



C O L L E C T I O N    G R E N O B L E    S C I E N C E S  
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

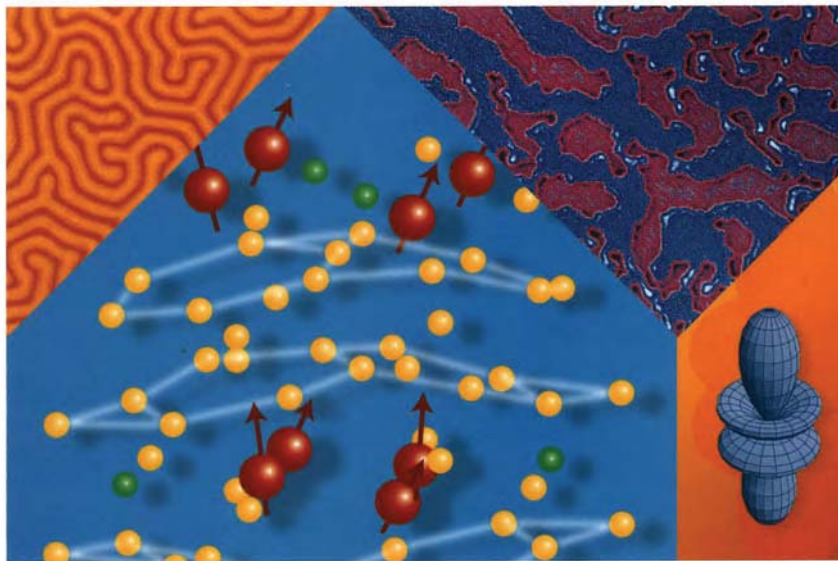
# MAGNÉTISME

## I - FONDEMENTS

OUVRAGE PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,  
DE LA RECHERCHE ET DE LA TECHNOLOGIE

■ Sous la direction d'**Étienne du TRÉMOLET de LACHEISSERIE**  
Laboratoire Louis Néel, Grenoble

Préface du Professeur **Louis NÉEL**, Prix Nobel de physique





**MAGNÉTISME**  
**I – FONDEMENTS**

Grenoble Sciences reçoit le soutien :

du **Ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie**  
de la **Région Rhône-Alpes**  
du **Conseil général de l'Isère**  
de la **Ville de Grenoble**

Cet ouvrage a bénéficié de la contribution des entreprises suivantes :

Tél : 33 1 41 25 55 88

Fax : 33 1 41 25 56 88



**IMPHY UGINE Précision**

GRUPE USINOR

Alliages de nickel et aciers inoxydables de précision

Tél : 33 4 76 90 50 45

Email : [cedrat@cedrat.com](mailto:cedrat@cedrat.com)



Logiciels de CAO (FLUX2D/3D)

Actionneurs, capteurs

Etudes, mesures, formations en électrotechnique

Réalisation et mise en pages, Centre technique Grenoble Sciences

**ISBN 2.86883.463.9**

# MAGNÉTISME

## I – FONDEMENTS

**Michel CYROT - Michel DÉCORPS - Bernard DIENY**  
**Olivier GEOFFROY - Damien GIGNOUX**  
**Claudine LACROIX - Jean LAFOREST**  
**Philippe LETHUILLIER - Pierre MOLHO**  
**Jean-Claude PEUZIN - Jacques PIERRE**  
**Jean-Louis PORTESEIL - Pierre ROCHETTE**  
**Michel-François ROSSIGNOL - Michel SCHLENKER**  
**Christoph SEGEBARTH - Yves SOUCHE**  
**Etienne du TRÉMOLET de LACHEISSERIE**  
**Jean-Paul YONNET**



## ***Grenoble Sciences***

Grenoble Sciences fut créé avec le triple objectif de :

- réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- garantir les qualités scientifique et pédagogique,
- proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de la direction de Grenoble Sciences, puis par un collègue de referees anonymes. Ensuite, les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage.

### ***Directeur scientifique de Grenoble Sciences***

Jean BORNAREL, Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

### ***Comité de lecture des ouvrages Magnétisme :***

- ◆ **V. Archambault**, Ingénieur à Rhodia-Recherche, Aubervilliers
- ◆ **E. Burzo**, Professeur à l'Université de Cluj, Roumanie
- ◆ **I. Campbell**, Directeur de Recherches au CNRS, Orsay
- ◆ **F. Claeysen**, Ingénieur à CEDRAT, Grenoble
- ◆ **G. Couderchon**, Ingénieur à Imphy Ugine Précision, Imphy
- ◆ **J.M.D. Coey**, Professeur à Trinity College, Dublin, Irlande
- ◆ **A. Fert**, Professeur à l'INSA, Toulouse
- ◆ **D. Givord**, Directeur du Laboratoire Louis Néel au CNRS, Grenoble
- ◆ **L. Néel**, Professeur honoraire des Universités,  
Prix Nobel de Physique, Membre de l'Institut
- ◆ **B. Raquet**, Maître de conférences à l'INSA, Toulouse
- ◆ **A. Rudi**, Ingénieur à ECIA, Audincourt
- ◆ **Ph. Tenaud**, Ingénieur à UGIMAG, St. Pierre d'Allevard

# AUTEURS

**Michel CYROT**

Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

**Michel DÉCORPS**

Directeur de Recherche à l'INSERM, Directeur de l'unité 438 INSERM - Grenoble

**Bernard DIENY**

Ingénieur au CEA - Grenoble

**Olivier GEOFFROY**

Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

**Damien GIGNOUX**

Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

**Claudine LACROIX**

Directeur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Jean LAFOREST**

Ingénieur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Philippe LETHUILLIER**

Ingénieur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

**Pierre MOLHO**

Chargé de Recherche au CNRS - Grenoble

**Jean-Claude PEUZIN**

Directeur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Jacques PIERRE**

Directeur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Jean-Louis PORTESEIL**

Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble

**Pierre ROCHETTE**

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille 3

**Michel-François ROSSIGNOL**

Professeur à l'Institut National Polytechnique - Grenoble

**Michel SCHLENKER**

Professeur à l'Institut National Polytechnique - Grenoble

**Christoph SEGEBARTH**

Directeur de Recherche à l'unité 438 INSERM - Grenoble

**Yves SOUCHE**

Ingénieur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Etienne du TRÉMOLET de LACHEISSERIE**

Directeur de Recherche au CNRS - Grenoble

**Jean-Paul YONNET**

Directeur de Recherche au CNRS - Grenoble

## ***Ouvrages Grenoble Sciences édités par EDP Sciences***

### ***Collection Grenoble Sciences***

- Chimie. Le minimum vital à savoir - J. Le Coarer  
Minimum Competence in Scientific English - J. Upjohn, S. Blattes & V. Jans  
Introduction à la Mécanique statistique - E. Belorizky & W. Gorecki  
Exercices corrigés d'Analyse (tomes 1 et 2) - D. Alibert  
Bactéries et environnement. Adaptations physiologiques - J. Pelmont  
La plongée sous-marine à l'air. L'adaptation de l'organisme et ses limites - Ph. Foster  
Listening Comprehension for Scientific English - J. Upjohn  
Electrochimie des solides - C. Déportes *et al.*  
La Turbulence - M. Lesieur  
Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés - E. Belorizky & W. Gorecki  
La symétrie en mathématiques, physique et chimie - J. Sivardière  
La cavitation. Mécanismes physiques et aspects industriels - J.P. Franc *et al.*  
L'Asie, source de sciences et de techniques - M. Soutif  
Enzymes. Catalyseurs du monde vivant - J. Pelmont  
L'ergomotricité. Le corps, le travail et la santé - M. Gendrier  
Introduction aux variétés différentielles - J. Lafontaine  
Analyse numérique et équations différentielles - J.P. Demailly  
Speaking Skills in Scientific English - J. Upjohn, M.H. Fries & D. Amadis  
Thermodynamique chimique - M. Oturan & M. Robert  
Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé - F. & J.P. Bertrandias  
Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales - K. Protassov  
Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales - M. Attéia & J. Gaches  
Du Soleil à la Terre. Aéronomie et météorologie de l'espace - J. Lilensten & P.L. Bletly  
Endocrinologie et communications cellulaires - S. Idelman & J. Verdetti  
Chimie organométallique - D. Astruc  
Mathématiques pour l'étudiant scientifique (tomes 1 et 2) - Ph.J. Haug

### ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***

- Radiopharmaceutiques. Chimie des radiotraceurs et applications biologiques  
sous la direction de M. Comet & M. Vidal  
Turbulence et déterminisme - sous la direction de M. Lesieur  
Méthodes et techniques de la chimie organique - sous la direction de D. Astruc

# AVANT-PROPOS

Cet ouvrage a été écrit à l'intention des étudiants et des praticiens du magnétisme. Sa première édition présente la particularité d'être publié en *langue française* (une deuxième édition en langue anglaise est déjà prévue). Les derniers livres écrits en français et faisant autorité en magnétisme sont les ouvrages de A. HERPIN et de E. DURAND datant déjà de 1968, ainsi que l'excellent traité de P. BRISSONNEAU, publié en 1997 : ce dernier est toutefois limité aux seuls aspects de l'électrotechnique.

Dans une approche plus encyclopédique, la majeure partie des aspects fondamentaux et surtout appliqués du magnétisme sont ici traités en deux tomes d'égale importance : c'est ainsi que l'on y trouve des sujets rarement abordés dans les manuels et pourtant essentiels aujourd'hui en raison de leurs applications présentes ou à venir, tels que par exemple la magnéto-optique, les matériaux ferrofluides, ou encore le biomagnétisme.

Un index de mots clés permet au lecteur de retrouver rapidement une introduction aux différents termes introduits et, le cas échéant, quelques références bibliographiques qui lui permettront d'approfondir telle ou telle notion qui ne serait pas développée ici.

Les notations utilisées se conforment à la nomenclature établie par la Norme Française NF X 02-205 et aux recommandations de la Commission Internationale Electrotechnique ; une table de conversion d'unités est fournie en annexe.

*Les réactions et suggestions des lecteurs seront les bienvenues*, car elles permettront d'améliorer au fil des années cet ouvrage pour le plus grand bénéfice de tous. A cet effet, une page interactive a été créée sur le site Web du Laboratoire Louis Néel :

**<http://ln-w3.polycnrs-gre.fr/book.html>**

# REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Louis NÉEL, Prix Nobel de Physique, membre de l'Institut, a réservé un excellent accueil à cet ouvrage ; qu'il soit ici remercié d'avoir bien voulu en écrire la préface.

Les auteurs ont apprécié les critiques pertinentes et constructives des membres du Comité de Lecture, et tiennent à leur exprimer toute leur gratitude.

Cet ouvrage représente une œuvre collective, souhaitée et menée à bien principalement par l'ensemble des membres du laboratoire Louis Néel du CNRS-Grenoble, avec l'appui enthousiaste de son directeur, D. GIVORD, et de quelques anciens :

- ◆ à toutes celles et tous ceux qui ont contribué au travail de réflexion et d'illustration de cet ouvrage, Messieurs R. BALLOU, B. CANALS, J. CLEDIERE, O. CUGAT et W. WERNSDORFER,
  - ◆ ou apporté leur concours à la relecture des épreuves des différents chapitres, Mesdames R.M. GALERA, Cl. MEYER et Messieurs A. FONTAINE, P.O. JUBERT, K. MACKAY, P. MOLLARD, J.P. REBOUILLAT, D. SCHMITT, J. VOIRON,
- les auteurs sont heureux d'exprimer leur reconnaissance.

Ils voudraient enfin remercier Mesdames Zhang FENG-YUN pour sa traduction d'un document écrit en chinois et J. TROCCAZ (Institut Albert Bonniot-Grenoble) pour ses conseils en biomagnétisme, Messieurs M. HASSLER (S.I.C.N.-Veurey), D. FRUCHART et P. WOLFERS (Laboratoire de Cristallographie, CNRS-Grenoble) qui ont fourni des illustrations, P. AVERBUCH (CRTBT) pour sa relecture critique et avisée de l'annexe traitant des aspects économiques des matériaux magnétiques et toute l'équipe de GRENOBLE-SCIENCES pour son efficacité, sa compétence et sa bonne humeur.

# SOMMAIRE

## ***I - FONDEMENTS***

### **Avant propos**

**Préface** par le professeur *Louis Néel*

### **Approche phénoménologique du magnétisme**

- 1 Le magnétisme, des origines à nos jours - *E. du Trémolet de Lacheisserie*
- 2 Magnétostatique - *D. Gignoux, J.C. Peuzin*
- 3 Phénoménologie du magnétisme à l'échelle macroscopique - *D. Gignoux*
- 4 Phénoménologie du magnétisme à l'échelle microscopique - *D. Gignoux*
- 5 Ferromagnétisme d'un système idéal - *M. Rossignol, M. Schlenker*
- 6 Irréversibilité des processus d'aimantation et hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques réels : le rôle des défauts - *M. Rossignol*

### **Approche théorique du magnétisme**

- 7 Magnétisme dans le modèle des électrons localisés - *D. Gignoux*
- 8 Magnétisme dans le modèle des électrons itinérants - *M. Cyrot*
- 9 Les interactions d'échange - *C. Lacroix, M. Cyrot*
- 10 Approche thermodynamique du magnétisme - *M. Schlenker, E. du T. de Lacheisserie*

### **Phénomènes de couplage**

- 11 Couplage magnétocalorique et effets associés - *E. du Trémolet de Lacheisserie, M. Schlenker*
- 12 Les effets magnétoélastiques - *E. du Trémolet de Lacheisserie*
- 13 Les effets magnéto-optiques - *M. Schlenker, Y. Souche*
- 14 Résistivité magnétique, magnétorésistance, effet Hall - *J. Pierre*

### **Annexes**

- 1 Symboles utilisés dans le texte
- 2 Unités et constantes universelles
- 3 Tableau périodique des éléments
- 4 Susceptibilités magnétiques
- 5 Matériaux ferromagnétiques
- 6 Fonctions spéciales
- 7 Equations de Maxwell

### **Bibliographie générale**

### **Index des matériaux et des sujets**

## **II - MATÉRIAUX ET APPLICATIONS**

### **Avant propos**

**Préface** par le professeur *Louis Néel*

### **Les matériaux magnétiques et leurs applications**

- 15 Les aimants permanents - *M. Rossignol, J.P. Yonnet*
- 16 Les matériaux doux pour l'électrotechnique et l'électronique basse fréquence  
*O. Geoffroy, J.L. Porteseil*
- 17 Les matériaux doux pour l'électronique haute fréquence - *J.C. Peuzin*
- 18 Les matériaux magnétostrictifs - *E. du Trémolet de Lacheisserie*
- 19 La supraconductivité - *M. Cyrot*
- 20 Couches minces et multicouches magnétiques - *B. Dieny*
- 21 Les principes de l'enregistrement magnétique - *J.C. Peuzin*
- 22 Ferrofluides - *P. Molho*

### **Autres aspects du magnétisme**

- 23 Imagerie par résonance magnétique - *M. Décorps, C. Segebarth*
- 24 Magnétisme des matériaux terrestres et géomagnétisme - *P. Rochette*
- 25 Magnétisme et sciences de la vie - *E. du Trémolet de Lacheisserie, P. Rochette*
- 26 Magnétisme pratique et instrumentation - *Ph. Lethuillier*

### **Annexes**

- 1 Symboles utilisés dans le texte
- 2 Unités et constantes universelles
- 3 Tableau périodique des éléments
- 4 Susceptibilités magnétiques
- 5 Matériaux ferromagnétiques
- 6 Aspects économiques des matériaux magnétiques - *J. Laforest*

### **Bibliographie générale**

### **Index des matériaux et des sujets**

# PRÉFACE

Depuis des millénaires avant notre ère, où nos ancêtres avaient déjà reconnu les singulières propriétés de la magnétite, ou pierre d'aimant, les phénomènes magnétiques ont toujours retenu l'attention, notamment en raison de leur action à distance. Qu'il s'agisse de notre existence quotidienne, on les retrouve partout depuis la fermeture des portes d'armoire ou de réfrigérateurs, dans les voitures et les téléphones portables jusqu'aux suspensions des trains à grande vitesse. Qu'il s'agisse aussi de science pure, ils sont présents à toutes les échelles de dimension, depuis les particules élémentaires jusqu'aux amas de galaxies, en passant par la structure et l'histoire de notre Terre.

Dans la plupart de ces domaines, fondamentaux ou technologiques, des progrès considérables ont été enregistrés depuis une trentaine d'années. L'ouvrage présenté ici se propose de les exposer. C'est l'oeuvre collective d'enseignants et de chercheurs qualifiés travaillant essentiellement dans les laboratoires de Grenoble (Universités, C.N.R.S, C.E.A.) souvent en étroite collaboration avec l'industrie locale et les grands organismes internationaux implantés dans la région, Institut Laue-Langevin, E. S. R. F. (grand synchrotron européen), etc. : cela n'a rien d'étonnant, d'ailleurs, car les activités concernant le Magnétisme ont toujours été soutenues à Grenoble depuis le commencement de ce siècle.

Cet ouvrage est accessible au niveau Bac scientifique + 4, à l'exception de quelques développements qui exigent un peu plus de maturité mais dont la maîtrise n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite. Ce traité me paraît indispensable à tous ceux qui se proposent de travailler dans le magnétisme, domaine encore très ouvert et riche de grands progrès potentiels.

On trouvera certainement de nouveaux aimants, plus performants et meilleur marché. Les propriétés magnétiques des matériaux contenant des éléments à couches électroniques incomplètes ne sont pas encore très bien comprises. L'hystérésis magnétique joue un rôle clé dans les phénomènes irréversibles, et, si on comprend assez bien ce qui se passe dans les champs magnétiques faibles vis-à-vis du champ coercitif, ou dans les champs très forts, au voisinage de la saturation, on ne sait pas très bien décrire ce qui se passe à l'intérieur du cycle limite. *A fortiori*, lorsque l'hystérésis dépend de l'action combinée de deux variables, comme celle du champ magnétique et de très hautes pressions, nous ne savons rien. Comment, par exemple, prédire l'état magnétique d'un sous-marin à grande profondeur, en fonction du processus de plongée ?

Avec Pierre Curie, Paul Langevin et Pierre Weiss, les français ont joué un rôle de pionnier dans le magnétisme : ils trouveront certainement de dignes successeurs, notamment dans le biomagnétisme au sens large.

Cet ouvrage présente aussi des caractéristiques intéressantes : exercices avec leur corrigé, bibliographie heureusement limitée aux meilleurs articles et ouvrages, et annexes diverses, listes de symboles, fonctions spéciales, propriétés des différents matériaux, aspect économique des problèmes, sans compter le rappel indispensable des unités employées, que la double présentation coulombienne et ampérienne du magnétisme a compliqué à plaisir et rendu indigeste dans le passé.

Toutes les conditions me paraissent ainsi réunies pour satisfaire un large public, documenter les étudiants, les chercheurs et les ingénieurs, et remporter le grand succès que je souhaite à cet ouvrage.

A Meudon, le 27 Février 1999

**Louis NÉEL**  
Prix Nobel de Physique, Membre de l'Institut

# CHAPITRE I

## LE MAGNÉTISME, DES ORIGINES À NOS JOURS

*L'approche historique de ce premier chapitre permettra d'introduire qualitativement des notions de base qui seront reprises et analysées dans le reste de l'ouvrage. La grande aventure du Magnétisme a progressé, lentement d'abord, à la suite des pionniers qui vivaient jadis à Sumer, en Chine ou en Grèce, tandis que ces deux derniers siècles ont assisté à une véritable explosion des connaissances, des techniques d'étude et des applications industrielles dans ce domaine exemplaire de la Science. L'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert [1] nous disait encore de la magnétite en 1779 :*

*«C'est dans ce métal uni au sel et à l'huile  
que réside la vertu magnétique  
plutôt que dans la substance pierreuse»*

*On mesure le chemin parcouru au cours des années qui ont suivi ... !*

### **1. LA DÉCOUVERTE DES PIERRES D'AIMANT ET L'OBSERVATION DU PHÉNOMÈNE DE MAGNÉTISME AU COURS DES ÂGES**

L'attraction mutuelle de deux êtres qui s'aiment est à l'origine du mot «aimant», qui désigne toute substance capable d'attirer le fer ou toute autre substance «magnétique». Le plus ancien manuscrit mentionnant l'existence des pierres d'aimant est l'œuvre d'un écrivain chinois, Guanzhong (mort en 645 avant J.C.), mais des objets en matière magnétique ont été retrouvés sur des sites encore beaucoup plus anciens.

