de comportement en cisaillement simple s'exprime alors (cf. Fig. 1.8) :

$$\begin{aligned} \tau < \tau_c &\Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0 \\ \tau > \tau_c &\Leftrightarrow \tau = \tau_c + f(\dot{\gamma}) \text{ avec } f(0) = 0 \text{ et } f > 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

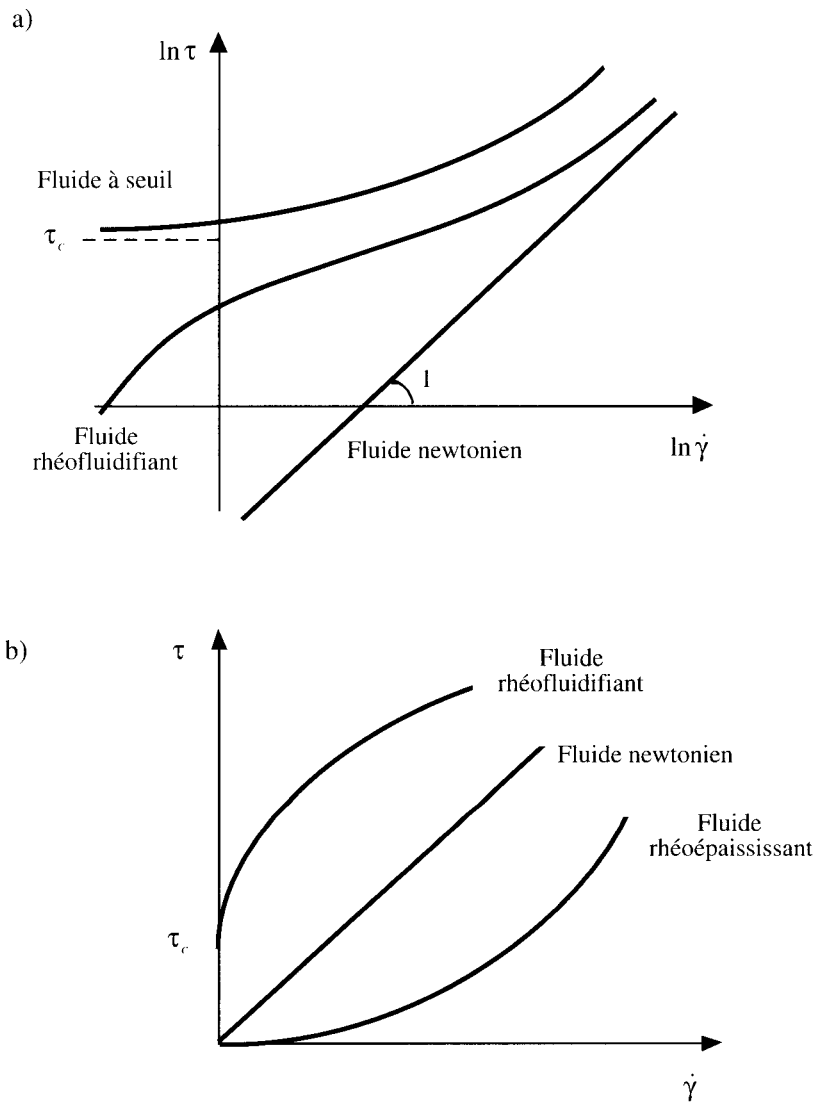


Fig. 1.8 : Représentation conceptuelle des principaux comportements en cisaillement simple permanent. Courbe d'écoulement (contrainte tangentielle-gradient de vitesse) dans un diagramme logarithmique (a) et dans un diagramme linéaire (b). Le niveau réel du seuil de contrainte est difficile à déterminer dans le diagramme en échelle linéaire (b), qui privilégie une gamme de gradients de vitesse particulière, car, pour les gradients de vitesse les plus faibles, la courbe est collée contre l'axe des ordonnées sur une distance variable, qui dépend beaucoup de la gamme d'expériences réalisées.

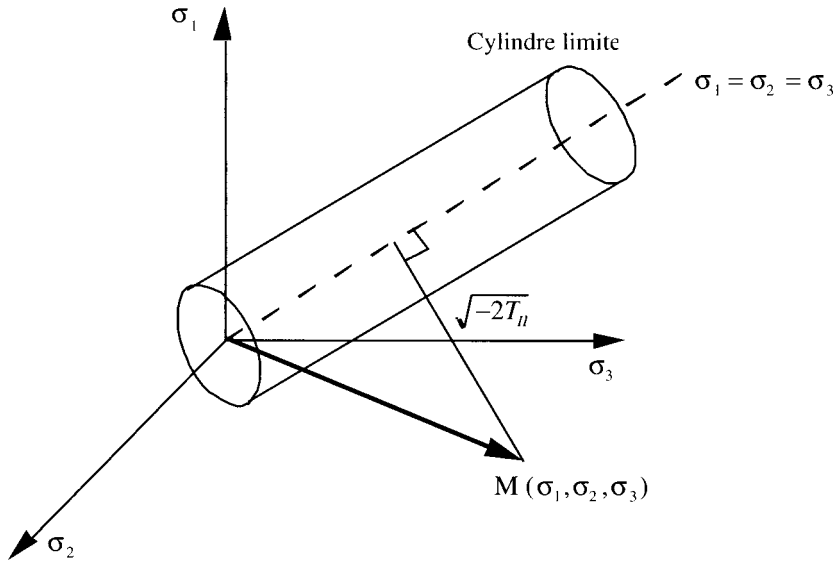


Fig. 1.9 : Représentation, dans un repère formé des axes principaux (parallèles aux contraintes principales, c'est-à-dire les vecteurs propres du tenseur des contraintes), de la surface de contrainte délimitée par le critère de Von Mises. Il s'agit d'un cylindre de révolution d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ et de rayon τ_c . Le vecteur $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ qui caractérise complètement le tenseur des contraintes est l'état de contrainte. Le premier invariant (p) représente l'état moyen de contrainte. La distance par rapport à cet axe est à un coefficient près le second invariant de ce tenseur et représente l'écart à l'état moyen.

Dans ces équations (simplifiées) τ et $\dot{\gamma}$ sont les amplitudes (positives) de la contrainte tangentielle et du gradient de vitesse et $\tau_c \propto E_0$ est le seuil de contrainte du fluide. En pratique, lorsque la contrainte est inférieure à cette valeur critique (τ_c) il n'y a pas d'écoulement possible mais un comportement solide peut être observé. Différents modèles ont été proposés, qui correspondent à des fonctions f de formes diverses [24]. La forme tensorielle souvent associée à ce comportement met en jeu un terme analogue à celui utilisé dans le cas de la viscosité variable avec le gradient de vitesse (1.46) et un terme de résistance constant orienté dans le sens inverse de l'écoulement. Le critère de seuil d'écoulement sous forme tensorielle est supposé analogue à celui utilisé pour décrire le comportement des solides entrant dans le domaine plastique, il s'agit d'un

critère de type Von Mises. On obtient alors une loi de comportement de la forme [15] :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 0 \text{ quand } \sqrt{-T_{II}} < \tau_c \text{ et } \mathbf{T} \text{ est indéterminé} \\ \mathbf{T} &= \tau_c \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{-D_{II}}} + F(D_{II})\mathbf{D} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (1.50)$$

où F une fonction positive continue telle que $F(x^2)x$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ce type de comportement est typique des suspensions concentrées et on l'observe dans de très nombreuses situations : avec de la boue (cf. chap.7), certaines graisses, du béton frais, des pâtes alimentaires, certaines peintures, des polymères chargés, des cosmétiques, etc.

1.5.7 Viscoélasticité

Les matériaux viscoélastiques ont dans certaines conditions des caractéristiques analogues à celles de corps élastiques (non fluides) et dans d'autres conditions des caractéristiques de fluides simplement visqueux. Plus précisément, lorsqu'une sollicitation leur est imposée pendant une durée très courte, leur réponse est essentiellement élastique, c'est-à-dire que la déformation résultante est proportionnelle à la force appliquée. En revanche, lorsqu'une sollicitation leur est imposée pendant une durée assez longue, leur réponse est essentiellement visqueuse, c'est-à-dire qu'ils se déforment inexorablement (la déformation tendant vers l'infini). C'est le cas par exemple de certaines pâtes silicones qui se comportent comme des balles en caoutchouc solide lorsqu'on les fait rebondir et qui s'étalent si on les abandonne quelques temps sur un plan incliné.

Dans le cadre de notre schéma conceptuel il semble raisonnable d'associer ce comportement à un phénomène de coincement provisoire des éléments au sein du réseau d'éléments (typiquement des chaînes des polymères enchevêtrées). Ce phénomène est évidemment associé à un temps caractéristique T_E du fluide viscoélastique. Si on impose un mouvement relativement lent ($T_h \gg T_E$) au fluide, les différents éléments ont le temps de se réarranger en minimisant les extractions d'éléments de leurs inclusions. Au contraire, si on impose un mouvement rapide ($T_h \ll T_E$) les éléments n'ont plus le temps de choisir des chemins qui minimisent le nombre d'extractions. Finalement, dans le cadre de notre équivalence de la distribution d'énergie en termes de fréquence de saut associée à la barrière d'énergie moyenne, tout se passe comme si la fréquence variait aussi en fonction de la vitesse avec laquelle l'énergie est fournie au système. On a alors une expression de la forme :

$$\Psi\left(T_E \frac{dE}{dt}, E\right) \propto \dot{\gamma} \quad (1.51)$$

En supposant que cette probabilité est simplement égale à la somme des deux variables dont elle dépend on obtient le modèle de Maxwell qui permet de représenter en première approximation le comportement des fluides viscoélastiques :

$$\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\mu} \tau = \dot{\gamma} \quad (1.52)$$

où G est le module d'élasticité du fluide et μ sa viscosité. Selon ce modèle les effets élastiques sont effectivement observables surtout lorsque le temps caractéristique de l'écoulement ($T_h = 1/\dot{\gamma}$) est largement inférieur au temps caractéristique de ce fluide viscoélastique ($T_E = \mu/G$). Dans ce cas, le second terme du membre de droite de (1.52) est négligeable et on obtient après intégration $\tau = G\gamma$. Les effets élastiques ne sont au contraire pas observables lorsque $T_h \gg T_E$ et on déduit alors de (1.52) $\tau = \mu\dot{\gamma}$.

La viscoélasticité a été abondamment étudiée dans le domaine des polymères qui sont des matériaux typiquement viscoélastiques, et de nombreux modèles, parfois très sophistiqués, ont été proposés pour représenter plus finement les comportements observés (cf. [8], tome II). Fondamentalement, les propriétés élastiques de ces fluides proviennent de la capacité des chaînes de polymères, de formes aléatoires, à se tendre provisoirement lorsqu'on les soumet à un effort. Cette tension étant limitée par la longueur totale de la molécule, un écoulement se produit au plus tard à la fin de la mise en tension, la viscosité du fluide résulte alors du mouvement relatif des chaînes. La viscoélasticité des dispersions concentrées résulte d'un phénomène très différent (cf. § 2.5.6.5) quoiqu'entrant toujours dans le cadre de notre schéma général : les particules prises dans des puits de potentiel locaux ne sortent que lorsqu'une énergie suffisante est fournie, ce qui provoque ainsi un écoulement au niveau macroscopique ; au cours de l'écoulement une fraction des particules peut emmagasiner de l'énergie élastique sans toutefois sortir des puits de potentiel dans lesquels elles se trouvent.

Une manière commode de quantifier la viscoélasticité est de soumettre l'échantillon de fluide à un cisaillement oscillant $\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$ où γ_0 et ω sont respectivement l'amplitude de la déformation et la fréquence imposées. En régime établi la contrainte enregistrée s'exprime alors sous la forme $\tau = \tau_0 \sin(\omega t + \psi)$ où τ_0 est l'amplitude de contrainte résultante et ψ le déphasage entre la contrainte et la déformation. On peut alors définir le module élastique et le module visqueux, G' et G'' , du matériau lors d'une telle expérience :

$$G' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \psi ; G'' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \psi \quad (1.53)$$

Pour un matériau purement élastique et linéaire G' est constant et G'' est nul. Pour un fluide newtonien G' est nul et G''/ω est en fait la viscosité du fluide. Pour un fluide viscoélastique G' est grand et G'' faible pour de faibles valeurs de γ_0 , et G' est faible et G'' grand pour de grandes valeurs de γ_0 .

Annexe 1.1

Conservation de l'énergie

Il s'agit ici du premier principe de la thermodynamique, selon lequel il existe une fonction E , l'énergie interne, fonction de l'état thermodynamique du système, telle que la variation d'énergie totale du système, définie comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique, est égale aux apports extérieurs de travail et de chaleur. Nous ne détaillerons pas plus avant les origines physiques de ce principe. Sous forme détaillée celui-ci s'écrit finalement :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = P_e(u) + \frac{\delta Q}{\delta t} \quad (1.54)$$

$$\text{avec } E = \int_{\Omega} \rho e dv ; K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^2 dv ; P_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\Sigma} (\Sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\sigma$$

où e est la densité volumique d'énergie interne. Par ailleurs on peut aussi écrire le flux de chaleur apporté ($\delta Q/\delta t$) au volume considéré (Ω) sous la forme :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_{\Omega} r dv - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (1.55)$$

où r est la densité volumique de taux de chaleur reçue (par le biais de réactions chimiques par exemple) et $\mathbf{q}$ le courant de chaleur local. On peut exprimer à nouveau (1.54) à l'aide de ces variables :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dv = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + r) dv + \int_{\Sigma} ((\Sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \quad (1.56)$$

La forme locale de (1.56) est donc :

$$\rho \frac{de}{dt} = \text{tr}(\Sigma \cdot \mathbf{D}) + r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.57)$$

Le membre de gauche de (1.57) représente le taux de variation de l'énergie du système. Les deux derniers termes sont liés à des transferts de chaleur au sens usuel (résultant de gradients de température). Le premier terme du membre de droite joue un rôle considérable dans l'étude des écoulements de fluides visqueux puisqu'il correspond à la puissance dissipée par frottement visqueux par unité de volume.

Annexe 1.2

Modèle de Eyring

Pour des liquides simples, Eyring suggère que chaque molécule est soumise à diverses forces d'attraction de la part de ses voisines si bien qu'il faut lui fournir une énergie minimale (ou énergie d'activation) (E_a) lui permettant de franchir une barrière de potentiel local et instantané. Chaque molécule vibre autour de sa position d'équilibre provisoire à une fréquence qui vaut approximativement kT/h où $h = 6,63.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. Par ailleurs, d'après la loi de Boltzmann résultant de principes de la physique statistique, à chaque instant la probabilité qu'une molécule soit dans un état d'énergie supérieur à E_a à la température T , est $\exp(-E_a/kT)$. La fréquence de saut élémentaire d'une molécule est égale au produit de la fréquence de vibration et de la probabilité de posséder une énergie suffisante :

$$f_0 = \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \quad (1.58)$$

Selon un axe donné, ces sauts sont équiprobables dans les deux directions et, en l'absence de contraintes externes, il n'y a donc pas de mouvement macroscopique du liquide. L'application d'une contrainte externe (τ) rompt cet équilibre. Une force approximativement égale à τs s'applique maintenant sur chaque molécule occupant une surface moyenne s . On suppose que la distance moyenne entre chacune de ces molécules est b . Le travail fourni lors d'un saut élémentaire d'une distance b s'écrit $E = \tau sb/2$. Le facteur 1/2 apparaît dans cette dernière expression car il est suffisant pour la particule de parcourir une distance lui permettant d'atteindre le sommet du puits de potentiel dans une direction quelconque, en l'occurrence une distance égale à la demi-largeur (qui vaut approximativement $b/2$) de ce puits suffit. L'énergie nécessaire pour un saut élémentaire est donc diminuée de E pour un saut dans le sens de la contrainte appliquée et augmentée de E dans le sens contraire. La fréquence de saut est ainsi modifiée par un facteur $\exp(\tau sb/2kT)$ dans le sens de l'écoulement et par un facteur inverse dans le sens contraire. La vitesse moyenne de déplacement relatif d'une couche de molécules est proportionnelle à la différence des fréquences de saut élémentaire :

$$U \propto \frac{bkT}{h} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{\tau sb}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{\tau sb}{2kT}\right) \right] \quad (1.59)$$

Par ailleurs on a $U = b\dot{\gamma}$. Pour des valeurs suffisamment faibles de la contrainte, et donc pour de faibles gradients de vitesse, le dernier facteur de l'expression (1.59) est simplement proportionnel à la contrainte tangentielle. Le rapport de la contrainte et du gradient de vitesse, c'est-à-dire la viscosité, ne dépend donc pas de $\dot{\gamma}$, ce qui signifie que l'on a affaire à un fluide newtonien. En supposant que $bs \approx v$ où v est le volume

d'une molécule la viscosité du liquide vaut finalement :

$$\mu \approx \frac{h}{v} \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) \quad (1.60)$$

La barrière d'énergie E_a peut aussi être vue comme l'énergie nécessaire pour créer un trou assez large pour accueillir une molécule. Cette énergie correspond donc à un processus physique analogue à la vaporisation et en pratique pour de nombreux liquides (sauf les métaux) on a $E \approx 0,3$ à $0,4L$ où L est la chaleur latente de vaporisation. Si maintenant une pression est appliquée au liquide, le travail à fournir pour créer un nouveau volume libre est augmenté de $p v_l$, et la viscosité est alors donnée par (1.59) en remplaçant E_a par $E_a + p v_l$. Les résultats expérimentaux, et notamment les variations de la viscosité avec la température et la pression, confirment les prédictions de cette théorie mais le volume libre à créer (v_l) s'avère en pratique seulement égal à une fraction (de l'ordre d'une dizaine de pour cent) de v sans que ce phénomène ait pu être expliqué de manière définitive.

Références

- [1] Guinier, A. 1980. *La structure de la matière*. Paris, Hachette.
- [2] Tabor, D. 1991. *Gases, liquids and solids*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [3] Zarzycki, J. 1982. *Les verres et l'état vitreux*. Paris, Masson.
- [4] Israelachvili, J. 1995. *Intermolecular and surface forces*. London, Academic press.
- [5] Batchelor, G.K. 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [6] Munson, B.R., Young, D.F., and Okiishi, T.H. 1994. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. New York, John Wiley & Sons.
- [7] Truesdell, C. 1974. *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*. Paris, Masson.
- [8] Bird, R.B., Armstrong, R.C., Hassager, O., and Curtiss, C.F. 1977. *Dynamics of Polymeric Liquids*. New York, John Wiley.
- [9] Cheremisinoff, N.P. 1988. *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. Paris, Gulf Publishing Company.
- [10] Coleman, B.D., Markowitz, H., and Noll, W. 1966. *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*. Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 5, Berlin, Springer Verlag.
- [11] Ferguson, J. and Kemblowski, Z. 1991. *Applied Fluid Rheology*. Amsterdam, Elsevier.
- [12] Couarraze, G. et Grossiord, J.L. 1983. *Initiation à la rhéologie*, Paris, Tec & Doc, Lavoisier.
- [13] Tanner, R.I. 1988. *Engineering Rheology*. Oxford, Clarendon Press.
- [14] Midoux, N. 1993. *Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique*. Paris, Tec & Doc, Lavoisier.
- [15] Piau, J.-M. 1979. Fluides non-newtoniens, *Techniques de l'Ingénieur*. A710, 1-16, A711, 1-24.

- [16] Batchelor, G.K. 1970. The stress suspension in a suspension of free-forces particles. *J. Fluid Mech.*, 41, 545-570.
- [17] Eringen, A. C. (Coord.). 1976. *Polar and nonlocal field theories*. New York, Academic Press.
- [18] Eringen, A. C. 1980. Theory of anisotropic micropolar fluids. *Int. J. Eng. Sci.*, 18, 5-17.
- [19] Germain, P. 1973. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *J. de Mécanique*, 12, 235-274.
- [20] Germain, P. 1973. The method of virtual power in continuum mechanics, Part 2: Microstructure. *J. Appl. Math.*, 25, 556-575.
- [21] Vardoulakis, I. and Sulem, J. 1995. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Glasgow, Blackie Academic & Professional.
- [22] Barnes, H.A. 1989. Shear-thickening ("Dilatancy") in suspensions of nonaggregating solid particles dispersed in Newtonian liquids. *J. Rheol.*, 33, 329-366.
- [23] Bird, R.B. 1976. Useful non-Newtonian models. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 8, 13-34.
- [24] Bird, R.B., Dai, G.C., and Yarusso, B.J. 1982. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng.*, 1, 1-70.

Les suspensions molles

2.1 Introduction

Au sens strict, une suspension est le mélange d'un liquide et d'inclusions solides. Cependant une approche mécanique de leur comportement en fonction de la microstructure embrasse en fait naturellement celui des suspensions au sens large, c'est-à-dire des mélanges d'une phase fluide et d'inclusions quelconques non miscibles avec ce fluide. Ainsi les éléments présentés ici sont aussi utiles, sans pour autant suffire, à la compréhension et à la description du comportement des poudres ou fumées (gaz + solide), des émulsions (liquide + liquide), des brouillards (gaz + liquide) ou encore des mousses (liquide + gaz). La classification du comportement en fonction des interactions prédominantes finalement proposée semble pouvoir être directement appliquée aux suspensions et poudres ou fumées. Pour décrire le comportement des mousses ou des émulsions concentrées il faudrait prendre en compte les effets de la tension de surface, de la déformation et de la coalescence éventuelle des inclusions gazeuses ou liquides.

Nous considérons dans la suite le mélange, que nous nommerons suspension, d'un fluide, que nous nommerons éventuellement fluide interstitiel, et de particules solides. Une des principales caractéristiques physiques d'une suspension est sa concentration (ou fraction) volumique solide (ϕ) qui est le rapport du volume occupé par la phase solide et du volume total de mélange. Une autre caractéristique importante est la concentration d'entassement maximal (ϕ_m) qui est la fraction volumique solide correspondant au volume maximum de particules solides que l'on peut placer dans un volume de fluide donné. Au cours de notre exposé, nous mettrons progressivement en valeur l'importance de la configuration des particules, c'est-à-dire leur distribution spatiale (ordonnée, aléatoire, etc.), vis-à-vis du comportement mécanique de la suspension. La concentration d'entassement maximal utilisée dans certains calculs est surtout, en fait, une

concentration de référence qui pourrait dépendre des conditions d'écoulement. Au cours de ce chapitre, nous conserverons pourtant une seule variable pour décrire la situation pour laquelle les particules sont toutes en contact les unes avec les autres, mais nous verrons qu'une étude plus précise du comportement des suspensions très concentrées nécessite d'associer à cette situation un domaine de concentrations (cf. § 3.3.1).

Il n'est possible de calculer précisément le champ des vitesses au sein du mélange que dans des cas particuliers (cf. § 2.3), notamment pour des suspensions de sphères solides identiques de rayon R . Dans le cas général, la forme et la distribution de taille des particules ne peuvent pas aisément se définir à l'aide d'un ou deux paramètres. À partir du paragraphe 2.4, dans un souci de présentation des mécanismes fondamentaux à l'origine du comportement mécanique de systèmes aussi variés que des milieux modèles tels que des suspensions de billes de polystyrène ou de silice, ou des milieux beaucoup plus complexes tels que du béton frais ou du magma, on ne supposera aucune forme particulière ni arrangement spécifique des particules. On admettra que la dimension et la forme des particules peuvent être caractérisées simplement par une taille caractéristique (r) qui est de l'ordre de la racine cubique du volume moyen de cette particule. Cette approche mérite d'être adaptée à chaque situation particulière lorsqu'on dispose de plus d'informations concernant la forme et la distribution de taille des particules ainsi que la manière dont elles s'arrangent à courte et longue distance. Dans certains cas, il faudrait en toute rigueur prendre en compte plusieurs dimensions caractéristiques des particules, notamment lorsqu'on a affaire à des particules fortement anisotropes (dont le rapport de deux longueurs dans deux directions différentes est très différent de 1), et différents types d'arrangements de ces particules (éventuellement fractals) suivant l'échelle à laquelle on s'intéresse.

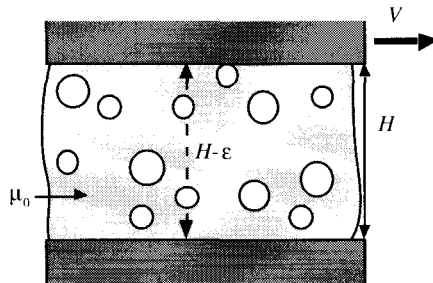


Fig. 2.1 : Effet fondamental de l'ajout de particules solide dans un fluide en première approximation : diminution de l'épaisseur moyenne cisailée.

Vu des particules, c'est-à-dire à leur échelle, le fluide interstitiel se comporte comme un milieu continu. Cela implique entre autres (cf. § 1.2.3) que la dimension caractéristique des éléments constitutifs de ce fluide est beaucoup plus petite que celle des particules. En l'absence de particules, ce fluide a un comportement newtonien avec une viscosité μ_0 . Pour simplifier, on admettra qu'il ne glisse pas le long des surfaces des particules au cours des mouvements de la suspension. Cela signifie que la vitesse relative des éléments du fluide les plus proches des particules par rapport à la surface solide voisine est négligeable vis-à-vis de la vitesse de deux éléments de fluide séparés d'une distance de l'ordre de la taille des particules. Dans la plupart de nos raisonnements, nous supposons en outre que la suspension n'est pas soumise à une force de volume extérieure, en particulier la sédimentation restera négligeable.

Dans ces conditions, la présence de particules solides dans le fluide interstitiel a fondamentalement pour conséquence une augmentation de la viscosité apparente. Considérons en effet une couche de suspension, d'épaisseur H , cisailée entre deux plateaux solides dont la vitesse relative est V (cf. Fig. 2.1). Le gradient de vitesse en l'absence de particules au sein du fluide est V/H (cf. § 4.1). Lorsque des particules remplacent des volumes de fluide, l'épaisseur de fluide cisailé est naturellement plus faible en moyenne, et nous l'écrivons $H - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Si les particules sont parfaitement rigides et suffisamment dispersées, le gradient de vitesse (effectif) au sein du fluide interstitiel est maintenant égal à $V/(H - \varepsilon)$. En supposant que l'ensemble du fluide est effectivement cisailé on obtient simplement $\varepsilon = \phi H$. Ce calcul néglige bien entendu le fait que le mouvement du fluide autour des particules ne peut pas être un écoulement en cisaillement simple, et minimise donc le gradient de vitesse effectif, mais cela ne change pas le sens de notre démonstration. La contrainte tangentielle à appliquer aux plateaux pour cisailier la couche de suspension s'écrit par définition $\mu_0 V/(H - \varepsilon)$. Le gradient de vitesse apparent, celui de la suspension dans son ensemble, vaut quant à lui toujours V/H . La viscosité apparente de la suspension (rapport de la contrainte tangentielle et du gradient de vitesse apparent) vaut donc :

$$\mu = \frac{\mu_0}{(1 - \varepsilon/H)} \quad (2.1)$$

Ce calcul, qui ne préjuge pour l'instant pas de la valeur exacte de ε , montre que, tant que les interactions hydrodynamiques prédominent, la viscosité d'une suspension est proportionnelle à la viscosité du fluide interstitiel et augmente avec la concentration solide. Remarquons en outre que lorsque $\varepsilon \rightarrow H$ la viscosité de la suspension tend normalement vers l'infini. Mis à part pour une suspension de cubes identiques, il n'est pas possible d'atteindre une concentration solide égale à 1. Par exemple, pour des sphères, la concentration d'entassement maximal est $\phi_m = 0,635$ dans une configuration désordonnée et après tassement. Il n'en reste pas moins que pour une concentration ϕ proche de ϕ_m , on doit par définition trouver un grand nombre de directions selon lesquelles ε tend vers H (dans les plans séparant des particules très proches). Localement, la contrainte tangentielle est donc très élevée. Ceci induit une contrainte

macroscopique beaucoup plus élevée qu'en prenant la valeur moyenne de ε et conduit effectivement la viscosité à tendre vers l'infini lorsque $\phi \rightarrow \phi_m$.

Nous avons jusqu'ici considéré que l'effet de la présence des particules résulte uniquement du volume qu'elles occupent à la place du fluide interstitiel. En fait, selon les caractéristiques du fluide et des particules et selon la concentration solide, des effets liés à divers types de forces (colloïdales, agitation thermique, contacts) s'exerçant sur les particules peuvent s'ajouter au précédent. La conséquence générale en est, comme précédemment, l'accroissement des dissipations d'énergie au sein de la suspension en écoulement, par rapport au fluide interstitiel seul, parce que le cisaillement nécessite d'imposer des efforts supplémentaires pour entraîner des particules en mouvement relatif. À ce stade, on peut se représenter une suspension en écoulement laminaire comme une assemblée de particules qui se meuvent relativement les unes aux autres. Dans ces conditions, la viscosité de la suspension est associée à l'effort qu'il faut exercer pour déplacer les particules les unes par rapport aux autres. Tout se passe comme si les particules exerçaient les unes vis-à-vis des autres, des efforts en général d'autant plus grands que la vitesse d'écoulement est grande. Il est donc possible d'interpréter l'ensemble des phénomènes qui contribuent à augmenter la viscosité du fluide comme des interactions entre les particules, les effets de volume induisant dans ce cadre ce que nous appellerons des interactions hydrodynamiques.

Nous montrons d'abord (§ 2.2) qu'il est possible de dissocier partiellement les effets des différentes interactions au sein du tenseur des contraintes. Au cours des sections suivantes, nous étudions les principaux types d'interactions (hydrodynamiques (§ 2.3), browniennes (§ 2.4), colloïdales (§ 2.5), par contact (§ 2.6), inertielles (§ 2.7)) et leurs effets en termes de comportement mécanique en supposant à chaque fois que les interactions considérées sont prédominantes. Compte tenu de la diversité des matériaux possibles, il est finalement crucial, plutôt que de passer en revue les divers comportements observés, de déterminer les domaines de prédominance de chacun de ces effets en fonction des caractéristiques essentielles du fluide et de l'écoulement. Des régimes de prédominance de chaque type d'interactions peuvent être ainsi identifiés et délimités à l'aide de nombres adimensionnels. Ceci permet notamment de ne pas se focaliser sur des effets particuliers (l'exemple typique étant la transition ordre-désordre dans des suspensions de billes identiques) qui résultent de caractéristiques spécifiques de la suspension. Cet aspect est d'autant plus important que nous souhaitons ici proposer des éléments généraux pour aborder des suspensions concentrées complexes, c'est-à-dire contenant des particules de tailles et de formes diverses. Les deux paramètres de base permettant de caractériser le régime d'écoulement d'une suspension sont alors, d'une part, l'intensité du cisaillement et, d'autre part, la quantité de solide en suspension. Par conséquent, dans le cadre d'une approche simplifiée, il est naturel de situer les domaines de prédominance des différents types d'interaction dans un diagramme $(\dot{\gamma}, \phi)$ pour une suspension dont les autres caractéristiques (taille des particules, force ionique, température, etc.) sont fixées. En utilisant les nombres adimensionnels déterminés ci-dessous et en supposant que les transitions entre régimes

interviennent dans des gammes de valeur de ces nombres situées autour de 1, on obtient un diagramme conceptuel qui donne un aperçu général de la position relative des différents régimes d'écoulement.

2.2 Décomposition du tenseur des contraintes

Au niveau local les différentes interactions au sein d'une suspension sont des forces s'exerçant entre les divers éléments de la suspension. Le vecteur contrainte identifié au paragraphe 1.2.4 étant proportionnel à la somme des forces entre éléments de part et d'autre d'une surface élémentaire, il peut donc s'écrire :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \dots \quad (2.2)$$

où $\mathbf{t}_{i=1,2,\dots}$ est un vecteur contrainte résultant spécifiquement des interactions de type i . Cette décomposition semble fournir un moyen direct de déterminer le tenseur des contraintes au sein d'une suspension quelconque à partir du moment où l'on sait décrire les différentes interactions. En fait, le problème n'est pas simple car les différentes interactions sont couplées. Par exemple, l'intensité des interactions colloïdales ou le nombre de particules en contact peuvent varier selon la distribution des particules au sein du fluide interstitiel qui elle-même varie au cours du temps ou avec les caractéristiques de l'écoulement. Chaque terme de contrainte associé à un type d'interaction particulier dépend donc de cet état, qu'il est commode de se représenter comme une configuration instantanée des particules. On admettra que cet état de la suspension peut être décrit par une variable locale (scalaire ou tenseur).

Imaginons maintenant que l'on est capable, à un instant donné, par un procédé quelconque tel que l'application d'une force de volume adaptée (par exemple un champ électromagnétique), d'annuler l'effet de toutes les interactions sauf une catégorie particulière (i) sans que l'état de la suspension ne soit modifié. Dans ce cas, les contraintes résultent spécifiquement des interactions entre particules dans l'état considéré et constituent les seules forces de surface au sein de la suspension. Les raisonnements du paragraphe 1.2.4 peuvent alors être réitérés. Dans ces conditions d'écoulement particulières, on déduit ainsi que la somme des contraintes s'exerçant sur la surface extérieure d'un volume élémentaire de suspension est nulle au premier ordre ($\Delta \mathbf{t}_i = 0$). Ce résultat permet de montrer que les contraintes liées aux interactions de type i peuvent être représentées par un tenseur des contraintes symétrique résultant spécifiquement de ces interactions, étant entendu que celui-ci est associé à un état de la suspension résultant du couplage des différentes interactions.

En prenant en compte les principaux types d'interaction au sein d'une suspension ainsi qu'une éventuelle agitation interne des éléments (fluide ou particules) (cf. § 1.3.3) on déduit du raisonnement ci-dessus l'expression générale du tenseur des contraintes

modifié Ξ que l'on notera maintenant Σ :

$$\Sigma = \Sigma_h + \Sigma_c + \Sigma_p - \overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \quad (2.3)$$

où Σ_h , Σ_c , et Σ_p sont respectivement les tenseurs des contraintes relatifs aux interactions hydrodynamiques, colloïdales et par contacts. La décomposition ci-dessus prolonge celle de Batchelor [1] (cf. Annexe 2.1) établie de manière rigoureuse pour une suspension de sphères dans un liquide et qui permet de séparer le tenseur total en un tenseur correspondant à l'écoulement du fluide interstitiel (newtonien) en l'absence des particules avec les mêmes conditions aux limites et un terme additionnel lié aux interactions entre particules. Ici, au contraire, le tenseur Σ_h inclut toutes les formes d'interactions hydrodynamiques, c'est-à-dire à la fois le terme lié à l'écoulement du fluide en l'absence des particules et un terme résultant de leur présence. De plus, l'expression (2.3) permettra de prendre en compte de manière globale des interactions localement très complexes.

La trace de la somme des tenseurs étant égale à la somme des traces, la décomposition (2.3) en tenant compte de (1.11) fait apparaître des termes de pression d'origine différente au sein de la pression totale (p) :

$$p = p_0 + \Pi + p_f \quad (2.4)$$

p_0 est la pression au sein du fluide interstitiel en tenant compte des interactions hydrodynamiques. Π est une pression osmotique généralisée, c'est-à-dire la pression résultant spécifiquement des interactions entre particules. Notons que pour les suspensions concentrées la pression osmotique n'a pas nécessairement une origine entropique puisqu'elle peut résulter directement des efforts exercés par les particules les unes sur les autres. p_f est la pression liée à l'agitation des éléments. Cette décomposition de la pression sera particulièrement utile dans le cas des suspensions granulaires grossières au sein desquelles il est possible de dissocier, lors des mesures, la pression au sein du fluide interstitiel et la pression liée aux forces entre grains. Les déviateurs des tenseurs des contraintes associés à chaque type d'interaction sont simplement déduits de chacun d'entre eux par une formule analogue à (1.12). On discute surtout dans la suite de la valeur de ces déviateurs en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

2.3 Interactions hydrodynamiques

2.3.1 Généralités

L'effet de ce type d'interaction est fondamental puisqu'il provient de la simple présence des particules au sein de la suspension. Cependant, ces interactions sont complexes et, bien qu'elle fournisse des tendances correctes, l'approche présentée en introduction doit être sérieusement réexaminée. La présence d'une particule au milieu du fluide induit des perturbations du champ des vitesses par rapport à celui que l'on aurait sans la particule,

d'autant plus importantes que l'on se trouve près d'elle, car le fluide est plus ou moins obligé de contourner cette particule. D'un point de vue global (comme dans l'approche simplifiée ci-dessus) l'écoulement est plus intense, et donc le taux de dissipation d'énergie visqueuse (donné par (1.37)) est plus grand. Cependant, si la distribution des particules et de leurs orientations est isotrope et constante en moyenne quelle que soit la vitesse de cisaillement, la contrainte tangentielle locale est directement proportionnelle à cette vitesse et donc la contrainte tangentielle moyenne est simplement proportionnelle au gradient de vitesse. Ce résultat fondamental signifie que, si la distribution des particules et de leurs orientations est isotrope et constante, la suspension est newtonienne [1]. En outre, tant que les dissipations hydrodynamiques sont prédominantes et que des effets de configuration (voir § 2.3.5) ne viennent pas perturber l'écoulement, une analyse dimensionnelle montre aisément que la viscosité de la suspension est proportionnelle à la viscosité du fluide interstitiel et est une fonction de la concentration volumique seule. Dans ces conditions, on peut rechercher la viscosité de la suspension sous la forme

$$\eta = \frac{\mu}{\mu_0} = f(\phi) \quad (2.5)$$

où η est la viscosité relative et f est une fonction positive croissante qui ne dépend que de ϕ . Ce dernier résultat, en accord avec nos considérations introductives, est remarquable puisqu'il annonce que la taille des particules (mais non la forme) ne joue aucun rôle vis-à-vis de la viscosité de la suspension.

Au-delà de ces considérations générales il est nécessaire, si l'on veut déterminer la fonction f , de calculer ou d'estimer par un moyen ou un autre le champ des vitesses au sein de la suspension en écoulement, duquel on déduira le tenseur des taux de déformations local $\mathbf{D}_i$. Le tenseur des contraintes local $\mathbf{T}_i$ se calcule alors en utilisant la définition de la loi de comportement d'un fluide newtonien sous forme tensorielle (1.41) et on peut finalement déterminer le comportement de la suspension, c'est-à-dire de calculer le tenseur des contraintes (moyen) au sein d'un volume élémentaire représentatif (cf. § 1.2.3) et de l'exprimer en fonction du tenseur des taux de déformation moyen. Il est aussi possible de déterminer la viscosité de la suspension en comparant les dissipations d'énergie du mélange avec ou sans particules solides. La puissance dissipée s'écrit en effet d'une part :

$$P = \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{D}_i) dv \quad (2.6)$$

Par ailleurs, pour un fluide newtonien et donc en particulier pour cette suspension, en utilisant encore (1.22), on montre facilement qu'en cisaillement simple :

$$P = \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) dv = \mu \dot{\gamma}^2 \Omega \quad (2.7)$$

où $\mathbf{T}$ et $\mathbf{D}$ sont les tenseurs des contraintes et des taux de déformations macroscopiques et $\dot{\gamma}$ le gradient de vitesse apparent. En égalisant (2.6) et (2.7) on déduit μ . Notons que

ce dernier raisonnement présuppose que la suspension est newtonienne, ce qui constitue la faiblesse principale de cette approche en vue d'une utilisation pour d'autres types de suspension.

Dans la suite, on montre essentiellement comment évaluer la viscosité d'une suspension en fonction de la concentration, de la forme ou de la distribution granulométrique des particules. Les variations de la viscosité en fonction de la configuration des particules restent assez mal connues dans le cas général (cf. § 2.3.5). En pratique, si l'on a affaire à une suspension concentrée de particules de différentes tailles et de différents types, le fluide reste quelles que soient les caractéristiques de l'écoulement distribué au milieu d'un réseau granulaire globalement en désordre à courte et longue distance. Au cours d'un écoulement de la suspension, les mouvements relatifs des particules induisent des écoulements locaux du fluide probablement peu variables en moyenne. Dans ces conditions on peut considérer que la forme de la composante du tenseur des contraintes (Σ_h) résultant spécifiquement des interactions hydrodynamiques ne varie pas sensiblement quelles que soient les évolutions des autres types d'interaction. Autrement dit, pour des suspensions non modèles, cette composante du tenseur des contraintes peut être estimée en supposant que les autres interactions sont négligeables. Ce résultat essentiel signifie que les évolutions de la configuration des particules doivent être prises en compte essentiellement au sein des composantes du tenseur liées aux autres types d'interaction.

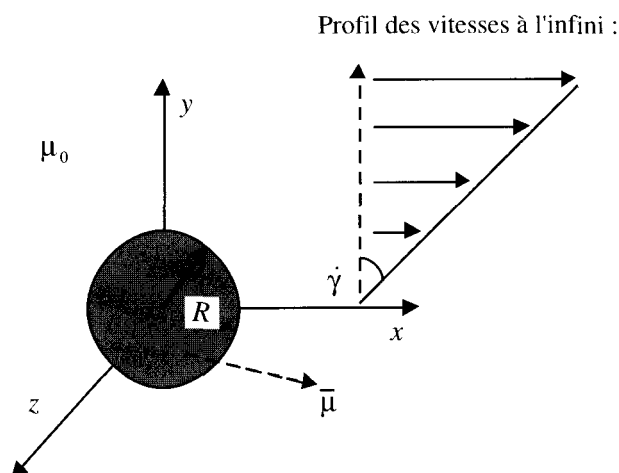


Fig. 2.2 : Représentation des hypothèses à la base du calcul de la viscosité d'une suspension diluée d'éléments sphériques de viscosité $\bar{\mu}$ dans un fluide de viscosité μ_0 . Les particules sont à une distance infinie les unes des autres. Le profil des vitesses au sein du fluide à l'infini correspond à un cisaillement simple.

2.3.2 Viscosité d'une suspension à faible concentration

Lorsque la concentration solide est faible (inférieure à environ 2%), les particules sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que l'on puisse estimer le champ des vitesses du fluide autour de chaque particule. Ainsi, dans le cas d'un cisaillement simple imposé à la suspension selon l'axe des y avec un gradient de vitesse apparent $\dot{\gamma}$ (cf. Fig. 2.2), le champ des vitesses dans un repère centré sur le centre de la sphère en l'absence de la sphère est donné par (1.28). En présence de la sphère il s'écrit au premier ordre :

$$\begin{aligned} u &= \dot{\gamma}y + fy + gx \\ v &= fx + gy \\ w &= gz \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{avec } f = -\frac{\dot{\gamma}R^5}{2d^5} ; g = \frac{5\dot{\gamma}xyR^3}{2d^5} \left(\frac{R^2}{d^2} - 1 \right) ; d = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

En utilisant (2.6), (2.7) et (2.8) on en déduit l'expression de la viscosité d'une suspension de sphères rigides. Plus généralement, par le même type d'approche, on obtient la viscosité d'une suspension de particules sphériques de viscosité $\bar{\mu}$ dans un fluide de viscosité μ_0 [2] :

$$\eta = 1 + \phi \left(\frac{\mu_0 + 2,5\bar{\mu}}{\mu_0 + \bar{\mu}} \right) \quad (2.9)$$

Lorsque les particules sont rigides, $\bar{\mu}$ tend vers l'infini et le coefficient devant ϕ vaut simplement 2,5 (formule d'Einstein [3]). Lorsque les particules (bulles de gaz par exemple) ont une viscosité négligeable par rapport à celle du fluide interstitiel ($\bar{\mu}/\mu_0 \rightarrow 0$), le coefficient devant ϕ vaut 1. Dans tous les cas l'augmentation de la viscosité induite par la présence des particules est somme toute relativement faible.

Batchelor et Green [4] ont établi une formule théorique donnant la viscosité élongationnelle d'une suspension pour des concentrations inférieures à 10 % environ : un terme du second ordre ($7,6\phi^2$) doit alors être ajouté à la formule d'Einstein (qui est aussi valable pour la viscosité élongationnelle, simplement proportionnelle à la viscosité en cisaillement simple pour un fluide newtonien, (1.34) et (1.41) nous donne en effet $\mu_E = 3\mu$). Bien qu'une expression équivalente de la viscosité à des concentrations solides comprises entre 2 et 10 % n'ait pour l'instant pas été établie dans le cas d'un écoulement en cisaillement simple, on peut logiquement présumer que celle-ci doit être obtenue en ajoutant, à l'expression (2.9), un terme du second ordre analogue. En extrapolant ce résultat, on s'attend donc à ce que la viscosité augmente ainsi de plus en plus rapidement au fur et à mesure que la concentration solide croît.

2.3.3 Viscosité d'une suspension à concentration modérée

Le calcul de la viscosité d'une suspension pour une concentration supérieure à quelques pour cent pose d'énormes problèmes car des interactions hydrodynamiques se développent effectivement : les perturbations du champ des vitesses induites par la présence d'une particule ne sont plus négligeables aux environs des particules voisines. Le champ des vitesses au sein du fluide peut donc être très complexe. De nombreuses approches, théoriques, semi empiriques ou empiriques ont été proposées pour estimer la viscosité d'une suspension de particules rigides lorsque ϕ est supérieure à quelques pour cent [5-7]. La plupart des formules obtenues prédisent des valeurs de viscosité assez proches (cf. Fig. 2.3) et ont deux caractéristiques principales :

- elles sont identiques à la formule d'Einstein lorsque ϕ tend vers zéro, éventuellement moyennant quelques hypothèses concernant la valeur de la concentration d'entassement maximal (ϕ_m) utilisée dans le modèle ;
- elles prédisent, comme le confirment en première approximation les observations expérimentales, que la viscosité tend vers l'infini lorsque la concentration tend vers une concentration critique qui est souvent assimilée à ϕ_m mais qui s'avère être seulement une concentration de référence pour des suspensions de particules de formes quelconques (cf. § 2.3.6), très différente de ϕ_m .

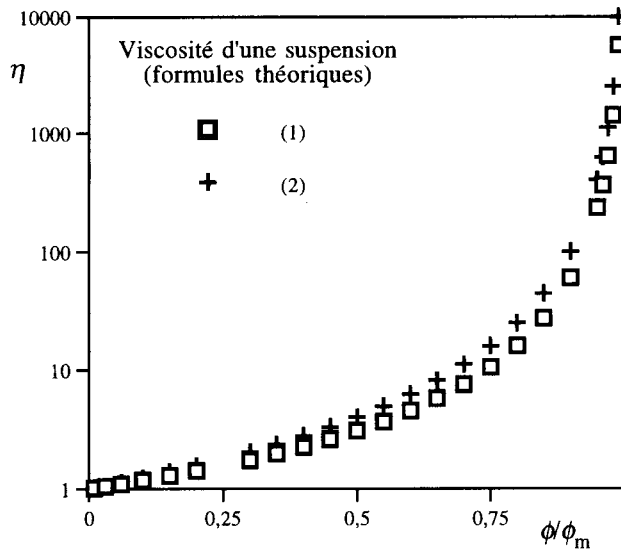


Fig. 2.3 : Comparaison de la viscosité d'une suspension de particules non colloïdales d'après deux formules typiques en fonction de la concentration d'entassement maximal : (1) Formule (2.10) ; (2) Formule (2.13) avec $A = \phi_m$ et $\alpha = 2$.

Nous citerons simplement deux exemples. Un premier exemple représentatif de l'ensemble des formules semi empiriques proposées est l'expression de Chong *et al.* [8] établie par calage sur les résultats obtenus avec un grand nombre de suspensions monodisperses et polydisperses :

$$\eta = \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\phi}{(\phi_m - \phi)} \right)^2 \quad (2.10)$$

On peut retrouver la formule d'Einstein lorsque $\phi \rightarrow 0$ si on prend $\phi_m = 0,605$, ce qui correspond à peu près à la concentration solide d'un empilement désordonné de sphères.

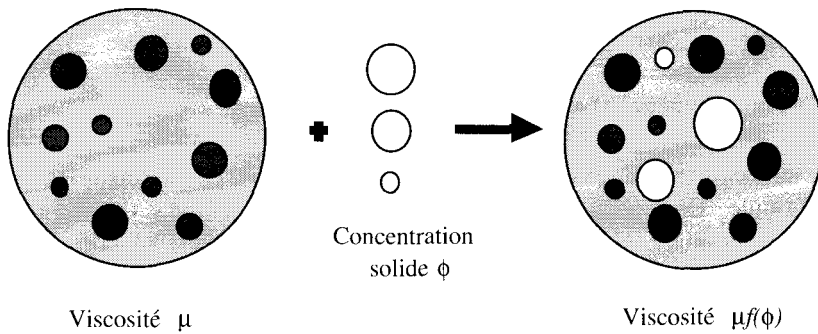


Fig. 2.4 : Schéma de principe des hypothèses à la base du calcul de Krieger et Dougherty [11] menant à la formule (2.13) : la viscosité d'une suspension peut être calculée en supposant qu'on ajoute successivement les particules dans une suspension qui peut être considérée comme un fluide homogène (sans particules).

Un autre exemple intéressant, compte tenu du fait qu'elle repose sur un raisonnement physique qui pourra être réutilisé pour des suspensions dans un fluide à seuil, est l'expression semi empirique de Quemada [9], dérivée de l'approche théorique de Mooney [10] et Krieger et Dougherty [11]. Celle-ci s'appuie sur l'hypothèse que chaque particule « voit » autour d'elle un fluide homogène dont la viscosité ne dépend que de la concentration en particules et de la viscosité du fluide interstitiel (*cf.* Fig. 2.4). Notons que ceci est, bien sûr, une approximation puisque les particules proches de cette particule ont une plus grande influence que les particules éloignées et perturbent en quelque sorte l'image moyenne que peut se faire cette particule de la viscosité de la suspension. Dans ces conditions, on recherche la viscosité des suspensions correspondantes sous la forme (2.5). La viscosité d'une suspension peut alors être calculée à l'aide de cette formule en supposant que l'on ajoute, soit directement une concentration ϕ dans le fluide interstitiel, soit d'abord une concentration ϕ_1 dans le fluide interstitiel puis une

concentration ϕ_2 au sein de la suspension obtenue précédemment de façon à obtenir une concentration finale ϕ . Dans ce second cas on doit avoir :

$$\phi_2 = \frac{\phi - \phi_1}{1 - \phi_1} \quad (2.11)$$

pour que la concentration finale soit effectivement égale à ϕ . En égalant les viscosités finales obtenues par les deux procédures, on déduit la relation suivante :

$$f(\phi_1)f(\phi_2) = f(\phi) \quad (2.12)$$

qui doit être vraie quelles que soient les valeurs de concentrations (ϕ_1, ϕ_2) liées par la relation (2.11). Il est facile de montrer mathématiquement que les seules fonctions possibles sont de la forme :

$$f(\phi) = \eta = \left(1 - \frac{\phi}{A}\right)^{-\alpha} \quad (2.13)$$

où α est un paramètre et $A = 1$. De façon à rester en cohérence avec la tendance de la viscosité à tendre vers l'infini lorsque la concentration tend vers la concentration d'entassement maximal, un coefficient A différent de 1 est couramment introduit dans cette formule. Ceci permet en outre de moduler la valeur de la viscosité à des concentrations plus faibles que ϕ_m pour tenir compte (artificiellement) des interactions entre les particules ajoutées et les particules déjà présentes dans la suspension.

On prend en général $\alpha = 2$, ce qui permet une bonne représentation des résultats expérimentaux. Dans ce cas on peut retrouver à partir de (2.13) la formule d'Einstein lorsque $\phi \rightarrow 0$ à condition de prendre $A = 0,8$. Il a aussi été suggéré d'utiliser pour A la valeur de la concentration d'entassement maximal. Cependant, la valeur de A ci-dessus est supérieure à celle de ϕ_m correspondant à un empilement de sphères identiques le plus compact (0,74). Si l'on souhaite avoir un accord parfait entre les deux théories aux faibles concentrations, il faut suivre la proposition de Krieger et Dougherty et prendre $A = \phi_m$ et $\alpha = 2,5\phi_m$. La formule (2.13) avec $A = \phi_m$ et $\alpha = 2$ est donc peut-être mieux adaptée à des suspensions dont la concentration est largement supérieure à quelques pour cent.

L'effet de la distribution granulométrique est faible à des concentrations inférieures à 20 % environ (pour des particules pas trop anisotropes) pour lesquelles les particules sont suffisamment éloignées et jouent un rôle identique à celui qu'elles jouent dans une suspension monodisperse. En revanche, lorsque la concentration est plus élevée les effets peuvent être très importants. Ceci tient simplement au fait que la concentration d'entassement maximal augmente lorsque la distribution granulométrique est plus étalée (cf. § 3.3.1) et donc la valeur de A ou ϕ_m à utiliser par exemple dans les formules approchées ((2.10) ou (2.13)) varie sensiblement en fonction de cette distribution. Or, une petite modification de l'un de ces coefficients induit une variation sensible de la viscosité de la suspension lorsque ϕ est proche de A (ou ϕ_m). À concentration solide

égale, une suspension polydisperse a donc une viscosité inférieure à celle d'une suspension monodisperse. De manière plus générale, la viscosité d'une suspension est d'autant plus faible que la distribution granulométrique des particules solides est étalée, c'est-à-dire s'étend sur une large gamme de diamètre en conservant une équiprobabilité des différentes tailles.

2.3.4 Viscosité d'une suspension à concentration élevée

Compte tenu de l'incertitude qui subsiste vis-à-vis de la viscosité recherchée et de l'influence d'autres phénomènes (voir ci-dessous), les formules ci-dessus peuvent être indifféremment utilisées en pratique tant que la concentration n'est pas trop proche de la concentration d'entassement maximal. Toutefois, lorsque $\phi \rightarrow \phi_m$, les variations de la viscosité prédite d'une formule à une autre sont importantes. Ceci résulte essentiellement de l'influence de la configuration qui sera discutée plus loin.

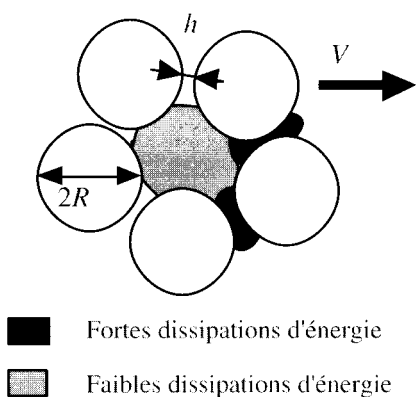


Fig. 2.5 : Localisation de deux types de volume fluide au sein d'une suspension, donnant lieu à des dissipations d'énergie très différentes lorsque la concentration solide tend vers la concentration d'entassement maximal.

Afin de mieux comprendre l'origine physique du comportement des suspensions naturelles concentrées, il est instructif de présenter les termes du modèle de Frankel et Acrivos [12] à la base de nombreux autres travaux. Celui-ci repose sur la constatation que les dissipations d'énergie dans les régions situées entre deux billes proches sont plus intenses que dans le reste du fluide, et ce d'autant plus lorsque $\phi \rightarrow \phi_m$, c'est-à-dire lorsque la distance moyenne (h) entre les surfaces des particules est petite devant la dimension de ces particules (R). En effet, en première approximation, le volume d'une région sans particules très proches (cf. Fig. 2.5) est en moyenne de l'ordre de R^3 , et le gradient de vitesse est de l'ordre de (V/R) où V est la vitesse relative moyenne de deux particules voisines. En revanche, le volume d'une région entre deux particules proches

est de l'ordre de $R^2 h$ et le gradient de vitesse de l'ordre de (V/h) . On en déduit que la puissance dissipée ($2\mu\dot{\gamma}^2$ d'après (2.6)) est de l'ordre de $\mu V^2 R$ dans le premier cas et de l'ordre de $\mu V^2 R^2/h$ dans le second cas. Lorsque $R/h \rightarrow \infty$ la puissance dissipée dans un intervalle entre deux particules proches est donc nettement supérieure à la puissance dissipée dans un volume fluide compris entre plusieurs particules (dans une région sans particules très proches).

Dans ces conditions, les mouvements relatifs de particules très proches induisent des écoulements du fluide interstitiel qui sont décrits classiquement dans le domaine de la lubrification, qui s'attache à décrire les écoulements entre deux surfaces solides situées à des distances très faibles par rapport à la dimension caractéristique des surfaces solides ($R/h \rightarrow \infty$). Dans ce cadre, on peut séparer la force mutuelle entre deux sphères identiques de rayon R en mouvement relatif en trois termes (exprimés ici au premier ordre) :

- la force normale induite par la composante ($\mathbf{V}$) de leur vitesse relative selon l'axe joignant leurs centres et qui tend à les rapprocher ou à les éloigner l'une de l'autre :

$$\mathbf{F}_1 = -\mu_0 \left(\frac{3\pi R^2}{2h} \right) \mathbf{V} \quad (2.14)$$

- la force tangentielle induite par la composante ($\mathbf{V}_T$) de leur vitesse relative dans le plan perpendiculaire à la normale ($\mathbf{n}$) joignant leurs centres :

$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \pi R \ln \left(\frac{h}{R} \right) \mathbf{V}_T \quad (2.15)$$

- la force normale induite par la composante ($\mathbf{V}_T$) de leur vitesse relative :

$$\mathbf{F}_3 = \frac{6}{5} \mu_0 \pi R \sqrt{\frac{R}{h}} |\mathbf{V}_T| \mathbf{n} \quad (2.16)$$

On se rend compte en comparant les formules correspondant à chaque type d'effort que les efforts normaux ($\mathbf{F}_1$), induits par des mouvements relatifs des particules tendant à les rapprocher ou les éloigner le long de l'axe joignant leurs centres, prédominent sur les autres types d'efforts lorsque $R/h \rightarrow \infty$.

Frankel and Acrivos [12] considèrent alors un écoulement d'élongation simple uniaxiale (cf. § 1.4.5) à un taux a et supposent que les particules sont réparties dans l'espace selon une configuration hexagonale compacte. Ceci n'est évidemment pas exact mais en revanche, à chaque instant au cours de l'écoulement, un ordre à courte distance subsiste toujours au sein d'une assemblée de grains, c'est-à-dire que les premières particules voisines d'une particule donnée sont à peu près ordonnées de manière relativement compacte autour d'elle. Ceci n'est plus vrai à partir des voisines suivantes de cette particule. Le calcul proposé se justifie donc seulement au premier ordre. Sur ces

bases, on détermine la viscosité de la suspension en supposant qu'à chaque instant la puissance dissipée en moyenne par unité de volume est celle dissipée lors du mouvement relatif (du fait de l'élongation macroscopique) d'un groupe de particules voisines dans la configuration hexagonale compacte et séparées d'une distance égale à la distance moyenne entre les particules.

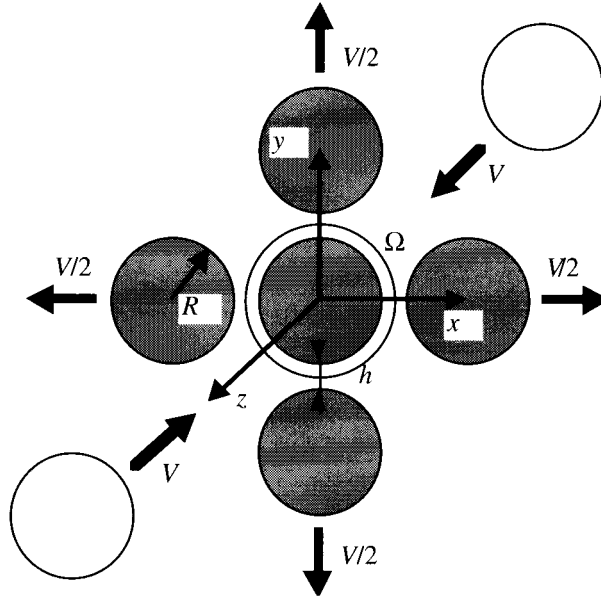


Fig. 2.6 : Hypothèses à la base du calcul de la viscosité (élongationnelle) d'une suspension concentrée dans le modèle de Frankel et Acrivos [12] : localement et instantanément, les particules sont disposées selon une configuration hexagonale compacte dont les axes sont parallèles à ceux de l'élongation, il en résulte que deux particules se rapprochent ou s'éloignent de la particule considérée dans la direction d'élongation (Oz) et quatre particules s'éloignent ou se rapprochent dans un plan perpendiculaire.

Dans ces conditions, la vitesse relative de deux particules dont l'axe passant par les centres est parallèle à l'axe de l'écoulement s'écrit d'après (1.34) :

$$V = (2R + h)a \quad (2.17)$$

et la vitesse relative de deux particules situées dans le plan perpendiculaire vaut quant à elle $V/2$ (cf. Fig. 2.6). La force mutuelle entre chaque couple de particule est directement déduite de (2.14) et la puissance dissipée au cours de l'écoulement dans un volume de suspension comprenant exactement une particule, en ne prenant en compte que les

processus prédominants résultant des mouvements dans les régions entre particules proches, s'écrit :

$$P = \sum F \cdot V = \frac{9}{4} \frac{\pi R^2}{h} \mu_0 (2R + h)^2 a^2 \quad (2.18)$$

Par ailleurs, la puissance dissipée au sein du même volume de fluide seul pour une elongation simple uniaxiale s'écrit ($\mathbf{D}$ étant donné par (1.19)) :

$$P_0 = \int \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = 2\mu_0 \int \text{tr}(\mathbf{D}^2) = 3\mu_0 a^2 \left[\frac{4}{3} \pi \left(R + \frac{h}{2} \right)^3 \right] \quad (2.19)$$

On en déduit la viscosité de la suspension :

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{9}{4} \frac{R}{h} \quad (2.20)$$

qui tend vers l'infini lorsque h/R tend vers 0, c'est-à-dire lorsque ϕ tend vers ϕ_m . Le domaine de validité de cette expression est encore mal connu et l'approche théorique de Frankel et Acrivos a été discutée par de nombreux auteurs, qui ont notamment montré que le résultat obtenu était très sensible à la configuration instantanée utilisée pour les calculs [13-15]. Le mérite de la formule (2.20) et de l'approche théorique correspondante est surtout d'indiquer l'ordre de grandeur de la viscosité et son origine physique. On peut raisonnablement penser que les variations de la viscosité en cisaillement simple en fonction de h/R sont du même type que celles prédites par (2.20). En effet, au cours d'un tel écoulement d'une suspension de particules de tailles et de formes diverses, on peut s'attendre, sans que l'on soit capable de les quantifier précisément, à ce que divers mouvements de rapprochement entre particules se produisent du fait du brassage permanent de la suspension.

2.3.5 Influence de la configuration

On peut percevoir l'influence cruciale de la configuration sur la viscosité à des concentrations élevées en étudiant les variations de la formule (2.20) en fonction de la distribution de distance entre les particules. Essayons d'abord d'estimer la valeur de h/R dans le cas particulier où h est constant au sein de la suspension. Ceci est possible pour un ensemble de sphères identiques dispersées dans un fluide à une égale distance les unes des autres. Si le rayon de chaque sphère augmente d'un facteur $1 + h/2R$ sans que la configuration change, les particules entrent toutes en contact les unes avec les autres et la concentration volumique est alors égale à ϕ_m . Pour un volume donné Ω contenant N particules, ϕ s'exprime $4\pi NR^3/3\Omega$, alors que ϕ_m vaut $4N\pi R^3(1 + h/2R)^3/3\Omega$. On en

déduit :

$$\frac{h}{R} = 2 \left(\sqrt[3]{\frac{\phi_m}{\phi}} - 1 \right) \quad (2.21)$$

Dans la suite, pour une suspension de particules de formes quelconques on utilisera souvent la distance caractéristique moyenne (b) entre les centres de gravité de deux particules voisines (cf. Fig. 2.7), définie en se référant au calcul précédent de la façon suivante :

$$b = r \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-1/3} \quad (2.22)$$

Le nombre de particules par unité de volume vaut alors b^{-3} .

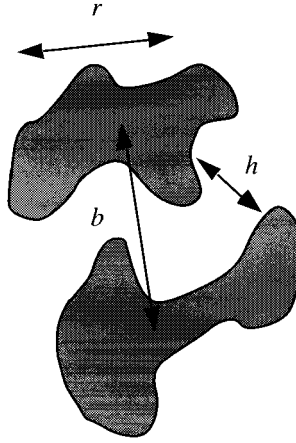


Fig. 2.7 : Définition des échelles de longueur utilisées pour décrire les interactions moyennes au sein d'une suspension complexe, c'est-à-dire constituée de particules de tailles et de formes diverses.

Dans le cas général, les particules ne sont pas toutes à égale distance les unes des autres et leur diamètre n'est pas uniforme. Le rapport h/R peut donc varier notablement au sein de la suspension. La formule (2.21) ne fournit dans ce cas qu'une estimation grossière de la valeur moyenne de ce rapport. En outre, il n'est pas du tout évident que la viscosité moyenne (liée à l'ensemble des dissipations visqueuses au sein de la suspension) doive être calculée à partir de la formule (2.21) en utilisant la valeur moyenne de h . Au contraire, compte tenu du fait que cette viscosité est déduite de la moyenne des dissipations, il faut la déterminer à partir de la moyenne de l'expression (2.21) sur l'ensemble des valeurs possibles de h . Supposons par exemple que la distance entre les particules prend de manière équiprobable soit la valeur $2h$ soit la

valeur $\alpha \ll h$. La valeur moyenne de la distance est approximativement h ce qui assure globalement que la concentration ne varie pas. En revanche la valeur moyenne de la viscosité locale estimée à partir de (2.21) tend vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 0$. On constate ainsi que, selon la configuration instantanée des particules, et donc selon la distribution de h , la viscosité de la suspension peut varier dans une très large gamme.

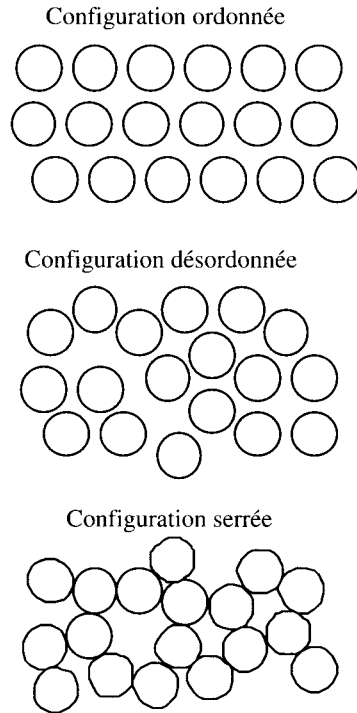


Fig. 2.8 : Différentes configurations des particules au sein d'une suspension.

Nous avons déjà souvent modéré la portée des résultats présentés en mentionnant l'influence de la configuration. Tant qu'une suspension est parfaitement isotrope et constante en moyenne, c'est-à-dire, tant que les particules restent réparties et orientées de manière aléatoire, la suspension est newtonienne. En pratique, on observe souvent que les particules ont tendance à s'orienter dans des directions privilégiées si elles ne sont pas sphériques ou à migrer à travers le fluide au cours de l'écoulement. Il en résulte des variations de la viscosité au cours du temps ou en fonction de la vitesse d'écoulement, qui, respectivement, rendent la suspension thixotrope ou rhéofluidifiante (ou rhéoépaississante). De nombreux phénomènes de ce type ont été constatés avec des suspensions monodisperses (particules de même taille) qui ont souvent été interprétés comme la conséquence de transitions ordre-désordre [16-20]. Une répartition ordonnée des particules au sein du fluide conduit en effet en général à une suspension moins

visqueuse qu'une répartition désordonnée car le champ des vitesses au sein du fluide interstitiel est moins tortueux et donc les dissipations d'énergie sont plus faibles. L'influence de la configuration en termes des seules dissipations hydrodynamiques dans des suspensions concentrées réelles (industrielles ou naturelles) reste probablement faible car aucun ordre à longue distance ne peut apparaître dans des suspensions polydisperses, autrement dit la valeur locale de h varie au cours du temps dans un volume élémentaire mais la distribution de h au sein de l'ensemble de la suspension reste à peu près constante. En revanche, la transition entre une configuration serrée, pour laquelle certaines particules sont en contact direct, et une configuration lâche, pour laquelle toutes les particules sont séparées par une fine couche de fluide (*cf.* Fig. 2.8), peut jouer un rôle fondamental essentiellement parce que l'intensité des interactions autres qu'hydrodynamiques varie alors notablement. Ce phénomène typique du comportement des suspensions granulaires sera étudié plus en détail dans le chapitre 3.

2.3.6 Influence de la forme des particules

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des particules sphériques mais la forme des particules peut jouer un rôle considérable. Nous avons déjà évoqué les effets non newtoniens induits par l'orientation en cours d'écoulement de particules non sphériques. Nous ne nous attarderons pas sur ces effets qui ne semblent pas pouvoir être cruciaux dans le cas de suspensions concentrées polydisperses. Une revue détaillée concernant les conséquences d'une déformation ou d'une variation de l'orientation des particules durant l'écoulement a été proposée par Mewis et Macosko [21].

Pour une orientation donnée, il est possible d'estimer la viscosité de la suspension, en particulier pour une suspension diluée de cylindres dans un écoulement élongationnel uniaxial (les particules alignent leur grand axe selon l'axe de l'écoulement). On trouve [22] :

$$\frac{\mu_E}{\mu_0} = 3 + \frac{4\phi p^2}{3\ln(\pi/\phi)} \quad (2.23)$$

où p est le rapport d'aspect (longueur/diamètre) des particules. Cette expression n'est pas d'une grande utilité pratique pour les écoulements qui nous concernent, puisqu'on ne peut pas en déduire une expression équivalente pour un écoulement en cisaillement simple. L'équation (2.23) permet cependant d'apprécier le rôle très important du rapport d'aspect sur la viscosité de la suspension.

Les données expérimentales confirment la tendance annoncée par (2.23) et montrent ainsi que, de la même façon, en cisaillement simple, à concentration égale, la viscosité d'une suspension de fibres peut être de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle d'une suspension de sphères. Pour estimer la viscosité en cisaillement simple d'une suspension de particules de formes diverses, Metzner [7] propose d'utiliser la formule

(2.13) dans laquelle $\alpha = 2$ et la valeur du paramètre A dépend de la forme des particules selon la règle suivante, établie à partir des données de Kitano *et al.* [23] :

$p = 1$, $A =$ de 0,68 (pour des sphères) à 0,44 (pour des cristaux irréguliers) ;

$p = 6$ à 8, $A = 0,44$; $p = 18$, $A = 0,32$; $p = 23$, $A = 0,26$; $p = 27$, $A = 0,18$

La formule (2.13) s'avère donc commode pour estimer la viscosité d'une suspension de particules de forme quelconque tant que les interactions hydrodynamiques sont prédominantes.

2.3.7 Traînée hydrodynamique

Une particule animée d'un mouvement relatif non nul par rapport au fluide environnant subit une force qui tend à l'arrêter et qui est due aux frottements visqueux qui s'exercent sur sa surface. La force de résistance visqueuse qui s'exerce sur un corps solide en mouvement relatif à la vitesse V par rapport à un fluide newtonien au repos (en moyenne) peut s'écrire :

$$F_v = K\mu_0 V \quad (2.24)$$

où K est un coefficient qui dépend de la forme et de la taille de la particule ainsi que de son orientation (*cf.* [24] par exemple). Pour une sphère $K = 6\pi R$ (équation de Stokes). Pour un disque de rayon R , $K/\pi R$ varie entre 3,4 et 5,2 selon que son axe de révolution est parallèle ou perpendiculaire à la direction d'écoulement. Des expressions de ce coefficient ont été établies pour d'autres formes et orientations (*cf.* [25] par exemple). On constate que sa valeur est très dépendante de la plus grande longueur du corps considéré.

Lorsque la particule se déplace à travers une suspension globalement fixe, on peut distinguer deux situations extrêmes. Lorsque le déplacement de la particule est très petit par rapport à la distance moyenne entre les particules on peut penser que la formule (2.24) dans laquelle on introduit la viscosité du fluide interstitiel permet d'estimer la traînée moyenne. En effet, dans ce cas, la particule, animée d'un mouvement de faible amplitude, ne voit les autres particules que de très loin. Lorsque le déplacement de la particule est très grand par rapport à la distance moyenne entre les particules, tout se passe plus ou moins comme si la particule considérée traversait en moyenne un milieu homogène de viscosité égale à celle de la suspension (μ). On peut alors estimer la traînée à l'aide de la formule (2.24) en y introduisant la viscosité de la suspension. Dans les cas intermédiaires (déplacement du même ordre que la distance entre les particules) la valeur de la traînée dépend beaucoup de la position initiale de la particule par rapport à ses voisines.

2.4 Mouvements browniens

2.4.1 Diffusion brownienne

Le mouvement brownien caractérise l'ensemble des mouvements aléatoires qui tendent à éloigner de leur position initiale les particules solides en suspension dans un fluide quel que soit l'écoulement macroscopique imposé à la suspension. Ce phénomène est dû à l'agitation thermique des molécules du fluide qui entrent ainsi en collision avec les particules. Afin de caractériser ces mouvements en terme de coefficient de diffusion et de distance atteinte, il est commode d'utiliser l'approche simplifiée reposant sur la résolution de l'équation de Langevin. Il s'agit de l'équation fondamentale de la dynamique pour la particule seule au milieu d'un liquide en tenant compte de la traînée visqueuse qui s'exerce sur elle et d'une force fluctuante résultant des chocs des molécules [26] et dont la valeur moyenne est kT (à un coefficient 1/2 près que nous négligerons) où k est la constante de Boltzmann. La résolution de cette équation permet d'obtenir le déplacement quadratique moyen de la particule en fonction du temps et des caractéristiques du milieu :

$$\frac{1}{2} \langle x^2(t) \rangle = \frac{kT}{K\mu} t \quad (2.25)$$

$kT/K\mu$ est le coefficient de diffusion associé à ce phénomène. Le temps caractéristique de déplacement d'une particule d'une distance égale à la distance entre les centres des particules est donc :

$$T_b = \frac{K\mu b^2}{kT} \quad (2.26)$$

Au sein d'une suspension, une particule animée de mouvements browniens est soumise à des forces résultant de la présence des autres particules. Dans une suspension de sphères non colloïdales, il s'agit de forces liées à des interactions hydrodynamiques, du même type que celles qui apparaissent lors du cisaillement de la suspension et qui contribuent à élever la viscosité (*cf.* § 2.3). Il faut alors faire intervenir un couplage entre les équations du mouvement de chaque particule et le coefficient de diffusion correspondant est plus faible. De façon à tenir compte partiellement de ces interactions hydrodynamiques complexes entre particules au cours de la diffusion brownienne, nous avons utilisé directement l'expression proposée ci-dessus de la traînée pour un déplacement grand par rapport à b . Ceci conduit à utiliser dans l'expression (2.25) la viscosité de la suspension et non, comme on le fait souvent, la viscosité du fluide interstitiel. Cette approche est évidemment approximative, mais elle permet une généralisation commode tout en évitant des calculs complexes et encore quelque peu incertains. On verra plus loin que le mouvement brownien peut aussi être contrecarré par les interactions colloïdales entre particules (*cf.* § 2.5.6).

2.4.2 Influence sur le comportement de la suspension

D'un point de vue global l'effet des mouvements browniens est, en premier lieu d'augmenter les dissipations d'énergie de type hydrodynamique au sein d'une suspension. Le mouvement brownien induit une diffusion des particules d'une couche de la suspension à une autre. Comme ces couches sont en mouvement relatif, une particule qui vient d'une autre couche a une vitesse différente et contribue à faire varier la quantité de mouvement de la couche dans laquelle elle arrive. Ceci impose d'augmenter la force tangentielle relative appliquée sur les couches pour maintenir une vitesse constante. Ce sont donc les fluctuations de vitesse des particules qui induisent des dissipations hydrodynamiques supplémentaires au travers de transferts de quantité de mouvement. La viscosité des gaz et des écoulements de grains très rapides résultent d'un phénomène analogue (*cf.* § 3.7.3) à ceci près que le transfert de quantité de mouvement lors de la migration d'une couche à une autre est assuré dans ce cas par les collisions entre particules et non par le biais de la traînée hydrodynamique. En assimilant le mouvement brownien à une agitation interne des particules, on en déduit par analogie avec un gaz parfait que le tenseur des contraintes additionnel résultant des fluctuations de vitesse dans (2.3) est du type newtonien. Finalement, on obtient l'expression de la viscosité d'une suspension brownienne, c'est-à-dire au sein de laquelle le mouvement brownien peut jouer un rôle, en l'absence d'autres types d'interaction :

$$\eta = f(\phi) + \eta_b \quad (2.27)$$

où η_b est la viscosité relative résultant spécifiquement de la diffusion brownienne et f est la fonction apparaissant dans (2.5).

En première approximation, on peut considérer que les effets du mouvement brownien deviennent importants lorsque le rapport (appelé nombre de Péclet (P_e)) d'une énergie liée à un mouvement caractéristique d'une particule à travers le fluide est nettement plus faible devant l'énergie moyenne d'agitation thermique (kT). Pour le numérateur, on peut utiliser les dissipations hydrodynamiques ($F_v b$) le long d'un mouvement de translation à travers le fluide supposé fixe sur une distance b à la vitesse caractéristique du cisaillement $V = \dot{\gamma} b$. On obtient finalement :

$$P_e = \frac{K\mu b^2 \dot{\gamma}}{kT} \quad (2.28)$$

La limite entre un régime A pour lequel les effets du mouvement brownien jouent un rôle important et un régime B pour lequel les effets hydrodynamiques prédominent correspond à la courbe $P_e = 1$ dans un diagramme $(\dot{\gamma}, \phi)$ (*cf.* Fig. 2.9). Notons qu'il s'agit là d'une simplification grossière, la transition est progressive et n'intervient pas brutalement lorsque $P_e = 1$. Cette remarque est valable pour toutes les transitions mentionnées dans cet ouvrage. Remarquons par ailleurs qu'il est d'usage d'utiliser le rayon des particules plutôt que la distance entre ces particules et la viscosité du fluide interstitiel plutôt que la viscosité de la suspension dans (2.28). Bien qu'approximative,

l'approche ci-dessus est plus générale puisqu'elle s'appuie sur des arguments physiques (on trouvera des arguments analogues dans [27]) et non sur une analyse dimensionnelle (comme c'est le cas habituellement) et, dans ces conditions, semble relativement bien adaptée à la description des suspensions concentrées.