#### **1.1. LES OBJETS EN FER ET EN PIERRE D'AIMANT DANS LA HAUTE ANTIQUITÉ**

De petites perles tubulaires en fer d'origine météoritique (contenant au moins 7,5% de nickel) ont été découvertes dans plusieurs tombes sumériennes, et égyptiennes pré-dynastiques (quatrième millénaire avant J.C.). Ce sont là, semble-t-il, les plus

anciennes traces d'objets ferromagnétiques travaillés de main d'homme. La question reste posée, cependant, de savoir si leur «vertu attractive» avait été découverte dès ces temps reculés. Les anciens Égyptiens, qui appelaient le fer *bia-n-pet* (= métal du ciel) ne se sont adonnés à la métallurgie du fer que relativement tard, certainement après les Hittites qui pratiquaient la sidérurgie vers les - 1500 ; la tombe de Toutankhamon (en - 1340) renfermait déjà un poignard, et divers objets en fer et en minerais de fer [2]. Beaucoup plus tard, dans le temple d'Edfou, une inscription fait mention du «métal vivant» : ce vocable désigne chez les anciens Égyptiens la pierre d'aimant [3]. En Crète, au palais de Knossos (- 2000 à - 1300), la salle du trône de Minos est pavée en son centre d'un dallage rectangulaire en oxyde de fer, principalement de la magnétite. Ce choix n'est peut-être pas l'effet du hasard, et il est possible que les anciens Crétois aient eu connaissance de sa vertu magnétique, ce qui pouvait justifier son emploi dans une partie aussi centrale du palais.

## 1.2. LES PREMIERS ÉCRITS TRAITANT DE LA PIERRE D'AIMANT ORIGINE DU NOM «MAGNÉTISME»

Toutes nos informations sur les origines du magnétisme en Chine ont été tirées d'un ouvrage chinois sur l'Histoire de l'Électromagnétisme [4] ainsi que d'un ouvrage récent de M. Soutif sur les origines des Sciences et des Techniques en Orient [5]. On sait par Guanzhong que, dans l'antiquité chinoise, on appelait «**pierres tendres**» les pierres d'aimant. C'est le nom général de tous les oxydes fortement magnétiques existant dans la nature et ayant un caractère de magnétisme permanent. Ce sont des minéraux magnétiques à base de fer :  $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{FeO-TiO}_2\text{-Fe}_2\text{O}_3$ , parfois aussi  $\text{FeS}_{1+x}$ , et surtout *la magnétite*  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ . Ce nom de «pierres tendres» a pour origine leur attirance pour les métaux ferreux, par analogie avec la tendresse que manifeste une mère à son enfant.

A l'époque de la dynastie des Han Orientaux (25 - 220), Gaoyiu écrivait : «Pierre Tendre est la mère du fer, elle peut donc attirer son enfant» [4]. Ce texte nous laisse à penser que le fer était alors extrait de minerais magnétiques. Les habitudes changent : de nos jours, les aimants sont désignés sous le vocable de matériau magnétique «**dur**» par opposition avec les matériaux magnétiques «**doux**» qui se désaimantent spontanément !

En Grèce, Aristote rapporte que Thalès de Milet (- 625 à - 547) connaissait la pierre d'aimant, et Onomacrite nous en fournit le plus ancien nom connu, magnètès qui a évolué en magnitis, d'où est dérivé le terme moderne de magnétite. Sophocle (- 495 à - 406) a appelé l'aimant «pierre de Lydie» et Platon (- 427 à - 347) l'appelle, dans le Timée, «pierre d'Héraclée». Ces divers noms suggèrent que, dans l'Antiquité gréco-latine, les premiers aimants furent extraits d'un gisement situé sur le mont Sipyle, riche en minerais magnétiques, et proche d'une ville d'Asie Mineure nommée «Magnesia ad Sipylum». Celle-ci appartenait en effet à la province de Lydie, et s'appelait aussi Héraclée : elle est donc bien à l'origine des mots «magnétisme» et

«magnétite». D'ailleurs, Lucrèce confirme dans «*De natura rerum*» que le nom de la pierre d'aimant lui vient de la région d'où elle a été extraite. Les latins ont utilisé le mot *sideritis* [1], dérivé du grec *sidèros*, fer, qui semble présenter la même racine que le mot latin «sider» signifiant *astre* : à nouveau, on retrouverait cette notion de l'origine céleste du fer, comme chez les anciens Égyptiens.

### **1.3. PREMIÈRES OBSERVATIONS DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES**

#### **1.3.1. L'attraction magnétique**

Il semble bien que ce soit le premier phénomène magnétique qui ait attiré l'attention des hommes sur la «pierre d'aimant», puisque c'est de lui que découle son nom chinois de «pierre tendre», ainsi que le nom qu'Hippocrate (– 460 à – 377) lui a donné dans son «*Lib. de sterilib. mulier*» : *la pierre qui attire le fer*. A la même époque, un chinois, Gui Guzi (– 400) notait que les pierres d'aimant attirent les aiguilles, tandis que Liu An (– 120) écrivait dans «*Huai Nanzi*» : «Il est impossible à la pierre d'aimant d'attirer les tuiles comme elle attire le fer ; de même pour le cuivre». Cette attirance mutuelle était ainsi considérée comme une propriété spécifique du fer et de ses minerais, dès les origines.

#### **1.3.2. Le phénomène d'écrantage magnétique**

Saint Augustin (354 - 430) note qu'un plateau d'argent ne peut empêcher les pierres d'aimant d'attirer le fer. La question s'est posée par la suite de savoir s'il existait une matière capable d'empêcher l'attraction d'un aimant pour le fer ; les «Notes de Guang Yang» donnent la réponse : «A Ru, fils de Liu XianTing (1648 - 1695) a eu l'intuition, et l'a vérifiée expérimentalement, que seul le fer pouvait constituer un écran efficace contre cette attirance». C'est là la première mention du blindage magnétique.

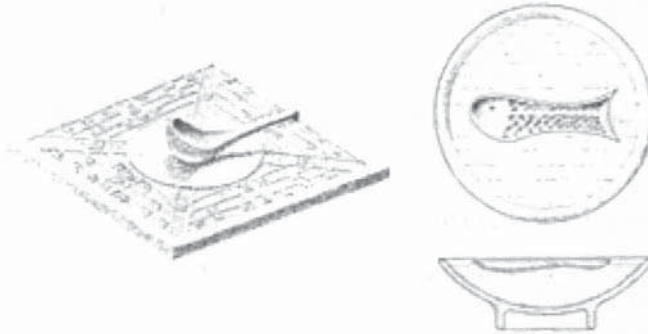
#### **1.3.3. La boussole**

Les écrits des Chinois Gui Guzi et Han Fei (– 280 à – 233) montrent que le caractère de directivité vers les pôles géographiques terrestres des pierres d'aimant naturelles était également connu depuis fort longtemps. Le plus ancien «outil directif» connu a été fabriqué en Chine, il s'agit d'une pierre d'aimant naturelle sculptée et polie en forme de cuillère, c'est la «cuillère directive», l'ancêtre de la boussole.

Wang Chong (27 – 97) décrit, dans «*Lun Heng*», un outil directif : «Cet outil ressemble à une cuillère, et quand on le pose sur un plateau par terre, la poignée pointe vers le sud». Sur une peinture lithographique qui date de l'époque Han, on voit une cuillère posée sur un petit plateau carré (figure 1.1a), très semblable aux plateaux fabriqués en alliage de cuivre et de fer et en bois peint, qu'ont exhumés récemment les archéologues. On considère généralement que cette peinture représente un outil directif.

Il est à noter que les outils directifs pointent *vers le sud* : le pôle nord magnétique étant supposé coïncider (à peu près) avec le pôle nord géographique, la poignée de l'outil directif est donc *un pôle nord*, puisqu'elle pointe vers le sud. De nos jours, c'est le pôle nord qui est la référence : il attire le pôle sud de nos boussoles ! Et le pôle nord d'un aimant est celui qui attire le pôle sud de la boussole, donc qui est de même polarité que le pôle nord terrestre. On n'y pense pas toujours... Les anciens Chinois y avaient-ils pensé ?

L'intérêt de ces premiers outils directifs était limité par la rareté des approvisionnements en matière première, la nécessité du polissage et la faible précision directive. C'est pour répondre aux besoins des «géomanciens» (chargés de définir l'orientation souhaitable des palais et des villes), des militaires et des navigateurs que l'on vit apparaître plus tard des aiguilles aimantées artificiellement, le poisson directif puis la boussole.



**Figure 1.1 - (a) Une «cuillère directive» - (b) Un «poisson directif»  
(dessins L. Mouveau)**

Zeng Gongliang décrit, dans son «Wu Jing Zong Yao» (1044), la fabrication d'un *poisson directif* : «on découpe une pièce de fer très fine en forme de poisson... on la porte au rouge dans un feu de charbon et on la retire avec une pince. La queue restant orientée vers le nord, on la trempe dans l'eau pendant quelques minutes». Il s'agit là d'une *trempe sous champ magnétique* (terrestre), qui renforce le magnétisme de l'outil directif et sa rémanence – c'est-à-dire l'effet de mémoire qui lui permet de rester aimanté pendant des années. La forme longue et pointue augmentait la précision directive et diminuait les risques de désaimantation (perte du magnétisme). Les bords légèrement relevés permettaient à l'outil de flotter (figure 1.1 b).

C'est dans le «Meng Xi Bi Tan», écrit en 1086 par Shen Kuo, que sont décrites les *premières vraies boussoles* : «Quand on polit la pointe d'une aiguille (en fer) avec une pierre d'aimant, elle s'oriente vers le sud mais légèrement vers l'est, pas vraiment au sud». Cette découverte, et la reconnaissance du fait que le pôle magnétique est légèrement désorienté par rapport au pôle de la terre, furent déterminantes pour l'utilisation de la boussole. Les premières boussoles étaient suspendues par un fil de soie. Finalement, c'est la «boussole flottante» (aiguille

aimantée portée par un flotteur sur l'eau) qui se développa pour les applications en navigation maritime (seulement à partir de 1099-1102).

Les premiers occidentaux à publier autre chose que des fables dans le domaine du magnétisme furent Pierre Pèlerin de Maricourt qui exposa ses connaissances dans une lettre célèbre intitulée «De Magnete» (1269) où il introduisait la notion de pôles, suivi bien plus tard par un médecin anglais, William Gilbert, qui écrivit un ouvrage également intitulé «De Magnete» en 1600.

### 1.3.4. L'état des connaissances en 1779

L'Encyclopédie de Denis Diderot et Jean Lerond d'Alembert résume les connaissances de l'époque en magnétisme sous trois rubriques : la notion de pôles, la vertu attractive et la vertu communicative, et constate l'absence d'une théorie sérieuse du magnétisme [1].

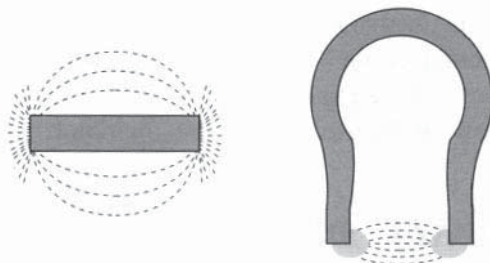


Figure 1.2 - Le spectre magnétique d'un aimant

#### Pôles

Il est possible d'observer des spectres magnétiques à l'aide de la limaille de fer : *un barreau aimanté possède deux pôles* où se concentrent les lignes spectrales (figure 1.2). On peut modifier les pôles d'un aimant au moyen d'un aimant plus puissant. L'aimant brisé peut rester magnétique. La terre est douée de deux pôles, nord et sud ; mais l'axe des pôles magnétiques ne coïncide pas avec l'axe des pôles géographiques ; la *déclinaison* magnétique est même variable avec le temps. Le pôle sud de l'aimant se dirige vers le pôle boréal et son pôle nord vers le pôle austral. Les pôles d'un aimant naturel ne sont pas liés à l'orientation du minerai vis-à-vis des pôles terrestres.

#### Vertu attractive

Deux pôles contraires s'attirent et deux pôles de même nom se repoussent. Mitchell avait cru observer, avec de petits aimants, que la force mutuelle de répulsion entre deux pôles de même nom était inférieure à la force d'attraction entre deux pôles contraires, pour une même distance entre pôles. Le fer est plus fortement attiré par l'aimant que ne le sont deux pierres d'aimant en interaction. La «chaleur excessive» diminue la «vertu» de l'aimant, qui la retrouve après refroidissement. On peut tirer un meilleur parti des pierres d'aimant en leur adaptant des armatures en fer judicieusement disposées.

### Vertu communicative

Il est connu depuis l'antiquité que la pierre d'aimant peut communiquer son magnétisme à un morceau de fer, par simple influence en approchant les deux substances, ce qui peut conférer un magnétisme permanent. Des tiges en fer s'aimantent lorsqu'elles restent longtemps en position verticale, les croix des clochers de Chartres, de Delft et de Marseille, par exemple, se sont aimantées dans la composante verticale du champ magnétique terrestre. La foudre aimante l'acier ; on peut aussi aimanter un clou en le faisant rougir au feu, et refroidir en l'orientant nord-sud : cette observation rejoint celle des Chinois du onzième siècle. De même, les percussions peuvent modifier l'état magnétique d'un morceau de fer.

### Théorie du Magnétisme

Les encyclopédistes durent constater que toutes les tentatives d'interprétation du magnétisme (celle du mathématicien Bernoulli entre autres) étaient restées sans succès, mais concluaient avec un bel optimisme que leurs enfants ou leurs petits-enfants réussiraient sans doute à expliquer tous ces phénomènes et *peut-être même à les relier aux phénomènes d'électricité*. Belle prémonition !

## 2. L'APPORT DU XIX<sup>E</sup> SIÈCLE

Reprenant l'expérience de Mitchell, Charles de Coulomb eut l'idée d'utiliser des aimants *très longs*, éloignant ainsi suffisamment les pôles non concernés par l'expérience pour pouvoir mettre en évidence sa fameuse loi en  $1/r^2$  d'interaction entre «masses magnétiques». Cette découverte, en 1795, fut à l'origine d'un prodigieux bond en avant des connaissances. Dans la foulée, Denis Poisson (1781 - 1840) introduisit la notion de *champ magnétique*, comme force agissant sur l'unité de masse magnétique en tout point de l'espace. Mais, à la différence des charges électriques, les masses magnétiques semblent aller par paires, constituant des «dipôles magnétiques» c'est-à-dire des ensembles de deux masses magnétiques égales et de polarité opposée. *N.B. - Paul Dirac a montré que l'existence de «monopôles magnétiques» pourrait expliquer la quantification de la charge électrique, qui apparaît toujours comme un multiple entier de la charge de l'électron, mais à ce jour, toute tentative d'isoler un monopole s'est soldée par un échec* [6].

En 1820, le physicien danois Hans Ørsted montra qu'un champ magnétique pouvait être créé par la circulation d'un courant électrique dans un fil conducteur (figure 1.3). Dans les semaines qui suivirent, André-Marie Ampère renouvela cette expérience historique, et réussit à en donner une formulation élégante. Il montra qu'une boucle circulaire de courant engendrait un champ magnétique identique à celui créé par un dipôle magnétique, et suggéra que *le magnétisme de la matière pourrait bien être créé par de petites boucles de courant électrique à l'échelle moléculaire*.

C'est alors que débuta la célèbre controverse entre les tenants de l'approche coulombienne (description par des masses magnétiques ou pôles) et ceux de l'approche ampérienne (description du magnétisme par des courants).

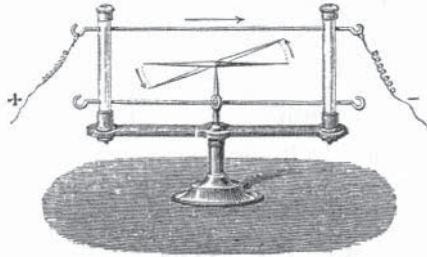


Figure 1.3 - L'expérience historique d'Ersted d'après [7]

Aujourd'hui, ces deux approches sont tenues pour complémentaires : l'approche ampérienne est surtout utile en physique atomique, et l'approche coulombienne en électrotechnique. D'ailleurs, dans les deux cas, la *vertu magnétique* d'un corps est définie par la même quantité, son *moment magnétique*, proportionnel au *moment* du couple des forces mécaniques qu'il subit en présence d'un champ magnétique uniforme.

En 1821, le phénomène d'induction était découvert par le physicien anglais Michaël Faraday (1791 - 1867), qui construisit la première dynamo. Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) établit l'expression de la force agissant sur un conducteur parcouru par un courant électrique et soumis à un champ magnétique.

Ces découvertes bouleversèrent la physique, en unifiant les interactions électriques et magnétiques, et engendrèrent des discussions sans fin sur le choix des systèmes d'unités. En effet, les systèmes d'unités c.g.s.e.s. (qui définit l'unité de charge électrique) et c.g.s.e.m. (qui définit l'unité de masse magnétique) étaient compatibles, tant que les phénomènes électriques et magnétiques étaient totalement indépendants. Il n'en allait plus de même si le champ magnétique pouvait être engendré soit par un dipôle magnétique, soit par des charges électriques en mouvement.

Les équations de l'électromagnétisme établies par le physicien écossais James Clark Maxwell en 1864 couronnaient un demi-siècle d'efforts et restent encore de nos jours la base analytique incontournable du magnétisme.

Faraday, le premier, tira parti de l'action motrice d'un gradient de champ magnétique pour *mesurer le magnétisme des substances*, et il construisit à cet effet la balance qui porte son nom et lui permit d'étudier les propriétés magnétiques de la matière. Il observa que l'application d'un champ magnétique pouvait induire des effets magnétiques dans toutes les substances, mais que, très souvent, ces effets étaient inférieurs par plusieurs ordres de grandeur à ceux que l'on observe dans le cas du fer.

Pour certaines substances appelées «diamagnétiques» ce très faible *magnétisme induit* s'oppose au champ magnétique qui l'a engendré, conformément à la loi de

Lenz (l'aimant repousse la substance), tandis que pour d'autres dites «paramagnétiques», la situation est inverse : l'aimant attire la substance comme dans le cas du fer ; ce dernier résultat semblait *a priori* paradoxal, jusqu'à ce que l'on eût reconnu qu'il pouvait exister un magnétisme spontané dans la matière.

William Sturgeon (1783 - 1850) construisit en 1824 le premier électroaimant, en associant à un solénoïde un noyau en fer, ce qui lui permettait d'engendrer un champ magnétique «très intense» en profitant du fort magnétisme induit dans le noyau, sans avoir à délivrer un courant électrique trop important, l'électrotechnique était née.

### 3. LE MAGNÉTISME AU XX<sup>E</sup> SIÈCLE

Il aura fallu attendre la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et le début du XX<sup>e</sup> pour que soit abordée avec succès l'étude théorique des matériaux magnétiques. Pierre Curie (1859 - 1906) introduisit ou précisa les notions de diamagnétisme, de paramagnétisme et de ferromagnétisme et Paul Langevin (1872 - 1946) celles de magnétisme induit et permanent ; ce dernier établit aussi la théorie statistique classique du paramagnétisme.

Des avancées décisives ont été réalisées dans la description classique du magnétisme des solides par Pierre Weiss (1865 - 1940), expérimentateur hors pair et auteur de l'hypothèse du *champ moléculaire*, et par Louis Néel, qui reçut en 1970 le prix Nobel de physique entre autres pour ses théories de l'*antiferromagnétisme* (1936) et du *ferrimagnétisme* (1948). Notons que le premier antiferromagnétique incontestable, MnO, n'a été découvert par Bizette et Tsai qu'un an après que Louis Néel ait exposé sa théorie de l'antiferromagnétisme (appellation proposée par Francis Bitter en 1939, soit trois ans après que Néel ait proposé son interprétation du *paramagnétisme constant*).

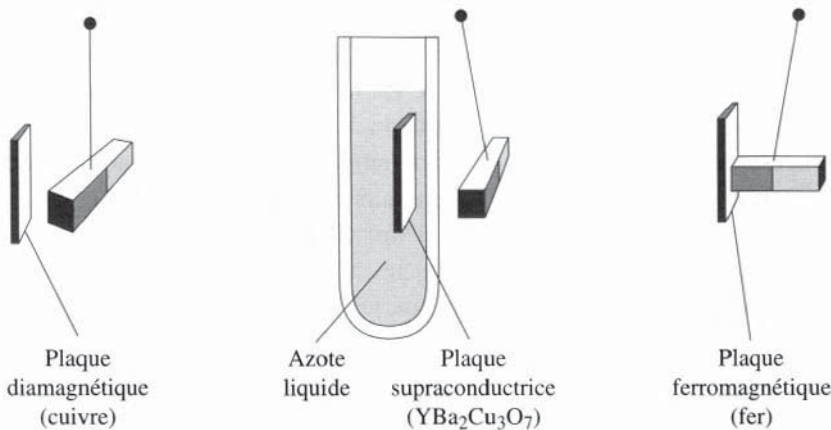
Il restait toutefois à expliquer l'origine des «champs moléculaires» gigantesques observés dans les substances fortement magnétiques. L'interaction dipolaire magnétique entre moments magnétiques atomiques était notoirement insuffisante pour expliquer leur existence, et ne permettait de prévoir un ordre magnétique qu'à très basse température. C'est ici que la mécanique quantique apporta une contribution fondamentale avec la découverte en 1925, par George Uhlenbeck et Samuel Goudsmit d'un «moment cinétique intrinsèque» de l'électron qui fut appelé le spin. En approfondissant l'étude théorique de l'électron, Paul Dirac confirmait en 1927 l'existence du spin, puis Werner Heisenberg montrait en 1929 que les fortes interactions magnétiques responsables de l'ordre magnétique étaient d'origine électrostatique et de nature quantique, et pouvaient s'interpréter en termes de couplage entre deux spins voisins.