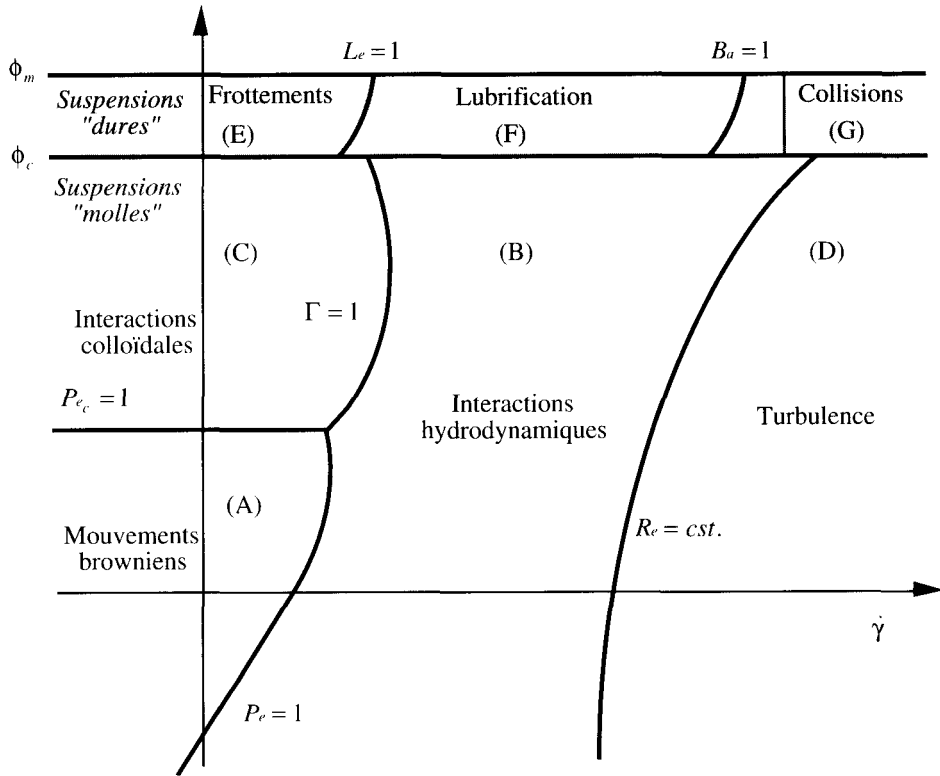


Fig. 2.9 : Classification des différents régimes d'écoulement d'une suspension en fonction de la prédominance des divers types d'interaction possibles. Toutes les autres caractéristiques de la suspension telles que la taille, la forme ou la rugosité des particules, le type d'interaction colloïdale, la viscosité du fluide interstitiel, les contraintes normales appliquées aux matériaux, etc., sont fixées. La transition entre deux régimes est représentée par une courbe correspondant à la valeur 1 pour le nombre adimensionnel régissant cette transition (sauf dans le cas de la turbulence car il s'agit d'une instabilité, dont l'apparition peut être plus ou moins maîtrisée). Cependant, en pratique, les transitions sont toujours progressives et les courbes localisent donc seulement une zone pour laquelle deux types d'interaction jouent un rôle à peu près identique dans les dissipations d'énergie. Les différents régimes d'écoulement de suspensions granulaires apparaissant pour une concentration solide supérieure à ϕ_c et les nombres adimensionnels gouvernant les transitions sont décrits au chapitre 3.

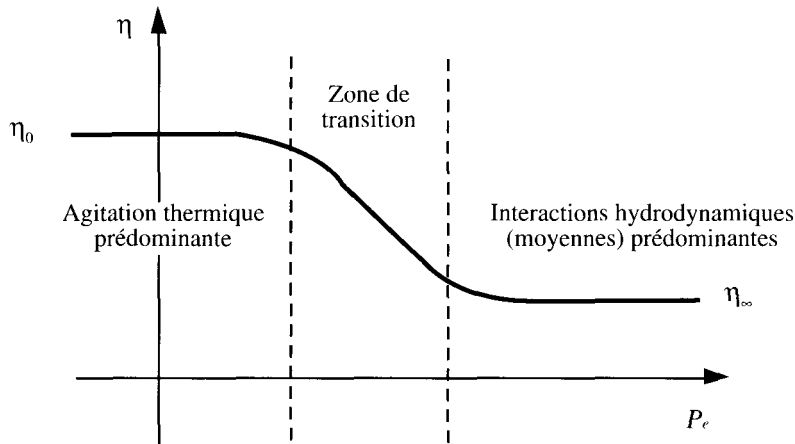


Fig. 2.10 : Schéma conceptuel des variations de la viscosité relative d'une suspension au sein de laquelle peuvent jouer un rôle les mouvements browniens (à faible Pe) ou les interactions hydrodynamiques (à fort Pe) en fonction de la valeur du nombre de Péclet, qui représente un gradient de vitesse adimensionnel.

Remarquons que Pe est aussi le rapport d'un temps caractéristique de diffusion brownienne (T_b) et du temps caractéristique de l'écoulement ($T_h = 1/\dot{\gamma}$). Sur ces bases, on peut réinterpréter les observations expérimentales, ce qui nous conduit à considérer qu'il y a deux états limites importants :

- aux faibles vitesses ($T_h \gg T_b$), les particules mises en mouvement du fait du cisaillement macroscopique ont, entre chaque phase élémentaire de l'écoulement, le temps de diffuser largement par rapport à leur position initiale ; ainsi, l'expérimentateur doit fournir une énergie nécessaire au cisaillement d'une suspension au sein de laquelle les particules sont très agitées ;
- aux fortes vitesses ($T_h \ll T_b$), entre chaque phase élémentaire de l'écoulement, les particules n'ont pas le temps de migrer d'une couche à une autre à cause des mouvements browniens, si bien que l'expérimentateur doit fournir une énergie correspondant à une suspension essentiellement organisée localement à chaque instant du fait du cisaillement moyen imposé, selon les calculs de mécanique des fluides classiques (cf. par exemple § 2.3).

En extrapolant ces considérations aux situations intermédiaires, on est tout naturellement amené à décrire le comportement d'une suspension qui, dans le cas où les effets hydrodynamiques et le mouvement brownien sont les seuls à pouvoir jouer un

rôle, dépend de l'agitation locale des particules. L'influence de cette agitation résulte de la compétition entre un phénomène de diffusion (brownienne) et un phénomène de convection (hydrodynamique). Finalement, on peut formaliser les évolutions au premier ordre de cet état instantané des particules en le décrivant à l'aide d'un paramètre λ qui prend des valeurs entre 0 et 1. La viscosité résultant de la diffusion brownienne à l'instant t s'écrit alors $\eta_b = \eta_b(\lambda)$. λ pourrait être par exemple la proportion de particules qui parviennent à franchir une distance caractéristique par mouvements browniens pendant le temps caractéristique de l'écoulement. Dans ce cas λ est une fonction du nombre de Péclet et on en déduit :

$$\eta_b = F(P_e) \quad (2.29)$$

avec $F/f \rightarrow 0$ quand $P_e \rightarrow \infty$

En pratique, on observe effectivement que des suspensions de particules sans interactions colloïdales ont une loi de comportement en cisaillement simple caractérisée par une viscosité à faible vitesse (η_0) et une viscosité à plus grande vitesse (η_∞), plus petite que la première (cf. Fig. 2.10) [28-29].

On notera qu'une analyse dimensionnelle [29-30] montre aussi que le rapport μ/μ_0 peut s'exprimer sous la forme d'une fonction de la concentration solide et d'un nombre de Péclet analogue à celui donné par (2.28) mais n'utilisant que des paramètres indépendants de la concentration solide (viscosité du fluide interstitiel et rayon des particules). L'approche ci-dessus est cependant plus générale et plus solide du fait qu'elle donne un sens physique aux évolutions de la viscosité. De plus, ce type d'approche pourra être utilisée à nouveau pour l'étude de la transition entre d'autres types de phénomènes dans des situations beaucoup plus complexes, pour lesquelles une simple analyse dimensionnelle semble vouée à l'échec (cf. § 2.5 et chap.3).

Un autre effet des mouvements browniens est de rendre réversible les transformations mécaniques que subit le système. Au repos, l'agitation brownienne permet aux particules de rejoindre, après un temps suffisamment long, une position moyenne ou une configuration d'équilibre. Cet effet est en particulier fondamental pour les suspensions thixotropes (cf. § 2.5.6), puisqu'au repos infini correspond un état de référence du système qui a la propriété fondamentale d'être réversible.

2.5 Interactions colloïdales

2.5.1 Généralités

On s'intéresse ici à des suspensions de particules (colloïdales) dont la longueur caractéristique est comprise entre 1 nm et 1 μ m dans un liquide newtonien. Du fait de leur petite taille, ces particules peuvent interagir à distance les unes des autres par le biais de ce qu'on appelle dans ce cas des forces colloïdales. Il s'agit essentiellement des forces

de van der Waals, des forces électrostatiques et d'effets stériques liés à l'adsorption de polymères. Nous présentons d'abord (§ 2.5.2) quelques éléments de base concernant les forces colloïdales (pour plus de détails on pourra se reporter à l'ouvrage de Russel *et al.* [28]). Nous voyons ensuite les différents effets induits par ces forces, d'abord en termes de stabilité (§ 2.5.3) puis de comportement mécanique des suspensions (§ 2.5.5 et 2.5.6).

2.5.2 Les forces colloïdales

Les forces de répulsion (de Born) à courte distance résultent de l'impossibilité de recouvrement des nuages électroniques. Le potentiel d'interaction (Φ_r) correspondant augmente très rapidement à partir d'une faible distance entre deux particules. Par conséquent, ces forces empêchent un contact trop étroit.

Les forces de van der Waals résultent des fluctuations thermodynamiques du champ électromagnétique à l'intérieur et autour des particules. Ceci induit l'existence d'une force, en général attractive, entre les particules, qui dépend de leur forme, de leur structure et du fluide interstitiel. En première approximation, pour deux particules relativement planes et assez proches l'une de l'autre, l'énergie potentielle d'interaction (Φ_a) correspondant à cette force entre deux particules décroît approximativement avec l'inverse du carré de la distance entre les particules :

$$\Phi_a \approx -A \frac{r^2}{h^2} \quad (2.30)$$

où A est la constante de Hamaker, qui dépend en fait de diverses caractéristiques du matériau. A varie approximativement dans la gamme $10^{-21} - 10^{-19}$ J (voir [28]).

Les forces électrostatiques résultent de la présence d'ions adsorbés à la surface des particules solides. Dans un liquide, ces ions diffusent légèrement et donnent lieu à la formation d'une structure appelée double-couche car on suppose qu'il y a plus ou moins alternance de couches d'ions positifs et négatifs quand on s'éloigne de la particule. La théorie correspondante (dite DLVO (initiales des auteurs)) permet d'estimer l'énergie potentielle d'interaction entre deux particules. En première approximation, on retiendra que cette énergie (Φ_e) décroît de manière plus ou moins exponentielle avec la distance entre les particules :

$$\Phi_e \approx \epsilon_0 \psi_0^2 r \exp(-\kappa h) \quad (2.31)$$

où ψ_0 est le potentiel de surface des particules et κ^{-1} la longueur de Debye, définie de la façon suivante :

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{2ne^2 z^2}{\epsilon_0 kT}} \quad (2.32)$$

où n est la concentration en ions dans le liquide, e la charge unitaire, z la valence des ions, et ϵ_0 la constante diélectrique du liquide. L'allure des variations des énergies potentielles d'interaction correspondant aux trois types de forces envisagées jusqu'à présent est présentée dans la figure 2.11.

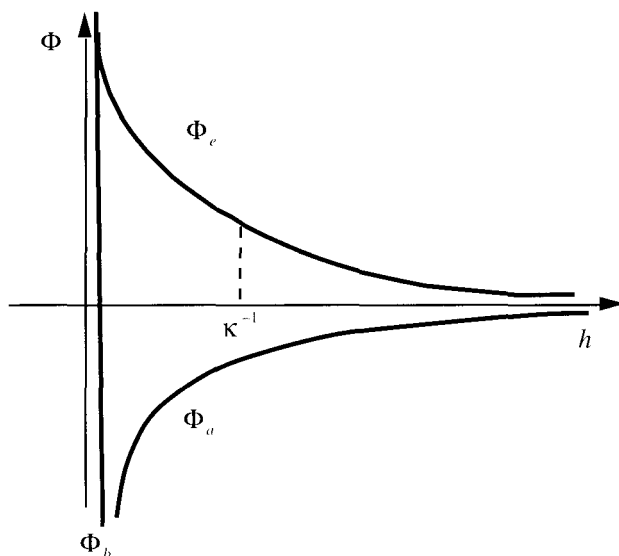


Fig. 2.11 : Représentation des énergies potentielles d'interaction entre deux particules en fonction de la distance entre leurs surfaces solides, et résultant des principales forces colloïdales : répulsion de Born (Φ_b), attraction de van der Waals (Φ_a), répulsion électrostatique (Φ_e).

La longueur de Debye a une signification physique assez claire, qui résulte des variations rapides de la fonction $\exp(-x)$ lorsque x varie autour de 1. Ainsi, le potentiel d'interaction est très faible lorsque $\kappa h \gg 1$, c'est-à-dire lorsque les particules sont à une distance très supérieure à la longueur de Debye, mais ce potentiel est maximum et à peu près constant lorsque $\kappa h \ll 1$, c'est-à-dire lorsque les particules sont à une distance très inférieure à la longueur de Debye. Cette longueur délimite donc en quelque sorte un volume autour de la particule au-delà duquel les autres particules n'interagissent que faiblement de manière électrostatique avec la particule considérée. En revanche, lorsque deux tels volumes fictifs s'interpénètrent, les particules se repoussent violemment. Encore une fois cette description simplifiée du problème ne s'applique parfaitement que dans le cas de systèmes bien définis et simples (sphères chargées par exemple). Pour des systèmes plus complexes, ce qui est le cas général, ces principes donnent seulement un aperçu des phénomènes susceptibles de se produire.

Les particules de nombreuses suspensions industrielles sont recouvertes d'une mince couche de polymères adsorbés ou chimiquement liés. Les interactions résultantes entre particules sont diverses mais l'effet général est une force de répulsion lorsque la distance qui les sépare est faible. Cette répulsion est de type stérique : les couches de polymères qui tendent à s'interpénétrer se repoussent fortement. À des distances entre particules un peu plus grandes, l'interpénétration de ces couches peut donner lieu à des forces attractives ou répulsives selon la température. Cependant, en supposant que l'épaisseur des couches est faible devant la taille des particules, on peut considérer que la contribution des polymères au potentiel d'interaction est essentiellement liée aux effets stériques et de type répulsive [27]. Par ailleurs, la présence dans le liquide interstitiel de molécules de polymères dissous peut donner lieu à des forces d'attraction [27]. Quand deux particules s'approchent l'une de l'autre à une distance inférieure à la taille des polymères, ceux-ci sont exclus d'un certain volume compris entre les deux particules. Le volume de liquide restant disponible pour les polymères étant plus faible que d'habitude, les polymères exercent une pression osmotique tendant à rapprocher encore plus les particules l'une de l'autre pour réduire le volume auquel ils n'ont plus accès (de la même façon que la pression exercée par les particules d'un gaz augmente lorsqu'on diminue l'espace dans lequel elles peuvent se mouvoir).

2.5.3 Stabilité de la suspension

Dans certains cas, les forces d'attraction sont importantes au point que deux particules proches peuvent s'attirer fortement l'une vers l'autre de manière plus ou moins définitive, en tout cas dans des conditions ordinaires d'écoulement. On appelle ce phénomène l'aggrégation. Dans ce cas, le système devient rapidement biphasique car les agrégats sédimentent plus facilement. En effet, la traînée est à peu près proportionnelle à la surface de la particule alors que la force de pesanteur est proportionnelle au volume, la seconde augmente donc plus rapidement que la première avec les dimensions de la particule (en négligeant les variations de masse volumique qui interviennent si l'agrégat est poreux). Lorsque l'agitation de la suspension ou les forces de répulsion sont suffisantes, ce phénomène est négligeable et la suspension peut donc rester stable.

Dans le but de mieux comprendre les principes régissant le comportement des suspensions colloïdales, nous nous intéressons maintenant à une situation idéale, pour laquelle seules les forces de van der Waals et les forces électrostatiques sont importantes. Dans ce cas, en première approximation, on peut représenter les variations de l'énergie potentielle totale (qui est la somme des deux potentiels correspondants et du potentiel de Born) selon trois principaux types de courbes (*cf.* Fig. 2.12) : (1) avec un seul minimum proche de la particule, (2) avec un minimum mais une répulsion à grande distance, (3) avec un premier minimum à une très faible distance de la particule et un second minimum un peu plus éloigné. Cette approche est pour le moins symbolique vis-à-vis des suspensions industrielles ou naturelles, formées d'une grande concentration de particules anisotropes et développant des interactions variées, mais elle nous permet de

mettre en valeur les principaux phénomènes. Lorsque les particules s'agrègent à une distance égale à celle du premier minimum, il est difficile de les séparer de nouveau, ce phénomène est appelé floculation. La suspension est alors instable. En revanche, si les particules ne s'agrègent que rarement de cette manière, c'est-à-dire si les particules restent en moyenne à une distance relativement grande les unes des autres, on considère que la suspension est stable.

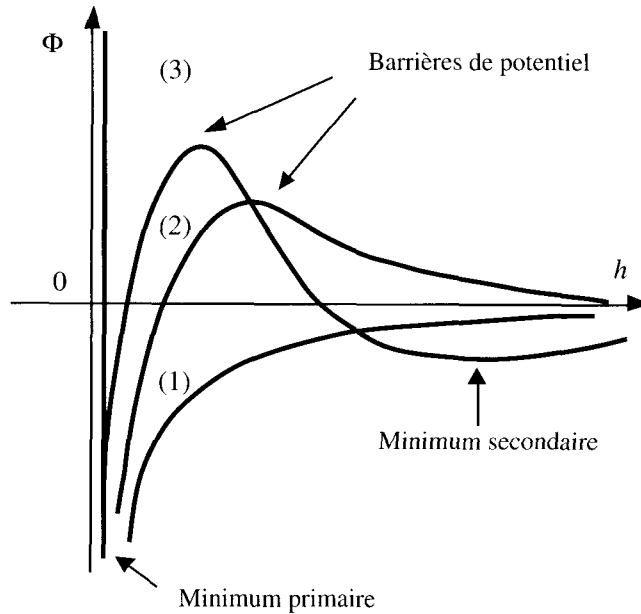


Fig. 2.12 : Différents aspects possibles de l'énergie potentielle totale résultant de l'interaction de deux particules en fonction de la distance entre leurs surfaces solides, en prenant en compte les forces décrites dans la Figure 2.11. Les trois formes possibles de la courbe correspondante sont présentées dans le texte.

D'un point de vue un peu plus général, les forces de répulsion prédominent sur les forces d'attraction (van der Waals) si le nombre de répulsion (N_r), qui est le rapport d'une énergie de répulsion et d'une énergie d'attraction de référence, est grand devant 1. On peut par exemple utiliser les valeurs des énergies potentielles données par (2.30) et (2.31) lorsque $h = r$, ce qui nous donne :

$$N_r = \frac{\epsilon_0 \Psi_0^2 r \exp(-\kappa r)}{A} \quad (2.33)$$

Dans ce cas, la suspension est stable car les particules, se repoussant violemment à courte distance, ne peuvent pas trop s'approcher les unes des autres.

Lorsque N_f est petit devant 1, la suspension est instable lorsque l'écoulement est lent mais il est possible de stabiliser la suspension en lui imposant un écoulement assez rapide. Celui-ci a pour effet d'extraire les particules des puits de potentiel dans lesquels elles peuvent tomber. Autrement dit, il faut que l'énergie fournie à la particule par le cisaillement soit supérieure à la profondeur du puits de potentiel dans lequel cette particule est susceptible de tomber. Pour cette dernière valeur, on utilise encore simplement A , bien qu'en toute rigueur, il faille plutôt considérer une constante de Hamaker effective correspondant à la distance nulle entre les particules (*cf.* [28]). On en déduit que la suspension peut être stable lorsque le nombre adimensionnel N_f est suffisamment grand, avec :

$$N_f = \frac{K\mu\dot{\gamma}b^2}{A} \quad (2.34)$$

Il est possible de stabiliser une suspension colloïdale par divers moyens, par exemple en faisant varier le pH ou la quantité d'électrolytes en solution de manière appropriée, ce qui permet de modifier le potentiel des doubles-couches, ou en ajoutant des polymères qui vont se fixer sur la surface des particules et empêchent celles-ci de s'approcher à des distances pour lesquelles les forces d'attraction sont prédominantes. Ceci fait l'objet de nombreux développements qui sortent du cadre de cet ouvrage (*cf.* par exemple [28]). Dans la suite nous ne considérons que des suspensions stables.

2.5.4 Potentiel d'interaction moyen

Afin de proposer une présentation unifiée des lois de comportement des suspensions colloïdales, il est commode de généraliser les résultats précédents en décrivant les forces colloïdales au travers d'un potentiel d'interaction total moyen entre une particule et ses voisines. Dans le cas d'une suspension stable, il existe pour une particule donnée une position de minimum d'énergie potentielle située grossièrement à égale distance de ses voisines proches (*cf.* Fig. 2.13). La valeur moyenne (Φ_0) de la profondeur (barrière de potentiel) des puits de potentiel correspondants lorsque les particules sont dispersées dans le fluide de manière à peu près isotrope a une signification particulière. Il s'agit de l'énergie (colloïdale) à fournir pour éloigner définitivement une particule de ses voisines en partant de la position relative d'équilibre au sein de la suspension (dispersion à peu près isotrope des particules), lorsque les autres types de dissipation (mouvement brownien, interactions hydrodynamiques et contacts) sont négligeables.

Lorsque la suspension est au repos, chaque particule tend donc en moyenne à rejoindre plus ou moins rapidement une position d'équilibre du fait à la fois des forces qui s'exercent sur elles et des mouvements browniens. Lorsqu'elle se trouve placée dans cette position, la particule ne peut en sortir que si on lui fournit une énergie suffisante de manière à franchir la barrière de potentiel locale, ce qui revient à vaincre les forces s'exerçant localement sur elle [31-32]. Après être sortie de cette position, cette particule

est à nouveau soumise à diverses forces à cause des nouvelles particules au milieu desquelles elle se trouve maintenant et il faut lui fournir une énergie suffisante pour prolonger son mouvement. D'un point de vue macroscopique, il est donc nécessaire d'appliquer une contrainte suffisante pour sortir définitivement et continuellement un grand nombre de particules de leur position d'équilibre. Ceci permet d'éloigner inexorablement les particules les unes des autres, autrement dit de provoquer un écoulement de la suspension. Durant un écoulement, il existe encore des positions d'équilibre mais celles-ci ont maintenant un caractère instantané, c'est-à-dire qu'on pourrait les situer en prenant une photographie de la suspension. Il n'en reste pas moins que les particules tendent toujours à rejoindre ces positions d'équilibre instantanées. On verra plus loin que leur capacité à réaliser cette opération dépend du rapport entre le temps qu'elle nécessite et la durée de vie d'une telle position d'équilibre, qui est liée à la vitesse de cisaillement macroscopique.

Notons cependant que cette description qui s'appuie sur l'existence de positions d'équilibre instantanées, que ce soit au repos ou en écoulement, n'est valable qu'en moyenne dans le temps lorsque les mouvements browniens sont significatifs. En outre, quel que soit le type d'interaction prédominante, les positions d'équilibre décrites ci-dessus fluctuent en permanence du fait du mouvement des autres particules que ce soit en écoulement ou au repos. Ce schéma conceptuel est extrêmement commode car, réaliste, il permet en outre de comprendre l'origine physique des principales propriétés mécaniques des suspensions colloïdales.

2.5.5 Suspension colloïdale diluée

Pour une suspension diluée, la distance entre particules est grande, Φ_0 est donc en général très faible. Dans ce cas, les interactions colloïdales ont une influence négligeable vis-à-vis du type de comportement : les mouvements browniens sont prédominants aux faibles vitesses de cisaillement (Région A), les dissipations hydrodynamiques aux fortes vitesses (Région B). Toutefois, il faut remarquer que lorsque deux particules s'approchent l'une de l'autre au cours de l'écoulement de la suspension diluée, leur potentiel d'interaction augmente et peut devenir significatif. Dans ces conditions, l'interaction colloïdale entre les particules n'est plus négligeable et tout se passe à peu près comme si le fluide interstitiel était plus visqueux dans les environs de chaque particule. Lorsqu'on connaît la forme de l'énergie potentielle d'interaction, il est possible d'estimer la viscosité d'une suspension colloïdale diluée. On obtient ainsi une expression identique à (2.9) avec une concentration solide équivalente un peu plus grande que la concentration solide réelle, de façon à tenir compte des forces colloïdales [33]. Par exemple, dans le cas idéal d'une suspension de sphères où seules les forces électrostatiques jouent un rôle, les forces de répulsion entre particules augmentant brutalement en dessous d'une distance égale à la longueur de Debye, la viscosité de la suspension est grossièrement celle d'une suspension de particules de forme identique et d'un diamètre $r + 2\kappa^{-1}$.

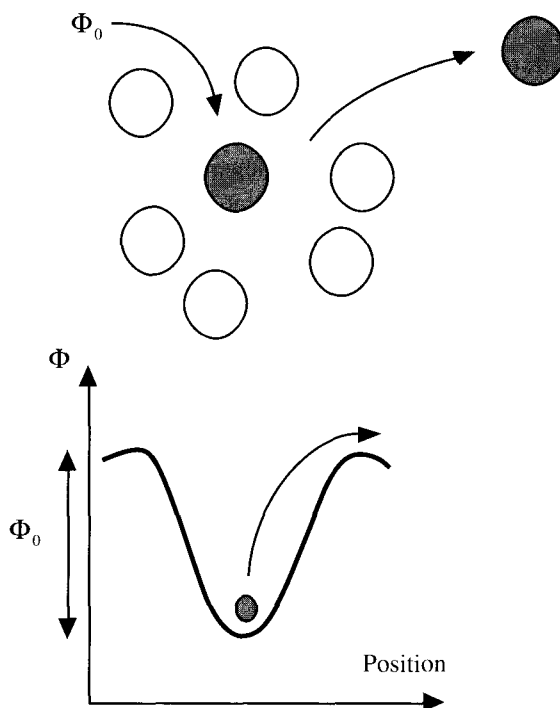


Fig. 2.13 : Schéma de principe des variations de l'énergie potentielle d'une particule environnée d'autres particules exerçant sur elle des forces colloïdales. À l'équilibre, la particule se trouve au fond du puits de potentiel et ne peut en sortir que si une énergie (Φ_0) correspondant à la profondeur du puits lui est fournie. Cette description correspond seulement à une description instantanée, car les puits de potentiel se forment et disparaissent constamment en cours d'écoulement, et moyenne dans l'espace, car la distribution des particules varie au sein de la suspension.

2.5.6 Suspension colloïdale concentrée

2.5.6.1 Seuil de contrainte

Lorsque la concentration en particules augmente, le potentiel d'interaction entre deux particules voisines dans la suspension au repos devient significatif. La suspension colloïdale est alors concentrée. Puisque cette situation locale reflète ce qui se passe dans l'ensemble du mélange, un réseau d'interactions fortes existe alors à travers l'ensemble de la suspension. L'exemple idéal de la suspension de sphères chargées qui se repoussent violemment juste en deçà d'une distance mutuelle $2\kappa^{-1}$ est utile pour comprendre ce qui peut se passer dans une suspension quelconque : lorsque la concentration atteint une valeur telle qu'au sein de la suspension équivalente de sphères

rigides de diamètre $r + 2\kappa^{-1}$ les particules forment un réseau connecté, les forces d'interaction électrostatique entre particules sont considérables. En dessous de cette concentration critique les forces électrostatiques sont peu importantes. Pour provoquer l'écoulement de la suspension concentrée il faut alors briser le réseau, c'est-à-dire localement rapprocher ou éloigner les particules les unes des autres malgré les forces colloïdales qu'elles exercent mutuellement. Cela signifie donc que chaque particule doit franchir une barrière de potentiel et finalement, au niveau macroscopique, il faut fournir un effort suffisant (seuil de contrainte) pour provoquer l'écoulement. Cette transition rappelle évidemment la transition liquide-solide mais compte tenu du désordre qui continue de régner il s'agit plutôt d'une transition vitreuse. Dans le cas idéal de la suspension de sphères chargées, on observe effectivement un rapide changement des caractéristiques mécaniques de la suspension, et notamment l'apparition d'un seuil de contrainte mesurable (τ_c), à partir d'une concentration correspondant à une distance entre particules de l'ordre de l'épaisseur des couches de Debye [28]. En pratique, dans le cas général, il n'est pas si facile de distinguer les conditions d'apparition d'un seuil de contrainte. Bien que les interactions colloïdales prédominent par rapport aux effets du mouvement brownien le seuil de contrainte induit peut encore être en effet très faible.

La suspension ne possède effectivement un seuil de contrainte que si les effets de l'agitation thermique sont négligeables. Dans le cas contraire, les mouvements browniens des particules permettent de briser sans cesse et reconstituer différemment le réseau de particules, qui n'a plus d'existence propre. Dans ces conditions, l'énergie à fournir pour provoquer un écoulement infiniment lent de la suspension est infiniment petite, le réseau se comporte donc comme un liquide (l'énergie fournie sert simplement à augmenter la tendance naturelle des particules à se déplacer dans une direction particulière au profit d'une autre direction (*cf.* Annexe 1.2). En revanche, lorsque le mouvement brownien est négligeable, les particules forment un réseau connecté qui ne se brise pas seul. Pour quantifier cette transition, il faut utiliser le rapport (P_c) de l'énergie nécessaire pour extraire une particule de son environnement (que l'on assimile à Φ_0 dans le cadre de notre approche simplifiée) et de l'énergie moyenne d'agitation thermique (kT) :

$$P_c = \frac{\Phi_0}{kT} \quad (2.35)$$

Lorsque $P_c \gg 1$, les interactions colloïdales sont donc prédominantes par rapport au mouvement brownien (région C) et la suspension possède un seuil de contrainte. Notons que la séparation entre la région A et la région C est une droite horizontale située à un niveau de concentration ($\phi = \phi_0$) qui ne dépend que des variations du potentiel Φ_0 avec la concentration. Ces variations ne sont pas simples en général puisqu'il faut tenir compte bien sûr du rapprochement des particules, mais aussi entre autres de la diminution de la force ionique résultant de la diminution du volume de fluide interstitiel disponible ainsi que de la manière dont les particules se distribuent dans l'espace. Dans ce domaine, les variations de Φ_0 avec la concentration ont surtout été étudiées à travers les variations de τ_c (voir ci-dessous).

La valeur du seuil de contrainte reflète *a priori* une propriété macroscopique mais constitue une donnée d'un intérêt considérable puisque, malgré la complexité du milieu, elle permet de quantifier les interactions locales entre particules. À ce stade, il semble naturel de supposer que l'écoulement macroscopique induit un déplacement relatif de toutes les particules les unes vis-à-vis des autres. Ceci conduit à estimer que l'énergie minimum à fournir permet de sortir chaque particule de son puits de potentiel local. De plus, compte tenu de la description ci-dessus il doit exister une déformation critique (γ_c) au-delà de laquelle le réseau initial de particules est définitivement détruit, c'est-à-dire que les particules ne peuvent plus retomber d'elles-mêmes dans leur puits de potentiel initial, lorsqu'on relâche la contrainte. Cette déformation macroscopique critique dépend non seulement de la distribution des forces mais aussi de l'arrangement et de la forme des particules. Puisqu'elle correspond localement à l'extraction d'une particule d'un puits de potentiel constitué par les forces exercées par les particules environnantes, γ_c devrait être proche de 1.

En fait, différents travaux sur des mousses et des émulsions concentrées [34-35] ont montré que ces matériaux pouvaient commencer à s'écouler alors qu'une très faible fraction (que nous appellerons active) de particules étaient définitivement sorties de leur puits de potentiel. En parallèle, le matériau emmagasine éventuellement de l'énergie élastique au niveau des autres liaisons entre particules, c'est-à-dire que des particules voisines se déplacent légèrement les unes par rapport aux autres sans franchir la barrière de potentiel. Si l'on néglige cette énergie élastique emmagasinée par les particules non actives, on est conduit à considérer que l'écoulement (macroscopique) est permis sous l'effet des déformations irréversibles d'une fraction de particules (n particules parmi b^{-3} particules par unité de volume) et, en première approximation, on peut facilement montrer que $\gamma_c = nb^3$.

Considérons maintenant un cisaillement simple à une vitesse infiniment petite et conduisant à une déformation γ_c . Par définition, il est nécessaire d'appliquer une contrainte supérieure ou égale au seuil, au moins au moment où la déformation critique est atteinte. En outre, puisque la vitesse d'écoulement est infiniment petite, les dissipations hydrodynamiques sont négligeables et cette valeur maximum de la contrainte est précisément égale au seuil. La contrainte varie donc entre zéro et τ_c lorsque la déformation varie entre zéro et γ_c . L'énergie dissipée par unité de volume au moment où l'on brise le réseau est donc de l'ordre de $\frac{1}{2}\tau_c\gamma_c$. À un niveau mésoscopique, il faut fournir une énergie suffisante pour sortir les n particules de ce volume unitaire de leur position d'équilibre. En égalisant les deux expressions correspondantes de l'énergie dissipée par unité de volume, nous en déduisons :

$$\Phi_0 = \tau_c b^3 \quad (2.36)$$

Par des approches théoriques ou expérimentales on trouve en général :

$$\tau_c \propto \phi^p \quad (2.37)$$

Pour des systèmes simples, on peut considérer en première approximation que le potentiel minimum est proportionnel au nombre de voisins proches de chaque particule, qui est lui-même proportionnel à la concentration volumique. Comme $b^{-3} \propto \phi$ on trouve d'après (2.36) que le seuil de contrainte varie bien selon une loi du type (2.37) avec $p = 2$ [28]. Pour d'autres systèmes modèles, l'arrangement fractal des particules a été pris en compte et l'on obtient des lois du type (2.37) mais p est maintenant relié à l'exposant fractal de la structure [36]. En pratique, pour des systèmes complexes, et en particulier des mélanges eau-argiles (*cf.* chap.7), on observe des variations du type (2.37) ou des variations exponentielles de τ_c en fonction de ϕ .

2.5.6.2 Temps caractéristiques

Lorsque la suspension subit un cisaillement rapide, les dissipations hydrodynamiques, liées au cisaillement du fluide interstitiel, peuvent être prédominantes. Ceci se produit lorsque le rapport (Γ) des dissipations hydrodynamiques (F_b) correspondant au mouvement d'une particule sur une distance b à la vitesse $V = \dot{\gamma}b$ (donc induit par l'écoulement) et de l'énergie nécessaire pour extraire une particule de son puits de potentiel local (Φ_0), est supérieur à 1, avec :

$$\Gamma = \frac{K\mu\dot{\gamma}b^2}{\Phi_0} \propto \frac{\mu\dot{\gamma}}{\tau_c} \quad (2.38)$$

On peut aussi utiliser le module élastique plutôt que le seuil de contrainte dans cette expression (*cf.* § 2.5.6.5). Dans la suite, on utilisera la seconde expression de Γ qui peut être estimée à partir de quelques données mécaniques simples concernant la suspension étudiée en gardant à l'esprit que la transition entre les deux régimes pourrait être plus précisément quantifiée par la première expression. En utilisant alors par exemple une loi de variation du seuil de contrainte du type (2.37) avec un exposant de l'ordre de 3, on peut tracer la limite entre la région C pour laquelle les interactions colloïdales prédominent et la région B pour laquelle les dissipations hydrodynamiques prédominent (*cf.* Fig. 2.9). Le point d'intersection entre cette courbe ($\Gamma = 1$) et les deux courbes précédemment établies ($P_e = 1$ et $P_c = 1$) est un point triple puisqu'il correspond à un équilibre entre les trois types de dissipation (brownienne, colloïdale, hydrodynamique).

On peut donner un sens physique plus précis à ce résultat en analysant les caractéristiques des mouvements locaux des particules au sein d'une suspension colloïdale. Considérons une particule au sein du fluide interstitiel soumise à des interactions avec ses voisines qui tendent à la faire retomber au fond de son puits de potentiel local. Pour simplifier, nous supposons que la particule peut se mouvoir le long de l'axe Ox et interagit uniquement avec les particules situées sur cet axe. Nous appelons $\Phi(x)$ l'énergie potentielle de la particule en fonction de sa position. Pour estimer la force de rappel ($F(x) = -d\Phi/dx$) résultant des interactions colloïdales, nous

pouvons d'abord utiliser le fait qu'à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque la particule est au fond du puits de potentiel, $F(0) = -(d\Phi/dx)_0 = 0$, car cette position correspond à un minimum d'énergie potentielle. Par conséquent, en supposant que la profondeur de ce puits de potentiel unidimensionnel est du même ordre que le potentiel d'interaction moyen entre deux particules au sein de la suspension (Φ_0), nous pouvons écrire au premier ordre :

$$F(x) = -x \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \approx -\frac{x\Phi_0}{d^2} \quad (2.39)$$

où d est une distance caractéristique de la forme du potentiel. En première approximation on peut supposer que d est du même ordre que b . Par ailleurs, la particule considérée est soumise à la traînée hydrodynamique si bien que l'équilibre des forces, en négligeant les phénomènes d'inertie, s'écrit :

$$-K\mu \frac{dx}{dt} - x \frac{\Phi_0}{b^2} = 0 \quad (2.40)$$

On en déduit la position de la particule au cours du temps :

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) \quad (2.41)$$

où x_0 est la position initiale de la particule et T_c un temps caractéristique de retour à l'équilibre lorsqu'elle est soumise d'une part à une force de rappel due aux interactions colloïdales et d'autre part à la traînée hydrodynamique :

$$T_c = \frac{K\mu b^2}{\Phi_0} \propto \frac{\mu}{\tau_c} \quad (2.42)$$

Ainsi, Γ est proportionnel au rapport d'un temps caractéristique du matériau (T_c) et du temps caractéristique d'écoulement de la suspension T_h .

On peut maintenant essayer de se représenter les phénomènes de structuration et déstructuration. Après un repos infini, les particules ont atteint une position de minimum d'énergie potentielle. Lorsqu'on cisaille la suspension, les particules quittent cette position et tendent constamment à rejoindre une autre position d'équilibre qui est liée à la configuration instantanée des particules (cf. § 2.5.4). Elles le font principalement selon deux temps caractéristiques. Le premier (T_c) est court et résulte de la force de rappel exercée par les autres particules vers la position d'équilibre instantanée (voir ci-dessus). Le second temps caractéristique (T_c^*) est beaucoup plus long et correspond au retour vers la distribution d'équilibre (en termes de position et d'orientation) de l'ensemble des particules. Pour une suspension possédant un seuil de contrainte lié à l'existence d'un réseau connecté, cette phase d'arrangement collectif pourrait être cruciale vis-à-vis de la cohésion du réseau et donc des propriétés mécaniques de la suspension. On ne dispose

malheureusement que de très peu d'éléments pour estimer T_c^* . On peut néanmoins penser que ce réajustement progressif de l'ensemble des particules se produit sous l'action combinée des forces colloïdales et des mouvements browniens. Au cours de ce processus, chaque particule est attirée vers une position d'équilibre qui fluctue légèrement autour d'un point fixe au cours du temps, du fait du mouvement des autres particules. Tout se passe comme si on avait déstabilisé un ensemble de particules (de formes quelconques) jointes par des ressorts dans l'espace. Lorsque le temps caractéristique de l'écoulement moyen est extrêmement grand, chaque particule oscille autour de sa position d'une manière qui dépend des mouvements de ses voisines, des forces variables qu'exercent le fluide sur sa surface, de la rigidité des ressorts et des dissipations d'énergie. Elle finit par revenir vers sa position et son orientation d'équilibre au bout d'un temps plus ou moins long. T_c^* doit donc non seulement dépendre de T_b mais aussi de l'arrangement et de la forme des particules.

Finalement, pour des écoulements pas trop lents ($T_h \ll T_c^*$), l'état d'équilibre de référence ne correspond pas à un réarrangement collectif mais seulement à un équilibre local des particules. On peut alors s'attendre à observer un comportement en régime permanent gouverné par le temps caractéristique de retour rapide T_c avec deux régimes :

- aux faibles vitesses ($T_h \gg T_c$), pendant chaque phase élémentaire d'écoulement, les particules sorties d'un puits de potentiel ont en moyenne le temps de se replacer près du fond d'un nouveau puits de potentiel, si bien que l'expérimentateur doit à chaque instant fournir une énergie correspondant à la rupture du réseau d'interaction des particules ;
- aux fortes vitesses ($T_h \ll T_c$), pendant chaque phase élémentaire d'écoulement, les particules n'ont en moyenne pas le temps de se replacer dans un autre puits de potentiel, et l'expérimentateur doit seulement fournir l'énergie nécessaire au cisaillement du fluide interstitiel.

2.5.6.3 État de la suspension

Compte tenu de ce qui précède, on peut considérer que les propriétés mécaniques de la suspension sont caractérisées à chaque instant par son état de déstructuration. En première approximation, il est naturel de supposer que celui-ci dépend d'une seule variable scalaire (λ) qui correspond à la fraction de particules qui sont en dehors de leur puits de potentiel local instantané au sein d'un volume élémentaire à l'instant t . Ceci oblige bien entendu à considérer que l'on peut répartir les particules dans deux états d'énergie bien séparés, au fond ou en dehors du puits de potentiel local, en négligeant le fait qu'à chaque instant une fraction importante de particules puisse se trouver dans des niveaux d'énergie intermédiaires. Cette approche revient aussi à supposer qu'une déstructuration isotrope et constante (dans chaque volume élémentaire) est associée à un état d'énergie donné, ce qui paraît vraisemblable pour des suspensions colloïdales concentrées de particules de formes quelconques au sein desquelles la distribution des particules dans l'espace reste dans un désordre à peu près constant. Notons que ceci

n'est évidemment pas vrai lorsque les effets d'un arrangement collectif deviennent significatifs, c'est-à-dire pour des écoulements très lents ($T_h > T_c^*$).

Une équation décrivant les évolutions de l'état du matériau au cours du temps peut être écrite en considérant que le taux de variation de λ est proportionnel au nombre de particules par unité de temps qui sont sorties de leur puits instantané local sous l'effet du cisaillement, diminué du nombre de particules par unité de temps qui y ont été ramenées sous l'effet des interactions colloïdales. Le premier terme est le produit d'une quantité (F) proportionnelle au nombre de particules susceptibles de sortir de leur puits de potentiel local (cette quantité dépend de l'état instantané), et du taux de sortie des puits locaux qui est proportionnelle à $1/T_h$. Le second terme est le produit d'une quantité (G) proportionnelle au nombre de particules susceptibles de retourner dans leur puits de potentiel local (cette quantité dépend aussi de l'état instantané), et de la vitesse de retour au fond d'un puits qui est proportionnelle à $1/T_c$. Sans aucune hypothèse particulière concernant les caractéristiques de la suspension étudiée, on obtient finalement une équation du type :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{F(\lambda)}{T_h} - \frac{G(\lambda)}{T_b} \quad (2.43)$$

2.5.6.4 Régime permanent

Lorsque seules les interactions colloïdales et hydrodynamiques prédominent et en l'absence de fluctuations des vitesses significatives, on sait que la loi de comportement de la suspension doit être recherchée sous la forme d'une somme de deux termes résultant spécifiquement de chaque type d'interaction (cf. § 2.2). La valeur de la contribution colloïdale est associée à la résistance au cisaillement du réseau voire de groupes de particules en interaction colloïdale si la suspension est fortement déstructurée. Par définition, la résistance de ce réseau vaut τ_c lorsque l'ensemble des particules sont dans leur position d'équilibre locale. Aller plus loin dans ce domaine permettrait certainement d'expliquer les lois de comportement phénoménologiques des suspensions concentrées, mais ceci requiert des connaissances plus approfondies concernant les évolutions de la distribution des contraintes et de la structure interne au sein de cette assemblée de particules. En l'absence d'une telle description, et compte tenu de l'hypothèse d'invariance de la contribution hydrodynamique en fonction de la configuration pour des suspensions non modèles (cf. 2.3), on trouve donc en cisaillement simple :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} + f(\lambda)\tau_c \quad (2.44)$$

où f , qui est telle que $f(0) = 1$, est une fonction inconnue *a priori*. mais qui dépend de l'état instantané de déstructuration de la suspension, c'est-à-dire de la proportion de particules hors de leur puits de potentiel local instantané.

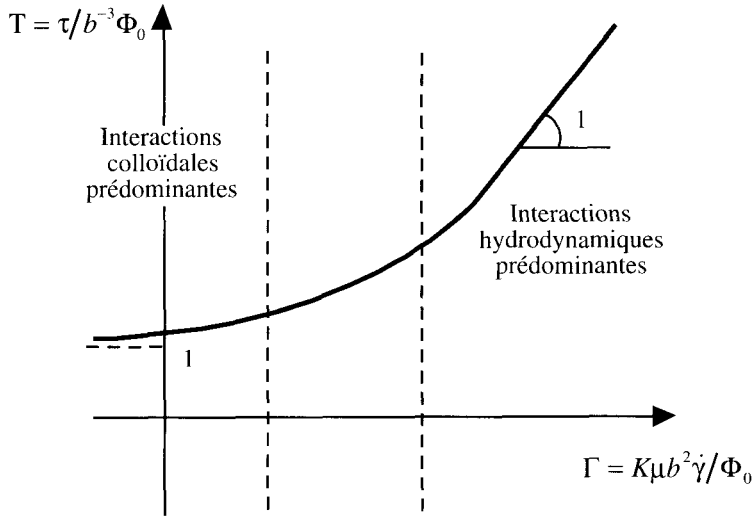


Fig. 2.14 : Schéma conceptuel des variations de la contrainte adimensionnelle (T) en fonction du gradient de vitesse adimensionnelle (Γ) pour une suspension au sein de laquelle peuvent jouer un rôle les interactions colloïdales (à faible Γ) ou les interactions hydrodynamiques (à fort Γ).

En régime permanent on a $d\lambda/dt = 0$ ce qui nous donne (d'après (2.43)) :

$$\lambda = H\left(\frac{T_b}{T_h}\right) \quad (2.45)$$

L'équation (2.44) peut alors s'écrire sous forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$T = 1 + \Gamma + F(\Gamma) \quad (2.46)$$

où $T = \tau/\tau_c$ et F est une fonction (positive ou négative) telle que $F \rightarrow 0$ lorsque $\Gamma \rightarrow 0$ et $F(\Gamma)/\Gamma \rightarrow 0$ lorsque $\Gamma \rightarrow \infty$. Ainsi, on obtient bien un comportement de type fluide à seuil pour de faibles gradients de vitesse (Région C), lorsque les interactions colloïdales sont prédominantes, et un comportement de type newtonien (Région B) aux forts gradients de vitesse, lorsque les dissolutions hydrodynamiques sont prépondérantes (cf. Fig. 2.14) (voir aussi § 2.5.6.5). Expérimentalement, pour divers types de suspensions, on constate que F est une fonction (positive) puissance de Γ avec un exposant inférieur à 1 [37]. Ce phénomène pourrait résulter du fait que la déstructuration du réseau de particules s'accompagne d'une augmentation du nombre de puits de potentiel.

2.5.6.5 Viscoélasticité

Les suspensions colloïdales concentrées possèdent une certaine élasticité, car de l'énergie élastique peut être emmagasinée lorsque les particules sont déplacées seulement légèrement à partir de leur position d'équilibre sans franchir la barrière de potentiel. Lorsqu'on relâche l'effort initialement appliqué pour imposer ce déplacement, la particule revient très rapidement dans sa position d'équilibre. Si on néglige en première approximation l'énergie emmagasinée par les particules non actives du point de vue de l'écoulement (*cf.* § 2.5.6.1) et si on admet que les particules actives se déplacent toutes en même temps par rapport à leur position d'équilibre et de manière proportionnelle à la force macroscopique appliquée, on en déduit que la suspension est parfaitement élastique pour des déformations inférieures à une valeur critique (γ_c) et l'on peut écrire :

$$\tau_c = G\gamma_c \quad (2.47)$$

où G est le module élastique de la suspension. Si une contrainte a été appliquée qui permet de dépasser cette déformation critique, la suspension se déforme inexorablement. En fait, les résultats obtenus sur des mousses ou des émulsions montrent que le comportement des suspensions sous le seuil de contrainte peut être fortement non linéaire. En revanche, les résultats obtenus avec des suspensions eau-argile sont en assez bon accord avec (2.47) [38]. Dans ce cadre il résulte de (2.47) que Γ est proportionnel à $\mu\dot{\gamma}/G$. C'est ce dernier nombre adimensionnel qui a le plus souvent été utilisé en pratique pour représenter les courbes d'écoulement d'une suspension à diverses concentrations sur une courbe maîtresse du type (2.46) [39-41].

Cette approche simpliste conduit à considérer que la suspension colloïdale concentrée est purement élastique avant le seuil de contrainte et fluide au-delà. En réalité, une quantité variable d'énergie élastique peut être emmagasinée en cours d'écoulement suivant la façon dont les particules s'éloignent de leur position d'équilibre locale et instantanée, ce qui explique les propriétés viscoélastiques de ces matériaux. En pratique, la transition entre un comportement élastique et un comportement fluide est progressive et il est d'usage de considérer que, durant une expérience d'oscillations (*cf.* § 1.5.7), pour une fréquence d'oscillation donnée, l'amplitude de déformation critique (γ_c) est atteinte lorsque G' commence à décroître. En général, au même moment, G'' commence à croître car les dissipations visqueuses deviennent importantes. On admet alors que le seuil est atteint au niveau de l'intersection des courbes de G' et de G'' et que sa valeur est donnée par (2.47). Les variations de G' et G'' peuvent aussi être utilisées pour déterminer la concentration critique au-delà de laquelle une suspension possède un seuil de contrainte : aux faibles concentrations et pour de petites déformations, G' et G'' sont petits, ce qui correspond à un comportement plus ou moins newtonien avec une faible viscosité alors qu'à des concentrations plus élevées, G' augmente de manière significative, ce qui correspond à la formation d'un réseau.

Pour tenter de traduire la viscoélasticité des suspensions colloïdales concentrées, il a par exemple été suggéré que la contrainte liée spécifiquement aux déformations du réseau de particules en interaction suive un modèle de Maxwell simple (1.30) avec une viscosité variable [38]. Les connaissances dans ce domaine, à la fois du point de vue expérimental et théorique, restent cependant insuffisantes.

2.5.6.6 Thixotropie

La thixotropie résulte naturellement du fait que les mécanismes d'extraction ou de retour des particules de ou vers leur position d'équilibre ont une durée finie, qui dépend de diverses caractéristiques de l'écoulement encore mal connues. Par conséquent, une situation stationnaire, pour laquelle les particules sont en moyenne à une certaine distance de leur position d'équilibre locale, n'est atteinte qu'après un certain temps [32], comme l'exprime fondamentalement l'équation (2.43). D'après notre analyse des caractéristiques de la restructuration d'une suspension colloïdale concentrée (cf. § 2.5.6.2) deux régimes peuvent en fait être distingués. Lorsque $T_h \ll T_c^*$, c'est-à-dire pour des écoulements pas trop lents, les évolutions de la loi de comportement sont données par une équation du type $\tau = \tau(\dot{\gamma}, \lambda)$ couplée à l'équation (2.43) où T_h est remplacé par T_c . On ne connaît cependant pas les évolutions de G et F . Lorsque $T_h \gg T_c^*$, c'est-à-dire pour des écoulements extrêmement lents ou au repos, il est possible qu'une équation formellement analogue à (2.43) en remplaçant T_h par T_c^* permette de décrire correctement les évolutions de l'état de la suspension. Dans ce domaine, on dispose de très peu d'éléments et toute approche conduit, comme pour les problèmes de viscoélasticité décrits ci-dessus, à d'importantes spéculations concernant la structure interne du matériau et ses évolutions. Il semble que ces domaines ne pourront progresser significativement que lorsqu'on disposera de vues plus claires concernant les évolutions de la distribution des forces au sein des suspensions en cours d'écoulement.

Il est malgré tout possible de préciser quelque peu l'expression (2.43) à partir d'une approche simplifiée relativement classique [38, 42-43] que l'on applique ici au cas $T_h \ll T_c^*$. On suppose que la quantité de particules (F) susceptibles de sortir de leur puits de potentiel local et instantané est proportionnelle à la fraction de particules situées au fond de ces puits ($1 - \lambda$) à un instant donné et que la quantité de particules susceptibles d'y retourner (G) est proportionnelle à la fraction de particules actuellement en dehors de ces puits (λ). On obtient finalement une forme simplifiée de l'équation (2.43) :

$$T_0 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1 - \lambda}{T_h} - \frac{\lambda}{T_c} \quad (2.48)$$

où T_0 est un temps de relaxation de la suspension qui traduit le délai avec lequel l'état de la suspension évolue vers un nouvel équilibre associé aux sollicitations qui lui sont imposées à partir d'un instant de référence.

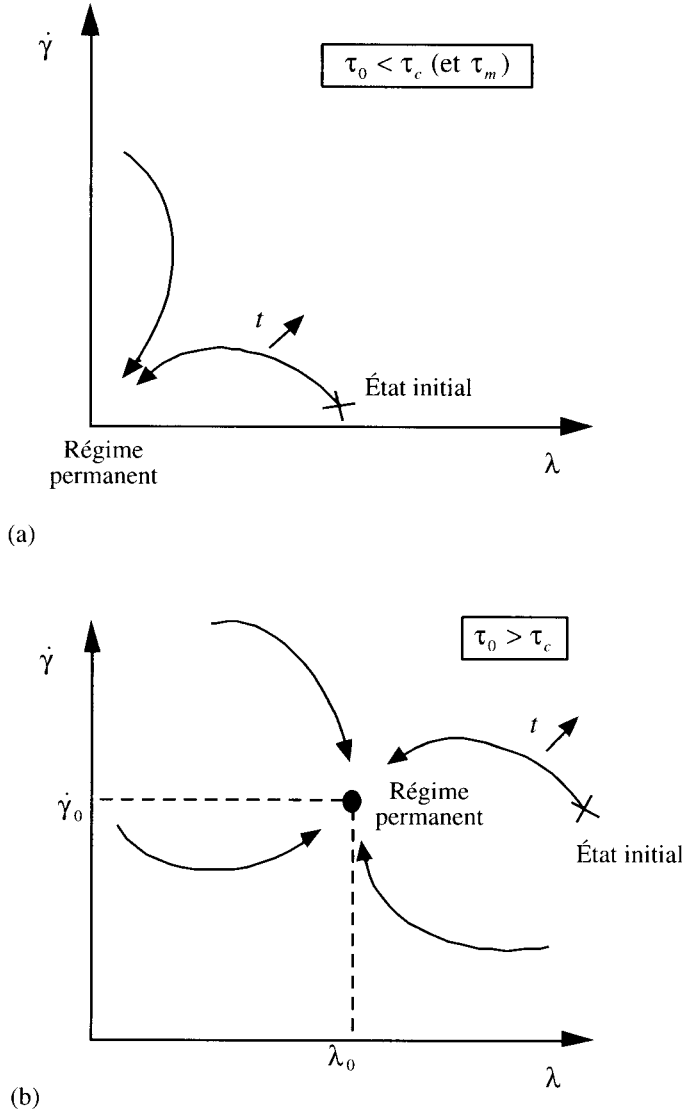


Fig. 2.15 : Diagrammes de phase pour une suspension concentrée. Évolution de l'état (λ) et du gradient de vitesse au sein du matériau au cours du temps à contrainte imposée (τ_0) à partir d'un état initial quelconque dans le cas (a) où τ_0 est inférieur au seuil de contrainte (ainsi qu'à un éventuel minimum de la courbe d'écoulement) et (b) où τ_0 est supérieur au seuil de contrainte. La courbure des courbes d'évolution de la phase tracées ici est purement arbitraire.

L'équation (2.48) donne en régime permanent :

$$\lambda = \frac{1}{1 + T_h/T_c} \quad (2.49)$$

Notons que cette dernière équation exprime exactement la proportion de particules en dehors de leur puits de potentiel si l'on suppose que le rapport du nombre de particules en dehors et du nombre de particules au fond de leur puits de potentiel vaut précisément T_c/T_h .

Comme annoncé au chapitre 1, les évolutions dans le temps de l'état de la suspension du fait de la thixotropie sont fondamentalement décrites par un système d'équations couplées ((2.46) et (2.48)) donnant la contrainte tangentielle en fonction d'un paramètre de structure λ lui-même fonction de l'histoire du mouvement. Lorsqu'une contrainte (ou de manière équivalente un gradient de vitesse) est imposée, on peut alors observer les évolutions de l'état de la suspension en termes de gradient de vitesse (respectivement de contrainte) et de structure dans un diagramme de phase. On peut ainsi montrer que, pour un matériau à seuil ayant une courbe d'écoulement croissante ($(d\tau/d\lambda) > 0$), lorsqu'une contrainte est imposée sous le seuil toutes les courbes convergent vers le repos ($\lambda = 0, \dot{\gamma} = 0$) (cf. Fig. 2.15), quel que soit l'état initial du matériau, notamment si le fluide est initialement en écoulement. Si au contraire la contrainte imposée (τ_0) est supérieure au seuil, l'état du matériau converge vers un état d'écoulement permanent ($\lambda_0, \dot{\gamma}_0$) correspondant à cette contrainte (cf. Fig. 2.15) même si le matériau est initialement au repos.

2.5.6.7 Loi de comportement d'une suspension colloïdale concentrée aux très faibles gradients de vitesse - Fluide à minimum

Lorsque $\Gamma \rightarrow 0$, le temps caractéristique de retour vers une position d'équilibre est très petit devant le temps caractéristique de l'écoulement. Par conséquent, le réseau de particules en interaction au sein d'une suspension colloïdale concentrée est seulement très partiellement détruit à chaque instant. Dans ce cas, le second terme de (2.44) reste la résistance d'un réseau de particules en interaction simplement affaibli et il paraît naturel de supposer que :

$$\frac{df}{d\lambda} < 0 \quad (2.50)$$

λ étant ici le pourcentage de liens entre particules détruits ou encore le nombre de particules hors de leur puits de potentiel local à l'instant considéré. Remarquons que l'hypothèse (2.50) n'est probablement pas valable pour des valeurs plus élevées de Γ pour lesquelles le réseau est fortement déstructuré à chaque instant, ce qui peut conduire

à une augmentation du nombre de puits de potentiel comme semble le montrer les évolutions de F dans l'équation (2.46) pour de nombreux systèmes.

En supposant que $T_h \ll T_c^*$ les variations de λ sont en première approximation régies par une équation du type (2.49) d'où l'on déduit la valeur de λ en régime permanent (2.50). Cette valeur injectée dans (2.44) nous donne la contrainte tangentielle en régime permanent et l'on constate alors que celle-ci décroît aux très faibles gradients de vitesse lorsqu'au premier ordre :

$$\left| \left(\frac{df}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} \right| > \frac{K}{b} \quad (2.51)$$

Sachant par ailleurs d'après (2.46) que $\tau \rightarrow \infty$ lorsque $\Gamma \rightarrow \infty$ la courbe d'écoulement de cette suspension possède donc un minimum lorsque (2.51) est vérifiée. Ce comportement très particulier et évoqué à plusieurs reprises dans cet ouvrage (cf. § 4.2.3 et § 7.3.3) survient donc lorsque le réseau est suffisamment fragile, c'est-à-dire lorsqu'une faible fraction de liens détruits fait considérablement chuter la résistance de la structure.

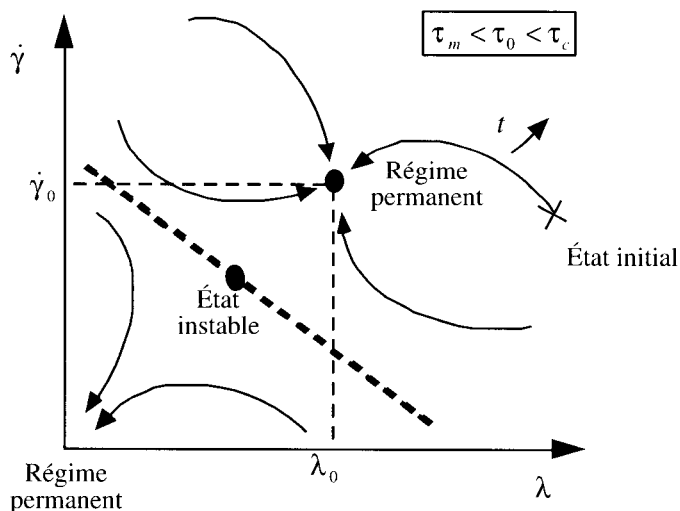


Fig. 2.16 : Diagramme de phase pour un fluide à minimum dans le cas où la contrainte imposée est comprise entre le minimum de contrainte et le seuil de contrainte. Le matériau évolue vers l'un des deux états stables en régime permanent en évitant l'état instable.

Si la résistance du réseau suit une loi du type (2.37) on peut admettre que la concentration en particules à prendre en compte dans cette formule est une concentration équivalente de particules interagissant encore avec leurs voisins comme dans le réseau initial (complet). Dans ces conditions la concentration solide lorsque le nombre de liens

brisés vaut λ s'écrit en première approximation $\phi(1-\lambda)$. On en déduit la forme de la fonction f aux faibles valeurs de Γ :

$$f(\lambda) = (1-\lambda)^p \quad (2.52)$$

La suspension possède alors un minimum, lorsque $p > K/b$, c'est-à-dire lorsque le rapport d'une dimension caractéristique de la particule est suffisamment faible devant la distance qui sépare les particules.

Pour un fluide à minimum les écoulements permanents correspondant à des points dans la partie décroissante de la courbe d'écoulement sont instables (*cf.* Annexe 4.1). Les évolutions de l'état du matériau dans le diagramme de phase $(\lambda, \dot{\gamma})$ sont assez particulières lorsque la contrainte imposée est comprise entre celle correspondant au minimum et le seuil de contrainte (*cf.* Fig. 4.6). Dans ce cas, il y a deux états stables (le repos et un écoulement à fort gradient de vitesse) et un état instable (dans la partie décroissante de la courbe d'écoulement) (*cf.* § 4.2.3). Selon l'état initial du matériau celui-ci évolue vers l'un ou l'autre des deux états stables en évitant l'état instable (*cf.* Fig. 2.16).

2.6 Contacts entre particules

2.6.1 Définition

Le contact direct entre deux particules intervient d'un point de vue théorique lorsque des éléments solides de chaque particule sont à une distance nulle. En pratique, ce contact direct n'a pas de signification physique claire. Les forces de répulsion (de Born) à courte distance empêchent bien entendu l'interpénétration des réseaux atomiques. Mais il faut aussi remarquer que les parties externes des corps solides ne sont pas délimitées par des surfaces géométriques de courbure lentement variable, qui pourraient facilement glisser l'une sur l'autre. En fait, ces enveloppes externes sont toujours rugueuses à une échelle d'observation suffisamment petite et le contact direct, s'il existe, impose un enchevêtrement de ces rugosités, comme deux massifs montagneux retournés l'un sur l'autre et s'emboîtant plus ou moins. Par ailleurs l'élasticité du fluide interstitiel ou des particules peut jouer un rôle important lors d'un rapprochement de deux particules à une très faible distance.

Malgré cette difficulté de description des processus physiques à une échelle fine, deux lois décrivent relativement bien les mécanismes macroscopiques du contact direct. La première est la loi de Coulomb pour deux corps solides glissant l'un sur l'autre : lorsqu'il y a mouvement, en l'absence d'autres forces, la force tangentielle, parallèle à la direction du mouvement relatif, est proportionnelle à la force normale appliquée. Il s'avère qu'en pratique, un milieu granulaire au sein duquel prédominent des contacts directs prolongés entre particules, induisant donc des glissements relatifs des particules,

se comporte plus ou moins, pour des mouvements très lents (quasi statiques), comme un seul corps rigide respectant la loi de Coulomb. Dans ce cas, pourtant, on n'est pas encore en mesure de prédire la façon dont les contraintes normales sont transmises. Les observations montrent entre autres que cette transmission s'opère selon des chemins préférentiels complexes, qui traversent l'empilement granulaire en passant par un certain nombre de grains (*cf.* § 3.3.2). La seconde loi de base concernant le contact direct entre deux particules résulte simplement du principe de conservation de la quantité de mouvement à l'interface entre les deux corps. Lors d'une collision, on a donc une relation entre la quantité de mouvement relative entre les particules avant et après le contact. Une certaine quantité d'énergie est éventuellement dissipée lors du choc. On trouvera au chapitre 3 des développements plus détaillés concernant ces problèmes.

On peut maintenant se demander dans quelles conditions ces contacts directs peuvent intervenir. La force de répulsion calculée plus haut (2.14) tendant vers l'infini lorsque la distance entre les surfaces des particules tend vers zéro prévient *a priori* un rapprochement excessif. Cependant, lorsque les deux particules sont très près l'une de l'autre, les mouvements de fluide au sein des creux de la rugosité des particules peuvent devenir significatifs. Ils permettent notamment d'évacuer plus rapidement le fluide comprimé entre les surfaces et atténuent l'effet répulsif du rapprochement. Du fait de la rugosité des particules, tout se passe finalement comme s'il restait toujours au minimum une couche de fluide d'épaisseur ϵ , de l'ordre de la rugosité moyenne des particules. Ainsi, il est vraisemblable qu'au premier ordre, lors d'un contact direct, la force de répulsion atteigne en fait une valeur maximale donnée par (2.14) en prenant $h = \epsilon$. Ce raisonnement a été confirmé par des mesures directes de la force de répulsion ou d'attraction maximale atteinte lors du rapprochement de deux particules [44].

Lors de l'écoulement d'une suspension, des contacts directs ne peuvent pas se produire en général puisque la force de répulsion hydrodynamique à vaincre (au minimum de l'ordre de $\mu_0 \dot{\gamma} r^3 / h$) est beaucoup plus grande que la force s'appliquant sur chaque particule à cause du cisaillement (de l'ordre de $\mu_0 \dot{\gamma} r^2$) lorsque $h \ll r$. Si on applique aux particules un effort supplémentaire (la pesanteur ou une pression externe par exemple) tendant à les rapprocher, ce qui revient finalement à augmenter leur pression osmotique, elles peuvent effectivement entrer en contact direct. Dans le cas contraire, les deux particules restent séparées par une mince couche de fluide et leur mouvement relatif est lubrifié par le fluide. Dans ces conditions on appellera un tel phénomène contact lubrifié. Trois types de contacts peuvent donc être envisagés : frictionnel, collisionnel, et lubrifié.

2.6.2 Conséquences sur le comportement de la suspension

En tout état de cause, si les contacts sont prédominants vis-à-vis du comportement de la suspension, on peut s'attendre à ce que ce phénomène corresponde à la formation d'un réseau de particules en contact à travers l'ensemble de l'échantillon. Nous appellerons un

tel mélange une suspension granulaire (cf. § 3.1). Du fait même de leur définition, on s'attend à obtenir ce type de suspension lorsque la concentration solide dépasse une valeur critique, que nous nommerons ϕ_c (cf. Fig. 2.9). Pour simplifier, on supposera que cette concentration critique ne varie pas sensiblement en fonction des paramètres de l'écoulement.

Une des caractéristiques remarquables de ces suspensions granulaires est que les déformations du réseau particulaire les amènent en général à se dilater (cf. § 3.3.3) du fait de la gêne, mutuelle des particules (phénomène de dilatance [45]). Du fait de cette gêne le type d'interaction prédominant au sein de l'écoulement d'une suspension granulaire dépend non seulement des paramètres pris en compte jusqu'ici (gradient de vitesse, fraction solide, rayon des particules, etc.) mais aussi des conditions aux limites (qui, en particulier, autorisent ou non la dilatance) et des contraintes additionnelles exercées sur les particules (qui permettent ou non de les faire entrer en contact direct). Globalement, on peut prévoir qu'aux faibles vitesses, les contacts frictionnels prédominent car les contacts éventuels entre particules sont en général prolongés. Lorsqu'on augmente la vitesse de cisaillement, les effets de lubrification deviennent probablement prédominants puis c'est éventuellement le tour des collisions à des vitesses encore plus grandes. Cette classification sommaire ainsi que les différents comportements macroscopiques induits seront précisés au chapitre 3.

2.7 Effets inertiels

Des effets inertiels peuvent résulter de l'agitation interne du fluide pour des écoulements suffisamment rapides. Pour une suspension, on peut distinguer deux types d'effet inertiel. Les premiers effets inertiels résultent de l'agitation de l'ensemble de la suspension, il s'agit alors de la turbulence macroscopique, analogue à celle qui se produit pour un fluide newtonien lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement (R_e) est très supérieur à 1, avec :

$$R_e = \frac{\rho \dot{\gamma} L^2}{\mu} \quad (2.53)$$

est suffisamment grand, où L est une dimension caractéristique de l'écoulement. Ici, on ne prend donc pas du tout en compte la nature particulaire du fluide. Lorsque la turbulence prédomine, on ne peut plus réellement parler de loi de comportement de la suspension au sens habituel car cette turbulence correspond à une instabilité qui se développe plus ou moins largement selon les conditions initiales et certaines conditions aux limites (rugosité, rapport d'aspect de la géométrie d'écoulement, etc.) non prises en compte en général pour étudier un écoulement laminaire. Quoi qu'il en soit, la courbe $R_e = Cst.$ détermine la limite entre un domaine (Région B) où les dissipations hydrodynamiques dues au mouvement moyen prédominent, et un domaine (Région D)

où les dissipations hydrodynamiques résultant des mouvements erratiques inertiels des éléments de la suspension prédominent (cf. Fig. 2.9).

Cette définition du nombre de Reynolds suppose qu'on a affaire à un fluide newtonien de viscosité μ . Pour un fluide non newtonien et en particulier à seuil, diverses expressions (nombres de Reynolds généralisés) ont été proposées, qui de manière générale sont obtenues en remplaçant la viscosité du dénominateur de (2.53) par une viscosité apparente ($\tau/\dot{\gamma}$). Le problème principal reste que, si l'on connaît assez bien la zone de transition de R_e au-delà de laquelle l'écoulement d'un fluide newtonien devient turbulent dans des conditions d'écoulement données (géométrie, rugosité...), on connaît très mal la zone de transition correspondante pour un fluide à seuil. Les données expérimentales concordent au moins sur un point : la turbulence se développe avec des fluides à seuil pour des nombres de Reynolds généralisés plus élevés qu'avec des fluides newtoniens, toutes choses étant égales par ailleurs [46].

En fait, pour une suspension concentrée, les raisonnements précédents présupposent que la turbulence peut intervenir lorsqu'on augmente la vitesse de cisaillement à partir d'une situation où les interactions colloïdales prédominaient. Pour des suspensions concentrées on ne sait pas *a priori* s'il existe systématiquement une transition directe d'une zone de prédominance des effets colloïdaux vers une zone de prédominance de la turbulence. Il est plus probable en général, et nous le supposons dans la suite, que les effets hydrodynamiques sont d'abord prédominants lorsque la vitesse augmente, la turbulence se développant à des vitesses encore plus élevées. Il est important de noter que, dans ce cas, la turbulence se développe lorsqu'on augmente la vitesse au sein d'un fluide qui peut être considéré comme newtonien (puisque les effets hydrodynamiques prédominent). Physiquement il est donc absurde d'utiliser un nombre de Reynolds généralisé, il suffit d'introduire dans (2.53) la viscosité équivalente de particules non colloïdales pour obtenir le critère de transition entre les deux régimes.

On peut aussi distinguer des effets inertiels résultant d'une agitation locale soit au sein du fluide interstitiel soit entre les particules [1]. Cela signifie que nous nous intéressons maintenant à la nature particulière de la suspension. La turbulence au sein du fluide interstitiel peut intervenir lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement de ce fluide entre les particules est suffisamment élevé. L'agitation locale des particules devient importante lorsque les dissipations d'énergie par inertie des particules dans le fluide sont grandes par rapport aux dissipations hydrodynamiques. Ces deux types de turbulence locale doivent intervenir lorsque le nombre de Reynolds (R_{e_p}) calculé en utilisant la vitesse relative d'une particule et du fluide environnant et la distance caractéristique entre les particules, est suffisamment grand, avec :

$$R_{e_p} = \frac{\rho b^2 \dot{\gamma}}{\mu_0} \quad (2.54)$$

Puisque chacun de ces phénomènes est susceptible d'intervenir pour des valeurs voisines du nombre de Reynolds, il sera en pratique très difficile de les différencier. La

turbulence globale, la turbulence du fluide interstitiel et la turbulence des particules semblent donc globalement faire partie de la famille des effets inertiels qui peuvent survenir au sein d'une suspension. On peut raisonnablement penser que, lorsque Re_p est suffisamment grand par rapport à 1, plusieurs des phénomènes ci-dessus deviennent importants en même temps. Il est cependant difficile de savoir si les effets résultants en termes de loi de comportement seront ou non négligeables. Ainsi, les écoulements d'air au sein d'un écoulement granulaire sec sont souvent turbulents alors que les contraintes inertielles macroscopiques résultantes, c'est-à-dire au niveau de la suspension dans son ensemble, sont négligeables. Pour analyser ce problème en détail, il faudrait prolonger l'approche du paragraphe 3.4.2 dans le cadre d'écoulements turbulents.

Notons que Re_p est formellement identique au nombre de Stokes (cf. § 3.4.2), qui caractérise le couplage entre la phase solide et la phase fluide. Dans le cas de la turbulence des particules mentionnée ci-dessus, il s'agit d'une agitation liée à des fluctuations de vitesse des particules alors que dans le cas de l'écoulement biphasique le mouvement moyen des particules par rapport au fluide est important.

2.8 Classification rhéophysique des suspensions

Au cours de ce chapitre, nous avons progressivement fait apparaître un schéma de description commode pour étudier la rhéophysique des suspensions. Celui-ci consiste à voir une suspension quelconque comme un ensemble de particules dispersées (sans ordre spécifique) dans un fluide interstitiel et à suivre les évolutions de la configuration des particules au cours du temps. Si la concentration solide reste uniforme et si les vitesses moyennes du fluide et du solide sont identiques, le mouvement des particules traduit bien l'écoulement de la suspension. Les particules exercent, les unes vis-à-vis des autres et éventuellement à distance, des forces de type hydrodynamique, colloïdal ou par contact, qui régissent leurs mouvements relatifs locaux. En l'absence de telles forces, les particules seraient dispersées de manière tout à fait aléatoire au sein du fluide. Du fait de ces forces elles se distribuent localement et collectivement selon une configuration instantanée particulière. Le comportement macroscopique de la suspension dépend des variations de l'intensité des forces entre particules qui varie avec la configuration moyenne au cours de l'écoulement.

Chaque type d'interaction a un effet bien spécifique sur la configuration des particules. L'écoulement en cisaillement simple de la suspension impose des mouvements relatifs des particules avec un temps caractéristique T_b . À ce mouvement de convection s'ajoute un mouvement de diffusion résultant du mouvement brownien qui tend à augmenter les dissipations visqueuses avec un temps caractéristique T_b . Les forces colloïdales tendent à amener les particules dans une configuration d'équilibre local avec un temps caractéristique T_c . Ces forces colloïdales couplées au mouvement brownien tendent de plus à amener les particules dans une configuration d'équilibre collectif avec un temps caractéristique beaucoup plus long T_c^* . Comme ce dernier

phénomène n'est important que dans des cas très particuliers, nous le négligerons dans ce qui suit. Les interactions par contact peuvent aussi être quantifiées en termes de temps caractéristiques comme on le verra au § 3.4. Finalement, lorsque les effets collectifs sont négligeables, le comportement de la suspension peut être exprimé en fonction de l'intensité de l'écoulement (le gradient de vitesse en cisaillement simple) et de l'état de la configuration locale (λ). En régime permanent, lorsque deux effets seulement prédominent, cet état peut en général être exprimé comme une fonction du rapport des temps caractéristiques d'évolution de la configuration associés à chaque effet. Hormis lorsque les contacts prédominent, l'état de la suspension est une donnée purement locale : il s'agit grossièrement de l'écart moyen dans un volume élémentaire entre chaque particule et sa position d'équilibre. Dans ces conditions, il est tout à fait possible d'écarter un peu plus une particule de cette position sans modifier significativement l'état de la suspension à un autre endroit. Cela signifie notamment que la force à appliquer pour faire s'écouler un tel matériau ne varie pas significativement lorsqu'on redistribue les particules dans l'espace (même si des effets de thixotropie peuvent être observés si le réarrangement est effectué selon une règle systématique à travers tout l'échantillon). On peut en quelque sorte considérer que les interactions au sein de ces suspensions (telles que $\phi < \phi_c$) sont « molles ». On peut identifier pour ces matériaux une loi de comportement locale, indépendante de l'état du matériau dans le reste de l'échantillon. Les écoulements de suspensions molles peuvent donc être traités dans le cadre usuel de la mécanique des fluides en utilisant une loi de comportement univoque (contrainte-vitesse de déformation).

L'origine des termes prédominants au sein de la loi de comportement selon le type d'interaction entre particules qui prédomine permet de tracer un diagramme de phase (cf. Fig. 2.17) des suspensions molles en fonction de leur concentration et de l'intensité de l'écoulement $1/T_h$. Aux faibles concentrations et vitesses d'écoulement, le comportement de la suspension est régi par les mouvements browniens des particules. Le tenseur des contraintes, de type newtonien, résulte donc des fluctuations de vitesse comme dans un gaz de particules (enrobées de fluide). Aux fortes concentrations, le comportement est régi par les interactions hydrodynamiques entre particules et est analogue celui d'un liquide de particules. Aux fortes concentrations et aux faibles vitesses d'écoulement le comportement de la suspension est régi par des interactions fortes (colloïdales) qui tendent à maintenir les particules dans des positions d'équilibre provisoires. En écoulement, la suspension se comporte donc comme un liquide de particules à l'état vitreux.

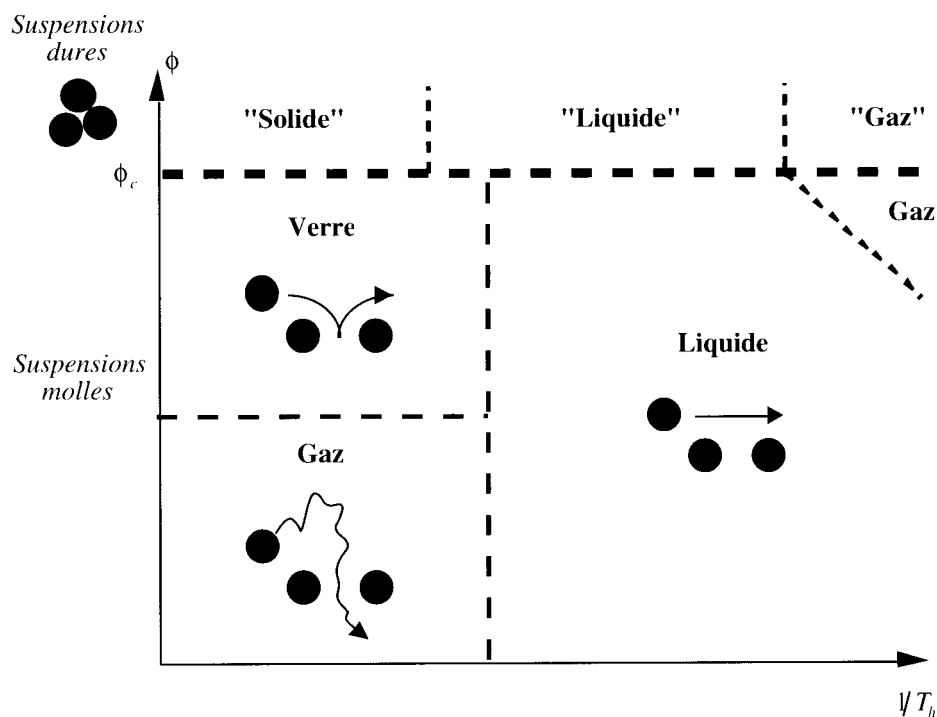


Fig. 2.17 : Diagramme de phase des suspensions considérées comme des mélanges de particules enrobées de fluide. La phase de la suspension est identifiée à celle d'un corps pur pour lequel le mode de transfert de quantité de mouvement est analogue. Les limites entre chaque domaine de phase pourraient être tracées précisément en fonction des caractéristiques du matériau considéré en suivant une démarche analogue à celle qui a conduit à la figure 2.9. Pour simplifier ces limites ont simplement été représentées par des droites verticales ou horizontales. Dans chaque régime un schéma représente de manière idéalisée le mode principal de mouvement entre les particules au cours d'un cisaillement simple : dans le régime brownien les particules diffusent largement malgré le mouvement moyen ; dans le régime colloïdal les particules ont le temps de retomber dans des puits de potentiel locaux ; dans le régime hydrodynamique les particules suivent des chemins essentiellement imposés par le cisaillement moyen (et dans une moindre mesure par la simple présence des particules). Dans le domaine des suspensions dures les particules se gênent constamment en cours d'écoulement. Le mode de transfert de quantité de mouvement varie cependant lorsque la vitesse d'écoulement augmente et on peut suggérer des appellations analogues à celles des états de base de la matière. Il faut garder à l'esprit que le comportement associé a malgré tout toujours un caractère non local. Nous avons aussi délimité un domaine particulier dénommé gaz qui correspond à des concentrations inférieures à la concentration critique, il s'agit des écoulements granulaires très agités qui seront identifiés au § 3.7.3.

Par opposition aux suspensions molles, les suspensions granulaires, pour lesquelles $\phi > \phi_c$, pourraient être appelées suspensions dures car les types d'interaction prédominants sont très différents (contacts directs ou lubrifiés) mais sont tous associés à une forte répulsion mutuelle des particules (contournement lors d'un frottement, tendance à la séparation lors d'un choc, force normale importante lors d'un contact lubrifié). Lorsque ces effets prédominent, il existe un réseau de particules en contact. Déplacer légèrement une particule conduit alors à une déformation complète du réseau, ce qui requiert un effort disproportionné par rapport à l'action recherchée et surtout induit une modification de l'état de la suspension à grande distance. Cela signifie aussi, entre autres, que la viscosité dépend beaucoup de l'arrangement initial des particules, des efforts spécifiques appliqués sur le réseau de grains éventuellement à travers tout l'échantillon, et de la manière dont la dilatance est permise aux bornes de l'échantillon. Dans ces conditions, la loi de comportement d'une suspension a fondamentalement un caractère non local. Le tenseur des contraintes local, dépend nécessairement des contraintes et déformations dans l'ensemble de l'échantillon. Pour cette raison, il est difficile, bien que nous l'ayons fait dans la figure 2.17, d'associer un état de base de la matière aux différents régimes d'écoulement. Le cadre de la mécanique des fluides n'est pas suffisant pour décrire les écoulements de suspensions (granulaires) dures et nous proposons au chapitre 3 une approche systématique des comportements possibles de ce type de suspension en s'appuyant sur des outils et des connaissances issues de la mécanique des sols et de la physique des milieux granulaires.

Annexe 2.1 Décomposition du tenseur des contraintes

On considère ici une suspension de particules sphériques solides rigides identiques dans un fluide newtonien. On suppose que le fluide adhère parfaitement à la surface des particules. Comme les particules sont supposées rigides, il est possible dans un premier temps d'ignorer la distribution de contraintes en leur sein et de considérer que le champ des vitesses d'une particule (n) est commandée par la vitesse du centre de masse $\mathbf{u}^{(n)}$ et la vitesse angulaire $\Omega^{(n)}$ de la particule. La vitesse d'un point M de la sphère centrée en $\mathbf{x}^{(n)}$ s'écrit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{u}^{(n)}(t) + \Omega^{(n)}(t) \times (\mathbf{x}(\mathbf{M}) - \mathbf{x}^{(n)}) \quad (2.55)$$

Comme les déformations des particules sont nulles le tenseur taux de déformation moyen vaut :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{D}^* dv = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_0} \mathbf{D}^* dv \quad (2.56)$$

où Ω désigne un volume de contrôle et Ω_0 désigne la partie de ce volume occupée par le fluide. Le volume occupé par les particules sera noté Ω_p . En scindant le volume de contrôle Ω en une partie fluide et une partie solide, le tenseur des contraintes macroscopiques tenant compte des fluctuations de vitesse (1.23) se décompose en une contribution fluide et une contribution particulaire :

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_p \quad (2.57)$$

En tenant compte du caractère newtonien du fluide, il s'ensuit facilement que le tenseur des contraintes fluide s'écrit :

$$\Sigma_0 = 2\mu\mathbf{D} - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_0} p dv - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' dv \quad (2.58)$$

La contribution particulaire nécessite un peu plus de travail pour aboutir à une forme exploitable. Par définition, on peut l'écrire :

$$\Sigma_p = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_p^{(n)}} (\Sigma^* - \rho_p \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') dv \quad (2.59)$$

où $\Omega_p^{(n)}$ est le volume occupé par la n ème sphère de Ω . En appliquant le théorème de la divergence au premier terme de l'expression de droite, nous trouvons :

$$\int_{\Omega_p^{(n)}} \Sigma^* dv = \int_{A_p^{(n)}} (\Sigma^* \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{x} d\sigma - \int_{\Omega_p^{(n)}} \mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \Sigma^*) dv \quad (2.60)$$

où $\mathbf{x}$ est le point courant à l'intérieur ou à la surface de la sphère considérée et $A_p^{(n)}$ la surface de la $n^{\text{ème}}$ sphère. On remarquera qu'il apparaît dans (2.59) un terme de divergence du champ de contrainte au sein des particules, qui est indéterminé compte tenu de l'hypothèse de rigidité. Pour contourner cette difficulté, nous devons relier ce champ aux forces extérieures exercées sur la particule. Au sein d'une particule, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\nabla \cdot \Sigma^* = \rho_p \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{g} \right) \quad (2.61)$$

Le terme d'accélération se déduit de l'expression du champ cinématique :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t} + \Omega^{(n)2} \mathbf{r}' + \dot{\Omega}^{(n)} \times \mathbf{r} \quad (2.62)$$

où nous avons introduit $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}$ et $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \left(\Omega^{(n)} \cdot \mathbf{r} / \Omega^{(n)2} \right) \Omega^{(n)}$. On en déduit :

$$\nabla \cdot \Sigma^* = \rho_p \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t} + \Omega^{(n)2} \mathbf{r} + \dot{\Omega}^{(n)} \times \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \Omega^{(n)}) \Omega^{(n)} - \mathbf{g} \right) \quad (2.63)$$

Il reste maintenant à relier le tenseur cinématique des particules au tenseur des contraintes. À cet effet, considérons l'équation du mouvement de la $n^{\text{ème}}$ particule :

$$m_p \frac{d\mathbf{u}^{(n)}}{dt} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ext}^{(n)} \quad (2.64)$$

où m_p désigne la masse de cette particule et $\mathbf{F}_{ext}^{(n)}$, la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la particule, définie comme :

$$\mathbf{F}_{ext}^{(n)} = \int_{A_p^{(n)}} \Sigma^* \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2.65)$$

De même, pour connaître la vitesse angulaire, on utilise l'équation de conservation du moment cinétique :

$$J_p \frac{d\Omega^{(n)}}{dt} = \mathbf{M}_{ext}^{(n)} = \int_{A_p^{(n)}} \mathbf{r} \times (\Sigma^* \cdot \mathbf{n}) d\sigma \quad (2.66)$$

où J_p désigne le moment d'inertie et $\mathbf{M}_{ext}^{(n)}$ le couple résultant sur la $n^{\text{ème}}$ particule. On en déduit que la dérivée du champ de contrainte équivaut à :

$$\nabla \cdot \Sigma^* = \rho_p \left(\frac{\mathbf{F}_{ext}^{(n)}}{m_p} + \Omega^{(n)2} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{M}_{ext}^{(n)}}{J_p} \times \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \Omega^{(n)} \Omega^{(n)} \right) \quad (2.67)$$

À partir de l'équation de conservation du moment cinétique, on déduit le second terme du membre de droite de l'équation précédente :

$$\int_{\Omega_p^{(n)}} \mathbf{x} \cdot \nabla \cdot \Sigma^s dV = \frac{1}{2} J_p \left(\Omega^{(n)2} \mathbf{I} - \Omega^{(n)} \otimes \Omega^{(n)} \right) + \frac{1}{2} \mathfrak{K}(\mathbf{M}_{ext}^{(n)}) \quad (2.68)$$

où nous avons introduit l'opérateur antisymétrique suivant (produit vectoriel) :

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\mathfrak{K}} \mathfrak{K}(\mathbf{M}_{ext}) \mathbf{x} = \mathbf{M}_{ext} \times \mathbf{x}$$

Il est maintenant possible d'écrire la forme générique de la contribution particulière au tenseur des contraintes macroscopiques. Nous pouvons la décomposer en trois termes :

$$\Sigma_p = \Sigma^s + \Sigma^a + \Sigma^f \quad (2.69)$$

où le premier terme représente l'action du fluide et des particules voisines sur la surface d'une particule test :

$$\Sigma^s = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^N \left(\int_{A_p^{(n)}} \Sigma \cdot \mathbf{r} \otimes \mathbf{n} d\sigma - \mathfrak{K} \left(\frac{1}{2} \int_{A_p^{(n)}} \mathbf{r} \times (\Sigma \cdot \mathbf{n}) d\sigma \right) \right) \quad (2.70)$$

le second terme est une contribution liée à la rotation propre des particules :

$$\Sigma^a = \frac{1}{2} \frac{1}{\Omega} J_p \sum_{n=1}^N \left(\Omega^{(n)} \otimes \Omega^{(n)} - \Omega^{(n)2} \mathbf{I} \right) \quad (2.71)$$

tandis que le troisième terme provient des fluctuations de vitesse :

$$\Sigma^f = -\frac{1}{\Omega} m_p \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)} \otimes \mathbf{u}^{(n)} \quad (2.72)$$

Références

- [1] Batchelor, G.K. 1970. The stress system in a suspension of force free particles. *J. Fluid Mech.*, 41, 545-570.
- [2] Blanc, R. 1983. Hydrodynamique et rhéologie des colloïdes. in *Colloïdes et Interfaces*, Les Éditions de Physique, Les Ulis (France).
- [3] Einstein, A. 1956. in *Investigation of the Brownian movement*. New-York, Dover publication. [English translation of *Ann. Physik*, 19, p.286 (1906), et 34, p.591, (1911)].
- [4] Batchelor, G.K. and Green, J.T. 1972. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order ϕ^2 . *J. Fluid Mech.*, 56, 375.
- [5] Kamal, M.R., and Mutel, A. 1985. Rheological properties of suspensions in Newtonian and non-Newtonian fluids. *J. Polymer Eng.*, 5, 293-382.
- [6] Utracki, L.A. 1988. The rheology of two-phase flows. In *Rheometrical Measurement*, A.A. Collyer and D.W. Clegg (Ed.), Amsterdam, Elsevier Applied Science, Chapter 15, 479-594.
- [7] Metzner, A.B. 1985. Rheology of suspensions in polymeric liquid. *J. Rheol.*, 29, 739-775.
- [8] Chong, J.S., Christiansen, E.B., and Baer, A.D. 1971. Rheology of concentrated suspensions. *J. Appl. Polymer Sci.*, 15, 2007-2021.
- [9] Quemada, D. 1985. Phenomenological rheology of concentrated dispersions. *J. Mécan. Théor. Appl.*, Numéro spécial, 267-288.
- [10] Mooney, M. 1951. *J. Colloid. Sci.*, 6, 162-170.
- [11] Krieger, I.M. and Dougherty, T.J. 1959. A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Trans. Soc. Rheol.*, III, 137-152.
- [12] Frankel, N.A. and Acrivos, A. 1967. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. *Chem. Eng. Sci.*, 22, 847-853.
- [13] Goddard, J.D. 1977. An elastohydrodynamic theory for the rheology of concentrated suspensions of deformable particles. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 2, 169-189.
- [14] Marrucci, G. and Denn, M.M. 1985. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. *Rheol. Acta*, 24, 317-320.
- [15] Wang, M.-L. and Cheau, T.-C. 1988. Shear viscosity of slightly-elastic concentrated suspensions at low and high shear rates. *Rheol. Acta*, 27, 596-607.
- [16] Petit, L. 1991. Écoulement et mise en structure de suspensions macroscopiques. *Annales Phys.*, 16, 155-191.
- [17] Hoffman, R.L. 1998. Explanations for the cause of shear-thickening in concentrated colloidal suspensions. *J. Rheol.*, 42, 111-123.
- [18] Ackerson, B.J. 1990. Shear induced order and shear processing of model hard sphere suspensions. *J. Rheol.*, 34, 533-590.
- [19] Barnes, H.A. 1989. Shear-thickening ("dilatancy") in suspensions of non-aggregating solid particles dispersed in newtonian liquids. *J. Rheol.*, 33, 329-366.
- [20] Petit, L. and Noetinger, B. 1988. Shear-induced structures in macroscopic dispersions. *Rheol. Acta*, 27, 437-441.

- [21] Mewis, J. and Macosko, C.W. 1993. Suspension rheology, in *Rheology: principles, measurements and applications*, C.W. Macosko and R.G. Larson (Ed.), VCH, New-York.
- [22] Batchelor, G.K. 1971. The stress generated in a non-dilute suspension of elongated particles by pure straining motion. *J. Fluid Mech.*, 46, 813-829.
- [23] Kitano, T., Kataoka and Shirota, T. 1981. *Rheol. Acta*, 20, 207-209.
- [24] Munson, B.R., Young, D.F. and Okiishi, T.H. 1994. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. New York, John Wiley & Sons.
- [25] Kerr, R.C. and Lister, J.R. 1991. The effects of shape on crystal settling and on the rheology of magmas. *J. Geology*, 99, 457-467.
- [26] Hinch, E.J. 1975. Application of the Langevin equation to fluid suspensions. *J. Fluid Mech.*, 72, 499-511.
- [27] Pusey, P.N. 1989. Colloidal suspensions. in *Liquids, Freezing and Glass Transition*, J.P. Hansen, D. Levesque and J. Zinn-Justin (Ed.), Amsterdam, Elsevier Science Publ., 763-942.
- [28] Russel, W.B., Saville, D.A. and Schowalter, W.R. 1989. *Colloidal dispersions*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [29] Krieger, I.M. 1972. Rheology of monodisperse latices. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 3, 111-136.
- [30] Barnes, H.A., Jomha, A.I., Lips, A., Merrington, A. and Woodcock, L.V. 1991. Recent developments in dense suspension rheology. *Powder Technol.*, 65, 343-370.
- [31] Mewis, J. and Spaul, A.J.B. 1976. Rheology of concentrated dispersions. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 6, 173-200.
- [32] Mewis, J. 1951. Thixotropy - A general Review. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 6, 1-20.
- [33] Booth, F. 1950. The electroviscous effect for suspensions of solid spherical particles. *Proc. R. Soc. London*, A203, 533-551.
- [34] Hébraud, P., Lequeux, F., Munch, J.P. and Pine, D.J. 1997. Yielding and rearrangements in disordered emulsions. *Phys. Rev. Lett.*, 78, 4657-4660.
- [35] Gopal, A.D. and Durian, D.J. 1995. Nonlinear bubble dynamics in a slowly driven foam. *Phys. Rev. Lett.*, 75, 2610-2613.
- [36] Dorget, M. 1995. *Propriétés rhéologiques des composés silice/silicone*, Thèse de Doctorat, Grenoble, Univ. Joseph-Fourier.
- [37] Coussot, P. 1995. Structural similarity and transition from Newtonian to non-Newtonian behavior for water-clay suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 74, 3971-3974.
- [38] Coussot, P., Leonov, A.I. and Piau, J.M. 1993. Rheology of concentrated dispersed systems in low molecular weight matrix. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 46, 179-217.
- [39] Hébraud, P. and Lequeux, F. 1998. Mode-coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 2934-2937.
- [40] Foulc, J.N., Atten, P. and Boissy, C. 1996. Correlation between electrical and rheological properties of electrical and rheological properties of electrorheological fluids. *J. Intelligent Mat. Syst. Structures*, 7, 579-582.
- [41] Gray, J.J. and Bonnecaze, R.T. 1998. Rheology and dynamics of sheared arrays of colloidal particles. *J. Rheol.*, 42, 1121-1151.

- [42] Moore, F. 1959. The rheology of ceramic slips and bodies. *Trans. Brit. Ceram. Soc.*, 58, 470-492.
- [43] Quemada, D. 1997. Rhéologie et structure des suspensions concentrées. In *Des grands écoulements naturels à la dynamique du tas de sable - Introduction aux suspensions en géologie et en physique*, B. Ildefonse, C. Allain et P. Coussot (Éd.), Antony (France), Cemagref Editions, 123-144, Ch.7.
- [44] Smart, J.R. and Leighton, D.T. 1989. Measurement of the hydrodynamic surface roughness of noncolloidal spheres. *Phys. Fluids A*, 1, 52-60.
- [45] Reynolds, O. 1885. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *Phil. Mag. J. Sci.*, Series 5, 20, 469-481.
- [46] Midoux, N. 1993. *Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique*. Paris, Tec & Doc, Lavoisier.

Les suspensions dures

3.1 Introduction

L'étude systématique des suspensions (chap. 2) a fait apparaître une catégorie particulière, les suspensions granulaires (ou dures), au sein desquelles les contacts (directs ou lubrifiés) entre particules jouent un rôle majeur vis-à-vis des caractéristiques de l'écoulement. Typiquement, de tels matériaux sont constitués d'une forte concentration de particules solides non colloïdales immergées dans un fluide. L'agitation thermique et les interactions colloïdales sont négligeables dans la plupart des conditions expérimentales et les particules sont susceptibles d'entrer en contact direct si une force relative d'intensité suffisante s'applique sur elles. En outre, lorsque la concentration solide augmente, les particules se gênent et leurs mouvements relatifs sont de plus en plus difficiles : au-delà d'un certain seuil de concentration, il n'est plus possible de déplacer une particule sans également déplacer les autres. Ce phénomène donne lieu à des variations de volume en cisaillement simple (appelées dilatance ou contractance selon le sens), qui constituent une propriété tout à fait remarquable et totalement inconnue des fluides et solides usuels. Par ailleurs, les contacts directs susceptibles de se produire durant l'écoulement d'une suspension granulaire peuvent induire des comportements macroscopiques très différents de ceux observés avec des suspensions concentrées ordinaires (*cf.* § 3.5). Enfin, au sein d'une suspension ordinaire, l'agitation thermique et les interactions colloïdales contribuent à faire revenir, après un temps de repos infini, le matériau dans un état d'équilibre homogène et isotrope qui peut servir de référence. Dans le cas d'une suspension granulaire, les particules restent en général au repos lorsque le matériau est macroscopiquement au repos. L'état du matériau est celui atteint juste après la fin de l'écoulement. Il n'y a donc pas un unique état d'équilibre mais une infinité. Ainsi, les caractéristiques mécaniques d'une suspension granulaire dépendent fortement de l'histoire de l'écoulement. Par exemple, si l'on sollicite une suspension granulaire de manière cyclique, l'alternance charge/ décharge conduit en fin de cycle à un

état d'équilibre fortement anisotrope, c'est-à-dire caractérisé par des directions privilégiées des contacts entre grains ou bien une répartition hétérogène des particules.

Dans la première partie (§ 3.2) de ce chapitre, nous présentons de façon un peu plus précise les caractéristiques des interactions (contacts) rencontrées usuellement au sein des écoulements de suspensions granulaires. Nous nous intéressons ensuite en détail au rôle de la concentration solide sur le comportement des suspensions. L'idée fondamentale sur laquelle nous appuierons notre exposé et que nous avons déjà introduite au cours du chapitre 2, est l'existence d'une concentration critique à partir de laquelle on observe à la fois un réseau de particules en contact prenant place à travers tout le mélange et des variations de volume en cisaillement simple (dilatance ou contractance) accompagnant la déformation du milieu. Nous examinons donc (§ 3.3) les principales implications du dépassement de cette valeur critique sur l'arrangement des particules et le comportement macroscopique. En outre nous présentons quelques conséquences éventuelles, en termes de comportement, de la nature biphasique des suspensions granulaires (influence de la pression du fluide interstitiel, ségrégation).

Les différents types d'interaction distingués ci-dessus peuvent être prédominants ou concomitants et ainsi, nous serons amenés à distinguer plusieurs régimes d'écoulement caractérisés par la prédominance d'un ou de plusieurs types d'interaction. À l'image de ce qui a été fait au chapitre 2 pour les suspensions ordinaires, nous délimitons (§ 3.4) les différents régimes à l'aide de nombres adimensionnels, définis comme des rapports de temps caractéristiques ou d'ordres de grandeur des différents types d'interaction. Nous passons ensuite en revue le comportement mécanique macroscopique des suspensions granulaires dans les différents régimes d'écoulement (frictionnel (§ 3.5), hydrodynamique (§ 3.6), collisionnel (§ 3.7)). Un dernier paragraphe (§ 3.8) est consacré aux écoulements à surface libre au sein desquels peuvent notamment se développer des régimes intermédiaires (frictionnel-collisionnel ou frictionnel-visqueux).

3.2 Les interactions entre particules

3.2.1 Généralités

Lorsque la concentration solide est grande, des contacts indirects (lubrifiés) prennent place tant que les particules en mouvement relatif les unes par rapport aux autres restent séparées par de fines couches de fluide interstitiel. Dans ce cas, les dissipations d'énergie liées aux mouvements du fluide dans ces couches sont beaucoup plus grandes que celles résultant des mouvements du reste du fluide (*cf.* § 2.3.4). En outre lors du mouvement relatif de deux particules très proches, la force de répulsion hydrodynamique s'opposant au rapprochement des deux particules est prédominante (*cf.* § 2.6). En fait, compte tenu des incertitudes qui subsistent vis-à-vis des évolutions de la configuration des particules au sein d'une suspension concentrée, on ne sait pas si c'est la somme des dissipations résultant des forces répulsives qui est effectivement

prédominante. La distribution des particules dans l'espace peut en effet évoluer d'elle-même de façon à minimiser la dissipation d'énergie résultant de certains mouvements. Quoi qu'il en soit, l'écoulement impose des mouvements relatifs qui conduisent nécessairement à des dissipations visqueuses importantes et, si ce type de mouvement relatif n'est pas essentiel, un autre type de mouvement aux conséquences énergétiques analogues le remplace probablement. Il est donc commode de supposer en première approximation que ces répulsions constituent l'effet hydrodynamique majeur au sein d'un tel écoulement.

Lorsque deux particules se rapprochent, la force hydrodynamique tend théoriquement vers l'infini (équ. 2.14) si les particules sont parfaitement lisses et entrent à terme en contact direct, mais on a vu (cf. § 2.6.1) qu'il est raisonnable de limiter cette force à la valeur maximale (F_0) correspondant à la rugosité des particules ε : on admet en effet que les particules ne peuvent pas s'approcher à une distance moyenne inférieure à ε [1]. On peut donc aussi supposer en première approximation qu'un contact direct a lieu entre les deux particules lorsque la distance qui les sépare est en moyenne de l'ordre de ε .

Compte tenu de l'importance de cette force de répulsion, les contacts directs ne peuvent se produire que si une force suffisante tendant à les rapprocher leur est appliquée. On peut ainsi induire un frottement si des efforts prolongés sont exercés sur les particules, c'est le cas notamment au sein d'une suspension granulaire qui s'écoule lentement sous l'effet de la gravité, les particules s'appuyant au moins momentanément les unes sur les autres. On peut aussi induire des collisions si les particules sont suffisamment agitées au sein de la suspension, dans ce cas la force (normale) additionnelle permettant le rapprochement, résulte de la transmission de quantité de mouvement entre les particules à travers toute la suspension. Dans les deux cas, tout se passe comme si une pression supplémentaire (granulaire), équivalente à une pression osmotique, s'exerçait au sein de la suspension.

La principale différence entre les deux types de contact direct réside dans leur durée : le temps caractéristique d'un contact collisionnel est très petit par rapport au temps caractéristique de l'écoulement ($T_h = 1/\dot{\gamma}$) alors que le temps caractéristique d'un contact frictionnel est du même ordre que T_h . Quoique les mécanismes physiques élémentaires relatifs à ces deux contacts soient à peu près les mêmes, leurs effets à l'échelle des particules sont très différents : la brièveté du contact collisionnel permet de considérer qu'il s'agit principalement d'un échange de quantité de mouvement. Par conséquent, la loi de contact est recherchée sous la forme d'une relation entre les quantités de mouvement relatives avant et après le choc (cf. § 3.5). À l'opposé, la durée du contact frictionnel conduit à s'intéresser aux efforts transmis entre particules tant que le contact est maintenu. Dans ce cas, la loi de contact est formulée sous la forme d'une relation entre forces normale et tangentielle.

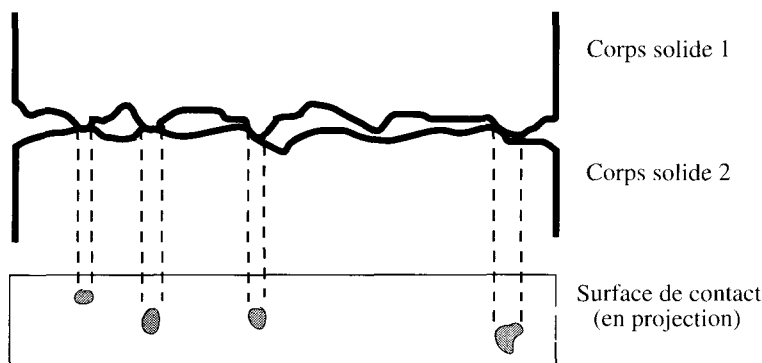


Fig. 3.1 : Aires apparente et réelle de deux corps en contact. La surface de chaque corps exposée au contact à notre échelle d'observation est l'aire apparente de contact. Au niveau microscopique seules un certain nombre d'aspérités sont en contact, l'aire réelle est la somme des surfaces correspondantes. On a représenté cette aire réelle en projection sur un plan. Lorsque les déformations locales induites par le contact sont essentiellement plastiques, l'aire réelle de contact est proportionnelle à la force normale appliquée (ce qui explique la loi de Coulomb). D'après [51].

3.2.2 Les contacts frictionnels

Un des aspects importants du contact frictionnel est le fait que les surfaces des deux particules se touchent pendant une durée assez longue. Comme l'illustre la figure 3.1, même sur des surfaces parfaitement usinées, un contact réel ne se produit qu'en un nombre limité d'aspérités et la distance entre les atomes ou molécules des éléments de surface correspondants est si faible que ceux-ci interagissent par le biais de forces attractives (interactions de van der Waals, parfois liaisons métalliques, ioniques, etc.) [2]. Dans le domaine des températures usuelles, les deux mécanismes (à l'échelle microscopique) du frottement sont (*cf.* Fig. 3.2) : (i) l'adhérence due aux forces attractives, (ii) le cisaillement des jonctions [3]. Notons toutefois que dans de nombreux cas d'intérêt pratique, ces deux mécanismes sont perturbés par d'autres phénomènes (influence d'éventuelles forces de mouillage liées à la présence de vapeur, altération physico-chimique des surfaces par oxydation ou adsorption de polymères, usure des surfaces, influence du fluide ambiant, etc.) et que le comportement microscopique est alors bien plus complexe [4, 5].

À l'échelle des particules, une loi de contact qui permet de décrire correctement un grand nombre de situations est la loi de Coulomb, qui énonce que, lorsqu'il y a glissement entre deux corps, alors les composantes normale et tangentielle de la force de

réaction (respectivement N et T) sont proportionnelles (roulement avec glissement, frottement glissant) :

$$T = fN \quad (3.1)$$

avec f le coefficient de frottement coulombien, généralement compris entre 0,1 et 0,5 pour des métaux se frottant l'un contre l'autre, entre 0,05 et 1 pour des polymères et entre 0,05 et 0,5 pour des céramiques. Lorsqu'il n'y a pas glissement (c'est-à-dire que la vitesse relative des surfaces solides au point de contact est nulle), alors la composante tangentielle doit être inférieure à la composante normale (roulement sans glissement, frottement adhérent) :

$$T \leq fN \quad (3.2)$$

Dans ce cas, la force de frottement (T) peut être déterminée à partir de l'équation de conservation du moment cinétique (loi fondamentale de la dynamique des corps rigides).

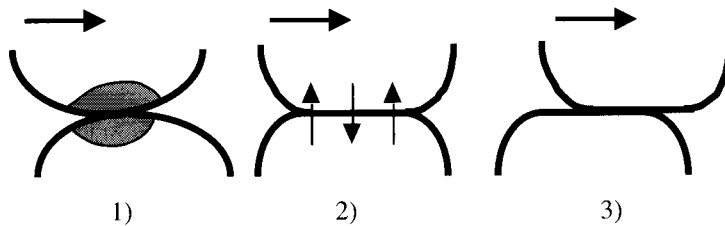


Fig. 3.2 : Représentation schématisée d'un glissement élémentaire sur une aspérité. Dans la phase 1) le contact se forme, on observe essentiellement des déformations élastiques ou plastiques des deux corps qui ne s'interpénètrent pas. Au cours de la phase 2) des liaisons adhésives se développent au niveau des zones en contact. La phase 3) correspond à la séparation des zones en contact : les jonctions sont cisailées, des régions jusqu'alors comprimées peuvent se détendre (déformations élastiques). D'après [51].

Les formules ci-dessus sont des représentations très simplifiées des processus réels. On peut ainsi se demander si le coefficient de frottement f est constant. De nombreuses expériences ont été réalisées mais leurs conclusions sont contradictoires. Un phénomène important a notamment été mis en évidence, il s'agit de l'intermittence du frottement : le mouvement relatif se produit par saccades avec des alternances de phases de frottement adhérent et de frottement glissant (stick-slip). Il est donc très difficile de réaliser des expériences à vitesse constante car il faut sans cesse réajuster la vitesse, ce qui induit des effets inertiels perturbateurs des mesures [6]. Les recherches actuelles tendent à montrer que les mécanismes intervenant dans le frottement sont complexes et dépendent de la vitesse de glissement [7]. Dans le cadre de notre exposé, et compte tenu des gammes de

vitesses et de forces rencontrées dans la plupart des écoulements naturels, il est suffisant de supposer que la loi de Coulomb exprimée par les équations (3.1) et (3.2) reflète bien les caractéristiques du frottement sec entre deux surfaces solides.

3.2.3 Les contacts collisionnels

Le contact collisionnel est un contact très bref, au cours duquel un certain nombre de mécanismes plus ou moins complexes (déformation élastique, parfois plastique, propagation d'ondes, frottement, etc.) interviennent en fonction de la géométrie de l'impact, de la nature des particules, et de la vitesse relative. Nous commencerons par étudier le cas le plus simple d'une collision parfaitement élastique, qui est à peu près bien maîtrisée et dont les mécanismes de base sont encore en action dans des situations plus complexes.

3.2.3.1 Choc purement élastique

Considérons la collision de deux corps sphériques identiques (de rayon R) sans vitesse de rotation propre et animés de vitesses colinéaires. En s'appuyant sur la théorie du contact élastique de Hertz, on montre que le contact collisionnel implique une déformation élastique de la surface des particules à proximité immédiate du point d'impact (cf. Fig. 3.2). On peut alors distinguer une phase de compression suivie d'une phase de recouvrement (décompression). On peut déterminer la force instantanée de réaction (F) entre les deux particules (de masse m) en fonction de leur module élastique (E) et du déplacement relatif (δ) de leurs centres par rapport à leur position ($\delta = 0$ à $t = 0$) lors du premier contact [8] :

$$F = \frac{4}{3} \sqrt{RE} \delta^{3/2} \quad (3.3)$$

En négligeant la pesanteur et en intégrant directement l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le repère attaché à l'une des deux particules ($F = m d^2 \delta / dt^2$), on trouve :

$$\left[\left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 \right]_0^{t_c} = \frac{16}{15} M \delta(t)^{5/2} \quad (3.4)$$

où $M = \sqrt{RE}/m$. Les particules se compriment donc l'une sur l'autre puis se séparent à nouveau au bout d'un temps t_c qui est la durée de la collision. On déduit d'abord de (3.4) que la vitesse juste à la fin de l'impact ($V_f = (d\delta/dt)_{t=t_c}$) est l'opposée de la vitesse initiale $V_i = (d\delta/dt)_{t=0}$:

$$V_f = -V_i \quad (3.5)$$

La compression maximum (δ_m) est obtenue à partir de (3.4) en écrivant qu'à ce moment-là la vitesse de déplacement s'annule. On obtient :

$$\delta_m \approx M^{-2/5} V_i^{4/5} \quad (3.6)$$

De plus on peut calculer la durée du contact :

$$t_c = 2 \int_0^{\delta_m} \frac{d\delta}{\sqrt{V_i^2 - 16M\delta^{5/2}/15}} \approx 2,9 M^{-2/5} V_i^{-1/5} \quad (3.7)$$

3.2.3.2 Effets inertiels

La théorie ci-dessus correspond à une situation idéale. Une collision est en fait un processus dynamique induisant une grande vitesse de déformation et donc des effets inertiels sous la forme d'ondes de contrainte (élastique) qui se propagent à travers le matériau. La théorie ci-dessus suppose que ces ondes ont le temps de parcourir et de se réfléchir plusieurs fois contre les surfaces de particules, ce qui implique que tout se passe comme si elles étaient stationnaires et les effets inertiels sont négligeables. Dans le cas contraire, il faut ajouter un terme inertiel dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ce qui modifie les calculs précédents ci-dessus. Sachant que la vitesse de propagation des ondes élastiques vaut à peu près $V_e = \sqrt{E/\rho_p}$ où ρ_p est la masse volumique de la particule, le temps caractéristique de propagation d'une onde dans une particule est $t_e = 4R/V_e$. Les effets inertiels sont donc négligeables à partir du moment où le rapport t_c/t_e est grand devant 1 (critère de Love) [8]. Par exemple, pour un matériau tel que de l'acier (E est de l'ordre de $2 \cdot 10^{11}$ Pa), la vitesse de propagation des ondes est de l'ordre de 5000 m/s. Pour que le temps de la collision soit bien supérieur à la durée d'un aller et retour des ondes, la vitesse d'impact doit être inférieure à 20 cm/s. Notons que ces calculs ne sont valables que pour des sphères isolées. Dès lors que l'une des billes entrant en collision est déjà en contact avec d'autres billes ou un autre matériau, la propagation des ondes élastiques est considérablement modifiée (il n'y a plus nécessairement installation d'ondes stationnaires dans les billes). Cela explique que dans certains cas, le rebond n'existe pas ou bien le recouvrement des déformations élastiques n'est pas complet [9].

3.2.3.3 Seuil de plasticité

Pour que le calcul effectué dans le cadre de la théorie de Hertz soit valable, il faut que les déformations soient bien comprises dans le domaine élastique. En comparant la pression maximale atteinte à la fin de la phase de compression et le seuil de plasticité Y , on montre que les déformations restent élastiques tant que la vitesse avant impact est inférieure à une valeur critique [8] :

$$V_i \leq \sqrt{26,3 \frac{Y^5}{E^4 \rho_p}} \quad (3.8)$$

Si l'on reprend l'exemple de l'acier (Y est de l'ordre de 10^9 Pa), on trouve que la vitesse doit être inférieure à 5 cm/s. Dès qu'on entre dans le domaine des déformations plastiques, il n'y a plus recouvrement de toute l'énergie élastique emmagasinée durant la phase de compression et de ce fait, les vitesses initiale et finale ne sont plus égales en module. On remplace alors l'équation (3.5) par une équation similaire, où l'on a introduit un coefficient dit de restitution (e) qui est lié aux dissipations plastiques :

$$V_f = -e V_i \quad (3.9)$$

où e peut être exprimé de la manière suivante [8] :

$$e = 1,5 \left(\frac{Y^5}{\rho_p V_i^2 E^4} \right)^{1/8} \quad (3.10)$$

Dans le cas de particules différentes, les vitesses relatives doivent être remplacées par les quantités de mouvement relatives dans l'équation (3.9). On notera la décroissance relativement faible du coefficient de restitution avec la vitesse d'impact, puisqu'en multipliant la vitesse par 100 (par rapport à la vitesse critique donnée par (3.8)), celui-ci varie de 1 à 0,32.

3.2.3.4 Rotation des particules

Comme on vient de le voir, la géométrie de contact la plus simple conduit à un résultat également très simple (éq. 3.5), mais qui cache déjà des mécanismes élémentaires complexes. Lorsqu'on étudie l'influence de la rotation propre des particules, l'analyse théorique à l'échelle microscopique est rendue difficile du fait de la concomitance de zones de contacts frottants adhérent et glissant au niveau de la surface de contact [10, 11]. L'état de contraintes est alors fonction de l'histoire de la déformation et donc des conditions initiales, ce qui rend impossible la formulation d'une loi de contact simple. Pour s'affranchir de ces difficultés, plusieurs auteurs ont proposé des lois de contact phénoménologiques ou empiriques (directement calées sur les expériences). Les lois phénoménologiques, même les plus robustes [12-14], souffrent de petites lacunes ; elles sont par exemple incapables de prédire les inversions de vitesse de rotation propre (un des effets dont se servent les joueurs de tennis lors de renvois de balle liftée) observées à faible vitesse tangentielle. Aussi, à l'heure actuelle, ce sont surtout des formulations empiriques qui sont utilisées. Dans le modèle le plus couramment utilisé, celui de Maw et al. [15], deux coefficients empiriques sont introduits : le coefficient de restitution normale (e) utilisé dans une formulation analogue à (3.9) liant les vitesses avant et après

collision, et le coefficient de restitution tangentielle (β_0) utilisé dans une équation liant les moments cinétiques ($\mathbf{c}_i$ et $\mathbf{c}_f$) avant et après collision :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{c}_f = -\beta_0 \mathbf{n} \times \mathbf{c}_i \quad (3.11)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire joignant les centres des particules.

On montre que la loi de contact peut s'écrire sous la forme d'une fonction linéaire par morceaux en fonction des vitesses normale, tangentielle, et de rotation propre avant collision. Notons que les équations (3.8) et (3.10), quoique rigoureusement similaires sur le plan mathématique, recouvrent des réalités physiques différentes. La première est obtenue à partir d'un bilan énergétique durant le contact collisionnel (notamment la vitesse après impact est une fonction non-linéaire de la vitesse avant impact puisque le coefficient de restitution dépend de la vitesse) alors que la seconde est obtenue par calage de données expérimentales. Les lois de contact pour d'autres géométries de collision (collision à trois corps par exemple) sont encore assez mal connues.

3.2.3.5 Effets élastohydrodynamiques

Les développements ci-dessus supposent que le contact des deux particules solides a lieu dans le vide. Lorsque le fluide interstitiel est visqueux, une force de répulsion hydrodynamique tend à empêcher le contact de se produire au point qu'un tel phénomène ne survient que si l'énergie propre des particules est suffisamment grande. Néanmoins, la déformation du fluide interstitiel lors du rapprochement des particules peut avoir une influence significative sur les caractéristiques de la collision. Pour décrire correctement ces phénomènes, il faut déterminer les champs de contraintes et de vitesses, à la fois au sein du fluide interstitiel et au sein des particules. Ceci conduit à des calculs relativement complexes que nous ne décrivons pas ici. Les résultats existants dans ce domaine montrent que les caractéristiques du choc dépendent de deux nombres adimensionnels : le nombre de Stokes ($St = mV_i / K\mu_0 r$), dont nous donnerons une définition formellement analogue dans le cadre de l'étude du couplage des phases, et le nombre de Davis (D_a). Ce nombre quantifie l'importance de la déformation des particules induite par la collision : celle-ci est significative lorsque l'ordre de grandeur de la distance (minimum) entre les surfaces des particules (ϵ) est très inférieur à la déformation induite par l'effort maximum (répulsion hydrodynamique) qui s'exerce entre ces particules lorsqu'elles sont séparées d'une distance de l'ordre de ϵ . En supposant que le contact est en fait un choc purement élastique on peut calculer la déformation maximum (δ_m) induite par le contact directement à l'aide de l'équation (3.3) et l'on obtient :

$$D_a = \left(\frac{\delta_m}{\epsilon} \right)^{3/2} = \frac{\mu_0 R^{3/2} b \dot{\gamma}}{E \epsilon^{5/2}} \quad (3.12)$$

En particulier, Lian *et al.* [16] ont montré qu'il y a rebond uniquement dans un certain domaine de valeurs de ces nombres adimensionnels :

$$S_r > -0,52 \ln 25 D_a \quad (3.13)$$

Les calculs de divers auteurs permettent en outre d'estimer la valeur du coefficient de restitution en fonction des nombres de Stokes et de Davis [16, 17].

3.2.3.6 Distinction entre collision et frottement

Dans une suspension granulaire en écoulement, lorsque la durée d'un contact frictionnel est du même ordre que la durée d'une collision, il devient difficile de distinguer ces deux types d'interaction. Ceci se produit lorsque le rapport (C_f) du temps approximatif de contact collisionnel (t_c) donné par (3.7) et du temps de contact frictionnel moyen, qui est de l'ordre du temps de passage d'une particule à côté d'une autre ($1/\dot{\gamma}$), devient plus grand que 1, avec :

$$C_f = \left(\frac{\rho R^2 \dot{\gamma}^2}{E} \right)^{2/5} \quad (3.14)$$

3.3 Propriétés physiques des suspensions granulaires

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons suggéré que les contacts au sens large au sein d'une suspension granulaire jouent un rôle fondamental au cours d'un écoulement du fait de la forte concentration solide. Nous proposons d'aller plus loin en donnant une définition plus précise d'une suspension granulaire : il s'agit du mélange d'un fluide et de grains non colloïdaux en concentration suffisamment grande pour qu'il existe un réseau de contacts intergranulaires traversant de part en part le mélange. C'est principalement l'existence de ce réseau de contacts, mettant en jeu des interactions souvent fortes entre particules, qui confère aux écoulements granulaires un certain nombre de caractéristiques distinctives très importantes [18]. Les suspensions granulaires possèdent en effet de nombreuses propriétés physiques remarquables, qui font actuellement l'objet d'abondants travaux. Nous nous intéressons ici principalement à trois d'entre elles qui jouent un rôle essentiel vis-à-vis du comportement d'ensemble de la suspension. Il s'agit d'abord de la dilatance et du caractère biphasique possible de ces suspensions. Nous examinons ensuite le phénomène de ségrégation au sein de ces milieux. De nombreux autres phénomènes physiques spécifiques à ces milieux, comme les effets de voûte, les avalanches de grains de surface, les frustrations des rotations, etc., ne seront pas abordés dans ce chapitre et le lecteur intéressé par ces problèmes est renvoyé à des ouvrages spécialisés [19].

3.3.1 Seuils de concentration

3.3.1.1 Origine du premier seuil de concentration

L'existence d'un réseau de contacts est principalement due à des contraintes géométriques d'encombrement de l'espace : lorsque dans un volume fini, on place un nombre croissant de particules, il arrive un moment où nécessairement un réseau de particules en contacts se forme et traverse de part et d'autre tout le volume. Notons que ce réseau ne correspond pas nécessairement à un assemblage statique. Au cours d'un écoulement, les particules peuvent se séparer et entrer en contact avec d'autres, formant ainsi à chaque instant un nouveau réseau. Quelles que soient les conditions dans lesquelles on observe la distribution des particules, il existe donc une concentration critique (ϕ_c) au-dessous de laquelle le réseau de contacts n'est pas complet (autrement dit il ne s'étend pas à travers tout le mélange) et au-dessus de laquelle il s'étend à travers tout l'échantillon. Cette concentration critique s'apparente à un seuil de percolation, mais il faut plutôt retenir ici l'image d'une percolation dynamique pour laquelle les branches de contact entre particules (reliant les centres de particules en contact) évoluent à tout instant et où le réseau peut se disloquer en partie ou en totalité sous l'effet du mouvement. En outre, le type de contact peut varier d'un point à un autre et d'un instant à un autre. Ce caractère dynamique rend extrêmement difficile la détermination de ce seuil, car celui-ci varie dans une certaine gamme en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Cette approche nous permet ainsi de préciser la notion de concentration d'entassement maximal utilisée sans plus de précisions au chapitre 2. D'après la définition ci-dessus, on a affaire à une suspension granulaire lorsque la concentration est comprise entre ϕ_c et ϕ_m , où ϕ_m est la concentration d'entassement aléatoire maximal (cf. § 2.1). Cette dernière correspond à la concentration obtenue lorsque le mélange est préparé de façon à accroître au maximum l'entassement (sous vibrations par exemple) sans toutefois organiser l'arrangement des particules à longue distance. La concentration d'entassement maximal utilisée au cours du chapitre 2 est associée à une valeur critique autour de laquelle la viscosité semble tendre vers l'infini. Cette définition n'a rien de précis et la valeur obtenue varie bien entendu selon l'histoire de l'écoulement dans l'intervalle $[\phi_c, \phi_m]$.

3.3.1.2 Valeurs du seuil de concentration

L'arrangement cubique est la structure cristalline compacte la plus lâche possible, c'est-à-dire associée à la plus faible concentration solide ($\pi/6$ pour des sphères). Les particules sont alors situées les unes derrière les autres le long de lignes parallèles, elles-mêmes alignées dans des plans parallèles. Supposons que l'on impose à ce réseau un cisaillement simple dans une direction perpendiculaire à l'un de ces plans. On comprend bien dans ce cas que les particules entrent en contact régulièrement au cours du

mouvement et forment un réseau continu d'un bout à l'autre de l'échantillon. Cependant, ce réseau continu n'existe que périodiquement au cours du cisaillement simple, lorsque les centres des particules se trouvent le long de plans perpendiculaires à la direction d'écoulement et passant par les centres des particules situées au-dessous et au-dessus d'elles. Le reste du temps, la distance entre les centres de particules voisines de couches adjacentes est du même ordre que leur rayon et les contacts ne sont donc même pas lubrifiés. En revanche, si on admet que les couches adjacentes peuvent se rapprocher lors du mouvement (les billes de la couche supérieure s'avancant dans l'intervalle entre deux billes de la couche inférieure), le réseau de particules en contact se maintient mais la concentration solide augmente et atteint par exemple celle d'une structure cubique face centrée ($\pi/3\sqrt{2}$) qui correspond *a priori* à la concentration maximale d'une suspension de billes identiques. En admettant que l'arrangement des particules reste cristallin quelles que soient les conditions d'écoulement, on en déduit que la concentration solide peut osciller entre les deux valeurs ci-dessus selon les conditions d'écoulement et l'arrangement des particules.

En pratique, un mélange de grains évolue rarement dans ces conditions idéales, la distribution des particules est aléatoire et l'image proposée ci-dessus ne représente pas réellement la structure interne du matériau en cours d'écoulement. Le caractère aléatoire de la distribution des particules induit une diminution de la concentration solide mais il est difficile de quantifier plus précisément ce phénomène. On peut donc s'attendre *a priori* simplement à ce que les bornes de concentration critique correspondant à la formation d'un réseau de contacts soient abaissées (par rapport aux bornes ci-dessus) lorsque le mélange des particules est aléatoire. Par ailleurs, le caractère dynamique du seuil le rend dépendant non seulement de l'arrangement des particules solides mais également des caractéristiques de la phase fluide. Notamment, si les contacts indirects (lubrifiés) sont prédominants, le calcul de la concentration critique liée à l'apparition du réseau de contact doit également tenir compte de l'épaisseur du film interstitiel ; il faut alors s'attendre à des valeurs de seuil légèrement inférieures à celles citées ci-dessus du fait de ce phénomène. Il devient extrêmement difficile de prédire en théorie le seuil de concentration lorsque l'on a affaire à des grains de distribution granulométrique ou de forme complexes.

Diverses valeurs critiques empiriques ont été proposées. À partir d'une synthèse de résultats de simulations numériques d'écoulements granulaires secs en cisaillement simple composés de disques ou de sphères (d'une seule taille), Lun et Bent [20] ont suggéré que le seuil de percolation ci-dessus est atteint pour une concentration solide $\phi_c = \pi/4$ pour des disques, et $\phi_c = \pi/6$ pour des sphères. Notons qu'il s'agit alors d'une valeur moyenne concernant des mélanges aléatoires. Par ailleurs, à partir d'expériences numériques sur la stabilité d'empilements de sphères (à gravité nulle) Onoda et Liniger [21] ont proposé $\phi_c = 0,55$. Enfin, de nombreux auteurs ont constaté des transitions brutales de comportement (se manifestant par exemple par un minimum apparent dans les rhéogrammes) lors d'expériences de cisaillement simple sur différents

mélanges de particules sphériques [22 à 24] ; la valeur de concentration correspondante se situe entre 0,49 et 0,52.

3.3.1.3 Concentration d'entassement maximal

La concentration d'entassement maximal aléatoire (ϕ_m), c'est-à-dire sans aucun ordre particulier, est un peu mieux connue (si l'on néglige d'éventuels effets du fluide interstitiel) que la concentration critique ϕ_c . Pour un mélange de particules sphériques de même taille, ϕ_m vaut environ 0,635 [25]. Si l'arrangement des particules est cristallin, on peut obtenir des valeurs de ϕ_m plus élevées.

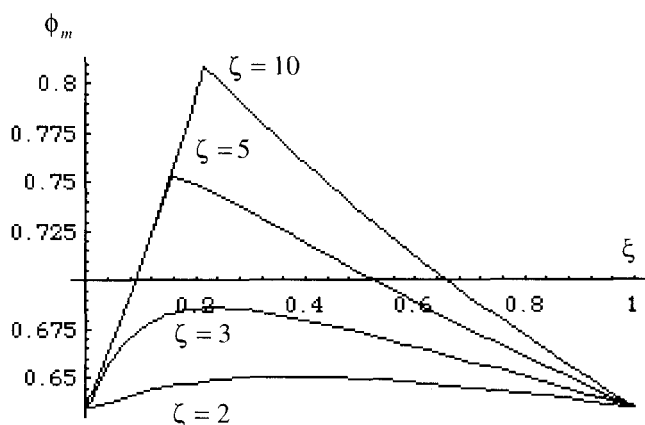


Fig. 3.3 : Variation de la concentration d'entassement maximal d'un mélange bimodal en fonction de ξ pour différentes valeurs de ζ .

Pour des mélanges bimodaux (c'est-à-dire composés de particules de deux tailles), les résultats théoriques ne concordent pas. On présente par exemple sur la figure 3.3 les prédictions de ϕ_m en fonction du nombre d'aspect ζ (rapport des diamètres) et de la proportion de petites billes ξ d'après le travail de Gondret et Petit [26]. Les courbes de concentration solide obtenues possèdent un minimum, ce qui implique que deux distributions granulométriques permettent d'obtenir le même empilement optimal. On constate aussi qu'il est en théorie possible d'augmenter la concentration solide de manière importante en jouant sur les deux paramètres ζ et ξ . On peut ainsi obtenir des concentrations solides supérieures à 0,8 si $\zeta = 10$ et $\xi = 20\%$. La concentration maximale possible (ϕ_∞) est obtenue pour un nombre d'aspect infini. Dans ce cas, on peut combler les espaces laissés vides par les grosses particules avec

des petites particules réparties selon une configuration maximale, on obtient donc :
 $\phi_{\infty} = 0,635 + (1 - 0,635) \cdot 0,635 = 0,87$.

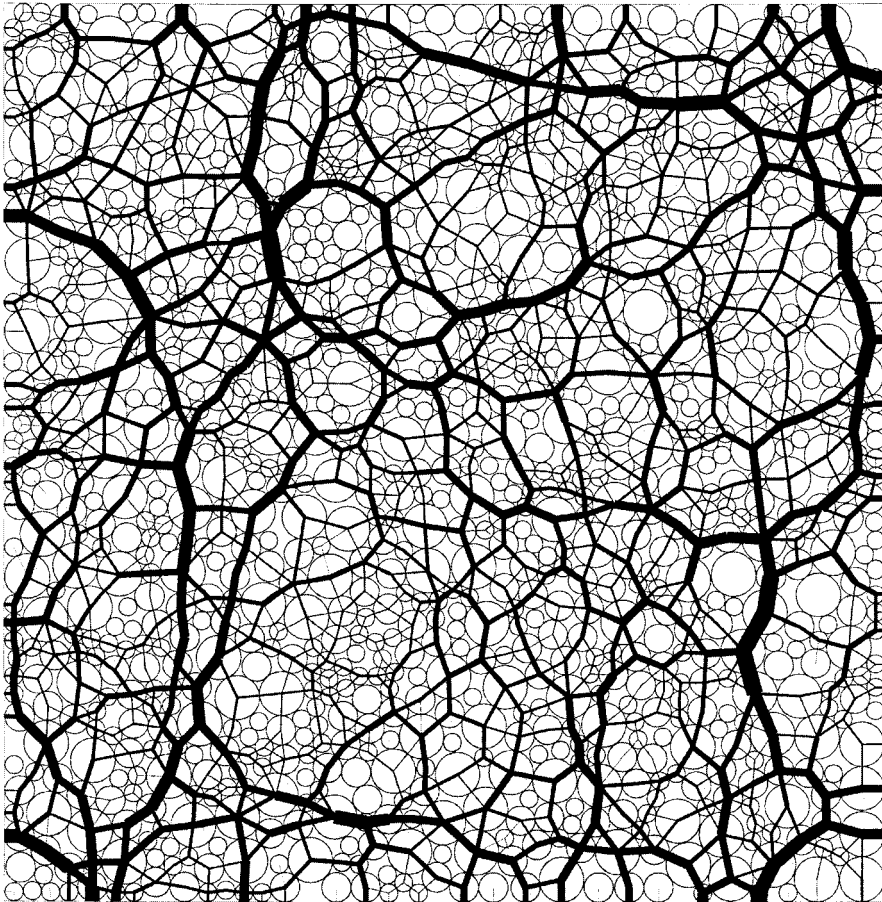


Fig. 3.4 : Simulation numérique d'une distribution de forces au sein d'un arrangement de sphères [32].

En pratique, de telles concentrations sont difficilement observables compte tenu du tri granulométrique qui intervient au cours du mélange ; ce phénomène agit d'autant plus rapidement que le nombre d'aspect est supérieur au nombre d'Apollon [27] : $\zeta_c = \sqrt{3}/(2 - \sqrt{3}) \approx 6,46$ qui correspond au diamètre critique d'une petite bille pour qu'elle puisse pénétrer dans l'interstice formé par trois sphères en contact.

Le calcul de la concentration d'entassement maximal (ϕ_∞) est encore plus délicat pour des mélanges impliquant $N > 2$ tailles de particules. Toutefois, en supposant que l'on ajoute successivement des billes d'une taille très inférieure à la taille de toutes les autres, par le même raisonnement que ci-dessus, on obtient une relation simple de récurrence [28] :

$$\phi_\infty(N) = \phi_\infty(N-1) + [1 - \phi_\infty(N-1)]\phi_\infty(N-1) \quad (3.15)$$

entre les concentrations maximales correspondants aux mélanges de N et $N-1$ tailles de particules. Avec $\phi_\infty(1)=0,635$, on a ensuite $\phi_\infty(2)=0,866$, $\phi_\infty(3)=0,982$, $\phi_\infty(4)=0,999$ et $\phi_\infty(5)=1$. Cette procédure permet d'estimer grossièrement (en la surestimant) la concentration d'entassement maximal.

La forme des grains a également une influence sur la concentration d'entassement maximal. Ainsi, la valeur obtenue pour un mélange de polygones réguliers à n côtés est inférieure à celle obtenue avec des disques ($\phi_\infty \approx 0,84$) : pour $n=3$, on a constaté expérimentalement : $\phi_\infty \approx 0,78$ mais pour $n=15$: $\phi_\infty \approx 0,82$ [27]. Pour des mélanges composés de grains de forme quelconque et de granulométrie étendue, la concentration d'entassement maximal ne peut être déterminée qu'empiriquement [29].

3.3.2 Le réseau de contacts

De même que l'on connaît assez mal les évolutions de la valeur de la concentration critique en fonction des caractéristiques de l'écoulement, on dispose de peu d'éléments concernant la nature du réseau de contact. Quelques expériences ont cependant permis de visualiser directement le réseau de particules en contact, par photoélasticimétrie [30] ou à l'aide de simulations numériques [31, 32] sur des empilements de particules en contact direct soumis à de faibles déformations (compression simple). Ces expériences montrent une répartition hétérogène des forces au sein du mélange (*cf.* Fig. 3.4) : il existe des cheminements privilégiés des forces de contact à travers le réseau ; les particules participant à ces chaînons de force sont dites *compétentes* car ce sont elles qui supportent la plus grande partie des efforts. À côté de ces chaînons principaux, il existe des branches secondaires de contacts où l'ordre de grandeurs des forces mises en jeu est nettement plus faible et leur distribution plus étalée ; la fraction de particules impliquées est alors dite *fragile*. Les forces normales (N) pour la fraction compétente apparaissent ainsi distribuées sur la moitié d'une décade tandis qu'elles s'étalent sur plusieurs décades pour la fraction fragile. Aux plus grandes déformations, la distribution des chaînons de force au sein du réseau de contacts subit d'importantes modifications en moyenne, la fraction compétente disparaît et les forces sont transmises de manière diffuse mais relativement homogène à travers les chaînons [33].

3.3.3 La dilatance

L'existence d'un réseau de particules rigides en contact direct a des conséquences importantes sur le mouvement des grains. Ainsi, pour un milieu granulaire suffisamment dense, il n'est pas possible d'imposer un cisaillement simple sans modifier le volume occupé globalement par les particules car celles-ci se réarrangent dans l'espace (cf. Fig. 3.5). Il s'agit ici du phénomène de dilatance déjà évoqué plus haut. La dilatance ne doit pas être confondue avec la compressibilité d'un matériau ou la dilatation (d'origine thermique). Par exemple, un solide élastique est généralement compressible ; pour autant, au cours d'un cisaillement simple, son volume ne change pas. Elle ne doit pas non plus être confondue avec la notion de comportement dilatatant que l'on trouve parfois dans la littérature technique, et qui est synonyme de rhéoépaississement (cf. § 1.5.5). Puisqu'elle peut être reliée à l'existence d'un réseau continu de contacts entre grains qui correspond à notre définition d'une suspension granulaire, la dilatance est une caractéristique intrinsèque de ces matériaux.

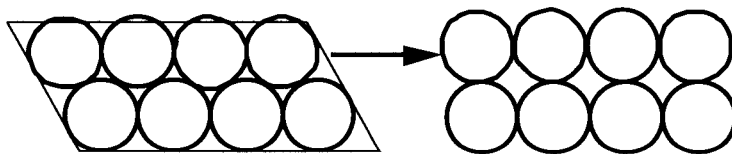


Fig. 3.5 : Mise en évidence de la dilatance intervenant lors du cisaillement d'un milieu granulaire concentré. Les billes sont supposées ici au départ dans une configuration d'entassement optimal. Lorsqu'on impose un mouvement relatif des deux couches de billes parallèles, celles-ci doivent s'écarter quelque peu. Ceci induit une dilatation du volume de l'enveloppe de la matière solide. La quantité de solide reste constante mais, si le fluide interstitiel a tendance à pénétrer le réseau de grains, ceci induit une variation de volume total si ce fluide interstitiel est disponible aux frontières de la suspension.

La dilatance peut donner lieu à des résultats expérimentaux très surprenants voire paradoxaux. C'est le cas de l'expérience de Reynolds [34] en 1885. On place un mélange dense de sable dans un ballon élastique et on sature d'eau le mélange. L'orifice du ballon est relié à un tube à essai dans lequel un niveau témoigne du volume d'eau contenu dans le ballon (cf. Fig. 3.6). En écrasant ou plus généralement en déformant le sac, on note que, contrairement à l'intuition qui incite à penser que la pression appliquée doit tendre à refouler une partie de l'eau hors du ballon, celle-ci est au contraire aspirée vers l'intérieur. L'explication physique est pourtant très simple : en pressant le ballon, on déforme le réseau de grains qui se dilate donc. Le volume global de l'échantillon

augmente donc et, comme le volume réel occupé par la phase solide est constant, c'est le volume de la phase liquide qui doit augmenter.

La dilatance est d'autant plus marquée que le milieu est dense. Elle apparaît nettement dans les essais de cisaillement réalisés au triaxial (cf. § 3.5) sur des échantillons denses à faible taux de cisaillement. Ce phénomène a été également mis en évidence lors d'expériences réalisées avec des rhéomètres annulaires. Le volume de l'échantillon augmente avec la vitesse de cisaillement. Ceci s'explique assez bien physiquement : plus la vitesse d'une particule est grande, moins celle-ci a le temps de tomber dans une dépression formée par les particules d'une couche sous-jacente. La variation relative de volume ($\Delta\Omega/\Omega$) induite par les phénomènes de dilatance est limitée car la concentration solide doit rester dans la plage $[\phi_c, \phi_m]$ pour que la suspension reste granulaire. $\Delta\Omega/\Omega$ est en général de l'ordre de quelques pour cent.

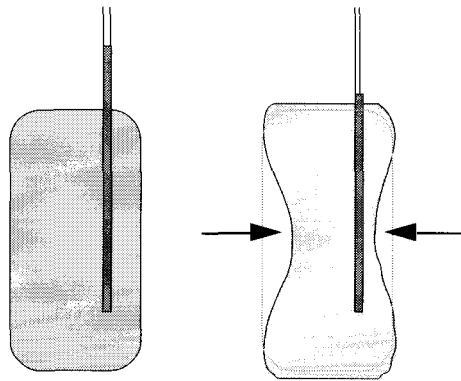


Fig. 3.6 : Expérience de Reynolds illustrant la dilatance d'un milieu granulaire. On place dans un récipient à parois déformables (ballon de baudruche) du sable saturé en eau. Le niveau d'eau dans la colonne indique la quantité d'eau contenue dans le récipient. Lorsqu'on comprime le récipient on s'attend à ce que le niveau d'eau augmente, l'eau s'extrayant du ballon sous l'action des pressions exercées. Au contraire, le niveau d'eau diminue. Ceci résulte du fait que les grains s'écartent quelque peu les uns des autres pour se mouvoir les uns par rapport aux autres, ce qui augmente le volume de pores et donc le volume d'eau nécessaire à leur remplissage.

3.3.4 Couplage des phases

3.3.4.1 Généralités

À l'échelle des particules, une suspension granulaire est biphasique d'un point de vue physique dans le sens où elle est composée de deux phases distinctes. Toutefois, à

l'échelle macroscopique, elle peut, comme les suspensions envisagées au chapitre 2, avoir un comportement mécanique d'ensemble semblable à celui d'un milieu monophasique. Ce n'est plus le cas en général lorsque les deux phases ont des comportements partiellement indépendants. Nous proposerons plus loin (*cf.* § 3.4.2) un critère permettant de mieux cerner les conditions pour lesquelles ceci peut se produire. L'influence de la pression du fluide interstitiel n'est cependant pas explicitement prise en compte dans ce critère et nous nous intéressons ici à quelques écoulements granulaires pour lesquels cette pression joue un rôle notable sur le comportement d'ensemble de la suspension.

En suivant la démarche de Batchelor [35] on peut décomposer l'expression (2.2) en un terme relatif au volume fluide et un terme relatif au volume des particules. En utilisant la définition de la contrainte locale au sein du fluide interstitiel newtonien (équ. 1.41), puis en regroupant certains termes, on obtient la forme générale suivante [18] :

$$\Sigma = -p_0 \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbf{D} + \Sigma_p \quad (3.16)$$

où p_0 est la pression (interstitielle) au sein du fluide, $\mathbf{D}$ le tenseur des taux de déformation moyen et Σ_p un tenseur des contraintes résultant strictement des interactions entre particules. On trouvera par exemple l'expression générale de ce tenseur dans [18]. Notons qu'à la différence de la décomposition proposée au paragraphe 2.2, un terme relatif au cisaillement du fluide interstitiel soumis au cisaillement moyen en l'absence des particules est ici isolé. La détermination de Σ_p s'avère ensuite relativement délicate, il faut tenir compte des différents types d'interaction possibles entre particules et surtout de leur configuration et de ses évolutions au cours de l'écoulement (*cf.* chap. 2). Nous n'irons pas plus loin dans la discussion de ces problèmes.

Notons cependant que l'expression (3.16) nous fournit déjà un résultat fort utile : on peut séparer, au moins formellement, l'influence, sur la loi de comportement, du fluide interstitiel de celle du squelette granulaire. Ce résultat est *a priori* valable quel que soit le régime d'écoulement de la suspension granulaire et correspond au principe de Terzaghi utilisé depuis longtemps en mécanique des sols [36]. Dans ce cadre, le terme de contrainte résultant du cisaillement du fluide interstitiel (second terme de (3.16)) est négligé (à juste titre puisqu'on a affaire à des milieux se déformant lentement) et l'on réécrit (3.16) sous la forme :

$$\Sigma = -p_0 \mathbf{I} + \Sigma' \quad (3.17)$$

où Σ' , qui est en fait égal à Σ_p , est appelé tenseur des contraintes effectives (en mécanique des sols).

3.3.4.2 Influence de la pression du fluide interstitiel

Considérons l'écoulement permanent uniforme (cf. Annexe 3.1) d'une suspension granulaire en régime frictionnel (cf. § 3.5) sur un plan incliné infiniment large et long de pente i . On peut alors déduire des équations du mouvement les expressions (3.64) et (3.63) de la pression moyenne (p) au sein du mélange (en négligeant la pression atmosphérique) et de la contrainte tangentielle (τ). Par ailleurs l'équation (3.17) nous donne dans ce cas particulier :

$$p = p_0 + \sigma' \quad (3.18)$$

où σ' est la contrainte normale (ici une pression) effective. La contrainte tangentielle effective est quant à elle identique à la contrainte tangentielle du mélange. Par ailleurs, en supposant que les mouvements de fluide moyens au sein du mélange sont négligeables, les équations du mouvement pour un filet fluide s'étendant à travers tout le mélange nous fournissent l'expression de la pression au sein du fluide interstitiel (formellement analogue à celle de la suspension) :

$$p_0 = \rho_0 g(h - y) \cos i \quad (3.19)$$

On déduit de (3.18) et (3.19) ainsi que de la définition de la masse volumique moyenne :

$$\rho = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_0 \quad (3.20)$$

l'expression développée de la contrainte effective normale :

$$\sigma' = \rho' g(h - y) \cos i \quad (3.21)$$

où $\rho' = \phi(\rho_p - \rho_0)$ est la masse volumique dite déjaugée.

On peut supposer en première approximation que la loi de Coulomb s'applique vis-à-vis du squelette granulaire. On appelle alors angle de frottement interne φ tel que $\tan \varphi = f$ (cf. (3.39)). Dans ces conditions, on constate d'après l'équation (3.21) que l'effet du fluide interstitiel est d'alléger la pression au sein du squelette granulaire, ce qui a pour effet de diminuer les frottements freinant les mouvements relatifs des grains, et donc d'accroître la capacité du mélange à s'écouler sur des plans inclinés. Plus précisément, lorsqu'il y a écoulement, on doit avoir $\tau = f\sigma'$, ce qui, compte tenu de (3.63) et (3.21), conduit à :

$$\tan i = \frac{\phi(\rho_p - \rho_0)}{\phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_0} \tan \varphi \quad (3.22)$$

Il n'y a donc qu'une inclinaison possible pour laquelle un écoulement granulaire permanent uniforme en régime frictionnel puisse prendre place. Ainsi, pour un sable fin homogène d'angle de frottement interne $\varphi = 35^\circ$ et de masse volumique $\rho_p = 2700 \text{ kg/m}^3$

la pente d'écoulement est $i = \varphi = 35^\circ$ dans de l'air, $i = 19^\circ$ dans de l'eau, et de $i = 15^\circ$ dans du glycérol. Cela explique de manière générale qu'un mélange saturé d'eau (par un exemple un glissement sous-marin) puisse s'écouler sur des pentes bien plus douces qu'une suspension granulaire sèche (un écoulement rocheux sous l'atmosphère par exemple). Remarquons enfin que le résultat obtenu (en termes de pente d'écoulement) ne dépend pas de la hauteur de suspension, ce qui provient de la proportionnalité entre la contrainte tangentielle et la hauteur de suspension d'une part, et de la proportionnalité entre la contrainte de frottement et la contrainte normale (donc aussi la hauteur de suspension) d'autre part.

3.3.4.3 Influence d'un flux de fluide interstitiel à travers le réseau granulaire

Lorsque le fluide interstitiel s'écoule à travers le squelette granulaire, c'est-à-dire lorsque la vitesse moyenne de ses éléments est très différente de celle des particules, la pression de ce fluide est plus élevée que dans le cas précédent. En effet, le squelette granulaire peut être considéré comme un matériau poreux et l'on peut donc appliquer au fluide la loi de Darcy (les phénomènes d'inertie sont négligés) :

$$\nabla p_g = -\frac{\mu_0}{k_0} \mathbf{U} \quad (3.23)$$

où $p_g = p_0 + \rho g Z$ est la pression motrice au sein du fluide, Z l'altitude d'un élément de fluide par rapport à un plan horizontal fixe et k_0 la perméabilité de la structure poreuse. Dans le cas général, k_0 est déterminé empiriquement, mais, il est bon de garder à l'esprit que, pour un matériau poreux de géométrie simple, on peut directement établir (3.23) à partir de l'équation du mouvement d'un fluide newtonien en écoulement laminaire. Ainsi, l'origine de la loi de Darcy est simplement la relation entre le débit à travers des conduites et la différence de pression à appliquer pour contrebalancer le frottement aux parois. Par exemple, dans le cas d'un milieu poreux constitué uniquement de deux plans parallèles séparés par une distance d , à partir de la relation entre le débit et la pression motrice, on montre facilement que $k_0 = d^2/12$. Ce dernier résultat fournit ainsi un ordre de grandeur de la perméabilité et exprime clairement que la perméabilité d'un matériau croît avec le carré de la taille de ses pores, toutes choses étant égales par ailleurs. Une autre formulation (similaire) de la loi de Darcy est en usage en mécanique des sols : $\mathbf{U} = -k \nabla (p_g / \rho_0 g)$ où $k = k_0 \rho_0 g / \mu_0$ est aussi un coefficient de perméabilité qui n'est pas exprimé dans les mêmes unités. k est de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-5} m/s pour un matériau granulaire.

Considérons le cas d'un empilement granulaire au repos à travers lequel circule un fluide (ce peut être le cas d'un sol pulvérulent). Nous pouvons réécrire l'équilibre des forces comme dans le cas précédent, ce qui nous donne encore une fois l'expression de la contrainte effective normale (3.18). Dans cette équation, la pression du fluide interstitiel n'est en revanche plus donnée par (3.19) car le fluide s'écoule sous pression,

mais plutôt par (3.23). Dans le cas d'un écoulement à la vitesse moyenne U dans la direction Oy on trouve en intégrant (3.23) :

$$p_0 = \frac{\mu_0}{k_0} U(h-y) + \rho_0 g(h-y) \quad (3.24)$$

De (3.18) et (3.24) on déduit l'expression de la vitesse moyenne critique pour laquelle la contrainte effective s'annule :

$$U_c = \frac{\rho'}{\rho_0} k \quad (3.25)$$

On constate donc que des remontées d'eau à des vitesses faibles, de l'ordre de quelques cm/s, peuvent menacer l'équilibre d'un sol en rendant nulles ou négatives les contraintes au sein du squelette solide. Le sol est alors sans consistance ; c'est ce phénomène qui est à l'origine des sables mouvants et des renards. Dans ce dernier cas, l'eau circule à travers la base du barrage et emporte progressivement les matériaux solides situés à l'aval du barrage. Dans le cas où le fluide interstitiel est de l'air, on peut encore avoir des effets significatifs de la pression interstitielle malgré la faible masse volumique de l'air : par exemple, dans le cas d'un sable très fin (moins de 0,3 mm de diamètre), l'écoulement dans un sablier peut être très perturbé jusqu'à devenir intermittent, voire s'arrêter [37] ; au contraire, si on injecte du sable très fin dans un tube vertical, on trouve que le débit croît linéairement avec la longueur du tube [38]. Dans ces deux cas, c'est la dépression d'air de part et d'autre de la constriction ou des embouts du tube qui commande l'écoulement. Enfin, ce phénomène est utilisé en génie des procédés dans le cas des lits fluidisés : on injecte dans un milieu granulaire un fluide qui maintient les grains en suspension, ce qui permet la réalisation de réactions chimiques.

Dans d'autres cas, la pression du fluide est imposée par ailleurs en réponse à d'autres processus que ceux mentionnés ci-dessus. C'est le cas par exemple lors d'essais de compression réalisés à volume constant (essais non drainés) sur des mélanges denses, où il y a mise en pression du fluide interstitiel au fur et à mesure de la compression, puis une chute progressive de la pression qui permet ainsi de compenser la tendance naturelle du matériau à se dilater (cf. § 3.3.3).

3.3.5 Ségrégation

La ségrégation est un tri granulométrique qui s'opère, au cours d'un écoulement (cisaillement ou vibration), au sein d'une suspension granulaire avec une granulométrie étalée. On a vu (cf. chap. 4) que ce phénomène survient facilement au sein de suspensions ordinaires en écoulement. Il est aussi très fréquent dans le cas de suspensions granulaires mais c'est en général un critère de taille qui est le paramètre-clé gouvernant la ségrégation [38], même si d'autres facteurs (densité, forme, état de surface) peuvent parfois jouer un rôle non négligeable. Dans le cas d'écoulements à

surface libre, la vitesse de ségrégation est relativement grande [39, 40]. Par exemple, dans le cas d'un mélange bimodal de particules en écoulement simplement cisailé, la vitesse de percolation verticale (U_s) est de l'ordre de [41] :

$$U_s = 2R\dot{\gamma} f(\zeta) \quad (3.26)$$

où R est le rayon des grosses particules et f désigne une fonction croissante du nombre d'aspect qui varie de 0,2 à 1,4 lorsque ζ varie de 1,7 à 3,3.

Les mécanismes de ségrégation sont complexes et dépendent probablement de la nature et de l'intensité du mouvement ainsi que des conditions aux limites. Pour des mouvements oscillants et pour des vitesses élevées de vibration, le mécanisme prépondérant est lié à la convection de particules alors que ce sont des critères géométriques (effets d'arche) qui semblent gouverner la ségrégation aux faibles vibrations [40]. Dans les mouvements de cisaillement, il est généralement avancé que plusieurs mécanismes interviennent [41 à 43] : capture (percolation entre particules) induite par la gravité, mouvements *en accordéon* entre particules d'une même couche, diffusion à travers des gradients de contrainte, effet de rayon de courbure, etc.

3.4 Régimes d'écoulement

3.4.1 Principaux régimes

Les contacts mettent en jeu des phénomènes qui peuvent être relativement complexes (*cf.* § 3.2). Il est cependant commode, en vue d'une description des différents régimes d'écoulement des suspensions granulaires, de supposer possible de distinguer clairement trois types d'interaction (frictionnelle, lubrifiée et collisionnelle), appelés contacts du fait que nous nous intéressons ici spécifiquement aux suspensions dont la concentration solide est très élevée, et régis par des lois simples (loi de Coulomb, répulsion hydrodynamique, conservation de la quantité de mouvement). Nous nous affranchissons donc d'un certain nombre de problèmes évoqués au paragraphe 3.2, notamment, nous admettons qu'il est toujours possible de distinguer clairement un contact collisionnel d'un contact frictionnel ($C_f \ll 1$). Dans le cadre de cette approche simplifiée, il est alors naturel d'introduire deux nombres adimensionnels correspondant aux rapports d'énergies typiquement dissipées lors de ces interactions qui permettront de délimiter les régimes de prédominance des différents types d'interaction. Pour ce faire, nous utiliserons les forces ou les énergies correspondant à chaque interaction estimées précédemment dans le cas de particules sphériques mais, comme dans le chapitre 2, de façon à généraliser les critères de transition, nous remplacerons le rayon des particules par une longueur caractéristique moyenne des particules (r).

Compte tenu de notre définition des suspensions granulaires, les particules restent proches les unes des autres (réseau de contact dynamique) et deux particules voisines en mouvement relatif au sein du fluide à la vitesse $\dot{\gamma}b$ entrent donc nécessairement en

contact. Ce contact peut être lubrifié ou direct. Puisque la concentration solide est élevée, la distance séparant les particules reste proche de ε , donc l'énergie visqueuse dissipée sur une distance parcourue de l'ordre de b est approximativement $\mu_0 r^2 b^2 \dot{\gamma} / \varepsilon$. Pour qu'il y ait contact direct entre les particules, il faut appliquer une force normale supplémentaire (cf. chap. 2). Dans ce cas, s'il y a frottement entre les deux particules, l'énergie dissipée est de l'ordre de fNb . Il est en revanche plus délicat de se référer à l'énergie dissipée lors d'une collision, car celle-ci est notamment proportionnelle à $(1-e)$, terme qui peut être nul sans que cela ne préjuge de la prédominance des collisions. De manière générale, l'énergie à l'origine d'un choc (et partiellement transmise ou dissipée) est l'énergie cinétique initiale de la particule, c'est-à-dire $m\dot{\gamma}^2 b^2$ (à un coefficient 1/2 près), expression dans laquelle on peut remplacer m par $\rho_p r^3$. Dans la suite, nous supposons que cette énergie constitue une énergie de référence mise en jeu lors de collisions.