Les bases solides existaient alors pour que se développe l'étude des propriétés magnétiques de la matière, et l'on a assisté dès lors à une véritable explosion de la

littérature scientifique dans ce domaine, appuyée par des progrès spectaculaires dans le domaine des moyens expérimentaux, de la diffraction neutronique en particulier.

Notons enfin que les noyaux atomiques portent, eux aussi, un moment magnétique : ce magnétisme nucléaire est de trois ordres de grandeur inférieur au magnétisme de l'électron et peut donc être négligé tant que l'on ne s'intéresse qu'aux propriétés statiques et quasi-statiques de la matière condensée à une température pas trop basse. En revanche, c'est sur lui que repose l'I.R.M. ou imagerie par résonance magnétique, qui sera traitée en chapitre 23.

Les matériaux supraconducteurs présentent une résistivité électrique nulle en dessous d'une température dite critique. Ils méritent d'être cités ici car ils associent à cette propriété de transport électrique tout à fait étonnante (et bien utile pour créer les champs magnétiques intenses) un très fort caractère diamagnétique (leur *susceptibilité magnétique*  $\chi$  vaut  $-1$ ). Il en résulte un comportement magnétique facilement observable, mais contraire de celui des substances ferromagnétiques : une aiguille supraconductrice placée dans l'entrefer d'un aimant s'oriente perpendiculairement aux lignes de flux, tandis qu'une aiguille ferromagnétique ( $\chi \gg 1$ ) s'oriente parallèlement ; de même, un aimant suspendu à un fil est repoussé par une plaque supraconductrice et attiré par une plaque ferromagnétique, tandis qu'une plaque en cuivre (diamagnétique aussi, mais avec une susceptibilité très faible,  $\chi \sim -10^{-5}$ ) n'influence pas de façon perceptible l'aimant, comme on le voit sur la figure 1.4.



**Figure 1.4 - Réaction d'un aimant à la présence de matière diamagnétique, supraconductrice et ferromagnétique**

En 1986, la découverte des supraconducteurs à haute température critique a relancé la recherche sur cette famille de matériaux dont la découverte remonte à Kamerling Onnes qui, en 1911, observa la supraconductivité du mercure. Le record de température critique est détenu à l'heure où nous écrivons ces lignes par  $\text{HgBaCa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$  ( $T_c = 133 \text{ K}$ ). Il n'est pas possible de parler de supraconducteurs sans évoquer les *SQUIDS*, dispositifs mettant à profit des interférences quantiques dans des jonctions supraconductrices, et de plus en plus utilisés en magnétométrie ultrasensible.

Nous achevons ici cette introduction historique à la science du Magnétisme ; le lecteur curieux d'en savoir plus pourra consulter avec intérêt l'excellente étude de Mattis qui, dans son premier chapitre, ajoute à la relation proprement historique des faits une analyse philosophique de la pensée grecque, médiévale et moderne sur la science et sur le magnétisme en particulier [8].

#### 4. LE MAGNÉTISME TECHNIQUE

Parallèlement à la recherche fondamentale – dont l'objectif était d'expliquer l'origine du magnétisme et ses mécanismes de base – s'est développée une *recherche appliquée* très active afin d'optimiser les performances des matériaux magnétiques pour applications industrielles :

- ◆ les aimants qui sont des matériaux «magnétiques durs» c'est-à-dire dont il est difficile de modifier l'état magnétique, et se caractérisent par une *rémanence* notable (ils conservent une bonne part de l'*induction magnétique B* qui leur a été conférée par application d'un champ magnétique intense). Le *champ magnétique H* nécessaire pour les désaimanter (le «champ coercitif») doit être lui aussi le plus élevé possible : on parle alors de matériaux à *forte coercitivité*.
- ◆ les tôles de transformateurs (matériaux «magnétiques doux») avec lesquelles on cherche au contraire à obtenir un champ coercitif aussi faible que possible,
- ◆ les matériaux pour mémoires magnétiques qui doivent allier une excellente rémanence avec un champ coercitif modéré, afin de minimiser l'énergie nécessaire lors de la phase d'écriture. C'est là sans doute le domaine qui a le plus progressé au cours de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle,
- ◆ les matériaux pour l'électronique qui doivent fonctionner à très hautes fréquences,
- ◆ les matériaux pour la robotique (actionneurs et capteurs magnétiques),
- ◆ d'autres applications enfin méritent d'être citées, qui relèvent plus spécifiquement de la recherche militaire, ce sont les mines magnétiques et leur corollaire, la désaimantation des navires, ainsi que les émetteurs-récepteurs sonar : toutes firent l'objet d'études très poussées durant la seconde guerre mondiale.

Cette recherche technologique s'élargit aujourd'hui à de nouveaux concepts, de nouvelles applications, et aussi de nouvelles méthodes de travail ; par exemple, la simulation numérique est de plus en plus utilisée pour optimiser des dispositifs où interviennent des paramètres électriques et magnétiques, mais aussi mécaniques et thermiques.

Quelques faits saillants traduisent les progrès techniques réalisés par les magnéticiens au cours de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle.

##### *Champs magnétiques*

Il est possible de créer des champs magnétiques statiques de  $3 \times 10^7$  A/m dans un diamètre de 3,2 cm grâce à l'emploi de bobines hybrides utilisant des matériaux

supraconducteurs et des conducteurs en cuivre, mais ces installations consomment une énergie électrique colossale. Des champs transitoires atteignant les  $5 \times 10^8$  A/m durant  $4 \mu\text{s}$  ont été produits dans un diamètre de 1 cm par des techniques d'implosion [9], mais là encore il ne s'agit pas de techniques faciles à développer en laboratoire. Avec son gros électro-aimant, Aimé Cotton avait déjà dépassé les 5 MA/m (7 teslas) en 1928 ; c'était une belle performance pour l'époque.

Aujourd'hui, des progrès spectaculaires ont été réalisés dans l'obtention de champs magnétiques notables mais à très faible énergie, et donc faciles à mettre en œuvre dans un laboratoire classique : ainsi, il est possible d'engendrer des champs de l'ordre de  $3 \times 10^7$  A/m dans de minuscules bobines en utilisant simplement la décharge d'un banc de condensateurs (figure 1.5). Les échantillons qui sont soumis à de tels champs doivent être de taille micronique, mais précisément les recherches sont très actives à ce jour dans le domaine des nanomatériaux.

Une monospire telle que celle-ci permet maintenant d'atteindre en laboratoire des champs magnétiques élevés sur un très petit volume et pendant des temps relativement courts (30 ns), mais suffisants pour caractériser les propriétés magnétiques d'échantillons de taille micronique par des techniques de magnéto-optique. L'énergie mise en jeu ne nécessite plus les grosses installations qui entourent les générateurs de champs intenses statiques sur des volumes importants : la décharge d'un condensateur dans une telle spire suffit à fournir l'énergie nécessaire.

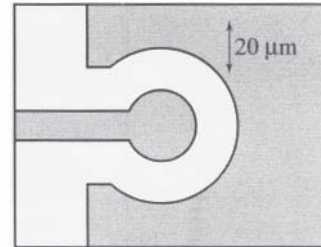


Figure 1.5 - Microbobine créant un champ magnétique de 40 teslas

A l'autre bout de l'échelle, les magnétoencéphalographes à squids peuvent détecter des champs magnétiques transitoires émis par le cerveau qui peuvent atteindre  $5 \times 10^{-9}$  A/m (une induction de 7 fT dans une bande passante de 1 Hz a pu être détectée à Chiba au Japon en 1993) [10].

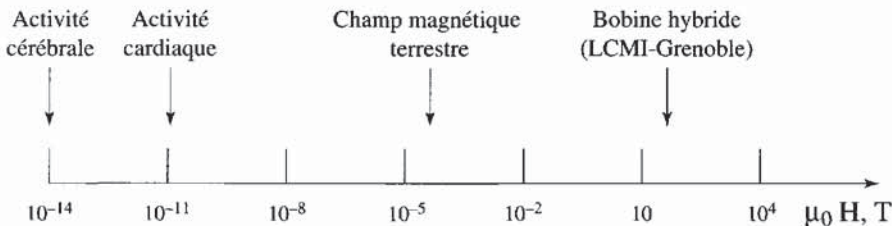


Figure 1.6 - Gamme des champs magnétiques accessibles à l'expérience

L'homme travaille ainsi sur des champs magnétiques dont l'intensité s'étale sur 17 décades (figure 1.6) ; à titre de comparaison, le champ magnétique terrestre est de l'ordre de quelques dizaines d'ampère par mètre.

## Aimants

Nos grands-mères n'utilisaient que des aimants en fer à cheval pour ramasser leurs épingles, car les aimants de l'époque avaient tendance à se désaimanter spontanément si l'on ne refermait pas autant que possible leurs «lignes de flux», c'est-à-dire les lignes de force de leur spectre magnétique (voir figure 1.2).

Aujourd'hui, les aimants néodyme-fer-bore sont capables de rester aimantés sous la forme de plaquettes minces, même lorsque celles-ci sont aimantées perpendiculairement à leur plan. Les progrès réalisés depuis 150 ans avec les aimants permanents sont spectaculaires (voir la figure 1.7) et peuvent se chiffrer en termes de densité d'énergie : les aimants au néodyme-fer-bore représentent un gain d'un facteur 1000 par rapport aux anciens aimants en magnétite !

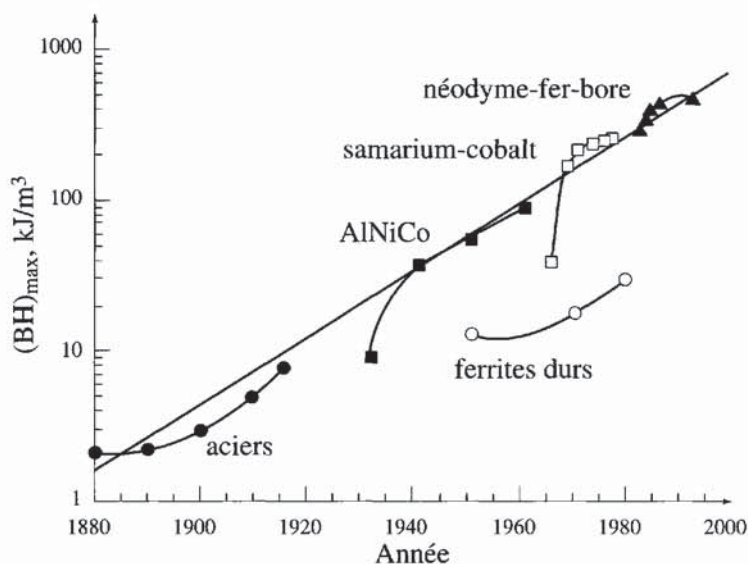


Figure 1.7 - Évolution des performances des aimants

Le logarithme de la densité d'énergie maximum ( $[BH]_{\max}$ ) exprimée en  $\text{kJ/m}^3$  est porté en fonction de la date d'apparition sur le marché pour différents matériaux appartenant aux cinq principales familles d'aimants industriels, d'après [11] – Les notions d'induction, de champ et d'énergie magnétique seront précisées au chapitre suivant –

## Nouvelles applications

L'électrotechnique classique (tôles en acier doux, aimants permanents) a beaucoup progressé, mais d'autres applications sont apparues, par exemple aux radio- et hyperfréquences avec les ferrites, ou bien dans le domaine des capteurs et des actionneurs. C'est toutefois l'enregistrement magnétique qui a créé l'événement : en cinquante ans, ce domaine d'activité s'est hissé au premier rang des applications des matériaux magnétiques avec un chiffre d'affaires qui dépasse, et de loin, celui de toutes les autres applications réunies.

La course aux très hautes densités d'enregistrement est loin d'être achevée, ainsi que le montre la figure 1.8 où sont portées deux courbes, l'une relative aux produits commercialisés par IBM et l'autre aux prototypes de démonstration de cette firme. Et la recherche technologique bat son plein tant dans le domaine des supports d'information (disques durs, disquettes, superdisquettes, cartouches de bandes magnétiques à très haute capacité, ...) que dans celui des têtes de lecture-écriture (magnétorésistives, à magnétorésistance géante, ...).

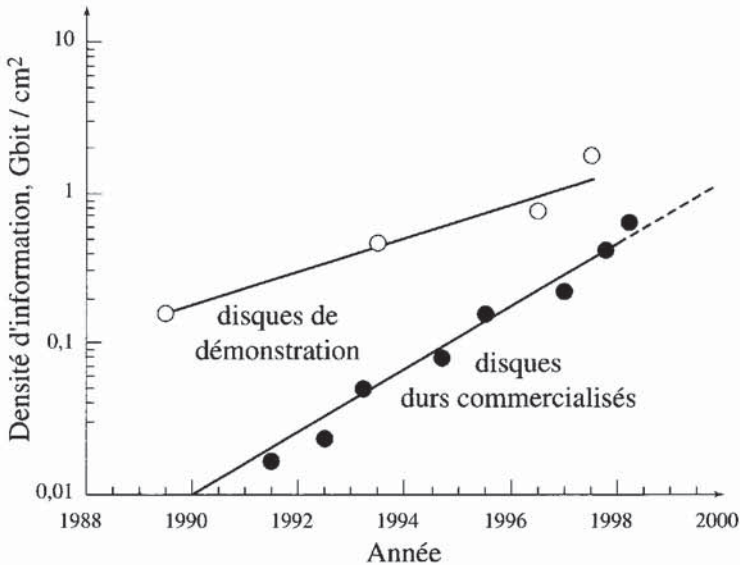


Figure 1.8 - Progrès effectués au cours de la dernière décennie dans la densité d'enregistrement magnétique des disques durs (produits IBM)

## 5. NOUVELLES VOIES DE RECHERCHE

Le champ d'étude du magnétisme s'est considérablement diversifié puisqu'il couvre tout à la fois le paléomagnétisme, c'est-à-dire l'étude du magnétisme des roches, le biomagnétisme (notons qu'en Chine ancienne, on utilisait déjà des pierres d'aimant pour guérir les maladies d'oreilles !), en passant par l'étude de nouveaux matériaux plus ordonnés (monocristaux), plus désordonnés (fines particules, rubans et fils amorphes, quasicristaux, ferrofluides, verres de spins), de plus basse dimensionnalité (couches minces), etc. Et l'on assiste déjà à l'émergence des nouveaux champs d'étude qui seront ceux de l'an 2000.

### 5.1. NANOSTRUCTURES MAGNÉTIQUES

C'est un domaine pluridisciplinaire, qui fait appel aux techniques de préparation les plus variées : les mésostructures sont fabriquées par lithographie, ce qui permet de

contrôler la géométrie et l'organisation des particules à l'échelle micronique ; à une échelle plus fine, de nouvelles techniques de fabrication ont vu le jour : techniques sous pointes (lithographie sous microscopie à balayage, nanoindentation, croissance sous pointe, déplacement d'atomes), création de nanofils en utilisant le bombardement d'une matrice par des ions lourds, dépôt de nanostructures par jet d'atomes focalisé, précipitation de sol-gels. Les plus petites nanoparticules, enfin, sont constituées d'amas de seulement quelques dizaines d'atomes. Les propriétés magnétiques de ces nanoparticules devraient nous réserver bien des surprises, car on s'attend à y observer des effets de taille finie, tant classiques que quantiques. L'étude de ces systèmes a été rendue possible par la mise au point toute récente de capteurs à microsquids, dont un spécimen est présenté sur la figure 1.9.

## 5.2. MULTICOUCHES MAGNÉTIQUES

La possibilité de préparer des couches très minces et parfaitement propres a donné un grand essor à la recherche de structures magnétiques totalement nouvelles, constituées de multicouches qui ont déjà permis de réaliser par exemple des sandwichs de matériaux à forte coercitivité et de matériaux doux : les *spring magnets* ainsi obtenus présentent des propriétés originales et impossibles à réaliser avec les matériaux traditionnels. Cette voie de recherche est, elle aussi, très prometteuse.

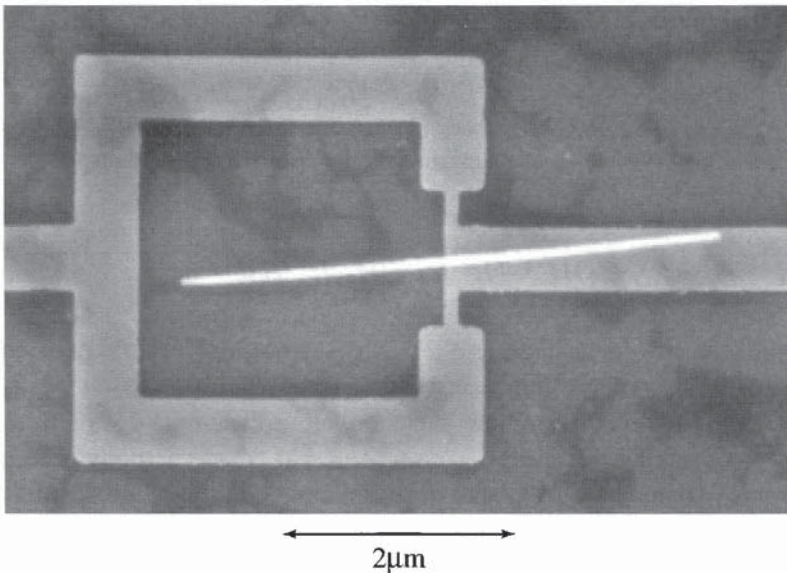


Figure 1.9 - Microsquid réalisé au L2M - CNRS, Bagnex par D. Mailly

L'échantillon à mesurer est un fil en nickel de diamètre 60 nm.

### 5.3. MAGNÉTISME MOLÉCULAIRE

Ce vocable regroupe non seulement le magnétisme des molécules les plus simples, mais aussi celui des systèmes plus complexes : systèmes bistables à transition de spin, molécules à haut spin, aimants à précurseurs moléculaires, aimants purement moléculaires, édifices magnétiques supramoléculaires. Ce domaine est, lui aussi, pluridisciplinaire par essence, puisqu'il repose sur une collaboration étroite entre magnéticiens et chimistes organiciens.

### 5.4. AUTRES VOIES DE RECHERCHE

On note enfin un renouveau d'études déjà anciennes, lié aux progrès de la technologie tant dans le domaine de la préparation que dans celui de la caractérisation et de la mesure : microscopie de force magnétique, magnéto-optique, dichroïsme, rayonnement synchrotron, champs magnétiques très intenses.

Ce regain d'intérêt est particulièrement sensible dans le domaine des oxydes magnétiques et a été stimulé par la découverte des oxydes supraconducteurs à haute température critique. Ainsi, la découverte d'une magnétorésistance géante dans des pérovskites de type (La-TR)MnO<sub>3</sub> ouvre la porte à des applications dans le domaine tout nouveau de l'*électronique de spin*.

Et ce n'est pas fini... C'est pourquoi cet ouvrage a pour ambition de devenir l'outil quotidien de ceux, chercheurs et ingénieurs, qui demain vont reprendre le flambeau et vivre cette aventure passionnante du développement de nouveaux matériaux magnétiques ou de la recherche fondamentale en magnétisme.