On en déduit que les contacts frictionnels prédominent par rapport aux effets hydrodynamiques lorsque le nombre de Leighton (L_e) est petit devant 1, avec :

$$L_e = \frac{\mu_0 r^2 b \dot{\gamma}}{fN\varepsilon} \quad (3.27)$$

Remarquons que ce nombre adimensionnel représente aussi le rapport de deux temps caractéristiques. Considérons en effet une particule poussée, du fait de la force N , à travers le fluide interstitiel, à la vitesse $V = d\delta/dt$ où δ est ici la distance entre les surfaces des particules, vers une autre particule fixe selon la direction joignant les centres des deux particules. En faisant abstraction des coefficients liés à la forme des particules et en négligeant les phénomènes d'inertie, l'équilibre des forces s'écrit au premier ordre :

$$\mu_0 \frac{r^2}{\delta} \frac{d\delta}{dt} + N = 0 \quad (3.28)$$

Par conséquent, la distance entre la surface des particules est donnée par :

$$\delta = \delta_0 \exp\left(-\frac{t}{T_N}\right) \quad (3.29)$$

où T_N est le temps caractéristique de rapprochement de deux particules sous l'action de la force (normale) seule :

$$T_N = \frac{\mu_0 r^2}{N} \quad (3.30)$$

On peut aussi calculer le temps exact que met une particule pour parvenir à la distance ε de sa voisine à partir de (3.28) : $T_N \ln((b-r)/\varepsilon)$. À un coefficient près fonction de

l'inverse de la rugosité relative des particules, L_e est donc, quel que soit le modèle employé, le rapport de T_N et de T_h . Deux régimes peuvent donc être distingués :

- aux faibles vitesses ($T_h \gg T_N$), pendant chaque phase élémentaire de l'écoulement, les particules ont en moyenne largement le temps de se rapprocher les unes sur les autres, et il faut donc en général, pour cisailier le matériau, fournir une énergie correspondant aux frottement des particules les unes par rapport aux autres ;
- aux fortes vitesses ($T_h \ll T_N$), pendant chaque phase élémentaire de l'écoulement, les particules n'ont en moyenne pas le temps d'entrer à nouveau en contact les unes avec les autres et l'énergie à fournir est celle nécessaire à l'écoulement du fluide interstitiel.

Il est possible d'obtenir une forme générale approximative de la loi de comportement en cisaillement simple à partir de quelques hypothèses simplificatrices. On suppose d'abord que la force normale est indépendante des conditions d'écoulement. De plus, comme dans le cas de la transition entre le régime colloïdal et le régime lubrifié, on admet que la contrainte tangentielle est une fonction de l'état instantané du système, entièrement caractérisé par une variable scalaire locale, par exemple la proportion de contacts lubrifiés (λ). Cette hypothèse qui repose sur l'isotropie et la constance de la déstructuration de la suspension pour un état d'énergie donné est notoirement fautive dans le cas des suspensions granulaires, puisque, par définition, un réseau de grains en contact frictionnel s'étendant d'un bout à l'autre de l'échantillon joue un rôle significatif (cf. § 3.5). Il est vraisemblable qu'une description de l'état à l'aide d'un tenseur serait plus adaptée. Même dans ce cas, il reste très improbable que le comportement puisse être décrit à l'aide d'une variable locale. La dilatance, le rôle des forces normales sur le comportement du réseau granulaire et la façon dont le drainage est permis ou non aux bornes de l'échantillon sont des phénomènes qui montrent que le comportement de la suspension granulaire est fondamentalement non local. L'approche qui suit met surtout en valeur la transition entre deux régimes mais, compte tenu de leur complexité, on étudie plus en détail les comportements des suspensions granulaires pour chaque régime au cours des sections suivantes.

D'après l'équation (2.43) dans laquelle on remplace T_c par T_N , la valeur en régime permanent λ est une fonction de L_e , que l'on suppose ici pour simplifier exactement égale à T_N/T_h . On peut ici encore décomposer cette contrainte en un terme lié aux contacts frictionnels, qui est proportionnel à la contrainte normale (N/r^2), et un terme lié aux contacts lubrifiés et aux autres interactions hydrodynamiques. En négligeant bien entendu l'influence des évolutions de la configuration des particules sur la valeur du dernier terme, celui-ci reste à peu près égal à la contrainte visqueuse au sein de la suspension ordinaire correspondante ($\mu_0 \dot{\gamma} \eta(\phi)$) (cf. § 2.3.1), d'où l'on déduit :

$$T = F(L_e) + \eta(\phi)L_e \quad (3.31)$$

où $T = \tau r^2 / N$ et $F \rightarrow Cst.$ quand $L_e \rightarrow 0$ et $F \rightarrow 0$ quand $L_e \rightarrow \infty$, ce qui correspond à un comportement de type coulombien aux faibles vitesses et à un comportement newtonien aux fortes vitesses. On peut remarquer que la transition entre le régime colloïdal et le régime lubrifié est caractérisée par un nombre adimensionnel analogue mettant en jeu, non pas une force normale, mais un potentiel d'interaction qui tend cependant aussi à rapprocher deux particules voisines. Ceci montre la continuité des concepts physiques à l'origine des transitions entre d'une part le régime colloïdal et le régime hydrodynamique et d'autre part le régime frictionnel et le régime lubrifié.

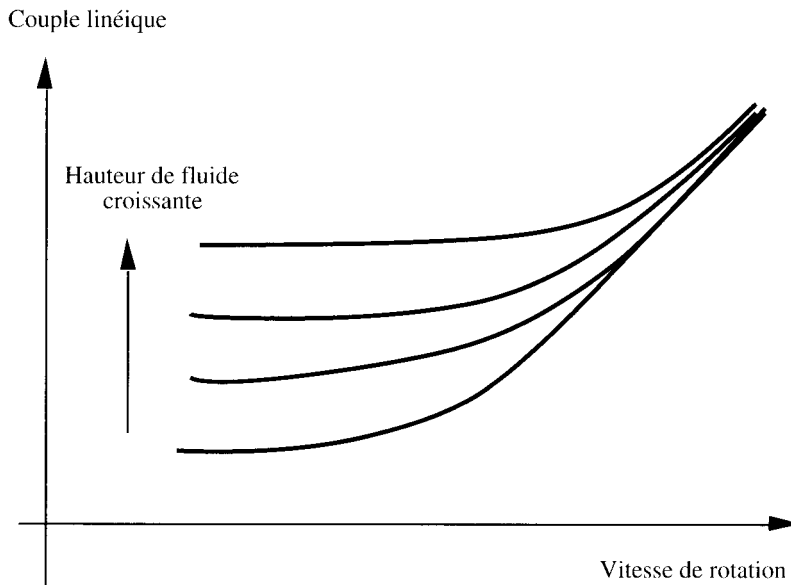


Fig. 3.7 : Évolution du couple (par unité de hauteur) mesuré en fonction de la vitesse de rotation et de la hauteur de matériau lors d'expériences de rhéométrie à cylindres coaxiaux avec une pâte granulaire. Aux faibles vitesses de rotation, les interactions sont essentiellement frictionnelles, le comportement de la suspension est approximativement coulombien, le couple linéique appliqué ne dépend pas de la vitesse mais seulement de la contrainte normale, c'est-à-dire ici de la hauteur de suspension placée entre les cylindres. Aux fortes vitesses, les contacts entre grains sont pour la plupart lubrifiés, le comportement de la suspension est approximativement newtonien, ce qui se traduit par un couple linéique qui ne dépend plus de la hauteur de matériau mais seulement de la vitesse de cisaillement et qui est à peu près proportionnel au gradient de vitesse.

Lorsque la gravité est à l'origine des contacts directs éventuels entre particules, la force normale entre particules varie en fonction de la profondeur selon l'expression (3.20). $p' gr^2 h$, où h est la hauteur totale de suspension, et donc la force normale

caractéristique s'appliquant sur une particule. La transition ci-dessus a été observée dans un tel cas (force normale issue de la gravité) pour des suspensions de billes données (plus denses que le fluide interstitiel) dans différents fluides au sein d'une géométrie à cylindres coaxiaux [44]. On constate alors que la contrainte mesurée varie linéairement avec la hauteur de suspension aux faibles vitesses de rotation du cylindre intérieur et est indépendante de la vitesse. En revanche, elle est indépendante de la hauteur de suspension aux fortes vitesses mais varie linéairement avec la vitesse (*cf.* Fig. 3.7). L'origine de ces résultats expérimentaux réside dans une transition entre un régime frictionnel pour lequel la contrainte de frottement dépend essentiellement de la contrainte normale s'exerçant sur les particules et un régime lubrifié pour lequel le comportement est proche de celui d'un fluide newtonien et indépendant des efforts normaux appliqués. Notons cependant que les résultats ne se superposent plus sur la courbe maîtresse ci-dessus lorsque la taille des billes est modifiée, ce qui est probablement dû au fait que cette approche ne prend pas en compte l'ensemble de la complexité des interactions par contact direct. Notamment, l'organisation des chemins de transmission des forces (*cf.* § 3.5) peut varier sensiblement en fonction du rapport de la taille des particules et des dimensions du rhéomètre, la valeur de ε est mal connue, et le gradient de vitesse qui doit être utilisé dans L_c est mal défini puisqu'aux faibles vitesses, le cisaillement est localisé dans une bande de cisaillement (*cf.* § 3.5).

Les collisions prédominent par rapport aux effets hydrodynamiques lorsque le nombre de Bagnold (B_a), modifié par rapport à celui proposé initialement par cet auteur afin de tenir compte plus précisément de la force de répulsion hydrodynamique, est grand devant 1, avec :

$$B_a = \frac{\rho_p \dot{\gamma} r \varepsilon}{\mu_0} \quad (3.32)$$

On peut alors constater que B_a est petit pour la plupart des pâtes granulaires et ne devient grand devant 1 que pour des écoulements secs de grains suffisamment grossiers. Par exemple, pour une poudre constituée de billes de 1 mm avec une rugosité de 1 μm cisailée à 100 s^{-1} on a $B_a \approx 100$. Rappelons que, pour le calcul de ce nombre adimensionnel, nous avons supposé implicitement que la fréquence de collision et la vitesse relative des particules sont simplement proportionnelles au gradient de vitesse. Ceci n'est vraisemblablement plus valable pour des écoulements en régime collisionnel à des concentrations inférieures à la concentration critique (*cf.* § 3.7). En outre, il est important de rappeler que ce nombre a été établi à partir d'une estimation de l'énergie mise en jeu lors des collisions qui reste très approximative et ne tient pas compte de divers phénomènes qui peuvent jouer un rôle considérable vis-à-vis de la loi de comportement (élasticité, plasticité des particules, rotation, friction lors du contact, etc.). En tout état de cause, les connaissances dans ce domaine sont encore insuffisantes et nous admettrons pour simplifier que le nombre de Bagnold permet de déterminer directement si le régime est collisionnel ou non.

On peut finalement *a priori* distinguer (cf. Fig. 2.9) :

- un régime frictionnel (E), intervenant lorsque $Le \ll 1$ et $LeBa \ll 1$, pour lequel l'effet des contacts frictionnels prédomine sur les autres effets ;
- un régime lubrifié (F), intervenant lorsque $Le \gg 1$ et $Ba \ll 1$, pour lequel l'effet des contacts lubrifiés prédomine sur les autres effets ;
- un régime collisionnel (G), intervenant lorsque $LeBa \gg 1$ et $Ba \gg 1$, pour lequel l'effet des contacts collisionnels prédomine sur les autres effets.

3.4.2 Couplage des phases

Une suspension granulaire se comporte comme un milieu monophasique lorsque le temps caractéristique des particules soumises à l'influence du fluide est très différent du temps caractéristique de l'écoulement de la suspension dans son ensemble (T_h) [45]. Dans ces conditions, les contacts entre grains gouvernent la loi de comportement et les modèles présentés aux § 3.5, 3.6 et 3.7 sont bien adaptés à la description de ce type d'écoulement. Le rapport de ces deux temps est le nombre de Stokes (S_i). Considérons une particule soumise uniquement à des frottements visqueux. L'équation fondamentale de la dynamique pour cette particule s'écrit :

$$\rho_p r^3 \frac{d^2 x}{dt^2} = -K\mu_0 \frac{dx}{dt} \quad (3.33)$$

dont la solution est :

$$V = \frac{dx}{dt} = V_i \exp\left(-\frac{t}{T_R}\right) \quad (3.34)$$

Ainsi, le temps caractéristique d'entraînement par le fluide d'une particule initialement immobile est $T_R = \rho_p r^3 / K\mu_0$. Le nombre de Stokes s'écrit donc :

$$S_i = \frac{\rho_p r^3 \dot{\gamma}}{K\mu_0} \quad (3.35)$$

Ce nombre est aussi le rapport de l'énergie propre des particules et de l'énergie liée aux effets hydrodynamiques. Plus précisément, il s'agit du rapport de l'énergie cinétique d'une particule et de l'énergie dissipée ($F_v b$) par frottements visqueux lors d'un déplacement d'une distance élémentaire (b). Le nombre de Stokes est formellement analogue au nombre de Reynolds particulaire (Re_p) donné par l'équation (2.54), ou au nombre de Bagnold (Ba), ce qui est normal puisqu'on compare ici encore une énergie propre de la particule à des effets hydrodynamiques.

Lorsque $S_t \gg 1$, les particules subissent une influence très faible du fluide interstitiel pendant une durée typique de l'écoulement. Le fluide n'intervient donc pas dans le mouvement du solide. Dans notre cas (suspensions granulaires), il existe une concentration élevée de particules en contact, il faut donc fournir une certaine énergie pour déformer le réseau de particules, qui est très supérieure à celle reçue du fluide. Dans ces conditions, c'est la phase solide qui dicte le comportement global du mélange. Si on suppose pour simplifier que $K \approx r$, $\rho_p \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\dot{\gamma} \approx 1 \text{ s}^{-1}$ on constate par exemple que la phase solide domine dans le cas d'une suspension de grains secs d'un diamètre supérieur à 1 mm ou d'une suspension de grains d'un diamètre supérieur à 1 cm dans de l'eau. Nous proposons de qualifier une suspension en écoulement dans un tel régime d'écoulement granulaire.

Lorsque $S_t \approx 1$, le couplage entre les deux phases est faible. Dans ce cas, le mélange peut avoir un comportement biphasique dans le sens où chaque phase joue un rôle important sur le comportement de l'ensemble mais tend aussi à se comporter de manière autonome. Quelques caractéristiques mécaniques de suspensions dans un tel régime ont été proposées au § 3.3.4.

Lorsque $S_t \ll 1$, les effets hydrodynamiques sont prédominants vis-à-vis du mouvement des particules, la vitesse des particules s'ajuste immédiatement à tout changement de la vitesse d'écoulement de la suspension, donc de la phase fluide qui les entoure. Tout se passe comme si les particules faisaient partie intégrante du fluide interstitiel, qui gouverne donc la dynamique de l'ensemble. Avec les mêmes hypothèses simplificatrices que ci-dessus, on constate par exemple que la phase fluide domine dans le cas d'une suspension de grains secs d'un diamètre inférieur à 1 μm de diamètre ou d'une suspension de grains d'un diamètre inférieur à 10 μm de diamètre dans de l'eau. On a alors affaire à ce qu'on appelle fréquemment des pâtes granulaires.

Ces pâtes granulaires ont une particularité : les transferts de fluide interstitiel à travers le réseau poreux formé par les grains sont très difficiles. Ceci résulte directement de la faiblesse du nombre de Stokes. En effet, supposons que l'écoulement moyen (cisaillement simple) de la suspension induise un transfert de fluide à travers le réseau de grains (ce phénomène intervient naturellement dans le cadre de phénomènes de dilatance) à une vitesse moyenne U . On peut admettre en première approximation que k_0 est de l'ordre de $r^2/10$. Cette formule est notamment justifiée dans le cas d'un réseau idéal constitué de plans parallèles (cf. § 3.3.4.3) ou pour un empilement de billes de verre puisque la formule empirique de Kozeny-Carman donne dans ce cas :

$$k_0 = r^2(1 - \phi)^3 / 45\phi^2 \quad (3.36)$$

et montre que notre approximation surestime en général quelque peu la perméabilité réelle. On peut alors réécrire la loi de Darcy (3.23) pour l'écoulement à travers le réseau

de grains sous la forme :

$$\frac{\nabla p}{\rho_p g} \approx \frac{1}{S_r} \left(\frac{10U\dot{\gamma}}{g} \right) \quad (3.37)$$

Ce résultat montre que les gradients de pression induits par les mouvements du fluide interstitiel sont très grands devant le gradient de pression lié au simple poids des particules lorsque le nombre de Stokes est très faible. Une migration effective, c'est-à-dire un flux non nul de fluide à travers le réseau de grains, est en général impossible au sein d'une pâte granulaire sauf à très faible vitesse. La dilatace induite par les déformations du réseau de grains peut être contrecarrée par la pression du fluide. Le comportement du matériau dépend alors de la position de la concentration solide par rapport à la concentration d'entassement maximal.

Lorsque la concentration solide n'est pas trop élevée, le réseau de grains se réarrange constamment pour éviter de se dilater. La dilatace normalement induite par la déformation est constamment rectifiée par des réarrangements locaux sous l'effet de la pression du fluide. La distribution des particules reste donc en moyenne identique à elle-même. Notons que ce type de suspension est aussi susceptible de sédimenter lentement si les particules peuvent se réarranger localement simplement à cause du mouvement brownien. Lorsque la concentration solide est élevée, le réseau de grains n'est pas capable, même sous l'effet des gradients de pression, de se déformer sans se dilater. Il n'y a pas de possibilités de réarrangements locaux des particules. Dans ce cas, la suspension se fracture.

Ce type de matériau semble assez bien correspondre aux bétons ou ciments frais, aux pâtes d'argile (cf. § 7.5) ainsi qu'aux pâtes à modeler. Pour ces matériaux, lorsqu'on augmente progressivement la concentration solide, on a d'abord une suspension relativement liquide puis un fluide à seuil relativement simple pour des concentrations moyennes. Ce comportement est vraisemblablement lié à l'existence d'un réseau continu de grains en contact. Ce réseau est cependant suffisamment lâche pour se déformer sans se dilater grâce à des réarrangements locaux. Lorsque la concentration solide dépasse une valeur critique, on a affaire à des matériaux susceptibles de se fracturer lors d'un écoulement. Il est cependant possible dans certains cas d'éviter cette fracturation en fournissant de l'énergie supplémentaire de façon à imposer la déformation du réseau sans dilatace. C'est par exemple ce qui se produit lorsqu'on malaxe une pâte à modeler.

3.5 Le régime frictionnel

3.5.1 Généralités

Lorsque $Le \ll 1$ et $LeBa \ll 1$ la plupart des contacts doivent être frictionnels. Le régime d'écoulement est donc caractérisé par l'existence d'un réseau continu instantané de contacts frictionnels à travers tout le mélange. Ce régime a souvent été nommé

différemment par d'autres auteurs qui s'attachaient soit aux caractéristiques mécaniques macroscopiques des matériaux en cours d'écoulement, soit aux caractéristiques des écoulements. On trouve ainsi les appellations quasi-statique ou régime plastique [46] ou encore plastique pleinement développé [47].

L'existence d'un réseau de particules en contact direct confère au mélange des propriétés très spécifiques sur le plan mécanique. Au repos ou lorsque les mouvements entre grains sont lents, les contacts sont frictionnels et on peut utiliser une loi de contact de type Coulomb pour les décrire. Malgré la simplicité de la formulation de la loi de Coulomb locale, il n'est pas facile de déduire quantitativement ce qui se passe dans le réseau de particules d'une suspension granulaire même en statique. En effet, l'état mécanique de chaque particule dépend de la place occupée dans le réseau : si la particule fait partie d'un chaînon de force, alors elle est caractérisée par un nombre moyen de contacts important (appelé aussi nombre de coordination) supérieur à 6 et un niveau de force élevé. Si la particule n'en fait pas partie, elle est caractérisée par un nombre de coordination inférieur à 6 voire à 5 (le couplage avec le reste du réseau est plus faible) et un niveau de force plus faible et plus étalé. Le frottement macroscopique résulte donc principalement des actions de frottement de la fraction compétente du mélange (la fraction fragile y participe à un degré nettement moindre) quand elle existe. Par ailleurs, les efforts appliqués sur une particule donnée résultent de la distribution de forces au sein de l'ensemble du réseau de particules en contact. L'état de contraintes macroscopiques de la suspension granulaire a donc nécessairement un caractère non local à l'opposé de ce qui se passe pour les fluides simples. Pour ces derniers, l'état de contraintes (excepté la pression pour un fluide incompressible) ne dépend en effet que des déformations locales. Finalement, du fait de la nature et de la variabilité de la loi de contact, mis à part dans des géométries simples, il n'y a pas en général unicité de la distribution de forces au sein d'un empilement granulaire. Cela signifie qu'il est possible de proposer différentes distributions de force qui satisfassent les conditions aux limites avec la même configuration des particules.

Tous ces éléments expliquent la complexité du comportement observé aux faibles déformations, domaine où l'influence des distributions de forces est exacerbée. Ils permettent aussi de comprendre pourquoi il est extrêmement difficile de déterminer les contraintes macroscopiques en fonction des déformations subies par le matériau granulaire. Dans ces conditions, il s'avère dans ce domaine (régime frictionnel) plus profitable de s'attacher à établir la forme de la loi de comportement à partir de résultats expérimentaux.

3.5.2 Comportement d'une suspension granulaire en compression

L'expérience la plus adaptée à l'étude du régime frictionnel est sans aucun doute l'essai au triaxial. L'échantillon de matériau est placé dans une cellule cylindrique soumise à un effort normal axisymétrique sur le cylindre (équivalente à une pression (σ_3) exercée par

un fluide) et à une force sur la base supérieure du cylindre dirigée selon l'axe du cylindre (z) et qui donne lieu à une contrainte normale σ_1 (cf. Fig. 3.8). Le volume de la cellule peut être variable, on parle alors d'essai drainé, ou constant, on parle alors d'essai non drainé. Dans le premier cas (essai drainé), le fluide interstitiel est libre de circuler hors de ou vers l'échantillon à travers les parois de la cellule pour, le cas échéant, équilibrer sa pression. Dans le second cas (essai non drainé) une telle circulation est bloquée. L'avantage des essais drainés par rapport aux essais non drainés est de pouvoir découpler le rôle joué par la phase solide de celui joué par le fluide interstitiel.

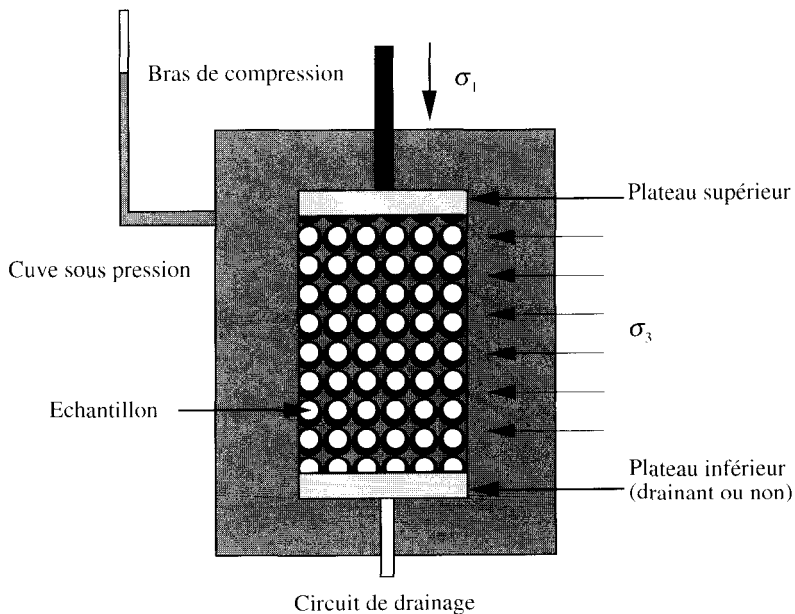


Fig. 3.8 : Schéma d'un essai triaxial.

Pour simplifier, on ne parlera ici que des essais à symétrie cylindrique. Le comportement pour n'importe quelle sollicitation est un problème très complexe qui est encore au centre de nombreuses recherches (le lecteur intéressé pourra consulter la référence [33] pour de plus amples informations à ce sujet). En compression, on applique une contrainte σ_1 supérieure à σ_3 ; le matériau est soumis à une différence de contraintes normales et se déforme. Le tenseur des contraintes dans un repère orthogonal (x, y, z) comporte donc uniquement des composantes diagonales ($-\sigma_1, -\sigma_3, -\sigma_3$). On prendra garde à la convention de signe adoptée ici : comme en mécanique des milieux continus, on considère qu'une traction est orientée positivement (c'est la convention

contraire qui est adoptée en mécanique des sols). On s'intéresse aux évolutions de la première différence de contraintes normales (N_1), qui est aussi égale à la différence de contraintes effectives et que l'on notera ici $-q$:

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (3.38)$$

en fonction de la déformation axiale subie par l'échantillon, c'est-à-dire la variation relative de la hauteur h de l'échantillon ($\varepsilon_1 = \Delta h/h$). On parlera de l'état de contrainte à propos de q . Par ailleurs, compte tenu de l'importance des phénomènes de dilatance, il est utile, pour mieux comprendre les variations de la structure interne, de suivre les évolutions de la déformation volumique, c'est-à-dire la variation relative du volume de l'échantillon ($\varepsilon_v = \Delta\Omega/\Omega$). La pression moyenne (état de contrainte moyen) exercée sur le matériau s'écrit d'après (1.11) $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$. Notons que la pression moyenne effective vaut quant à elle $p - p_0$.

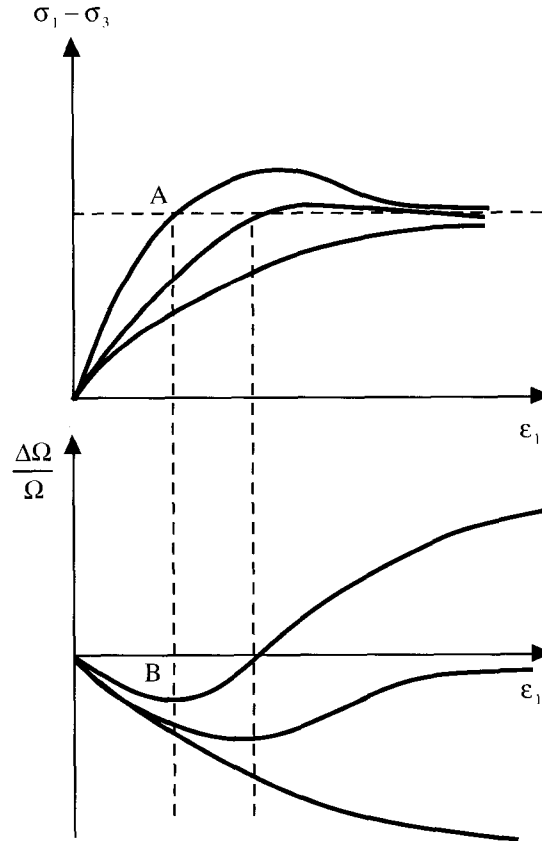


Fig. 3.9 : Exemples typiques de résultats d'essais drainés au triaxial avec un matériau granulaire. Différence de contraintes mesurées en fonction de la déformation axiale et déformation volumique en fonction de la déformation axiale pour différentes concentrations volumiques initiales.

La réponse de l'échantillon à ce type de sollicitation dépend de l'histoire de la déformation, notamment de la concentration à l'état initial. La concentration initiale reflète elle-même partiellement la manière dont il a été préparé, c'est-à-dire, compte tenu des remarques du § 3.3, la distribution des forces et des particules. Si la concentration solide est supérieure (respectivement inférieure) à une valeur critique, on parle d'échantillon dense (respectivement échantillon lâche). Cette classification correspond en fait à deux types extrêmes de comportements observés pour un essai drainé (autorisant donc les variations de volume) à contrainte latérale σ_3 constante (cf. Fig. 3.9) :

- Pour un échantillon initialement dense, q croît et atteint un maximum (pic de contrainte) lorsque la déformation axiale atteint une valeur critique de l'ordre de 10 % pour des sables, puis décroît progressivement. On admet en général que q tend ensuite vers un palier, mais la vérification expérimentale est difficile et controversée, car généralement l'échantillon se fracture (voir plus loin). En parallèle, au début de l'essai, pour de faibles déformations, l'échantillon se contracte ($\varepsilon_v < 0$). Puis, lorsque l'état de contrainte (q) croise (point caractéristique) le palier atteint théoriquement aux plus grandes déformations, la contractance cesse, le matériau se dilate. Aux fortes déformations, ε_v tend vers un palier. La croissance de la déformation volumique s'infléchit généralement lorsque le niveau de contrainte atteint son maximum. Durant un tel essai, les grains ont d'abord tendance à se réorganiser, ce qui explique le tassement macroscopique. Puis la déformation macroscopique est telle que le matériau doit se dilater. Ceci correspond en quelque sorte à un coincement du réseau. À partir d'une certaine déformation, on peut s'attendre à ce que le réseau initial ait été significativement déstructuré : il a en partie oublié son état initial, il se déforme et se reforme maintenant continuellement un peu comme un fluide ordinaire en écoulement, ce qui explique que l'état de contrainte et de volume tendent vers un état d'équilibre indépendant des conditions initiales.
- Un échantillon initialement lâche a, quant à lui, tendance à se tasser inexorablement. Le réseau de contacts se contracte et s'organise donc progressivement. Lorsque la déformation est assez grande le réseau atteint un état proche de celui atteint en partant d'un échantillon dense. L'état de contrainte (q) tend donc asymptotiquement vers le palier identifié précédemment.

3.5.3 L'état critique

D'après ce qu'on vient de voir, l'état de contrainte et le volume de l'échantillon tendent chacun vers un palier, qui définissent ce qu'on appelle l'état critique du matériau et qui est indépendant de l'histoire de la déformation [48]. À l'échelle microstructurale, l'existence d'un état asymptotique aux grandes déformations se comprend aisément : plus les déformations augmentent, plus les chaînons de forces se font et se défont de

telle sorte que de plus en plus de particules participent à la distribution de force. Cette dernière devient en moyenne plus homogène.

La notion d'état critique ne concerne que les contraintes effectives et non les contraintes totales. Notons aussi que cet état critique n'est pas toujours atteint le long de chemins de sollicitations homogènes. Dans le cas d'échantillons denses, la réponse du matériau passe par un maximum qui entraîne souvent la rupture. Cela est assez facilement compréhensible : un échantillon dense commence à se contracter exactement de la même manière qu'un échantillon lâche. Lorsque l'état de contrainte q rencontre le palier critique, l'état critique est vérifié pour les contraintes mais non pour le volume. La concentration solide étant trop élevée, le matériau doit encore se dilater pour parvenir à l'état critique. Il est obligé de libérer de l'énergie pour se détendre. Dans le même temps, on continue à lui en fournir sous la forme d'un travail de compression. Il y a donc compétition entre les deux mécanismes, qui conduit à une instabilité. Cette instabilité se manifeste par l'apparition d'une bande de cisaillement inclinée (par rapport à l'axe du cylindre) dans laquelle se concentre toute la déformation. Les études détaillées à l'aide d'un tomographe (sur un triaxial ou biaxial) montrent clairement que ce phénomène intervient entre le point caractéristique et le pic de contraintes [49, 50]. Au sein de cette bande d'épaisseur variable (mais de l'ordre de la dizaine de diamètres de particule), la concentration atteint le palier de concentration de l'état critique. L'étude des contraintes est alors plus complexe car les déformations ne sont plus homogènes au sein de l'échantillon. Dans ces conditions il est difficile de savoir si l'état critique est atteint globalement ou localement. Naturellement, si à la place d'un essai drainé, on réalise un essai non drainé (à volume constant), il n'y a pas d'instabilité car il n'y a plus qu'un seul cycle d'énergie (l'énergie fournie par la compression est entièrement dissipée par les frottements internes) ; signalons que dans ce cas, le fluide interstitiel peut se mettre en dépression (parfois jusqu'à la cavitation).

3.5.4 Le critère de Coulomb

En mécanique du solide, il est nécessaire de connaître la frontière entre domaines de déformation élastique et plastique. Cette frontière est usuellement décrite à l'aide d'une fonction des contraintes (F), appelée critère (de plasticité). Parmi les critères les plus connus, on peut citer ceux de Von Mises et de Tresca. C'est cette même notion de critère qui a été extrapolée aux fluides à seuil pour rendre compte du passage de l'état solide (déformation élastique) à l'état fluide (déformation irréversible inexorable). C'est encore cette notion qui est utilisée en mécanique des sols pour rendre compte du passage des petites déformations aux grandes déformations. Le point de passage ($F = 0$) est l'état critique tel que nous l'avons décrit plus haut.

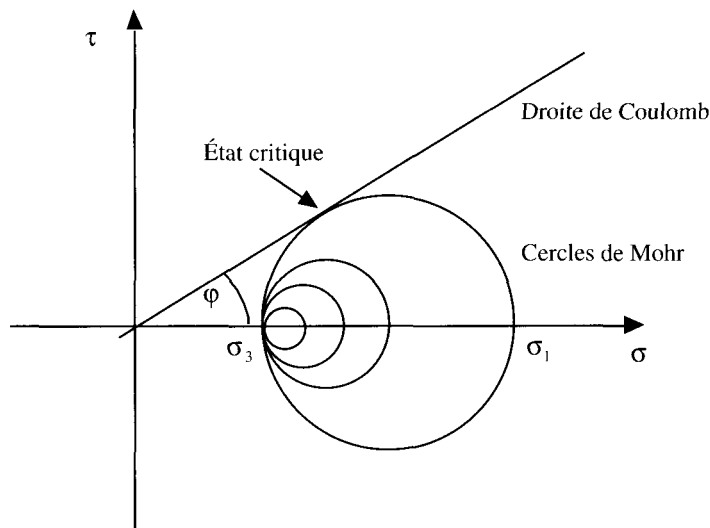


Fig. 3.10 : Évolution dans un diagramme de Mohr (τ, σ) du cercle de l'état de contraintes lors d'un essai drainé au triaxial sur un échantillon lâche. Initialement, on part d'un état de contrainte isotrope ($\sigma_1 = \sigma_3$) représenté par un point. Au fur et à mesure qu'on augmente la force de compression, le diamètre du cercle de l'état de contraintes ($\sigma_1 - \sigma_3$) augmente. Quand le cercle est tangent aux demi-droites de Coulomb, l'état critique est atteint. Pour l'essai au triaxial, cela se traduit généralement par la rupture de l'échantillon.

Un certain nombre de critères ont été proposés (Coulomb, Drücker-Prager, etc.) [33] pour prédire les conditions dans lesquelles l'état critique est atteint. Notons que les relations correspondantes concernent uniquement les contraintes effectives puisqu'il s'agit d'exprimer spécifiquement le comportement du réseau de grains. Dans la suite, pour simplifier, on s'abstiendra de placer les primes sur les symboles de contraintes effectives. On retiendra ici uniquement le critère de Coulomb pour un écoulement bidimensionnel car il est relativement simple et suffit à décrire la réalité en première approximation (la formulation pour les écoulements tridimensionnels est plus complexe mathématiquement, notamment parce qu'elle fait intervenir le troisième invariant du tenseur des contraintes [33]). Ce critère énonce qu'en ce qui concerne les contraintes, l'état critique est atteint s'il existe une facette, de normale $\mathbf{n}$, au sein du matériau le long de laquelle l'amplitude de la contrainte tangentielle (τ) est proportionnelle à l'amplitude de la contrainte normale (σ) :

$$\tau = \sigma \tan \varphi \quad (3.39)$$

où φ est l'angle de frottement interne (macroscopique) du matériau. L'analogie avec la loi de Coulomb locale est évidente mais, bien qu'il soit possible de les relier dans certains cas à l'aide de simulations numériques, aucune relation analytique générale n'a

été établie entre φ et f . Ceci résulte globalement des difficultés de prédiction de la distribution des forces au sein du réseau granulaire.

L'équation (3.39), si elle permet de facilement interpréter le critère de Coulomb, n'est pas réellement l'expression d'un critère de plasticité. En effet, on préfère généralement exprimer le critère sous une forme objective, c'est-à-dire indépendante de tout repère dans lequel on peut l'exprimer. Dans le cas de l'essai triaxial (axisymétrique), il nous faut, pour appliquer le critère de Coulomb, déterminer les contraintes le long d'une facette quelconque telle que $\mathbf{n}$ fasse un angle θ par rapport à la direction z . À partir de l'expression du tenseur des contraintes (cf. 3.5.2) on obtient facilement :

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta ; \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (3.40)$$

Ceci montre que, lorsque les contraintes appliquées durant l'essai sont fixées, le point de coordonnées (σ, τ) décrit le cercle de rayon $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ et de centre de coordonnées $((\sigma_1 + \sigma_3)/2; 0)$. Le rayon de ce cercle augmente donc avec l'état de contrainte (cf. Fig. 3.10). Pour une valeur critique de q le cercle est finalement tangent à la droite de Coulomb définie par (3.38) et l'état critique est atteint. On a alors :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \text{ ou bien encore } q - M p = 0, \text{ avec } M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (3.41)$$

Comme $-p$ est égal à la trace du tenseur des contraintes et q est proportionnel au second invariant du déviateur du tenseur des contraintes, on peut ainsi écrire le critère de Coulomb sous forme objective de la manière suivante :

$$F(p, q) = q - M p \quad (3.42)$$

Notons que cette expression n'est valable que pour des écoulements bidimensionnels ou ayant une symétrie axiale. Avant que l'état critique ne soit atteint ($F(p, q) < 0$), on est dans le domaine des faibles déformations ; le comportement est celui d'un solide élastoplastique. L'état de contraintes à un instant donné ne dépend (quasiment) pas de la vitesse de déformation mais dépend de toute l'histoire de la déformation. Une fois l'état critique atteint ($F(p, q) = 0$), on entre dans le domaine des grandes déformations, qui marque le début de l'écoulement. Cette transition n'est pas sans rappeler le passage du seuil de contrainte pour un fluide à seuil (cf. § 1.5.6). Il y a toutefois des différences notables entre ces deux concepts. Notamment, l'état critique pour une suspension granulaire est une fonction de la pression moyenne contrairement au seuil de contrainte qui dépend uniquement du déviateur du tenseur des contraintes. De plus, l'état critique peut dans certains cas (essais drainés sur des échantillons denses) être dépassé sans que pour autant il y ait fluidisation (on a alors $F(p, q) > 0$).

3.5.5 Modélisation du comportement aux faibles déformations

Comme cela a été souligné précédemment, aux faibles déformations, l'état de contrainte à un moment donné dépend de l'histoire de la sollicitation. Il n'est donc pas envisageable d'écrire, comme pour les suspensions, une relation directe entre le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes. Pour traduire cela mathématiquement, on a recours à des formulations incrémentales de la loi de comportement, qui relient les incréments de déformation aux incréments de contrainte. Une formulation classique des lois incrémentales est l'élastoplasticité à simple potentiel, qui est utilisée par exemple en plasticité des métaux [51]. Ce type de modélisation consiste à définir les incréments de déformation plastique comme des vecteurs normaux à la surface de charge, d'équation $F = 0$.

Pour les suspensions granulaires en régime frictionnel, on peut utiliser un tel formalisme. Toutefois, contrairement à la plasticité simple des métaux, les matériaux granulaires exhibent des propriétés plus complexes : notamment un domaine élastique réduit et des phénomènes d'écrouissage très marqués. Généralement on néglige donc les déformations élastiques devant les déformations plastiques. L'écrouissage traduit la modification de la surface de charge en cours d'écoulement : en effet, en fonction des sollicitations subies par le matériau, ses limites à la rupture peuvent être repoussées (dans certaines limites) ; évidemment, aux grandes déformations, la surface de charge correspond à l'enveloppe de l'état critique $F = 0$. La manière la plus simple de traduire cela mathématiquement est de définir une surface de charge non seulement comme une fonction de l'état de contrainte mais également d'un paramètre (dit d'écrouissage) scalaire.

De nombreuses lois de comportement élastoplastiques sous forme incrémentale ont été proposées pour les suspensions granulaires en régime frictionnel ; elles permettent de représenter assez correctement la réalité (voir par exemple des exemples détaillés dans [33]). Les différences entre ces lois résident principalement dans le choix du critère de rupture, le type de paramètre d'écrouissage, l'utilisation de plusieurs fonctions potentiels, etc. Notons que, contrairement à la plasticité des métaux, les mécanismes physiques gouvernant la plasticité des suspensions granulaires sont encore mal compris.

3.5.6 Modélisation du comportement aux grandes déformations

Les modèles élastoplastiques dont nous avons rapidement parlé ci-dessus, sont assez mal adaptés et ne parviennent plus à rendre compte d'une manière correcte des résultats expérimentaux. Par exemple, ils sont incapables de prédire la rotation des axes principaux des contraintes par rapport à ceux des déformations (non-coaxialité) ou bien encore le développement des bandes de cisaillement [47, 52]. En partant du constat que la cinématique de l'écoulement est entièrement commandée par l'orientation de ces bandes, les modèles théoriques proposés pour l'étude des grandes déformations

reposent en général sur la détermination des régions dans lesquelles se localisent les déformations. On néglige alors l'épaisseur des bandes de cisaillement et on les assimile à des surfaces de glissement. L'utilisation de la loi de Coulomb (éq. 3.39) le long des surfaces de glissement permet ensuite d'aboutir à une description dynamique correcte de l'écoulement [47, 52].

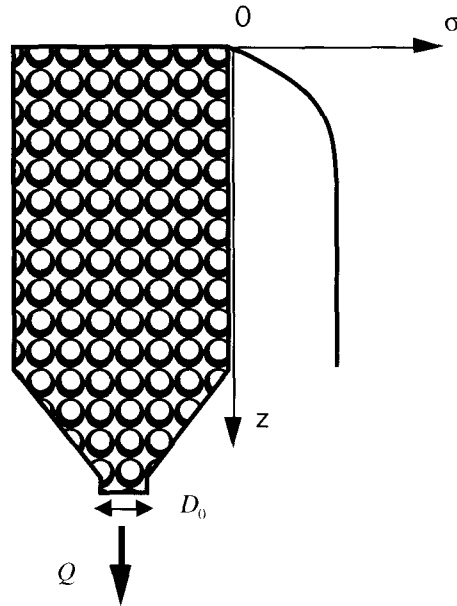


Fig. 3.11 : Écoulement granulaire dans une trémie. On a représenté à droite les variations de la contrainte normale au sein du matériau en fonction de la distance par rapport à la surface libre.

Plutôt que de détailler l'écriture des modèles (voir [47, 52]), nous nous proposons de présenter un exemple concret de traitement, qui montre comment la détermination des lignes de glissement et l'utilisation de la loi de Coulomb permettent de résoudre le problème. Il s'agit de l'écoulement lent d'une suspension granulaire dans un tube vertical de rayon R à parois rugueuses. Dans ce cas, on observe la formation d'une bande de cisaillement le long de la paroi verticale et partout ailleurs un noyau non cisailé (écoulement en bouchon ou "plug"). Les surfaces de glissement sont donc délimitées par les parois du tube. Considérons maintenant une portion cylindrique de matériau d'épaisseur dz , l'axe Oz , dirigé vers le bas, étant l'axe du tube (cf. Fig. 3.11). Selon l'axe Oz cette tranche est soumise à son propre poids $\rho g \pi R^2 dz$, aux forces résultant de la contrainte normale au sein du milieu granulaire, notée ici σ , sur les deux facettes de la portion de cylindre ($\pi R^2 [\sigma(z) - \sigma(z + dz)]$), et aux forces de frottement le long de la paroi intérieure du tube. En admettant que ce frottement suive la loi de Coulomb, la force

correspondante s'écrit $-2\pi R \sigma_r \tan \phi dz$ où σ_r est la contrainte normale au sein du milieu granulaire le long de la paroi du tube. On suppose qu'en régime frictionnel σ_r est proportionnelle à la force normale au sein de la suspension dans la direction z , on a alors $\sigma_r = k\sigma$. Dans ces conditions l'équilibre des forces le long de l'axe vertical en régime permanent s'écrit :

$$-\pi R^2 \frac{d\sigma}{dz} dz - 2\pi R k \tan \phi \sigma dz + \rho g \pi R^2 dz = 0 \quad (3.43)$$

La solution de l'équation (3.43) avec la condition à la limite $\sigma(0) = 0$ (origine de l'axe des z au niveau de la surface libre) s'exprime alors :

$$\sigma = \frac{\rho g R}{2k \tan \phi} \left(1 - e^{-\frac{2k \tan \phi}{R} z} \right) \quad (3.44)$$

À faible profondeur ($z \ll R/2k \tan \phi$), la contrainte varie donc linéairement avec la profondeur : $\sigma \approx \rho g z$. À plus forte profondeur ($z \gg R/2k \tan \phi$), la contrainte est au contraire indépendante du niveau : $\sigma \approx \rho g R/2k \tan \phi$. Ce comportement est très différent de celui d'un fluide ordinaire. Dans ce dernier cas en effet, la pression croît continuellement avec la profondeur. La force s'appliquant au niveau de la sortie d'une trémie est donc proportionnelle à la hauteur totale de fluide et le débit varie donc aussi avec le niveau de liquide au-dessus de la sortie.

Ce calcul, initialement dû à Janssen [46], reflète globalement les caractéristiques très particulières des distributions de force au sein d'un empilement granulaire dans un tube (phénomène dit d'écrantage, grâce au frottement les particules s'appuient en partie sur les parois latérales et soutiennent ainsi les particules situées au-dessus d'elles, ce qui limite l'effort appliqué au fond du récipient) ; ce modèle est en bon accord avec les résultats expérimentaux [38]. Par exemple, les résultats précédents permettent de comprendre que le débit d'une suspension granulaire au travers d'une trémie ne dépend pas de la quantité de matériau. En effet, la pression étant indépendante de la hauteur de matériau, les variables décrivant le système sont le débit (Q), la gravité (g), l'angle de frottement ϕ entre les grains, le diamètre des particules D_0 et le diamètre de l'orifice aval de la trémie supposée cylindrique (D). Une analyse dimensionnelle (théorème de Vaschy-Buckingham) nous indique alors que le phénomène physique peut être décrit par une relation entre trois nombres adimensionnels formés à partir de ces variables. On sait donc que le débit s'écrit sous la forme :

$$\frac{Q}{(gD^5)^{1/2}} = f\left(\tan \phi, \frac{D_0}{D}\right) \quad (3.45)$$

Expérimentalement, on trouve effectivement une formule de ce type (loi de Beverloo [39]) :

$$Q = \alpha \sqrt{g(D - \beta D_0)^5} \quad (3.46)$$

où α et β sont deux constantes dont le lien avec le coefficient de frottement des particules n'est pas clairement établi.

3.6 Le régime lubrifié

Le régime lubrifié est obtenu lorsque $L_e \gg 1$ et $B_u \ll 1$, les contacts lubrifiés sont alors majoritaires et prédominants. Notons que dans certains cas, le domaine dans lequel ce régime prend place peut être extrêmement étroit, voire même inexistant. En effet les nombres adimensionnels L_e et B_u augmentent tous les deux avec le gradient de vitesse et peuvent donc directement devenir grands devant 1 dans la même gamme de $\dot{\gamma}$. Dans ce cas, le régime frictionnel devient progressivement collisionnel lorsque $\dot{\gamma}$ augmente.

Puisque tous les contacts sont lubrifiés, le comportement du mélange devrait être simplement newtonien (*cf.* § 2.3.4). Toutefois, comme nous sommes dans le cas d'une suspension granulaire, la concentration est supérieure à la concentration critique ϕ_c , et des effets non newtoniens marqués peuvent apparaître, résultant essentiellement des évolutions de la configuration. En particulier, puisque les contacts entre particules sont du type lubrifié, des efforts normaux intenses ont tendance à repousser deux particules qui passent l'une près de l'autre à cause du cisaillement. Si les particules sont à ce point détournées de leur chemin théorique, dans une direction privilégiée, la configuration des particules n'est plus isotrope et constante, les particules étant notamment plus espacées dans la direction perpendiculaire au plan de cisaillement, ce qui induit des effets non-newtoniens. Il s'agit ici d'un phénomène de dilatance dans le sens où le volume englobant les particules tendrait à augmenter si la possibilité lui était offerte de le faire. Ce phénomène est probablement à la base des changements de configuration et des évolutions résultantes de la viscosité de suspensions concentrées de sphères dures lorsque le gradient de vitesse augmente (*cf.* § 2.2.5), et notamment de l'effet de rhéoépaississement brutal au-delà d'une vitesse critique (*cf.* § 1.5.5).

Dans l'état actuel des connaissances il n'est pas possible de décrire en détail et de façon universelle le comportement des suspensions granulaires en régime lubrifié. En première approximation, notamment dans le cas de suspensions de particules sphériques de granulométrie peu étalée, on peut estimer la viscosité à l'aide de la formule (2.20) tout en gardant à l'esprit que la viscosité réelle peut fluctuer largement autour de cette valeur en fonction des variations de la configuration. Lorsque la granulométrie est étalée, il est probable que les effets de changements de configuration sont négligeables car la distribution des particules conserve peut-être quoi qu'il arrive un état de désordre complet. Dans ce cas, la formule (2.13) peut suffire pour décrire le comportement du mélange tant que l'on se trouve effectivement dans le régime lubrifié.

3.7 Le régime collisionnel

3.7.1 Généralités

Le régime collisionnel est atteint lorsque $LeBa \gg 1$ et $Ba \gg 1$, les collisions sont alors *a priori* prédominantes au sein de l'écoulement. Il faut en outre que l'influence de la phase fluide soit clairement négligeable ($S_r \gg 1$). Ce régime a aussi été qualifié d'inertiel [46]. En pratique, un tel régime peut prendre place dans deux situations différentes. Pour des concentrations supérieures à la concentration critique ϕ_c , les contacts frictionnels peuvent transmettre des efforts importants, leur ordre de grandeur est celui de la contrainte normale effective. Aussi, pour que les effets collisionnels prédominent, il est nécessaire que la durée d'un contact soit très courte de façon à ce que les effets d'échange de quantité de mouvement soient prépondérants devant les effets de transmission de force le long du réseau de contact. Il faut donc que $C_f \gg 1$. Lorsque la concentration solide est inférieure à la concentration critique ϕ_c , le réseau de particules en contact n'existe plus, les efforts normaux durant des contacts frictionnels sont alors de l'ordre du poids d'une particule. Un régime collisionnel peut prendre plus facilement place. La concentration solide influe non seulement sur le taux de cisaillement critique gouvernant l'installation d'un régime collisionnel, mais également sur la génération des contraintes. En effet, en deçà de la concentration critique, les fluctuations de la vitesse des particules jouent un rôle significatif compte tenu de la lâcheté de l'arrangement ; à l'opposé, au-delà de la concentration critique, les fluctuations sont limitées compte tenu du réseau de contacts.

Par ailleurs, comme les effets inertiels sont importants pour ce type de régime, on peut craindre qu'une certaine turbulence se développe. On ne s'intéressera ici qu'à des écoulements laminaires, dans le sens où les fluctuations de vitesse (au cours du temps) d'un élément de suspension représentatif, c'est-à-dire contenant un nombre important de particules, sont négligeables. Cependant ceci n'exclut pas que les vitesses des différentes particules de l'élément représentatif considéré puissent fluctuer de manière significative autour de la vitesse moyenne (dans l'espace) au sein de cet élément.

3.7.2 Comportement collisionnel des suspensions granulaires ($\phi > \phi_c$)

Dans le cadre de notre définition des suspensions granulaires, pour lesquelles un réseau de contacts existe à tout instant, il paraît peu vraisemblable que les fluctuations de vitesse des particules puissent être importantes. En effet, toute tentative de fluctuer est rapidement contrée par la présence des particules environnantes. Pour une concentration supérieure à la concentration critique, les particules suivent des chemins qui sont principalement imposés par la distribution des autres particules. Ainsi, une particule ne peut vibrer significativement autour de sa position moyenne que si un grand nombre de particules vibrent aussi. Par conséquent les fluctuations de vitesse sont nécessairement

associées à des mouvements collectifs, ce qui ne correspond pas à la définition de fluctuations (plus ou moins aléatoires).

Initialement proposée dans un cadre plus général, l'approche de Bagnold [53] semble bien s'adapter à la description des écoulements granulaires en régime collisionnel sans fluctuations de vitesse des particules. Les termes essentiels de cette approche sont les suivants. On suppose que les couches de suspension contenant des particules éloignées d'une distance moyenne b glissent plus ou moins les unes sur les autres à la vitesse relative $\dot{\gamma}b$. Puisque nous sommes dans les cas où les particules restent proches les unes des autres, on admet alors que les particules entrent en contact les unes avec les autres dès que deux d'entre elles sont à peu près au même niveau selon la perpendiculaire à la direction d'écoulement (*cf.* Fig. 3.12). Il en résulte que la fréquence de choc d'une particule est égale à $\dot{\gamma}$. En fait, Bagnold [53] suppose que cette fréquence augmente avec la concentration solide mais ceci ne paraît pas réaliste dans le cadre d'une suspension granulaire à une concentration supérieure à la concentration critique et sans fluctuations notables des particules. Par ailleurs, la quantité de mouvement transmise, dans la direction d'écoulement, d'une particule à l'autre lors de chaque choc est proportionnelle à la différence de quantité de mouvement entre deux particules, soit $\alpha m \dot{\gamma} b$, avec un coefficient (α) de proportionnalité qui dépend du coefficient de restitution, de la forme des particules et de l'angle de collision. Ce dernier paramètre est essentiel, car il varie entre autres en fonction de la concentration solide, de la forme et de la distribution des particules, mais il n'existe pas actuellement de moyen de l'estimer si ce n'est empiriquement.

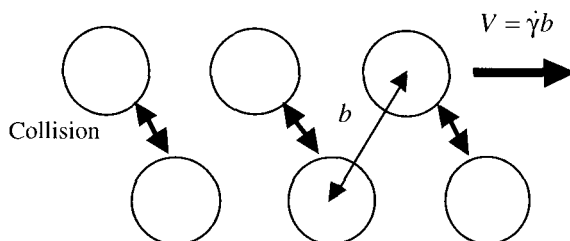


Fig. 3.12 : Schéma de principe des hypothèses à la base du calcul de Bagnold [53] dans le cas de l'écoulement d'une suspension au sein de laquelle les collisions sont prédominantes : au cours du glissement des couches de particules les unes sur les autres du fait du cisaillement, chaque particule entre en collision avec la particule qu'elle croise sur la couche située en dessous d'elle.

La composante de la quantité de mouvement transmise d'une couche à l'autre dans la direction d'écoulement par unité de temps et par unité de surface est aussi égale par définition à la contrainte tangentielle, en l'absence d'autres phénomènes induisant des

dissipations d'énergie. On obtient donc :

$$\tau = \frac{\Delta(mV)}{\Delta t} = \frac{\alpha m}{r} \dot{\gamma}^2 \quad (3.47)$$

Par ailleurs, lors de chaque choc, une composante de quantité de mouvement ($\beta m \dot{\gamma} b$ où β est un coefficient dépendant des mêmes arguments que α) est aussi transmise dans la direction perpendiculaire au mouvement moyen. Il en résulte que se développe une contrainte normale dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, proportionnelle à la contrainte tangentielle :

$$\sigma = \frac{\beta m}{r} \dot{\gamma}^2 = \frac{\beta}{\alpha} \tau \quad (3.48)$$

Rappelons que ce modèle permet seulement d'avoir une idée de la forme de la loi de comportement dans le cas d'un régime collisionnel mais il s'appuie sur de nombreuses hypothèses simplificatrices (collisions binaires, chocs élastiques...).

3.7.3 Comportement collisionnel pour les suspensions non granulaires ($\phi < \phi_c$)

Lorsque la concentration solide est inférieure à la concentration critique, le matériau n'est plus au sens strict (selon notre définition) une suspension granulaire. Il est cependant utile d'en dire quelques mots car, d'une part, le régime collisionnel marque une des limites des écoulements de suspension granulaire et d'autre part, il repose sur un mécanisme particulier de génération des contraintes : les fluctuations de vitesse sont alors un paramètre-clé gouvernant les échanges de quantité de mouvement. Ce régime a été étudié théoriquement en calquant la théorie cinétique des gaz au cas des écoulements granulaires. Dans ce cadre, la variable fondamentale est la température dite granulaire (T_g), définie comme la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse ($T_g = \langle \mathbf{u}^2 \rangle$).

Afin d'éviter d'entrer dans le détail des théories cinétiques (voir pour cela [54 à 56]), nous proposons dans ce qui suit une approche simplifiée développée dans le cadre de la théorie cinétique des gaz qui permet de comprendre l'origine des principales caractéristiques des lois de comportement correspondantes. Au sein d'une suspension granulaire en cisaillement simple laminaire, on peut délimiter par l'esprit des couches (planes) de suspension qui glissent les unes sur les autres, ayant une épaisseur égale à la distance moyenne séparant les particules (b), et contenant à un instant donné un certain nombre de particules dont la vitesse moyenne est celle de la couche. Compte tenu du cisaillement, la vitesse moyenne de la couche du dessus (couche (1)) est $V + (b/2)\dot{\gamma}$ alors que celle de la couche du dessous (couche (2)) est $V - (b/2)\dot{\gamma}$.

Du fait des fluctuations de vitesse, pendant un petit intervalle de temps Δt , un certain nombre (N_0) de particules passent de la couche du dessus à celle du dessous alors qu'un nombre égal de particules suivent un chemin inverse. Ce nombre peut être

calculé en considérant qu'une particule de la couche (2) passe à travers la surface séparant les deux couches pendant l'intervalle de temps Δt si la composante de sa vitesse perpendiculaire au plan (u') est correctement orientée ($u' > 0$) et située à une distance inférieure à $u' \Delta t$. Par conséquent, pour une vitesse donnée, le nombre de particules passant dans l'autre couche est égal au nombre de particules ayant cette vitesse dans un volume $Su' dt$ où S est la surface des couches. On en déduit :

$$N_0 = S\Delta t \int_{u' > 0} n(u') u' du' \quad (3.49)$$

où $n(u')$ est la densité de particules ayant une vitesse u' . En première approximation, on suppose que les fluctuations de vitesse de chaque particule sont isotropes, c'est-à-dire que :

$$\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = \frac{1}{3} (\langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle) = \langle \mathbf{u}'^2 \rangle \quad (3.50)$$

$$\text{où } \langle a \rangle = \frac{1}{n} \int n(u') a du'$$

et que :

$$\langle u' \rangle_{u' > 0} = \frac{1}{n} \int_{u' > 0} n(u') u' du' \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \int_{u'} n(u') u'^2 du' \right)^{1/2} = \frac{1}{6} \langle \mathbf{u}'^2 \rangle \quad (3.51)$$

où n est le nombre de particules par unité de volume. Au premier ordre, la quantité de mouvement moyenne ($\Delta(mV)$) échangée entre les deux couches peut être estimée en considérant que chaque particule traversant une couche est animée de la vitesse moyenne de sa couche d'origine :

$$\Delta(mV) = \langle u' \rangle_{u' > 0} n S \Delta t [m(V + (b/2)\dot{\gamma}) - m(V - (b/2)\dot{\gamma})] \quad (3.52)$$

En tenant compte des flux opposés de particules, la contrainte tangentielle ($\tau = \Delta mV / S \Delta t$) s'écrit donc :

$$\tau = \frac{1}{6} m b n \dot{\gamma} \sqrt{T_g} \quad (3.53)$$

Cette expression est formellement identique à celles obtenues dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires à un coefficient près dépendant de la concentration et de la distribution de contacts [54 à 56]. La contrainte tangentielle est donc proportionnelle à $\dot{\gamma} \sqrt{T_g}$ mais avec un coefficient de proportionnalité à propos duquel il reste quelques incertitudes dans le cadre des théories actuelles. Citons par exemple l'expression obtenue par Jenkins et Savage [54] :

$$\tau = \frac{6}{5\sqrt{\pi}} (1 + e) \phi g_0 \rho_p R \dot{\gamma} \sqrt{T_g} \quad (3.54)$$

où g_0 est la fonction de distribution radiale de Carnahan et Starling :

$$g_0(\phi) = \frac{1}{1-\phi} + \frac{3\phi}{2(1-\phi)^2} + \frac{\phi^2}{2(1-\phi)^3} \quad (3.55)$$

Bien d'autres expressions de la contrainte tangentielle ont été proposées, mais elles sont formellement analogues (voir [55, 56]). Dans certains cas, la fonction g_0 a par exemple été remplacée par une expression empirique tendant vers l'infini quand $\phi \rightarrow \phi_c$. À notre avis, cette substitution ne s'impose pas puisque, lorsque la concentration dépasse ϕ_c , les contacts frottants peuvent devenir significatifs, c'est-à-dire que l'on atteint un régime frictionnel-collisionnel [20, 57] (cf. § 3.8).

Bien que nous ne l'ayons pas évoqué jusqu'ici, un caractère essentiel du régime collisionnel pour lequel les fluctuations de vitesse sont importantes provient du fait que ces fluctuations, ou encore la température granulaire, sont liées à l'agitation interne du matériau, donc à son énergie interne. Il en résulte qu'il nous faut prendre en considération une équation, l'équivalent de la conservation de l'énergie pour un fluide ordinaire dans le cas où les échanges thermiques sont significatifs, reliant la température granulaire aux autres variables décrivant l'écoulement. Comme dans le cas où le frottement entre les particules prédomine (cf. § 3.5), la loi de comportement a alors un caractère non local puisqu'il faut résoudre entièrement les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie pour connaître les contraintes ou la viscosité. En cisaillement simple, en résolvant l'équation de conservation de l'énergie, on trouve en général que la température est proportionnelle à $\dot{\gamma}^2$. Par exemple, moyennant quelques hypothèses simplificatrices concernant les conditions aux limites et la symétrie du problème, on a [54] :

$$T_g = \frac{2r^2}{5(1-e)} \dot{\gamma}^2 \quad (3.56)$$

Comme dans le cas de la théorie de Bagnold, le comportement du fluide est donc rhéoépaississant puisque la viscosité est proportionnelle à $\dot{\gamma}$. En l'absence de turbulence macroscopique (qui peut donner lieu à des variations analogues de la viscosité moyenne), ceci peut clairement être considéré comme une signature du comportement collisionnel.

3.8 Régimes intermédiaires

3.8.1 Généralités

Outre les trois régimes purs caractérisés par la prédominance d'un seul type d'interaction, il existe des régimes pour lesquels deux types d'interaction jouent un rôle important vis-à-vis du comportement de la suspension. Dans ce cas, localement au sein

de l'écoulement, deux types d'interaction prédominent. Ces régimes sont appelés intermédiaires car ils peuvent être vus comme assurant la jonction entre deux régimes purs. On peut ainsi distinguer un régime frictionnel-collisionnel ($Le \ll 1$ et $LeBa \approx 1$), un régime frictionnel-hydrodynamique ($Le \approx 1$ et $Ba \ll 1$) et un régime hydrodynamique-collisionnel ($LeBa \gg 1$ et $Ba \approx 1$). Quoique de nombreux écoulements d'intérêt pratique se situent dans ces régimes intermédiaires, la connaissance de la loi de comportement pour chacun de ces régimes est encore très lacunaire et sans base consensuelle.

Dans la suite, nous nous intéressons tout particulièrement au cas des écoulements à surface libre. Il se trouve qu'en pratique, ces écoulements sont souvent dans un régime intermédiaire, ce qui nous permettra donc d'aborder ces régimes au travers de cas particuliers. Compte tenu du peu de résultats expérimentaux ou théoriques existant dans ce domaine, nous présentons une synthèse de connaissances issues de notre propre expérience et de celle d'autres auteurs, mais ces considérations doivent être regardées comme encore très spéculatives.

3.8.2 Écoulements à surface libre

3.8.2.1 Régime d'écoulement

Les écoulements de suspension granulaire à surface libre, c'est-à-dire comportant une surface frontière en contact avec un fluide, qui peut être le fluide interstitiel, présentent des particularités. C'est le cas par exemple des écoulements granulaires secs dans un canal ouvert incliné ou des écoulements granulaires immergés sous un liquide. On peut aussi rencontrer ce type d'écoulement dans le cas d'une mise en suspension lorsqu'un matériau granulaire immergé sous un fluide est entraîné par la rotation d'un outil en contact soit avec les grains soit avec le fluide situé au-dessus, soit encore avec les deux milieux. Nous nous intéressons ici en détail uniquement aux écoulements à surface libre gravitaires.

Nous avons déjà traité en partie ce problème au § 3.3.4 dans le cadre du régime frictionnel. Il est apparu alors qu'un écoulement permanent uniforme ne peut être obtenu que pour une pente donnée. Puisque le frottement n'augmente pas avec la vitesse, pour des pentes supérieures à la pente d'écoulement déterminée au § 3.3.4, l'écoulement est en principe uniformément accéléré alors que pour les pentes inférieures, il est uniformément décéléré. En pratique, si la rugosité du plan est suffisante, on n'observe pas un régime accéléré mais la mise en place d'un régime intermédiaire. Les contacts collisionnels ou lubrifiés entre particules peuvent dissiper l'excès d'énergie dû à la gravité et un régime permanent peut prendre place. La dilatance est d'autant moins contrecarrée par le poids des particules que l'on se trouve près de la surface libre supérieure, ainsi les particules se dispersent d'autant plus que l'on s'approche de la surface libre. Près du fond, le poids de la suspension située au-dessus contraint les particules à se mouvoir lentement les unes par rapport aux autres, on peut donc

facilement avoir des contacts frottants. Près de la surface libre, les particules sont plus libres de leur mouvement, si la pente est suffisamment forte, les couches supérieures peuvent se détacher périodiquement les unes des autres et sont animées de mouvement relatifs assez rapides (cf. Fig. 3.13). On aura donc plus facilement des contacts lubrifiés ou collisionnels. Au sein de l'écoulement, plusieurs régimes peuvent donc coexister et il existe des régions pour lesquelles le régime d'écoulement est intermédiaire entre des régimes purs car deux types d'interaction prédominent.

Remarquons que ces caractéristiques correspondent à des écoulements sur des pentes moyennes (disons supérieures de quelques degrés à la pente d'écoulement). Pour des pentes fortes, le régime est en général hydrodynamique ou collisionnel au sein de l'ensemble de la suspension, voire saltationnel si la pente est très forte, c'est-à-dire que les particules rebondissent sur le fond indépendamment les unes des autres. Les observations très précises (en termes de mouvements des particules) des expériences en canal bidimensionnel réalisées par Drake [58] et Azanza [59], auxquelles nous renvoyons le lecteur intéressé, permettent d'affiner cette description simplifiée.

Les écoulements en régime frictionnel-hydrodynamique ont surtout été traités dans le cadre des problèmes de mise en suspension (comme nous l'avons décrit plus haut). La concentration solide est alors déterminée en fonction de la hauteur en considérant les flux de particules résultant des différents phénomènes de migration : un flux orienté vers le bas lié aux effets de la pesanteur, des flux orientés vers le haut liés au gradient de concentration, au gradient de vitesse et au gradient de viscosité. Les connaissances concernant les valeurs des coefficients de diffusion correspondants sont encore insuffisantes. L'équation obtenue doit ensuite être ajoutée aux équations du mouvement pour déterminer entièrement les caractéristiques de l'écoulement, ce qui conduit à des problèmes intégral-différentiels relativement complexes [60 à 64]. Nous nous intéressons dans la suite uniquement aux écoulements à surface libre en régime frictionnel-collisionnel.

3.8.2.2 Observations expérimentales

Revenons à l'expérience d'écoulement granulaire le long d'un canal incliné [65]. Dans le cas où le fluide interstitiel est de l'air et lorsque la taille des particules est suffisamment grande (supérieure à environ 100 μm), les effets du fluide sont négligeables et on est assuré d'être en régime frictionnel ou collisionnel. On a reporté sur la figure 3.13 les types d'écoulement observés en fonction de la pente pour des canaux à fond rugueux (c'est-à-dire suffisamment rugueux pour que la vitesse au fond soit nulle). Un écoulement granulaire ne peut exister pour une large gamme de débit qu'au-delà d'une pente critique proche de l'angle de frottement interne (ϕ) du matériau. Si l'on augmente encore la pente, au-delà d'une pente critique (θ_1), la concentration solide près de la surface libre diminue nettement et les particules des couches supérieures sont en saltation ; l'écoulement comporte alors deux zones bien distinctes : près du fond, un régime frictionnel-collisionnel et vers la surface libre, un régime collisionnel. À

l'opposé, lorsque la pente du canal est inférieure à l'angle de frottement interne mais supérieure à un second angle critique (θ_2), un régime permanent uniforme peut prendre place mais uniquement dans une gamme étroite de débits. On observe en effet qu'aux forts débits, des particules se déposent sur le fond du canal et forment une zone morte en forme de coin, ce qui revient à augmenter l'inclinaison du fond de l'écoulement au-delà de l'angle de frottement interne. Pour des pentes en deçà de θ_2 , aucun écoulement permanent n'est possible. Seuls des régimes transitoires (bouffées ou avalanches de particules) sont observés. Typiquement, avec des billes de verre en écoulement sur des plans rugueux, on a $\theta_2=22^\circ$, $\varphi=27^\circ$ et $\theta_1=40^\circ$.

Une difficulté dans l'étude expérimentale des écoulements granulaires est due à l'influence de la rugosité sur l'écoulement. Par exemple, on peut obtenir avec un canal à fond lisse des écoulements sur des pentes bien plus douces qu'avec un canal rugueux [66]. De plus, la rugosité influence considérablement le mouvement des particules au voisinage de la paroi et les mouvements collectifs de particules aux environs du fond. Ce phénomène joue un rôle d'autant plus important que le rapport entre l'épaisseur de l'écoulement et la taille des grains est faible. Notamment, à l'aide de simulations numériques d'écoulements simplement cisailés bidimensionnels confinés de disques, Campbell a mis en évidence l'importance des transmissions des couples de frottement au voisinage de la paroi rugueuse, phénomène qui complique sérieusement le comportement macroscopique de la suspension [67]. Par ailleurs, Pouliquen [68] a montré que le débit peut, dans certaines conditions, s'exprimer comme une fonction d'une hauteur critique d'écoulement (h_{stop}) (cf. § 3.8.2.3) qui dépend nécessairement fortement de la rugosité.

Expérimentalement, on constate aussi l'existence dans certaines conditions de deux hauteurs d'écoulement différentes en régime permanent pour un même débit, suivant la façon dont on impose le débit à l'amont du canal : par une vanne placée à l'aval d'une trémie, ou par un écoulement libre depuis la trémie [66]. Seul l'écoulement correspondant à la plus grande hauteur, obtenue dans le premier cas, est stable. Ce phénomène n'a pas reçu d'explication unanimement reconnue à l'heure actuelle. D'après Johnson [66], c'est l'état énergétique du milieu granulaire à l'entrée du canal qui conditionne l'existence d'une seconde hauteur d'écoulement. Ancey suggère au contraire que ce phénomène est lié à la nature du frottement coulombien [18].

D'autres formes d'instabilité existent. L'une des plus remarquables (déjà mentionnée plus haut) est l'apparition d'une zone morte en forme de coin (de surface limite encore plus inclinée que le canal) aux forts débits lorsque l'inclinaison du canal est inférieur à l'angle de frottement interne (Fig. 3.13) : tout semble se passer comme si l'écoulement modifiait lui-même sa pente d'écoulement pour se ramener à une pente seulement légèrement supérieure à l'angle de frottement interne [18, 65]. Par ailleurs, des ondulations du niveau de la surface sont parfois observées lors d'écoulements permanents [18].

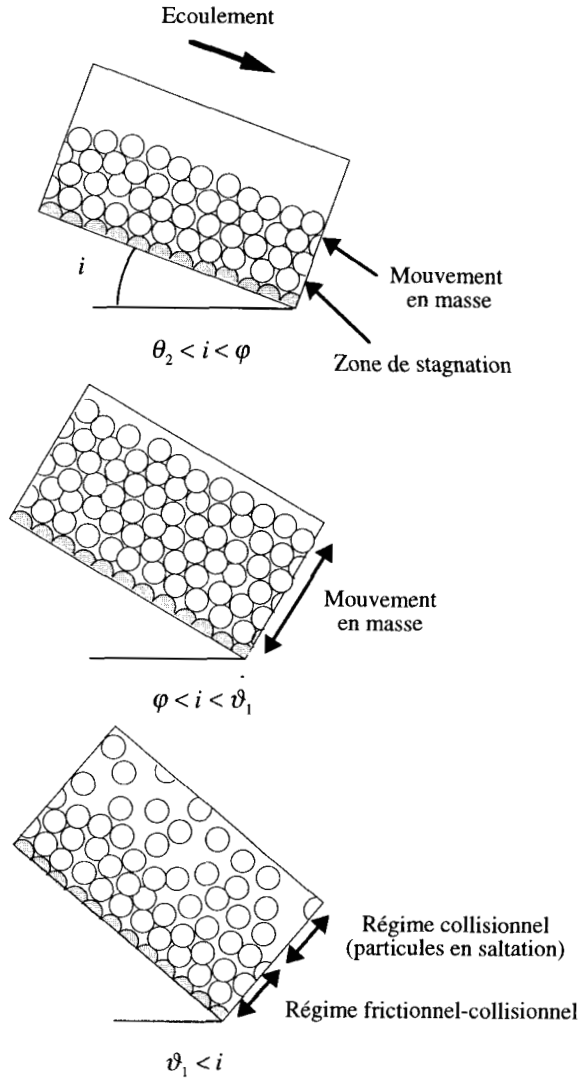


Fig. 3.13 : Types d'écoulement en fonction de la pente pour un écoulement granulaire sec le long d'un plan incliné rugueux (rugosité de même taille que celle des particules en écoulement). Lorsque la pente est inférieure à l'angle de frottement interne mais supérieure à une pente critique θ_2 (dépendant de la nature du matériau), un écoulement permanent peut prendre place, mais uniquement pour une gamme limitée de débits ; pour des débits grands, l'écoulement devient instable et on observe la formation d'une zone morte composée de billes immobiles sur le fond du canal, qui permet de redresser la pente d'écoulement. Pour des inclinaisons comprises entre l'angle de frottement interne et un angle critique θ_1 , un écoulement permanent uniforme prend place pour une large gamme de débits. Au-delà de θ_1 , les particules près de la surface sont en saltation.

Du fait que les écoulements granulaires à surface libre ont des caractéristiques globales très similaires à celles d'écoulements de fluides ordinaires, il est naturel d'envisager de déterminer la loi de comportement d'une suspension granulaire à partir de la loi hauteur-débit expérimentale (en régime permanent) en utilisant la technique décrite au paragraphe 4.3.5. Or, ce type d'approche, qui suppose qu'il existe une relation univoque entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse pour un matériau donné, conduit à des résultats aberrants. On trouve ainsi des courbes d'écoulement décroissantes (alors que les écoulements sont stables contrairement aux prédictions théoriques dans ce cas (*cf.* Annexe 4.1)) et différentes pour différentes pentes de canal [65].

Les considérations ci-dessus montrent à quel point, même dans le cas relativement simple d'écoulements à surface libre, le comportement d'une suspension granulaire est complexe. Dans certains cas, on a vu qu'il est possible de s'appuyer sur la description des interactions locales entre particules pour prédire la forme de la loi de comportement. Cependant, force est de constater que dès que l'on s'éloigne de ces situations idéales ou dès que l'on fait varier certaines conditions aux limites telles que le mode d'injection du matériau à l'amont ou la rugosité, ou encore dès que la pente est très grande par rapport à l'angle de frottement interne, le comportement du matériau, ou plus concrètement sa loi d'écoulement, ne peut être prédite précisément dans l'état actuel des connaissances. Un certain nombre de modèles théoriques ont cependant été proposés pour décrire le comportement d'une suspension granulaire en écoulement frictionnel-collisionnel sur un plan incliné. Dans la suite, nous développons un modèle simplifié représentatif de l'ensemble de ces modèles et qui fournit quelques éléments concernant l'origine possible d'une partie des caractéristiques des écoulements observées en pratique.

3.8.2.3 Modèle heuristique pour le régime frictionnel-collisionnel

Les particularités du comportement des suspensions granulaires en écoulement à surface libre proviennent des caractéristiques originales des suspensions granulaires évoquées tout au long de ce chapitre et notamment de la dilatanse et de la spécificité des contacts frictionnels. Nous retenons ici principalement l'influence d'un comportement frictionnel éventuel comme l'origine principale du fait que la relation entre τ et $\dot{\gamma}$ en cisaillement simple permanent n'est pas univoque (voir plus haut). Par conséquent, on se propose de rechercher une relation du type $\tau = f(\sigma, \dot{\gamma})$ où σ est la contrainte normale au point considéré. On admet aussi que l'effet de cette contrainte normale est uniquement d'induire une contrainte tangentielle liée aux frottements entre particules et proportionnelle à σ selon la loi de Coulomb. Cette approche suppose donc que, malgré l'intermittence éventuelle des contacts, la fraction de contacts qui se trouvent être frottants à l'instant considéré au sein du réseau de particules, continuent d'induire une contrainte macroscopique identique à celle résultant du frottement constant des deux couches. En parallèle, les particules appartenant à des couches adjacentes sont

susceptibles d'entrer en contact collisionnel. Un problème analogue à celui rencontré dans l'étude du régime collisionnel apparaît alors. La quantité de mouvement transmise lors de chocs peut varier considérablement selon la loi de contact, l'angle de contact, la rugosité, l'organisation des particules, etc. En tout état de cause, la contrainte résultante s'écrit sous la forme $\chi \dot{\gamma}^2$ où χ dépend des arguments ci-dessus. Dans le cas général il est raisonnable de penser que χ dépend au moins de $\dot{\gamma}$, ce qui nous conduit à écrire finalement la loi de comportement en cisaillement simple de ces suspensions sous la forme :

$$\tau = f\sigma + \frac{1}{a} \dot{\gamma}^{1/b} \quad (3.57)$$

où a et b sont deux coefficients qui dépendent du matériau. Dans (3.57) τ et $\dot{\gamma}$ sont les amplitudes (positives) de la contrainte tangentielle et du gradient de vitesse. Une expression analogue à (3.57) pourrait être établie pour décrire le comportement dans le cas d'un écoulement en régime frictionnel-hydrodynamique même si les origines des variations du second terme en fonction de $\dot{\gamma}$ diffèrent : organisation des particules dans l'espace, rugosité et forme des particules, fluctuations de pression au sein du fluide interstitiel, etc.

Dans un écoulement à surface libre permanent uniforme, les expressions de τ et σ en fonction de la hauteur considérée (y) par rapport au fond se déduisent des équations du mouvement (cf. Annexe 3.1). (3.57) nous donne donc :

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = [ag(\rho \sin i - fp' \cos i)(h - y)]^b \quad (3.58)$$

On déduit de cette expression un premier résultat important en accord avec les observations expérimentales : il ne peut y avoir écoulement (permanent) que si le gradient de vitesse est strictement positif, c'est-à-dire uniquement lorsque la pente est supérieure à la pente d'écoulement (donnée par (3.22)).

Par intégrations successives et en utilisant l'hypothèse de non-glissement à la paroi, on obtient l'expression suivante du débit par unité de largeur d'écoulement (on a supposé que l'influence des parois latérales était négligeable) :

$$q = \frac{1}{b+2} [ag(\rho \sin i - fp' \cos i)]^b h^{b+2} \quad (3.59)$$

Le coefficient b variant avec la nature des contacts et les conditions aux limites, on peut s'attendre à différentes formes de variations du débit avec la hauteur d'écoulement. Ainsi, un certain nombre d'auteurs [59, 68] ont observé, pour des écoulements de billes de verre ou d'aluminium, que le débit était proportionnel à $h^{5/2}$ pour des pentes comprises entre θ_2 et ϕ . Ancey [18] a aussi obtenu ce résultat, mais uniquement pour des débits inférieurs à un débit critique. Ce résultat est celui prédit par l'équation (3.59) avec $b = 1/2$, ce qui correspond à un second terme de la loi de comportement (3.57) simplement proportionnel à $\dot{\gamma}^2$, comme si les collisions se produisaient dans des

conditions similaires à différents gradients de vitesse dans une certaine gamme de vitesse. Dans ce cadre, Pouliquen [68] a mis en place une procédure expérimentale qui s'avère capable de déterminer la coefficient de proportionnalité de l'équation (3.59). Celle-ci consiste à laisser le matériau granulaire, relâché à partir d'une vanne située à l'amont, s'étaler complètement sur le plan incliné de façon à déterminer la hauteur finale après arrêt (h_{stop}). On constate alors empiriquement que cette hauteur peut être utilisée de façon à prédire le débit en régime quasi-permanent uniforme selon la formule suivante :

$$q = \alpha \sqrt{g} \frac{h^{5/2}}{h_{stop}(i)} \quad (3.60)$$

où α est une constante indépendante de la taille des billes, de la rugosité, et de l'inclinaison du canal, et qui vaut 0,136 dans le cas de billes de verre.

Pour des écoulements sur des pentes supérieures à l'angle de frottement interne des grains ou pour de forts débits sur de faibles pentes, le débit semble varier linéairement avec la hauteur de suspension et le profil des vitesses est concave [18, 69]. Dans le cadre du modèle ci-dessus, ce résultat correspond à une loi d'évolution du terme de contrainte de (3.57) associé aux chocs de la forme $1/\alpha\dot{\gamma}$, c'est-à-dire que l'influence de l'évolution de la loi de contact avec le gradient de vitesse est primordial. Pour expliquer ces observations, Ancey [18] a suggéré que l'angle de contact (ϑ) entre deux particules (par rapport à la direction de leur vitesse relative moyenne) appartenant à deux couches adjacentes et se rencontrant diminue avec la vitesse relative des couches selon une loi du type $\vartheta \propto 1/\dot{\gamma}^c$. Cette hypothèse repose sur l'idée que plus le gradient de vitesse augmente, plus la dilatanse contribue à faire s'écarter (en moyenne) les couches de particules, ou bien chaque particule a moins de temps pour retomber dans la dépression formée par deux particules voisines de la couche inférieure. Or, lors d'une collision, la quantité de mouvement ($\Delta(mV)$) transmise dans la direction de l'écoulement est obtenue en projetant d'abord la quantité de mouvement relative des particules (avant impact) le long de l'axe joignant leurs centres, puis en projetant le résultat obtenu sur la direction d'écoulement, ce qui donne $\Delta(mV) \propto b\dot{\gamma}(\sin \vartheta)^2$. Si ϑ est petit, on obtient alors (en prenant $c = 3/2$) un terme de contrainte proportionnel à $1/\dot{\gamma}$. (Notons qu'Ancey [70] a aussi suggéré que la composante de contrainte liée aux frottements peut dépendre de la vitesse de cisaillement, ce que nous n'avons pas pris en compte ici). Le modèle de Johnson [66] est similaire dans l'esprit à celui exposé ci-dessus, si ce n'est que le paramètre microstructural n'est plus l'angle de contact mais la température granulaire (T_g).

Annexe 3.1

Écoulement uniforme sur un plan incliné

On considère l'écoulement laminaire uniforme (hauteur h de matériau constante) à surface libre d'un fluide dans la direction Ox (direction de plus grande pente) sur un plan incliné de pente i . Le plan est infiniment large ou, ce qui est équivalent, les effets des parois latérales (qui confinent le fluide) sont négligeables. Du fait de la symétrie du problème, la composante transversale (parallèle au plan et perpendiculaire à Ox) est nulle. La longueur de l'écoulement (L) est grande devant son épaisseur (h) et les variations de cette épaisseur en fonction de x sont faibles. Nous sommes donc dans des conditions pour lesquelles l'approximation des longues ondes (ou lubrification) est valable. Dans ce cas la composante de la vitesse selon la perpendiculaire au plan (Oy , orienté positivement vers le haut) est négligeable et les termes du premier ordre au sein des équations du mouvement sont les variations de la vitesse (u) (selon Ox) et de la pression le long de l'axe Oy . Les équations du mouvement (1.19) se ramènent donc à :

$$0 = \rho g \sin i + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3.61)$$

$$0 = -\rho g \cos i - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.62)$$

La résolution de ces équations donne donc :

$$\tau = \rho g \sin i (h - y) \quad (3.63)$$

$$p = \rho g \cos i (h - y) + p_a \quad (3.64)$$

où $\tau = \tau_{xy}$ et p_a est la pression atmosphérique. On déduit aisément de (3.63) l'expression de la contrainte à la paroi (τ_p) :

$$\tau_p = \rho g (\sin i) h \quad (3.65)$$

Cette analyse est valable quelle que soit la loi de comportement du fluide.

Références

- [1] Smart, J.R. and Leighton, D.T. 1993. Measurement of the hydrodynamic surface roughness of non colloidal spheres. *Phys. Fluids A*, 1, 52-60.
- [2] Tabor, D. 1981. Friction - The present understanding. *J. Lubrication*, 103, 169-179.
- [3] Bushan, B. 1996. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: single asperity contact. *Appl. Mech. Rev.*, 49, 275-298.
- [4] Bushan, B., Israelachvili, J.N. and Landman, U. 1995. Nanotribology: friction, wear and lubrication at the atomic scale. *Nature*, 374, 607-616.
- [5] Georges, J.-M. 1997. Some surface science aspects of tribology. in *Proc. New directions in tribology*, London, I.M. Hutchings (Ed.), 67-82.
- [6] Oden, J.T. and Martins, J.A.C. 1985. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 52, 527-634.
- [7] Heslot, F., Baumberger, T., Perrin, B., Caroli, B. and Caroli, C. 1994. Creep, stick-slip and dry friction dynamics: Experiments and a heuristic model. *Phys. Rev. E*, 49, 4973-4988.
- [8] Johnson, K.L. 1985. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [9] Ancey, C., Evesque, P. and Coussot, P. 1996. Motion of a single bead on a bead row: theoretical investigations. *J. Phys. I*, 6, 725-751.
- [10] Maw, N., Barber, J.R. and Fawcett, J. N. 1976. The oblique impact of elastic spheres. *Wear*, 1, 101-114.
- [11] Lim, C.T. and Stronge, W.J. 1994. Frictional torque and compliance in collinear elastic collisions. *Int. J. Mech.Sci.*, 36, 911-930.
- [12] Wang, U. and Mason, M.T. 1992. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. *J. Appl. Mech.*, 59, 635-642.
- [13] Jaeger, J. 1994. Analytical solutions of contact impact problems. *Appl. Mech. Rev.*, 47, 35-54.
- [14] Hogue, C. and Newland, D. 1994. Efficient computer simulation of moving granular particles. *Powder Technol.*, 78, 51-66.
- [15] Maw, N., Barber, J. R. and Fawcett, J.N. 1981. The role of elastic tangential compliance in oblique impact. *J. Lubrication Technol.*, 103, 74-80.
- [16] Lian, G., Adams, M.J. and Thornton, C. 1996. Elastohydrodynamic collisions of solid spheres. *J. Fluid Mech.*, 311, 141-152.
- [17] Davis, R.H., Serayssol, J.-M. and Hinch, E.J. 1986. The elastohydrodynamic collision of two spheres. *J. Fluid Mech.*, 209, 479-497.
- [18] Ancey, C. 1997. Rhéologie des écoulements granulaires en cisaillement simple, application aux laves torrentielles granulaires. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris.
- [19] Duran, J., 1997. *Sables, poudres et grains*. Paris, Eyrolles Sciences.
- [20] Lun, C.K.K. and Bent, A.A. 1994. Numerical simulation of inelastic frictional spheres in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 258, 335-353.
- [21] Onoda, G.Y. and Liniger, E. 1990. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Phys. Rev. Lett.*, 64, 2727-2730.
- [22] Cheng, D.C.H. 1994. Measurements on the effect of normal pressure on shear stress in the shearing of dense suspensions. in *Progress & Trend in Rheology*, C. Gallegos (Ed.), Berlin, Springer Verlag.
- [23] Coussot, P. 1997. *Mudflow rheology and dynamics*. Rotterdam, Balkema.

- [24] Kytömaa, H.K. and Prasad, D. 1993. Transition from quasi-static to rate dependent shearing of concentrated suspensions. in *Powders & Grains*, Rotterdam, Balkema.
- [25] Meakin, P. 1993. Application of experimental and numerical models to the physics of multiparticle systems. *Adv. Phys.*, 42, 1-127.
- [26] Gondret, P. and Petit, L. 1997. Dynamic viscosity of macroscopic suspensions of bimodal sized solid spheres. *J. Rheol.*, 41, 1261-1274.
- [27] Bideau, D. and Hansen, A. (Eds.) 1993. *Disorder and granular media*, Amsterdam.
- [28] Utracki, L.A. 1988. The rheology of two-phase flows, in *Rheometrical measurement*, A.A. Collyer, and D.W. Clegg (Ed.), Amsterdam, Elsevier Applied Science, Chapter 15, 479-594
- [29] AFNOR. 1992. Détermination des masses volumiques minimale et maximale des sols non cohérents. Norme Française P94-059.
- [30] Dantu, P. 1957. Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. Foundations Eng., Londres, 133-144.
- [31] Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. 1979. Numerical experiments on localization in frictional materials. *Géotechnique*, 29, 47-65.
- [32] Radjai, F. 1996. *Dynamique des rotations et frottement collectif dans les système granulaires*. Thèse de doctorat, Paris, ESPCI.
- [33] Vardoulakis, I. et Sulem, J. 1995. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Glasgow, Blackie Academic & Professional.
- [34] Reynolds, O. 1885. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Philos. Mag.*, 20, 469-481.
- [35] Batchelor, G.K. 1970. The stress suspension in a suspension of free-forces particles. *J. Fluid Mech.*, 41, 545-570.
- [36] Terzaghi, K. 1943. *Theoretical soil mechanics*. New York, Wiley.
- [37] Wu, W.L., Maloy, K.J., Hansen, A., Ammi, M. and Bideau, D. 1993. Why hourglass tick? *Phys. Rev. Lett.*, 71, 1363-1366.
- [38] Brown, R.L. et Richards, J.C. 1966. *Principles of Powder Mechanics*. Oxford, Pergamon Press.
- [39] Cantelaube, F. et Bideau, D. 1995. Radial segregation in a 2D drum, An experimental analysis. *Europhys. Lett.*, 30, 133-138.
- [40] Duran, J., Mazzi, T., Clément, E. and Rajchenbach, J. 1994. Size segregation in a two-dimensional sand-pile: Convection and arching effects. *Phys. Rev. E*, 50, 5138-5141.
- [41] Bridgwater, J. 1994. Mixing and segregation mechanisms in particle flow, in *Granular Matter, an interdisciplinary approach*, A. Mehta (Ed.), Berlin, Springer Verlag.
- [42] Savage, S.B. and Lun, C.K.K. 1988. Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. *J. Fluid Mech.*, 189, 311-335.
- [43] Krishnan, G.P., Beimfohr, S. and Leighton, D.T. 1996. Shear-induced radial segregations in bidisperse suspensions. *J. Fluid Mech.*, 321, 371-393.
- [44] Ancey, C. et Coussot, P. 1998. Transition frictionnelle/visqueuse pour une suspension granulaire. *C.R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).
- [45] Batchelor, G.K. 1989. A brief guide to two-phase flow. in *Theoretical and Applied Mechanics*, P. Germain, J.-M. Piau and D. Caillerie (Ed.), Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 27-41.

- [46] Savage, S.B. 1984. The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech.*, 24, 289-366.
- [47] Mandl, G. and Fernandez-Luque, R. 1970. Fully developed plastic shear flow of granular materials. *Géotechnique*, 20, 277-307.
- [48] Schofield, M.A. and Wroth, C.P. 1968. *Critical State of Soil Mechanics*. London, McGraw-Hill.
- [49] Desrues, J. 1991. An introduction to strain localisation in granular materials, in *Physics of Granular Media*, D. Bideau and J. Dodds (Ed.), New York, Nova Science Publishers, 127-142.
- [50] Mokni, M. 1992. *Relations entre déformations en masse et déformations localisées dans les matériaux granulaires*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [51] François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. 1993. *Comportement mécanique des matériaux*. Paris, Hermès.
- [52] Spencer, A.J.M. 1981. Deformation of ideal granular materials, in *Mechanics of Solids*, H.G. Hopkins and J.J. Sewell (Ed.), Oxford, Pergamon, 607-651.
- [53] Bagnold, R.A. 1954. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proc. R. Soc. London, A* 225, 49-63.
- [54] Jenkins, J.T. and Savage, S. B. 1983. A theory for the rapid flow identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 130, 187-202.
- [55] Campbell, C.S. 1990. Rapid granular flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22, 57-92.
- [56] Lun, C.K.K. 1991. Kinetic theory for granular flow of dense, slightly inelastic, rough spheres. *J. Fluid Mech.*, 233, 539-559.
- [57] Babic, M., Shen, H.H. and Shen, H.T. 1990. The stress tensor in granular shear flows of uniform, deformable disks at high solids concentration. *J. Fluid Mech.*, 219, 81-118.
- [58] Drake, T. G. 1990. Structural features in granular flows. *J. Geophys. Res.*, 95, 8691-8696.
- [59] Azanza, E. 1998. *Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné*. Thèse de l'ENPC, Champs sur Marne. (Études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, LCPC)
- [60] Leighton, D. and Acrivos, A. 1986. Viscous resuspension. *Chem. Eng. Sci.*, 41, 1377-1384.
- [61] Leighton, D. and Acrivos, A. 1987. The shear-induced migration of particles in a concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, 181, 415-439.
- [62] Leighton, D. and Acrivos, A. 1987. Measurement of the shear-induced self-diffusion coefficient in concentrated suspensions of spheres. *J. Fluid Mech.*, 177, 109-131.
- [63] Schaflinger, U., Acrivos, A. and Zhang, K. 1990. Viscous resuspension of a sediment within a laminar and stratified flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 16, 567-578.
- [64] Kapoor, B., and Acrivos, A. 1995. Sedimentation and sediment flow in settling tanks with inclined walls. *J. Fluid Mech.*, 290, 39-66.
- [65] Ancey, C., Coussot, P. and Évesque, P. 1996. Examination of the possibility of a fluid-mechanics treatment for dense granular flows. *Mech. Cohes.-Frict. Mat.*, 1, 385-403.
- [66] Johnson, P.C. and Jackson, R. 1990. Frictional-collisional equations of motion particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.*, 210, 501-535.
- [67] Campbell, C.S. 1993. Boundary interaction for two-dimensional granular flows. Part 1. Flat boundaries, asymmetric stresses and couple stresses. *J. Fluid Mech.*, 247, 111-136.

- [68] Pouliquen, O. 1997. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. Soumis à *Phys. Fluids*.
- [69] Savage, S. B. 1979. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.*, 92, 53-96.
- [70] Ancey, C., Coussot, P. et Evesque, P. 1998. A theory for very concentrated granular mixtures in a steady simple shear flow. Part I. Soumis à *J. Rheol.*

Rhéométrie

4.1 Introduction

La forme tensorielle de la loi de comportement ne peut pas être facilement déduite à partir d'expériences. Il est nécessaire de se rapporter à des écoulements simples (viscosimétriques) pour lesquels l'expression de la loi de comportement se réduit à quelques relations scalaires (contrainte tangentielle et différences de contraintes normales en fonction du gradient de vitesse) (cf. chap.1). L'objet de la rhéométrie est de déterminer expérimentalement ces relations. Il faut pour cela effectuer des mesures au sein d'écoulements suffisamment proches des écoulements recherchés en théorie. Dans la suite, on fera souvent référence à la géométrie idéale d'un plan solide animé d'un mouvement parallèle à un autre plan à une vitesse relative V (cf. Fig. 1.2) (cf. § 1.4.4). On comprendra aisément que cette géométrie ne peut être utilisée en pratique que pour des expériences d'une durée très faible devant L/V où L est la longueur des plans. Dans le cas contraire, une fraction significative du matériau ne se trouve plus enserrée entre les plans au cours de l'expérience. En revanche, cette géométrie constitue une référence utile d'un point de vue théorique pour les raisons suivantes : lorsque les plans solides ont les mêmes dimensions, en l'absence d'effets de bord, la contrainte tangentielle appliquée selon tout plan fictif parallèle à l'une des deux surfaces solides est uniforme. En l'absence d'effets perturbateurs, pour une suspension ordinaire, c'est-à-dire possédant une loi de comportement fonction de l'état local seulement, le gradient de vitesse est alors constant dans l'intervalle et égal à V/H . La rhéométrie a pour objectif de se rapprocher de cette situation ou de contrôler au mieux le cisaillement. Les géométries (ou outils) de mesure, c'est-à-dire les surfaces solides sollicitant le matériau, qui conduisent à un tel résultat sont relativement rares et aucune n'y parvient totalement. Les principales géométries peuvent être classées en deux catégories : les géométries rotatives (cylindres coaxiaux, cône-plan, plan-plan (ou plans parallèles)) et les conduites (capillaire, canal à surface libre).

De nombreuses autres techniques plus ou moins empiriques sont utilisées en pratique. On prend alors une mesure simple (vitesse moyenne à travers un entonnoir, hauteur d'affaissement d'un paquet de matériau sous l'action de la pesanteur, profondeur d'enfoncement d'une pointe sous l'action d'une force donnée, etc.) de laquelle on déduit une caractéristique spécifique du comportement du matériau (seuil de contrainte, viscosité, maniabilité, etc.). Dans ce cas, les caractéristiques de l'écoulement du matériau au sein de la géométrie ne sont pas maîtrisées et la détermination directe d'un paramètre présuppose un type de comportement particulier (fluide à seuil, newtonien, etc.). Compte tenu de la diversité des techniques de ce type et de leur caractère souvent peu rigoureux, nous n'en parlerons pas dans cet ouvrage. Ces techniques peuvent s'avérer très utiles et tout à fait pertinentes en pratique mais il est recommandé de conserver un esprit critique vis-à-vis de l'interprétation des résultats en termes de comportement.

Une géométrie rotative est constituée de deux surfaces solides coaxiales et animées d'une vitesse de rotation différente autour de leur axe. Le fluide situé entre les deux surfaces solides est alors cisailé par le mouvement relatif de ces surfaces. On mesure la vitesse de rotation relative et le couple à appliquer sur l'axe pour engendrer le mouvement. Dans le cas d'une géométrie de type conduite, le fluide s'écoule à travers la conduite sous l'action d'une différence de pression (ce peut être simplement celle résultant de la gravité). On mesure alors la différence de pression et le débit de fluide à travers la conduite ou éventuellement la vitesse de surface pour l'écoulement dans un canal à surface libre.

Un rhéomètre est principalement constitué de la géométrie de mesure, d'un bloc moteurs-réducteurs dans le cas d'une géométrie rotative ou d'un bloc de mise en pression dans le cas d'une conduite, des capteurs (couple, vitesse, pression, débit) en général invisibles pour l'expérimentateur dans les rhéomètres du commerce (il s'agit d'une partie très importante de l'appareil), d'un système électronique d'acquisition des données, et maintenant le plus souvent d'un ordinateur permettant de traiter l'information ou commander le rhéomètre.

La détermination de la loi de comportement par les méthodes de calcul utilisant les mesures de débit, vitesse, pression, couple, etc., suppose qu'en pratique l'écoulement se produit bien selon les hypothèses à la base des calculs. Autrement dit, il est essentiel que le matériau étudié se comporte effectivement comme un milieu continu et homogène, et que le volume en écoulement corresponde à celui utilisé pour les calculs. Or, si l'on n'y prête attention, il est fréquent que ces hypothèses ne soient pas respectées lorsqu'on réalise des expériences de rhéométrie avec des suspensions. Ces matériaux ont en effet des caractéristiques physiques et des propriétés mécaniques qui induisent nombre d'effets perturbateurs des mesures. Compte tenu de ces remarques, il est important de se méfier lorsqu'on utilise directement les résultats en termes de loi de comportement fournis par l'ordinateur avec les rhéomètres du commerce. Celui-ci traite les mesures et effectue des calculs qui supposent un écoulement correspondant exactement à la théorie.

Lorsqu'on soupçonne des effets perturbateurs, il est préférable de travailler à partir des données brutes obtenues grâce aux capteurs et éventuellement stockées par l'ordinateur.

Dans la suite on passe d'abord en revue les différentes perturbations possibles et les solutions pratiques pour les éviter ou diminuer leurs effets (§ 4.2). Dans ce cadre, nous proposons des éléments quantitatifs qui permettent d'estimer l'effet de certains phénomènes. Notons que seules des tendances sont dégagées et une quantification plus précise peut éventuellement être entreprise par l'expérimentateur dans chaque cas particulier. Nous nous intéressons ensuite (§ 4.3) aux différentes techniques de rhéométrie en cisaillement simple en examinant leurs avantages et inconvénients vis-à-vis de l'étude des suspensions concentrées. Dans le cas de la géométrie plan incliné, on décrit en détail les écoulements permettant de déterminer le seuil de contrainte d'un fluide car cette technique est particulièrement utile vis-à-vis des écoulements naturels de suspensions concentrées. Enfin, on passe en revue (§ 4.4) les procédures les plus pertinentes pour déterminer les caractéristiques mécaniques particulières des suspensions concentrées, notamment le seuil de contrainte et la thixotropie.

Dans ce chapitre, on s'intéresse surtout à la rhéométrie des suspensions ordinaires (*cf.* chap.2). Il est bien entendu possible d'utiliser les techniques de rhéométrie habituelles avec des suspensions granulaires, mais il faut garder à l'esprit que les phénomènes qui se développent dans ce cas (bandes de cisaillement, influence de la hauteur de matériau, dilatance, etc. (*cf.* chap.3)) ne sont pas des effets perturbateurs mais des caractéristiques spécifiques de ce type de matériau. Quoiqu'il en soit, lorsque de tels phénomènes se produisent, les hypothèses à la base des calculs de rhéométrie classique ne sont plus respectées. En fait les techniques adaptées à la détermination des propriétés mécaniques des suspensions granulaires dépendent entre autres du régime d'écoulement envisagé. Par exemple, les techniques de mesure spécifiques à la mécanique des sols peuvent s'avérer très utiles pour l'étude du régime frictionnel. Un cadre général définissant les techniques appropriées à l'étude des suspensions granulaires n'a cependant pas encore été établi.

4.2 Effets perturbateurs des expériences de rhéométrie

4.2.1 Les dimensions du rhéomètre

Il est évident qu'on ne peut pas déterminer le comportement mécanique, qui se réfère à des propriétés macroscopiques d'un matériau, à l'aide d'un appareil dont les dimensions sont de l'ordre de la taille des éléments constitutifs de ce matériau, car l'hypothèse du milieu continu ne serait probablement pas respectée. On est donc tenté pour éviter tout problème de concevoir un rhéomètre de grandes dimensions mais, à précision relative égale, celui-ci est en général plus coûteux et difficile d'utilisation qu'un rhéomètre de dimensions ordinaires (expériences en laboratoire), qui permet de réaliser des mesures sur des volumes de matériau de l'ordre du cm^3 . En pratique, si on peut adapter les

dimensions de l'appareil au matériau à étudier, on cherchera à concevoir un appareil dont les dimensions sont les plus petites possibles et permettent cependant de réaliser des mesures pertinentes dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Comme nous l'avons déjà expliqué, il n'existe malheureusement pas de règle systématique à respecter pour que l'hypothèse du milieu continu soit valide (cf. § 1.2.3). Tout au plus peut-on dire que l'écart minimal entre les outils doit être supérieur à dix fois la taille des plus grosses particules en suspension. Cette condition n'est pas suffisante en général et il paraît raisonnable de conserver une « marge de sécurité » et de prendre pour base, dans la phase de conception, une distance minimale entre outils, par exemple de l'ordre de trente fois la taille des plus gros grains. Il faut en outre tenir compte de plusieurs phénomènes qui peuvent conduire à augmenter ou diminuer cette valeur.

Il est d'abord possible que, pour certains matériaux, des conditions quelconques ne permettent pas de réaliser des écoulements dans le cadre de la mécanique des milieux continus, des effets perturbateurs se produisant systématiquement lors d'expériences de rhéométrie. Ce peut être le cas de suspensions granulaires dans certaines conditions d'écoulement (cf. § 3.5).

Pour des suspensions contenant des particules de tailles diverses, il n'est pas forcément nécessaire de prendre en compte la taille des particules les plus grosses pour déterminer les dimensions du rhéomètre. En effet, la présence de quelques particules de grande taille au sein de l'écoulement peut ne perturber que légèrement les mesures, si le matériau se comporte comme un milieu continu idéal par ailleurs. Ce raisonnement est cependant valable à condition que ces grosses particules ne donnent pas lieu à d'autres effets perturbateurs (coincement, sédimentation) significatifs.

Enfin, les suspensions concentrées sont souvent des fluides ayant un seuil de contrainte qui peut induire une très forte hétérogénéité du cisaillement au sein du matériau. Notamment, avec un rhéomètre pour lequel la contrainte au sein du matériau est très hétérogène, il est possible que pour certains régimes d'écoulement, des zones soient cisailées et d'autres non. C'est le cas avec un rhéomètre capillaire ou à cylindres coaxiaux (cf. § 4.4). Il faudrait alors en toute rigueur que l'hypothèse du milieu continu soit valide pour la fraction cisailée seule alors que son épaisseur peut s'avérer bien plus faible que les dimensions caractéristiques de l'échantillon complet. On peut donc avoir conçu un rhéomètre de taille *a priori* suffisante par rapport aux dimensions des particules, en supposant que le matériau est cisailé dans toute son épaisseur, mais qui s'avère insuffisante lorsqu'une petite fraction seulement du matériau est cisailée.

Prenons l'exemple du rhéomètre à cylindres coaxiaux. L'épaisseur cisailée peut être facilement calculée à partir de la contrainte tangentielle, qui elle-même dépend du couple (4.20). On trouve donc que l'épaisseur cisailée tend vers zéro lorsque le couple tend vers une valeur critique déduite en supposant la contrainte égale au seuil de contrainte au niveau du cylindre intérieur. Par conséquent, quelles que soient les conditions

expérimentales, pour un fluide sans minimum dans la courbe d'écoulement (cf. § 4.2.3), l'épaisseur cisailée tend toujours vers zéro, légèrement au-delà du seuil d'écoulement. Avec un tel rhéomètre, les mesures correspondant à des gradients de vitesse suffisamment faibles sont donc nécessairement perturbées par la taille des particules et l'hypothèse de continuité du milieu n'est pas valide en deçà d'une certaine vitesse, quelles que soient les dimensions initiales du rhéomètre.

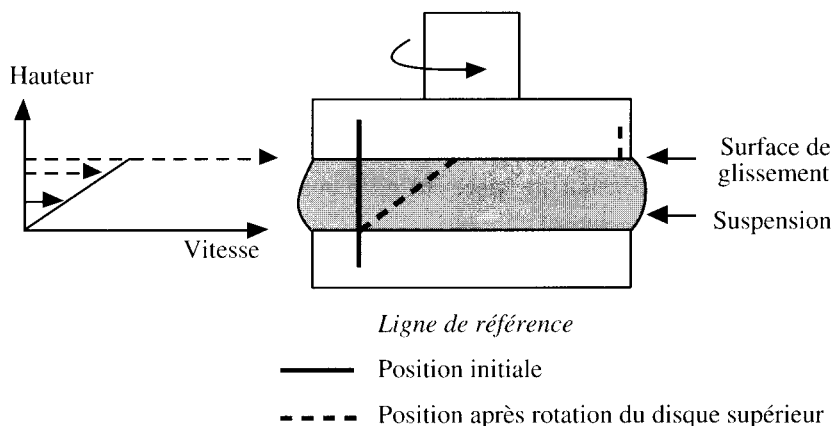


Fig. 4.1 : Conséquence d'un glissement à la paroi du disque supérieur dans un rhéomètre plan-plan : le profil des vitesses au sein du fluide, qui peut être estimé en traçant une ligne de référence à la périphérie de l'échantillon parallèlement à l'axe des disques, est discontinu ; la ligne de référence apparaît brisée au niveau du plan supérieur.

4.2.2 Le glissement aux parois

Le glissement aux parois est certainement le phénomène perturbateur le plus courant et le plus grave qui puisse survenir lors d'une expérience de rhéométrie avec une suspension. Il peut se produire avec toutes les géométries d'écoulement. On considère que l'on a glissement lorsque le profil des vitesses est en apparence discontinu près des parois (cf. Fig. 4.1). Dans le cas des suspensions, nous avons affaire à des mélanges fluide-solide et il est très probable que le glissement résulte essentiellement du cisaillement préférentiel d'une très fine couche de fluide près de la paroi. En l'absence d'autres causes telles que des effets gravitaires ou physico-chimiques qui interviennent par exemple avec des polymères [1], le glissement est essentiellement lié à la décroissance naturelle de la concentration solide près d'une paroi lisse en l'absence d'interactions particulières entre les particules et la paroi (cf. Fig. 4.2). En effet, si les centres des particules sont distribués de manière aléatoire autour des surfaces solides, il est nécessaire, pour calculer la distribution réelle des particules, d'exclure les points pour lesquels le volume de la particule centrée sur ces points recouvrirait partiellement le volume de l'outil. La

fraction de particules est donc plus faible près de la paroi solide de l'outil. Durant le mouvement de l'outil par rapport à la suspension, la fraction de suspension située près de la paroi, naturellement moins visqueuse que le reste du matériau, subit donc, à contrainte égale, un cisaillement plus intense. Ce phénomène peut même progressivement s'accroître si les quelques particules solides présentes dans cette couche migrent vers le reste du matériau.

La conséquence de ce phénomène est en général un abaissement du niveau de contrainte mesuré pour une vitesse de cisaillement donnée, c'est-à-dire que l'on observe généralement une viscosité plus faible que la viscosité réelle. Il semblerait que l'effet du glissement sur les mesures est d'autant plus significatif que la suspension initiale est visqueuse. Considérons par exemple que dans une géométrie permettant théoriquement un cisaillement homogène sur une épaisseur H , on applique le long de l'interface une contrainte τ_0 à la suspension de viscosité moyenne réelle μ . On suppose qu'un glissement se produit le long d'une surface de l'un des deux outils et, selon les hypothèses précédentes, repose sur le cisaillement d'une couche de fluide interstitiel pur de viscosité μ_0 et d'épaisseur e très petite devant H , alors que le reste de la suspension, qui correspond encore approximativement à la suspension moyenne, est cisailé plus lentement (cf. Fig. 4.3). On peut alors écrire les relations suivantes résultant de l'égalité de la contrainte τ_0 dans les différentes couches de matériau :

$$\tau_0 = \mu_0 \frac{V - V_r}{e} \approx \mu \frac{V_r}{H} \quad (4.1)$$

où V est la vitesse relative des surfaces des deux outils et V_r la vitesse relative des couches fluides de part et d'autre de l'interface entre les deux types de matériau. Le couple contrainte-gradient de vitesse observé ($\tau_0; V/H$) et pris en compte notamment si l'on ne tient pas compte du glissement, s'écrit donc aussi d'après (4.1) :

$$\left(\tau_0; \tau_0 \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{H} \right] \right) \quad (4.2)$$

On constate donc que le gradient de vitesse observé est plus grand que le gradient de vitesse correspondant à un cisaillement homogène de la suspension (τ_0/μ). L'écart relatif de gradient de vitesse s'écrit :

$$\frac{\Delta \dot{\gamma}}{\dot{\gamma}} = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{e}{H} \quad (4.3)$$

L'équation (4.2) montre en particulier que, pour une suspension rhéofluidifiante ou ayant un seuil de contrainte, le glissement à la paroi est d'autant plus significatif que la vitesse de cisaillement est faible puisqu'alors $\mu \rightarrow \infty$ lorsque $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Le glissement à la paroi peut masquer l'existence d'un seuil de contrainte. Avec un fluide à seuil, il est même possible d'obtenir un cisaillement fini pour une contrainte inférieure au seuil.

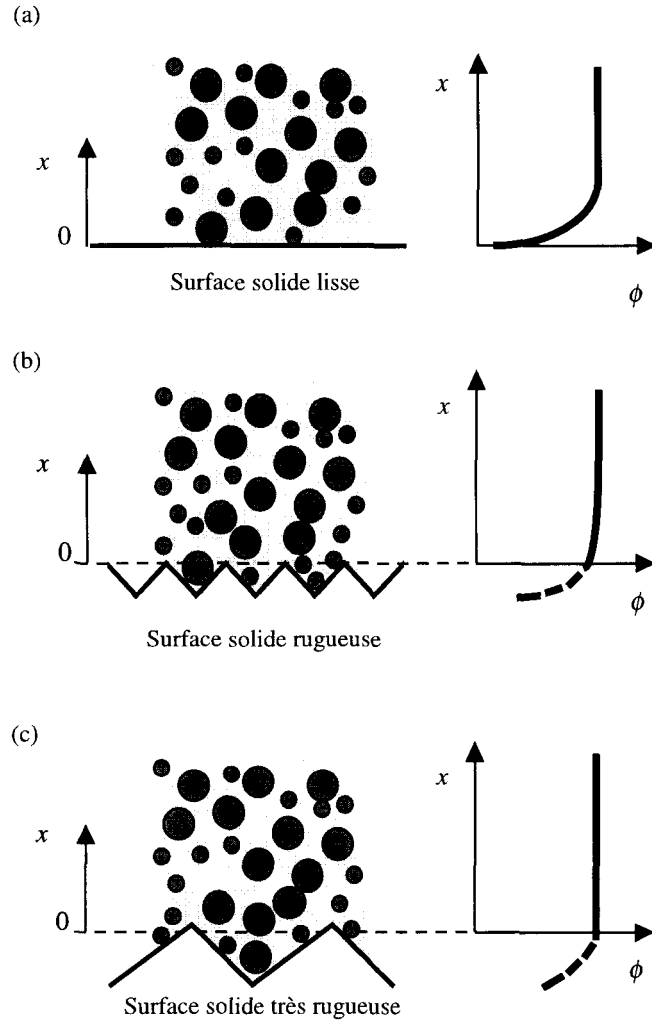


Fig. 4.2 : Profils de concentration solide en fonction de la distance au sein d'une suspension près d'une paroi solide pour différentes échelles de rugosité : (a) paroi lisse (rugosité négligeable devant la taille des particules solides) ; (b) paroi de rugosité du même ordre que la taille des particules ; (c) paroi de rugosité nettement supérieure à la taille des particules. La chute de concentration solide à l'approche de la surface limite (enveloppe des sommets de la rugosité) diminue lorsque la rugosité augmente.

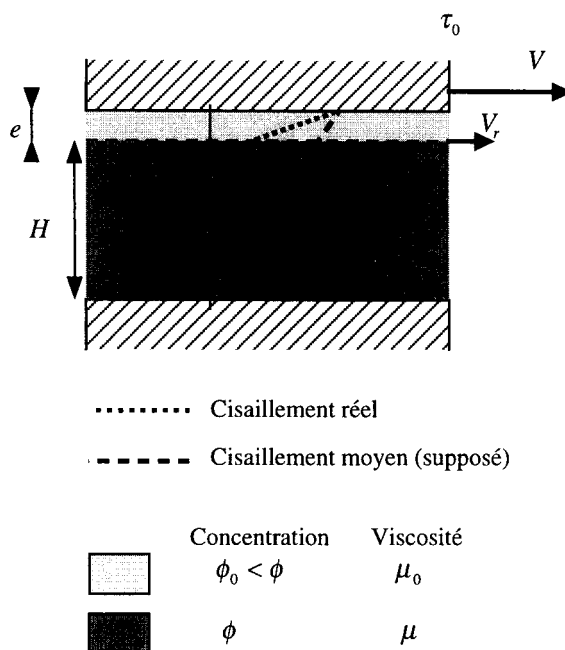


Fig. 4.3 : Aspect du cisaillement à la périphérie d'un échantillon au sein d'une géométrie plan-plan lorsque le glissement résulte d'un profil de concentration hétérogène constituée d'une fine couche de suspension peu concentrée près de la paroi supérieure et d'une couche plus épaisse et plus concentrée en dessous.

Réciproquement, si l'on considère un écoulement à vitesse imposée, on trouve que la contrainte induite, calculée en négligeant le glissement à la paroi, est inférieure à la contrainte théorique résultant du cisaillement de la suspension homogène. Le glissement conduit donc encore à sous-estimer la viscosité du matériau étudié.

Puisqu'une des causes principales du glissement est la chute de la concentration solide près de la paroi, la forme de l'interface entre l'outil et la suspension joue un rôle très important. La chute de concentration a été mise en évidence (Fig. 4.2a) pour une paroi parfaitement lisse, c'est-à-dire dont la rugosité est négligeable devant la taille des particules. En première approximation, nous définirons la rugosité comme la profondeur moyenne des creux par rapport à la surface plane joignant les sommets de la surface rugueuse étudiée. Nous appellerons cette surface plane l'interface outil-suspension car c'est elle qui doit être prise en compte dans les calculs de rhéométrie, la suspension comprise dans les creux de la surface de l'outil pouvant être considérée comme fixée sur cet outil. Évidemment, cette définition de la rugosité n'est rigoureuse que lorsque la

surface est régulière, c'est-à-dire possède des creux de profondeur identique. Si cette rugosité est très supérieure à la taille maximum des particules, en l'absence d'effets de migration induits pour d'autres raisons, la concentration solide ne varie pas sensiblement entre l'intérieur de l'échantillon et l'interface outil-suspension (cf. Fig. 4.2b). Dans ce cas, les causes physiques du glissement sont éliminées et celui-ci ne doit plus se produire. Ceci n'exclut cependant pas qu'il puisse se produire, dans certains cas, d'autres phénomènes perturbateurs près de l'interface outil-suspension dont les effets sur le profil des vitesses sont analogues : localisation du cisaillement près de l'interface. C'est le cas notamment de la fracturation (cf. § 4.2.3) lorsqu'elle se localise à cet endroit, notamment pour des raisons d'hétérogénéité de la contrainte (par exemple près du cylindre intérieur au sein de la géométrie à cylindres coaxiaux).

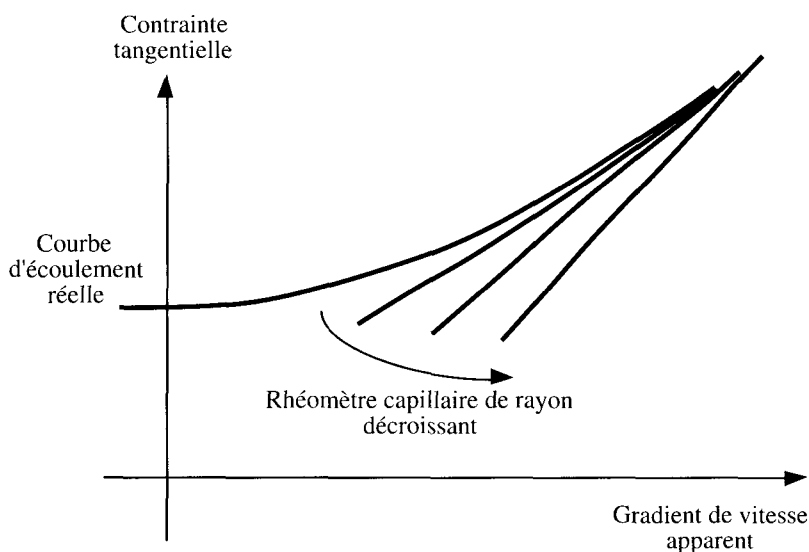


Fig. 4.4 : Variations de la courbe d'écoulement apparente en fonction de la géométrie utilisée. Des mesures effectuées avec des rhéomètres capillaires aux parois intérieures lisses de section décroissante donnent des courbes d'écoulement correspondant à des viscosités apparentes de plus en plus faibles (cf. [1, 6]).

Les considérations ci-dessus amènent à la conclusion essentielle que le glissement peut être, en général, évité en utilisant des surfaces suffisamment rugueuses, notamment d'une rugosité grande devant la taille maximale des particules. Ceci peut toutefois poser des problèmes pratiques. On ne peut pas augmenter la rugosité au point que celle-ci soit du même ordre que la distance séparant les outils de mesure car, dans ce cas, les écoulements de fluide dans des creux de cette surface rugueuse deviennent significatifs et l'écoulement principal ne peut plus être considéré comme un cisaillement simple. Par

exemple, lorsque l'écart entre les outils a été calculé au plus juste (rapport intervalle entre outils/taille des particules = 10) pour que les hypothèses de continuité du milieu soient respectées, il n'est pas possible de respecter en même temps les deux conditions ci-dessus : rugosité à la fois faible devant l'écart entre les outils et grande devant la taille des particules. Il est nécessaire alors d'utiliser une rugosité de l'ordre de la taille des particules, ce qui autorise le développement d'un glissement léger à l'approche de la paroi.

La forme de la surface rugueuse ne doit pas être négligée. On peut craindre des écoulements de fluide dans des directions privilégiées dans le cas d'une rugosité ayant la forme de renforcements parallèles, ou la formation d'arrangements particuliers des particules dans le cas de suspensions de particules de taille identique. Pour éviter ces effets, il est préférable d'utiliser une surface de rugosité aléatoire.

On peut d'abord détecter le glissement par observation directe du cisaillement le long des surfaces libres du matériau (cf. Fig. 4.1) par exemple à la périphérie de l'échantillon dans une géométrie plan-plan. Du fait qu'il s'agit d'un effet de surface, ses conséquences sur la courbe d'écoulement sont différentes selon la géométrie utilisée, et on peut donc aussi le détecter en comparant les résultats obtenus avec différentes géométries. Par exemple, si on admet que la couche peu visqueuse qui se forme près de l'interface a une épaisseur qui varie peu d'un écoulement à l'autre, l'effet d'abaissement du niveau de la courbe d'écoulement lié au glissement à la paroi est, d'après (4.3), d'autant plus grand que la distance entre les outils de mesure est petite (cf. Fig. 4.4).

Dans le cas où l'on suspecte un certain glissement à la paroi, il est aussi possible de le quantifier pour extraire les propriétés spécifiques du matériau étudié. Pour cela, on peut par exemple faire l'hypothèse que la vitesse de glissement ($V - V_r$) ne dépend que de la contrainte locale. Considérons à nouveau une géométrie d'écoulement idéale telle que la contrainte est homogène dans un plan perpendiculaire à la direction d'écoulement. Pour deux écarts entre les surfaces des outils H_1 et H_2 on peut alors écrire l'expression de la vitesse relative des outils lorsqu'on applique la même contrainte τ_0 :

$$V_j = V_r + \frac{\tau_0}{\mu(\tau_0)} H_j \quad (j = 1, 2) \quad (4.4)$$

en supposant toujours l'épaisseur du fluide dans la zone de glissement très faible devant l'épaisseur totale de la suspension. On déduit aisément de (4.4) l'expression de la viscosité réelle de la suspension en fonction des vitesses observées pour chaque géométrie :

$$\mu(\tau_0) = \frac{H_2 - H_1}{V_2 - V_1} \tau_0 \quad (4.5)$$

Une méthode plus sophistiquée (utilisant trois géométries de mesure) avait initialement été proposée par Mooney [2] dans le cas de la géométrie à cylindres coaxiaux mais Yoshimura et Prudhomme [3] ont montré qu'il était possible de simplifier cette technique de correction à l'aide de deux géométries seulement en s'appuyant sur le principe du calcul ci-dessus.

4.2.3 La fracturation

Le phénomène de fracturation est analogue à celui du glissement décrit ci-dessus dans la mesure où il s'agit toujours d'une discontinuité marquée du profil de vitesses le long d'un plan de cisaillement (*cf.* Fig. 4.5). Cependant, la surface de discontinuité n'est ici plus spécifiquement située le long d'une interface outil-suspension, sauf lorsque la distribution hétérogène des contraintes l'impose. Comme le glissement, d'un point de vue général, la fracturation conduit à sous-estimer la viscosité du matériau. Il est important de bien distinguer ce phénomène du creusement lors duquel la suspension est véritablement ouverte en deux parties sur une certaine distance (*cf.* § 4.2.4). Ici, la phase liquide occupe l'ensemble du volume considéré et les effets de bord liés à la périphérie ne sont pas prédominants dans le développement du phénomène (ils peuvent cependant influencer le positionnement de la surface de fracture). On ne peut pas non plus invoquer aussi naturellement que dans le cas du glissement la formation d'une couche moins concentrée en particules solides car la concentration est *a priori* homogène loin de la surface des outils.

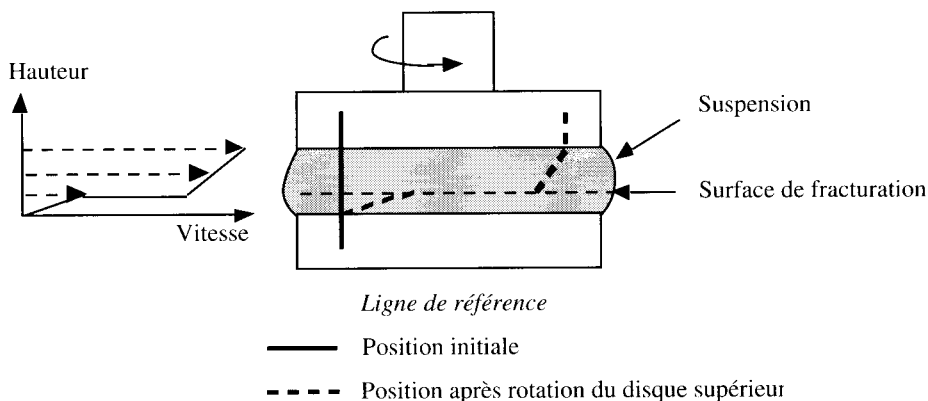


Fig. 4.5 : Conséquence d'une fracturation au sein d'un échantillon dans un rhéomètre plan-plan : le profil des vitesses au sein du fluide, qui peut être estimé en traçant une ligne de référence à la périphérie de l'échantillon parallèlement à l'axe des disques, est discontinu ; la ligne de référence apparaît brisée au niveau d'un plan situé loin des surfaces des deux disques.

Cette fracturation est loin d'être comprise et maîtrisée du fait notamment de la confusion qui subsiste avec le creusement et de la difficulté d'observations claires le long de la périphérie. Un phénomène de fracturation très net a été observé avec des suspensions concentrées eau-argile (Coussot *et al.* [4] avec de la bentonite, Pignon *et al.* [5] avec de la laponite). Dans ce cas, cette fracturation pourrait être directement liée à l'existence d'un minimum dans la courbe d'écoulement (*cf.* Fig. 4.6) (*cf.* § 2.5.6.7). À l'aide d'observations du cisaillement interne du matériau, Pignon *et al.* [5] ont ainsi pu établir une correspondance claire entre, d'une part, plusieurs régimes d'écoulements pour lesquels différentes épaisseurs de matériau étaient cisillées entre les deux outils de mesure et d'autre part les évolutions très particulières de la courbe d'écoulement.

Ce lien entre un minimum dans la courbe d'écoulement (ou plus généralement un comportement conduisant naturellement à des instabilités d'écoulement) et une éventuelle fracturation a une explication théorique simple (en s'affranchissant ici des problèmes de thixotropie). Lorsque la contrainte appliquée est supérieure au seuil de contrainte, le gradient de vitesse correspondant sur la courbe d'écoulement est unique. En l'absence d'autres phénomènes perturbateurs, le matériau est donc *a priori* cisailé dans toute son épaisseur. Lorsque la contrainte appliquée τ_0 est inférieure à τ_c et supérieure à τ_m , le matériau peut se trouver dans trois états (*cf.* Fig. 4.6) :

- au repos ($\dot{\gamma} = 0$) ;
- cisailé à un gradient de vitesse $\dot{\gamma}_0$ situé dans la partie croissante de la courbe d'écoulement ;
- cisailé à un gradient de vitesse $\dot{\gamma}_d$ situé dans la partie décroissante de la courbe d'écoulement.

On sait que dans le dernier cas l'écoulement est instable (*cf.* Annexe 4.1). Cela signifie qu'en pratique, localement, l'écoulement évolue plus ou moins rapidement vers l'un des deux états stables ci-dessus [4]. Par conséquent, il est théoriquement possible que se forme une alternance de couches cisillées à $\dot{\gamma}_0$ et de couches au repos. En pratique, les caractéristiques de cette structure en « sandwich » dépendent de l'homogénéité du matériau et de l'histoire de l'écoulement. Ainsi, lorsque partant du repos on applique une contrainte croissante, l'ensemble du matériau tend à rester au repos tant que l'on n'a pas dépassé la contrainte seuil. Si, partant maintenant du cisaillement homogène dans l'ensemble du volume, obtenu à une vitesse supérieure à $\dot{\gamma}_c$, on diminue progressivement la vitesse relative des outils de mesure, pour un certain niveau de vitesse on obtiendra un cisaillement homogène $\dot{\gamma}_0$. (Un phénomène identique se produit si on abaisse progressivement la contrainte au-dessous du seuil de contrainte, mais l'écoulement s'arrête brutalement lorsque la contrainte est plus faible que τ_m .) Si l'on poursuit l'abaissement de la vitesse relative des outils (V), on atteint alors des valeurs en deçà de la valeur minimum ($\dot{\gamma}_m H$) permettant d'obtenir un gradient de vitesse homogène

($\dot{\gamma}_m$) (cf. Fig. 4.6). L'écoulement est alors instable et le matériau peut s'écouler sous la forme d'une alternance de couches cisillées et non cisillées. Une infinité de distributions des épaisseurs de ces couches dans l'intervalle séparant les outils est possible en théorie tant que l'épaisseur totale des n couches cisillées vérifie (pour une contrainte imposée τ_0) :

$$\sum_{i=1}^n e_i = \frac{V}{\dot{\gamma}_0} \quad (4.6)$$

où e_i est l'épaisseur de la $i^{\text{ème}}$ couche. En pratique, la périphérie de l'échantillon n'est jamais parfaitement droite et on observe expérimentalement que les couches correspondant à la surface de cisaillement la plus faible (la contrainte est donc maximale dans ces couches) sont préférentiellement cisillées, le reste du matériau restant au repos.

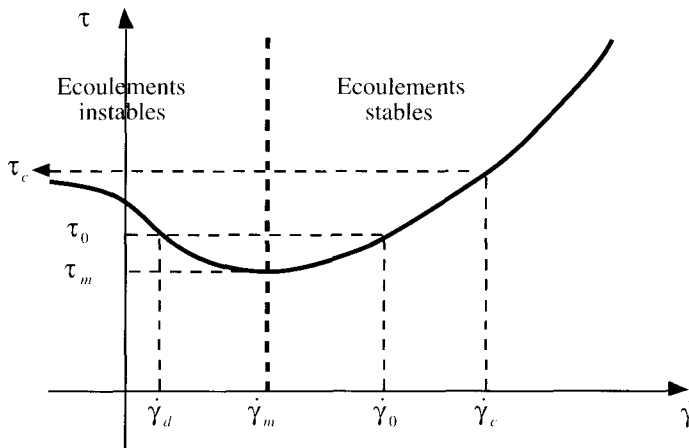


Fig. 4.6 : Courbe d'écoulement d'un fluide à minimum. Dans la partie croissante de la courbe, les mesures de rhéométrie classiques sont possibles. Dans la partie décroissante, on dispose surtout facilement de la valeur du seuil de contrainte au moyen de la technique classique de montée progressive en contraintes. En revanche, la forme de la courbe dans la partie décroissante pour ces fluides à minimum est hypothétique car les écoulements correspondants sont instables.

Ces considérations montrent au passage à quel point une ambiguïté subsiste concernant l'existence d'un minimum dans la courbe d'écoulement puisqu'un tel comportement, c'est-à-dire une fraction de la courbe d'écoulement décroissante, ne peut jamais être mis en correspondance directe avec des mesures classiques de rhéométrie, c'est-à-dire impliquant un cisaillement global de l'échantillon.

4.2.4 Le creusement

Avec les géométries cône-plan et plan-plan, il est préférable de débiter une expérience de rhéométrie avec le volume (limité par le cylindre de rayon égal à celui du disque ou du cône le plus petit) théorique utilisé dans les calculs. Ceci est possible en nettoyant la périphérie, par exemple à l'aide d'une spatule juste après la mise en place du matériau. Dans certaines conditions, cependant, la périphérie de l'échantillon initialement droite se déforme vers l'intérieur du matériau au cours de l'écoulement (*cf.* Fig. 4.7). Comme nous l'avons déjà indiqué, il convient de bien distinguer ce phénomène, que nous appellerons creusement, de la fracturation qui est liée à une discontinuité du profil des vitesses interne de l'échantillon. Du point de vue de son influence sur les mesures, le creusement intervient souvent au second plan par rapport à un glissement ou à une fracturation éventuels. Cependant, un creusement important peut dans certains cas engendrer des erreurs de l'ordre de 100 % sur les valeurs de la contrainte mesurée pour un gradient de vitesse donné.

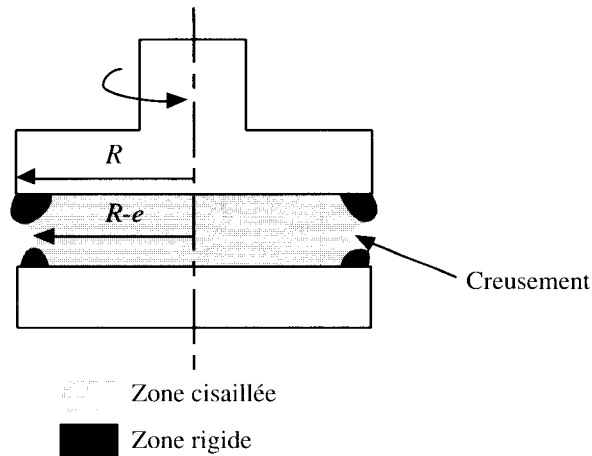


Fig. 4.7 : Aspect extérieur (vue de la périphérie) du creusement qui peut se former lors d'une expérience de rhéométrie dans une géométrie cône-plan ou plan-plan. Les lèvres de la zone incurvée vers l'intérieur de l'échantillon ne sont pas cisailées. On peut en première approximation considérer que le volume de fluide cisailé est exactement compris dans le cylindre de rayon $R - e$.

On appellera e la profondeur du creux formé par rapport à la surface théorique ou initiale. Des observations détaillées de l'intérieur et de l'extérieur de l'échantillon [6] sur des mélanges eau-argiles ont montré que, dans le cas d'un creusement modéré (e de l'ordre de $R/10$), la suspension n'est pas cisailée dans les deux bourrelets de suspension au contact des outils et situés au-dessus et en dessous du creux (*cf.* Fig. 4.7), alors que le reste du matériau semble à peu près correctement cisailé. Ainsi, le

volume réellement cisailé est différent de celui utilisé *a priori* pour les calculs de rhéométrie. En première approximation, on peut donc admettre que l'écoulement se produit exactement selon les hypothèses utilisées pour le volume complet, dans un volume réduit obtenu en enlevant uniformément une épaisseur de fluide e à la périphérie du volume théorique [6-7]. En fait, il est probable que des écoulements secondaires se produisent du fait de la présence de volumes de suspension rigides près de la périphérie. Cependant, cette approximation permet certainement un premier affinage de la qualité des résultats de mesures. La correction à laquelle il faut procéder dans ce cadre dépend de chaque géométrie. Par exemple, pour une géométrie cône-plan, la contrainte ($\tau_{réel}$) s'appliquant réellement sur le matériau est

$$\tau_{réel} = \frac{3C}{2\pi(R-e)^3} = \left(\frac{R}{R-e}\right)^3 \tau_{app.} \approx \left(1 + \frac{3e}{R}\right) \tau_{app.} \quad (4.7)$$

où $\tau_{app.}$ est la contrainte déduite directement des mesures en supposant que le volume de matériau théorique est cisailé. Le creusement conduit donc à sous-estimer la viscosité du matériau étudié. On constate qu'un creusement modéré non pris en compte ($e = R/10$) induit une erreur de 37 % sur la valeur de la contrainte tangentielle.

Le phénomène de creusement peut facilement être pris en compte, par le biais de la correction proposée ci-dessus, certes de manière approximative, à partir du moment où le creusement est constant. Or, on observe en pratique, notamment à partir du profil des vitesses de la périphérie et des évolutions (indépendantes de la thixotropie) de la contrainte au cours du temps, que les caractéristiques du creusement (notamment l'épaisseur des bourrelets rigides) varient en fonction de la vitesse et de la durée de l'expérience (cf. § 4.4). Une approche rigoureuse nécessiterait de modifier la correction en fonction de ces deux variables. Compte tenu du manque d'informations concernant la forme exacte de l'écoulement au sein du rhéomètre et donc en particulier du caractère approximatif de la correction ci-dessus, il paraît difficile d'établir ces corrections sur des bases théoriques pertinentes. Il semble seulement possible de chercher expérimentalement à minimiser les différences de caractéristiques du creusement d'une mesure à une autre (cf. § 4.4.1). Il est enfin probable que le creusement s'accompagne à plus ou moins long terme d'une migration des particules puisque des volumes de fluide statiques côtoient des volumes cisailés. Cet effet n'a pas encore été étudié.

Ces considérations sont surtout valables lorsqu'on a affaire à un creusement qui, quoique variable, reste modéré. Dans le cas de certaines graisses ou pâtes, on observe un creusement qui, au-delà d'une déformation critique, s'accroît rapidement pour finir par séparer l'échantillon en deux parties bien distinctes. Les mesures, et notamment la détermination de la courbe d'écoulement, sont alors extrêmement délicates. On enregistre notamment des chutes très rapides et pratiquement complètes des niveaux de contraintes à vitesse imposée. Dans ce cas, on peut juste espérer obtenir des valeurs approximatives des couples (contrainte, gradient de vitesse) en régime quasi-permanent. Ceci est possible si on fait l'hypothèse que le creusement augmente de manière catastrophique

approximativement au-delà d'une déformation critique à peu près constante. Dans ces conditions, le niveau maximum de contrainte atteint, après l'imposition d'un niveau de vitesse correspond, à peu près à la même déformation et peut être associé à la résistance du fluide au cisaillement imposé en régime permanent avec un creusement minime. La courbe des pics de contrainte (après correction liée au creusement) en fonction de la vitesse imposée donne l'allure de la courbe d'écoulement du fluide.

4.2.5 L'évaporation

L'évaporation intervient naturellement avec des suspensions dont le fluide interstitiel est un liquide lors d'expériences de rhéométrie mettant en jeu une surface libre. Deux effets s'opposent alors si on ne prend pas en compte cette évaporation dans les calculs :

- le volume total du matériau cisailé diminue, ce qui induit une diminution de la viscosité mesurée ;
- la viscosité du matériau restant augmente car la concentration en particules solides augmente.

Si l'on traduit l'évaporation en termes d'une diminution du rayon de l'échantillon d'une valeur $e \ll R$ dans une expérience de rhéométrie plan-plan, on obtient aisément la concentration solide après évaporation (ϕ') en fonction de la concentration initiale (ϕ) :

$$\phi' = \frac{\phi}{(1 - e/R)^2} \approx \phi \left(1 + \frac{2e}{R} \right) \quad (4.8)$$

Pour établir (4.8), on a supposé que l'évaporation induit une variation homogène de la concentration solide au sein de l'échantillon. À vitesse de rotation Ω donnée on en déduit, en utilisant l'expression approximative (4.13), que le couple total appliqué s'écrit au premier ordre :

$$C^* = C \left[1 + \frac{2e}{R} \left(\frac{\phi}{\mu} \frac{d\mu}{d\phi} - 2 \right) \right] \quad (4.9)$$

où $\dot{\gamma}_R = \Omega R/H$ est le gradient de vitesse à la périphérie et C le couple total appliqué avant évaporation. D'après ce calcul approximatif qui ne tient pas compte de l'hétérogénéité du gradient de vitesse, on constate que si la viscosité augmente rapidement avec la concentration (en loi de puissance ou exponentiellement par exemple) on surestime donc la viscosité du matériau initial en ne prenant pas en compte l'évaporation. C'est le cas, en général, des suspensions concentrées pour lesquelles la viscosité apparente croît au moins aussi rapidement que la viscosité donnée par l'expression (2.13).

L'évaporation est d'autant plus importante que le rapport des surfaces libres et du volume de matériau est grand. Des techniques permettent d'éviter ce phénomène perturbateur : soit on réalise l'expérience en atmosphère saturée par le fluide interstitiel sous forme gazeuse, soit on place un film liquide le long des surfaces libres, étant entendu que ce liquide est très peu visqueux et ne peut pas se mélanger avec le fluide interstitiel [8, 9].

4.2.6 La migration

Il faut distinguer la migration des particules liée à l'action de la pesanteur sur des particules de densité différente de celle du fluide interstitiel, de la migration résultant de l'effet de l'hétérogénéité du cisaillement dans la suspension ou de l'inertie sur des particules. Nous conserverons le terme de migration pour ce second phénomène uniquement, le premier phénomène correspondant évidemment à la sédimentation ou sédimentation inverse selon que le fluide est plus ou moins dense que les particules. La migration telle que nous l'entendons ici peut être assimilée à la ségrégation puisqu'il s'agit toujours du déplacement relatif de certaines particules par rapport au reste du mélange.

4.2.6.1 Sédimentation

On aborde dans d'autres chapitres la quantification de la sédimentation au cours de l'écoulement de différents types de suspensions : grains à travers un fluide newtonien (§ 5.2.4) (voir aussi [10]), grains à travers un fluide à seuil (§ 7.5.2). Nous nous contenterons ici de déterminer l'effet des phénomènes de sédimentation et la manière dont on peut les éviter lors d'expériences de rhéométrie.

La sédimentation peut se produire lors de toute expérience de rhéométrie réalisée en présence de la gravité, ce qui est le cas le plus fréquent. Elle conduit à une accumulation des particules dans la partie la plus basse (ou la plus haute dans le cas de la sédimentation inverse) de la géométrie d'écoulement. La suspension cisailée est alors hétérogène, de manière simplifiée elle comprend des couches moins visqueuses que le matériau initial et des couches plus visqueuses correspondant à la zone d'accumulation des particules. En pratique, la vitesse de chute dépend de la taille de la particule, ce qui signifie que la sédimentation peut en outre induire une ségrégation.

De façon à quantifier ce phénomène, nous nous intéresserons à la géométrie à cylindres coaxiaux et nous supposons que seule une catégorie de particules, dont la concentration moyenne est ϕ_0 , sédimente. Pour simplifier, on admettra que tout se passe comme si, après un certain temps, la sédimentation avait induit une variation de la concentration de manière homogène dans deux volumes situés respectivement au-dessous et au-dessus du plan de hauteur $H - e$ par rapport au fond. Près de la surface

libre (au-dessus de ce plan limite), on trouve ainsi une suspension dont la concentration en particules est $\phi_+ = \phi_0 - \phi$ et, près du fond, la concentration en particules est $\phi_- = \phi_0 + (\phi e / (H - e))$. Dans ces conditions, le couple total appliqué par le cylindre intérieur à la suspension lorsque la vitesse est imposée, en supposant que le gradient de vitesse soit uniforme dans l'intervalle (cf. éq. 4.19), s'écrit :

$$C^* = 2\pi R_1^2 \gamma [\mu(\phi_+)e + \mu(\phi_-)(H - e)] \quad (4.10)$$

Au premier ordre, on a donc :

$$C^* = C \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\mu} \frac{e}{H - e} \frac{d^2 \mu}{d\phi^2} \right) \quad (4.11)$$

où C est le couple appliqué en l'absence de sédimentation. Compte tenu des variations de la viscosité (cf. chap.2) des suspensions en fonction de la concentration solide, une sédimentation non prise en compte conduit à surestimer la viscosité réelle. En outre, cet effet est d'autant plus important que les particules sont accumulées près du fond (puisque alors $H - e$ tend vers zéro).

Divers appareillages ont été proposés pour maintenir la suspension homogène pendant l'écoulement. Ils consistent à imposer une recirculation au matériau (écoulement secondaire) de façon à réinjecter constamment la fraction solide perdue [11]. En vue d'améliorer ce système, il a aussi été proposé de réaliser les mesures uniquement sur la fraction de suspension qui reste à peu près homogène durant l'expérience [12].

4.2.6.2 Migration

Dans un rhéomètre, les phénomènes de migration possibles au sein de suspensions en-dehors de la sédimentation ont deux causes principales : l'inertie et l'hétérogénéité du gradient de vitesse. De manière générale, ces phénomènes sont assez mal connus. Les premiers résultats expérimentaux sur la migration en rhéomètre concernaient surtout des suspensions de particules non colloïdales au sein d'un liquide simple s'écoulant dans un capillaire [13]. Dans ce cas, on sait qu'une particule de même masse volumique que le fluide a tendance à migrer sous l'effet de l'inertie vers une position d'équilibre située à une distance de l'ordre de la moitié du rayon du tube par rapport à l'axe central. Lorsque le fluide interstitiel et la particule n'ont pas la même masse volumique, un effet de migration s'ajoute à la sédimentation attendue. La particule migre vers les parois si elle est plus légère que le fluide qui monte (ou si elle est plus dense que le fluide qui descend). À l'inverse, elle migre vers l'axe central si elle est plus lourde que le fluide qui monte (ou plus légère que le fluide qui descend).

Des phénomènes de migration peuvent aisément être observés au sein de suspensions concentrées en l'absence d'effets d'inertie du fait des interactions hydrodynamiques entre particules. Il s'agit donc de la cause la plus probable de

migration lors d'expériences de rhéométrie. Dans un champ de déformation homogène, deux particules situées dans des couches de fluide en mouvement relatif parallèle et qui passent à proximité l'une de l'autre tendent à se repousser mais reviennent dans leur couche initiale lorsqu'elles s'éloignent à nouveau l'une de l'autre. L'interaction entre les particules est donc réversible et ne doit pas conduire à une migration. Ce n'est plus le cas lorsque les particules entrent en contact direct au cours de leur mouvement relatif mais cette situation ne peut se produire que pour des écoulements suffisamment lents de suspensions très concentrées (*cf.* chap.3). Une migration des particules peut en revanche intervenir si l'intensité ou le nombre des interactions entre particules de couches adjacentes en mouvement relatif varient spatialement. Ceci se produit, par exemple, lorsqu'il existe au sein de la suspension un gradient de gradient de vitesse, de concentration ou encore de viscosité. Nous proposons ci-dessous quelques arguments heuristiques pour mettre en valeur et quantifier ce phénomène.

On suppose que seules des interactions hydrodynamiques peuvent se produire entre particules appartenant à deux couches adjacentes en mouvement relatif et passant à proximité l'une de l'autre. Supposons qu'une des deux particules est fixe. Il est difficile de calculer la force moyenne tendant à écarter la particule (mobile) dans la direction perpendiculaire (Oy) aux couches de suspension en mouvement relatif mais il est très probable que celle-ci est en première approximation proportionnelle à $\mu_1 \dot{\gamma}$ où μ_1 est ici la viscosité moyenne de la suspension entre les deux couches. La vitesse moyenne de migration de cette particule au travers des couches est quant à elle obtenue en égalisant cette force de répulsion à la traînée hydrodynamique (2.24) en utilisant maintenant la viscosité moyenne (μ_2) de la suspension dans la couche contenant la particule mobile. En tenant compte d'un éventuel gradient de viscosité d'une couche à une autre ($\mu_2 - \mu_1 = r \partial \mu / \partial y$) on en déduit que la distance de migration résultant d'une interaction entre deux particules pendant une durée $1/\dot{\gamma}$ est proportionnelle à $r(1 + (r/\mu)(\partial \mu / \partial y))$. Pour une particule donnée, on peut facilement montrer que le nombre d'interactions par unité de temps avec des particules d'une couche adjacente (située à une distance proportionnelle à la taille caractéristique des particules) est proportionnel à $\phi \dot{\gamma}$. Le nombre de particules par couche est quant à lui proportionnel à ϕ . Le flux fictif de particules lié au glissement d'une couche de suspension parallèlement à une autre est proportionnel au nombre de particules migrant multiplié par la distance qu'elles parcourent par unité de temps : $r(1 + (r/\mu)(\partial \mu / \partial y)) \phi^2 \dot{\gamma}$. En l'absence de gradients de viscosité, de concentration ou gradient de vitesse, le flux réel est nul puisque chaque migration locale est suivie ultérieurement d'une migration inverse. Ici, le flux résultant (N) est proportionnel à la différence entre les flux fictifs associés à deux couples de couches superposés (séparés d'une distance de l'ordre de r), ce qui nous donne :

$$N = -K_N r^2 \frac{\nabla(\mu \phi^2 \dot{\gamma})}{\mu} \quad (4.12)$$

Ce résultat est évidemment très approximatif, mais il permet de mettre en valeur les principales origines physiques de la migration : variations spatiales de la fréquence

(proportionnelle à $\dot{\gamma}$ et à ϕ^2) ou de l'intensité des interactions hydrodynamiques (proportionnelle à μ). Trois flux d'origine différente apparaissent donc en développant l'expression (4.12). L'expression (4.12) est finalement en accord avec les différents résultats théoriques de la littérature (voir par exemple [14-15]) à ceci près que les phénomènes de migration (ou diffusion) associés aux variations des différentes variables ont souvent été dissociés ce qui donne des coefficients de diffusion différents pour chacun d'eux. Expérimentalement, cependant, ces coefficients s'avèrent être tous proches de 1.

Contrairement aux prédictions de l'équation (4.12), on n'observe pas de migration au sein d'un rhéomètre plan-plan [16]. Krishnan *et al.* [17] ont suggéré que ceci était dû à une tendance des particules à migrer vers les régions où la courbure des lignes de courant est la plus faible, autrement dit vers la périphérie pour la géométrie plan-plan. Cette tendance équilibrerait la tendance à la migration vers l'axe central résultant du flux donné par (4.12). Notons enfin que la migration au sein d'une suspension polydisperse conduit à une ségrégation. L'effet de la taille des particules a été pris en compte dans une expression du type (4.12) par Shauly *et al.* [18].

Le calcul de la section précédente dans le cas de la sédimentation dans un rhéomètre au sein duquel le cisaillement est homogène permet de déduire l'effet de la migration dans diverses situations. Lorsque la migration intervient dans un rhéomètre au sein duquel le cisaillement est homogène (cône-plan), celle-ci a pour effet d'augmenter la viscosité apparente du fluide, les calculs étant analogues à ceux effectués plus haut. Lorsque la migration a lieu dans un rhéomètre vers les régions de plus fort cisaillement, par exemple vers la périphérie dans un rhéomètre plan-plan, cet effet est encore accentué, puisque ces régions fournissent une part du couple à appliquer beaucoup plus importante que la fraction de volume qu'elles occupent (le couple est proportionnel à R^3). Lorsque les particules migrent vers les régions de plus faibles gradients de vitesses, l'effet initial d'augmentation de la viscosité peut être plus ou moins compensé. Dans le cas d'un rhéomètre à cylindres coaxiaux, l'effet de la migration radiale dépend des dimensions du rhéomètre. Si le gradient de vitesse peut être considéré comme homogène, on peut utiliser le résultat du calcul ci-dessus dans le cas de la sédimentation. Dans le cas contraire, le résultat dépend de plusieurs paramètres.

4.2.7 Consignes générales pour réaliser des mesures avec des suspensions

Compte tenu des observations précédentes, il est possible de dégager quelques lignes de conduite générales pour effectuer des mesures avec des suspensions concentrées. Afin de déterminer si le cisaillement réel correspond au cisaillement théorique, il convient d'abord de chercher à observer le cisaillement au sein du matériau. Ceci peut se faire directement au niveau des surfaces libres visibles. Cependant, le cisaillement observé ne reflète pas forcément le cisaillement interne. On peut alors envisager de marquer l'intérieur du matériau et de le disséquer après une déformation réduite. Le plus

commode est évidemment de disposer d'un matériau transparent. Un marquage permet alors des observations en cours d'écoulement. Enfin, si le matériau n'est pas transparent, le même type de mesure est possible à l'aide de techniques d'imagerie interne (rayons X, ultrasons, rayonnement gamma, ou résonance magnétique nucléaire).

Lorsqu'on cherche à déterminer assez précisément le comportement d'une suspension donnée, il est crucial de réaliser des mesures à l'aide de géométries radicalement différentes. Les effets de bord qui peuvent survenir avec différentes géométries ne peuvent en effet pas avoir en général la même influence relative sur les mesures. Si les résultats obtenus avec différentes géométries sont en accord les uns avec les autres, ceci prouve pratiquement à coup sûr que les mesures reflètent effectivement le comportement du matériau. Enfin, il est important de chercher à isoler l'influence sur les mesures des différents effets perturbateurs de celle liée aux évolutions intrinsèques du comportement du matériau. Pour cela, il faut réaliser des expériences dans des conditions différentes et s'appuyer sur les observations du cisaillement pour finalement parvenir à une interprétation cohérente des mesures en termes d'évolutions de la contrainte ou du gradient de vitesse au cours du temps en fonction des différents phénomènes qui peuvent se produire.

4.3 Les différentes géométries d'écoulement : avantages et inconvénients dans le cas de tests avec des suspensions concentrées

Dans ce paragraphe, on passe en revue les principales géométries utilisées en rhéométrie. On présente d'abord les calculs à effectuer pour déduire les éléments recherchés concernant la loi de comportement, puis on examine les avantages et inconvénients de chaque géométrie, en particulier dans la perspective d'une utilisation pour des suspensions et compte tenu des effets perturbateurs présentés ci-dessus. Le lecteur intéressé par une approche théorique détaillée des écoulements viscosimétriques pourra se reporter à divers ouvrages [19, 20].

4.3.1 Le rhéomètre cône-plan

La géométrie cône-plan est constituée d'un disque et d'un cône tronqué de même diamètre et dont le sommet fictif est situé sur le disque. Le cône et le disque sont coaxiaux et animés d'un mouvement de rotation autour de leur axe commun à une vitesse relative Ω (on supposera pour simplifier que cette vitesse est celle du cône et que celui-ci est situé au-dessus du disque fixe). Le matériau est placé en général sur le disque puis le cône est progressivement rapproché à la distance appropriée. Pendant cette phase, il faut vérifier que l'écrasement de l'échantillon ne développe pas d'efforts normaux importants qui risqueraient d'endommager l'appareil. Ce risque est grand avec des suspensions

concentrées car le fluide peut migrer à travers le réseau de grains conduisant ceux-ci à s'empiler les uns sur les autres pour former une structure très rigide. Une solution pratique consiste à descendre progressivement l'outil supérieur en faisant osciller ou tourner l'un des deux outils, de manière à disperser légèrement les grains au fur et à mesure que les deux outils se rapprochent. Quoi qu'il en soit, ce phénomène est en lui-même un signe que le matériau étudié peut se comporter comme une suspension granulaire dans certaines conditions.

La géométrie cône-plan est celle qui permet d'obtenir un cisaillement le plus proche du cisaillement idéal entre deux plans parallèles en mouvement relatif de translation. En effet, la vitesse locale d'un point du cône situé à une distance r de l'axe vaut $r\Omega$, si bien qu'en première approximation, c'est-à-dire en supposant que tout se passe localement comme entre les deux plans parallèles en translation relative, le gradient de vitesse local vaut, en tenant compte de l'épaisseur locale $h(r)$:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{h(r)} = \frac{\Omega}{\tan \alpha} \quad (4.13)$$

En fait, on peut montrer que ce calcul approximatif fournit le résultat exact dans le cas où l'angle (α) du cône est faible (inférieur à quelques degrés). On constate ainsi que le gradient de vitesse ne dépend pas de la position considérée par rapport à l'axe. Le fait de cisailer le matériau entre un cône et un plan permet donc de rattraper la variation du gradient résultant normalement de l'éloignement de l'axe (phénomène qui se produit notamment avec deux disques). Ceci a pour conséquence supplémentaire que la contrainte tangentielle est constante au sein de l'échantillon. On peut donc écrire directement la relation entre le couple total appliqué sur l'axe (C) et cette contrainte τ :

$$\tau(\dot{\gamma}) = \frac{3C}{2\pi R^3} \quad (4.14)$$

Un autre avantage de cette géométrie, comme de la géométrie plan-plan, est la possibilité qui est offerte d'observer le cisaillement du matériau par l'intermédiaire de la surface libre qui se trouve à la périphérie. Cette surface libre est en théorie cylindrique de révolution autour de l'axe des disques et cisailée de manière homogène. En fait, l'écoulement dans cette région n'est pas forcément représentatif de l'écoulement à l'intérieur, comme on l'a vu dans le cas où un creusement se produit (*cf.* § 4.2.4), mais il donne des indications sur la nécessité de prendre ou non des mesures correctives. Un autre avantage de ces géométries est qu'elles permettent d'observer facilement l'état du matériau juste après une expérience, notamment en « disséquant » le fluide restant sur chaque outil après séparation. Ainsi, dans certains cas on peut distinguer, à la périphérie, des zones (dans le cas du creusement) qui ne sont pas cisailées. Lorsqu'un creusement s'est étendu jusqu'aux abords de l'axe central, on remarque après séparation des outils, que les surfaces de chacune des deux parties de l'échantillon sont sillonnées de rides concentriques qui résultent d'un frottement résiduel, au cours du mouvement, entre des éléments situés à la surface de chaque partie. On peut aussi placer dans l'échantillon,

avant la mise en place entre les outils, une fraction de fluide de couleur différente. Après séparation des outils, si leur rotation relative est de l'ordre d'un demi-tour, on peut, en disséquant les deux parties de l'échantillon, estimer la qualité du cisaillement et découvrir le cas échéant des surfaces de discontinuité.