Toutefois, écrire un ouvrage exhaustif sur le magnétisme est aujourd'hui totalement impensable. Nous avons donc fait le choix de présenter dans les chapitres qui suivent une *introduction aux phénomènes généraux* et aux *matériaux les plus utilisés aujourd'hui* en invitant le lecteur à se reporter à d'autres manuels de magnétisme pour tous les développements qui auraient alourdi inutilement cet ouvrage. Citons en particulier -en langue française- les ouvrages de E. Durand [12], A. Herpin [13], et de P. Brissonneau [14] : le premier traite de Magnétostatique, le second couvre l'ensemble du sujet et tous deux datent de 1968 tandis que le troisième, publié tout récemment, se limite au magnétisme utile aux électrotechniciens. En langue anglaise, nous disposons d'une panoplie impressionnante d'ouvrages variés allant du Livingstone qui présente toute la physique du magnétisme sans aucune formule [15] à la série encyclopédique des 10 tomes édités par Wohlfarth et Buschow [16], en passant par les ouvrages de Morrish [17], de Cullity [18] qui traite principalement des matériaux magnétiques, de Watson très orienté vers les applications du magnétisme [19], et de Chikazumi dont l'édition originale de 1964 a été complétée et rééditée en 1997 [20]. Une bibliographie générale sur le magnétisme est donnée en fin d'ouvrage.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. DIDEROT, J. LEROND D'ALEMBERT, Encyclopédie des sciences, des arts et des métiers (1779) Imprimerie de la Société, Livourne.
- [2] J. LECLANT, Le fer dans l'Egypte ancienne, le Soudan et l'Afrique, *in* Colloque International "Le fer à travers les âges", Nancy, 3-6 octobre 1955 (Ann. de l'Est, Fac. des Lettres de Nancy, mémoire n°16, 1956).
- [3] S. AUFRÈRE, L'univers minéral dans la pensée égyptienne (1991) Institut français d'Archéologie Orientale, Le Caire, vol. 1, page 235.
- [4] SONG DESHENG, LI GUODONG, Histoire de l'électromagnétisme : observation et utilisation des phénomènes d'électricité et de magnétisme (1987) Editions de Presse Populaire, Guang Xi, Chine (en chinois).
- [5] M. SOUTIF, L'Asie, source de sciences et de techniques (1995) Presses Universitaires de Grenoble.
- [6] P.A.M. DIRAC, *Phys. Rev.* (1948) **74**, 7817.
- [7] R. RADAU, Le magnétisme (1881) Hachette, Paris, page 219.
- [8] C.D. MATTIS, Theory of magnetism (1965) Harper & Row, New-York.
- [9] G. AUBERT, G. MARTINEZ, P. WYDER, Proc. 5th Intern. Conf. on Large Magnetic Field Facilities in Physics (1994), Jacob & Schopper, Lausanne, 265-272.
- [10] K. OKAJIMA T. KOMURO, N. HARADA, A. ADACHI, M. UEDA, A. KANDORI, G. UEHARA, H. KADO, *Proc. I.E.E.E. Conf. Record Nuclear Science Symposium & Medical Imaging Conf.* (1993) **3**, 194.
- [11] J.F. HERBST, J.J. CROAT, *J. Magn. Magn. Mater.* (1991) **100**, 57-78.
- [12] E. DURAND, Magnétostatique (1968) Masson et Cie, Paris.
- [13] A. HERPIN, Théorie du magnétisme (1968) Presses Universitaires de France, Paris.
- [14] P. BRISSONNEAU, Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique (1997) Hermes, Paris.
- [15] J.D. LIVINGSTON, Driving force (1996) Harward University Press.
- [16] K.H.J. BUSCHOW, E.P. WOHLFARTH Eds., Ferromagnetic materials (1985, ...) North Holland, Amsterdam, 10 volumes à ce jour.
- [17] A.H. MORRISH, The physical principles of magnetism (1965) J. Wiley, N-Y.
- [18] B.D. CULLITY, Introduction to magnetic materials (1972) Addison-Wesley, Reading.
- [19] J.K. WATSON, Applications of magnetism (1980) John Wiley, New York.
- [20] S. CHIKAZUMI, Physics of ferromagnetism (1997) Oxford Clarendon Press. Nouvelle édition entièrement revue et corrigée du célèbre "Physics of magnetism" publié en 1964 par le même auteur.

## CHAPITRE 2

# MAGNÉTOSTATIQUE

*Ce chapitre est divisé en deux parties. Seule la première est indispensable à la compréhension des chapitres qui suivent. Elle définit et caractérise les grandeurs magnétiques fondamentales sur lesquelles repose la description du magnétisme (induction  $\mathbf{B}$ , moment  $\mathbf{m}$ , aimantation  $\mathbf{M}$ , champ  $\mathbf{H}$ , et susceptibilité  $\chi$ ) et elle pose le problème général de la détermination des champs et de l'aimantation dans un système magnétique comportant à la fois des courants donnés et des matériaux dont on connaît la courbe d'aimantation  $M(H)$ .*

*La seconde partie aborde deux questions délicates, concernant l'énergie et les forces et couples magnétiques :*

- ♦ *l'énergie magnétique associée aux courants fait appel à la notion de couplage électromagnétique. L'énergie associée à l'aimantation de la matière présente la particularité de dépendre de la forme de l'échantillon ; l'énergie totale du système magnétique le plus général (comportant courants et matière aimantée) est la somme de deux termes indépendants, l'énergie d'aimantation de la matière (en l'absence de courants) et l'énergie de la distribution de courants dans le vide (en l'absence d'aimantation) ;*
- ♦ *les forces et couples au sein d'un système magnétique peuvent être calculés, soit par application directe de la formule de Laplace ou de celles qui en dérivent, soit à partir de l'expression de l'énergie en appliquant le théorème des travaux virtuels, sans oublier le travail du champ électrique d'induction.*

## 1. MAGNÉTOSTATIQUE DES COURANTS ET DE LA MATIÈRE

### 1.1. MAGNÉTOSTATIQUE DES COURANTS DANS LE VIDE

La démarche historique rappelée dans le premier chapitre partait de la notion de masses magnétiques pour décrire les aimants. Contrairement à cette *approche coulombienne*, nous introduirons ici la magnétostatique par l'étude des effets magnétiques du courant électrique : c'est l'*approche ampérienne* plus conforme au point de vue moderne. Nous supposerons connue la notion de courant électrique et ne ferons

que rappeler et illustrer dans ce chapitre des résultats démontrés par ailleurs dans de nombreux ouvrages d'électromagnétisme et de magnétostatique [1, 2, 3].

### ***1.1.1. Lois fondamentales de la magnétostatique : l'induction magnétique***

On rencontre souvent dans la littérature les deux termes d'induction magnétique et de champ magnétique pour désigner la même quantité  $\mathbf{B}$ . La Commission Electrotechnique Internationale recommande de désigner par  $\mathbf{B}$  l'induction magnétique et par  $\mathbf{H}$  le champ magnétique. Dans cet ouvrage, nous utiliserons également les termes de «champ  $\mathbf{B}$ » et de «champ  $\mathbf{H}$ » pour désigner ces deux quantités. Toutefois, nous verrons que la distinction entre ces deux quantités n'est vraiment significative que dans la matière aimantée.

La notion d'induction magnétique s'introduit naturellement quand on étudie les forces qui s'exercent entre des conducteurs parcourus par des courants. Par exemple, pour expliquer la force et le couple qu'exercent l'un sur l'autre deux circuits filiformes rigides et fermés  $C_1$  et  $C_2$  parcourus respectivement par les courants  $I_1$  et  $I_2$ , il est commode d'imaginer que chacun des circuits crée dans l'espace un champ vectoriel  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  qu'on appelle précisément l'induction magnétique. La force et le couple subis par l'un des circuits sont alors considérés comme les effets de l'induction créée par l'autre, et non plus comme le résultat d'une interaction directe entre les deux circuits.

Cette démarche est tout à fait analogue à celle qui conduit en électrostatique à définir le champ électrique  $\mathbf{E}$  comme vecteur intermédiaire des forces d'attraction ou de répulsion entre charges. Elle se justifie par de nombreux arguments, notamment par le fait qu'un même champ électrique ou une même induction magnétique peuvent être créés de différentes manières et néanmoins conduire aux mêmes effets.

Dans cet esprit, et pour expliquer les faits observés en magnétostatique, on est conduit à énoncer deux lois fondamentales, que l'on rapprochera ensuite des lois similaires établies en électrostatique.

#### **Loi de Biot et Savart**

Elle fournit l'expression de l'induction magnétique créée par un circuit filiforme (C) parcouru par le courant  $I$  :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{l}}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.1)$$

$\mu_0$  est une constante universelle appelée perméabilité du vide et vaut  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  ;  $\mathbf{r}$  est le vecteur qui joint le point courant  $P$  sur le circuit (C) au point  $M$  où l'on observe l'induction  $\mathbf{B}$  et  $r$  est son module ;  $d\mathbf{l}$  est une longueur infinitésimale du circuit (C) située au point courant et le vecteur  $d\mathbf{l}$  est orienté dans le sens du courant  $I$ .

Cette loi s'étend à un nombre quelconque de circuits filiformes, puis à une distribution volumique continue de courant de densité  $\mathbf{j}$  (qui s'exprime en  $A/m^2$ ) ; dans ce dernier cas, l'expression de l'induction magnétique devient :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} dV}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2)$$

où  $dV$  est l'élément de volume.

### Loi de Laplace

Elle exprime la force  $d\mathbf{F}$  à laquelle est soumis un élément  $d\mathbf{l}$  de circuit parcouru par le courant  $I$ , en présence d'une induction  $\mathbf{B}$  :

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

L'induction magnétique s'exprime en tesla (T). D'après (2.3),  $1T = 1 NA^{-1}m^{-1}$ .

### Comparaison avec les lois de l'électrostatique

L'équation (2.2) a pour équivalent l'expression du champ électrostatique créé par une distribution de charges électriques de densité  $\rho$  :

$$\mathbf{E} = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int_V \rho dV \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

avec  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide, tandis que l'équation (2.3) est à rapprocher de la relation exprimant la force exercée par un champ électrique  $\mathbf{E}$  sur une charge  $dq$  :  $d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}$ .

Ces équations nous conduisent à considérer l'élément de courant  $I d\mathbf{l}$  (ou  $\mathbf{j} dV$ ) comme *objet élémentaire* de la magnétostatique par analogie avec la charge ponctuelle  $dq = \rho dV$ , objet élémentaire de l'électrostatique. Toutefois, bien qu'utile sur le plan du formalisme, l'élément de courant isolé n'a – contrairement à la charge électrique – aucune réalité physique car il ne satisfait pas au principe de conservation de la charge, du moins en régime continu.

**Remarque sur la nature du vecteur  $\mathbf{B}$**  - Il résulte de la définition de l'induction (équations 2.1 ou 2.2) qu'elle n'obéit pas aux mêmes règles de symétrie que les vecteurs densité de courant  $\mathbf{j}$ , force  $\mathbf{F}$  ou encore champ électrique  $\mathbf{E}$ , qui sont des vecteurs polaires.  $\mathbf{B}$  se comporte en fait comme le vecteur vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  définissant la rotation d'un solide. De tels vecteurs sont qualifiés de vecteurs axiaux, ou encore pseudovecteurs, et ce sont en réalité des tenseurs. Cette remarque se révèle importante dans le calcul de l'induction créée par une distribution donnée de courants.

Il est souvent commode, en effet, de mettre à profit les symétries de la distribution. Une règle pratique à retenir est alors que  $\mathbf{B}$  se transforme comme une boucle orientée (figure 2.1). Ainsi, dans une opération de symétrie par rapport à un centre,  $\mathbf{B}$  reste invariant. Une symétrie par rapport à un plan laisse invariante la composante normale de  $\mathbf{B}$  tandis que la composante tangentielle est inversée.

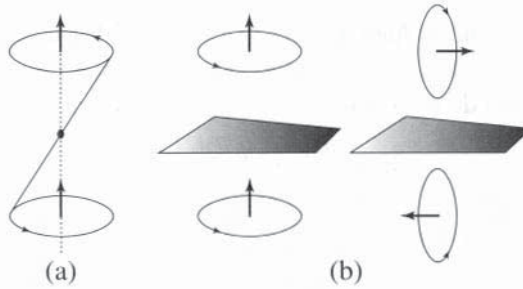


Figure 2.1 - Transformation du vecteur  $\mathbf{B}$  dans une symétrie par rapport à un point (a) et par rapport à un plan (b)

### 1.1.2. Théorème d'Ampère. Champ magnétique

Le nom d'Ampère reste attaché à l'interprétation mathématique élégante qu'il sut donner de l'expérience historique d'Ørsted. Considérons une surface ( $S$ ) s'appuyant sur une courbe fermée ( $\Gamma$ ), et un circuit fermé filiforme  $C$  transportant un courant électrique  $I$  qui engendre dans l'espace une induction  $\mathbf{B}$ . En partant de la définition (2.1), on montre que deux cas peuvent se présenter :

- ◆ Le circuit  $C$  ne traverse pas la surface ( $S$ ), et alors :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = 0 \quad (2.4)$$

- ◆ Le circuit  $C$  traverse ( $S$ ) une seule fois. Dans ce cas, la circulation de  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.5)$$

Le sens positif de la circulation le long de  $\Gamma$  étant choisi, le courant électrique est compté positif s'il est dans le sens de la normale  $\mathbf{n}$  orientée conformément à la règle usuelle. Un observateur debout sur la surface et voyant le vecteur  $\mathbf{n}$  remonter de ses pieds vers sa tête voit la circulation tourner dans le sens trigonométrique direct (figure 2.2).

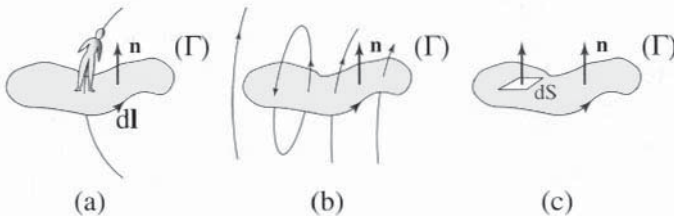


Figure 2.2 - Théorème d'Ampère

- (a) circuit filiforme unique (b) plusieurs circuits filiformes – les flèches indiquent le sens de circulation des courants – (c) distribution volumique de densité de courant  $\mathbf{j}$

Définissons un nouveau vecteur  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$  que nous appellerons champ magnétique. La relation (2.5) devient alors :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I \quad (2.6)$$

ce qui représente l'écriture classique du théorème d'Ampère. Cette définition du champ magnétique, valable uniquement dans le vide, sera généralisée plus loin au cas de la matière aimantée. Nous verrons alors le véritable intérêt de ce nouveau vecteur. L'unité de champ magnétique est l'ampère par mètre (A/m).

La relation (2.6) peut s'étendre au champ créé par un nombre quelconque de courants filiformes -  $I$  est alors la somme algébrique des courants qui traversent (S) - puis au champ créé par une distribution continue de courants volumiques de densité  $\mathbf{j}$  :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \, \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (2.7)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal à la surface (S) orientée conformément à la convention de signe déjà énoncée. Grâce au théorème de Stokes, la relation intégrale (2.7) conduit à la relation différentielle (2.8) souvent appelée relation d'Ampère-Maxwell, qui s'écrit indifféremment :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \text{ ou } \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.8)$$

### 1.1.3. Conservation du flux. Potentiel vecteur

Considérons un volume  $V$  fermé, limité par une surface (S). On montre, à partir des équations (2.1) et (2.2), que le flux  $\Phi$  de  $\mathbf{B}$  sortant de (V) à travers (S) est nul :

$$\int_S \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (2.9)$$

La relation (2.9) signifie aussi que le flux entrant dans (V) est égal au flux qui en sort : on dit que  $\mathbf{B}$  est à flux conservatif. La relation intégrale (2.9) peut encore se traduire par la relation différentielle locale :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.10)$$

**Remarque importante** - Cette propriété est déjà vraie pour l'induction  $d\mathbf{B} = \mu_0 I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{r} / 4\pi r^3$  créée par un élément de courant. Elle reste donc vraie pour des circuits non fermés à la différence du théorème d'Ampère.

L'équation (2.10) signifie que  $\mathbf{B}$  dérive d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{A}$  peut être déterminé de deux façons différentes en présence de courants donnés,

♦ à partir de l'expression résultant directement de la définition (2.2) de  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}}{r} \, dV \quad (2.12)$$

$\mathbf{A}$  est donc un vecteur polaire comme  $\mathbf{j}$ .

♦ à partir de la relation déduite de (2.8) :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.13)$$

Dans ce dernier cas,  $\mathbf{A}$  est obtenu à partir d'équations aux dérivées partielles qu'il faudra intégrer en tenant compte de conditions aux limites (discutées au § 1.1.4).

Dans la pratique, le choix entre les différentes approches précitées dépend de la géométrie du problème. Par exemple, dans le cas où la symétrie permet de choisir un circuit (généralement circulaire) le long duquel  $|\mathbf{B}|$  et  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  sont constants, on utilisera le théorème d'Ampère. Dans le cas d'une boucle de courant circulaire ou d'un bobinage cylindrique, on préférera la loi de Biot et Savart. Dans d'autres situations enfin, on intégrera une équation différentielle du type (2.13).

### **1.1.4. Conditions aux limites pour $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ à la traversée d'une nappe de courant**

On appelle nappe de courant une surface sur laquelle existent des courants superficiels de densité  $\mathbf{j}_s$  (qui s'exprime en A/m). Une telle surface correspond à une singularité de la densité volumique de courant  $\mathbf{j}$ . On vérifie facilement, par un passage à la limite des équations (2.12) et (2.5) et plus directement d'après (2.10), que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  vérifient les conditions de passage suivantes sur une nappe :

- ◆ continuité du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ ,
- ◆ continuité de la composante de  $\mathbf{B}$  normale à la surface, ce qui s'écrit :

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{n}}_{12} \mathbf{B}_2 \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  sont les inductions dans les milieux 1 et 2 respectivement et  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  est le vecteur unitaire normal à la surface et orienté du milieu 1 vers le milieu 2,

- ◆ discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B}_{T2} - \mathbf{B}_{T1} = \mu_0 (\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}_{12}) \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{B}_{T1}$  et  $\mathbf{B}_{T2}$  sont les composantes de  $\mathbf{B}$  tangentielles à la surface.

### **1.1.5. Induction et champ produits par un circuit filiforme. Coefficient de champ d'une bobine**

Il résulte de l'équation fondamentale (2.1) que, pour une bobine de géométrie quelconque parcourue par un courant  $I$ , l'induction et le champ créés en un point  $P$  donné peuvent s'écrire :

$$\mathbf{B} = C_B I \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = C_H I \quad (2.16)$$

où  $C_B$  et  $C_H$  ne dépendent que de la géométrie du circuit et de la position du point  $P$  par rapport à ce dernier.  $C_H$  est souvent appelé coefficient (vectoriel) de champ. Ces deux coefficients nous seront utiles dans la suite.

### **1.1.6. Etude de quelques distributions simples de courant**

Après la présentation très générale donnée dans les précédents paragraphes, nous allons aborder maintenant quelques exemples concrets et utiles de calcul de champ et d'induction dans le cas de distributions simples de courant.

### Courant filiforme rectiligne et infini

Le courant d'intensité  $I$  est porté par l'axe  $Oz$  et circule dans le sens positif. Soient  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  les coordonnées cylindriques d'un point donné. Le système est invariant en translation le long de  $Oz$ , en rotation autour de ce même axe, et dans une symétrie par rapport à tout plan passant par  $Oz$ . Il en résulte, compte tenu des règles de transformation de  $\mathbf{B}$ , valables aussi pour  $\mathbf{H}$ , que  $B_z = B_r = 0$  et que  $\mathbf{B}$  ne dépend que de  $r$ . En définitive,  $\mathbf{B}$  ne comporte que la composante  $B_\theta$  constante sur un cercle de rayon  $r$  d'axe  $Oz$  (figure 2.3).

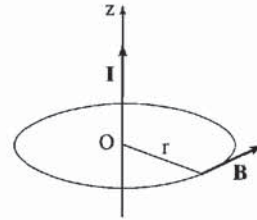


Figure 2.3 - Courant filiforme

L'application du théorème d'Ampère donne immédiatement :

$$H_\theta = I/2\pi r \quad (B_\theta = \mu_0 I/2\pi r, \text{ dans le vide}) \quad (2.17)$$

**Remarque : Force d'interaction entre deux courants rectilignes infinis et définition de l'ampère** - L'application directe de l'équation (2.17) et de la formule de Laplace donne la force  $\mathbf{F}'$  par unité de longueur entre deux fils rectilignes rigides parcourus par le même courant  $I$  :  $|\mathbf{F}'| = \mu_0 I^2/2\pi r$ . Cette force est attractive si les courants sont de même sens et répulsive s'ils sont de sens contraire.

Si  $r = 1 \text{ m}$ ,  $F' = \mu_0 I^2/2\pi$ . Dans le système international, nous avons vu que  $\mu_0$  était égal à  $4\pi \times 10^{-7}$ . Cette relation définit donc l'ampère :  $I = 1 \text{ A}$  si  $F' = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ .

### Nappe de courant plane, infinie et uniforme

Dans le repère trirectangle direct  $Oxyz$ , on suppose que le plan  $z = 0$  est le siège de courants de surface de densité  $\mathbf{j}_s$  parallèle à  $Ox$ . L'invariance en translation selon  $Ox$  et  $Oy$  entraîne que l'induction  $\mathbf{B}$  est indépendante de  $x$  et de  $y$ . On peut donc la calculer au point  $(0, 0, z)$  par exemple en sommant les inductions élémentaires produites par des courants rectilignes d'intensité  $\mathbf{j}_s dy$  (figure 2.4-a).

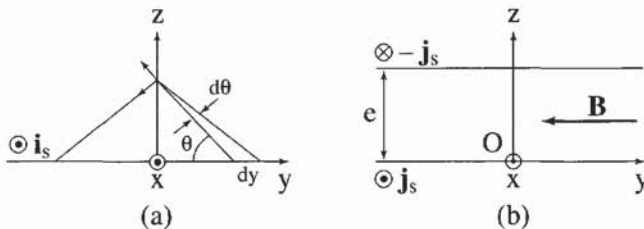


Figure 2.4 - (a) Nappe de courant  $\mathbf{j}_s x$  - (b) Double nappe

En associant des éléments symétriques par rapport au plan  $y = 0$ , on voit que la seule composante non nulle de  $\mathbf{B}$  est  $B_y$ . On trouve :  $dB_y = 2(\mu_0/\pi r)j_s dy \sin \theta = (\mu_0/\pi)j_s d\theta$ , et finalement pour  $z > 0$  :

$$B_y = \int_{\pi/2}^0 \frac{\mu_0 j_s}{\pi} d\theta = -\mu_0 j_s/2 \quad (2.18)$$

Le plan de la nappe étant un plan de symétrie, on a pour  $z < 0$  :  $B_y = +\mu_0 j_s / 2$ . L'induction est donc indépendante de la distance au plan de la nappe, mais subit une discontinuité sur ce plan. On vérifie que  $B_y(+0) - B_y(-0) = -\mu_0 j_s$ , conformément à l'équation (2.15), et que l'induction ne s'annule pas à l'infini.