L'utilisation de cette géométrie peut cependant poser quelques problèmes, notamment avec des suspensions. Le cône doit être tronqué pour éviter le contact direct avec le disque. Il en résulte qu'il existe une région de fluide comprise entre deux disques en mouvement relatif de rotation autour du même axe. Du fait de la dépendance essentielle en $1/R^3$ de la contrainte dans le cas de la géométrie plan-plan (cf. § 4.3.2), la fraction de couple nécessaire au cisaillement de cette région est faible devant le couple total dès que le rapport du rayon du cône et du rayon de la zone tronquée est supérieur à 2,5. En outre, on peut calculer précisément le couple résultant du cisaillement de cette région en utilisant les calculs correspondant à la géométrie plan-plan, on constate alors que la formule (4.14) fournit une excellente approximation de la contrainte réelle.

Même si elle n'est pas prise explicitement en compte dans les calculs, cette région tronquée introduit donc en théorie une erreur négligeable. Cependant, en pratique, il est préférable, pour respecter au mieux l'hypothèse de continuité du milieu, d'avoir un rapport intervalle/diamètre des particules assez grand. Compte tenu de la faible influence de cette région, il est probable que la non validité de l'hypothèse de continuité du milieu dans cette zone n'est pas en général une cause d'erreur importante. Toutefois, si l'écart entre les outils est trop faible, des coincements peuvent se produire, un ou plusieurs grains formant une sorte de pont plus ou moins rigide. À vitesse donnée, on remarque alors de brusques sautes du couple mesuré. On peut éviter en partie ce problème en évitant cette région de façon à obtenir un cône troué, la surface de la zone de faible jeu entre les outils est ainsi réduite. La contrainte se calcule simplement en utilisant à nouveau la formule (4.14) de laquelle on soustrait le couple correspondant à la zone évidée qui se calcule par la même formule : $\tau(\dot{\gamma}) = 3C/2\pi(R_2^3 - R_1^3)$ où R_1 et R_2 sont respectivement les rayons intérieur et extérieur du cône troué.

Outre les phénomènes perturbateurs décrits au paragraphe 4.2 qui peuvent tous survenir avec ces géométries, un problème commun à cette géométrie et à la géométrie plan-plan réside dans les effets de bord susceptibles de perturber les mesures. Il suffit en effet que la périphérie de l'échantillon ne soit pas parfaitement à l'aplomb du disque à la distance R de l'axe pour que l'on commette une erreur sur le calcul de la contrainte tangentielle. Cette erreur est rapidement importante car le couple est proportionnel à R^3 . Il est aussi possible que le fluide ait tendance à s'étaler à l'extérieur de la géométrie théorique, ou que l'on ait placé trop de matériau au départ si bien que le cône tend à cisailer non seulement le volume théorique mais aussi des volumes supplémentaires situés à l'extérieur de la surface théorique. Dans ce cas, il est nécessaire de nettoyer au mieux la périphérie de l'échantillon dès le début d'une expérience, de façon à avoir un volume cisailé qui se rapproche au plus près du volume théorique (cylindre de rayon R) (au moins pour les premières mesures).

De manière générale, l'utilisation de cette géométrie pour des suspensions grossières reste problématique. Il est en effet difficile d'avoir à la fois un intervalle suffisamment grand par rapport à la taille des particules, un angle faible et un rapport H/R suffisamment petit pour minimiser les effets de bord, car ceci conduit à utiliser des outils d'un très grand diamètre. L'utilisation du plan-cône troué est préférable mais dans ce cas les effets de bord sont accrus. Le facteur d'accroissement reste cependant assez proche de 1 car les effets de bord intérieurs ont une influence bien plus faible (compte tenu des variations du couple en R^3) que les effets de bord extérieurs.

4.3.2 Le rhéomètre plan-plan

Cette géométrie est la plus simple qui puisse être conçue. Elle est composée de deux disques coaxiaux en rotation relative. L'échantillon est placé de la même façon que dans le cas de la géométrie cône-plan. Au contraire de ce que l'on a vu pour cette dernière, la géométrie plan-plan ne permet pas de contrecarrer les variations du gradient de vitesse au sein de l'échantillon en fonction de la distance par rapport à l'axe central. On a maintenant :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{H} \quad (4.15)$$

et le couple appliqué à l'un des deux disques s'écrit :

$$C = \int_0^R 2\pi r \tau(r) dr = \frac{2\pi}{(\Omega/H)^3} \int_0^{\Omega H} \dot{\gamma}^2 \tau(\dot{\gamma}) d\dot{\gamma} \quad (4.16)$$

La borne supérieure de la seconde intégrale est en fait le gradient de vitesse à la périphérie ($\dot{\gamma}_R = \Omega R/H$). On peut différentier (4.16) par rapport à cette valeur, ce qui nous donne :

$$\tau(\dot{\gamma}_R) = \frac{3C}{2\pi R^3} + \frac{\dot{\gamma}_R}{2\pi R^3} \frac{dC}{d\dot{\gamma}_R} \quad (4.17)$$

On constate donc qu'on obtient l'expression (4.14) à un terme correctif près dont on ne connaît pas *a priori* la valeur. En pratique, il est nécessaire d'avoir obtenu un ensemble de mesures sous la forme d'un ensemble de couples (C, Ω) pour pouvoir déterminer un jeu de couples $(\tau, \dot{\gamma}_R)$ et en particulier connaître l'importance du terme correctif. Pour un fluide à seuil, on peut facilement montrer que celui-ci est faible devant le premier terme de (4.17), tant que la contrainte appliquée à la suspension n'est pas trop grande devant le seuil de contrainte. En revanche, pour un fluide newtonien, le terme correctif est loin d'être négligeable et on obtient finalement :

$$\tau(\dot{\gamma}_R) = \frac{2C}{\pi R^3} \quad (4.18)$$

On a déjà passé en revue (§ 4.3.1) les problèmes d'effets de bord que pose cette géométrie et les précautions qui s'imposent vis-à-vis des mesures. Notons tout de même qu'avec la géométrie plan-plan, on s'affranchit plus facilement qu'avec un cône-plan des problèmes liés au coincement des particules. L'inconvénient majeur de cette géométrie réside en revanche dans la variation du gradient de vitesse entre une valeur en théorie nulle près de l'axe et une valeur maximum à la périphérie. Les calculs sont de ce fait moins directs et on peut craindre une migration des particules grossières ou des difficultés pour les mesures de thixotropie (cf. § 4.4.3). En contrepartie, cette géométrie présente l'avantage par rapport aux géométries capillaire ou à cylindres coaxiaux que la contrainte transmise à travers l'échantillon le long de disques parallèles aux disques solides est constante. Enfin, la mise en place des échantillons est facile et rapide. La géométrie plan-plan est donc recommandée pour des tests préliminaires ayant pour but de déterminer grossièrement les propriétés du matériau étudié.

4.3.3 Le rhéomètre à cylindres coaxiaux

Cette géométrie est constituée de deux cylindres coaxiaux en rotation relative. Le matériau est placé dans l'intervalle entre ces deux cylindres. Cette mise en place est en général beaucoup moins aisée qu'avec les deux géométries précédentes : il faut injecter progressivement le matériau entre les cylindres, ou bien placer l'ensemble du matériau dans le cylindre extérieur puis introduire le cylindre intérieur dont le fond aura été au préalable obturé. Dans tous les cas, lorsque les effets de pesanteur ne sont pas très importants, des bulles d'air risquent de subsister près du fond lors de cette mise en place, qui pourront disparaître au cours du premier écoulement significatif induit par la rotation relative des cylindres. Il faut donc surveiller l'évolution du niveau de matériau et éventuellement finir le remplissage après un essai. Un autre effet perturbateur spécifique à cette géométrie et totalement indépendant de l'effet précédent est l'effet Weissenberg. Il s'agit de la montée progressive du matériau le long du cylindre intérieur, alors que la surface atteint d'ordinaire rapidement une forme stable. Cet effet, qui n'est pas typique des suspensions, tire son origine de différences de contraintes normales non nulles au sein de certains matériaux durant un cisaillement.

Un des inconvénients majeurs de cette géométrie réside dans l'hétérogénéité de la contrainte appliquée le long de cylindres fictifs entre les deux cylindres solides, en fonction du rayon de ces cylindres. En effet, on peut facilement montrer que la relation liant le couple et la contrainte tangentielle s'écrit :

$$C = 2\pi r^2 L \tau \quad (4.19)$$

où L est la hauteur des cylindres. Le couple appliqué au cylindre intérieur est transmis à travers tout l'échantillon et est par conséquent constant à travers chaque cylindre fictif intermédiaire, l'équation (4.19) nous montre donc que la contrainte varie comme l'inverse de la distance à l'axe central au carré. Il en résulte que le gradient de vitesse

n'est pas homogène dans l'intervalle entre les outils. Lorsque l'intervalle entre les cylindres est faible ($R_2 - R_1 \ll R_1$) cette hétérogénéité est faible. Les calculs de rhéométrie pour cette géométrie sont alors très simples. Considérant ainsi que le gradient de vitesse est homogène, on obtient :

$$\tau \approx \frac{C}{2\pi R_1^2 L} ; \dot{\gamma} \approx \frac{\Omega R_1}{(R_2 - R_1)} \quad (4.20)$$

Lorsque l'intervalle entre les cylindres n'est pas très petit, l'hétérogénéité du gradient de vitesse peut, tout particulièrement avec des suspensions, induire une migration des particules vers les zones cisillées moins rapidement, c'est-à-dire vers le cylindre extérieur. Pour un fluide à seuil, cet effet peut être encore plus frappant puisque la contrainte décroissant avec la distance par rapport à l'axe peut être, à partir d'une certaine distance, inférieure à la contrainte seuil du matériau. Il apparaît alors une zone cisillée près du cylindre intérieur et une zone non cisillée près du cylindre extérieur. L'épaisseur de cette dernière se déduit facilement de (4.19) :

$$E = \sqrt{\frac{C}{2\pi L \tau_c}} - R_1 \quad (4.21)$$

Ce phénomène implique que l'hypothèse de continuité n'est plus nécessairement vérifiée même si au départ on avait choisi la géométrie avec un rapport intervalle minimum/taille des particules assez grand (cf. § 4.2.1). En effet, les particules d'un diamètre de l'ordre de E peuvent se trouver dans la zone cisillée, notamment lors de mesures à des contraintes proches de la valeur du seuil de contrainte. Ainsi, les mesures tendant à déterminer le seuil de contrainte d'une suspension, à l'aide d'une géométrie à cylindres coaxiaux, par extrapolation vers des vitesses de plus en plus faibles (cf. § 4.4.2), doivent être regardées avec la plus grande méfiance, puisque ces mesures correspondent à une épaisseur de matériau de plus en plus petite et non nécessairement représentative du reste de la suspension. En revanche, lorsqu'on réalise des expériences à contrainte imposée dans le dessein de déterminer le seuil de contrainte (cf. § 4.4.2), on s'intéresse à la limite de situations pour lesquelles l'ensemble de la suspension est statique. Il semble par conséquent que cette procédure beaucoup mieux adaptée puisque l'hypothèse du milieu continu est respectée jusqu'au moment où le seuil de contrainte est dépassé.

Lorsque l'intervalle entre les cylindres n'est pas petit, il faut aussi suivre une procédure particulière pour déterminer la loi de comportement en cisaillement simple. Le gradient de vitesse s'écrit maintenant :

$$\dot{\gamma} = r \frac{d\omega}{dr} \quad (4.22)$$

et la vitesse relative :

$$\Omega = \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\omega}{dr} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \zeta \left(\frac{C}{2\pi r^2 L} \right) dr \quad (4.23)$$

où ζ est la fonction inverse de la loi de comportement ($\dot{\gamma} = \zeta(\tau)$). On effectue un changement de variable en utilisant la relation entre la contrainte et le couple donnée par (4.19) :

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\tau(R_1)}^{\tau(R_2)} \frac{\zeta(\tau)}{\tau} d\tau \quad (4.24)$$

En dérivant cette expression par rapport au couple, on obtient alors :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial C} = \frac{1}{2C} [\zeta(\tau(R_1)) - \zeta(\tau(R_2))] \quad (4.25)$$

Posons $\beta = (R_1/R_2)^2$ et $Y(\tau(R_1)) = 2C \partial \Omega / \partial C = \zeta(\tau(R_1)) - \zeta(\tau(\beta R_1))$. On en déduit l'expression de la fonction inverse de la loi de comportement, sous forme d'une série :

$$\zeta(\tau(R_1)) = \sum_{n=0}^{\infty} Y(\beta^n \tau(R_1)) \quad (4.26)$$

qui converge d'autant plus rapidement que β est grand, toutes choses égales par ailleurs. Pour des fluides à seuil rhéofluidifiants, cette convergence est souvent rapide car Y s'annule en deçà d'une certaine valeur.

Si l'équation (4.26) est une solution analytique donnant le taux de cisaillement, elle est peu pratique et imprécise, notamment parce que le choix du terme de la série à partir duquel on s'arrête peut dépendre de l'extrapolation de la courbe expérimentale. Plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer le taux de cisaillement. L'une des plus couramment utilisées est celle de Krieger qui donne de très bons résultats pour des fluides suivant une loi puissance [21]. En se limitant aux termes du second ordre, on a alors :

$$\dot{\gamma} = \frac{2\Omega(1+\alpha)}{1-\beta^f} f \quad (4.27)$$

avec :

$$f = \frac{d \ln \Omega}{d \ln C} ; \alpha = \frac{f}{f^2} \chi_1(-f \log \beta) ; \chi_1(x) = \frac{x(xe^x - 2e^x + x + 2)}{2(e^x - 1)^2}$$

Pour un fluide à seuil partiellement cisailé ($E < R_2 - R_1$) la méthode de Krieger conduit à des erreurs significatives. Il est alors préférable de lui substituer la méthode proposée par Nguyen et Boger [22] qui conduit à l'expression très simple :

$$\dot{\gamma} = 2\Omega \frac{d \ln \Omega}{d \ln C} \quad (4.28)$$

Quoi qu'il en soit, ces méthodes restent délicates à mettre en œuvre en pratique car elles nécessitent de calculer des dérivées d'ordre 1 et 2 (voire d'ordre supérieur) de courbes expérimentales. Des erreurs significatives peuvent être commises si les mesures sont bruitées [23] et, selon la méthode d'interpolation utilisée, l'estimation du seuil de contrainte peut varier notablement. L'utilisation de fonctions d'interpolation adaptées, comme les fonctions splines cubiques [24], peuvent permettre de minimiser ces erreurs.

Malgré les limitations indiquées plus haut, cette géométrie est particulièrement utilisée pour tester des suspensions grossières, car on peut s'intéresser au cisaillement d'un volume de matériau assez large dans un espace relativement restreint. En revanche, mis à part le creusement, les phénomènes perturbateurs décrits au paragraphe 4.2 peuvent tous survenir. Le glissement et la migration sont même accentués par l'hétérogénéité du gradient de vitesse dans l'intervalle. Pour s'en affranchir en partie, notamment lors de la détermination du seuil de contrainte d'un matériau, on peut adopter une géométrie similaire utilisée initialement en mécanique des sols : le scissomètre. Il s'agit d'un croisillon (deux plaques perpendiculaires se croisant le long de l'axe sur lequel elles sont fixées) qui est entraîné en rotation autour de son axe. L'énorme avantage de cette géométrie est qu'elle minimise les phénomènes perturbateurs le long des surfaces solides au contact de l'échantillon puisque celles-ci ne sont plus situées le long des plans de glissement principaux des couches de matériau en écoulement. En effet, les surfaces solides au contact de la suspension sont les surfaces du croisillon, qui sont situées dans des plans radiaux. Cette géométrie est donc très utile pour des suspensions grossières. En outre, le cisaillement induit par le croisillon peut être en première approximation assimilé à celui résultant du mouvement d'un cylindre de diamètre égal à la largeur des pales du croisillon. Les calculs en ce qui concerne la détermination du seuil de contrainte sont identiques à ceux développés dans le cas des cylindres coaxiaux. En négligeant l'écoulement sous le cylindre intérieur ou le croisillon, on trouve ainsi directement de (4.19) :

$$\tau_c = \frac{C_0}{2\pi R_l^2 L} \quad (4.29)$$

où C_0 est le couple à partir duquel un écoulement est observé.

On a jusqu'ici laissé de côté les problèmes résultant de la géométrie particulière entre le fond du cylindre intérieur et le cylindre extérieur. En pratique, on peut donner différentes formes à cette géométrie :

- Les fonds des deux cylindres sont en contact à l'aide d'un joint, on doit alors déterminer les frottements résultants pour les soustraire des efforts totaux enregistrés en présence d'un fluide entre les deux cylindres.
- Le cylindre intérieur est évidé sur une certaine distance, on utilise alors la tendance à la rétention, dans ce vide, d'une poche d'air lors de la mise en place mentionnée plus haut.

De cette façon l'effort induit spécifiquement par le fond est négligeable car il correspond au cisaillement d'une couche d'air.

- Le fond du cylindre intérieur forme avec le cylindre extérieur une géométrie cône-plan ou plan-plan. On peut alors utiliser les calculs des paragraphes précédents pour corriger la contrainte déduite de la mesure du couple. Ceci ajoute évidemment à la complexité de la détermination de la loi de comportement dans le cas d'un intervalle significatif entre les deux cylindres puisqu'à la base, cette relation n'est pas déduite directement du couple et de la vitesse de rotation. Il est donc préférable de minimiser cet effet de fond. Dans le cas d'une géométrie plan-plan au fond et pour un fluide de viscosité μ , le couple nécessaire au cisaillement de cette fraction de fluide vaut au premier ordre $2\pi\mu R_1^4\Omega/3H$ où H est l'écart entre les surfaces solides au fond, alors que le couple nécessaire au cisaillement du fluide dans la direction des cylindres vaut au premier ordre $2\pi R_1^3 L\mu\Omega/(R_2 - R_1)$. Dans ce cas, la contribution du cisaillement du fond est négligeable devant le couple total lorsque :

$$R_1(R_2 - R_1) \ll 3HL \quad (4.30)$$

Dans tous les cas, il reste que l'écoulement induit par le mouvement relatif des deux cylindres peut être perturbé par la présence d'un fond (qui permet au fluide de ne pas s'échapper par le bas) fixe par rapport à l'une ou l'autre des surfaces. Dans cette région, le fluide a tendance à être maintenu fixe par rapport à l'une des deux surfaces. Ces effets sont en général négligeables dès que le volume de fluide concerné est faible devant le volume total, autrement dit lorsque $R_2 - R_1 \ll L$. Dans le cas contraire, on peut aussi estimer l'influence de ces écoulements secondaires à partir de mesures avec différentes hauteurs (H) de fluide dans le rhéomètre. En admettant que leur effet est indépendant de H , une solution possible consiste à associer à cet effet la valeur du couple résiduel obtenu par extrapolation du couple (mesuré à vitesse imposée) lorsque H/R tend vers zéro.

4.3.4 Le rhéomètre capillaire

La géométrie correspondante est un tube dans lequel le matériau s'écoule. Il s'agit encore d'une géométrie relativement pratique mais qui ne permet malheureusement pas d'obtenir un cisaillement homogène. Il faut imposer à la suspension une différence de pression entre les deux extrémités du tube pour la faire s'écouler. Cette différence de pression permet de vaincre les frottements aux parois liés à la viscosité du matériau. Ainsi, un bilan des forces s'exerçant sur un tube de fluide de longueur L et de rayon r conduit à l'égalité suivante :

$$\tau(r) = -\frac{r}{2} \frac{\Delta p_g}{L} \quad (4.31)$$

où Δp_g est la différence de pression motrice $p_g = p + \rho gZ$ (Z étant la cote par rapport à un plan horizontal) entre les deux extrémités du tube de fluide. On remarque au passage que l'on peut générer ce type d'écoulement par une différence de pression ou simplement à l'aide la pesanteur.

L'équation (4.31) nous montre qu'une fois de plus le gradient de vitesse n'est pas homogène dans l'échantillon. Il nous faut donc appliquer une procédure similaire à celle employée dans le cas de la géométrie cylindres coaxiaux. On écrit le débit total à travers le tube :

$$Q = 2\pi \int_0^R u r dr = 2\pi \left(\left[u \frac{r^2}{2} \right]_0^R - \int_0^R \frac{r^2}{2} \frac{du}{dr} dr \right) \quad (4.32)$$

$$Q = \frac{8\pi}{(\Delta p_g/L)^3} \int_0^{R\Delta p_g/L^2} \zeta(\tau) \tau^2 d\tau \quad (4.33)$$

En différenciant l'équation (4.33) par rapport à $\Delta p_g/L$ on obtient l'expression du gradient de vitesse à la paroi :

$$\dot{\gamma}_R = \zeta \left(-\frac{R}{2} \frac{\Delta p_g}{L} \right) = \frac{1}{\pi R^3 (\Delta p_g/L)^2} \frac{d(Q(\Delta p_g/L)^3)}{d(\Delta p_g/L)} \quad (4.34)$$

Il est donc ici encore nécessaire d'avoir mesuré un ensemble de couples $(\Delta p_g/L; Q)$ dans une gamme suffisamment étendue pour pouvoir déterminer une courbe expérimentale $(\tau; \dot{\gamma})$.

La contrainte tangentielle varie dans une gamme encore plus large que dans le cas de l'écoulement entre deux cylindres : entre 0 et $-R\Delta p_g/2L$. Ceci implique que les effets de migration ou les effets de parois sont d'autant plus importants. En particulier, pour un fluide à seuil, comme dans le cas de l'écoulement à surface libre dans un canal uniforme, il existe une zone « bouchon » au sein de laquelle le matériau n'est pas cisailé. Celle-ci est comprise dans le cylindre fictif de rayon R_c tel que :

$$R_c = -\frac{2L\tau_c}{\Delta p_g} \quad (4.35)$$

Si R est inférieur à R_c il n'y a pas écoulement. On peut donc en théorie déterminer le seuil de contrainte d'un matériau à partir de la différence de pression critique à appliquer pour provoquer un écoulement. En pratique, ceci n'est pas facilement réalisable, car il est difficile de contrôler précisément cette différence de pression. La technique consistant à extrapoler le seuil à partir d'écoulements à des débits de plus en plus faibles est quant à elle, comme pour les cylindres coaxiaux, incertaine, compte tenu du fait qu'on est amené à réduire progressivement la zone cisailée en s'exposant ainsi à des phénomènes de glissement à la paroi (§ 4.2.2) et/ou de migration des particules (§ 4.2.6).

Un phénomène perturbateur spécifique à la géométrie capillaire peut se produire avec des suspensions. Il s'agit d'une ségrégation à l'entrée du tube. Une migration plus ou moins importante intervient naturellement du fait de l'hétérogénéité du profil des vitesses près de l'entrée, la réduction de section pouvant même aller jusqu'à provoquer la formation de zones mortes ou pratiquement statiques dans le cas de fluides à seuil. Les particules les plus grossières peuvent donc avoir tendance à migrer vers les régions faiblement cisailées situées sur les côtés aux abords de l'entrée dans le tube, pour former progressivement une suspension de plus en plus concentrée et de plus en plus visqueuse. Ces régions peuvent même finir par s'arrêter complètement à partir d'une certaine concentration solide. Tout se passe alors comme si on avait allongé le tube dans lequel l'écoulement est imposé, ce qui signifie qu'il faut augmenter la différence de pression pour préserver un débit constant. Ce phénomène donne donc en général l'impression que la viscosité du fluide augmente lentement au cours du temps. À notre connaissance, il n'existe pas d'autres méthodes pour contrecarrer ce phénomène que d'imposer un rétrécissement le plus progressif possible de la section avant l'entrée dans le tube ou de nettoyer régulièrement les bords.

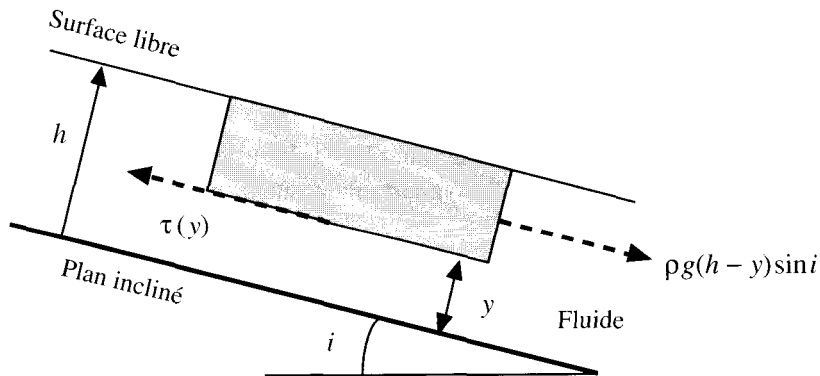


Fig. 4.8 : Distribution des forces exercées au sein d'un fluide en écoulement à surface libre uniforme sur un plan incliné infiniment large et long. On s'intéresse tout particulièrement aux efforts qui s'exercent sur un tronçon de fluide situé à la hauteur y au-dessus du plan.

4.3.5 Le plan incliné

Cette technique de rhéométrie a été très peu utilisée jusqu'ici car elle requiert souvent un dispositif un peu plus volumineux que pour un rhéomètre capillaire. Pourtant, elle peut s'avérer très utile en pratique pour déterminer le seuil de contrainte. Cette technique est même la plus naturelle puisqu'en pratique la caractéristique essentielle des fluides à seuil

est qu'ils forment des dépôts d'épaisseur significative sur des pentes non nulles. Nous examinerons dans un premier temps la technique du plan incliné utilisée pour déterminer la courbe d'écoulement d'un matériau. Les procédures et calculs permettant d'estimer uniquement le seuil de contrainte d'un fluide à partir de la forme des dépôts sur un plan incliné seront ensuite étudiés en détail.

4.3.5.1 Détermination de la courbe d'écoulement

On s'intéresse à un écoulement permanent uniforme. Comme dans le cas de l'écoulement en conduite (rhéomètre capillaire), la contrainte tangentielle au sein du fluide varie en fonction de la distance à la paroi. En l'absence d'effets de bord, c'est-à-dire sur un plan infiniment large et grand, tout se passe comme si les couches de fluide parallèles au plan solide glissaient les unes sur les autres. La contrainte selon l'un quelconque de ces plans est donc constante. Un bilan des forces s'exerçant sur un tronçon de fluide (cf. Fig. 4.8) situé au-dessus de la hauteur y par rapport au plan nous permet alors de retrouver l'expression de cette contrainte telle qu'on l'a établie dans l'Annexe 3.1 :

$$\tau = \rho g(h - y)\sin i = \tau_p \frac{h - y}{h} \quad (4.36)$$

Le gradient de vitesse résultant varie donc du fond vers la surface. Encore une fois, cette hétérogénéité du gradient de vitesse facilite des effets de glissement ou de migration.

On s'intéresse maintenant au débit par unité de largeur de canal pour un fluide quelconque, en introduisant la variable contrainte tangentielle, celui-ci s'écrit :

$$q = \int_0^h u(y)dy = \int_0^h (h - y) \frac{du}{dy} dy = \int_0^{\tau_p} \frac{h^2}{\tau_p^2} \tau \zeta(\tau) d\tau \quad (4.37)$$

On peut dériver cette expression pour obtenir :

$$\left(\frac{dq}{dh} \right)_i = h \zeta(\tau_p) \quad (4.38)$$

Un calcul analogue peut être conduit en partant non pas du débit mais de la vitesse à la surface (V_s), on obtient alors :

$$\left(\frac{dV_s}{dh} \right)_i = \zeta(\tau_p) \quad (4.39)$$

Les équations (4.38) ou (4.39) permettent en théorie de déterminer la courbe d'écoulement, à partir du moment où l'on dispose d'un ensemble de couples $(h; V_s)$ ou $(h; q)$ dans une large gamme. En pratique, ceci n'est pas très commode car le contrôle du débit dans une large gamme pose des problèmes techniques. Notons enfin

qu'Astarita *et al.* [25] ont proposé une approche plus complète de ce type d'écoulement permettant entre autres de déterminer l'importance d'un glissement éventuel.

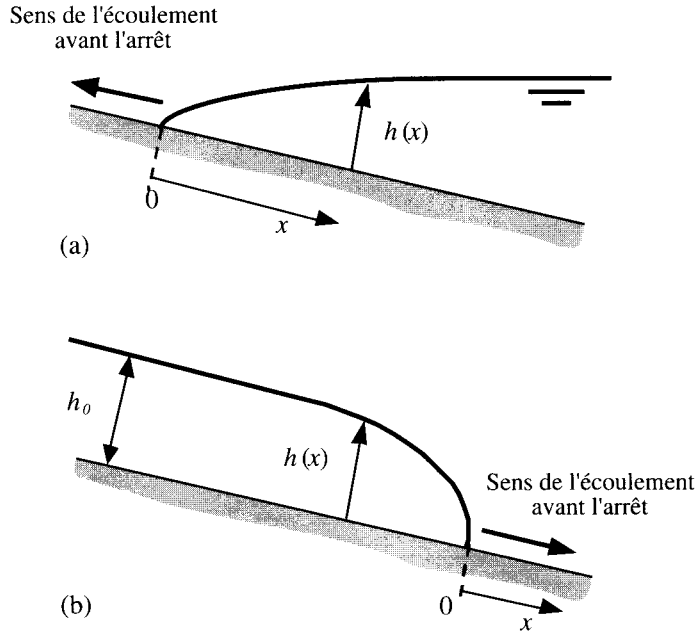


Fig. 4.9 : Aspect du profil de la surface libre d'un volume de fluide à seuil arrêté progressivement faute de volume fourni par l'amont (ou l'aval) sur un plan incliné large. Deux situations ont été représentées : (a) arrêt d'un écoulement auparavant dirigé vers l'amont ; (b) arrêt d'un écoulement auparavant dirigé vers l'aval.

4.3.5.2 Détermination du seuil de contrainte à partir d'une expérience sur un plan incliné

Lors de l'écoulement, sur un plan incliné, d'une nappe de fluide à seuil de très grande surface par rapport à son épaisseur, l'expression de la contrainte (4.36) montre qu'au-delà d'une certaine hauteur par rapport au fond la contrainte tangentielle est inférieure à τ_c . Dans cette zone, il n'y a donc pas d'écoulement possible. Il existe donc une région non cisaillée près de la surface, d'épaisseur :

$$h_0 = \frac{\tau_c}{\rho g h \sin i} \quad (4.40)$$

Lorsque la hauteur de fluide est plus faible que cette épaisseur il n'y a pas d'écoulement permanent uniforme possible avec un fluide à seuil. Cette remarque est très utile en

pratique puisqu'il devient possible de déterminer le seuil de contrainte en mesurant cette épaisseur critique.

Uhlherr [26], qui le premier s'est intéressé de près à cette technique, a suggéré de réaliser les expériences en étalant une couche uniforme de matériau puis en inclinant progressivement le plan jusqu'à une pente critique à partir de laquelle un écoulement est détectable. On augmente ainsi la valeur de la force de volume dans la direction du plan jusqu'à satisfaire l'égalité (4.40). Cette technique est tout à fait dans la ligne des expériences à contrainte imposée, qui (*cf.* § 4.4.2) sont les plus adaptées pour déterminer le seuil de contrainte d'une suspension, et qui permettent de détecter un éventuel minimum dans la courbe d'écoulement. Ainsi, avec un fluide à minimum, après un repos suffisant, on observe un démarrage brutal de l'écoulement au-delà d'une certaine pente. Cette technique est cependant délicate en pratique puisqu'il faut être capable, comme avec un rhéomètre classique, de détecter de très faibles mouvements pour éviter de commettre une erreur significative sur la valeur du seuil de contrainte mesurée. Il peut donc être préférable de réaliser les expériences à vitesse imposée. Ceci est relativement direct avec ce type de géométrie : il suffit de laisser s'écouler une nappe assez épaisse de volume fini jusqu'à l'arrêt complet, l'épaisseur finale loin des bords est donnée par (4.40). Si la sédimentation ne joue pas un rôle important et si on a affaire à un fluide sans minimum, cette technique est plus directe et plus précise que la précédente.

Il n'est pas toujours commode, notamment sur le terrain, de réaliser une expérience telle que l'épaisseur de matériau soit faible devant son étendue sur le plan incliné. Il se trouve que dans la nature les écoulements à surface libre de fluides à seuil (boue ou éventuellement laves volcaniques par exemple) peuvent s'arrêter d'eux-mêmes sur des pentes de l'ordre de 10 %. Ils forment ainsi des dépôts qui reflètent les conditions d'écoulement et l'existence d'un seuil de contrainte. Il est tentant de chercher à déterminer le seuil de contrainte à partir de la forme de ces dépôts. Pour cela il faut avoir affaire à des écoulements pour lesquels l'inertie n'a pas joué un rôle important dans les dernières phases du mouvement, ainsi le dépôt est obtenu par diminution progressive du volume fourni à l'amont et nous sommes finalement en face d'une expérience à vitesse imposée (ce qui veut dire en particulier que la détermination du seuil d'un fluide à minimum par cette méthode n'est pas possible). Lorsque la géométrie d'écoulement n'est pas trop compliquée, on peut estimer le seuil de contrainte à partir de la forme du dépôt. C'est le cas notamment pour un dépôt dans un canal uniforme de section S et de périmètre mouillé P . En première approximation, on peut écrire l'équilibre des forces sur un tronçon de fluide situé loin des extrémités du dépôt. En supposant que la contrainte tangentielle soit égale au seuil de contrainte en tout point du fond du canal au moment de l'arrêt du fluide, on obtient la valeur du seuil de contrainte [27] en fonction de la géométrie d'écoulement :

$$\tau_c = \rho g \sin i \frac{S}{P} \quad (4.41)$$

Rappelons que cette formule est valable lorsque l'épaisseur de fluide est faible devant son extension selon l'axe Ox .

L'écoulement non confiné d'un fluide à seuil sur un plan incliné possède aussi des caractéristiques intéressantes. Hulme [28] a suggéré que l'écoulement permanent donnait lieu à la formation d'un dôme de largeur constante liée au seuil de contrainte. Les formules correspondantes ont été abondamment utilisées dans le domaine des laves volcaniques. En fait, on peut montrer en utilisant un critère de seuil pertinent, sous forme tensorielle ((1.50) par exemple) que dès qu'un fluide à seuil s'écoule dans une direction donnée, il n'est plus nécessaire que les autres contraintes tangentielles dépassent ce seuil pour qu'un écoulement se produise dans ces directions. Par conséquent, le fluide à seuil qui s'écoule sur un plan incliné selon l'axe de plus grande pente n'offre qu'une résistance mineure à l'écoulement dans les autres directions. Un écoulement non confiné à partir d'une source à débit constant donne donc lieu à un lobe de largeur perpétuellement croissante dans le temps et le long de l'axe de plus grande pente. Ce résultat a été confirmé expérimentalement [29]. Si les coulées de laves volcaniques conservent une largeur à peu près constante, cela est surtout dû au fait qu'elles se trouvent plus ou moins canalisées par les dépôts précédents. Des théories permettant de décrire la forme prise par ce type d'écoulement ont été proposées récemment [29-30].

D'un point de vue pratique, il est plus intéressant de pouvoir déduire le seuil de contrainte de la forme prise par un volume fini de fluide arrêté sur un plan incliné. Ceci est possible à partir de l'approche théorique suivante résultant des travaux de Liu et Mei [31]. Considérons une nappe de longueur finie (selon Ox) et de largeur (selon Oz) constante grande devant son épaisseur (de cette façon les effets de bord peuvent être négligés), formée en laissant s'écouler le matériau à partir d'une ligne perpendiculaire à la ligne de plus grande pente. On suppose que la nappe est confinée latéralement mais que les effets de bord sont négligeables. Le fluide s'étale alors quelque peu vers l'amont et plus largement vers l'aval. En première approximation nous supposons que la répartition des pressions (p) est hydrostatique (donnée par (8.12)). Dans ces conditions, à l'arrêt complet du fluide qui s'est écoulé seulement selon l'axe Ox , la contrainte tangentielle τ_{xy} vaut exactement τ_c , ce qui permet d'écrire l'équilibre des forces sur un tronçon de fluide de longueur dx :

$$\rho g(\sin i)h dx - \varepsilon \tau_c dx - \rho g \cos i \frac{h^2(x+dx)}{2} + \rho g \cos i \frac{h^2(x)}{2} = 0 \quad (4.42)$$

où ε vaut 1 vers l'aval et -1 vers l'amont. On en déduit l'équation du profil de la surface libre :

$$-h \frac{dh}{dx} = (\varepsilon h_0 - h) \tan i \quad (4.43)$$

qui peut être intégrée en prenant comme origine ($x = 0$) pour l'aval, (respectivement pour l'amont) le point de contact entre la surface du fluide et le plan vers l'aval (respectivement vers l'amont) :

$$x \tan i = h + \varepsilon h_0 \ln \left(1 - \frac{h}{\varepsilon h_0} \right) \quad (4.44)$$

En partant de l'extrémité aval de la nappe, cette théorie prédit que l'épaisseur tend vers h_0 en allant vers l'amont. De même, en partant de l'extrémité amont de la nappe, l'épaisseur tend vers h_0 en allant vers l'aval (cf. Fig. 4.9). Par conséquent, les deux profils doivent théoriquement se rencontrer en un point de hauteur inférieure à h_0 , à peu près au niveau où l'on a versé le fluide. Lorsque le volume de fluide est faible, l'épaisseur en ce point est nettement inférieure à h_0 . Dans ce cas, l'écoulement ne s'est probablement pas correctement développé, c'est-à-dire que certaines régions du fluide n'ont à aucun moment été soumises à des contraintes supérieures au seuil, et le profil de la surface libre peut être en pratique sensiblement différent de celui prédit par (4.44). En revanche, lorsque le volume de fluide est suffisant, il existe une large région au centre du dépôt pour laquelle $h \approx h_0$. Après avoir vérifié qu'une zone d'épaisseur à peu près constante existe bien, on peut donc estimer le seuil de contrainte en mesurant son épaisseur.

Ce résultat peut être extrapolé à un dépôt tridimensionnel obtenu en provoquant l'écoulement à partir d'un point [32]. L'utilisation des formules ci-dessus pour un dépôt de ce type repose encore une fois sur l'hypothèse qu'en chaque point du fluide, l'écoulement s'est pleinement développé à un moment quelconque. Une technique possible consiste à vider lentement un récipient au-dessus d'un point donné du plan. Le matériau s'étale alors vers l'aval et vers l'amont ainsi que sur les côtés, formant une sorte de langue symétrique par rapport à la ligne de plus grande pente. En première approximation, la formule (4.44) s'applique alors le long de cette ligne de plus grande pente comme dans le cas précédent. Le profil amont devant se raccorder au profil aval qui tend vers la hauteur critique, celle-ci n'est jamais exactement atteinte. Cependant, lorsque le volume de matériau est suffisamment grand, l'épaisseur loin des bords est très proche de la hauteur critique et, en première approximation, on peut l'utiliser pour estimer le seuil de contrainte à l'aide de (4.40). Enfin, lorsqu'on dépose un volume suffisant (pour que l'écoulement soit pleinement développé partout dans le fluide) d'un fluide à seuil sur un plan horizontal, le profil de la surface libre dans tout plan perpendiculaire passant par le point de vidange du fluide est en théorie :

$$h = \sqrt{\frac{2\tau_c}{\rho g}} x \quad (4.45)$$

où x est la distance par rapport à la périphérie. Le volume de ce dépôt vaut donc $\Omega = 4\pi R^{2.5} \sqrt{2\tau_c} / 5\sqrt{\rho g}$. Rappelons que les hypothèses à la base de ce calcul ne sont valides que si la hauteur du dépôt reste très inférieure à son rayon ($h(R) \ll R$). En

admettant que cette condition soit remplie lorsque $R = 10h(R)$, on trouve le volume minimal de matériau à utiliser pour que le calcul précédent soit valable :

$$\Omega_m = \frac{4\pi}{5} 10^5 \left(\frac{2\tau_c}{\rho g} \right)^3 \quad (4.46)$$

Le volume minimal pour la détermination du seuil sur un plan horizontal est rapidement trop élevé pour des fluides dont le seuil est supérieur à 100 Pa environ. De façon à ce que les calculs proposés soient pertinents (épaisseur faible devant l'extension longitudinale), il est alors préférable d'utiliser un plan très incliné car alors la suspension s'étale plus largement. Dans ce cas, il peut s'avérer utile d'augmenter la rugosité du plan car le risque de glissement est accru.

4.4 Procédures expérimentales spécifiques

On passe ici en revue les procédures à utiliser pour obtenir des résultats les plus proches possibles du comportement réel du matériau homogène lors de la détermination de la courbe d'écoulement, du seuil de contrainte éventuel du matériau et enfin de ses propriétés de thixotropie. Auparavant, on s'intéresse à une expérience de base, le palier de contrainte ou de vitesse, dont le principe est utilisé pour chacune des procédures ci-dessus. Notons qu'au cours de cette présentation on suppose que tous les phénomènes perturbateurs (sauf le creusement qu'il est difficile de maîtriser totalement) des expériences n'ont pas d'effets significatifs, ce qui signifie en pratique que seul le comportement intrinsèque du matériau peut avoir une influence sur les résultats obtenus.

4.4.1 Palier de contrainte ou de vitesse

L'expérience de base en rhéométrie consiste à imposer brutalement (à l'instant $t = 0$), à un échantillon qui est resté au repos pendant un certain temps, un niveau de vitesse de cisaillement ou de contrainte pendant une certaine durée. On observe alors des variations au cours du temps de la réponse qui présentent diverses caractéristiques fondamentales. Ici, on se place pour simplifier dans le cas où la vitesse de rotation de l'outil est imposée (le gradient de vitesse induit valant $\dot{\gamma}_0$), les résultats obtenus lorsque la contrainte est imposée étant analogues. Dans ces conditions, si l'échantillon est resté au repos suffisamment longtemps, la courbe donnant les évolutions de la contrainte mesurée au cours du temps commence d'abord par s'élever relativement rapidement jusqu'à un niveau maximum puis décroît lentement vers une droite horizontale. En l'absence de creusement évolutif (*cf.* § 4.4.2) ce résultat provient soit de la viscoélasticité du matériau, soit de sa thixotropie. Dans les deux cas, il faut en apparence fournir plus d'énergie au départ, soit parce qu'il se produit un chargement élastique au sein des liaisons entre particules, soit parce qu'il faut briser un certain nombre de liens

préexistants (qui ne se reformeront pas en cours d'écoulement mais seulement au cours d'un repos ultérieur). On ne s'intéressera qu'au cas où seule la thixotropie joue éventuellement un rôle. Si le matériau vient d'être cisaillé à vitesse rapide, la courbe de contrainte au cours du temps peut au contraire atteindre le régime permanent progressivement par valeur inférieure. Ceci résulte du fait que la suspension se restructure progressivement au cours du temps.

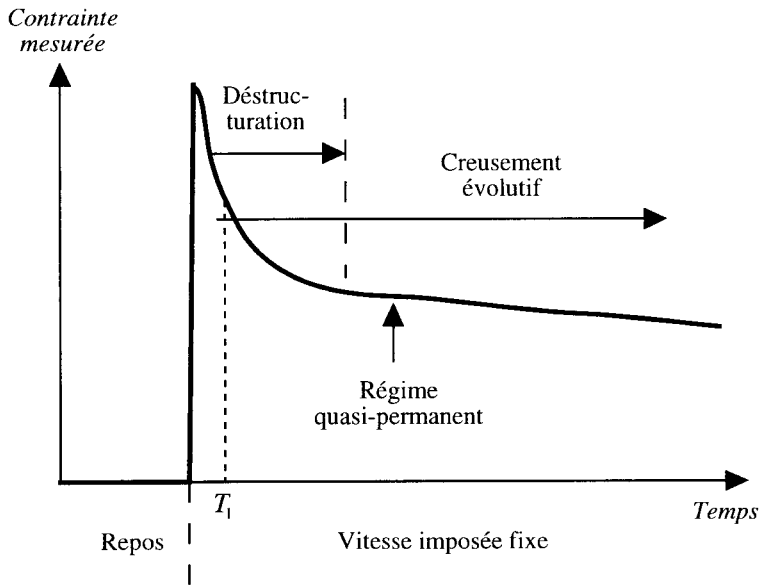


Fig. 4.10 : Expérience de base en rhéométrie : application d'un niveau de vitesse fixe à partir d'un instant donné, le matériau ayant été au préalable laissé au repos pendant une certaine durée. Lorsque le temps de repos préalable est suffisamment long, le matériau (dont l'élasticité est négligeable) commence par se déstructurer progressivement ce qui explique la montée quasi instantanée à un certain niveau de contrainte puis la décroissance progressive. À partir d'une durée largement supérieure au temps caractéristique T_1 du matériau on peut estimer que le régime permanent est atteint. Un effet de creusement évolutif peut aussi se superposer qui conduit en général à une variation plus lente mais continue du niveau de contrainte.

Finalement, le régime permanent est atteint lorsque la courbe de la contrainte en fonction du temps est suffisamment proche d'une droite horizontale située à un niveau τ_0 . Les évolutions de la contrainte, avant d'atteindre ce régime permanent, dépendent de l'état préalable du matériau et de sa thixotropie. Notons que les mesures de la contrainte au cours d'une période très courte suivant l'application du niveau de vitesse sont fortement liées aux caractéristiques de l'appareil. En effet, entre l'instant ($t = 0$) où

l'expérimentateur lance la commande d'imposition d'un certain niveau de vitesse et l'instant où le rhéomètre enregistre la première mesure correspondant à ce niveau de vitesse, diverses opérations sont réalisées par le rhéomètre : acheminement de la commande vers le système mécanique, entraînement du système mécanique (souvent l'opération la plus longue) jusqu'à atteindre le niveau de vitesse requis (en dépit des phénomènes d'inertie qui mettent en jeu la liaison fluide-outils), et enfin mesure de la contrainte à l'aide des capteurs. On peut considérer que les mesures obtenues ne sont pas représentatives d'un cisaillement à la vitesse imposée pendant un intervalle de temps (à partir de $t = 0$) qui varie, selon la qualité de l'appareil, entre quelques dizaines de micro-secondes et quelques secondes.

4.4.2 Détermination de la courbe d'écoulement

La technique idéale pour déterminer la courbe d'écoulement du matériau consiste à imposer différents niveaux de vitesse dans la plus large gamme possible et enregistrer le niveau de contrainte atteint en régime permanent. Actuellement, beaucoup d'appareils commerciaux estiment le gradient de vitesse et la contrainte en utilisant les formules simplifiées (cf. § 4.3). Dans certains cas il peut donc s'avérer utile de refaire les calculs directement à partir des mesures enregistrées par le rhéomètre en termes de couple et de vitesse de rotation, suivant les formules exactes fournies au § 4.3 et en effectuant les corrections éventuellement nécessaires lorsque des phénomènes perturbateurs ont été identifiés (cf. § 4.2). On obtient finalement un ensemble de couples ($\tau; \dot{\gamma}$) que l'on peut considérer comme représentatif de la courbe d'écoulement (expérimentale) dans une certaine gamme. Il appartient alors à l'expérimentateur de modéliser le comportement du matériau en calant sur ces mesures un modèle, par exemple l'un de ceux présentés au paragraphe 1.5.

La difficulté réside dans le fait qu'il n'est pas toujours pratique ou possible d'attendre le temps nécessaire pour atteindre le régime permanent. Ainsi, la technique la plus utilisée car la plus rapide avec les rhéomètres actuels consiste à programmer l'imposition d'une rampe de vitesses (ou de contraintes). Cela signifie que le rhéomètre applique successivement des niveaux de vitesses (ou de contraintes) croissants, puis effectue éventuellement le chemin inverse. La durée de chaque palier est prédéterminée. L'appareil estime la valeur moyenne du niveau de contrainte (ou de vitesse) pendant la totalité du palier ou durant les derniers instants de ce palier. Dans la suite, on se contentera d'examiner les problèmes posés par l'utilisation de la rampe de contraintes en retenant qu'on rencontre des problèmes analogues avec des rampes de vitesses.

L'utilisation de la technique de la rampe de contraintes pour déterminer la courbe d'écoulement d'une suspension doit fondamentalement être réservée à des matériaux dont on maîtrise déjà très bien les propriétés globales ou à des mesures rapides et éventuellement comparatives entre matériaux. En effet, il faut bien se rendre à l'évidence

que les résultats obtenus par cette technique peuvent être fortement influencés par diverses propriétés spécifiques du matériau ou par des phénomènes perturbateurs.

Chaque courbe obtenue correspond en fait à un état du matériau qui peut être très éloigné du régime permanent notamment si sa structure interne évolue au cours du temps car il est thixotrope (cf. Fig. 4.10). En fait, la moyenne des valeurs de la vitesse à contrainte fixée pendant la durée d'un palier (Δt) ou vers la fin de ce palier ne s'approche de la valeur en régime permanent que si le temps caractéristique des évolutions du matériau (T_1) lors d'un écoulement est très inférieur à Δt . Dans le cas contraire (T_1 supérieur ou de l'ordre de Δt), l'état du matériau à la fin de chaque palier ou en moyenne au cours du palier dépend de l'histoire de l'écoulement. Par conséquent, les différents points de la courbe d'écoulement expérimentale obtenue correspondent à différents états du matériau. Par exemple, si la viscosité du matériau décroît au cours du temps, la courbe d'écoulement obtenue lors de la montée en contrainte peut être décalée (par rapport à la courbe d'écoulement correspondant effectivement au régime permanent) vers les faibles gradients de vitesse, parce qu'à chaque nouveau niveau de contrainte la suspension n'a pas suffisamment de temps pour se déstructurer. À l'inverse, à la descente, à chaque nouveau niveau de contrainte, l'état du matériau n'a pas nécessairement le temps d'atteindre un régime permanent, *a priori* moins déstructuré, pendant la durée de chaque palier. La courbe d'écoulement (à la descente) est alors décalée vers les forts gradients de vitesse. Ceci explique notamment la formation d'une boucle d'hystérésis lorsqu'on enchaîne montée et descente.

Pour résoudre ce problème, il est donc fondamental d'utiliser des paliers d'une durée largement supérieure au temps caractéristique du matériau. Cependant, ce temps caractéristique varie avec le gradient de vitesse résultant. Plus précisément, il est probable que l'état du matériau atteigne le régime permanent pour un brassage équivalent, c'est-à-dire une déformation constante quelle que soit la vitesse imposée. Dans ces conditions, il paraît judicieux d'imposer des paliers d'une durée à peu près inversement proportionnelle à la vitesse de cisaillement obtenue à chaque niveau de contrainte (s'il est possible de coupler la commande à la mesure). En outre, si on utilise cette procédure lorsque la durée d'un palier n'est pas largement supérieure à la durée caractéristique du matériau, on obtient une courbe d'écoulement qui ne correspond certes pas au régime permanent mais au moins dont les niveaux correspondants à différents gradients de vitesse sont cohérents entre eux, c'est-à-dire sont associés à des états relatifs (par rapport à celui attendu en régime permanent) de déstructuration du matériau analogue. Notons toutefois que l'état du matériau évoluant aussi avec l'histoire de l'écoulement est perturbé par le cisaillement effectué aux niveaux inférieurs, ce qui peut donc perturber la correspondance des états relatifs atteints pour différents niveaux. Il est encore possible de s'affranchir plus ou moins de cet effet en imposant une rampe de contrainte telle que le gradient de vitesse augmente pratiquement d'un ordre de grandeur à chaque nouveau palier. Il est alors probable que la déstructuration induite par le cisaillement au palier précédent soit négligeable vis-à-vis de la déstructuration au niveau de vitesse actuel. Quoi qu'il en soit, cette procédure reste délicate d'emploi, notamment à

cause de la difficulté de maîtrise du niveau de la vitesse atteint à chaque contrainte, et donc de la déformation totale. Par conséquent, il semble préférable, pour obtenir une courbe d'écoulement correspondant au régime permanent ou à un état relatif de référence dans une large gamme de gradients de vitesse, de travailler à vitesse imposée. On peut alors procéder comme indiqué ci-dessus, en imposant des paliers de vitesse suffisamment longs. En partant d'un gradient de vitesse faible $\dot{\gamma}_0$, on peut alors par exemple imposer successivement les niveaux $\dot{\gamma}_0$, $10\dot{\gamma}_0$, $100\dot{\gamma}_0$, etc., pendant les durées respectives $1/\dot{\gamma}_0$, $1/10\dot{\gamma}_0$, $1/100\dot{\gamma}_0$, etc.

Compte tenu de l'influence possible de la thixotropie sur la position de la courbe d'écoulement expérimentale, la technique de la rampe de contrainte est aussi utilisée pour étudier la thixotropie du matériau. Notamment, on compare la courbe obtenue à la descente et celle obtenue à la montée dans le cas où la durée du palier est inférieure ou du même ordre que le temps caractéristique du matériau. Dans ce cas, ces courbes ne se superposent pas et forment ce que l'on appelle une boucle d'hystérésis (cf. Fig. 4.12). Compte tenu de ce qui vient d'être dit concernant l'état variable du matériau atteint à la fin de chaque palier, on comprendra aisément que ces boucles ne peuvent pas traduire une propriété bien définie du matériau dans une gamme de gradients de vitesse. Toutefois, si on emploie la procédure signalée ci-dessus consistant à appliquer des paliers de durée inversement proportionnelles au niveau de vitesse et en augmentant suffisamment rapidement la contrainte, on peut s'attendre à obtenir une courbe d'hystérésis pertinente. Le décalage de la vitesse par rapport à la vitesse en régime permanent à différents niveaux est alors associé à un état relatif de déstructuration analogue.

Remarquons au passage que les calculs effectués par les rhéomètres, qui moyennent la vitesse enregistrée pendant une certaine durée, ne permettent pas de discerner des variations de vitesse importantes, comme celles résultant de l'application d'une contrainte d'un niveau proche ou inférieur à celui du seuil de contrainte. On peut en effet, dans ce cas, s'attendre à des courbes de fluage du type présenté en Fig. 4.11, dont la pente, c'est-à-dire le gradient de vitesse, varie considérablement dans une première phase. Il en résulte que le rhéomètre, qui s'appuie sur la vitesse mesurée en moyenne durant tout le palier ou à la fin du palier, fournit après calculs une courbe d'écoulement au sein de laquelle le gradient de vitesse varie en général progressivement à partir d'une valeur très faible pour de faibles valeurs de la contrainte. Aucun seuil de contrainte ne donc peut être détecté sérieusement par cette procédure, notamment lorsque la durée des paliers est de l'ordre du temps d'évolution de la courbe de fluage avant stabilisation autour d'une droite (cf. Fig. 4.11). Lorsque la durée de chaque palier est suffisamment longue, le seuil de contrainte peut être détecté surtout à contrainte imposée (cf. § 4.4.3).

Des effets de bord peuvent aussi perturber les mesures et évoluer au cours du temps. Ceci se produit tout particulièrement avec les géométries plan-plan ou cône-plan. Après nettoyage de la périphérie, on peut craindre essentiellement un phénomène de creusement. Celui-ci, rappelons-le, est évolutif, il dépend du temps et de la vitesse de cisaillement. Compte tenu de l'effet important du creusement sur les mesures (cf. § 4.2.4) il

convient donc de déterminer ses évolutions au mieux avant de se lancer dans la détermination expérimentale du comportement. Pour cela, l'expérience de base consiste encore à imposer un niveau de vitesse fixe pendant une durée assez longue. Si un creusement évolutif se produit, on observe alors en général une croissance rapide de la contrainte liée à la thixotropie, puis une décroissance beaucoup plus lente (cf. Fig. 4.10) qui peut continuer indéfiniment jusqu'à atteindre une contrainte nulle lorsque l'échantillon s'est séparé en deux parties indépendantes et qui résulte du creusement. Dans certains cas, le creusement peut se développer beaucoup plus rapidement et interférer avec d'éventuels effets de la thixotropie, ce qui complique considérablement l'étude. Il est alors préférable de changer de géométrie de mesure.

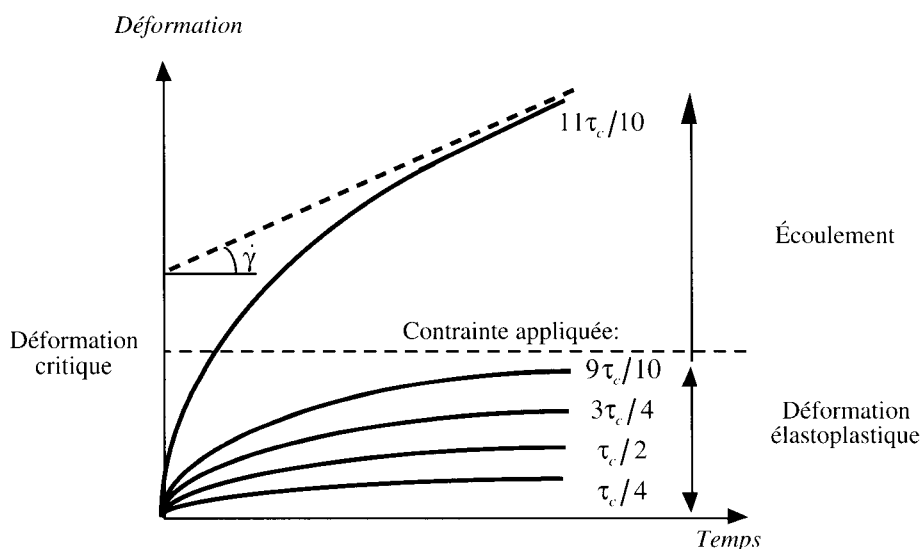


Fig. 4.11 : Représentation schématique de l'évolution de la déformation au cours du temps lors d'expériences de fluages (contrainte fixe imposée) pour différents niveaux de contrainte appliqués à un fluide à seuil simple. Tant que la contrainte est inférieure au seuil de contrainte, la déformation semble tendre vers une valeur finie. Lorsque la contrainte dépasse de peu le seuil de contrainte, la courbe déformation-temps tend vers une asymptote de pente non nulle égale au gradient de vitesse correspondant.

Le creusement peut aussi varier en fonction du gradient de vitesse. Si on est incapable de maîtriser l'évolution du creusement, il est possible de réaliser des mesures cohérentes (entre elles) en déterminant la forme de la courbe d'écoulement avec un pourcentage d'erreur à peu près constant sur chaque point de mesure. Pour cela, on réalise les mesures à partir d'une référence de creusement : on impose, pendant une durée suffisante à la quasi-stabilisation du creusement, un niveau de contrainte donné

permettant d'obtenir un cisaillement rapide ; puis on impose brutalement un nouveau niveau de contrainte plus faible ; le creusement met alors un certain temps (T_{cr}) pour se rapprocher de son état quasi-permanent (correspondant à la partie de la courbe de vitesse lentement décroissante) ; si le temps caractéristique (T_l) des propriétés de thixotropie du matériau est nettement plus court, on peut alors, en enregistrant le niveau de vitesse atteint entre T_l et T_{cr} , obtenir un niveau correspondant à un creusement à peu près équivalent à celui du niveau de contrainte plus élevé. On recommence alors cette procédure élémentaire pour différents niveaux de vitesse en revenant toujours au cisaillement rapide de référence.

4.4.3 Détermination du seuil de contrainte

Afin de juger de la procédure la plus adaptée à la détermination du seuil de contrainte d'une suspension, il est utile de se rappeler la définition mécanique de cette propriété. En deçà d'une certaine valeur de contrainte, le matériau se comporte comme un solide généralement élastique. De ce fait, à contrainte imposée inférieure à τ_c , les courbes de fluage (déformation en fonction du temps) tendent vers une asymptote horizontale (cf. Fig. 4.11), ce qui signifie que la déformation induite est finie. Lorsqu'on relâche la contrainte, le matériau est susceptible de revenir dans son état initial (déformation nulle). En pratique, il y a toujours des dissipations d'énergie qui causent un retour incomplet du matériau. Si l'on trace la courbe de contrainte en fonction de la déformation limite correspondante (asymptote) ou de la partie élastique de la déformation (déformation réversible, c'est-à-dire correspondant au retour en arrière après relâchement de la contrainte) on peut néanmoins obtenir approximativement une droite dont la pente est le module d'élasticité de la suspension. Lorsque la contrainte appliquée est supérieure à τ_c , la courbe de fluage tend vers une asymptote de pente non nulle (cf. Fig. 4.11), ce qui signifie qu'il y a effectivement écoulement à un gradient de vitesse égal à la pente de cette asymptote.

D'après cette description, la procédure idéale de détermination du seuil de contrainte apparaît clairement : il faut imposer des valeurs croissantes de contrainte et déterminer la limite au-delà de laquelle un écoulement est obtenu. Si elle est appliquée de manière stricte, cette procédure est en pratique longue et délicate car il faut imposer chaque niveau de contrainte pendant un temps suffisant pour être certain d'avoir atteint le régime permanent, ce qui n'est pas évident lorsqu'on applique une contrainte juste au-delà du seuil, car la vitesse est alors très faible. En outre, pour des fluides thixotropes, il est crucial que le matériau soit au repos complet avant chaque nouvelle valeur de contrainte. Cette procédure est donc difficilement utilisable pour des matériaux dont le temps caractéristique de retour à l'équilibre au repos est de l'ordre de plusieurs jours. Sur des durées d'expériences assez longues, des effets perturbateurs peuvent en outre facilement se développer. Si cette technique permet donc d'estimer assez rapidement la valeur du seuil de contrainte, elle ne s'avère pas très pratique pour déterminer la courbe d'écoulement dans une large gamme de gradients de vitesse. Ceci confirme notre

conclusion précédente (§ 4.4.1) concernant l'intérêt d'expériences à vitesse imposée pour ce type de mesure.

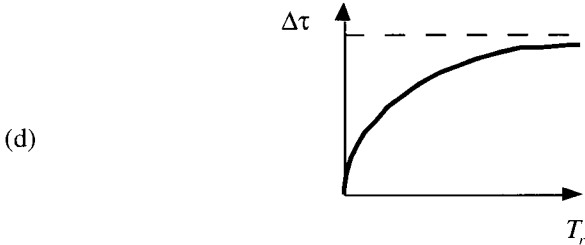
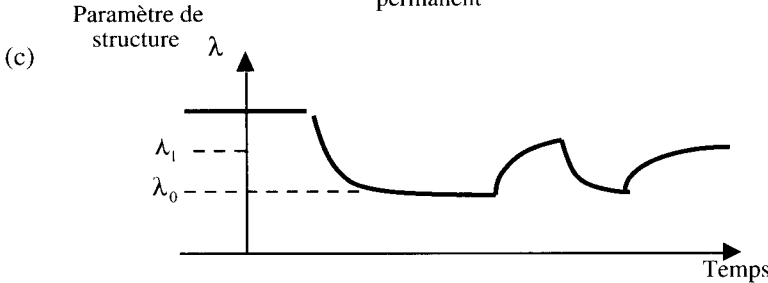
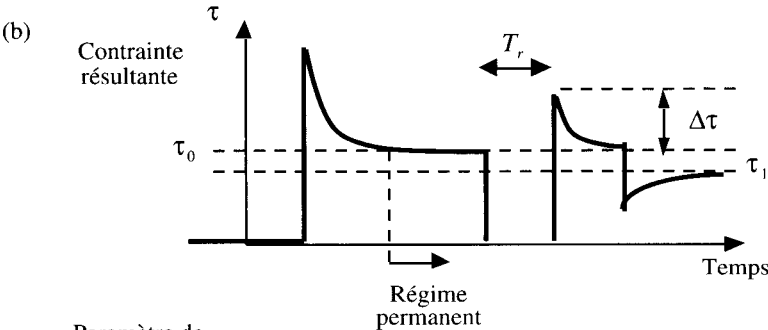
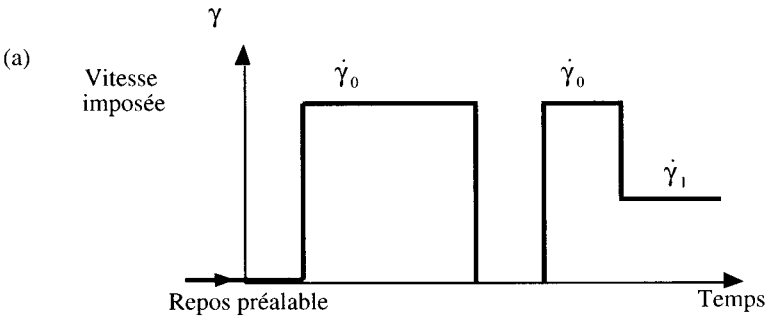
La valeur du seuil de contrainte peut aussi être estimée à partir d'expériences à vitesse imposée. Il s'agit alors tout simplement d'extrapoler la courbe d'écoulement expérimentale vers les faibles gradients de vitesse ou, ce qui est très proche, de caler sur cette courbe un modèle mathématique contenant un seuil (*cf.* § 1.5.6). Cette technique est évidemment très imparfaite car la valeur de seuil obtenue est très subjective : elle dépend beaucoup du mode d'extrapolation ou du modèle utilisé, notamment si les mesures ont été obtenues dans une gamme restreinte de gradients de vitesse. Pour minimiser cette erreur, il faut réaliser les mesures dans une très large gamme de vitesses, contenant suffisamment de valeurs dans le régime colloïdal (*cf.* chap.2). On dispose ainsi en général d'une technique relativement rapide, quoique approximative, d'estimation du seuil de contrainte. Néanmoins, cette technique peut conduire à des erreurs importantes si on a affaire à un fluide à minimum. En effet, dans ce cas, on ne se rend pas nécessairement compte que les écoulements aux faibles gradients de vitesse sont instables et l'on enregistre les mesures correspondantes qui peuvent se traduire sous la forme d'un plateau de contrainte horizontal et donc un seuil largement sous-estimé. À tout le moins, il est donc important de compléter l'estimation du seuil de contrainte et l'éventuelle modélisation de la courbe d'écoulement par quelques mesures à contrainte imposée. Il peut s'agir simplement d'une mesure sur un plan incliné (*cf.* § 4.3.5).

4.4.4 Évaluation de la thixotropie

L'expérience de base permettant d'étudier la thixotropie d'une suspension est encore une fois la mesure de la vitesse (contrainte) au cours du temps lors de l'imposition d'une contrainte (vitesse) fixe. On distingue alors, en l'absence de phénomènes perturbateurs, les évolutions temporelles du matériau (*cf.* Fig. 4.12). Comme on s'intéresse en fait d'un point de vue physique aux évolutions de sa structure interne, il est crucial de maîtriser l'état initial du matériau. Si l'on souhaite déterminer les évolutions de la viscosité au cours du temps en fonction de différents niveaux de contrainte, il faut pouvoir répéter l'expérience de base ci-dessus à partir d'un état de référence du matériau. L'état de référence idéal correspond à un repos suffisant pour que la structure interne du matériau n'évolue plus sensiblement. En pratique, pour des matériaux dont le temps de restructuration est au minimum de l'ordre de quelques heures, il n'est pas facile d'utiliser cet état de référence. On utilise plus souvent un état de référence obtenu après un cisaillement à vitesse élevée, ce qui permet d'obtenir rapidement un état de déstructuration stable, suivi d'un repos pendant une durée donnée. Avant chaque mesure, on déstructure ainsi le matériau à peu près de la même manière quelle que soit son histoire préalable, puis on le laisse se restructurer toujours de la même manière. On peut alors par exemple choisir d'étudier la thixotropie au travers de la courbe d'évolution de la différence de niveau de contrainte entre le pic et le régime permanent ($\Delta\tau$) en fonction du temps de repos préalable (T_r) (*cf.* Fig. 4.12).

Un problème essentiel se pose cependant vis-à-vis de l'interprétation de ce type de mesures. On a supposé jusqu'ici que l'état du matériau était homogène au sein du volume considéré. Ceci est à peu près vrai si le gradient de vitesse est homogène, c'est-à-dire essentiellement dans le cas de la géométrie cône-plan. En revanche, dans les autres cas, l'état du matériau peut varier considérablement d'un point à un autre au sein du rhéomètre. Dans le cas du rhéomètre plan-plan, par exemple, le gradient de vitesse étant nul le long de l'axe central, on pourrait imaginer que le matériau ne se déstructure jamais dans cette région, quelles que soient les expériences réalisées. Si l'hétérogénéité du gradient de vitesse peut être prise en compte dans les calculs de rhéométrie, et si on peut aussi tenir compte de variations temporelles homogènes de la viscosité, il n'est en revanche pas possible de tenir compte des variations spatiales de l'état du matériau. En toute rigueur, il faut donc utiliser la géométrie cône-plan lorsqu'on souhaite étudier la thixotropie d'un matériau.

Rappelons que la thixotropie ne peut pas toujours, en pratique, être distinguée des conséquences de phénomènes perturbateurs. Le creusement, l'évaporation, la fracturation peuvent induire des variations temporelles de la viscosité à contrainte ou vitesse fixe. Comme nous l'avons déjà indiqué dans ce chapitre, on peut souvent distinguer ces différents phénomènes au vu de leurs temps caractéristiques et de leurs évolutions lors d'une ou plusieurs expériences. Signalons enfin que les imperfections évidentes des rhéomètres ne permettent pas d'enregistrer des variations temporelles extrêmement rapides, et peuvent donc masquer certaines évolutions du matériau.



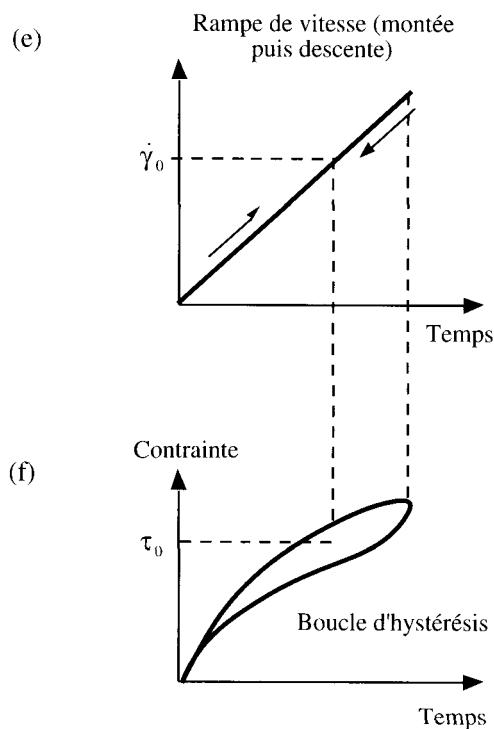


Fig. 4.12 : Évolutions typiques de la contrainte et du paramètre de structure d'un matériau en fonction de l'histoire des sollicitations (en l'occurrence le gradient de vitesse imposé (a)). Selon le temps de repos entre deux niveaux de vitesse, les variations de la contrainte (b) sont différentes. Celle-ci tend toujours à rejoindre une position d'équilibre, mais ce processus démarre à un niveau d'autant plus élevé que le temps de repos préalable est grand. Ceci résulte du fait que le matériau se restructure et offre une résistance d'autant plus grande (c). Cette constatation permet de tracer une courbe d'évolution de la structure interne en fonction du temps de repos basée sur l'écart de contrainte entre le niveau maximum enregistré lors de l'imposition brutale d'un gradient de vitesse et le niveau permanent correspondant (d). Cette courbe est plus facilement exploitable en termes physiques que la courbe d'hystérésis (f) obtenue en imposant une rampe de contrainte comprenant une montée suivie d'une descente (e). La forme de cette dernière reflète en effet l'ensemble des propriétés d'écoulement de la suspension, ce qui en revanche peut constituer un avantage dans le cas où l'on ne dispose pas de moyens suffisants (en termes de temps et de techniques) pour explorer plus en détail ces propriétés. Celle-ci dépend de plusieurs paramètres tels que la durée de chaque palier de contrainte (supposée très courte dans le diagramme présenté ici, ce qui explique que la rampe apparaît continue) et la vitesse de restructuration en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Annexe 4.1

Stabilité d'un écoulement en cisaillement simple

On considère le cisaillement simple idéal correspondant à l'écoulement entre deux plans parallèles infiniment longs et larges et animés d'un mouvement relatif de glissement l'un par rapport à l'autre. Le matériau situé entre ces deux plans a une viscosité apparente dépendant du gradient de vitesse $\eta(\dot{\gamma}) = \tau(\dot{\gamma})/\dot{\gamma}$. On suppose que le cisaillement idéal (donné par (1.28)) est perturbé si bien que la composante principale de la vitesse s'exprime maintenant :

$$u(y,t) = \dot{\gamma}_0 y + \varepsilon U(y,t) \quad (4.47)$$

où $\varepsilon \ll 1$ et U est de l'ordre de u . $\dot{\gamma}_0$ est le gradient de vitesse correspondant au cisaillement théorique non perturbé. On néglige les perturbations quelconques des autres composantes de la vitesse ainsi que les perturbations de u et de la pression dans les directions Ox et Oz , ce qui revient à considérer que la surface de cisaillement (surface des plans) est beaucoup plus grande que l'épaisseur de fluide cisailée (hypothèse de lubrification).

Dans ces conditions, les équations du mouvement se résument au premier ordre à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}) \quad (4.48)$$

D'après (4.48) et compte tenu des hypothèses ci-dessus, le gradient de vitesse ($\dot{\gamma}$) au sein de cet écoulement perturbé s'écrit au premier ordre :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.49)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre (4.49) nous donne :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \left(\eta(\dot{\gamma}_0) + \dot{\gamma}_0 \left(\frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} \right)_{\dot{\gamma}_0} \right) \quad (4.50)$$

On suppose maintenant que la perturbation s'exprime sous la forme de la somme de perturbations périodiques (modes indépendants) du type $U_0 \exp(\omega t + iky)$. Après introduction dans (4.50) on trouve :

$$\omega = -\frac{k^2}{\rho} \left(\eta(\dot{\gamma}_0) + \dot{\gamma}_0 \left(\frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} \right)_{\dot{\gamma}_0} \right) \quad (4.51)$$

ce qui nous montre que le taux de croissance de la perturbation est positif, c'est-à-dire que l'écoulement est instable, lorsque :

$$\frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} < 0 \quad (4.52)$$

Ainsi, si la courbe d'écoulement d'un matériau a une partie décroissante, les écoulements correspondants sont instables. Ceci est valable pour tous les types d'écoulements viscosimétriques envisagés dans ce chapitre.

Références

- [1] Barnes, H.A. 1995. A review of the slip (wall depletion) of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers: its cause, character and cure. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 56, 221-251.
- [2] Mooney, M. 1931. Explicit formulas for slip and fluidity. *J. Rheol.*, 2, 210-222.
- [3] Yoshimura, A. and Prud'homme, R.K. 1988. Wall slip corrections for Couette and parallel disk viscometers. *J. Rheol.*, 32, 53-67.
- [4] Coussot, P., Leonov, A.I. and Piau, J.-M. 1993. Rheology of concentrated dispersed systems in a low molecular weight matrix. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 46, 179-217.
- [5] Pignon, F., Magnin, A. and Piau, J.-M. 1996. Thixotropic colloidal suspensions and flow curves with minimum: identification of flow regimes and rheometric consequences. *J. Rheol.*, 40, 573-587.
- [6] Coussot, P. 1992. *Rhéologie des laves torrentielles - Étude de suspensions et dispersions concentrées*. Thèse de l'INPG, Grenoble, France.
- [7] Hutton, J.F. 1975. On using the Weissenberg Rheogoniometer to measure normal stresses in lubricating greases as examples of materials which have a yield stress. *Rheol. Acta*, 14, 979-992.
- [8] Magnin, A. and Piau, J.M. 1990. Cone-and-plate rheometry of yield stress fluids. Study of an aqueous gel. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 36, 85-108.
- [9] Powell, R.L. 1988. Rotational viscometry. In *Rheometrical measurement*, A.A. Collyer and D.W. Clegg (Ed.), Amsterdam, Elsevier Applied Science, Chapter 9, 247-296.
- [10] Davis, R.H. and Acrivos, A. 1985. Sedimentation of noncolloidal particles at low Reynolds numbers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17, 91-118.
- [11] Reeves, T.J. 1990. On-line viscosity measurement under industrial conditions. *Coal Prep.*, 8, 1-9.
- [12] Klein, B., Laskowski, J.S. and Partridge, S.J. 1995. A new viscometer for rheological measurements on settling suspensions. *J. Rheol.*, 39, 827-840.
- [13] Cox, R.G. and Mason, S.G. 1971. Suspended particles in fluid flow through tubes. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 3, 291-316.
- [14] Leighton, D. and Acrivos, A. 1987. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, 181, 415-439.