### Double nappe

On associe à la nappe de densité  $j_s$  en  $z = 0$  une deuxième nappe de densité  $-j_s$  en  $z = e$ . En superposant les champs des deux nappes, on trouve pour  $0 < z < e$  :

$$B_y = -\mu_0 j_s \quad (2.19)$$

D'où le sens de la flèche représentant  $\mathbf{B}$  sur la figure 2.4-b. En dehors de l'intervalle  $[0, e]$ , l'induction est nulle.

Ce système est en quelque sorte l'équivalent du condensateur plan de l'électrostatique. Nous y reviendrons par la suite.

### Boucle circulaire de rayon R

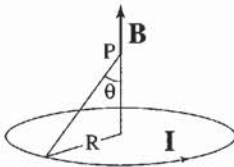


Figure 2.5  
Boucle de courant

Lorsque l'on se limite au calcul de l'induction sur l'axe d'une boucle circulaire parcourue par un courant, il est avantageux d'utiliser directement la relation (2.1). On montre qu'en un point P de l'axe tel que le cône de sommet P et s'appuyant sur la boucle a pour demi angle au sommet  $\theta$  (figure 2.5), l'induction  $\mathbf{B}$  est portée par l'axe et son module vaut :

$$B = (\mu_0 I / 2R) \sin^3 \theta \quad (2.20)$$

### Solénoïde infini

A la surface d'un cylindre d'axe Oz et de rayon R, nous supposons qu'il existe des courants de surface transverses de densité  $j_s$ . Un fil isolé de faible diamètre et bobiné à spires jointives sur un mandrin cylindrique constitue une bonne approximation de ce modèle théorique. Nous avons alors  $j_s = nI$  où I est le courant dans la bobine et n le nombre de spires par unité de longueur. Le solénoïde étant supposé infiniment long, il y a invariance en translation selon Oz, si l'on néglige le faible pas du bobinage.

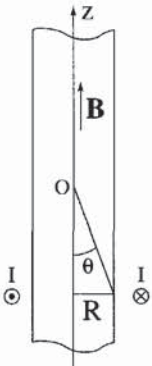


Figure 2.6  
Solénoïde

Le système est encore invariant en rotation autour de Oz et dans une symétrie par rapport à tout plan normal à Oz si l'on néglige aussi la faible hélicité du bobinage. Il en résulte que l'induction est parallèle à Oz et ne dépend *a priori* que de la distance r à l'axe. Mais l'application du théorème d'Ampère à un rectangle construit dans un plan contenant Oz, et dont deux côtés sont parallèles à l'axe Oz, montre que l'induction est uniforme dans chacune des régions  $r < R$  et  $r > R$ . En revanche,  $\mathbf{B}$  présente une discontinuité sur le cylindre, pour  $r = R$  (figure 2.6).

Pour calculer l'induction à l'intérieur du solénoïde, le plus simple est de la calculer sur l'axe à partir de la formule (2.20) en remplaçant  $I$  par  $n'Idz$  et en intégrant sur  $z$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  ou sur  $\theta$  de  $0$  à  $\pi$ . On obtient alors à l'intérieur :

$$\mathbf{B} = \mu_0 n' I \hat{\mathbf{z}} \quad (2.21)$$

où  $\hat{\mathbf{z}}$  est le vecteur unitaire porté par Oz. Compte tenu de la discontinuité sur le cylindre, l'induction est nulle à l'extérieur du cylindre. Cette formule reste valable dans le cas d'un solénoïde cylindrique dont la section présente une forme quelconque.

### 1.1.7. Induction et champ créés à grande distance par des courants confinés dans un volume fini : moment magnétique, dipôle magnétique, masse magnétique

Considérons une distribution de courants confinée au voisinage de l'origine des coordonnées O, à l'intérieur d'un volume fini (V). On montre, en partant de la relation (2.12), que le potentiel vecteur – très loin de l'origine – se réduit à :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.22)$$

où le vecteur  $\mathbf{m}$ , appelé *moment magnétique*, s'exprime en fonction de la densité de courant  $\mathbf{j}$  :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \quad (2.23)$$

Le moment magnétique apparaît formellement comme l'analogie du moment cinétique que l'on introduit en mécanique : nous aurons l'occasion de revenir sur les relations entre ces deux quantités.

En partant de l'équation (2.22), il est possible de calculer l'induction à grande distance :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (2.24)$$

Le champ magnétique associé s'en déduit :  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Dans le cas d'une boucle plane de courant (C) parcourue par le courant  $I$ , l'expression du moment magnétique devient, d'après l'équation (2.18) :

$$\mathbf{m} = IS \hat{\mathbf{n}} \quad (2.25)$$

où  $S$  est l'aire de la boucle et  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire orientée suivant la règle habituelle (figure 2.2-c), le sens de circulation étant celui du courant. De la relation (2.25), il ressort que le moment magnétique s'exprime en  $\text{Am}^2$ . Notons la similitude entre les expressions du champ  $\mathbf{H}$  ou de l'induction  $\mathbf{B}$  et celle du *champ électrique*  $\mathbf{E}$  créé par un dipôle électrique de moment  $\mathbf{p} = q \cdot \delta$  ( $\delta$  désignant le vecteur allant de la charge  $-q$  vers la charge  $+q$ ) :  $\mathbf{E} = (4\pi\epsilon_0)^{-1} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}/r^3]$ . Il en résulte que les lignes de champ sont les mêmes pour un moment magnétique et

un dipôle électrique (figure 2.7), à condition de préciser «*tant que l'on se place loin des sources par rapport aux dimensions de celles-ci*». En revanche, au voisinage des sources, les lignes de champ de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  d'une part et de  $\mathbf{E}$  d'autre part sont très différentes, en particulier au cœur des sources elles sont opposées comme le montre la figure 2.7. Nous verrons que cette remarque a son importance pour la suite.

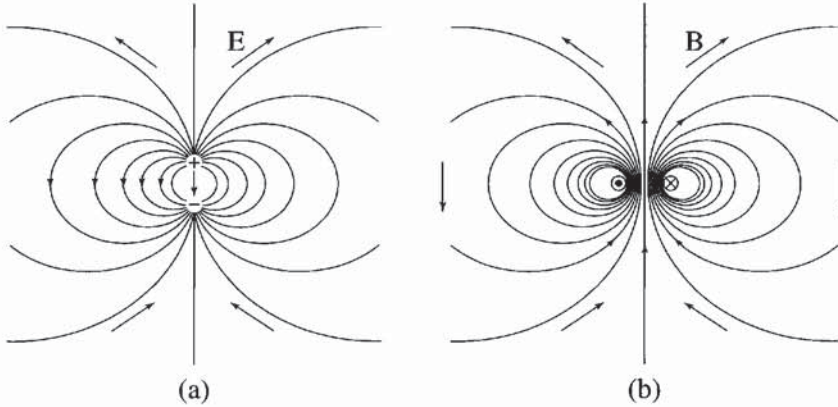


Figure 2.7 - (a) Champ électrique engendré par une paire de charges égales et opposées  
(b) Induction magnétique engendrée par une boucle de courant

A grande distance, les deux spectres deviennent identiques : on parle alors d'un spectre de dipôle.

La similitude de  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$  loin des sources nous autorise à remplacer de façon formelle une boucle de courant par une paire de *masses magnétiques* ponctuelles  $-q_m$  et  $+q_m$  distantes de  $\delta$  avec  $q_m \delta = SI \hat{n}$ . On parle alors de *dipôle magnétique*, le moment magnétique de ce dipôle étant donné par :  $\mathbf{m} = q_m \delta$ . Dans cette approche dite *coulombienne*, on considère que  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  sont créés par les masses magnétiques conformément à la loi de Coulomb. Ainsi on écrira en particulier pour le champ engendré par une masse magnétique ponctuelle  $q_m$  :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.26)$$

On comprendra mieux l'intérêt de cette approche - et en particulier pourquoi on met déjà l'accent sur le champ magnétique - lorsque l'on étudiera la matière aimantée.

**Tourbillon élémentaire et dipôle ponctuel** : si l'on fait tendre toutes les dimensions d'une boucle de courant vers zéro, et le courant vers l'infini, de sorte que le produit  $\mathbf{m} = IS$  reste constant, on obtient à la limite un objet appelé tourbillon élémentaire [1]. Si l'origine est sur la boucle, les formules (2.22) et suivantes sont alors rigoureuses pour toute valeur non nulle de  $r$ . On peut de même, en partant du dipôle, faire tendre  $\delta$  vers zéro et  $q_m$  vers l'infini, en conservant le produit  $\mathbf{m} = q_m \delta$ . L'objet obtenu est alors un dipôle magnétique ponctuel. Tourbillon élémentaire et dipôle magnétique ponctuel sont deux représentations mathématiques équivalentes des effets magnétiques utilisables dans le calcul des champs produits par les circuits ou plus généralement par des distributions de courants. Nous reviendrons sur ce point

dans l'étude de la matière aimantée, et allons l'illustrer par un exemple très simple. La figure 2.8 montre qu'une boucle de courant de dimensions finies peut en effet être décomposée (de multiples façons) en un ensemble équivalent de boucles plus petites. En passant à la limite, on obtient une distribution de tourbillons élémentaires qui peuvent être à leur tour remplacés par des dipôles. L'objet obtenu est appelé feuillet magnétique : c'est la représentation coulombienne de la boucle de courant.

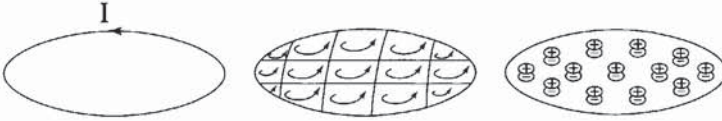


Figure 2.8 - Boucle de courant et feuillet magnétique

L'induction et le champ en un point quelconque se calculent alors indifféremment, soit de façon classique par la formule de Biot et Savart (2.1), soit en intégrant sur un feuillet magnétique les contributions dipolaires élémentaires. Le feuillet lui-même doit cependant être exclu car il ne satisfait pas à la condition de validité du formalisme dipolaire. Dans l'exemple étudié, cela ne représente pas une contrainte sévère si l'on réalise que le feuillet a une épaisseur nulle, et que sa géométrie est largement arbitraire (il doit seulement s'appuyer sur la boucle). Toutefois cette limitation n'est plus innocente dans le cas des distributions de courant les plus générales.

### 1.1.8. Relations fondamentales dans l'approche coulombienne

En intégrant la force de Laplace et le moment de cette force sur une boucle de courant, on montre que le couple  $\Gamma$  et la force  $\mathbf{F}$  exercés par une induction  $\mathbf{B}$  ou un champ  $\mathbf{H}$  sur un moment  $\mathbf{m}$  ont pour expression :

$$\Gamma = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} \quad (2.28)$$

Ces expressions montrent que :

- ◆ un moment magnétique tend à s'orienter parallèlement au champ et dans le même sens,
- ◆ il n'existe une force que si le champ est inhomogène,
- ◆ si  $\mathbf{m}$  est parallèle (antiparallèle) à  $\mathbf{B}$ , le moment est attiré vers la zone de champ maximum (minimum).

On vérifie aisément que les équations (2.27) et (2.28) s'interprètent aussi à partir des charges magnétiques si l'on admet que la masse magnétique  $q_m$  placée dans un champ  $\mathbf{H}$ , ou une induction  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , est soumise à la force :

$$\mathbf{F} = \mu_0 q_m \mathbf{H} = q_m \mathbf{B} \quad (2.29)$$

Les équations (2.26) et (2.29) apparaissent alors comme les relations fondamentales de la magnétostatique dans l'approche coulombienne.

## 1.2. MAGNÉTOSTATIQUE DE LA MATIÈRE

Les effets magnétiques de certains matériaux ont été reconnus bien avant ceux des courants électriques (voir chapitre 1). On comprendra, à la lecture de ce qui suit, qu'il est néanmoins préférable d'un point de vue pédagogique de n'introduire la matière aimantée qu'après les courants.

### 1.2.1. Moment magnétique, aimantation et induction associée à la matière

Un morceau de matière aimantée présente les mêmes caractéristiques qu'un moment magnétique associé à une boucle de courant : il crée une induction magnétique extérieure  $\mathbf{B}$  identique, et en présence d'une induction  $\mathbf{B}$ , il est soumis au même couple et à la même force. L'origine de ce moment magnétique sera discutée en détail dans le chapitre 7. Soit  $d\mathbf{m}$  le moment magnétique d'un élément de volume  $dV$  de matière ; par définition, l'*aimantation* locale est le moment magnétique par unité de volume :

$$\mathbf{M} = d\mathbf{m}/dV \quad (2.30)$$

Dans le cas où l'on considère que la matière est constituée d'atomes de type  $i$  de moment magnétique  $\mathbf{m}_i$  au nombre de  $N_i$  par unité de volume, l'aimantation peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{M} = \sum_i N_i \mathbf{m}_i \quad (2.31)$$

Hors de la matière, l'induction  $\mathbf{B}$  est créée d'une part par les courants macroscopiques et d'autre part par toutes les petites boucles élémentaires de courant qui constituent la matière. On pourra toujours utiliser l'approximation dipolaire, même au voisinage immédiat de la matière, car chaque boucle peut être considérée comme ponctuelle (tant que l'on ne descend pas à l'échelle atomique). S'il n'y a pas de difficulté pour définir l'induction  $\mathbf{B}$  hors de la matière, il n'en est pas de même de l'induction  $\mathbf{B}$  à l'intérieur de la matière. En effet dans ce dernier cas, on est au sein d'une distribution de microcourants et l'*induction locale*, que l'on écrit généralement  $\mathbf{b}$ , fluctue énormément dans l'espace, en particulier d'un atome à l'autre. Il n'est pas facile de la déterminer (sauf par les techniques de diffraction neutronique) et pour ce qui est de la magnétostatique, sa connaissance nous importe peu. En revanche, on peut définir l'induction  $\mathbf{B}$ , *moyenne spatiale* de l'induction locale  $\mathbf{b}$ , soit  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$ . C'est cette quantité dont il sera question par la suite.

Notons que cette quantité peut être mesurée directement à partir de la déviation provoquée par la force de Lorentz (éq. 2.57) sur un faisceau de particules chargées traversant la matière. C'est exactement ce que l'on fait en microscopie de Lorentz [4].

Le problème auquel on s'intéresse à ce stade est la détermination de  $\mathbf{B}$  créée en tout point de l'espace par une répartition spatiale connue de courants et d'aimantation  $\mathbf{M}$ . On ne s'intéresse pas pour l'instant à la manière dont cette aimantation a pu être créée.

### 1.2.2. Détermination de $\mathbf{B}$ (et $\mathbf{A}$ ) à partir des courants liés : approche ampérienne

En présence de matière, on peut montrer (voir les calculs annexes donnés en fin de chapitre, § 3) que la détermination de l'induction  $\mathbf{B}$  et du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  en tout point de l'espace se ramène à un problème d'électromagnétisme du vide dans lequel deux types de courants sont à considérer :

- ◆ d'une part, les courants réels ou *courants libres* de densité  $\mathbf{j}_0$  et
- ◆ d'autre part, les courants associés à la matière aimantée ou *courants liés*, de densité volumique  $\mathbf{j}_m$  et surfacique  $\mathbf{j}_{ms}$  données par :

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.33)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal à la surface de la matière et orienté vers l'extérieur. La relation (2.33) se déduit de (2.32) en considérant qu'au voisinage de la surface, la transition depuis la matière ( $\mathbf{M} \neq 0$  à l'intérieur) vers le vide ( $\mathbf{M} = 0$  à l'extérieur) s'opère de façon progressive sur une épaisseur  $\delta$ , puis en passant à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . On peut alors déterminer  $\mathbf{B}$  à l'aide de l'une des approches présentées au § 1.1.3 en prenant :  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m$ .

#### Remarques

- ◆ Lorsque l'aimantation est uniforme, ce qui est une situation assez courante,  $\mathbf{j}_m = 0$  et il ne reste que les densités de courant superficielles  $\mathbf{j}_{ms}$ . Par exemple le champ  $\mathbf{B}$  créé partout (dans et hors de la matière) par un cylindre uniformément aimanté le long de son axe est le même que celui d'un solénoïde de densité de courant (courant par unité de longueur de solénoïde)  $|\mathbf{j}_{ms}| = |\mathbf{M}|$  (voir figure 2.9).
- ◆ Les conditions au passage d'une surface, en particulier au passage d'un milieu à un autre, sont les mêmes que celles précisées au § 1.1.4, en tenant compte du fait que  $\mathbf{j}$  (ou plutôt  $\mathbf{j}_s$  dans l'équation 2.15) est la somme des densités de courants libres et liés.
- ◆ On peut toujours écrire que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{B}_m$  sont respectivement les contributions provenant des courants libres et de la matière aimantée.

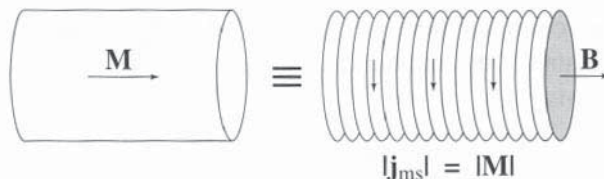


Figure 2.9 - Equivalence entre aimantation et densité de courant superficielle dans le cas d'un cylindre uniformément aimanté parallèlement à son axe

### 1.2.3. Le champ magnétique $\mathbf{H}$ dans la matière aimantée

D'après l'équation (2.8),  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m) = \mu_0 (\mathbf{j}_0 + \text{rot } \mathbf{M})$ , d'où :

$$\text{rot} [(\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}] = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \quad (2.35)$$

Ainsi, le vecteur  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$  appelé champ magnétique continue à vérifier dans la matière le théorème d'Ampère au sens des *courants libres* (ou réels) alors que ce n'est plus vrai pour l'induction  $\mathbf{B}$ . C'est là l'intérêt essentiel du champ magnétique. Nous noterons en passant que la relation (2.35) conduit à une définition de  $\mathbf{H}$  plus générale que celle donnée au § 1.1.2, mais s'y ramène lorsque l'aimantation est nulle ( $\mathbf{M} = 0$ ). La relation de définition de  $\mathbf{H}$  s'écrit encore :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \quad (2.36)$$

où  $\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}$  est appelée *polarisation magnétique*. Certains auteurs considèrent le vecteur  $\mathbf{J}$  comme l'aimantation et le notent  $\mathbf{M}$ , ce qui peut prêter à confusion (ne pas confondre  $\mathbf{J}$  avec la densité de courant  $\mathbf{j}$ ).

Nous allons maintenant donner la signification physique de  $\mathbf{H}$ . Considérons un élément de matière où règne une induction uniforme  $\mathbf{B}$  et creusons dans cet élément une cavité très allongée selon la direction de  $\mathbf{M}$ . En raison du théorème de superposition, la nouvelle valeur  $\mathbf{B}_i$  de l'induction dans la cavité est égale à l'ancienne  $\mathbf{B}$  à laquelle il faut retrancher l'induction  $\Delta \mathbf{B}$  créée par le solénoïde équivalent à la partie que l'on a enlevé.  $\Delta \mathbf{B}$  est donnée par la formule (2.21) dans laquelle  $n'I = j_{ms} = M$  soit  $\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ . Il en résulte que :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.37)$$

où  $\mathbf{H}$  est précisément le champ magnétique dans la matière. Ainsi, le champ  $\mathbf{H}$  n'est rien d'autre, au facteur  $\mu_0$  près, que l'induction magnétique mesurée dans une cavité cylindrique allongée d'axe parallèle à l'aimantation.

### 1.2.4. Détermination de $\mathbf{H}$ à partir des masses magnétiques équivalentes : approche coulombienne

La relation (2.35) ne signifie nullement que  $\mathbf{H}$  est créé par les seuls courants libres. Il suffit, pour s'en convaincre, de constater qu'un aimant isolé crée dans son voisinage une induction  $\mathbf{B}$  et donc un champ  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . On peut donc écrire que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_0 \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{H}_0$  est dû au courants libres et  $\mathbf{H}_m$  à la matière aimantée. Sachant que  $\text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}_0$ , l'équation (2.35) entraîne que  $\text{rot } \mathbf{H}_m = 0$ .  $\mathbf{H}_m$  dérive donc d'un potentiel que nous désignerons par  $V_m$  tel que  $\mathbf{H}_m = -\text{grad} V_m$ .