- [15] Phillips, R.J., Armstrong, R.C., Brown, R.A., Graham, A.L. and Abbott, J.R. 1992. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Phys. Fluids*, A4, 30-40.
- [16] Chow, A.W., Sinton, S.W., Iwamiya, J.H. and Stephens, T.S. 1994. Shear-induced particle migration in Couette and parallel-plate viscometers: NMR imaging and stress measurements. *Phys. Fluids*, 6, 2561-2576.
- [17] Krishnan, G.P., Beimfohr, S. and Leighton, D.T. 1996. Shear-induced radial segregation in bidisperse suspensions. *J. Fluid Mech.*, 321, 371-393.
- [18] Shauly, A., Wachs, A. and Nir, A. 1998. Shear-induced particle migration in a polydisperse concentrated suspension. *J. Rheol.*, 42, 1329-1348.
- [19] Tanner, R.I. 1988. *Engineering Rheology*, Clarendon Press, Oxford.
- [20] Coleman, B.D., Markowitz H. and Noll, W. 1966. *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, New-York, Springer Verlag.
- [21] Yang, T.M.T. and Krieger, I.M. 1978. Comparison of methods for calculating shear rates in coaxial viscometers. *J. Rheol.*, 22, 413-421.
- [22] Nguyen, Q.D. and Boger, D.V. 1992. Measuring the flow properties of yield stress fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24, 47-88.
- [23] Borgia, A. and Spera, F.J. 1990. Error analysis for reducing noisy wide-gap concentric cylinder rheometric data for nonlinear fluids: theory and applications. *J. Rheol.*, 34, 117-135.
- [24] Macosporran, W.C. 1989. Direct numerical evaluation of shear rates in concentric cylinder viscometry using least-squares cubic splines. *J. Rheol.*, 33, 745-755.
- [25] Astarita, G., Marrucci, G. and Palumbo, G. 1964. Non-Newtonian gravity flow along inclined plane surfaces. *Ind. Eng. Chem. Fund.*, 3, 333-339.
- [26] Uhlherr, P.H.T, Park, K.H., Tiu, C. and Andrews, J.R.G. 1984. Yield stress fluid behaviour on an inclined plane. in *Advances in Rheology*, B. Mena, A. Garcia-Rejon, and C. Rangel-Nagaile (Ed.), Mexico City, 2, 183-190.
- [27] Coussot, P. and Boyer, S. 1995. Determination of yield stress fluid behaviour from inclined plane test. *Rheol. Acta*, 34, 534-543.
- [28] Hulme, G. 1974. The interpretation of lava flow morphology. *Geophys. J. Roy. Astrophys. Soc.*, 39, 361-383.
- [29] Coussot, P. and Proust, S. 1996. Slow, unconfined spreading of a mudflow. *J. Geophys. Res.*, 101, 25,217-25,229.
- [30] Wilson, S.D.R. 1998. The steady, spreading flow of a rivulet of mud. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 79, 77-85.
- [31] Liu, K.F. and Mei, C.C. 1989. Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 207, 505-529.
- [32] Coussot, P., Proust, S. and Ancey, C. 1996. Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 66, 55-70.

Le magma

5.1 Introduction

Par leurs volumes et leurs conséquences géologiques, les mouvements de magmas sont certainement les écoulements de fluides complexes naturels les plus importants au niveau du globe terrestre. Les roches composant les couches profondes du globe terrestre sont susceptibles d'entrer en fusion par le biais de divers mécanismes thermodynamiques (*cf.* [1]). Le magma en fusion, moins visqueux et moins dense que les roches environnantes, se propage entre les roches vers la surface libre et se concentre dans des cavités appelées chambres magmatiques. Divers phénomènes importants se produisent au sein de ces chambres : cristallisation fractionnée, fusion des parois, échanges de composés volatils avec les roches environnantes, mélanges de différents types de magmas, séparation en plusieurs types de liquide. Nous n'étudierons pas en détail ces divers phénomènes. Près des couches supérieures, et surtout lorsqu'il parvient à la surface du globe, le magma tend à se cristalliser essentiellement sous l'effet d'une diminution de température, donnant ainsi naissance à la plupart des roches à la surface libre de l'écorce terrestre. Ce phénomène est cependant progressif et les formes ou les structures internes du relief ainsi que les caractéristiques des écoulements de laves volcaniques résultent pour une grande part des évolutions de la loi de comportement du magma, elles-mêmes liées aux modifications de ses caractéristiques. La compréhension physique de ces derniers phénomènes constitue l'objet essentiel de ce chapitre. Les écoulements de laves, au sein desquels les évolutions du matériau sont cruciales puisque celui-ci passe rapidement (par rapport aux temps caractéristiques des autres formations géologiques) de l'état liquide à l'état solide, sont donc concernés au tout premier chef. Cependant, ce chapitre fournit aussi quelques éléments utiles en vue de l'interprétation physique de certains phénomènes de migration ou de ségrégation au sein des chambres magmatiques. Dans un premier temps, nous détaillons les propriétés physiques des magmas (§ 5.2). Nous donnons ensuite (§ 5.3) des éléments de base concernant la loi

de comportement de ces matériaux et ses modifications en fonction de divers paramètres (cristallisation, température, teneur en silice, etc.).

5.2 Propriétés physiques des magmas

5.2.1 Composition

Les magmas sont des bains naturels essentiellement constitués de silicates et d'aluminosilicates. La structure de base de ces mélanges est un tétraèdre dont le centre est occupé par un ion silicium (éventuellement aluminium) et les sommets par des ions oxygène. La liaison Si-O est une liaison forte. Lorsque la proportion de silice est grande, les atomes d'oxygène appartiennent à plusieurs tétraèdres, formant ainsi un réseau tridimensionnel. La présence de métaux tels que du magnésium, calcium, sodium ou fer, tend à briser la continuité de ce type de réseau. Les magmas sont très divers, mais il est commode de se référer à une classification simplifiée (relative aux laves) en fonction de leur teneur en silice (*cf.* Fig. 5.1). Les magmas les plus fréquents sont de loin les basaltes, qui proviennent en général de la fusion du manteau. À l'autre extrême les rhyolites, beaucoup plus rares, résultent en général de la fusion de l'écorce terrestre.

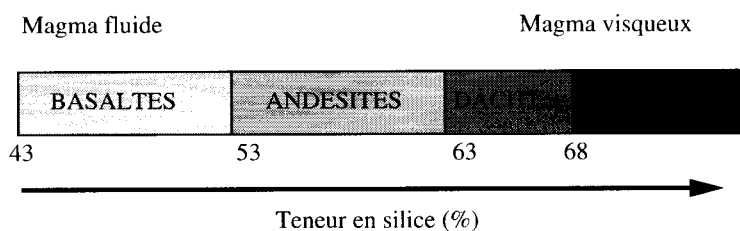


Fig. 5.1 : Classification simplifiée des magmas en fonction de leur teneur en silice (fraction volumique en pour cent). La viscosité augmente en général avec la teneur en silice. (D'après [10])

Les magmas contiennent aussi des cristaux, dont la quantité et les caractéristiques dépendent de l'histoire thermocinétique du système (*cf.* § 5.2.3). En première approximation, ces cristaux sont d'autant plus nombreux que la température du système est faible, toutes choses égales par ailleurs. On trouve encore, au sein des magmas, divers composés volatils, dissous ou combinés. Ces éléments volatils (constitués d'oxygène, de chlore, d'hydrogène, de carbone, ou encore de fluor), se séparent en général sous forme gazeuse plus ou moins totalement de la phase liquide avant et durant la solidification. Certains restent toutefois partiellement piégés sous formes d'inclusions fluides ou entrent dans la composition de minéraux déterminés.

La masse volumique d'un magma purement liquide dépend de ses composants et augmente lorsque la proportion de silice diminue : elle varie de 2200 kg.m^{-3} pour un rhyolite, à 2800 kg.m^{-3} pour un basalte. La masse volumique varie en outre sensiblement (jusqu'à 15 % environ) dans les gammes de température qui nous intéressent ici (de 800 à 1400 °C). Les cristaux sont légèrement plus denses (quelques pour cent) que la phase liquide correspondante.

5.2.2 Propriétés thermiques

La température d'un magma lors d'une éruption est en moyenne d'autant plus grande que l'on a affaire à un magma contenant une faible proportion de silice : d'environ 1200 °C pour des basaltes, à 800 °C pour des rhyolites à la sortie de la bouche du volcan. Généralement, cette température est très proche voire inférieure à la température du liquidus (voir ci-après) mais supérieure à la température du solidus. La température du magma décroît au cours de l'écoulement du fait des échanges thermiques avec l'environnement. On peut estimer très approximativement la température d'une lave à partir de sa couleur : rouge-brun [500-650 °C], rouge foncé [650, 800 °C], rouge vif [800-1000 °C], orange [1000-1150 °C], jaune-blanc [1150-1350 °C]. Notons que ce critère est approximatif et qu'il s'applique à la température de surface, qui peut être très différente de la température moyenne de la lave.

La loi de conduction de la chaleur pour un corps isotrope s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (5.1)$$

où $\mathbf{q}$ est le flux de chaleur. Les magmas sont de mauvais conducteurs de la chaleur. Leur conductivité thermique (λ) varie avec la température de 2 à $8 \text{ J.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}$, selon les types de laves. Par ailleurs, la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de ΔT vaut :

$$\delta Q = de + p dv = C_p dT \quad (5.2)$$

où C_p , la chaleur spécifique à pression constante des magmas, est de l'ordre de $1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Enfin, la chaleur latente (L) de fusion des magmas, c'est-à-dire l'énergie nécessaire à la fusion (ou libérée par la cristallisation) de l'unité de masse du matériau lorsque les deux phases coexistent, est de l'ordre de 3.10^5 J.kg^{-1} . Par conséquent, la même quantité de chaleur est nécessaire pour un changement de phase que pour modifier la température d'un volume donné de matériau de 300 °C. Autrement dit, à flux de chaleur constant, il faudra autant de temps pour élever la température de la lave de 300 °C que pour induire la fusion ou la cristallisation d'un même volume.

Avant la phase d'arrêt (vitesse proche de zéro), les échanges de chaleur avec le sol, de même que les échanges avec l'air par convection, sont en général négligeables [2]. En

revanche, les échanges de chaleur par rayonnement thermique avec l'air sont conséquents. Le flux d'énergie dissipée par rayonnement s'exprime sous la forme :

$$q_r = \varepsilon \sigma T^4 \quad (5.3)$$

où ε est l'émissivité du matériau (comprise entre 0 et 1) et σ est une constante qui vaut $5,7.10^{-8} \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{K}^{-4}$. Pour les roches, ε vaut environ 0,75.

Lorsque la compressibilité du fluide est négligeable, en l'absence de réactions chimiques, et en supposant que l'on a affaire à un fluide newtonien, l'équation de conservation de l'énergie sous forme locale (1.57) s'écrit donc, après adimensionnalisation :

$$P_{e_t} \frac{dT^*}{dt^*} = \Delta^* T^* + 2B_r \text{tr}(\mathbf{D}^{*2}) \quad (5.4)$$

avec

$$T^* = \frac{T}{\Delta T_0} ; t^* = \frac{tV}{H} ; \mathbf{D}^* = \left(\frac{H}{V} \right)^2 \mathbf{D} ; x^* = \frac{x}{H} \quad (5.5)$$

où H , V et ΔT_0 sont une longueur (par exemple la profondeur de fluide), une vitesse (par exemple la vitesse moyenne à travers une section), et une différence de température, caractéristiques de l'écoulement. En outre, deux nombres adimensionnels ont été introduits :

$$P_{e_t} = \frac{\rho C_p V H}{\lambda} ; B_r = \frac{\mu V^2}{\lambda \Delta T_0} \quad (5.6)$$

Le nombre de Péclet pour les transferts de chaleur, P_{e_t} , représente le rapport d'un temps caractéristique des transferts de chaleur par convection (liés aux mouvements moyens du fluide) et d'un temps caractéristique des transferts de chaleur par conduction. Dans le cas des laves volcaniques, compte tenu de leur faible conductivité et de leur grande chaleur spécifique, P_{e_t} est extrêmement grand, ce qui signifie que les transferts de chaleur vers l'intérieur ne s'effectuent que très lentement, les laves sont donc bien isolées. Ceci explique en particulier que le magma reste très chaud sous la croûte de surface, longtemps après l'arrêt de la lave. Le nombre de Brinkman, B_r , représente le rapport d'énergies caractéristiques des dissipations par frottement visqueux et des dissipations par conduction. Ce nombre est de l'ordre de 1 dans le cas des écoulements de laves volcaniques, ce qui signifie que les énergies correspondantes sont du même ordre. En outre, ces deux phénomènes ont en général des effets opposés sur la température de la lave et se compensent donc plus ou moins.

Par ailleurs, on peut facilement montrer, en prenant des valeurs typiques des paramètres de l'écoulement, que l'énergie dissipée par rayonnement thermique ou lors de la cristallisation est en général largement supérieure à celle résultant de la conduction

ou des frottements visqueux. Par conséquent, la lave se refroidit rapidement par rayonnement au niveau de sa surface libre. Les apports de chaleur en provenance de l'intérieur ne parvenant que très lentement au niveau de la surface, la perte d'énergie par rayonnement induit rapidement la cristallisation des couches de matériau situées près de la surface libre.

Un autre phénomène tend à faire chuter la température, accélérer la cristallisation et augmenter la viscosité, il s'agit du dégazage [3-4]. En effet, celui-ci induit une chute de température du magma de l'ordre de 20 °C pour 1 % de matière volatile relâchée. Par ailleurs, lors de la disparition de matières volatiles, le liquidus du mélange restant augmente et la température de ce dernier peut alors être inférieure à la température de début de cristallisation, ce qui accélère la cristallisation si la différence de température n'est pas trop grande. Enfin le dégazage violent conduit à un brassage supplémentaire du magma et ainsi à l'exposition de nouvelles surfaces de magma liquide à l'air libre, ce qui induit des dissipations d'énergie supplémentaires par rayonnement.

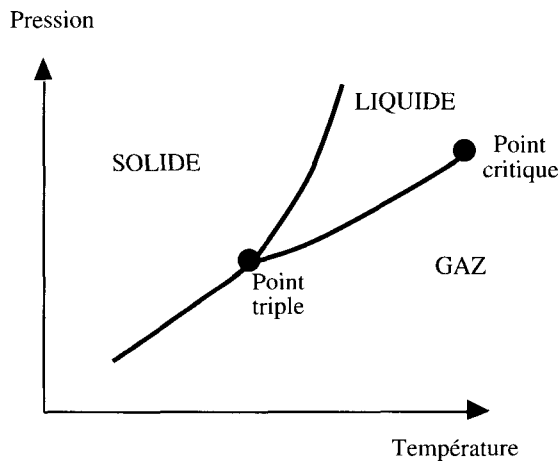


Fig. 5.2 : Diagramme de phase pour un corps pur.

De manière générale la lave, initialement liquide, ou, d'un point de vue plus mécanique, fluide, cristallise à terme en un solide, autrement dit un corps pratiquement rigide. Dans cette dernière phase, la lave est donc totalement arrêtée. La distance que peut parcourir une lave avant son arrêt complet ne dépend pas seulement du temps nécessaire à sa cristallisation partielle ou complète mais aussi du débit de sortie, de sa viscosité et des échanges thermiques en cours d'écoulement. Des études empiriques ont cependant montré que la distance (X) parcourue par une lave avant son arrêt complet est en général associée à un nombre de Graetz (G_z) de l'ordre de 300 [5]. Ce nombre

adimensionnel a été utilisé dans ce cas car il apparaît habituellement dans le traitement mathématique des écoulements en conduites d'un fluide chaud qui se refroidit progressivement au contact des parois froides. Il est défini de la manière suivante :

$$G_z = P_{e_l} \frac{H}{X} \quad (5.7)$$

En résumé, les caractéristiques typiques des écoulements de laves volcaniques peuvent être expliquées qualitativement par leurs propriétés thermiques. Cependant, vis-à-vis des prédictions quantitatives, la prudence s'impose tant est grande la variété des composants et des caractéristiques physiques des magmas mis en jeu ainsi que la variété des phénomènes thermodynamiques possibles.

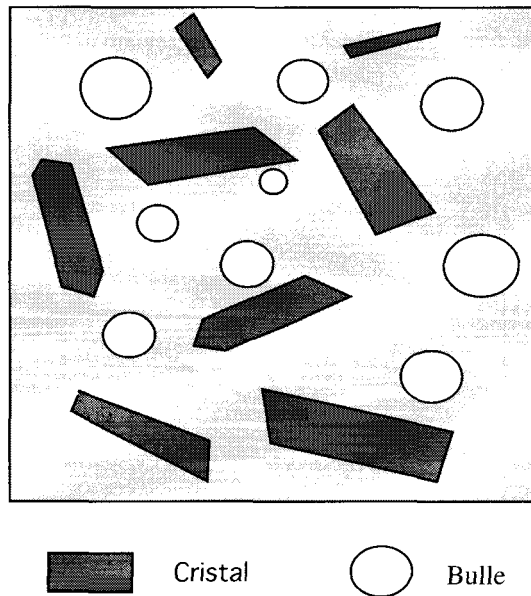


Fig. 5.3 : Aspect schématique d'un magma rapidement solidifié et observé en coupe. On distingue des sphères et des prismes correspondant respectivement à la présence de bulles de gaz et de cristaux au moment du refroidissement. Le matériau restant était donc vraisemblablement liquide avant la solidification en masse.

5.2.3 Changements de phase

Un liquide pur, constitué d'un seul type de molécule, à pression constante, cristallise à une température donnée qui dépend de la pression (cf. Fig. 5.2). Le système passe donc relativement brutalement de l'état liquide à l'état solide. De plus, la température de fusion (ou de cristallisation) augmente avec la pression. Lorsqu'un liquide contient, comme un

magma, plus de deux types de minéraux miscibles ou immiscibles, la cristallisation est un phénomène qui peut être nettement plus complexe. En particulier, il s'agit maintenant d'un phénomène progressif dans un intervalle de température et, selon les conditions expérimentales, la cristallisation peut donner lieu à différentes structurations internes du matériau solide final (cf. Fig. 5.3). Il n'est pas possible dans le cadre de cet ouvrage de passer en revue l'ensemble des phénomènes de cristallisation possibles en fonction des divers composés magmatiques [6]. Nous nous contenterons d'évoquer les mécanismes généraux de la cristallisation dans des situations idéales de façon à mettre en valeur les principes régissant les différents phénomènes possibles.

Considérons d'abord le mélange de deux minéraux (A et B) de composition chimique à l'état solide identique à celle de l'état liquide, et de structures cristallines semblables (séries isomorphes). La température de fusion de A, T_A , est supérieure à celle de B, T_B . On suppose que le mélange contient au départ une proportion x de A et une proportion $1 - x$ de B (cf. Fig. 5.4a). À une température supérieure à T_A le mélange est liquide. En abaissant la température, la cristallisation apparaît à une température T_i comprise entre T_A et T_B . Les premiers cristaux formés sont plus riches en A que le mélange initial. La cristallisation se prolonge au fur et à mesure que l'on abaisse la température. Les cristaux nouvellement formés sont de plus en plus riches en B tandis que les premiers cristaux formés s'enrichissent progressivement en B par diffusion des ions entre le liquide et les réseaux cristallins. À une température T_j comprise entre T_A et T_B le mélange est complètement cristallisé et homogène.

Dans le cas envisagé précédemment, l'obtention d'un seul cristal homogène à la fin de la cristallisation repose sur l'hypothèse que les échanges d'ions entre les phases liquide et solide s'effectuent aisément. Il existe deux situations extrêmes pour lesquelles cet équilibre ne peut se faire correctement. Dans le cas d'un refroidissement rapide, les cristaux n'ont pas le temps de restituer des ions au liquide et par conséquent les cristaux formés ont un cœur riche en A et une périphérie riche en B, ils sont zonés. De plus la composition moyenne des cristaux décrit une courbe (cf. Fig. 5.4b) située à des températures inférieures à celle du solidus du mélange, car, au cours du processus, la température de cristallisation du liquide restant correspond à un mélange de plus en plus riche en B. La dernière goutte de liquide disparaît finalement à une température inférieure à T_j .

Lors d'un refroidissement lent, les cristaux peuvent sédimenter et donc ne plus être en contact idéal avec la phase liquide. Les échanges d'ions entre ces cristaux et la phase liquide ne sont plus possibles. Il en résulte un appauvrissement du liquide restant en A, et la composition moyenne des cristaux parcourt encore une courbe située en dessous du solidus du mélange (cf. Fig. 5.4b). Si ce phénomène se reproduit plusieurs fois pour différents types de cristaux, on obtiendra finalement plusieurs couches de cristaux de compositions différentes. La cristallisation est alors dite fractionnée. La température de fin de cristallisation est inférieure à celle du mélange idéal (T_j) puisqu'ici encore le liquide restant en cours de cristallisation contient moins de A que le mélange initial.

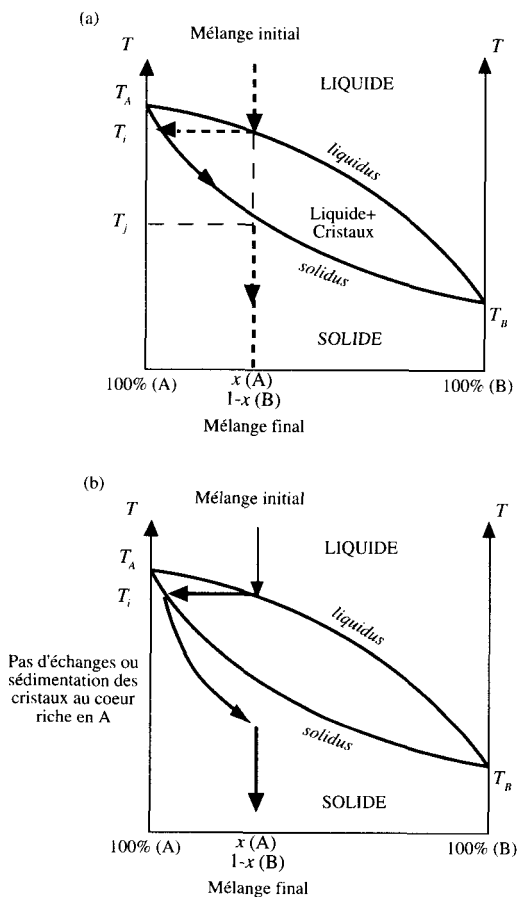


Fig. 5.4 : Diagrammes de phase pour un mélange de deux corps purs de structures cristallines semblables. L'axe des abscisses correspond à la proportion de constituant A, ce qui donne par différence la fraction de constituant B. L'axe des ordonnées correspond à la température en chaque point de l'échantillon. Partant d'un mélange initial des deux liquides, on abaisse progressivement la température ce qui conduit à la formation de cristaux. Ceux-ci sont plus riches en A car la température de cristallisation de A est la plus élevée. La courbe en pointillés suit alors le cheminement de la composition des cristaux en fonction de la température. Dans le cas (a), les cristaux s'enrichissent progressivement en B pour former un cristal homogène. Dans le cas (b) le refroidissement est trop rapide, les cristaux formés ont du mal à faire varier leur composition au cours du temps. Par conséquent, tout se passe comme si le mélange liquide était enrichi en B, ce qui implique que la température de cristallisation des cristaux suivants est plus faible que la température du solidus. Un processus analogue se produit dans le cas d'un refroidissement lent si les cristaux sont plus denses que la phase liquide. Le liquide restant s'enrichit en B car les premiers cristaux plus riches en A sédimentent.

Pour des matériaux immiscibles à l'état solide, la température de cristallisation peut être inférieure à celle des deux minéraux pris séparément. En effet, il existe une température T_e , dite eutectique, pour laquelle, pour une composition particulière du mélange, les deux minéraux cristallisent en même temps, quoique formant des cristaux indépendants. Pour une composition différente, par exemple plus riche en A, le mélange produit d'abord des cristaux de A à partir d'une température inférieure à la température de cristallisation de chacun des deux corps, puis simultanément des cristaux de A et de B lorsque la température atteint la valeur T_e (cf. Fig. 5.5). Dans ce cas une éventuelle cristallisation fractionnée ne modifie pas la nature des cristaux formés mais simplement l'arrangement en couches du mélange final. D'autres situations plus complexes peuvent encore être envisagées : mélange de plus de deux espèces minérales, minéraux engendrant la formation d'une espèce de composition intermédiaire, etc.

5.2.4 La sédimentation

On a présenté au § 2.3.7 des éléments concernant la force exercée (F_v) par un fluide newtonien sur une particule animée d'un mouvement à travers ce fluide. Le problème de la sédimentation dans un fluide à seuil sera évoqué au § 7.5.2. La vitesse de chute en régime stationnaire d'un corps solide (cristal) supposé non-poreux à travers un magma newtonien au repos est obtenue en égalisant F_v à la force de pesanteur diminuée des forces de pression (force d'Archimède), $(\rho_p - \rho)g\Omega$, où Ω est le volume du cristal et ρ_p sa masse volumique :

$$V = \frac{(\rho_p - \rho)g\Omega}{K\mu} \quad (5.8)$$

Si l'on suppose que le magma est newtonien de viscosité $\mu = 1000$ Pa.s, la vitesse de chute d'un disque de rayon $R = 0,1$ m, d'épaisseur $0,05$ m, et dont l'axe reste parallèle à la gravité, est $V = 1$ mm.s⁻¹ en prenant une différence de masse volumique de 100 kg.m⁻³. Pour un disque de rayon $R = 0,01$ m et d'épaisseur 1 mm (cf. § 2.3.7) on obtient $V = 2.10^{-3}$ mm.s⁻¹. Autrement dit, la sédimentation d'un cristal isolé de petite taille (inférieures à quelques millimètres) est en général négligeable durant la période d'écoulement à surface libre de la lave.

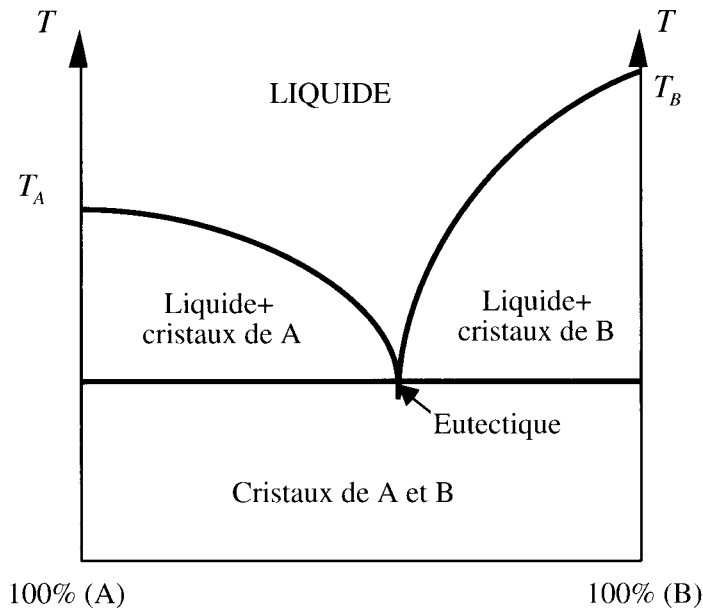


Fig. 5.5 : Diagramme de phase pour des minéraux de structures cristallines différentes, immiscibles à l'état solide. La cristallisation, qui commence à une température inférieure à chacune des températures de cristallisation des deux corps purs, produit des cristaux purs mais séparés de A et de B.

En revanche, la sédimentation d'agrégats de cristaux sous forme d'une croûte recouvrant la surface de l'écoulement peut être significative dans les temps habituels d'écoulements s'ils forment ensemble, en incluant le liquide éventuellement emprisonné dans le réseau, une masse de densité moyenne effectivement supérieure à la densité du fluide ambiant. En revanche, si cette croûte, même plus dense que le fluide ambiant, s'étend sur la totalité de la largeur de la surface libre, elle ne peut plus sédimenter car la largeur du chenal se rétrécit en général vers le fond. Cette croûte risque au contraire de se bloquer entre les parois latérales du chenal alors que le magma liquide situé en dessous continue de s'écouler, ce qui peut expliquer la formation des tunnels de lave constitués d'une croûte rigide sous laquelle s'écoule du magma en fusion.

5.3 Propriétés rhéologiques

5.3.1 Généralités

On ne dispose pas pour l'instant d'un ensemble de mesures précises de la loi de comportement des magmas dans une large gamme de gradients de vitesse et dans des conditions parfaitement contrôlées. Ceci est lié au fait que l'on a affaire à des fluides dont la température est élevée, qui contiennent éventuellement un grand nombre de particules grossières (cristaux), et enfin qui sont susceptibles d'évoluer rapidement à cause de la cristallisation ou du dégazage. Par ailleurs, compte tenu de leur extrême diversité, il n'est certainement pas réaliste de chercher à répertorier l'ensemble des comportements en fonction des différents composants possibles et des paramètres physiques du fluide. Dans ce cadre, les mesures existantes suggèrent simplement des tendances.

À l'état liquide, le magma est souvent considéré en première approximation comme un fluide newtonien. On notera cependant que certains auteurs ont observé une rhéofluidification pour des magmas rhyolitiques. L'explication proposée [7] pour ce phénomène repose sur l'analogie entre les évolutions en cours d'écoulement de la structure des polymères, dont les chaînes s'enchevêtrent et forment des liens provisoires, et de celle des magmas, au sein desquels un réseau formé entre autres de chaînes de liaisons Si-O serait amené à se déformer et à se briser. Dans l'état actuel des connaissances, il ne semble pas possible de savoir avec précision comment se déforme exactement ce réseau, dans quelle mesure les liaisons Si-O sont détruites ou non au cours d'un écoulement, et quel est le rôle relatif des mouvements de chaînes et des ruptures de liaison.

Compte tenu de ces remarques préalables, nous nous focaliserons dans la suite sur l'influence, vis-à-vis de la viscosité apparente du magma, de divers paramètres qui interviennent lors des écoulements de laves : teneur en silice, teneur en eau, température, cristallisation, pression, teneur en matières volatiles. Nous discuterons aussi la possibilité, suggérée par de nombreux auteurs, d'une évolution d'un comportement newtonien ou pseudoplastique vers un comportement de type fluide à seuil du fait de la cristallisation ou de la présence de bulles.

5.3.2 Teneur en silice

La viscosité des magmas est d'autant plus grande que le rapport Si/O est grand. En effet l'augmentation de la teneur en Si permet d'accroître, par un phénomène de polymérisation, le nombre de liaisons O-Si-O aux dépens des tétraèdres isolés SiO_4 , ce qui renforce la structure du réseau et allonge les chaînes, accentuant ainsi la résistance du mélange au cisaillement (rappelons que la viscosité d'une suspension augmente avec le rapport d'aspect des particules, toutes choses égales par ailleurs). L'ajout d'aluminium

(Al) a un effet analogue sur le comportement du mélange puisque cet atome joue le même rôle que l'atome de silice. L'ajout d'éléments tels que Mg, Fe, Ca, ou Na tend au contraire à abaisser la viscosité du mélange en dissociant les chaînes silicatées. Par exemple, pour des compositions simples de silicates, la viscosité augmente de la façon suivante en fonction du rapport Si-O (d'après [8]) :

	Si/O	μ (Pa.s)
SiO ₂	1/2	10 ⁹
Na ₂ Si ₂ O ₅	2/5	2,8
Na ₄ Si ₂ O ₆	1/3	0,15
Na ₄ SiO ₄	1/4	0,02

Shaw [9] et Bottinga and Weill [9] ont proposé des formules empiriques permettant d'estimer la viscosité d'un magma à partir de ses composants. L'hypothèse de base de cette approche est que la viscosité (μ) d'un mélange de n corps, de viscosités respectives $\mu_{i=1,n}$, s'écrit :

$$\ln \mu = \sum_{i=1}^n X_i \ln \mu_i \quad (5.9)$$

où $X_{i=1,n}$ est la fraction molaire du $i^{ème}$ corps. Pour la description détaillée de cette approche, c'est-à-dire la liste des corps à prendre en compte et les viscosités correspondantes, on renvoie le lecteur au travail de ces auteurs [9].

5.3.3 Teneur en eau

Un ajout d'eau dans un magma fait considérablement chuter la viscosité du mélange. Ceci résulte du fait que les molécules d'eau contiennent des atomes d'oxygène capables de rompre des chaînes du réseau formé par polymérisation de SiO₄. Pour une température donnée, la viscosité peut chuter d'un ordre de grandeur en ajoutant 1 % en poids d'eau [8, 10]. Cet effet est cependant d'autant plus faible que le magma initial contient une faible proportion de silice. Par exemple, d'après Williams et McBirney [8], on a :

Composition	T (°C)	μ (Pa.s)	μ (Pa.s) [humide, % d'eau]
Granite	785	10 ¹²	10 ⁶ (5%)
Andésite	1150	10 ⁴	10 ^{3,5} (4%)
Basalte tholéitique	1150	10 ^{3,2}	10 ³ (4%)
Basalte olivine	1250	10 ²	10 ² (4%)

5.3.4 Température

Comme pour un liquide ordinaire, l'augmentation de la température du magma, en augmentant l'agitation thermique, tend à abaisser sa viscosité (*cf.* Annexe 2.1). En première approximation, les évolutions de la viscosité d'un magma en fonction de sa température sont bien représentées par la loi d'Arrhénius :

$$\mu = \mu_{\infty} \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) \quad (5.10)$$

où E_a est une énergie d'activation moyenne des éléments du liquide. Cette formule permet d'évaluer les effets d'un abaissement de température tant que celle-ci est située au-dessus de la courbe du liquidus, mais ne permet pas de prendre en compte les effets induits, en l'occurrence la cristallisation, par un abaissement de température en dessous de la courbe du liquidus. Nous étudierons séparément l'influence de ce phénomène (*cf.* § 5.3.6).

5.3.5 Effet de la pression

À des températures supérieures à celles du liquidus une augmentation de la pression a tendance à abaisser la viscosité lorsque l'écart de température par rapport à celle du liquidus est maintenu constant [11]. En parallèle, d'après la Fig. 5.2 qui exprime des tendances générales en termes de température de cristallisation pour un corps pur, une augmentation de pression a tendance à élever le niveau de la courbe de liquidus d'un mélange complexe, et par conséquent accélère la cristallisation et augmente la viscosité. Par conséquent ces deux effets doivent se compenser plus ou moins, c'est-à-dire qu'à température constante une élévation de pression ne modifie pas sensiblement la viscosité, mais les connaissances dans ce domaine sont encore très insuffisantes.

5.3.6 Effet de la cristallisation

L'origine physique et les principaux processus possibles de cristallisation ont été présentés au § 5.2.3. La cristallisation conduisant à terme à la solidification complète du matériau, il s'agit là bien entendu d'un effet crucial vis-à-vis des évolutions du comportement mécanique des magmas. Fondamentalement, l'effet de la présence de cristaux peut être décrit en première approximation par les formules proposées au paragraphe 2.3 lorsque les interactions entre particules solides dans un fluide sont de type hydrodynamique. Cependant, celles-ci ne prennent bien entendu pas en compte les évolutions de la nature du liquide restant au cours de la formation de cristaux et dont la composition n'est que rarement celle du liquide initial (*cf.* § 5.2.3). En négligeant ce problème (qu'il est difficile de maîtriser), il paraît raisonnable, pour estimer cette

viscosité, d'utiliser la formule (2.13) avec les valeurs approximatives données dans le paragraphe 2.2.6 pour tenir compte de la forme allongée des cristaux.

On constate que la viscosité du mélange doit en principe augmenter avec la cristallisation d'autant plus rapidement que l'on se rapproche de la concentration d'entassement maximal, ou d'une concentration maximale équivalente (A), qui dépend de la forme des cristaux. Du fait que les cristaux ont souvent la forme de lattes, les résultats empiriques concernant les valeurs de A présentés au paragraphe 2.2.6 montrent que la viscosité du magma doit augmenter rapidement à l'approche d'une concentration de cristaux qui peut être très largement inférieure à la concentration maximale d'entassement [12]. Au-delà de cette concentration critique, qui est certainement proche de la concentration que nous avons nommée ϕ_c au chapitre 3, on peut s'attendre à ce que les contacts directs entre particules jouent un rôle important. La dilataance doit aussi naturellement être significative du fait de l'interaction des volumes exclus des particules au cours d'un écoulement. Par conséquent, le comportement de la suspension peut être fortement non-newtonien. D'après la classification du chapitre 2, nous avons alors affaire à une suspension granulaire au sein de laquelle, en fonction de l'histoire du mouvement et de la configuration actuelle, les interactions entre particules sont lubrifiées ou directes, donnant lieu à des viscosités apparentes très différentes. Selon la valeur exacte de la concentration en cristaux et les conditions d'écoulement, le magma se comporte alors de différentes façons, évoquées dans le chapitre 3.

Afin de mieux cerner les propriétés mécaniques de ces suspensions granulaires, il est nécessaire de préciser leur régime d'écoulement, ce qui peut être fait à partir d'une estimation de la valeur des nombres de Bagnold, Leighton et Stokes. On s'intéresse à une lave volcanique typique dont les caractéristiques sont les suivantes : $\mu_0 = 100 \text{ Pa.s}$, $r \approx b = 5 \text{ cm}$, $\dot{\gamma} \approx U/h = 1 \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon \approx 1 \text{ mm}$, $K \approx 10r$, $N \approx (\rho_p - \rho)ghr^2 = 63 \text{ N}$, $f = 0,5$. Dans ce cas on trouve :

$$L_e = 0,4 ; B_a = 1,25 \cdot 10^{-3} ; S_l = 6,3 \cdot 10^{-3} \quad (5.11)$$

ce qui indique que le régime d'écoulement est du type frictionnel-hydrodynamique et que l'on a affaire à des pâtes granulaires pour lesquelles le comportement de l'ensemble est dicté par les mouvements du fluide interstitiel et la dilataance est en général contrecarrée ou bien le matériau se fracture. On connaît encore assez mal le comportement de ces pâtes granulaires en régime frictionnel-hydrodynamique, mais l'utilisation en première approximation d'un modèle de type fluide à seuil pour décrire leurs propriétés semble assez pertinente. Le seuil de contrainte résulte de l'existence d'un réseau de particules en contact.

Signalons enfin que la poursuite de la cristallisation au-delà de A , voire au-delà de ϕ_m , doit permettre, au moins en théorie, d'atteindre une concentration égale à 1. Ce phénomène n'est évidemment pas pris en compte dans les modélisations proposées de la viscosité des suspensions. Dans certaines conditions, notamment tant que l'on n'a pas dépassé ϕ_m , il est possible que la suspension se comporte encore comme une

suspension granulaire. En revanche, au-delà ou dans certains cas à l'approche de ϕ_m , l'écoulement du mélange induit nécessairement la fracture d'une partie des cristaux. À faible gradient de vitesse le comportement du matériau est plus probablement proche de celui d'un solide plastique.

5.3.7 Effet de la présence de gaz

Lorsque la pression du magma diminue, les matières volatiles jusqu'alors dissoutes peuvent s'évaporer et former des bulles au sein du magma. Lorsque les bulles sont sphériques de rayon R et peu nombreuses, la viscosité de la suspension en fonction de la viscosité du magma liquide et de la concentration de bulles est donnée par la formule (2.9) [13]. Au cours de l'écoulement, les forces visqueuses qui agissent au sein du liquide ont tendance à déformer ces bulles. Cet effet est significatif si le rapport (G^*) entre la contrainte tangentielle résultant du cisaillement du fluide seul et la différence de pression le long de la surface d'une bulle est grand devant 1, avec :

$$G^* = \frac{\mu \dot{\gamma} R}{\sigma} \quad (5.12)$$

où σ est la tension interfaciale entre le magma et le gaz. Si l'on admet que la valeur de σ est de l'ordre de 0,1 Pa.m et si l'on prend $\mu = 1000$ Pa.s, on constate que pour un cisaillement modéré ($\dot{\gamma} = 1 \text{ s}^{-1}$) les déformations des bulles sont négligeables lorsque leur diamètre est de l'ordre de 1 μm . Il est donc probable que les bulles, qui, dans le cas général, ont un diamètre largement supérieur à cette valeur, subissent des déformations significatives. Ce phénomène induit un comportement quelque peu élastique de la suspension, et des différences de contraintes normales non nulles (cf. [14]). En outre, au cours d'un écoulement, les bulles peuvent s'allonger considérablement et finalement se séparer en plus petits éléments puis s'associer à nouveau pour former des bulles de plus grand volume. Tant que la concentration volumique de bulles n'est pas proche de la concentration maximale d'entassement, il est probable que ces effets ne jouent pas un rôle important vis-à-vis de la viscosité de la suspension car la fraction volumique et la distribution de tailles des bulles restent constantes après un certain temps d'écoulement.

Lorsque la concentration en bulles atteint une valeur critique, on obtient une mousse possédant un seuil de contrainte qui résulte de la formation d'un réseau de bulles en contact [15]. Notons qu'au sein de ce type de fluide les évolutions de la structure interne en cours d'écoulement sont complexes car les bulles peuvent déformer, fusionner les unes avec les autres (coalescence), ou glisser localement les unes sur les autres. Puisque le réseau de bulles est susceptible de se déformer lorsqu'on lui applique un effort suffisant, le seuil de contrainte induit par un tel empilement dépend de la taille des bulles qui elle-même conditionne leur résistance. En admettant que le seuil de contrainte résulte uniquement de l'existence de ce réseau, on peut donc estimer l'ordre de grandeur de ce seuil à partir de la contrainte nécessaire pour déformer une bulle sphérique σ/R . Le

seuil de contrainte est alors de l'ordre de 100 Pa pour un rayon de 1 mm. La présence des bulles peut donc induire l'existence d'un seuil de contrainte mais celui-ci n'est significatif vis-à-vis de la viscosité du magma que si les bulles sont très petites et en grande concentration volumique.

Nous n'avons jusqu'ici considéré que l'effet des bulles seules dans un liquide newtonien. Dans un magma, il serait justifié de prendre en compte l'effet cumulé de la présence de bulles et de cristaux. Tant que la concentration totale en bulles et cristaux est inférieure à la concentration maximale d'entassement correspondante, il est possible d'estimer grossièrement la viscosité du mélange, par exemple à partir de la formule (2.9) en supposant que l'on ajoute successivement les bulles puis les cristaux. En revanche, lorsque la concentration cumulée est grande, il est probable que des effets non-newtoniens apparaissent et notamment un seuil de contrainte résultant d'un réseau d'interactions de bulles et de cristaux. Si la fraction de bulles est suffisamment grande au sein de ce réseau, l'ordre de grandeur du seuil de contrainte est obtenu de la même manière que ci-dessus.

5.3.8 Synthèse

Certains auteurs ont considéré que les magmas étaient thixotropes mais nous souhaitons réserver l'usage de ce terme à des matériaux dont la viscosité évolue de manière réversible au cours du temps. La viscosité du magma en cours de cristallisation peut facilement évoluer car la concentration en cristal augmente et car la nature du fluide interstitiel change, mais ces évolutions sont irréversibles. L'échauffement dû aux dissipations visqueuses [16] ou la migration ou la sédimentation des cristaux peuvent aussi induire des effets analogues à ceux résultant de la thixotropie. Il est en pratique très délicat de distinguer les conséquences de ces effets de ceux induits par une thixotropie éventuelle sur les évolutions de la viscosité.

De nombreux auteurs ont considéré que les magmas possédaient un seuil de contrainte résultant de la présence de bulles et/ou de cristaux en suffisamment grande concentration. Cependant, certains arguments vont à l'encontre de cette hypothèse. Les résultats de rhéométrie ne semblent pas réellement probants en regard des objections émises d'un point de vue général du chapitre 4. En effet, les expériences avec des magmas en cours de cristallisation sont particulièrement délicates et n'ont pour l'instant fourni que des mesures dans des gammes de gradients de vitesse très étroites et pas toujours représentatives des gradients de vitesse au sein d'un écoulement de lave naturel. À notre connaissance, aucune mesure à contrainte contrôlée n'a été effectuée. Le seuil supposé a toujours été extrapolé à partir de mesures effectuées à des gradients de vitesse relativement élevés dans un diagramme en échelle linéaire. De plus, le seuil de contrainte mis en évidence dans ce cadre pour des laves volcaniques est relativement faible par rapport aux contraintes résultant du terme dépendant du gradient de vitesse (viscosité plastique) : le rapport $\tau_c / \mu \dot{\gamma}$ reste petit devant 1 pour des valeurs de $\dot{\gamma}$ de l'ordre de

quelques s^{-1} (cf. les données de [10, 17-18]). Dans ces conditions, et compte tenu en outre des incertitudes restantes, les résultats de mesures peuvent aussi bien être interprétés à l'aide d'un modèle pseudoplastique (loi de puissance) ou newtonien sans que la description des écoulements perde en précision [19].

Dans le cas particulier où la concentration cumulée en bulles et cristaux est proche de la concentration maximale d'entassement, nous avons vu que la suspension peut posséder un seuil de contrainte dont la valeur reste cependant en général assez faible si la fraction de bulles est significative. Dans le cas où la fraction de bulles est négligeable la suspension a un comportement dicté par le fluide interstitiel tant que la concentration est inférieure à ϕ_c (cf. chap. 3), et ne possède donc *a priori* pas de seuil de contrainte [20]. Dans ces conditions, on peut alors considérer que le magma est essentiellement newtonien avec une viscosité qui augmente avec la concentration en cristaux. Lorsque la concentration est supérieure à ϕ_c on a en revanche affaire à une suspension granulaire ou plus précisément une pâte granulaire qui peut être considérée comme un fluide à seuil en première approximation. Enfin, à des concentrations supérieures à ϕ_m les cristaux présents peuvent se fracturer au cours de l'écoulement, ce qui détermine un nouveau type de comportement.

Cette discussion concerne le comportement d'un magma à un instant donné. En pratique, à des températures inférieures à celle du liquidus, le magma évolue sans cesse au cours de l'écoulement : sa température varie, il dégaze, cristallise, et la composition du liquide restant se modifie. Ces phénomènes ont des retombées sur le comportement qui peuvent être plus significatives que l'erreur commise en utilisant tel ou tel modèle de loi de comportement à un instant donné. Il peut donc s'avérer plus important d'être capable de prendre en compte des évolutions majeures des valeurs des paramètres de la loi de comportement plutôt que la forme précise de ce comportement à un instant donné.

Références

- [1] Wilson, L., Pinkerton, H. and Macdonald, R. 1987. Physical processes in volcanic eruptions. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 15, 73-95.
- [2] Head, J.W. and Wilson, L. 1986. Volcanic processes and landforms on Venus: Theory, predictions and observations. *J. Geophys. Res.* B, 91, 9407-9446.
- [3] Lipman, P.W., Banks, N.G. and Rhodes, J.M. 1985. degassing-induced crystallization of basaltic magma and effects on lava rheology. *Nature*, 317, 604-607.
- [4] Sparks, R.S.J. and Pinkerton, H. 1978, Effect of degassing on rheology of basaltic lava. *Nature*, 276, 385-386.
- [5] Hulme, G. and Fielder, G. 1977. Effusion rates and rheology of lunar lavas. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 285, 227-234.
- [6] Dercourt, J., et Paquet, J. 1990. *Géologie - Objets et méthodes*. Paris, Dunod.

- [7] Spera, F.J., Borgia, A., Strimple, J. and Feigenson, M. 1988. Rheology of melts and magmatic suspensions. I. Design and calibration of concentric cylinder viscometer with application to rhyolitic magma. *J. Geophys. Res.*, 93, 10,273-10,294.
- [8] Williams, H. and McBirney, A.R. 1979. *Volcanology*. Freeman, San Francisco, Cooper & Co.
- [9] Bottinga, Y. and Weill, D.F. 1972. The viscosity of magmatic silicate liquids: a model for calculation. *Am. J. Sci.*, 272, 438-475 ;
Shaw, H.R. 1972. Viscosities of magmatic silicate liquids: an empirical method of prediction. *Am. J. Sci.*, 272, 870-893.
- [10] McBirney, A.R. and Murase, T. 1984. Rheological properties of magmas. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 12, 337-357.
- [11] Kushiro, I. 1980. Viscosity, density, and structure of silicate melts at high pressures, and their petrological applications. in *Physics of magmatic processes*, R.B. Hargraves (Ed.), Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 93-120.
- [12] Marsh, B.D. 1981. On the cristallinity, probability of occurrence and rheology of lava and magma. *Contrib. Mineral Petrol.*, 78, 85-98.
- [13] Taylor, G.I. 1932. The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. *Proc. Roy. Soc.*, A 138, 41-49.
- [14] Schowalter, W.R. 1978. *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*. Oxford, Pergamon Press.
- [15] Princen, H.M. 1985. Rheology of foams and highly concentrated emulsions. *J. Colloid Interface Sci.*, 105, 150-171.
- [16] Ryerson, F.J., Weed, H.C. and Piwinski, A.J. 1988. Rheology of subliquidus magmas. I. Picritic compositions. *J. Geophys. Res.* B, 93, 3421-3436.
- [17] Pinkerton, H. and Sparks, R.S.J. 1978. Field Measurements of the rheology of lava. *Nature*, 276, 383-384.
- [18] Shaw, H.R., Wright, T.L., Peck, D.L. and Okamura, R. 1968. The viscosity of basaltic magma: an analysis of field measurements in Makaopuhi lava lake, Hawaiï. *Am. J. Sci.*, 266, 225-264.
- [19] Huppert, H.E. 1986. The intrusion of fluid mechanics into geology. *J. Fluid Mech.*, 173, 557-594.
- [20] Kerr, R.C. and Lister, J.R. 1991. The effects of shape on crystal settling and on the rheology of magmas. *J. Geology*, 99, 457-467.

La neige et les avalanches

6.1 Introduction

La neige est dans notre société moderne un atout économique pour les vallées alpines et leurs stations de ski. Elle entraîne aussi de nombreux dangers, dont le plus emblématique est certainement l'avalanche. Même si elle ne constitue, à l'échelle de la planète, que l'un des risques naturels les moins meurtriers en comparaison des tremblements de terre ou des inondations, des épisodes météorologiques catastrophiques récents (Alpes du Nord, novembre 1996) ou des drames humains (Les Orres, janvier 1998) rappellent que l'avalanche demeure une constante du paysage montagnard [1]. En France, on dénombre annuellement en moyenne vingt-cinq morts, essentiellement des skieurs et des randonneurs, et un peu plus de cent cinquante victimes sur l'ensemble des Alpes. L'enjeu touristique et la volonté de protéger les personnes, les biens et les activités humaines dans les vallées de montagne a justifié un effort de recherche important sur la neige et les avalanches depuis 1950.

Nous aborderons dans ce chapitre les différentes questions relatives à la modélisation du comportement mécanique de la neige et des avalanches. On présente d'abord des éléments de base concernant l'origine, les propriétés thermiques et mécaniques de la neige (§ 6.2). Si ces éléments permettent de donner un premier aperçu de la complexité du comportement thermo-mécanique de la neige, ils ne nous sont pas d'un grand secours pour comprendre l'écoulement d'une avalanche. En effet, la neige mobilisée par une avalanche est très vite brassée et n'a plus rien de commun avec la neige au repos. Ses caractéristiques dépendent principalement du mode d'écoulement de l'avalanche. De ce fait, nous proposons une classification des avalanches et passons en revue le comportement de la neige en mouvement puis les caractéristiques des écoulements (§ 6.3).

6.1 La neige : formation et propriétés

6.2.1 Formation de la neige

La neige est un mélange de cristaux de glace et d'air, qui peut être saturé ou non en vapeur d'eau. Les cristaux de glace prennent naissance dans l'atmosphère par condensation solide de la vapeur d'eau [1]. Comme c'est principalement la température qui conditionne à pression constante le seuil de saturation (c'est-à-dire la quantité d'eau maximale qui peut être présente sous forme gazeuse dans l'air), c'est également elle qui gouverne la croissance des cristaux. Ainsi, selon la température de l'air, le cristal de glace originellement hexagonal peut croître dans différentes directions. D'autres phénomènes peuvent également agir sur la croissance des cristaux : le vent, les phénomènes de surfusion, de givrage, etc. Tous ces éléments concourent à créer une très grande variété de forme de cristaux au sein des nuages. Dès que leur poids est suffisant pour compenser les effets de la turbulence atmosphérique, les cristaux tombent, s'agglomérant parfois en flocons. Si la température reste négative durant leur trajet jusqu'au sol, ils se déposent pour former une couche de neige.

6.2.2 Métamorphoses de la neige

Au cours des différents épisodes météorologiques, les cumuls résultant des chutes de neige s'empilent en strates plus ou moins parallèles, qui constituent le manteau neigeux sur le sol. Ces couches possèdent des propriétés mécaniques propres et évoluent plus ou moins indépendamment jusqu'à la fonte des neiges. La neige est en effet un matériau vivant qui évolue constamment en fonction de son état thermo-mécanique interne qui résulte notamment des conditions nivo-météorologiques externes (température, vent, rayonnement, pluie, etc.). On parle de *métamorphoses* pour décrire les processus de transformation des cristaux de glace. L'air froid contenu dans le manteau neigeux étant faiblement saturé en vapeur d'eau (contrairement à l'air composant les nuages), le paramètre moteur gouvernant les métamorphoses est le gradient de température tant que la neige reste sèche (cf. Fig. 6.1) ; c'est donc un mécanisme totalement différent de celui qui a présidé à la croissance des cristaux dans l'atmosphère [1]. La valeur moyenne de ce gradient (sur toute l'épaisseur du manteau) est le rapport de la différence entre les températures au sol (souvent proche de 0 °C à cause du flux thermique venant du sol) et à la surface (négative l'hiver), et de l'épaisseur du manteau neigeux [1].

Lorsque le gradient de température est fort (typiquement supérieur à 0,2 °C/m), une diffusion de la vapeur d'eau intervient entre les couches inférieures et supérieures : par sublimation dans les basses couches, de la vapeur d'eau est libérée et remonte progressivement vers les strates supérieures où elles se condense à nouveau (la température y est plus froide, donc le seuil de saturation est moindre). Si le processus dure assez longtemps, des grains en forme de gobelets de taille millimétrique se forment. Ils constituent de la neige sans cohésion (comme du sucre en poudre) et de très faible

résistance au cisaillement. Ces couches sont présumées jouer un rôle de lubrification pour les couches superficielles et ainsi être propices aux déclenchements d'avalanche.

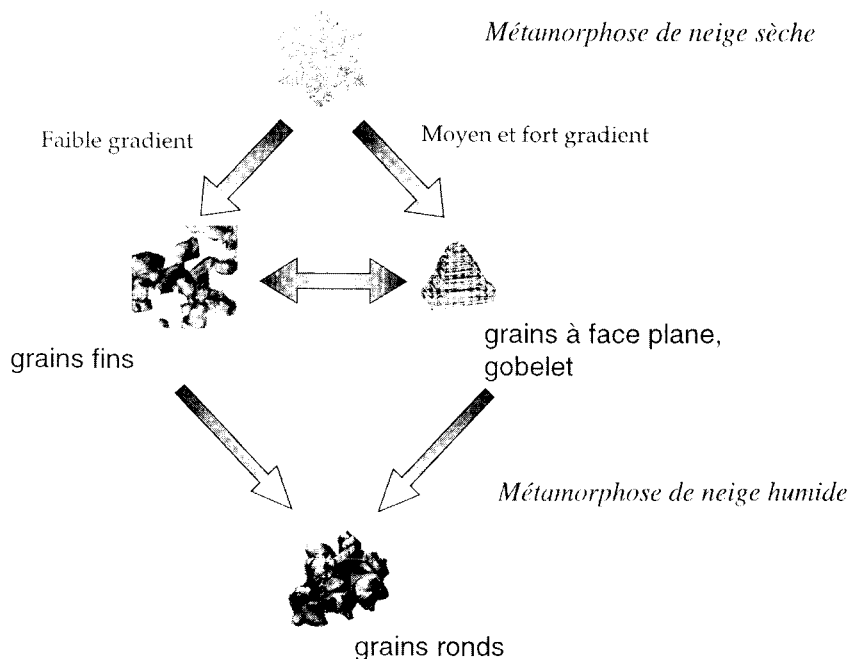


Fig. 6.1 : Métamorphoses de la neige.

À l'opposé, lorsque le gradient de température est faible (typiquement moins de $0,05\text{ °C/m}$), les phénomènes de diffusion entre couches sont négligeables devant les transferts moléculaires à la surface des grains (le seuil de saturation près d'une surface solide dépend localement de la forme des grains) : la glace composant les formes saillantes (convexes) des cristaux se sublime puis diffuse vers les parties concaves. Il s'agit d'un processus analogue au frittage des poudres métalliques : des ponts de glace peuvent se former entre les grains sous l'effet de ces transferts moléculaires et conférer ainsi à la neige une cohésion et une meilleure résistance au cisaillement.

Ces deux métamorphoses cessent d'être réellement efficaces lorsque de l'eau sous forme liquide apparaît au sein du manteau neigeux (pluie ou fonte). À cause des forces capillaires, les grains ont tendance à s'agglomérer pour former des grains plus gros. La cohésion devient alors relativement forte. Ceci explique qu'il est plus facile de faire des boules de neige (à partir de neige sèche) quand on a les mains nues que gantées : la chaleur transmise par une main nue permet de fondre une quantité de glace, certes faible mais suffisante pour créer des liaisons capillaires entre grains. La cohésion augmente

lorsque la teneur en eau liquide est accrue, mais au-delà d'un certain seuil, elle diminue nettement ; on observe typiquement une diminution significative de la résistance au cisaillement pour des concentrations volumiques supérieures à 6 ou 8 %.

6.2.3 Propriétés thermiques

La neige est un système composé d'air et d'eau sous ses deux ou trois phases. Pour des températures largement négatives, l'eau est présente uniquement sous forme solide (glace) et sous forme de vapeur dans l'air. Comme 0 °C est le point triple de l'eau, il suffit d'atteindre une température nulle ou légèrement supérieure pour faire apparaître de l'eau sous forme liquide. La quantité de chaleur à apporter est néanmoins assez importante, puisque la chaleur latente massique (quantité de chaleur à fournir pour permettre la fusion) de la glace est de $334.10^3 \text{ J.kg}^{-1}$. Il faut ainsi environ quinze fois plus d'énergie pour faire fondre une masse d'un kilogramme de glace que pour amener cette même masse d'une température de -10 °C à 0 °C, la capacité calorifique (quantité de chaleur emmagasinée) de la glace étant de $2090 \text{ J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$. Cela explique par exemple, que contrairement à une idée répandue, des chutes de pluie ne font pas directement fondre le manteau neigeux (elles n'apportent pas suffisamment de chaleur) mais qu'elles contribuent à le tasser de manière significative en l'alourdissant.

La neige est un milieu poreux au sein duquel les transferts de chaleur sont principalement assurés par conduction dans les phases gazeuse et solide et par diffusion de la vapeur d'eau. La conductivité thermique (cf. § 5.2.2) (λ) de la neige est faible : la neige est un excellent isolant car elle emprisonne beaucoup d'air. Cette conductivité est fonction de la densité de la neige : plus la neige a une masse volumique faible, plus elle contient d'air et plus elle est isolante. Par exemple, le pouvoir isolant de la neige fraîche est proche de celui du polystyrène. On a ainsi $0,05 < \lambda < 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ alors que les valeurs correspondantes de l'air, de la glace et du polystyrène sont respectivement 0,02, 2,22 et 0,1. C'est ce pouvoir isolant qui est exploité par exemple dans la construction des igloos ou qui permet de protéger la végétation des rigueurs de l'hiver.

L'état thermique du manteau neigeux dépend aussi du bilan de ses échanges énergétiques avec l'atmosphère. Ce bilan fait intervenir de nombreux facteurs : rayonnement solaire, rayonnement thermique, vent, pluie, nébulosité, flux thermique du sol, etc.

La neige bénéficie le jour du rayonnement solaire (ultraviolet, visible, infrarouge) qui lui apporte de la chaleur. Néanmoins, une grande partie de cette énergie n'est pas absorbée car la neige est un corps réfléchissant : elle réfléchit presque dans la même proportion toutes les longueurs d'onde du spectre visible, c'est pour cela qu'elle paraît blanche et qu'elle accélère notablement le bronzage des skieurs. On définit sous le terme d'albédo le rapport du rayonnement réfléchi sur le rayonnement incident (sur l'ensemble du spectre solaire). Il est fonction de l'état de la surface et de la nature de la neige. Les

valeurs moyennes de l'albédo (dans le visible) sont comprises entre 0,5 et 0,7. L'albédo diminue rapidement avec la proportion d'impuretés (traces de composés carbonés, sable...). Cette propriété est encore utilisée dans les zones alpines par les paysans qui épandent du fumier ou des cendres pour accélérer le déneigement au printemps. Dans le bilan thermique intervient également le rayonnement thermique (infrarouge). L'émission d'infrarouge par la neige est permanente le jour comme la nuit. Sans compensation solaire, on assiste par nuit claire à une importante perte de chaleur, donc à une diminution notable de la température dans les couches superficielles (ceci peut conduire en l'absence de vent à une différence de température entre l'air et la surface du manteau dépassant 10 °C). L'atmosphère et surtout les nuages sont le siège de phénomènes similaires : ils émettent et absorbent également un rayonnement infrarouge. Pour cette raison, un ciel nuageux freine la déperdition de chaleur du manteau neigeux et empêche un bon regel nocturne.

6.2.4 Propriétés mécaniques

De prime abord, il convient de bien distinguer les propriétés mécaniques de la neige de celles du manteau neigeux. Ce dernier est en effet formé par la superposition de différentes couches de neige à peu près homogènes ; il s'agit donc d'un matériau bien stratifié, dont le comportement mécanique global dépend non seulement des caractéristiques mécaniques de chaque couche mais également de leurs interfaces.

La détermination de la loi de comportement de la neige par des moyens expérimentaux n'est pas une chose aisée. Cela tient d'une part aux nombreux effets perturbateurs (frittage sur les parois, fragilité du matériau lors de la mise en place, etc.) et aux propriétés intrinsèques de la neige (par exemple, couplage thermo-mécanique dû à l'influence des métamorphoses durant les tests). Si l'on tente de décrire avec des lois simples le comportement de la neige, on observe que les paramètres utilisés dans ces lois varient considérablement d'un échantillon à l'autre, parfois de plusieurs ordres de grandeur sans que l'on sache réellement en expliquer la raison. La reproductibilité des mesures n'est pas toujours assurée pour un même échantillon. On se contentera donc ici de donner les formes générales du comportement sans entrer dans les détails (voir [2 à 6]).

Dans la plupart des cas, la neige possède une cohésion, qui traduit à l'échelle macroscopique les liens unissant les cristaux de glace. Les caractéristiques des liaisons entre particules dépendent elles-mêmes beaucoup de leur forme. Lorsque la neige est fraîche, une cohésion dite de feutrage apparaît ; elle résulte de l'imbrication des branches de cristaux. Elle est relativement faible (de l'ordre de 10 à 10^2 Pa). Dans les métamorphoses de faible gradient des ponts se forment entre les particules, ce qui conduit à une cohésion de frittage relativement efficace (de l'ordre de 10^3 Pa). De même, la présence d'eau sous forme liquide conduit à la création de liaisons fortes entre les grains, ce qui assure une bonne cohésion (de l'ordre de 10^3 Pa) tant que la teneur en

eau liquide n'est pas trop forte (moins de 5 %). Lorsqu'un tel mélange regèle, les ponts liquides sont remplacés par des ponts de glace, ce qui assure une excellente cohésion (de l'ordre de 10^4 Pa). Pour une même neige, la cohésion est d'autant plus forte que la masse volumique est importante car le nombre de contacts entre les cristaux est globalement plus élevé.

Aux faibles vitesses de déformation (typiquement pour des vitesses inférieures à un millimètre par minute), la neige possède des propriétés visqueuses, qui apparaissent par exemple lors du fluage lent des nappes de neige sur le terrain (phénomène de reptation). L'ordre de grandeur de la viscosité mesurée varie considérablement d'un échantillon à l'autre en fonction de la nature de l'essai, de la taille des grains, et de la masse volumique. En moyenne, la variation de viscosité avec la densité est exponentielle ; ainsi, des mesures montrent que la viscosité en compression varie de 10^7 à 10^{13} Pa.s quand la densité varie de 0,1 à 0,5 kg.m^{-3} (que la neige soit sèche ou humide). Cette viscosité élevée résulte probablement du fait que la neige est alors constituée d'un réseau de grains en contacts lubrifiés les uns avec les autres par l'intermédiaire de très fines couches d'eau relativement visqueuse. Aux faibles vitesses de cisaillement, ce réseau est capable de se déformer sans se casser, les grains étant alors entraînés en mouvement relatif les uns par rapport aux autres. Le comportement visqueux de la neige sèche n'est pour l'instant pas expliqué.

Aux grandes vitesses de déformation, la neige sèche se comporte comme un matériau plastique. Soumise à un état de contrainte ou de déformation trop important, la neige se fracture. Le mode de rupture dépend de la vitesse de sollicitation et de la nature des contacts entre grains. Par exemple, pour des déformations rapides (supérieures à 10^{-3} s^{-1}), la rupture est dite cassante car elle se fait quasiment sans déformation préalable du matériau. Par ailleurs, cette rupture intervient plus ou moins facilement selon le sens de la sollicitation. Ainsi, dans le cas d'une neige cohésive (grains fins), l'ordre de grandeur de la résistance au cisaillement (avant rupture) est de 10^5 Pa, soit en moyenne de 10 à 20 fois plus que sa résistance à la traction.

6.3 Propriétés rhéologiques

Les avalanches mobilisent principalement de la neige, parfois souillée de terre, de débris divers (rochers, végétaux), etc., plus rarement des blocs de glace (avalanche de sérac). La neige mobilisée présente des caractéristiques physiques et morphologiques très différentes de la neige au repos à cause du très fort brassage subi dès les premiers instants du déclenchement et, en conséquence, l'étude des propriétés de la neige en statique est d'une utilité très limitée. En fait, les caractéristiques de la neige mobilisée par une avalanche sont principalement liées à la nature de l'écoulement. Aussi, on commence (§ 6.3.1) par délimiter deux classes extrêmes d'écoulement : les aérosols et les avalanches coulantes. On décrit ensuite (§ 6.3.2) les propriétés de la neige au sein de

chacun de ces types d'écoulement avant de présenter plus en détail leurs caractéristiques (§ 6.3.3).

6.3.1 Les avalanches : définition et types de mouvement

Donner une définition concise et précise de l'avalanche se révèle être une véritable gageure, tant le phénomène est complexe, multiforme et s'étend sur des échelles de temps et d'espace très variables [1, 7]. En première approximation, on peut dire que c'est un écoulement rapide de neige sur une pente de montagne, faisant suite à une rupture du manteau neigeux. L'échelle de temps est la seconde, voire la minute ; celle d'espace est la dizaine de mètres, voire la centaine ; le volume de neige engagé s'étend de quelques mètres cubes à des millions, tandis que l'inclinaison de la pente varie, en moyenne, de cinquante à quelques degrés. Pour aller un peu plus loin dans la compréhension des avalanches, il est commode de distinguer deux classes limites d'écoulement :

- *l'avalanche coulante* : c'est le déplacement d'une masse de neige homogène (en première approximation) le long du sol. L'écoulement est astreint à suivre le relief. L'échelle de hauteur d'écoulement est le mètre ;

- *l'avalanche en aérosol* : c'est un écoulement rapide de neige sous la forme d'un nuage, qui résulte du mélange de l'air et des particules de glace. Cet aérosol est composé de grandes bouffées turbulentes, dont la trajectoire n'est pas entièrement déterminée par le relief. L'échelle de hauteur est la dizaine de mètres.

Entre ces deux cas limites, il existe une gamme variée d'écoulements répondant (au cours de leur écoulement) à la fois à des critères distinctifs des avalanches coulantes et des aérosols ; on parle d'avalanche mixte. Cette grande variété dans les caractéristiques des écoulements observés rend extrêmement difficile la mise en place d'une classification scientifique pertinente des avalanches [1, 7-8]. Dès lors, tout en gardant à l'esprit que la distinction de deux familles d'avalanches n'est qu'une vue de l'esprit, on supposera qu'une telle simplification est suffisante pour la description des avalanches et des processus impliqués.

6.3.2 Nature du matériau transporté

6.3.2.1 Aérosols

Dans le cas d'un aérosol, le matériau en écoulement est une suspension de particules de glace dans de l'air. La concentration volumique (ϕ) en glace ne dépasse pas 5 %. La taille (r) des particules est le plus souvent de l'ordre du millimètre. La masse volumique ($\rho = \phi\rho_p + (1-\phi)\rho_0$ avec $\rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$) du mélange est de l'ordre de quelques dizaines de kilogrammes par mètre cube. Durant la phase d'écoulement, la force de

traînée qui s'exerce sur une particule immobile du fait de l'écoulement du mélange turbulent (voir § 6.3.3) à la vitesse U autour d'elle, s'écrit :

$$F_V = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 A \quad (6.1)$$

où A est la surface offerte par la particule à l'écoulement et C_D le coefficient de traînée [9]. L'expression de cette force nous permet d'estimer l'action de l'ensemble de l'écoulement sur chaque particule. C_D est de l'ordre de 1 pour des particules (non poreuses) de formes diverses et vaut notamment 1,05 pour un cube. Dans ce cas, lorsque $U = 30 \text{ m.s}^{-1}$ et $r = 1 \text{ mm}$, le rapport (q) entre le poids de la particule $\rho_p g r^3$ et la force de traînée (F_V) est de l'ordre de 1/5. En fait, pour des particules formées par l'agglomération de cristaux et donc très poreuses, le coefficient de traînée est plus grand que 1 et le poids de la particule est en général très inférieur à celui supposé ci-dessus. Il en résulte que $q \ll 1$ et par conséquent le rôle de la gravité, et donc la sédimentation, est en général négligeable au sein d'un écoulement développé. Ceci n'est évidemment plus vrai lors d'écoulements autour d'obstacles ou durant la phase d'arrêt puisque la vitesse est alors nettement inférieure à la valeur typique utilisée pour les calculs ci-dessus. En outre, il faut noter que l'équation (6.1) n'est valable que lorsque la taille des particules est bien supérieure à la plus petite échelle de la turbulence (taille des tourbillons associés aux fluctuations des variables dans le temps). Lorsque la taille des particules est inférieure à la plus petite échelle de la turbulence, tout se passe comme si les particules faisaient partie intégrante du mélange et la sédimentation est alors totalement négligeable [10].

De façon à évaluer le couplage des phases solides et gazeuses, nous pouvons calculer la valeur du nombre de Stokes de l'écoulement. Comme il s'agit d'un écoulement turbulent, l'expression (3.35) n'est plus valable, la force s'exerçant sur la particule est maintenant donnée par (6.1), par conséquent le temps caractéristique d'une particule de volume Ω est $2\rho_p \Omega / C_D \rho_0 U A$. En supposant que le temps caractéristique (T_h) de l'écoulement en régime turbulent vaut approximativement h/U (où h est l'épaisseur de l'avalanche), le nombre de Stokes s'écrit maintenant :

$$S_t = \frac{2\rho_p \Omega}{C_D \rho_0 A T_h} \approx \frac{\rho_p}{\rho_0} \frac{r}{h} \quad (6.2)$$

On constate ainsi qu'en général, lorsque les particules ont une taille inférieure à un millimètre, $S_t \ll 1$, ce qui signifie que le mouvement de la phase solide s'ajuste immédiatement au mouvement de la phase fluide. C'est le mouvement de l'air qui entraîne les particules, le comportement macroscopique du mélange est gouverné par le fluide. En résumé, mis à part durant la phase d'arrêt et autour d'obstacles, la neige mobilisée par un aérosol se comporte comme une suspension homogène (newtonienne) en régime turbulent.

6.3.2.2 Avalanches coulantes

Dans le cas d'une avalanche coulante, le matériau transporté est composé de neige avec parfois des débris divers (rochers, blocs de glace, etc.). La concentration volumique en glace est importante, elle est généralement comprise entre 20 et 60 %, ce qui implique que la masse volumique du mélange varie entre 200 et 600 kg.m^{-3} . Le matériau est en général compressible surtout à cause de la grande compressibilité de la neige elle-même, mais également parfois à cause du caractère dilatant de la suspension lorsque celle-ci se présente sous la forme de boules de neige (*cf.* chap.3). Il n'est pas rare de voir la masse volumique du matériau tripler entre la mise en mouvement de l'avalanche et son arrêt [11].

La rhéologie des mélanges air-neige est extrêmement complexe, car la neige est un milieu thermodynamiquement très sensible : puisque 0 °C est le point triple de l'eau, les trois phases peuvent coexister à cette température et on peut assister à des variations importantes de la composition du système pour de faibles variations de température autour du point triple. Les comportements mécaniques des différentes phases étant très différents, le comportement mécanique du mélange dépend fortement de l'état thermodynamique et de la structure du mélange. Cette sensibilité thermodynamique du mélange air-neige explique la grande variété d'aspect du matériau mobilisé dans une avalanche coulante : pulvérulent (neige sèche), granulaire (boules de neige agglomérées par effet capillaire ou compactage, blocs anguleux provenant des restes de la dislocation du manteau neigeux), pâteux (mélange d'eau et de neige) et quasiment toutes les formes intermédiaires entre ces aspects particuliers.

L'apparition d'eau sous forme liquide en cours d'écoulement est fréquente. Ainsi, malgré une neige sèche dans la zone de départ, on peut souvent rencontrer de la neige humide dans la zone de dépôt. Les frottements internes et avec l'air semblent suffisants pour provoquer une fusion partielle des cristaux. Ainsi, des mesures *in situ* ont mis en évidence une augmentation de la température en cours d'écoulement probablement liée aux dissipations par frottement ; la différence de température entre la zone de départ (avant l'avalanche) et dans le dépôt de neige laissé par l'avalanche peut être sensible (jusqu'à une dizaine de degrés) [11]. La quantité d'eau liquide ainsi formée reste malgré tout très faible à cause de la valeur élevée de la chaleur latente de la glace. Considérons par exemple une masse de neige de un kilogramme en mouvement sur une dénivellation de mille mètres et supposons que toute l'énergie potentielle dépensée sert à la fusion de la glace. Dans ces conditions, le rapport énergie potentielle/chaleur latente vaut environ 0,03, ce qui signifie que seulement 30 grammes d'eau liquide peuvent ainsi apparaître, soit une augmentation de teneur en eau de 3 %. Cela est faible, et pourtant suffisant pour provoquer des changements importants de comportement du mélange, car l'eau permet l'agglomération des cristaux (par l'intermédiaire des forces capillaires) et la formation de boules de neige. Ceci explique notamment que l'on rencontre souvent des avalanches sous la forme d'écoulements de boules de neige. Le matériau s'apparente alors à un milieu granulaire, avec en général une gamme de diamètres de boule étendue (du

centimètre au mètre) [12]. Toutefois, l'analogie avec un simple milieu granulaire doit être maniée avec prudence car la neige sous forme de boules exhibe certaines caractéristiques dont les mécanismes et l'influence sur le comportement mécanique global restent très mal cernés ; citons notamment le rôle lubrifiant du film d'eau observé autour des boules de neige, la compressibilité et la fragilité des boules, leur mode de croissance, la plasticité des déformations (le coefficient de restitution des collisions est nul), etc.

La diversité morphologique des matériaux observés, leur grande sensibilité thermodynamique ainsi que la large gamme des échelles de taille rencontrées semblent rendre rédhitoire (à l'heure actuelle) toute étude rhéométrique approfondie de la neige mobilisée par les avalanches coulantes. Cette grande complexité explique le très faible nombre d'études expérimentales sur le sujet ainsi que leur caractère très lacunaire ou contestable. On peut par exemple citer la détermination d'une viscosité apparente par l'équipe japonaise de Maeno et de Nishimura à partir d'essais d'écoulement en laboratoire sur des canaux inclinés [13]. D'après ces auteurs, la neige est un fluide non-newtonien à seuil, pour lequel la viscosité apparente ne dépend que faiblement de la température (de l'air ambiant), mais fortement de la masse volumique : l'ordre de grandeur de la viscosité varie de 10^{-3} à 10^{-1} Pa.s lorsque ρ varie de 200 à 450 kg.m⁻³. À partir de tests de cisaillement sur de la neige tassée (grains fins), Lang *et al.* trouvèrent que le comportement est du type viscoplastique (binghamien) avec une viscosité plastique de l'ordre de 1,2 Pa.s et un seuil de contrainte proche de 500 Pa [14].

En revanche, même si peu de travail rhéométrique a été réalisé, plusieurs lois de comportement ont été proposées sur le plan théorique et sont justifiées plus ou moins qualitativement : fluide newtonien, fluide newtonien généralisé (Reiner-Ericksen), fluide à seuil (Bingham), fluide bi-visqueux. Dans ce cas, les caractéristiques rhéologiques sont spéculatives et ne sont utilisées qu'à titre de paramètres de calage d'un modèle théorique et non comme propriétés intrinsèques du matériau.

6.3.3 Caractéristiques macroscopiques de l'écoulement

L'avalanche est un écoulement gravitaire rapide. En effet, la gravité joue un rôle moteur à la fois vis-à-vis du déclenchement et de l'écoulement. De manière générale, la masse d'une avalanche quelconque varie au cours de l'écoulement : le bilan de masse peut être positif (on parlera alors de *reprise* de neige), négatif (on parlera alors de *dépôt*) ou bien neutre, et il peut évoluer durant l'écoulement (par exemple, passer de positif à négatif). Ces deux caractéristiques sont à peu près les seules qui soient communes à tous les types d'avalanche. On note en effet que, généralement, le mode de déplacement de la neige, la morphologie de l'écoulement et les mécanismes de transfert de masse diffèrent totalement entre un aérosol et une avalanche coulante.

6.3.3.1 Les avalanches en aérosol

L'avalanche en aérosol est l'écoulement très fortement turbulent d'un mélange d'air et de particules de glace dans l'atmosphère. Pour un écoulement typique à la vitesse de 30 m.s^{-1} avec une épaisseur de 10 m et une masse volumique de 50 kg.m^{-3} le nombre de Reynolds (2.53) vaut environ 7.10^8 (en supposant que la viscosité du mélange est à peu près celle de l'air à 0°C , soit 2.10^{-5} Pa.s). On en déduit que la turbulence au sein de l'écoulement est pleinement développée. L'aérosol s'apparente à un *courant de turbidité* : un fluide « lourd » s'écoule le long d'une pente dans un fluide plus léger [15]. On observe qu'un aérosol est composé de grandes structures tourbillonnaires qui se déplacent très rapidement (dont la vitesse est comprise entre 20 et 100 m.s^{-1}) et peuvent s'élever à des hauteurs très importantes (plusieurs dizaines de mètres) [15-16]. On a également observé l'apparition de grandes volutes au niveau du front de l'écoulement, agissant comme de véritables rouleaux de convection (cf. Fig. 6.2). On présume que ce sont les frottements avec l'air qui donnent au front cette forme si particulière. L'ordre de grandeur des pressions d'impact contre les obstacles est compris entre 1 et 100 kPa. Dans certains cas, la vitesse du son (c) est suffisamment atténuée par la présence des particules pour que le nombre de Mach (U/c) soit supérieur à 1 et que l'écoulement soit ainsi supersonique, ce qui confère des propriétés remarquables à l'écoulement (souffle précédant l'avalanche ?) [17].