De plus, étant donné que la divergence des quatre vecteurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_m$  et  $\mathbf{H}_0$  est nulle, l'équation (2.36) conduit à :

$$\text{div } \mathbf{H}_m = -\text{div } \mathbf{M} \quad (2.39)$$

Par analogie avec les équations de l'électrostatique :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ et  $\rho$  la densité de charges électriques, on peut transposer (à  $\epsilon_0$  près) ces dernières à la magnétostatique en introduisant des charges ou masses magnétiques fictives de densités volumique  $\rho_m$  et surfacique  $\sigma_m$  données par :

$$\rho_m = -\text{div } \mathbf{M} \quad (2.41)$$

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.42)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du milieu aimanté. Cette dernière relation se déduit de l'équation (2.41) par un passage à la limite analogue à celui qui conduit de (2.32) à (2.33).

Ainsi, une fois connues les densités de masse équivalentes à la matière, les différentes manières de déterminer  $\mathbf{H}_m$  (ou  $V_m$ ) dans et hors de la matière sont les mêmes qu'en électrostatique, à savoir :

$$\diamond \quad \mathbf{H}_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m \mathbf{r}}{r^3} dV \quad (2.43)$$

$$\diamond \quad V_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m}{r} dV \quad (2.44)$$

◆ Théorème de Gauss (le flux de  $\mathbf{H}_m$  sortant d'une surface fermée est égal à la masse magnétique totale intérieure à cette surface), méthode à appliquer si la symétrie est appropriée.

$$\diamond \quad \text{Equation de Poisson :} \quad \Delta V_m + \rho_m = 0 \quad (2.45)$$

(ou équation de Laplace  $\Delta V_m = 0$ , là où  $\rho_m = 0$ ). Les constantes résultant de l'intégration de cette équation aux dérivées partielles sont obtenues à partir des conditions au limites précisées ci-dessous.

### Remarques

◆ Nature des vecteurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  et des scalaires  $\rho_m$  et  $q_m$

$\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont des pseudovecteurs (ou vecteurs axiaux) au même titre que  $\mathbf{B}$ , et le scalaire  $\rho_m = -\text{div } \mathbf{M}$  est en réalité ce que l'on appelle un pseudoscalaire, car son signe dépend de la convention adoptée pour le sens positif de rotation. Les règles de transformation des masses magnétiques dans une opération de symétrie se déduisent de celles de  $\mathbf{M}$  (identiques à celles de  $\mathbf{B}$ ) comme on le voit sur la figure 2.10.

Figure 2.10 - Transformation d'une masse magnétique ponctuelle (a) par une symétrie par rapport à un centre (b) par une symétrie par rapport à un plan



◆ Quand l'aimantation est uniforme, ce qui est assez fréquent,  $\rho_m = 0$  et il ne reste que les densités de charges superficielles  $\sigma_m$ . Par exemple le champ  $\mathbf{H}_m$  créé

partout (dans la matière et en dehors) par un cylindre uniformément aimanté le long de son axe est le même que celui engendré par deux disques de densités surfaciques uniformes  $\sigma_m = \pm |\mathbf{M}|$  et situés sur les faces planes du cylindre (figure 2.11).

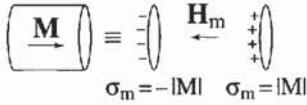


Figure 2.11 - Equivalence entre aimantation et densité de charges magnétiques, dans le cas d'un cylindre uniformément aimanté selon son axe

- ◆ Les conditions au passage d'une surface, en particulier au passage d'un milieu à un autre, sont les suivantes :
  - en ce qui concerne  $\mathbf{H}_0$ , ce sont celles imposées à  $\mathbf{B}_0$  (et  $\mathbf{A}_0$ ) et précisées au § 1.1.4.
  - en ce qui concerne  $\mathbf{H}_m$ , ce sont les mêmes qu'en électrostatique, à savoir :
    - continuité de  $V_m$ , et donc de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}_m$ ,
    - discontinuité de la composante normale de  $\mathbf{H}_m$  telle que  $(\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \sigma_m$  (voir figure 2.12). Si les milieux 1 et 2 sont respectivement la matière d'aimantation  $\mathbf{M}$  et le vide,  $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}$ . S'il s'agit de deux milieux d'aimantations respectives  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$ , l'application de la relation (2.39) conduit à  $\sigma_m = \hat{\mathbf{n}}_{12} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ .

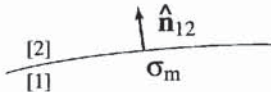


Figure 2.12 - Surface de séparation entre un milieu [1] magnétique et un autre milieu [2] non magnétique

### 1.2.5. Application à deux cas simples

#### Densité de courant réelle $\mathbf{j}_0$ et aimantation $\mathbf{M}$ connues en tout point

En résumé, la détermination en tout point de l'espace de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  créés par des répartitions de courant  $\mathbf{j}_0$  et d'aimantation  $\mathbf{M}$  connues peut se faire de deux manières différentes sachant qu'une fois l'un de ces champs connu, l'autre peut être déduit à l'aide de la relation (2.36). Dans les deux approches, on se ramène à un problème de magnéto-statique du vide.

- ◆ **Approche ampérienne** : détermination de  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m$

$\mathbf{B}_0$  est créée par les densités de courants libres  $\mathbf{j}_0$  alors que  $\mathbf{B}_m$  est créée par les densités de courants liés volumiques et surfaciques données par les expressions (2.32) et (2.33),  $\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M}$  et  $\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ . Il y a alors quatre manières de déterminer  $\mathbf{B}$  (ou  $\mathbf{A}$ ) :

- en utilisant directement la loi de Biot et Savart (équation 2.1),
- en appliquant à  $\mathbf{B}$  le théorème d'Ampère :  $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m) dS$
- en calculant directement  $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}}{r} dV$ , où  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m$ , et enfin
- en intégrant les équations aux dérivées partielles obtenues à partir de  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$ .

♦ **Approche coulombienne** : détermination de  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m$

$\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$  est créé par les courants libres et  $\mathbf{H}_m = -\mathbf{grad} V_m$  est créé par les masses magnétiques équivalentes volumiques et surfaciques données par les expressions (2.41) et (2.42) :  $\rho_m = -\text{div } \mathbf{M}$  et  $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Il y a alors quatre manières de déterminer  $\mathbf{H}_m$  (ou  $V_m$ ) :

- en utilisant directement la loi de Coulomb (équation 2.43),
- en appliquant le théorème de Gauss ( $\int_S \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_m dV$ ),
- en calculant directement  $V_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m}{r} dV$  (équation (2.44)),
- en intégrant l'équation aux dérivées partielles  $\Delta V_m + \rho_m = 0$  (équation 2.45).

Si l'on obtient  $\mathbf{A}$  ou  $V_m$  par intégration d'une équation aux dérivées partielles, les constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites en particulier celles associées au passage d'un milieu à un autre :

- ♦ continuité de  $\mathbf{A}$ ,  $B_N$  (composante normale),  $V_m$  et  $H_{mT}$  (composante tangentielle),
- ♦ discontinuité de  $H_{0T}$  (composante tangentielle) :  $\mathbf{H}_{0T2} - \mathbf{H}_{0T1} = \mathbf{j}_{0S} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}$ , où  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface et allant de 1 vers 2.

**Densité de courant réelle  $\mathbf{j}_0$  connue et milieu linéaire, homogène et isotrope**

On verra dans la suite que dans un milieu dit linéaire homogène et isotrope, en abrégé LHI (§ 1.3.2), on est conduit à écrire  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ , où  $\chi$  et  $\mu$  sont des scalaires caractérisant le matériau. Alors :

- ♦  $\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M} = \chi \text{ rot } \mathbf{H} = \chi \mathbf{j}_0$ . Il en résulte que partout où il n'y a pas de courant libre,  $\mathbf{j}_m = 0$  ; il ne reste donc que des courants équivalents surfaciques. Dans chacun des milieux considérés, on a donc à résoudre l'équation différentielle :  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$ .
- ♦  $\rho_m = -\text{div } \mathbf{M} = -(\chi/\mu_r \mu_0) \text{div } \mathbf{B} = 0$ . Il en résulte que, dans chacun des milieux considérés, on a à résoudre l'équation de Laplace :  $\Delta V_m = 0$ .

Partant de l'une des approches, on peut remonter à l'autre grâce à la relation (2.36).

**1.2.6. Le champ démagnétisant  $\mathbf{H}_d$**

Lorsque la seule source du champ magnétique est une distribution connue d'aimantation, dans la matière on parle de champ *démagnétisant*. En effet, comme l'illustre la figure 2.13 dans le cas d'un cylindre uniformément aimanté, le champ  $\mathbf{H}_m$  dans la matière est généralement opposé à l'aimantation (plus précisément en un point considéré, la projection de  $\mathbf{H}_m$  sur la direction de l'aimantation est opposée à cette dernière), d'où le qualificatif de démagnétisant et la notation habituelle  $\mathbf{H}_d$  au lieu de  $\mathbf{H}_m$ . Par extension, un certain nombre d'auteurs utilisent le terme de champ démagnétisant pour désigner le champ créé par la matière aimantée même à l'extérieur de celle-ci. Par ailleurs et malheureusement certains auteurs désignent aussi  $\mathbf{H}_m$  ou  $\mathbf{H}_d$  par le terme de *champ dipolaire*, quand ce n'est pas *champ*

d'interaction dipolaire. On précisera dans la seconde partie de ce chapitre la différence entre énergie dipolaire et énergie de champ démagnétisant.

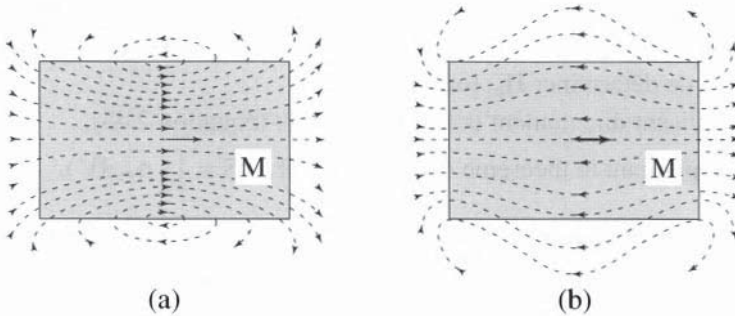


Figure 2.13 - Lignes de champ (a) de l'induction  $\mathbf{B}$  et (b) du champ  $\mathbf{H}$ , en présence d'un cylindre uniformément aimanté. En tout point du matériau,  $\mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$ .

Il est facile de calculer le champ démagnétisant pour différentes géométries de matériaux uniformément aimantés [5] en utilisant le formalisme (2.33) à (2.39) :

- ◆ cylindres très allongés dans lesquels l'aimantation est parallèle à l'axe :  $\mathbf{H}_d = 0$ , (sauf au voisinage des extrémités) ;
- ◆ disques ou lames minces planes d'épaisseur faible devant les autres dimensions et dans lesquels l'aimantation est perpendiculaire aux faces :  $\mathbf{H}_d = -\mathbf{M}$  loin des bords ;
- ◆ au centre d'un cylindre de dimensions finies aimanté le long de son axe (figure 2.14), le champ démagnétisant s'écrit :  $\mathbf{H}_d = -(1 - \cos\theta) \mathbf{M}$ .

De cette formule, on déduit facilement le champ démagnétisant dans les deux cas précédents.

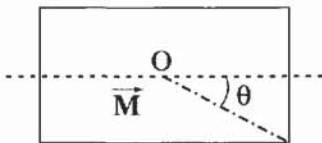


Figure 2.14  
Cylindre aimanté selon son axe

### 1.2.7. Coefficient de champ démagnétisant

On peut montrer, bien que ce ne soit pas trivial, que dans le cas d'un matériau ayant la forme d'un ellipsoïde et uniformément aimanté,  $\mathbf{H}_d$  et en conséquence  $\mathbf{B}_m$  dans la matière sont également uniformes. Le champ démagnétisant dans un ellipsoïde uniformément aimanté peut alors s'écrire :

$$\mathbf{H}_d = -\mathbf{N}\mathbf{M} \quad (2.46)$$

où  $\mathbf{N}$  est le tenseur des *coefficients de champ démagnétisant*. On notera que pour un ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie, la matrice représentative de ce tenseur est diagonale et telle que :

$$N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 1 \quad (2.47)$$

Si l'aimantation  $\mathbf{M}$  est orientée suivant l'un de ces axes,  $\mathbf{H}_d$  lui est colinéaire. Dans le cas d'une *sphère*, on en déduit facilement que  $N_{xx} = N_{yy} = N_{zz} = 1/3$ . Un cas particulier souvent rencontré est celui de l'*ellipsoïde de révolution* de longueur  $c$  selon l'axe de révolution  $z$  et de diamètre  $a$  perpendiculairement à cet axe. Si  $r = c/a > 1$  (ellipsoïde allongé), on a :

$$N_{zz} = N_{\parallel} = \frac{1}{r^2 - 1} \left[ \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \operatorname{arg} \operatorname{ch}(r) - 1 \right] \quad (2.48)$$

Si  $r < 1$  (ellipsoïde aplati), on a :

$$N_{zz} = N_{\parallel} = \frac{1}{1 - r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \operatorname{arc} \cos(r) \right] \quad (2.49)$$

Dans les deux cas bien entendu :  $N_{xx} = N_{yy} = N_{\perp} = (1 - N_{\parallel})/2$ .

### 1.3. RÉPONSE DE LA MATIÈRE À UN CHAMP MAGNÉTIQUE

L'aimantation  $\mathbf{M}$  est une variable de *configuration* de la matière au même titre que la polarisation électrique ou la déformation élastique. C'est l'un des problèmes majeurs du magnétisme des matériaux que d'établir soit expérimentalement soit théoriquement la relation entre l'aimantation  $\mathbf{M}$  et les différentes variables auxquelles elle est sensible. Parmi celles ci, le champ  $\mathbf{H}$  et l'induction  $\mathbf{B}$  sont, on s'en doute, les plus importantes. Mais comme  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  sont liés par la relation de définition (2.36), il suffit de prendre soit l'un soit l'autre comme variable magnétique indépendante.

#### 1.3.1. Choix du champ magnétique $\mathbf{H}$ comme variable indépendante

Ce choix traditionnel ne se justifie en dernier ressort que par des considérations pratiques. Il est en effet plus facile de contrôler directement le champ magnétique interne d'un échantillon que son induction interne (particulièrement dans les mesures statiques). Nous avons écrit plus haut que l'intérêt principal du vecteur  $\mathbf{H}$  était de vérifier le théorème d'Ampère même dans la matière aimantée. La figure 2.15-a montre comment on peut mettre à profit cette propriété pour imposer un champ donné à l'intérieur d'un échantillon torique. Le tore porte un enroulement dense de  $n$  spires régulièrement réparties le long du périmètre, enroulement dans lequel on fait circuler le courant  $I$ . Si, compte tenu de la présence de la matière, le système conserve la symétrie de révolution autour de l'axe  $Oz$  du tore, le champ ne comporte que la composante azimutale  $H$  constante le long d'un cercle d'axe  $Oz$  et telle que :

$$H = nI/l \quad (2.50)$$

où  $l$  est le périmètre moyen du tore. L'aimantation est alors elle-même azimutale et constante le long d'un cercle d'axe  $Oz$  et l'on vérifie que le champ démagnétisant est nul ( $Oz$  est l'axe de symétrie du tore, perpendiculaire au plan de la figure 2.15-a).

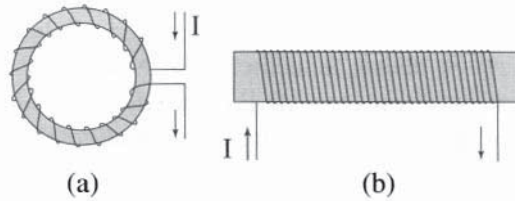


Figure 2.15 - Deux configurations où l'on peut imposer la valeur de  $H$  à l'intérieur d'un échantillon : (a) tore – (b) barreau allongé

Une autre configuration utile est le barreau très allongé dans la direction de l'aimantation (figure 2.15-b), car le champ démagnétisant y est pratiquement nul.

### 1.3.2. Différents types de comportement magnétique d'une substance

La caractérisation magnétique d'un matériau consiste idéalement à mesurer  $\mathbf{M}$  ou  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$ . En pratique, on se contente la plupart du temps de mesurer  $M_H$  ou  $B_H$  en fonction de  $H$ , où  $M_H$  et  $B_H$  sont les projections de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}$  sur  $\mathbf{H}$ . Les courbes  $M_H(H)$  et  $B_H(H)$  sont appelées courbes d'aimantation. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la direction de projection, ces relations classiques sont notées plus simplement  $M(H)$  et  $B(H)$ .

Selon le type de matériau considéré, on obtient des comportements extrêmement variés, qui dépendent plus ou moins de paramètres extérieurs tels que la température ou la pression, de l'histoire du matériau et de la direction d'application du champ dans le cas de matériaux anisotropes. A titre d'exemple, nous avons schématisé sur la figure 2.16 quelques réponses typiques de la matière à un champ.

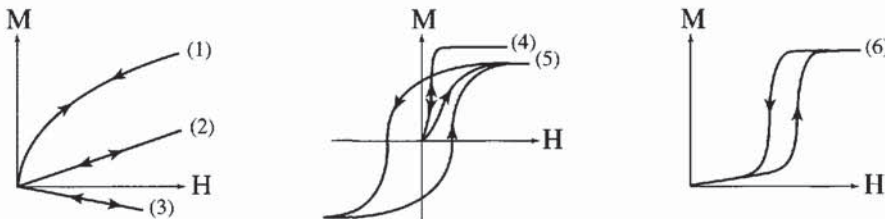


Figure 2.16 - Représentation schématique de différents types de réponses observés selon la substance considérée

Certaines substances ont une réponse linéaire jusqu'à des champs élevés (cas 2 et 3). Si de plus elles sont isotropes et homogènes, on parle de matériau LHI (*linéaire, homogène et isotrope*) ; l'aimantation est alors colinéaire au champ et peut s'écrire :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (2.51)$$

où  $\chi$ , scalaire sans dimension en unités MKSA, est la *susceptibilité* magnétique.

Pour d'autres matériaux, la linéarité n'est observée que pour de faibles variations de champ autour d'un point de repos ( $H_0, M_0$ ) qui n'est pas nécessairement l'origine

(cas 4 et 6 de la figure 2.16). Dans ce cas,  $\chi = (dM/dH)_{H_0}$  caractérise la réponse dans cette gamme de champ et est appelée *susceptibilité magnétique différentielle*. En particulier, on définit la *susceptibilité initiale*  $\chi_i = (dM/dH)_0$ , c'est-à-dire la pente à l'origine. Les valeurs de la susceptibilité s'étendent depuis environ  $-10^{-5}$  dans les matériaux très faiblement magnétiques (diamagnétiques, voir plus loin, tels que le cuivre, le carbone) jusqu'à des valeurs d'environ  $+10^6$  (matériaux ferromagnétiques ultra doux, par exemple certains alliages amorphes ou nanocristallins).

A la notion de susceptibilité, on associe celle de *perméabilité*  $\mu$  telle que dans un milieu linéaire homogène et isotrope (LHI) :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.52)$$

On en déduit aisément que  $\mu_r = 1 + \chi$ . Attention toutefois aux notations : comme bon nombre d'auteurs, nous écrivons souvent l'équation (2.52) sous la forme  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ , où  $\mu$  sera alors la *perméabilité relative*.

Certains milieux présentent un cycle d'hystérésis (courbe 5) tel qu'en revenant à champ magnétique nul après avoir appliqué un champ assez fort, ils conservent une aimantation non nulle : on parle alors d'aimantation rémanente ( $M_r$ ) ; c'est en particulier le cas des aimants permanents (certains alliages de terres rares, par exemple).

En général, perméabilités et induction magnétique intéressent plutôt les ingénieurs tandis que susceptibilités et aimantation sont les paramètres favoris des physiciens.

### 1.3.3. Cas de substances anisotropes

Dans le cas d'un matériau macroscopiquement anisotrope tel qu'un monocristal, l'aimantation n'est pas systématiquement colinéaire au champ. Si le comportement est linéaire, on peut écrire la relation tensorielle :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (2.53)$$

où  $\chi$  est le tenseur de susceptibilité. On sait que la relation (2.53) se projette dans un système d'axes donnés sous la forme d'une relation matricielle  $\mathbf{M} = [\chi] \mathbf{H}$  où  $[\chi]$  est une matrice  $3 \times 3$  dite représentative de  $\chi$  dans le système d'axes en question.

Dans le cas statique qui nous intéresse ici, on montre que la matrice représentative dans un système d'axes quelconque est symétrique par rapport à sa diagonale et comporte donc 6 composantes indépendantes dans le cas le plus général.

Il existe alors un système d'axes rectangulaires particulier, dit système des *axes principaux*, dans lequel la matrice est diagonale. Les axes principaux sont toujours liés à des éléments de symétrie quand ils existent. La susceptibilité (ou perméabilité) scalaire ou tensorielle que nous avons définie ci-dessus est la susceptibilité (ou perméabilité) *statique* valable dans le cas d'un champ continu ou lentement variable. Nous étudierons dans le chapitre 17 la susceptibilité (ou perméabilité) dans le cas d'un champ rapidement variable dans le temps.

### 1.3.4. Remarque

Pour en finir avec les notions de perméabilité et de susceptibilité magnétique, rappelons que, si l'équation (2.36) est écrite par les ingénieurs :  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$  et par les physiciens :  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$  en système MKSA rationalisé (SI), la plupart des articles traitant du magnétisme ont été écrits en système c.g.s, dans lequel cette équation fondamentale s'écrivait :  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ , où  $\mathbf{H}$  s'exprimait en oersted et  $\mathbf{M}$  en uem/cm<sup>3</sup>. Un oersted vaut  $(250/\pi)$  Am<sup>-1</sup> et un uem/cm<sup>3</sup> vaut 10<sup>3</sup> Am<sup>-1</sup>.

### 1.3.5. Correction du champ démagnétisant Notion de susceptibilité externe

On a déjà souligné que la réponse intrinsèque d'un matériau magnétique ne s'obtient directement que sur des échantillons en forme de tores ou de barreaux très allongés. Néanmoins, on peut aussi utiliser des échantillons en forme d'ellipsoïdes pour lesquels on sait faire une *correction* de l'effet du champ démagnétisant. En effet, il s'agit concrètement de déterminer la courbe  $M(H)$  où  $H$  est le champ interne à la matière, à partir de la courbe  $M(H_0)$  où  $H_0$  est le champ appliqué. Connaissant le coefficient de champ démagnétisant  $N$  dans la direction considérée (nécessairement un axe principal de l'ellipsoïde), on a immédiatement  $M(H) = M(H_0 - NM)$ . Cette correction est évidemment applicable à n'importe quel type de matériau, mais nous mettrons l'accent ici sur les matériaux LHI, dont la réponse intrinsèque se caractérise par un seul paramètre, la susceptibilité  $\chi$ .

On peut écrire  $M = \chi H$ , avec  $H = H_0 + H_d$  et  $H_d = -NM$ , et l'on en déduit :

$$M = \left\{ \chi / (1 + N\chi) \right\} H_0 \quad (2.54)$$

On a donc une pente plus faible lorsque l'on trace l'aimantation en fonction du champ extérieur, ce qui est fréquemment le cas (figure 2.17). Cette pente  $\chi / (1 + N\chi)$  est tout naturellement appelée *susceptibilité externe*.

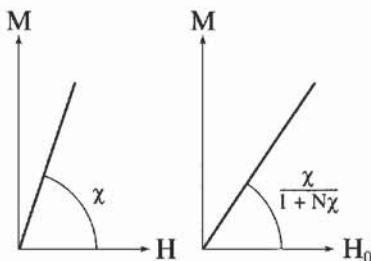
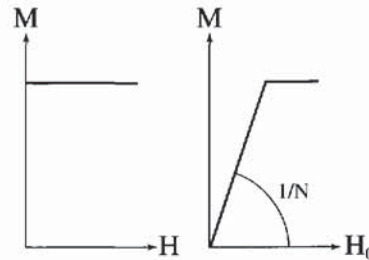


Figure 2.17 - Courbes d'aimantation schématisées en fonction du champ interne ( $H$ ) et du champ externe ( $H_0$ ) pour une substance présentant une susceptibilité finie

Il faut bien noter que la susceptibilité externe ne caractérise pas la matière seule, mais un échantillon de matière de géométrie donnée. En particulier si  $\chi$  est infinie, propriété caractérisant les substances ferromagnétiques idéales en champ faible comme nous le verrons plus loin, la susceptibilité externe est égale à  $1/N$ , c'est-à-dire l'inverse du coefficient de champ démagnétisant (figure 2.18). La variation sous champ magnétique de l'aimantation suit alors – en champ magnétique faible – une

loi linéaire que l'on nomme *droite de champ démagnétisant* qui ne dépend que de la géométrie.

**Figure 2.18 - Courbes d'aimantation schématisées en fonction du champ interne ( $H$ ) et du champ externe ( $H_0$ ) pour une substance présentant une susceptibilité infinie**



Ces considérations ainsi que les méthodes de mesure de l'aimantation dont nous ne parlons pas ici seront rappelées et approfondies dans le chapitre 26 consacré aux techniques expérimentales. Sauf avis contraire, les courbes présentées dans cet ouvrage pour des substances ferromagnétiques seront tracées en fonction du champ interne  $H$  ( $\text{Am}^{-1}$ ) ou  $\mu_0 H$  (Tesla).

#### 1.4. PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DÉTERMINATION DE $B$ ET $M$

Dans le paragraphe 1.2.5 nous avons considéré, pour déterminer partout  $H$  (ou  $B$ ), qu'en tout point de la matière l'aimantation était connue. En fait, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'aimantation dépend du champ. Aussi le problème le plus général est le suivant : en présence de courants libres (s'ils existent) connus et de matière parfaitement caractérisée, on cherche à déterminer en tout point l'aimantation  $M$  et le champ  $H$  (ou  $B$ ). La difficulté vient du fait que localement l'aimantation dépend du champ total  $H$  qui est la somme du champ  $H_0$  créé par les courants libres et du champ  $H_m$  (ou  $B_m$ ) lui-même créé par l'aimantation. On a donc à traiter un problème couplé qui, la plupart du temps, ne peut se résoudre que numériquement de manière auto-cohérente. Les étapes successives d'un tel calcul sont les suivantes :

1. détermination de  $H_0$  (ou de  $B_0$ ) à partir de la distribution de courants s'ils existent,
2. choix d'une distribution d'aimantation initiale  $M_i$  (d'une polarisation  $J_i$ ),
3. détermination de  $H_m$  (ou  $B_m$ ) par l'une ou l'autre des approches présentées au paragraphe 1.2,
4. calcul de la distribution d'aimantation à partir de la réponse de la matière,
5. comparaison entre cette dernière et la distribution initiale,
6. si elles sont les mêmes, le problème est résolu. Sinon, on remplace la distribution initiale par celle calculée et on revient au point 3.

Grâce à des moyens de calcul de plus en plus performants, les méthodes de simulation sont en plein essor et des problèmes toujours plus complexes sont résolus de manière numérique. Par exemple, dans la méthode des éléments finis, on choisit un maillage où l'aimantation de chaque élément est considérée comme

uniforme. Parmi les difficultés rencontrées, il faut citer le choix du maillage et des conditions aux limites. Bien entendu, la simulation est d'autant plus exacte que le maillage est plus fin.

Parmi les rares situations que l'on sait traiter analytiquement, il faut citer :

- ◆ le cas d'une sphère pleine ou creuse en matériau LHI soumise à un champ extérieur uniforme, et
- ◆ le cas d'un cylindre plein ou creux en matériau LHI de longueur infinie soumis à un champ extérieur uniforme et perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Ces différents cas abordés, soit à partir des courants liés, soit à partir de charges équivalentes, font l'objet d'exercices proposés à la fin de ce chapitre.

**Remarque : micromagnétisme** - Dans le problème général exposé ci-dessus, on suppose que la réponse du matériau est parfaitement décrite par une relation  $M(H)$  ou  $B(H)$  qui a une signification locale quelle que soit l'échelle. En réalité, dans un matériau magnétique, il existe toujours une ou plusieurs longueurs caractéristiques qui détruisent l'invariance d'échelle.

Les longueurs caractéristiques les plus évidentes sont celles liées à la microstructure dans le cas d'un matériau polycristallin ou d'un composite. Par exemple, pour des variations spatiales lentes à l'échelle des tailles de grains dans un polycristal, il est en effet suffisant de décrire la réponse du matériau par une équation d'état macroscopique, en particulier  $M = M(H)$  où  $M$  et  $H$  sont des moyennes calculées sur un volume grand à l'échelle des longueurs caractéristiques. La relation  $M(H)$  ainsi définie ignore le caractère hétérogène du matériau considéré et pour cette raison est souvent appelée loi d'homogénéisation. Si les variations spatiales sont rapides, l'homogénéisation n'est plus possible. Il faut alors choisir un pas de calcul beaucoup plus petit que la dimension des grains et caractériser chacun d'eux par sa propre relation d'état. Toutefois si les grains restent assez gros - et nous allons très vite préciser ce qu'on entend par là - cette relation d'état pourra conserver un caractère local, et le problème ne change pas fondamentalement de nature.

En revanche, le problème devient radicalement différent si les variations spatiales sont rapides à l'échelle d'une autre longueur caractéristique qui est liée à l'interaction d'échange. On verra dans les chapitres suivants que l'interaction d'échange est à l'origine de l'ordre magnétique et qu'elle n'est pas de nature magnétostatique. Elle conduit à une description *non locale* de la réponse magnétique du matériau : on n'a plus affaire à un problème de magnétostatique au sens de ce paragraphe. On parle alors de micromagnétisme, car les longueurs caractéristiques de l'échange restent typiquement inférieures voire très inférieures à  $1 \mu\text{m}$ .

Comme problèmes classiques de micromagnétisme statique, citons la détermination de la distribution de l'aimantation à l'intérieur d'une paroi de domaines et le calcul des champs critiques de basculement dans les aimants ou les matériaux d'enregistrement.

### 1.5. APPROXIMATION DES CIRCUITS MAGNÉTIQUES

A l'interface entre deux milieux, en l'absence de courants surfaciques, il y a continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  et de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ .

On montre alors facilement que, si les milieux sont de type LHI, les lignes de champ (aussi bien de  $\mathbf{B}$  que de  $\mathbf{H}$ ) subissent une réfraction telle que  $\text{tg}\theta_2/\text{tg}\theta_1 = \mu_2/\mu_1$  où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  désignent les angles que font les lignes de champ dans les milieux 1 et 2 respectivement, avec la normale à l'interface (figure 2.19). Autrement dit dans un milieu à forte perméabilité (ferromagnétique doux), les lignes de champ ont tendance à être tangentes à la surface extérieure sauf dans les zones où elles lui sont rigoureusement perpendiculaires.

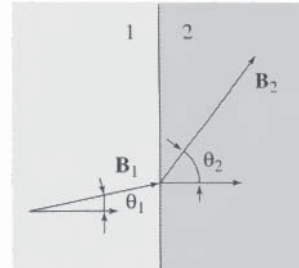
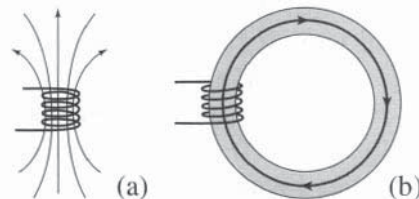


Figure 2.19  
Le dioptre magnétique

Cette propriété est mise à profit dans ce qu'on appelle un *circuit magnétique* dont l'exemple le plus simple est illustré par la figure 2.20 : le flux produit par la bobine d'excitation est canalisé par le tore à haute perméabilité de la même manière qu'un circuit électrique canalise le courant produit par un générateur, d'où ce terme de circuit magnétique. Dans le schéma de la figure 2.20, le bobinage est constitué de  $n$  spires parcourues par un courant  $I$ . Désignons par  $S$  la section du tore (supposée constante) et par  $p$  son périmètre moyen.

Figure 2.20 - Lignes de champ magnétique engendrées par un bobinage (a) dans le vide et (b) en présence d'un tore en matériau magnétique



L'approximation des circuits magnétiques consiste ici à admettre, conformément à ce qui précède, que les lignes de champ sont parallèles entre elles et à la ligne moyenne du tore. Il en résulte immédiatement, d'après la conservation du flux, que  $B$  et  $H$  sont invariants le long d'une même ligne de champ. Dans la mesure où  $p/2\pi \gg S^{1/2}$  les lignes de champ sont toutes de longueur voisine de  $p$ . Le théorème d'Ampère nous permet alors d'écrire  $H = nI/p$  et :

$$\Phi = BS = \mu_r\mu_0H = nI/\mathcal{R} \quad (2.55)$$

où le paramètre  $\mathcal{R} = (1/\mu_r\mu_0) p/S$  porte le nom de *réductance*.

On peut remarquer tout de suite la similitude entre la relation (2.55) et la loi d'Ohm  $V = RI$ . L'analogie de  $V$  est la quantité  $\mathcal{E} = nI$  qu'on appelle la *force magnétomotrice*. L'analogie du courant est évidemment le flux et celui de la résistance, la réductance. Cette analogie avec les circuits électriques se généralise aux configurations plus complexes comportant plusieurs branches en série ou en parallèle, pour lesquelles on établit aisément des lois similaires aux lois de Kirchoff.

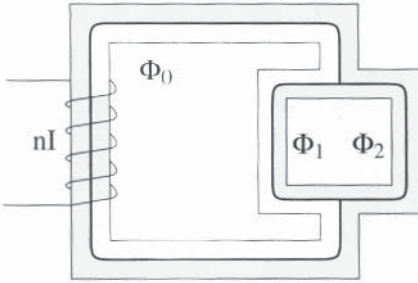


Figure 2.21 - Circuit magnétique comportant une dérivation

Considérons l'exemple de la figure 2.21 dans lequel le circuit principal comporte deux branches 1 et 2. Le long d'une ligne de champ qui passe par le circuit principal et les dérivation 1 et 2, le théorème d'Ampère donne :

$$nI = \mathcal{R}_0 \Phi_0 + \mathcal{R}_1 \Phi_1$$

$$nI = \mathcal{R}_0 \Phi_0 + \mathcal{R}_2 \Phi_2$$

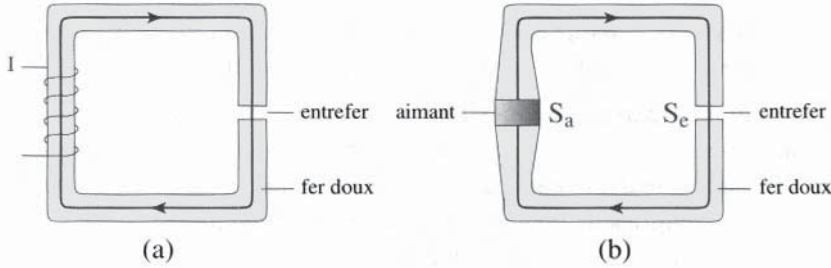
La conservation du flux donne par ailleurs  $\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ . Il en résulte :

$$nI = (\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}') \Phi_0 = \mathcal{R} \Phi_0 \text{ avec } 1/\mathcal{R}' = \Lambda' = 1/\mathcal{R}_1 + 1/\mathcal{R}_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 \text{ et } \mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{R}_0.$$

On a fait apparaître ici les inverses de réluctance que l'on appelle les *perméances*. La perméance  $\Lambda$  est l'analogue de la conductance. Ainsi, comme pour les circuits électriques, les réluctances de branches en série s'ajoutent tandis que ce sont les perméances qui s'ajoutent dans des branches en parallèle.

Nous allons illustrer cette méthode des circuits magnétiques par deux exemples pratiques importants :

- ◆ L'exemple de la figure 2.22-a correspond au schéma simplifié d'un *électro-aimant*. Il dérive du circuit de la figure 2.20 par l'introduction de ce que l'on appelle un *entrefer*, c'est-à-dire une lame d'air perpendiculaire à la ligne moyenne du circuit et dont l'épaisseur  $e$  est très inférieure au périmètre moyen  $p$  du tore. Si l'on impose de plus la condition :  $e \ll S^{1/2}$ , où  $S$  est toujours la section du tore, on peut négliger les effets de bords et admettre que les lignes de flux restent parallèles à la ligne moyenne du tore dans la plus grande partie de l'entrefer. Dans ces conditions, le flux  $\Phi$  traversant le circuit, en particulier l'entrefer, s'écrit d'après ce qui précède :  $\Phi = \mu_0 H_e S$ , soit encore  $\Phi = nI / (\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_e)$  où  $\mathcal{R}_f = (1/\mu_r \mu_0) (p - e) / S$  et  $\mathcal{R}_e = (1/\mu_0) e / S$  sont respectivement la réluctance du matériau doux (fer) et celle de l'entrefer (où  $\mu = 1$ ).  $H_e$  est le champ dans l'entrefer. Sachant que  $e \ll p$ , il vient :  $H_e = nI / [(p/\mu) + e]$ . Si  $\mu$  est très supérieur à  $p/e$ , on obtient en définitive :  $H_e = nI/e$ . Cette formule montre la possibilité d'obtenir un champ important en concentrant dans un petit entrefer le champ produit par une bobine de dimensions très supérieures à celui-ci.
- ◆ Considérons le circuit de la figure 2.22-b où la source de flux est cette fois un aimant permanent d'aimantation rigide  $\mathbf{M}$  au lieu d'un enroulement. On envisage aussi une situation un peu plus générale que la précédente au niveau du circuit : sa section évolue de  $S_a$  au droit de l'aimant à  $S_e$  dans l'entrefer. Soit  $a$  l'épaisseur de l'aimant,  $e$  restant celle de l'entrefer.  $B_a$  et  $H_a$  sont respectivement l'induction et le champ dans l'aimant (on admet qu'ils sont uniformes),  $B_e$  et  $H_e$  l'induction et le champ dans l'entrefer. Le champ dans le fer est négligé, car sa perméabilité est énorme. Repartons tout d'abord des équations fondamentales.



**Figure 2.22 - Circuits magnétiques avec entrefer**  
Flux engendré (a) par un solénoïde (b) par un aimant permanent

Le théorème d'Ampère nous donne  $aH_a + eH_e = 0$  et la conservation du flux  $S_a B_a = S_e B_e$ . Comme  $B_a = \mu_0(H_a + M)$  et  $B_e = \mu_0 H_e$ , on aboutit au système linéaire :  $aH_a + eH_e = 0$  ;  $S_a H_a - S_e H_e = -S_a M$ , dont la résolution donne en particulier :  $H_e = M / (e/a + S_e/S_a)$ .

Ce résultat peut être retrouvé plus directement en utilisant le concept de courants équivalents à l'aimantation. L'aimant étant une plaque d'épaisseur  $a$  de section  $S_a$  (avec  $a \ll S_a^{1/2}$ ), tout se passe comme si l'on avait un enroulement de  $n$  spires parcouru par le courant  $I$  tel que  $nI/a = M$ , où  $M$  est l'aimantation de l'aimant (supposée parfaitement rigide). Notons que cet enroulement équivalent ne doit pas être considéré comme bobiné autour du matériau doux mais autour d'un entrefer de longueur  $a$  et de section  $S_a$ . Ainsi, le flux s'écrit d'après le théorème d'addition des réluctances en négligeant celle du fer (ce qui revient à négliger le champ dans le fer) :

$$\Phi = \mu_0 S_e H_e = \mu_0 M a / (a/S_a + e/S_e) \text{ et donc, } H_e = M / (S_e/S_a + e/a).$$

Cela encore illustre l'intérêt du circuit magnétique, à savoir la possibilité de concentrer dans un petit volume les effets d'un aimant de dimensions beaucoup plus grandes. Nous aurons l'occasion de revenir sur les applications des circuits magnétiques notamment dans les chapitres 15, 16 et 17.

## 2. ÉNERGIE, FORCES ET COUPLES AU SEIN DES SYSTÈMES MAGNÉTIQUES

Dans une première lecture de l'ouvrage, le lecteur peut passer au chapitre suivant, et ne revenir sur cette section que lors d'une seconde lecture plus approfondie.

### 2.1. LE COUPLAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE VIDE

L'électrostatique ne traite que des systèmes de charges électriques fixes, et la magnéto-statique que des distributions de courant permanentes. Dans ce cadre strict, ce sont deux disciplines indépendantes. Dès lors que l'on s'intéresse aux phéno-

mènes variables dans le temps, il faut tenir compte du *couplage électromagnétique* révélé entre autres par Faraday, Lenz, Ampère, Maxwell et Lorentz.

Bien qu'une grande partie des questions traitées dans cet ouvrage relèvent de la magnétostatique, nous ne pouvons pour autant négliger le couplage électromagnétique, parce que d'une part c'est un passage obligé pour comprendre l'énergie associée aux distributions de courants permanentes, et d'autre part ce phénomène est au cœur de très nombreuses et importantes applications.

### 2.1.1. Force et champ de Lorentz

Revenons à la formule de Laplace introduite au début de ce chapitre comme une des deux lois fondatrices de la magnétostatique, et appliquons-la à un conducteur filiforme dans lequel des porteurs de charge mobiles, animés de la vitesse  $\mathbf{v}$ , créent un courant  $\mathbf{I} = N'q \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}$ . Ici  $q$  est la charge élémentaire,  $N'$  le nombre de ces charges mobiles par unité de longueur, et  $\hat{\mathbf{u}}$  le vecteur unitaire porté par le fil au point considéré. La vitesse  $\mathbf{v}$  est naturellement colinéaire à  $\hat{\mathbf{u}}$  car les porteurs de charge sont confinés dans le fil, lui-même supposé immobile.