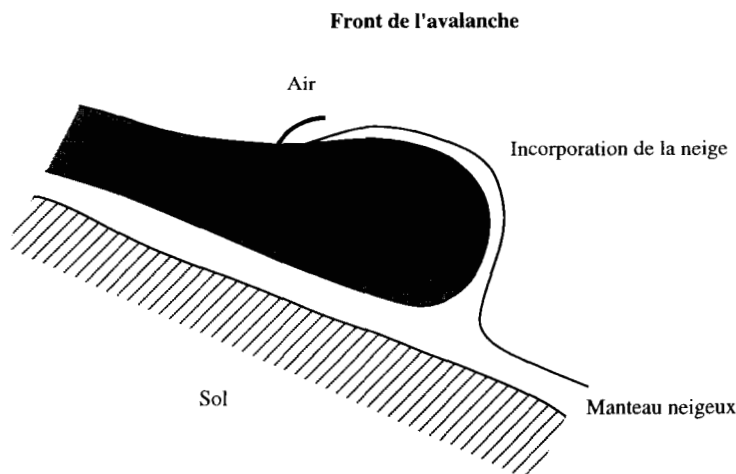


Fig. 6.2 : Mécanisme présumé de reprise de matériau pour un aérosol. La neige au repos à l'aval du front de l'avalanche est incorporée dans l'écoulement par un phénomène d'aspiration de l'air facilité par la structure tourbillonnaire du front de l'avalanche. Ce phénomène de reprise est d'autant plus efficace que la neige au repos est légère et sans cohésion.

La dynamique de ces écoulements semble étroitement liée à l'incorporation de neige durant la phase d'écoulement. Ce phénomène est encore mal cerné, notamment à cause du manque de données précises recueillies *in situ*. Cependant, l'analogie avec des expériences menées en canal noyé permet d'apporter des éléments d'information intéressants : une série d'expériences menées en 1990-1991 par P. Béghin au Cemagref (ces résultats ne sont pas publiés mais ont été filmés) a consisté à observer l'écoulement d'un fluide lourd (notamment une solution saline) sur un plan incliné dans une cuve d'eau. Préalablement, une couche de fluide lourd coloré avait été mise en place sur le plan d'écoulement ; la différence de couleur facilitait ainsi l'observation de la reprise de matériau par l'écoulement. Ces expériences ont montré comment le fluide au repos était soulevé par le front, puis incorporé dans l'un des rouleaux juste en arrière du front (*cf.* Fig. 6.2). Inversement, en l'absence de reprise, on note une croissance rapide de la hauteur du front, que l'on présume être due à une accentuation des phénomènes dissipatifs au niveau du front. Ce phénomène a pour conséquence de diminuer très rapidement la concentration des particules au sein de l'écoulement et à terme, de provoquer la dilution de l'aérosol dans l'atmosphère. Ces résultats sont corroborés qualitativement par de nombreuses observations de terrain.

6.3.3.2 Les avalanches coulantes

La morphologie d'une avalanche coulante est relativement simple et n'est pas sans rappeler celle des laves torrentielles ou volcaniques. Généralement, une coupe en long de l'avalanche (à un moment donné) permet d'identifier les parties successives appelées front, corps et queue de l'avalanche. On note le plus souvent (pour des phénomènes d'ampleur suffisante) une augmentation des dimensions de l'avalanche durant la phase de mise en mouvement puis une diminution progressive jusqu'à l'arrêt. Contrairement à ce qu'on a longtemps cru, le front n'a pas de rôle dynamique particulier, les diverses observations *in situ* ont montré que celui-ci est formé d'un matériau de caractéristiques identiques à celles du matériau situé dans le corps ; la définition du front est donc purement géométrique, il s'agit de la partie aval de l'avalanche. La vitesse de l'avalanche est généralement inférieure à 25 m.s^{-1} . La pression d'impact sur un obstacle peut être très élevée : elle est le plus souvent comprise entre 10 et 800 kPa.

La cinématique au sein de l'écoulement dépend largement de la nature du matériau transporté. Pour l'instant, les données disponibles issues d'observations de terrain montrent : (i) la caractère plutôt *laminaire* de l'écoulement (faibles fluctuations des vitesses et de la surface libre), (ii) un profil de vitesse selon la hauteur proche de celui obtenu pour un fluide à seuil, (iii) un possible glissement sur le fond (sur une surface neigeuse) [18-19]. Ces observations sont confortées par des expériences de laboratoire au cours desquelles le mouvement d'un paquet de neige sur un plan incliné a été analysé [14].

De même que pour les aérosols, le phénomène de reprise joue un rôle important mais encore mal compris. Selon une hypothèse communément admise, la neige est mise en mouvement par cisaillement du manteau neigeux au passage de l'avalanche ou bien à la suite d'une rupture interne provoquée par la surcharge imposée par l'avalanche [1]. L'augmentation de masse est sans doute à même d'accélérer l'écoulement (du fait de l'accroissement d'énergie potentielle) et/ou d'augmenter la distance d'arrêt. En revanche, on se sait pas si l'absence de reprise a une influence aussi sensible sur les caractéristiques écoulements que dans le cas des aérosols.

Références

- [1] Ancey, C. (Coord.) 1996. *Guide Neige et Avalanches : Connaissances, Pratiques, Sécurité*. Aix-en-Provence, Édisud.
- [2] Salm, B. 1982. Mechanical properties of snow. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20, 1-19.
- [3] Mellor, M. 1977. Engineering properties of snow. *J. Glaciol.*, 19, 15-66.
- [4] Mellor, M. 1974. A review of basic snow mechanics. *Proc. International symposium on snow mechanics*, Grindelwald, IAHS publication, 114, 251-291.
- [5] Navarre, J. P. 1992. The principles of snow mechanics. *Proc. univ. européenne d'été sur les risques naturels*, Chamonix, G. Brugnot (Ed.), Grenoble, Cemagref, 75-87.
- [6] de Montmollin, V. 1978. *Introduction à la rhéologie de la neige*. Thèse de doctorat, Univ. Joseph Fourier, Grenoble.
- [7] Ancey, C. et Charlier, C. 1996. Quelques réflexions autour d'une classification des avalanches. *Rev. Géograph. Alp.*, 84, 9-21.
- [8] de Quervain, R. 1981. *Avalanche Atlas*. Unesco, Paris.
- [9] Graf, W. H. 1984. *Hydraulics of sediment transport*. Littleton, Water Resources Publications.
- [10] Soo, S. L. 1967. *Fluid dynamics of multiphase systems*. Waltham, Blaisdell Publishing Company.
- [11] Eybert-Bérard, A., Perroud, P., Brugnot, G., Mura, R. et Rey, L. 1978. Mesures dynamiques dans l'avalanche - résultats expérimentaux du col du Lautaret (1972-1978). in *Proc. 2^e rencontre internationale sur la neige et les avalanches*, Grenoble, ANENA, 203-224.
- [12] Jomelli, V. 1997. *Géomorphodynamique des dépôts d'avalanche : analyses morphométriques et sédimentologiques*. Thèse de doctorat, Univ. Denis Diderot, Paris.
- [13] Maeno, O. 1993. Rheological characteristics of snow flows. in *Proc. Int. Workshop on Gravitational Mass Movements*, Grenoble, L. Buisson (Ed.), Cemagref, 209-220.
- [14] Dent, J. D. and Lang, T. E. 1983. A biviscous modified Bingham model of snow avalanche motion. *Ann. Glaciol.*, 4, 42-46.
- [15] Hopfinger, E. J. 1983. Snow avalanche motion and related phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15, 45-76.
- [16] Nishimura, K., Maeno, N., Kawada, K. and Izumi, K. 1993. Structures of snow cloud in dry-snow avalanches. *J. Glaciol.*, 18, 173-178.

- [17] Batchelor, G. K. 1989. A brief guide to two-phase flow, in *Theoretical and Applied Mechanics*, P. Germain, J.M. Piau, et D. Caillerie (Ed.), Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 27-41.
- [18] Granada, F., Marco, O. et Villemain, P. 1995. Utilisation de techniques d'imagerie pour la cartographie des vitesses à la surface d'une avalanche dense. *La Houille Blanche*, 5/6, 69-75.
- [19] Gubler, H. 1993. Dense-flow avalanches, a discussion of experimental results and basic processes. in *Proc. International Workshop on rapid gravitational mass movements*, Grenoble, L. Buisson (Ed.), Cemagref, 127-126.

La boue

7.1 Introduction

Nous nous intéressons ici aux matériaux constitués d'un mélange d'eau et de sédiments de toutes sortes, c'est-à-dire des particules d'argiles, des limons, du sable, des roches, des cendres. De nombreux écoulements naturels tirant leur origine de l'érosion des sols mettent en jeu de tels matériaux : il en est ainsi des laves torrentielles, des lahars, des mouvements sous-marins, ou encore du transport de sédiments par les rivières ou lors des chasses de barrage. Il n'est pas possible, dans l'état actuel des connaissances, de décrire par une seule théorie l'ensemble de ces écoulements qui peuvent être considérés tantôt comme des milieux biphasiques hétérogènes, tantôt comme des suspensions concentrées. Dans les écoulements naturels, on trouve aussi en général des débris végétaux ou animaux anciens ou récents et éventuellement de l'air, mais ces éléments sont en proportion suffisamment faible pour être négligés. Nous nous attachons ici à décrire les propriétés mécaniques des matériaux boueux au sens large, que nous définissons comme des milieux formés d'une matrice eau-particules fines suffisamment visqueuse pour supporter, au moins pendant la durée de l'écoulement, des particules plus grossières. Le fluide interstitiel que constitue cette matrice fine visqueuse est en général une suspension ordinaire ou une pâte fine qui impose son type de comportement à l'ensemble du mélange (incluant les particules grossières). Un tel matériau est typiquement mis en jeu lors des écoulements de laves torrentielles (boueuses).

Notre approche, qui consistera à passer en revue les différents types de comportement en fonction des caractéristiques de la fraction solide, nous conduira à suggérer quelques éléments concernant les frontières (en termes de granulométrie et de concentration) de cet ensemble de matériaux avec les écoulements biphasiques ou granulaires grossiers. Compte tenu des connaissances actuelles, nous n'envisagerons que le cas où ces particules fines sont en fait essentiellement des particules argileuses. Il est cependant possible que des mélanges d'eau et d'autres types de particules fines,

c'est-à-dire colloïdales, aient des propriétés analogues à celles des mélanges eau-argiles et jouent donc un rôle analogue au sein de mélanges globalement plus grossiers, ce qui pourrait notamment être le cas des cendres fines au sein des lahars.

Nous intéressant à un mélange boueux au sens large, c'est-à-dire un mélange d'eau, d'argiles et de roches, il est commode de suivre une méthodologie logique et systématique, qui consiste à passer en revue successivement le comportement de suspensions de plus en plus grossières et concentrées. Ainsi, après avoir examiné les caractéristiques physiques des principaux composants (§ 7.2), nous nous intéresserons d'abord au comportement des mélanges eau-argiles (§ 7.3), puis à celui des mélanges eau-argiles-grains (§ 7.4). Nous présenterons finalement (§ 7.5) quelques éléments pour une classification rapide des mélanges boueux en général.

7.2 Propriétés physiques des boues naturelles

7.2.1 Généralités

Les boues naturelles en écoulement, telles que nous les envisageons, sont saturées d'eau et les mélanges correspondants ont déjà été brassés, notamment au cours de la première phase du mouvement. Pour cette raison, quelles que soient leurs évolutions ultérieures, elles peuvent être considérées comme ayant été formées en mélangeant des particules solides avec de l'eau. On obtient en effet le même type de matériau final, quelle que soit la procédure de préparation du mélange mise en œuvre, à partir du moment où le solide et le liquide sont à un moment ou à un autre, au cours de cette procédure, vigoureusement brassés ensemble de façon à homogénéiser la concentration solide au sein du mélange eau-argiles.

En revanche, si l'on imbibe progressivement un matériau solide sec contenant une fraction d'argile non négligeable, on peut obtenir, après l'imbibition, des matériaux de cohésions diverses selon la procédure de séchage. Ceci résulte de la complexité des phénomènes de séchage au sein des matériaux poreux. Ainsi, au cours du séchage d'un matériau argileux au sein d'un empilement granulaire, lorsque la vitesse d'évaporation est suffisamment lente, des voiles d'argile sèche peuvent se former entre les grains [1], renforçant ainsi la cohésion de l'ensemble [2]. Lors de la réimbibition d'un tel matériau, les particules d'argile qui se sont accumulées dans diverses régions, ne peuvent migrer d'elles-mêmes pour se répartir de manière à peu près homogène dans l'eau. L'arrangement des particules d'argile ou la distribution de concentration de la fraction argileuse dépend alors beaucoup des caractéristiques du matériau juste après séchage. Compte tenu de la complexité des phénomènes de séchage, les propriétés mécaniques d'un matériau juste après une série de cycles séchage-imbibition sont *a priori* très variées même lorsque la fraction solide moyenne reste identique. Or, un sol naturel est précisément soumis à une succession de cycles imbibition-séchage de durées et d'intensités variables. Ceci montre en particulier que les processus de déclenchement

d'écoulements boueux naturels (tels que les laves torrentielles) sont très complexes puisqu'ils ne font pas seulement intervenir la nature du sol en place mais son histoire thermodynamique. Après un brassage correct, les différences liées à l'histoire thermodynamique n'existent plus.

Les caractéristiques minéralogiques et morphologiques des particules solides au sein d'un mélange boueux sont extrêmement variées et il n'est pas raisonnable au premier abord de tenter une classification selon ces critères. Une idée très simple consiste dans un premier temps à classer ces particules solides, comme en mécanique des sols, selon leur taille : en dessous de 2 μm , les argiles, les limons de 2 μm à 20 μm , le sable de 20 μm à 200 μm , le sable grossier de 0,2 à 2 mm, les graviers de 2 à 20 mm, les cailloux de 2 à 20 cm et les rochers au-delà de 20 cm. Au sein de cette liste, on peut regrouper finalement les particules en deux grandes familles minéralogiques : les argiles d'une part et les grains (roches) d'autre part. Il se trouve que cette séparation correspond aussi approximativement à une classification des particules en fonction des types d'interactions prédominants qu'elles développent en général au sein du mélange (colloïdales ou non).

7.2.2 L'eau

L'eau est constitué de molécules polaires de H_2O dont la taille est approximativement 1 Å. Ces molécules exercent les unes vis-à-vis des autres des forces d'attraction de type van der Waals, qui maintiennent le mélange à l'état liquide et jouent un rôle fondamental sur ses propriétés rhéologiques. Dans les conditions expérimentales habituelles, l'eau est un fluide newtonien, dont la viscosité varie avec la température de $1,787 \cdot 10^{-3}$ Pa.s à 0 °C à $0,295 \cdot 10^{-3}$ Pa.s à 100 °C. À 20 °C sa viscosité est de $1,002 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. La densité de l'eau est très proche de 1000 kg.m^{-3} . Au sein d'un mélange boueux, et tout particulièrement sur les particules d'argile, une fraction (faible) d'eau est adsorbée et ne s'évapore totalement qu'à une température de 300 °C environ. Cette eau qui possède une forte viscosité peut être en première approximation considérée comme faisant partie intégrante des particules solides. Le reste de l'eau (eau libre) s'évapore totalement à une température d'environ 105 °C.

7.2.3 L'argile

Les particules d'argile résultent de la désintégration physique ou mécanique des roches, suivie d'une transformation chimique. Elles sont constituées par l'empilement d'un grand nombre de couches élémentaires [3]. Ces couches élémentaires sont elles-mêmes formées par la combinaison d'une couche à coordinance octaédrique obtenue en répétant le motif $\text{Al}(\text{OH})_3$ et d'une (on appelle alors l'ensemble un feuillet 1:1) ou deux (un de chaque côté, on appelle alors l'ensemble un feuillet 2:1) couches à coordinance

tétraédrique obtenues en répétant le motif SiO_2 . Dans les couches octaédriques l'ion Al^{3+} peut être remplacé par les ions Mg^{2+} , Fe^{3+} , Fe^{2+} , Li^+ . Dans les couches tétraédriques, le silicium peut être remplacé par de l'aluminium ou du fer. Ces feuillets ne sont pas forcément électriquement neutres. Des substitutions ioniques dans le réseau cristallin peuvent induire une charge nette négative, compensée par l'adsorption de cations tels que Ca^{2+} , Li^+ , K^+ , Fe^{2+} hydratés ou non, ou des hydroxydes à la surface des feuillets. Ces cations jouent un rôle fondamental vis-à-vis des propriétés des particules d'argile dans l'eau. Suivant leur charge échangeable et la surface offerte à l'eau, les particules d'argile interagissent différemment. Nous passons maintenant en revue les principales familles d'argile et les propriétés des particules correspondantes.

- Les particules de kaolinite, formées par l'empilement de feuillets 1:1 et ne contenant pas de charge, se présentent comme des plaquettes rigides dont l'extension latérale est de l'ordre de quelques centaines de nm et l'épaisseur de quelques dizaines de nm. Les équilibres acide-base des groupes $-\text{OH}$ présents sur les surfaces latérales des plaquettes confèrent aux particules de kaolinite une faible charge électrique qui dépend du pH : positive en milieu acide, négative en milieu basique.
- Les particules de smectite (montmorillonite, hectorite) sont au contraire formées par un empilement de feuillets 2:1 comprenant une charge négative élevée, compensée par des cations interfoliaires. L'énergie d'hydratation élevée de ces ions permet à l'eau de pénétrer l'espace interfoliaire, induisant ainsi un gonflement de la particule. De plus, ces cations compensateurs forment naturellement des double-couches autour des particules, dont le potentiel est particulièrement élevé. Chaque feuillet a une extension latérale très grande, de 0,1 à 1 μm , et est relativement flexible.
- Les illites sont proches des smectites mais, bien que la charge négative interne soit plus élevée, les cations compensateurs (K^+) s'imbriquent étroitement dans des cavités formées par les atomes d'oxygène d'autres feuillets, et contribuent ainsi à rigidifier l'empilement des feuillets. Une proportion (faible) des cations, située en surface externe, est échangeable et donne lieu à la formation de double-couches.
- Les particules de chlorite sont formées d'empilements 2:1 au sein desquels la charge du réseau est compensée par des hydroxydes de magnésium (brucite). Ces particules sont rigides et faiblement chargées en surface.
- Les particules d'argiles fibreuses (attapulgit, sépiolite) sont formées d'empilements de feuillets 2:1 dont l'extension latérale est réduite à quelques molécules et qui forment des rubans. Une particule est finalement constituée de plusieurs rubans parallèles, séparés par des canaux au sein desquels peuvent se loger des cations hydratés, et prend la forme d'aiguilles rigides (attapulgit) ou de fibres flexibles (sépiolite), d'un diamètre de l'ordre de 100 nm et d'une longueur de l'ordre du μm .

- Les particules d'argiles interstratifiées sont formées par l'empilement de feuillets de différentes familles (smectite-illite ou smectite-kaolinite par exemple). Malgré une charge de réseau élevée, la charge échangeable de ces particules reste relativement faible.

Les principales familles décrites ci-dessus ne se trouvent à l'état presque pur que dans certains gisements géologiques. Dans les boues argileuses naturelles - c'est à un mélange complexe auquel on a affaire comprenant le plus fréquemment, dans l'ordre, des illites, des chlorites, des kaolinites, des argiles interstratifiées et enfin de la montmorillonite.

7.2.4 Les grains

On trouve en général dans une boue naturelle des grains issus de divers types de roches. Leur diamètre varie entre quelques microns et plusieurs mètres et leur forme varie entre celle d'une sphère et celle de galets plats étroits et allongés, suivant les processus érosifs qu'ils ont subis depuis leur apparition à la surface du globe à la suite de processus éruptifs ou intrusifs d'écoulements magmatiques. Leur masse volumique est située la plupart du temps entre 2650 et 2750 kg.m^{-3} . Il est probable que de très légères charges à la surface des plus petites particules (d'un diamètre inférieur à quelques dizaines de μm) puissent leur conférer des propriétés analogues aux particules d'argile les moins chargées telles que la kaolinite. En général, dans un mélange boueux naturel, cette classe de grains est très minoritaire et il est suffisant de séparer la matière solide en deux catégories : la fraction argileuse d'une part, et les grains d'autre part, en incluant les grains fins dans l'une ou l'autre des catégories. En revanche, lorsque la fraction argileuse est négligeable, il est possible que cette fraction de grains fins, si elle n'est pas trop faible, puisse jouer un rôle majeur sur le comportement mécanique de l'ensemble, comme nous le suggérons dans l'introduction de ce chapitre.

7.3 Propriétés mécaniques des mélanges eau-argiles

7.3.1 Généralités

Du point de vue de la charge et de l'hydratation résultante, deux grands types d'argile semblent pouvoir être distingués : les smectites et les autres. En première approximation, on pourra associer des propriétés rhéologiques spécifiques à chacun de ces deux types d'argile. Cependant, comme le comportement d'un mélange eau-argile donné repose essentiellement sur les interactions colloïdales entre particules, il est naturel qu'il varie de manière significative avec le pH de la solution et avec la concentration et la nature des cations en solution. Comme de plus la diversité des mélanges naturels d'argile est très grande, il est illusoire pour l'instant d'espérer établir une classification du comportement de ces suspensions en fonction de leurs composants et de leurs caractéristiques physiques. Nous nous proposons ici simplement de présenter les

propriétés rhéologiques essentielles des principaux types d'argile en les reliant autant que possible aux évolutions de la structure interne de ces matériaux.

Un mélange eau-argiles est une suspension de particules d'argiles dans un fluide interstitiel (l'eau). On peut donc *a priori* rencontrer les différents types d'interactions entre particules présentés au chapitre 2, les interactions colloïdales étant ici principalement des attractions de type van der Waals et des répulsions de double-couches. Dans le cas où la suspension reste effectivement diluée, c'est-à-dire à la fois sans interactions colloïdales entre particules et sans gêne stérique, son comportement est celui d'une suspension de particules grossières ordinaire à ceci près que tout se passe comme si la présence des double-couches augmentait la viscosité des couches d'eau proches de la particule, ce dont il faut tenir compte grâce à un facteur correctif (*cf.* [4]) dans l'expression de la viscosité en fonction de la concentration (2.9).

Nous nous intéressons ici surtout aux suspensions concentrées stables (*cf.* § 2.5.3 [5]). Comme nous avons affaire à des particules de taille colloïdale, il est probable que les effets de types colloïdaux prédominent dans la plupart des conditions naturelles d'écoulement. Cette hypothèse peut être vérifiée à partir du diagramme de prédominance des effets établis au chapitre 2. Pour cela, on considère un mélange eau-argiles typique possédant un seuil de contrainte de l'ordre de 10 Pa et dont la concentration solide est de 10 %. Notons que pour une suspension de particules très anisotropes, une telle concentration est suffisante pour qu'un réseau de contacts se forme en l'absence d'interactions colloïdales. On suppose que le diamètre caractéristique des particules est $0,2 \mu\text{m}$ et que le gradient de vitesse est de l'ordre de 1 s^{-1} . Dans ce cas, à température ordinaire, on a :

$$P_e \approx 100 \text{ et } \Gamma \approx 0,002 \quad (7.1)$$

Les mouvements browniens sont donc négligeables en général, en tout cas lorsqu'on s'intéresse aux principales propriétés d'écoulement (mais l'effet des mouvements browniens vis-à-vis du retour vers l'équilibre au repos ou lors d'écoulements extrêmement lents n'est pas nécessairement négligeable). En outre, les effets hydrodynamiques sont effectivement négligeables tant que l'écoulement n'est pas trop rapide.

Compte tenu du fait que les matériaux étudiés ici sont constitués d'un grand nombre de particules plus ou moins proches les unes des autres, il est licite de se demander si des contacts directs entre particules ne peuvent pas intervenir durant l'écoulement. En particulier, il s'agit de savoir si le seuil de contrainte n'est pas simplement le résultat de la formation d'un réseau de particules en contact direct. Comme les dimensions des particules d'argile sont très faibles, l'expression de la force visqueuse répulsive à courte distance (2.14) n'est plus valable lorsque les particules s'approchent à des distances très inférieures à leur taille caractéristique, car l'épaisseur de liquide est alors de l'ordre de quelques diamètres de molécule et la continuité du milieu n'est plus assurée. Si on utilise malgré tout cette expression pour estimer la force répulsive et en admettant que la

distance minimum entre les surfaces des particules est de l'ordre du nm on trouve que le nombre de Leighton est très grand devant 1 et que le nombre de Bagnold est quant à lui très faible. Ceci montre qu'en faisant abstraction des interactions colloïdales, la suspension pourrait alors être considérée comme une suspension granulaire s'écoulant dans le régime hydrodynamique. Autrement dit, même si on néglige les interactions colloïdales, ce ne sont pas les contacts directs qui prédominent mais des interactions hydrodynamiques. Dans ce cas, la suspension ne possède *a priori* pas de seuil de contrainte : la moindre force appliquée induit un écoulement, aussi lent soit-il, de la suspension. Ce raisonnement nous amène donc à la conclusion que ce sont les interactions colloïdales entre particules du réseau qui donnent lieu au seuil de contrainte de la suspension. Ce résultat est confirmé par le fait que le seuil de contrainte d'une suspension eau-argile varie significativement avec le pH ou la teneur en électrolytes (cf. § 7.3.4.2). Ces paramètres n'ont en effet aucune action directe sur les contacts directs.

Dans la plupart des situations d'écoulement, les mélanges eau-argiles stables sont donc des suspensions au sein desquelles les interactions colloïdales prédominent. Elles possèdent par conséquent toutes les caractéristiques des suspensions colloïdales (cf. § 2.5) : seuil de contrainte, élasticité, rhéofluidification, thixotropie. Cependant, l'importance de ces caractéristiques dépend beaucoup de l'intensité des interactions entre les particules et donc du type d'argile. On peut grossièrement séparer les argiles en deux familles en fonction de l'intensité des interactions auxquelles elles donnent lieu dans l'eau, ce qui va nous permettre d'expliquer qualitativement les comportements observés à partir des évolutions de la microstructure :

- les argiles non smectites (groupe 1), pour lesquelles il est nécessaire que deux particules s'approchent à très courte distance pour qu'une interaction colloïdale se développe ;
- les smectites (groupe 2), qui peuvent développer des interactions à relativement longue distance.

7.3.2 Rhéologie des suspensions eau-argiles du groupe 1

Les chlorites, illites, kaolinite, sépiolite, attapulgite ou interstratifiées, en suspension dans l'eau, forment essentiellement des fluides à seuil rhéofluidifiants, avec une thixotropie et des propriétés élastiques peu marquées. Le rhéopaisissement observé par certains auteurs [6] est en désaccord avec de nombreuses autres données expérimentales concernant ces matériaux ou des suspensions du même type. Ce phénomène est probablement le résultat d'expériences de rhéométrie mal maîtrisées, notamment trop longues et sans précautions suffisantes, permettant ainsi le développement de phénomènes d'évaporation, migration ou encore creusement. Notons cependant que certains de ces mélanges (eau-kaolinite) possèdent de légères propriétés de rhéopexie [7].

Compte tenu de leur structure, les interactions colloïdales à grande distance entre deux particules de cette catégorie sont faibles. Ceci explique pourquoi ces mélanges ont un seuil de contrainte nettement inférieur à celui des mélanges eau-smectite à concentration solide égale. Notons cependant que dans une certaine gamme de concentrations, la sédimentation au sein de ces mélanges est significative alors que la courbe d'écoulement obtenue pour des vitesses pas trop faibles (c'est-à-dire dans des temps d'écoulement pas trop longs) est clairement celle d'un fluide à seuil. Au-delà d'une certaine fraction solide, la sédimentation est faible, on observe seulement l'apparition d'une fine couche d'eau en surface. Ces résultats ne correspondent pas à ceux que l'on attend pour une suspension colloïdale stable formée de particules se repoussant fortement. Il convient d'examiner plus en détail ces différentes propriétés à la lumière de nos connaissances concernant la structure interne de ces matériaux.

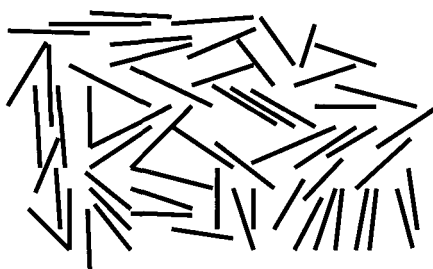


Fig. 7.1 : Aspect probable de la structure interne d'une suspension eau-argile non smectite. Les particules solides non flexibles et soumises à des interactions colloïdales faibles à longue distance s'enchevêtrent plus ou moins pour former un réseau granulaire au sein duquel elles interagissent fortement à très courte distance.

Au-delà d'une certaine concentration, en effet, au sein des pâtes d'argile, les particules, en forme de plaquettes, forment un réseau très dense. On ne peut vraisemblablement pas parler d'un château de cartes, hypothèse couramment invoquée [8], tant la concentration correspondante serait faible par rapport à la concentration réelle dans une structure de ce type. En effet, supposons qu'on empile des particules d'argile ayant la forme de plaquettes carrées d'épaisseur douze fois plus petite que leur longueur en plaçant régulièrement l'extrémité de chaque particule perpendiculairement contre le centre de chaque particule (comme un château de cartes idéal). Dans ce cas, la concentration volumique est de 13 %. Un tel arrangement idéal ne permet donc pas d'atteindre les concentrations de suspensions courantes de kaolin qui possèdent un seuil de contrainte. En outre, il est probable qu'au sein d'une suspension un certain désordre règne, ce qui induit une baisse de concentration par rapport à la précédente si l'ordre local reste du même type. Il est donc vraisemblable que les particules s'entassent

localement les unes contre les autres et la structure globale aurait alors la forme d'un réseau de piles d'assiettes enchevêtrées (cf. Fig. 7.1).

Compte tenu de la faiblesse des interactions colloïdales à longue distance, les particules n'ont pas une tendance très nette à rejoindre rapidement une position d'équilibre située entre les particules voisines comme c'est le cas habituellement dans les suspensions colloïdales concentrées. Lors d'un écoulement, elles sont soumises à des effets d'encombrement géométrique, c'est-à-dire qu'elles s'approchent très près les unes des autres du fait du peu de place disponible et de leur forme plane. Elles peuvent alors développer des interactions colloïdales significatives. Ceci explique que la courbe d'écoulement soit celle d'un fluide à seuil typique. En revanche, lorsqu'on laisse au repos une telle suspension, l'agitation thermique permet au réseau de particules de se relâcher plus ou moins, les particules migrant vers des positions un peu plus éloignées les unes des autres. Comme les forces de répulsion sont faibles dès qu'elles ne sont plus très proches les unes des autres, elles peuvent plus ou moins glisser verticalement vers d'autres positions aussi favorables du point de vue énergétique. Ceci explique les phénomènes de sédimentation dans de telles suspensions. Lorsque la concentration solide est trop grande, les particules sont tellement serrées les unes contre les autres qu'elles ne peuvent plus se glisser vers d'autres positions situées plus bas. Ceci explique aussi la tendance à la rhéopexie de ces mélanges puisque les particules qui ont interagi fortement au cours de l'écoulement préfèrent s'éloigner quelque peu les unes des autres au repos, constituant ainsi un réseau moins solide que le réseau en cours d'écoulement. Une conséquence de cette description est qu'il est délicat d'effectuer des mesures destinées à décrire le comportement du matériau à de très faibles vitesses car celui-ci est susceptible de sédimenter durant l'expérience. Notamment, dans ces conditions, on ne peut pas parler d'un seuil vrai, c'est-à-dire déterminé après un temps de repos infini. Le rôle joué par la sédimentation est cependant d'autant plus faible que la concentration est élevée car l'encombrement des particules neutralise l'effet du mouvement brownien.

En résumé, ce type de suspension possède probablement à la fois un caractère de suspension granulaire aux temps longs puisque les particules ont le temps de s'écarter les unes des autres, ce qui conduit les interactions colloïdales à disparaître en partie, et un caractère de suspension colloïdale concentrée aux temps courts puisque les déformations du réseau imposent des rapprochements de particules qui conduisent à des interactions colloïdales significatives.

En première approximation, le comportement de ces fluides est essentiellement décrit par le modèle utilisé pour représenter sa courbe d'écoulement en termes d'une relation contrainte-gradient de vitesse qui comprend un terme de seuil et une fonction du gradient de vitesse (eq. 1.49). Le modèle qui semble le mieux adapté, car représentant bien les données expérimentales dans une large gamme de gradients de vitesse [9 à 13], est le modèle dit de Herschel-Bulkley :

$$|\tau| < \tau_c \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 ; \dot{\gamma} \neq 0 \Rightarrow |\tau| = \tau_c + K\dot{\gamma}^n \quad (7.2)$$

où K et n sont deux paramètres du matériau. Ce modèle peut aussi facilement être exprimé sous une forme tridimensionnelle analogue à celle proposée au chapitre 2 (éq. 1.50) en prenant $F(D_{II}) = 2^n (\sqrt{-D_{II}})$. Il est possible de décrire en détail les différentes caractéristiques des écoulements à surface libre de fluides à seuil dont la loi de comportement est du type (7.2) [14].

Un modèle proche et plus simple, puisqu'il ne fait intervenir que deux paramètres, a dans la majorité des cas été utilisé en pratique, il s'agit du modèle de Bingham qui correspond à (7.2) avec $n = 1$. On peut en effet très souvent correctement représenter la courbe d'écoulement expérimentale à l'aide d'un tel modèle lorsqu'on ne considère que la partie de cette courbe correspondant à une décade de gradients de vitesse. Cependant, l'utilisation de ce modèle conduit à commettre une erreur importante (qui dépend en fait de la gamme de gradients choisie pour le calage du modèle), couramment de l'ordre de 100 %, notamment vis-à-vis de l'estimation du seuil de contrainte [15].

Outre sa simplicité, l'utilisation d'un tel modèle s'appuyait aussi sur une justification physique. En effet il a souvent été admis que les deux termes du modèle de Bingham reflètent deux mécanismes physiques bien distincts : la contrainte nécessaire à la rupture du réseau et celle nécessaire au cisaillement du réseau brisé, qui s'exprime sous la forme $\mu\dot{\gamma}$ où μ est la viscosité de la suspension équivalente de particules non-colloïdales. En fait, ce raisonnement n'est pas réaliste. Au cours de l'écoulement, les contacts entre particules sont continuellement brisés et reformés et ce processus peut effectivement conduire à un terme de contrainte quelque peu variable autour de la contrainte seuil. La contrainte nécessaire au cisaillement de la suspension formée des débris du réseau immergés dans l'eau est, quant à elle, en général très faible devant le seuil de contrainte, notamment aux faibles gradients de vitesse, puisqu'alors $\Gamma \ll 1$. Par conséquent, si un terme additionnel significatif et dépendant du gradient de vitesse doit être pris en compte dans la loi de comportement en cisaillement simple, il exprime lui aussi une part des dissipations d'énergie liées à l'évolution des interactions au cours de l'écoulement, c'est-à-dire les dissipations correspondant aux interactions colloïdales. Dans ces conditions, et compte tenu de l'état actuel des connaissances, il n'y a plus de raisons de privilégier un modèle plus qu'un autre si ce n'est pour son accord avec les données expérimentales. En contrepartie, les paramètres du modèle choisi n'ont pas de signification physique claire, sauf le seuil de contrainte, toujours associé à la résistance du réseau avant rupture.

Dans l'état actuel des connaissances, il n'est pas non plus possible d'expliquer les évolutions observées des valeurs des paramètres de ces modèles en fonction des caractéristiques physiques des suspensions. On sait par exemple que le seuil de contrainte de ces mélanges eau-argiles varie à peu près exponentiellement avec la concentration, dans une large gamme de concentrations (par exemple de 15 à 45 % pour des suspensions eau-kaolin) :

$$\tau_c = c \exp(s\phi) \quad (7.3)$$

où c et s sont deux paramètres du matériau. Notons qu'une loi de puissance peut aussi permettre de représenter les évolutions du seuil, mais dans des gammes plus restreintes de concentrations. La valeur de s varie de 0,1 à 0,6 selon les matériaux [9-10, 13] lorsque la concentration est exprimée en pour cent. Il n'est pas possible d'expliquer cette évolution exponentielle à partir des modèles existants qui reposent sur la fréquence de collision ou sur une structure fractale (cf. § 7.3.3.2) et qui prédisent des lois de puissance avec un exposant inférieur ou égal à 3. On peut donc légitimement penser qu'en plus de ces phénomènes, l'intensité des interactions augmente avec la concentration, les particules devant se serrer de plus en plus les unes contre les autres, ce qui induit cette augmentation plus rapide du seuil avec la concentration. En fait, compte tenu de notre description de la structure interne ci-dessus, le seuil de contrainte est lié à la fois à l'intensité des interactions et à la structure du réseau qui évolue avec la concentration. Pour mieux comprendre les évolutions du seuil, il est donc probable qu'il faille s'attacher à décrire plus précisément la distribution de forces au sein de suspensions granulaires anisotropes.

Lorsqu'on augmente la concentration solide d'un mélange eau-argiles, non seulement le seuil de contrainte, mais aussi le niveau général de la contrainte dans les courbes d'écoulement augmentent. À partir d'un ensemble de mesures systématiques dans une large gamme de gradients de vitesse et de concentrations on peut faire apparaître la similitude structurelle des différents mélanges annoncées au § 2.5.6.4 : toutes les courbes se superposent sur une courbe maîtresse dans un diagramme (T, Γ) où $T = \tau/\tau_c$ [16]. Lorsque Γ est inférieur à 0,3 cette courbe peut être représentée par le modèle suivant :

$$T = 1 + K' \Gamma^{n'} \quad (7.4)$$

où K' et n' sont des paramètres dépendant du matériau, qui ne dépendent pas de ϕ ; pour $\Gamma > 50$, la courbe d'écoulement est de type newtonien avec une viscosité approximativement égale à $1,5\mu_0$, ce qui n'est pas étonnant puisque la valeur de la viscosité utilisée correspond encore à une suspension de particules sphériques. Les évolutions des contraintes étant analogues, on peut donc supposer qu'il y a similitude de la structure du réseau et de ses évolutions avec la concentration.

7.3.3 Rhéologie des suspensions eau-argiles du groupe 2

7.3.3.1 Propriétés générales

Les mélanges de smectites avec l'eau sont des fluides à seuil avec des propriétés élastiques et une thixotropie marquées. En outre, à concentration solide égale, le seuil de contrainte des suspensions du groupe 2 est de plusieurs ordres de grandeur supérieur à celui des suspensions du groupe 1. Enfin ces suspensions peuvent avoir une courbe d'écoulement bien particulière, caractérisée par un niveau (en termes de contrainte), pour des gradients de vitesse modérés, inférieur à celui du seuil de contrainte. Si l'on suppose

que la courbe d'écoulement est continue entre le point correspondant à ce seuil et les autres points, tout se passe comme si cette courbe décroissait d'abord aux faibles gradients de vitesse jusqu'à un minimum puis augmentait au-delà de ce point. Ce comportement original, suggéré par les mesures de Englund et Wan [17], a été mis en évidence par Coussot *et al.* [18] sur des mélanges eau-bentonite. Une étude systématique des régimes d'écoulement intervenant en fonction du gradient de vitesse a été proposée par Pignon *et al.* [19] pour des mélanges eau-laponite. Théoriquement, les écoulements correspondant à la partie décroissante sont instables (*cf.* Annexe 4.1), mais dans certaines conditions, il est possible que des effets de bord (non pris en compte dans l'analyse de stabilité) les stabilisent. Pignon *et al.* [19] ont démontré que le matériau est cisailé de manière homogène uniquement dans la partie croissante de la courbe d'écoulement ou pour de très faibles gradients de vitesse dans la partie décroissante. Entre autres, ils ont ainsi pu constater que les suspensions eau-laponite possèdent effectivement un minimum dans la courbe d'écoulement. Cependant, dans la majorité de la partie décroissante de cette courbe d'écoulement, le cisaillement a tendance à se localiser dans une couche de fluide plus ou moins fine (ce qui résulte probablement de l'instabilité mentionnée plus haut (*cf.* chap. 4)). Ce minimum dans la courbe d'écoulement est probablement caractéristique de suspensions de particules interagissant fortement dans un liquide de faible viscosité, avec un temps caractéristique de restructuration assez long : lorsque le réseau est brisé, les contraintes nécessaires au maintien d'un mouvement peuvent être plus faibles que celles nécessaires à la rupture du réseau.

La plupart des modèles proposés pour décrire la thixotropie ainsi que le minimum dans la courbe d'écoulement de ces matériaux sont de simples adaptations du modèle de base en cisaillement simple représenté par le système d'équations (1.26) et (1.43). On introduit par exemple un terme seuil dans la contrainte tangentielle [18, 20] et l'on suppose que le paramètre de structure (λ) décrit le nombre de floes ou de liens existants dans le mélange entre les particules solides à l'instant considéré, ou encore la fraction de particules au fond de leur puits de potentiel local instantané (*cf.* § 2.4.6). Plus précisément, compte tenu du fait que les liens se reforment très progressivement et de manière variable au sein du milieu, ce nombre décrit l'état moyen de restructuration de la suspension, c'est-à-dire l'intensité moyenne des liens à l'instant considéré. Un modèle plus sophistiqué a aussi été proposé pour représenter les propriétés viscoélastiques de ces suspensions [18]. Toutefois, bien que qualitativement en accord avec les observations expérimentales, ce modèle n'a pas encore été confronté avec une gamme de résultats expérimentaux suffisamment large. En outre, pour tous ces modèles, plusieurs paramètres ne peuvent pas être déterminés par des mesures physiques indépendantes. L'état actuel des connaissances ne permet donc pas, dans le cadre de cet ouvrage, d'aller plus loin dans ce domaine. La modélisation des écoulements s'avère, quant à elle, extrêmement délicate tant il est difficile de caractériser correctement et de prendre en compte dans les équations du mouvement l'ensemble des caractéristiques du comportement de ces suspensions, c'est-à-dire le seuil de contrainte, les propriétés

thixotropes, le minimum dans la courbe d'écoulement et éventuellement les propriétés viscoélastiques.

7.3.3.2 Propriétés mécaniques et structure interne

Compte tenu de l'origine du seuil de contrainte (réseau de particules en interaction), il peut être associé au seuil de percolation : au-delà d'une concentration critique (ϕ_c) un réseau d'interaction existe d'un bout à l'autre de l'échantillon. Théoriquement, pour des concentrations proches de la concentration critique, le nombre de particules faisant partie de l'agrégat infini doit croître selon une loi de puissance de $(\phi - \phi_c)$. De même, le module élastique, lié à la solidité donc aux caractéristiques du réseau, doit croître de la manière suivante :

$$G' \propto (\phi - \phi_c)^\alpha \quad (7.5)$$

où α est un exposant relié à la dimension fractale des agrégats.

Les résultats expérimentaux existants sont en accord avec cette approche théorique. Ainsi Alderman *et al.* [21] ont montré que le seuil de contrainte de suspensions eau-bentonite est proportionnel à ϕ^α , avec $\alpha = 3$ et un coefficient de proportionnalité qui dépend du temps de repos préalable. Notons au passage que ceci implique que le seuil de contrainte soit défini comme la contrainte minimum permettant l'écoulement dans des conditions expérimentales arbitraires (temps d'application d'un niveau de contrainte et temps de repos préalable du matériau arbitraires) et non comme la valeur unique pour laquelle le matériau s'écoule effectivement après un temps de repos infini (cf. § 4.4.3). Dans la gamme [10 ; 60 %] Sherwood *et al.* [22] ont montré, à l'aide d'expériences d'écrasement, que la même loi était valable avec $\alpha = 1,9$. Pour des suspensions eau-laponite, Pignon *et al.* [23] ont pu relier l'exposant α à la dimension fractale du réseau de particules. Ils ont montré que la dimension fractale des agrégats de particules formant le réseau croît de 1 à 1,8 autour d'une concentration critique (0,55 %), ce qui signifie que les agrégats deviennent plus denses. Ce changement de structure induit une variation dans l'évolution du seuil de contrainte en fonction de la fraction solide : τ_c est proportionnel à ϕ^2 de 0,35 à 0,48 % et est proportionnel à ϕ^3 de 0,6 à 2,2 %. Ainsi, il pourrait exister une correspondance directe entre la structure fractale du réseau et sa solidité [24]. Cet argument est à mettre en regard de l'approche de Hunter [25] qui permet de prédire une variation en ϕ^2 du seuil de contrainte de suspensions floculées. Par ailleurs, les suspensions eau-laponite présentent une transition thermodynamique sol-gel réversible : au-delà de ϕ_c , le seuil de contrainte et le module élastique varient comme (7.5) avec $\alpha = 2,35$ [26], ϕ_c variant de 0,2 à 2 % selon la force ionique de la suspension. Gouami *et al.* [27] ont observé un comportement analogue avec des suspensions de sépiolite avec $\alpha = 2,7$ et ϕ_c autour de 0,33%. Khandal and Tadros [28] et Sohm and Tadros [29] ont observé le même type de croissance pour des mélanges eau-montmorillonite avec α entre 3,4 et 4,5 mais en prenant $\phi_c = 0$.

Les expériences sont encore assez peu nombreuses dans ce domaine et surtout très approximatives, notamment parce qu'il est très difficile d'appliquer ou de mesurer les faibles valeurs correspondant à la détermination des évolutions des paramètres aux environs du seuil de percolation. L'idéal serait de pouvoir disposer d'images directes de la structure interne pour déterminer clairement l'origine de la solidité du réseau de particules. Dans ce domaine, on a longtemps cherché à déduire la forme prise par cette structure à partir du comportement macroscopique des suspensions. Contrairement au modèle de type château de cartes proposé par van Olphen [8] et qui a rencontré un vif succès pendant de nombreuses années, les observations récentes de la structure interne des mélanges eau-smectites, par le biais de techniques de diffusion de la lumière, des neutrons ou des rayons X, convergent vers un modèle de réseau lenticulaire connecté, formé par agrégation aléatoire de feuillets [30 à 33]. Il s'agirait en fait d'un milieu biphasique constitué de poches d'eau au sein d'une matrice constituée d'un mélange eau-argile (*cf.* Fig. 7.2). Notons que ce type de structure est possible grâce à la flexibilité des particules de smectite.

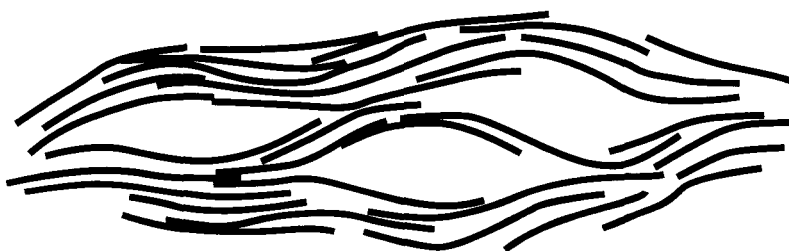


Fig. 7.2 : Aspect probable de la structure interne d'une suspension eau-smectite. Les particules solides allongées et flexibles se repoussent fortement et forment un réseau contenant des poches d'eau analogue à la structure d'un mille-feuille.

7.3.4 Influence de divers paramètres

7.3.4.1 Température

Les variations du comportement des suspensions eau-argile avec la température sont importantes lorsque Γ est supérieure à 50, car dans ce cas l'influence du cisaillement de l'eau, et donc de sa viscosité, est prédominante. En revanche, lorsque Γ est faible, les interactions colloïdales entre particules, qui sont peu sensibles à la viscosité de l'eau, jouent un rôle prédominant. Les résultats obtenus dans la littérature lorsque la température varie dans la gamme [0, 100 °C] [13, 34-35] confirment cette analyse : les courbes d'écoulement ne varient significativement avec la température que lorsque Γ est très supérieur à 1.

7.3.4.2 pH et électrolyte

Les propriétés rhéologiques des mélanges eau-argiles dépendent beaucoup du pH et de la concentration en électrolyte [13] du fait des variations de la concentration et du type des cations échangeables. L'influence du pH et de la concentration en électrolyte varient donc aussi beaucoup selon le type des argiles. La plupart du temps, cette influence a été étudiée au travers des évolutions du seuil de contrainte extrapolé vers les faibles valeurs de gradients de vitesse en utilisant un modèle de Bingham. Par conséquent, les résultats obtenus doivent être considérés comme une représentation approximative des évolutions réelles.

Pour des mélanges eau-kaolinite [36] le seuil de contrainte décroît avec le pH à différentes concentrations de NaCl dans la suspension mais toutes les courbes se croisent en un point (autour du $\text{pH}=8$). De plus, le seuil décroît avec la concentration en NaCl pour un $\text{pH}>8$ et croît pour un $\text{pH}<8$. Pour des mélanges eau-montmorillonite sodique, le seuil augmente avec la concentration en NaCl et décroît avec le pH [37]. Pour des mélanges eau-montmorillonite calcique le seuil possède un minimum pour un pH de 5,5 [38]. Enfin, il a été prouvé que les suspensions eau-argiles ont un seuil qui augmente lorsque les cations échangeables passent de Mg^{++} à Ca^{++} , puis Na^+ [39]. Ces résultats ont été essentiellement interprétés en terme d'interactions bord-bord, bord-face, face-face entre les particules d'argiles [8]. Comme ce schéma d'interactions principales s'est avéré inadéquat (cf. § 7.3.2 et § 7.3.2), ces interprétations restent très spéculatives.

7.4 Propriétés mécaniques des mélanges eau-argiles-grains

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux mélanges eau-argiles-grains contenant une fraction de smectites négligeable. Lorsque les grains ont un diamètre très grand devant celui des particules d'argiles, les hétérogénéités du mélange eau-argile sont négligeables, on peut donc considérer que l'on a affaire à une suspension de grosses particules dans un fluide interstitiel eau-argiles. Lorsque la fraction d'argile est suffisamment grand, le fluide interstitiel eau-argile possède un seuil de contrainte. L'étude de ces mélanges se ramène alors à celle plus générale des suspensions de particules dans un fluide à seuil. Or, il n'existe pas dans ce domaine de cadre théorique analogue à celui des suspensions dans un fluide newtonien (cf. § 2.3) et les résultats expérimentaux sont très peu nombreux.

Pour un fluide interstitiel à seuil, il est beaucoup plus difficile *a priori* de calculer de la même façon que pour une suspension newtonienne diluée, le champ des vitesses résultant de la présence de quelques particules. *A fortiori*, le champ des contraintes dans une suspension non diluée est difficile à déterminer. Afin d'approcher grossièrement la

valeur du seuil d'une suspension dans un fluide à seuil, nous pouvons en revanche simplement renouveler l'approche de Krieger et Dougherty (cf. § 2.3.3) initialement proposée pour une suspension dans un fluide newtonien. On suppose alors que chaque grain ajouté voit autour de lui un fluide à seuil homogène équivalent. De manière évidente, comme au § 2.3.3, on en déduit que le seuil de contrainte s'écrit :

$$\tau_c = \tau_{c_0} \left(1 - \frac{\phi}{A} \right)^{-m} \quad (7.6)$$

où τ_{c_0} est le seuil de contrainte du fluide interstitiel (suspension eau-argiles dans notre cas), ϕ la concentration solide de grains, et m un coefficient positif. Comme dans le cas d'un fluide newtonien, de façon à prédire l'augmentation probablement très rapide de τ_c lorsque ϕ tend vers ϕ_m , on peut supposer que A est égal à ϕ_m (la concentration d'entassement maximal des grains dans le mélange eau-argiles).

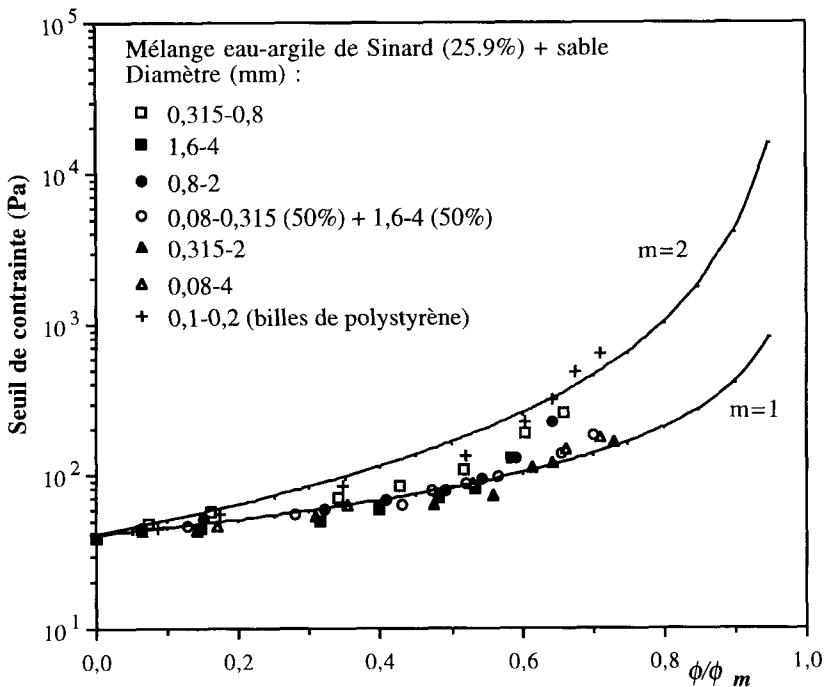


Fig. 7.3 : Seuil de contrainte de divers mélanges eau-argile-grains en fonction de la concentration volumique de grains divisée par la concentration d'entassement maximal. L'argile de Sinard est un sol très argileux (donc contenant une fraction de grains) de la région de Grenoble. Les courbes correspondant à la formule (7.7) avec $m=1$ et $m=2$ ont été tracées pour comparaison avec les résultats expérimentaux.

Les rares données expérimentales [40] montrent que, tant que la concentration en grains n'est pas trop grande, les suspensions eau-argiles-grains sont des fluides au comportement analogue à celui du fluide interstitiel. Autrement dit, il s'agit de fluides à seuil rhéofluidifiants analogues au mélange eau-argiles initial. Le modèle à utiliser pour décrire le comportement de la suspension ne change pas mais en revanche la valeur des paramètres de ce modèle augmente avec la concentration de grains ajoutés. Fondamentalement ceci signifie que, durant un écoulement, le fluide interstitiel lubrifie les mouvements relatifs des grains et impose son type de comportement. Par ailleurs, les variations du seuil en fonction de la concentration en grains semblent en accord global avec une loi d'évolution du type (7.6) et un exposant m compris entre 1 et 2 selon la distribution granulométrique des grains ajoutés. Lorsqu'on ajoute des sphères d'un diamètre à peu près uniforme (compris entre 100 et 200 μm), m vaut presque exactement 2. Plus la distribution granulométrique est étalée, plus m est proche de 1 (cf. Fig. 7.3).

Si les grains sont d'une taille qui s'approche de celle des particules d'argile, le problème est plus complexe et les raisonnements ci-dessus sont probablement erronés. Toutefois, dans des mélanges boueux naturels, la fraction de grains d'un diamètre inférieur à dix fois le diamètre maximum des particules d'argile reste en général très faible.

Il est relativement normal que le comportement du mélange eau-argiles-grains soit influencé par la suspension eau-argiles jusqu'à de fortes concentrations en grains. En considérant le mélange eau-argiles comme le fluide interstitiel, il s'agit de suspensions granulaires analogues à celles que nous avons envisagées au chapitre 3, mais il est difficile de préciser leur régime d'écoulement. En effet, les nombres adimensionnels utilisés au chapitre 3 correspondent à un fluide interstitiel newtonien alors que le mélange eau-argile interstitiel est un fluide à seuil. Une approche très approximative consiste à supposer que le terme $\mu_0 \dot{\gamma}$ qui apparaît dans l'expression du nombre de Leighton (3.27) peut être remplacé par le seuil de contrainte du fluide interstitiel. En supposant en outre que $\varepsilon \approx r/100$ et que l'effort normal résulte du poids d'une colonne de fluide au-dessus de la particule, on obtient un nombre de Leighton en général assez largement supérieur à 1 pour des hauteurs de fluide de l'ordre d'une dizaine de centimètres. Ceci semble indiquer que même lorsque la concentration en grains est telle que ceux-ci peuvent entrer en contact direct, ce type d'interaction reste négligeable en général. Nous sommes dans un régime hydrodynamique et le comportement de la suspension est encore dicté par l'écoulement du fluide interstitiel. Notons cependant d'une part que l'on peut atteindre le régime frictionnel en appliquant un effort normal suffisamment grand au mélange et, d'autre part, que notre analyse néglige la possibilité que se forme un réseau d'interactions entre des particules d'argiles et des grains.

7.5 Classification des mélanges boueux

7.5.1 La fracturation des pâtes

Au-delà d'une certaine concentration solide, les pâtes d'argiles formées à partir d'un mélange d'eau et d'argiles non smectites ont tendance à se fracturer. Ce phénomène est notamment observé lors des expériences de rhéométrie en cisaillement simple et est alors considéré comme un effet perturbateur des expériences (*cf.* § 4.2.3). En pratique, cette fracturation se produit plus ou moins au-delà d'une déformation critique. Dans un premier temps, un plan de rupture ou de localisation de la déformation se forme, puis, dans un second temps, de l'air semble pénétrer entre les deux parties du fluide situées d'un côté et de l'autre de ce plan au point que ces deux parties restent en contact dans certaines zones seulement. Par ailleurs, lors d'expériences d'écartement de plaques séparées par un mélange eau-argiles concentré on observe, au lieu d'une élongation simple, une fracturation qui conduit à la rupture du matériau en deux parties distinctes dont les surfaces libres présentent des reliefs complexes [41]. Ce type de fracturation est probablement lié à un phénomène de dilatance empêchée ou plus généralement au fait que le fluide interstitiel ne peut pas migrer rapidement à travers le réseau de particules (§ 3.4.2). En effet, compte tenu de la très petite taille des particules, il est facile de montrer que le nombre de Stokes est extrêmement faible.

Le même phénomène se produit au-delà d'une certaine concentration avec des pâtes contenant une fraction argileuse et une fraction granulaire grossière. Les raisons sont analogues, les grains jouant un rôle très similaire (quoique moins puissant) à des particules d'argiles non smectites au sein de l'empilement de particules, la migration de l'eau à travers le réseau solide reste très difficile parce qu'elle doit nécessairement se faire *via* la pâte eau-argile fine. Nous ne traiterons pas plus avant ce phénomène mais nous retiendrons simplement qu'il existe, dans tous les cas, une concentration critique (ϕ_F), variable selon les caractéristiques du milieu, au-delà de laquelle un mélange eau-argiles-grains a tendance à se fracturer lorsqu'on le déforme. Cette dernière varie certainement quelque peu en fonction de la distribution granulométrique des particules solides mais dans la suite, pour un type d'argile et de grains donnés, nous la supposons pour simplifier indépendantes des fractions relatives d'argile et de grains. Notons encore que cette limite peut varier sensiblement en fonction des contraintes normales appliquées au mélange (*cf.* § 3.4.2).

7.5.2 La sédimentation

Si l'on place un caillou à la surface d'un mélange eau-argiles suffisamment concentré, il s'enfonce légèrement puis s'arrête et reste près de la surface comme un iceberg émergeant partiellement de l'eau. Si maintenant, par un moyen quelconque, on parvient à diminuer suffisamment la concentration d'argiles le caillou tombe au fond du récipient. Lorsque le seuil de contrainte est suffisamment grand il permet en effet à la suspension

de supporter des particules d'une densité supérieure à celle du mélange. En effet, contrairement à ce qui se passe avec un fluide newtonien (*cf.* § 5.2.4), le frottement visqueux s'exerçant sur une particule traversant un fluide à seuil tend vers une limite finie proportionnelle au seuil de contrainte lorsque la vitesse de la particule par rapport au fluide tend vers zéro. Dans ces conditions, si la force s'exerçant sur la particule est inférieure à cette limite celle-ci s'immobilise. Il résulte des approches théoriques et expérimentales existantes [14, 42] que, pour une particule sphérique, cette force critique s'exprime très approximativement :

$$12\tau_c \pi R^2 \quad (7.7)$$

En supposant que la distribution des pressions est hydrostatique, c'est-à-dire donnée par une formule du type (3.64), on en déduit le seuil critique d'une suspension permettant de supporter une particule de masse volumique ρ_p au repos :

$$\tau_s = \frac{1}{9}(\rho_p - \rho)gR \quad (7.8)$$

Considérons maintenant une particule sphérique au sein d'un fluide à seuil en écoulement, par exemple soumis à un cisaillement simple. Contrairement à ce qui se passe pour une particule dans un fluide au repos, la force exercée par le fluide sur chaque point de la sphère, résulte maintenant de l'écoulement du fluide, et peut être calculée grâce à (7.2) à partir du moment où l'on connaît le profil des vitesses. Or, si les conditions aux limites sont telles que le cisaillement est homogène loin de la sphère dans toutes les directions, le profil des vitesses est antisymétrique par rapport au centre de la sphère. Par conséquent, la contrainte s'appliquant sur une petite surface quelconque de la particule est contrebalancée par une contrainte de même amplitude mais de signe opposé de l'autre côté de la particule par rapport à son centre. Il en résulte que la contrainte totale appliquée à la particule est nulle, bien que le couple total ne soit pas nul. Si la distribution de pression est hydrostatique, la sphère doit sédimenter, quelle que soit la valeur du seuil de contrainte du fluide. Pour une particule suspendue initialement dans un fluide cisailé de manière hétérogène, le problème est plus complexe, mais de manière générale la force résultante est très nettement plus faible qu'en statique. On doit donc s'attendre à ce qu'une particule, immergée dans la zone cisailée d'un fluide à seuil simple en écoulement, sédimente (*cf.* [14]).

7.5.3 Synthèse

Si une fracturation ou une sédimentation significatives se produisent au sein d'une suspension boueuse, on ne peut plus considérer que l'on a affaire à un fluide homogène et nous sortons du champ couvert par cet ouvrage. Il est donc utile de cerner les caractéristiques des mélanges intermédiaires pour lesquels ces phénomènes sont négligeables. En première approximation, la suspension se fracture au-delà d'une concentration solide totale (ϕ_F). Par ailleurs, à distribution granulométrique des grains

fixée, au repos, les plus gros grains (de rayon R_c) sédimentent lorsque le seuil de contrainte de l'ensemble est inférieur à la valeur critique $\tau_s(R_c)$ définie ci-dessus.

Considérons maintenant un mélange composé d'un volume d'eau Ω_e , d'un volume d'argiles non smectites Ω_a et d'un volume de grains Ω_g . La fraction argiles/solide ψ est définie comme le rapport $\Omega_a/(\Omega_g + \Omega_a)$ et la concentration solide totale ϕ comme le rapport $(\Omega_a + \Omega_g)/(\Omega_e + \Omega_a + \Omega_g)$. On en déduit la fraction argileuse au sein du fluide interstitiel eau-argiles :

$$\phi_a = \frac{\psi}{\psi - 1 + 1/\phi} \quad (7.9)$$

La fraction de grains au sein du mélange s'écrit quant à elle $\chi = \phi(1 - \psi)$. À partir de (7.3) et (7.6) on peut écrire le seuil de contrainte théorique du mélange étudié :

$$\tau_c = c \left(1 - \frac{\chi}{\chi_m} \right)^{-m} \exp(s\phi_a) \quad (7.10)$$

Pour une valeur de ψ donnée, il y aura donc sédimentation lorsque ce seuil sera inférieur à τ_s , c'est-à-dire lorsque ϕ sera inférieure à une valeur critique ϕ_s (telle que $\tau_c(\phi_s) = \tau_s$), et fracturation lorsque ϕ sera inférieure à ϕ_f . Ces concentrations limites décrivent finalement deux courbes dans un diagramme (ψ, ϕ) qui se rencontrent en un point E en général proche de l'axe des ϕ et nous permet de délimiter 4 domaines (cf. Fig. 7.4) :

- A) Entre les limites de fracturation et de sédimentation le mélange est par définition composé de grains et d'une matrice argileuse suffisamment visqueuse pour empêcher la sédimentation au moins au repos. De plus, les grains sont suffisamment peu nombreux pour ne pas former, avec les particules d'argile, un réseau de contacts directs, ce qui conduirait probablement à une fracturation. On en déduit qu'un tel mélange a un comportement dicté par la matrice argileuse qui enrobe l'ensemble des grains (en général $Le \gg 1$), c'est-à-dire qu'il s'agit essentiellement d'un fluide à seuil rhéofluidifiant avec un seuil de contrainte donné par (7.10).
- B) Au-delà de la limite de fracturation nous avons affaire à un mélange qui, en général, se fracture lorsqu'on lui impose des déformations.
- C) En dessous de la limite de sédimentation, on a affaire à un mélange hétérogène dans la plupart des conditions d'écoulement.
- D) Les courbes de fracturation et de sédimentation se rejoignent au point E. Lorsqu'on part d'un mélange peu concentré à gauche de ce point dans le diagramme, on se trouve en théorie dans le domaine des mélanges sédimentants. Si l'on augmente la concentration solide totale, on finit naturellement par entrer dans une zone pour laquelle la concentration est telle que le mélange doit se fracturer. La transition entre ces deux types de mélanges est relativement brutale, aux incertitudes sur la concentration près (qui varie

quelque peu avec la configuration). Par conséquent, on peut tracer cette limite sous la forme d'une courbe partant de E et rejoignant l'axe des ϕ . Le long de cette courbe, les mélanges sont des suspensions granulaires qui s'écoulent la plupart du temps en régime frictionnel car le fluide interstitiel eau-argile est relativement peu visqueux.

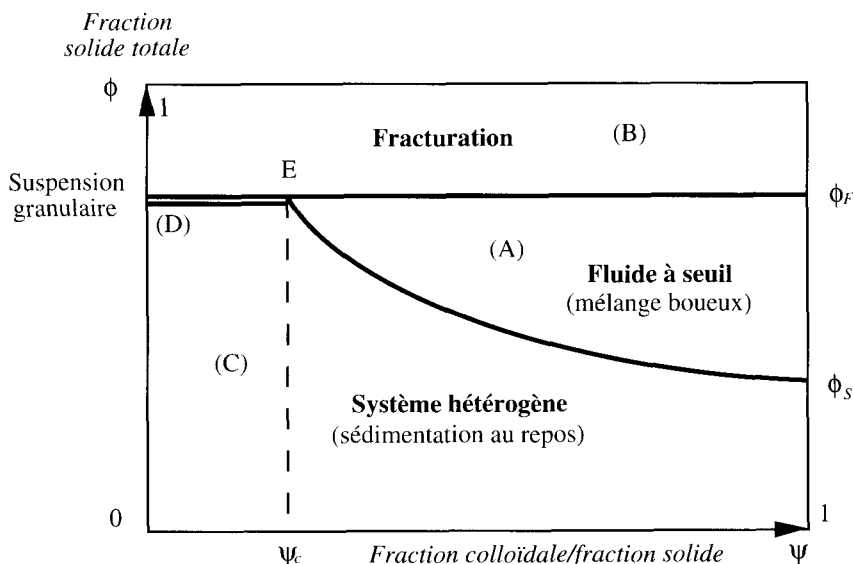


Fig. 7.4 : Classification conceptuelle des divers types de mélanges que l'on peut obtenir à partir de différents volumes d'argiles et de grains dans de l'eau. Les courbes limites sont tracées à titre indicatif. Leur allure est correcte mais leurs positions et formes exactes doivent être déterminées précisément dans chaque cas particulier. Les différents domaines identifiés sont décrits en détail dans le texte.

Il n'est cependant pas exclu que des écoulements naturels dont les caractéristiques sont telles qu'ils se situent dans les parties B ou C se produisent de manière homogène et continue. En effet la sédimentation peut être contrecarrée par une certaine agitation du mélange, et la fracturation par l'application d'une forte pression. (Ainsi, lorsqu'on malaxe une pâte à modeler, on fournit suffisamment d'énergie pour contrecarrer la tendance à la fracturation. Si en revanche on étire librement cette pâte, elle se fracture.) Enfin, cette classification ne concerne que des fluides au repos. Ainsi, il est possible que des écoulements, mettant en jeu des mélanges dont les caractéristiques sont telles qu'ils se situent dans le domaine A, se produisent finalement avec un caractère biphasique, simplement parce la sédimentation est possible, même au sein de fluides à seuil élevé, dès que le fluide s'écoule. Cette classification reste donc très approximative et ne doit pas remplacer une étude complète des caractéristiques du fluide et du régime d'écoulement.

Références

- [1] Gauthier, C., Nadj, D. and Coussot, P. 1998. Instabilité du front de retrait lors du séchage d'une suspension d'argile dans un empilement granulaire. *C.R. Acad. Sci. IIb (Paris)*, 326, 767-774.
- [2] Nadj, D. 1998. *Colmatage d'un milieu modèle par une suspension d'argile : Application au colmatage des chaussées poreuses*. Marne-la-Vallée, Thèse de l'ENPC.
- [3] Velde B. 1992. *Introduction to Clay Minerals*. London, Chapman & Hall.
- [4] Russel, W.B., Saville, D.A. and Schowalter, W.R. 1989. *Colloidal dispersions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press.
- [5] Zeichner, G.R. and Schowalter, W.R. 1977. Use of trajectory analysis to study stability of colloidal dispersions in flow fields. *AIChE J.*, 23, 243-254.
- [6] Beazley, K.M. 1965. Factors influencing dilatant behaviour in China clay suspensions. *Trans. Brit. Ceram. Soc.*, 64, 531-546.
- [7] Coussot, P. 1992. *Rhéologie des laves torrentielles - Etude de dispersions et suspensions concentrées*. Grenoble, Thèse de l'INPG.
- [8] Van Olphen, H. 1977. *Introduction to clay colloid chemistry*, New-York, Wiley and Sons.
- [9] O'Brien J.S. and Julien, P.Y. 1988. Laboratory analysis of mudflows properties. *J. Hydraul. Eng.*, 114, 877-887.
- [10] Major, J.J. and Pierson, T.C. 1992. Debris flow rheology: Experimental analysis of fine-grained slurries. *Water Resour. Res.*, 28, 841-857.
- [11] Locat, J. and Demers, D. 1988. Viscosity, yield stress, remolded strength, and liquidity index relationships for sensitive clays. *Can. Geotechn. J.*, 25, 799-806.
- [12] Michaels, A.S. and Bolger, J.C. 1962. The plastic flow behavior of flocculated kaolin suspensions, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, 1, 153-162.
- [13] Coussot, P. and Piau, J.-M. 1994. On the behaviour of fine mud suspensions. *Rheol. Acta*, 33, 175-184.
- [14] Coussot, P. 1997. *Mudflow Rheology and Dynamics*, IAHR monograph, Rotterdam, Balkema.
- [15] Coussot, P. 1994. Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *J. Hydraul. Res.*, 32, 535-559.
- [16] Coussot, P. 1995. Structural similarity and transition from Newtonian to non-Newtonian behavior for clay-water mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 74, 3971-3974.
- [17] Engelund, R. and Wan, Z. 1984. Instability of Hyperconcentrated flow. *J. Hydr. Eng.*, 110, 219-233.
- [18] Coussot, P., Leonov, A.I. and Piau, J.M. 1993. Rheology of concentrated dispersed systems in a low molecular weight matrix. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 46, 179-217.
- [19] Pignon, F., Magnin, A. and Piau, J.M. 1996. Thixotropic colloidal suspensions and flow curves with minimum: identification of flow regimes and rheometric consequences. *J. Rheol.*, 40, 573-587.
- [20] Billingham, J. and Ferguson, J.W.J. 1993. Laminar, unidirectional flow of a thixotropic fluid in a circular pipe. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 47, 21-55.

- [21] Alderman, N.J., Meeten, G.H. and Sherwood, J.D. 1991. Vane rheometry of bentonite gels. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 39, 291-310.
- [22] Sherwood, J.D., Meeten, G.H., Farrow, C.A. and Alderman, N.J. 1991. Squeeze-film rheometry of non-uniform mudcakes. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 39, 311-334.
- [23] Pignon, F., Piau, J.-M. and Magnin, A. 1996. Structure and pertinent length scale of a discotic clay gel. *Phys. Rev. Lett.*, 76, 4857-4860.
- [24] Dorget, M. 1995. Propriétés rhéologiques des composés silice/silicone. Grenoble, Thèse de l'Univ. Joseph-Fourier.
- [25] Hunter, R.J. 1982. The flow behavior of coagulated colloidal suspensions. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 17, 197-211.
- [26] Mourchid A., Delville A., Lambard J., Lecolier E. and Levitz P. 1995. Phase diagram of colloidal suspensions of anisotropic charged particles: equilibrium properties, structure and rheology, *Langmuir*, 11, 1942-1950
- [27] Gouami, A., Mourchid, A., Levitz, P. and Bergaya, F. 1994. Rhéologie des suspensions d'argiles fibreuses. *Les Cahiers de Rhéologie*, XIII, 170-179.
- [28] Khandal R.K. et Tadros T.F. 1988. Application of viscoelastic measurements to the investigation of the swelling of montmorillonite suspensions, *J. Coll. Interface Sci.*, 125, 122-128.
- [29] Sohm R. and Tadros T.F. 1989. Viscoelastic properties of sodium montmorillonite suspensions, *J. Coll. Interface Sci.*, 132, 62-71.
- [30] Touret O., Pons C.H., Tessier D. et Tardy Y. 1990. Étude de la répartition de l'eau dans des argiles saturées Mg^{2+} aux fortes teneurs en eau, *Clay Minerals*, 25, 217-233.
- [31] Vali H. and Bachmann L. 1988. Ultrastructure and flow behavior of colloidal smectite dispersions, *J. Colloid Interf. Sci.*, 126, 278-291.
- [32] Van Damme H., Levitz P., Fripiat J.J., Alcover J.F., Gatineau L. and Bergaya F. 1985. Clay Minerals: A molecular approach to their fractal microstructure, in *Physics of Finely Divided Matter*, N. Boccara and M. Daoud (Ed.), Berlin, Springer-Verlag, 24-30.
- [33] Morvan M., Espinat D., Lambard J. and Zemb T. 1994. Ultrasmall- and small-angle X-ray scattering of smectite clay suspensions. *Coll. Surf. A: Physicochem. Engin. Aspects*, 82, 193-203.
- [34] Lapasin, R. 1985. Clay/kaolin aqueous suspensions. *J. Theor. Appl. Mech.*, (Special issue), 239-251.
- [35] Tsutsumi, A. and Yoshida, K. 1987. Effect of temperature on rheological properties of suspensions", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 26, 175-183.
- [36] Lagaly, G. 1989. Principles of flow of kaolin and bentonite dispersions. *Appl. Clay Sci.*, 4, 105-123.
- [37] Huifang Z., Low P.F. and Bradford J.M. 1991. Effects of pH and electrolyte concentration on particle interaction in three homoionic sodium soil clay suspensions, *Soil Science*, 151, 196-207.
- [38] Brandenburg U. et Lagaly G. 1988. Rheological properties of sodium montmorillonite dispersions, *Applied. Clay Sci.*, 3, 263-279.
- [39] Wang, Z., Larsen, P. and Xiang, W. 1994. Rheological properties of sediment suspensions and their implications. *J. Hydr. Res.*, 32, 560-580.
- [40] Coussot, P. and Piau, J.-M. 1995. Effect of an addition of force-free particles on the rheological properties of fine suspensions. *Can. Geotechn. J.*, 32, 263-270.

- [41] E. Lemaire *et al.* 1993. Pattern formation in noncohesive granular media, *Fractals*, 1, 968-976.
- [42] Chhabra, R.P. and Uhlherr, P.H.T. 1988. Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids. in *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, N.P. Cheremisinoff (Ed.), Houston, Gulf Publishing Co., Chapter 21, Vol. 7.

INDEX

- accélération 18
- aérosol 235
- agitation interne 143
- agitation thermique 4, 63, 75
- argile 246

- Bagnold 126, 141
- boue 243
- bulles 225

- capillaire 187
- cisaillement simple 25, 159
- collision 105
- compression 130
- concentration
 - critique 111
 - d'entassement maximal 43, 111, 113
 - volumique solide 43
- conductivité thermique 213, 232
- cone-plan 179
- conservation
 - de l'énergie 39
 - de la masse 17
 - de la quantité de mouvement 18
- contact 87
 - direct 103
 - frictionnel 104
 - lubrifié 102
- continuité 8, 22, 162, 184
- contrainte 13
 - déviateur 17
 - normale 13
 - tangentielle 13
 - tenseur 16
 - invariants 16
 - tenseur des contraintes modifié 20, 47
- Coulomb 104, 119, 134
- couplage 117, 127
- courbe d'écoulement 196
- creusement 171, 200
- crystallisation 212, 215, 216, 229
- cylindres coaxiaux 183

- Darcy 120, 128
- déformation 6
 - critique 76
- dégazage 214
- diffusion brownienne 63
- dilatance 116

- écoulement
 - définition 6, 21
 - à surface libre 119, 146, 153, 190
- effets de bord 171, 181, 186, 199
- élongation 27, 58
- épaisseur critique 191
- état 4, 25, 28, 31, 32, 79
- état critique 133
- évaporation 174

- fluctuations 19, 143
- fluide (définition) 5

- forces 11
 - colloïdales 68
- fracturation 169
- frottement 104
 - coefficient 104

- gaz 3
- glissement 163
- grains 247

- hétérogénéité 187, 184

- inertie 20, 89
- instabilité 170, 206
- interactions 47
 - colloïdales 67, 248
 - hydrodynamiques 48

- liquide 4, 40
- loi de comportement 23, 24, 29

- magma 211
- migration 175, 176, 184, 189
- minimum 85, 170, 254
- module d'élasticité 255
- mouvement brownien 63

- neige 228
- newtonien 30

- ordre-désordre 3, 60

- palier (contrainte ou vitesse) 196
- pâtes 128, 260
- Péclet 64
 - colloïdal 75
- plan incliné 189
- plan-plan 182
- potentiel d'interaction 68, 69
- pression 17, 48
 - interstitielle 118
- puissance dissipée 28, 49

- régime
 - collisionnel 126, 141
 - frictionnel 123, 129
 - frictionnel-hydrodynamique 146
 - lubrifié 123, 140
- répulsion hydrodynamique 56
- réseau 115
- Reynolds 89
- rhéopaisissement 33
- rhéofluidification 33
- rhéométrie 159
- rhéophysique 2
- rotation 24
- rugosité 165

- sédimentation 175, 220, 261
- ségrégation 121
- seuil de contrainte 34, 75, 191, 201, 227, 248, 252, 257

solide 3
stabilité 70
suspension
 colloïdale concentrée 74
 colloïdale diluée 73
 concentrée 45, 55
 diluée 51
taux de déformation 24
température granulaire 143
temps caractéristiques 63, 77, 79,
thixotropie 32, 83, 197, 202
traînée hydrodynamique 62
turbulence 20
viscoélasticité 37, 82
viscosité 1
 apparente 27
vitesse 7
volume élémentaire représentatif 8