Dans une induction  $\mathbf{B}$ , l'élément de courant  $Idl \hat{\mathbf{u}}$  est soumis à la force de Laplace  $Idl \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B} = dNq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  où  $dN$  est le nombre de porteurs mobiles dans l'élément  $dl$ . Ramenée à un porteur de charge, la force de Laplace s'écrit donc :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.56)$$

Cette forme invite à sortir du cadre strict du courant dans un fil, et à admettre que la relation (2.56) reste valable en toutes circonstances, par exemple pour une particule chargée unique se déplaçant dans le vide.  $\mathbf{v}$  est alors mesurée par rapport aux sources de l'induction (nous y reviendrons plus loin).

S'il existe simultanément l'induction  $\mathbf{B}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ , on écrit tout naturellement :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.57)$$

Cette *relation de Lorentz* se vérifie directement par des expériences sur des faisceaux d'électrons et par conséquent, c'est beaucoup plus une généralisation, qu'une simple interprétation microscopique de la loi de Laplace. On remarque dans l'équation (2.57) que le terme  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  joue le même rôle qu'un champ électrique. Nous l'appellerons désormais le *champ de Lorentz* par commodité, mais il faut toutefois se rappeler que ce terme de champ de Lorentz est aussi utilisé par ailleurs dans un contexte très différent (problème du champ local dans les diélectriques).

### 2.1.2. Champ électrique créé dans un conducteur en mouvement par une induction magnétique $\mathbf{B}$

Considérons un conducteur filiforme rectiligne, rigide de longueur finie  $l$  sur lequel on définit une orientation par le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{u}}$ .

On déplace le conducteur en translation à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans l'induction uniforme  $\mathbf{B}$  produite par des sources fixes et invariantes dans le temps (figure 2.23). A l'équilibre, les charges responsables des courants dans le conducteur sont nécessairement fixes par rapport à ce dernier puisque le courant est nul (le conducteur est isolé). La vitesse de chacune de ces charges dans le repère fixe se réduit alors à la vitesse d'entraînement  $\mathbf{v}$ . Il existe donc dans le fil un champ de Lorentz  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  dont la composante selon l'axe du fil est  $\hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{v})$ .

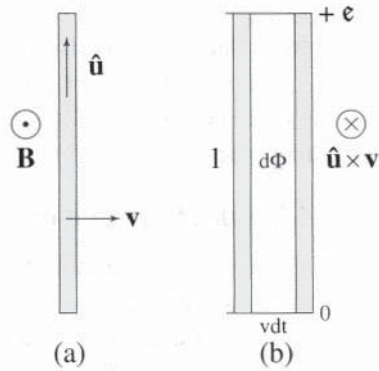


Figure 2.23 - Conducteur (a) en mouvement (b)

Pour que les charges restent immobiles par rapport au conducteur, il faut qu'elles soient soumises à un autre champ qui compense le champ de Lorentz. Cette question fait l'objet de l'exercice 2.11.

Définissons alors la différence de potentiel magnéto-induite ou - pour prendre le terme consacré, malheureusement moins explicite - la force électromotrice induite,  $e$ , par la circulation du champ de Lorentz le long du brin conducteur :

$$e = \int \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{v}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}' \tag{2.58}$$

où  $\mathbf{S}'$  est le vecteur normal au plan  $(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$  dont le module n'est autre que l'aire balayée par le segment conducteur par unité de temps.  $|\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}'|$  est donc le flux *coupé* par le brin par unité de temps. Compte tenu des conventions de signe de la figure 2.23, on écrira encore  $e$  sous la forme :

$$e = - d\Phi / dt \tag{2.59}$$

où  $\Phi$  est à un instant donné le flux qui a été coupé par le fil au cours de son déplacement (notons qu'il est sans importance que ce flux ne soit défini qu'à une constante additive près). La grandeur  $e$  a une signification pratique intéressante : c'est la différence de potentiel mesurable entre les deux extrémités du brin par un voltmètre *fixe* (voir exercice 2.11).

La relation (2.59) se généralise sans difficulté au cas d'un circuit filiforme *fermé* non rigide  $C$  que l'on déforme dans une induction qui peut être inhomogène mais reste constante dans le temps. On a encore à tout instant  $t$  :

$$e = \int_C \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{l} = - d\Phi / dt \tag{2.60}$$

où  $\Phi$  est le flux qui traverse une surface quelconque s'appuyant sur le circuit  $C(t)$  considéré, à l'instant  $t$ . Rappelons que  $\Phi$  ne dépend pas du choix de la surface, car  $\mathbf{B}$  est à flux conservatif.  $\mathbf{E}_L$  est le champ de Lorentz. Là encore, la tension induite dans le circuit est égale à  $e$ .

Il est remarquable de constater que, dans la relation (2.60), seule intervient la vitesse instantanée de variation du flux à travers le circuit C. Or on peut faire varier ce flux, non plus en déformant le circuit dans une induction permanente, mais en faisant varier l'induction elle-même, le circuit restant inchangé, ce qui constitue *a priori* une expérience différente.

### 2.1.3. Champ électrique créé par une induction variable

C'est Faraday qui a démontré expérimentalement l'existence d'un tel effet, mais sa formulation est due à Lenz. La loi de Lenz indique que, dans un circuit fermé fixe soumis à une induction extérieure variable d'origine quelconque, il apparaît une force électromotrice induite donnée par :

$$e = \int_C \mathbf{E}_{em} d\mathbf{l} = -d\Phi/dt \quad (2.61)$$

où  $\Phi$  est encore le flux d'induction traversant toute surface s'appuyant sur C. On utilise ici les conventions habituelles de signe : le sens positif de la normale à la surface étant choisi arbitrairement, le sens positif de circulation sur C est le sens trigonométrique.

Il est convenu de qualifier le champ  $\mathbf{E}_{em}$  défini par (2.61) d'électromoteur alors que magnéto-induit serait encore une fois plus explicite sinon plus élégant. En tous cas ces qualificatifs sont nécessaires pour distinguer le champ en question du champ de Lorentz car les deux situations sont *a priori* distinctes.

La formulation de Lenz peut laisser croire que le champ électromoteur n'existe qu'en présence du circuit. Evidemment il n'en est rien, le conducteur ne doit être considéré que comme un réservoir de charges mobiles servant à révéler l'existence de ce champ électromoteur.

Imaginons en effet que dans l'espace vide où règne une induction variable  $\mathbf{B}$ , on place une charge électrique unique q. La force  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{em}$  qui s'exerce sur la charge est définie et mesurable ; on peut donc, en chaque point de l'espace, déterminer le champ électromoteur  $\mathbf{E}_{em}$ .

La relation (2.61) est en fait applicable sur un contour fermé quelconque pas nécessairement matérialisé par un circuit, elle s'écrit encore en explicitant le flux  $\Phi$  :

$$e = \int_C \mathbf{E}_{em} d\mathbf{l} = -\int_S (\partial\mathbf{B} / \partial t) d\mathbf{S} \quad (2.62)$$

ce qui, d'après un théorème d'analyse vectorielle bien connu, conduit à :

$$\text{rot } \mathbf{E}_{em} = -(\partial\mathbf{B} / \partial t) \quad (2.63)$$

On peut évidemment s'interroger sur la raison profonde de la similitude des formules (2.60) et (2.61). On réalise alors qu'une question clef est la définition de la vitesse  $\mathbf{v}$  qui intervient dans la formule (2.58). Nous avons déjà écrit que c'était la vitesse par rapport aux sources créant l'induction  $\mathbf{B}$ . Mais encore faut-il préciser de quelles sources on parle.

Si dans l'expérience de Faraday, on crée l'induction variable *en modulant le courant* dans une bobine, on ne voit pas comment attribuer à  $\mathbf{v}$  un autre module que zéro si l'on admet que les sources pertinentes sont les éléments de courant. On doit alors considérer que les situations examinées dans ce paragraphe et le précédent sont complètement différentes et on ne comprend pas l'analogie entre (2.60) et (2.61).

En revanche, si l'on admet que les sources pertinentes sont les masses magnétiques introduites au paragraphe 1.1.7, et qu'elles obéissent au principe de conservation, alors on est conduit à la conclusion que les expériences de type Lorentz (déplacement du conducteur) ou Faraday ne sont pas en réalité distinctes.

En effet, la seule façon de faire varier l'induction produite par des masses magnétiques qui se conservent est de déplacer lesdites masses par rapport au circuit. On retrouve alors tout naturellement une notion de vitesse relative dans l'expérience de Faraday et on vérifie bien que le champ électromoteur se ramène au champ de Lorentz.

Bien entendu cette interprétation soulève une difficulté, celle de faire appel aux masses magnétiques, sources fictives, en lieu et place des seules sources qui ont en magnéto-statique une réalité physique vérifiée, les courants.

De plus il est peu satisfaisant de devoir admettre qu'une induction constante et homogène – produite par exemple par une double nappe de courant – produise des effets électriques différents selon qu'elle est créée par des nappes fixes ou mobiles.

Ces difficultés disparaissent dans la théorie de la relativité restreinte où les seules sources élémentaires reconnues de *tous* les champs sont en définitive les charges électriques. Le lecteur désirant approfondir cette question pourra consulter la référence [6].

#### 2.1.4. Induction magnétique créée par un champ électrique variable

Les deux effets de couplage électromagnétique que nous avons vus plus haut concernaient l'induction d'effets électriques par le magnétisme. Inversement, un champ électrique variable induit des effets magnétiques. C'est en tous cas l'hypothèse de Maxwell confirmée par ses conséquences. Elle se formule de la façon suivante :

$$\int_C \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S (\partial \mathbf{E} / \partial t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \int_S (\partial \mathbf{E} / \partial t) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{B}_e$  est l'induction créée par le champ électrique variable  $\mathbf{E}$ .  $C$  est un contour fermé arbitraire limitant la surface  $S$  également arbitraire. On notera que cette équation n'est rien d'autre que l'expression du théorème d'Ampère sous la forme (2.5) avec

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_b = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (2.65)$$

Le vecteur  $\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D}$  est appelé induction électrique (electric displacement en anglais). On voit qu'une induction électrique variable *dans le vide* joue le même rôle qu'un courant de particules chargées de densité  $\mathbf{j}_b$  égale à  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ . On l'en distingue néanmoins en l'appelant *courant de déplacement*.

### 2.1.5. Equations de Maxwell dans le vide

Il est intéressant de chercher à établir des équations qui relient les seules *observables*, c'est-à-dire les *champs totaux*.

Pour cela on admet que le champ électrique total  $\mathbf{E}$  est la somme d'un champ *électrostatique*, donc à rotationnel nul et divergence égale à  $\rho/\epsilon_0$  (où  $\rho$  est la densité volumique de charges instantanée), et d'un champ électromoteur, à divergence nulle, dont le rotationnel est donné par (2.63) où  $\mathbf{B}$  est l'induction *totale*.

De même, l'induction magnétique totale  $\mathbf{B}$  est la somme d'une induction *magnéto-statique*, c'est-à-dire vérifiant les équations (2.8) et (2.10), et d'une induction électro-induite qui vérifie l'équation (2.64) (ou sa forme différentielle  $\text{rot } \mathbf{B}_e = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ ), où  $\mathbf{E}$  est encore le champ électrique *total*. On est ainsi conduit aux fameuses équations de Maxwell écrites ici dans le vide en présence de courants réels (de densité  $\mathbf{j}$ ) et de charges électriques réelles (de densité  $\rho$ ) :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t) \\ \text{div } \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \quad ; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

En l'absence de sources, on a évidemment :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \\ \text{div } \mathbf{E} &= \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

La plus spectaculaire conséquence de ces équations est l'existence du phénomène de propagation couplée des champs magnétique et électrique à vitesse finie  $c$  égale à  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ . Les effets de propagation ne seront pas abordés - sauf de manière très ponctuelle - dans cet ouvrage, mais le lecteur intéressé est invité à consulter notamment les références [6] et [7].

### 2.1.6. Couplage électromagnétique dans la limite des phénomènes lents ; énergie magnétique

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème de l'énergie magnétique dans le vide. Pour cela, nous considérons à nouveau le modèle de la double nappe de courant (figure 2.4-b) et nous nous posons la question suivante : quelle énergie faut-il fournir aux charges mobiles dans les deux nappes pour passer de la situation  $\mathbf{j}_s = 0$  et donc  $\mathbf{B} = 0$  partout, à la situation  $\mathbf{j}_s = \bar{\mathbf{j}}_s \neq 0$  et donc  $\mathbf{B} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}_s$ , seulement entre les nappes ? Si on exclut l'énergie *cinétique* des porteurs de charge *de masse non nulle* qui créent la densité de courant  $\bar{\mathbf{j}}_s$ , ainsi évidemment que la dissipation par frottement, on peut considérer que l'énergie fournie en question est *l'énergie magnétique associée à la création* dans le vide de l'induction  $\mathbf{B}$ .

Traçons dans le plan  $Oxz$  contenant à la fois la normale aux nappes et le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}_s$  une boucle rectangulaire de hauteur  $e$  et de longueur unité s'appuyant sur les deux nappes (figure 2.24, où  $e$  n'est pas la force électromotrice  $\mathcal{E}$ ). Compte tenu de la définition du repère  $Oxyz$ , le flux qui traverse cette boucle est  $-\mu_0 \mathbf{j}_s e$  et lorsque  $\mathbf{j}_s$  s'accroît de  $d\mathbf{j}_s$  en un temps  $dt$ , sa variation est  $-\mu_0 e d\mathbf{j}_s$ .

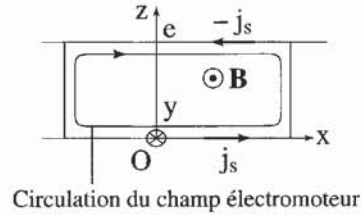


Figure 2.24 - Double nappe

D'après la loi de Lenz, il apparaît alors un champ électromoteur dont la circulation le long de la boucle considérée est égale à  $+\mu_0 e d\mathbf{j}_s / dt$ . Il est important de noter que :

- ◆ compte tenu de l'invariance du système dans toute translation parallèle au plan  $Oxy$  la contribution des branches verticales (parallèles à  $Oz$ ) de la boucle à la circulation du champ électromoteur est nulle ;
- ◆ pour la même raison, ce champ électromoteur est uniforme sur chacune des nappes ;
- ◆ le système est aussi invariant dans une rotation de  $\pi$  autour de tout axe parallèle à  $Oy$  et contenu dans le plan médian (de cote  $z = e/2$ ).

En conséquence si l'on désigne par  $E_{em}$  la composante tangentielle du champ électromoteur sur la nappe inférieure, cette même composante s'écrit  $-E_{em}$  sur la nappe supérieure, et la circulation considérée vaut  $-2 E_{em}$ .

On a donc  $E_{em} = -1/2 \mu_0 e d\mathbf{j}_s / dt$ , ce qui montre que le champ électromoteur s'oppose à l'augmentation du courant. Ainsi, pour augmenter  $\mathbf{j}_s$  de  $d\mathbf{j}_s$  en un temps  $dt$ , le milieu extérieur doit fournir un travail *contre* le champ électromoteur. Ce travail se calcule par unité de longueur de nappe dans la direction  $Oy$  et donc en définitive par unité de surface de la double nappe. C'est, à un infiniment petit du second ordre près, celui nécessaire au transport d'une densité linéique de charge  $\mathbf{j}_s dt$  le long de la boucle à savoir  $(\mu_0 e d\mathbf{j}_s / dt) \mathbf{j}_s dt = \mu_0 e \mathbf{j}_s d\mathbf{j}_s$ . En intégrant ce travail élémentaire de zéro à  $\mathbf{j}_s$ , on trouve l'énergie magnétique par unité de surface de la double nappe  $(\mu_0 / 2) e \mathbf{j}_s^2$  qui s'exprime encore en fonction de l'induction sous la forme  $e B^2 / 2\mu_0$ . Ramenée à l'unité de volume dans la région où existe  $B$  (entre les nappes) l'énergie magnétique du vide s'écrit finalement, en fonction de l'induction  $B$  ou du champ  $H = B / \mu_0$  :

$$U' = B^2 / 2\mu_0 = \mu_0 H^2 / 2 \quad (2.68)$$

On montre que ce résultat, démontré ici pour une configuration particulière, est tout à fait général. L'énergie qu'il faut communiquer aux charges mobiles dans un circuit quelconque pour créer le courant  $I$  et donc l'induction  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  ou bien le champ  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  s'exprime comme l'intégrale sur tout l'espace d'une densité volumique donnée par l'équation (2.68).

Soulignons encore que cette intégrale ne représente que la partie strictement magnétique de l'énergie de création de l'induction. La contribution *cinétique* associée aux porteurs de charge *de masse non nulle* est d'ailleurs tout à fait négligeable dans les circuits macroscopiques. On verra qu'il n'en est plus de même au niveau atomique.

Enfin il est bon de préciser le sens de l'expression "dans la limite des phénomènes lents" que nous employons dans le titre de ce paragraphe. Dans le cas du modèle de la double nappe, on montre à l'aide des équations de Maxwell que si le courant final  $\bar{j}_s$  est atteint en un temps  $t$  comparable à  $e/c$ , c'est-à-dire à la *durée de propagation* entre les deux nappes, l'énergie fournie aux charges est supérieure à celle donnée par (2.68). L'excédent correspond à une énergie *rayonnée* de part et d'autre de la nappe. Il tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

D'une façon générale, on n'arrive à la relation (2.68) que si le processus de mise en mouvement des charges est de durée très grande par rapport à un temps de propagation pertinent à l'intérieur du système considéré. Il s'agit là en fait d'une condition de réversibilité au sens de la thermodynamique. On qualifie souvent la densité d'énergie (2.68) de *magnétostatique*.

### 2.1.7. Forces déduites de l'énergie. Nature de l'énergie magnétique

Revenons encore au modèle de la double nappe (figure 2.24). L'application directe de la formule de Laplace donne immédiatement la pression  $P$  qu'une nappe exerce sur l'autre :

$$P = j_s B / 2 = B^2 / 2\mu_0 \quad (2.69)$$

Cette pression est répulsive. On serait tenté de la calculer en dérivant l'énergie par unité de surface ( $B^2/2\mu_0$ )  $e$  par rapport à  $e$ . On voit que cette méthode aurait donné une pression de même valeur absolue, mais de signe contraire !

La raison de ce désaccord vient du fait que l'on a négligé le couplage électromagnétique. En effet, dans le déplacement  $\delta e$ , il y a variation du flux canalisé entre les deux nappes et pour maintenir l'induction constante, donc le courant, il faut fournir au système une énergie extérieure supplémentaire.

Si  $P'$  est la pression *que l'on applique* à la nappe qui se déplace de  $\delta e$ , l'expression de l'énergie par unité de surface fournie par l'extérieur au système devient :  $P' \delta e + B j_s \delta e = P' \delta e + (B^2/\mu_0) \delta e$ . Le second terme correspond au travail fourni contre le champ électromoteur. C'est cette somme qui est égale à  $(B^2/2\mu_0) \delta e$ , donc :  $P' = - B^2/2\mu_0$  et  $P = - P' = B^2/2\mu_0$  en accord avec l'équation (2.69).

D'une façon générale, il est plus prudent de calculer les forces entre courants en utilisant directement la formule de Laplace, quand c'est possible. Si l'on souhaite passer par l'énergie, il faut tenir compte du couplage électromagnétique, ou utiliser le formalisme de Lagrange en traitant l'énergie magnétique associée aux courants macroscopiques comme une énergie *cinétique* [1].

### 2.1.8. Auto-induction

L'énergie magnétique stockée par un solénoïde allongé comportant  $n$  spires, de section  $S$ , et de longueur  $l$ , s'écrit d'après (2.21) et (2.68) :

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left( \mu_0 \frac{n}{l} \right)^2 I^2 S l = LI^2 / 2 \quad (2.70)$$

Cette relation définit le *coefficient d'auto-induction* (ou *self-inductance* en anglais) :

$$L = \mu_0 n^2 S / l \quad (2.71)$$

Cette définition se généralise à une bobine quelconque à condition toutefois que le diamètre du fil reste fini pour éviter la singularité des champs et de la densité d'énergie. Même dans ce cas, une autre difficulté peut apparaître : la valeur des champs va dépendre de la répartition exacte de la densité de courant dans les conducteurs ; ce point est discuté en détail par Durand [1].

En pratique, ces considérations restent toutefois de peu d'importance, et le coefficient d'auto-induction est en général assez bien défini par la relation :

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0}{2} \int H^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV \quad (2.72)$$

où l'intégrale est prise en excluant le volume des conducteurs. En introduisant le coefficient de champ  $C_H$  défini au § 1.1.5, il vient encore :

$$L = \mu_0 \int (C_H)^2 dV \quad (2.73)$$

Le coefficient  $L$  peut aussi être défini en exprimant directement le travail qu'il faut fournir contre la force électromotrice lorsque l'on augmente  $I$  de  $dI$  en un temps  $dt$ , soit  $(d\Phi/dt)I dt = I d\Phi$ . Ici  $\Phi$  est le flux engendré à travers la bobine par son propre courant (d'où le terme d'auto-induction).

Il vient donc  $dW = L I dI = I d\Phi$  et par conséquent, puisque  $\Phi$  s'annule avec  $I$  :

$$\Phi = LI \quad (2.74)$$

Les relations (2.73) et (2.74) sont bien entendu équivalentes mais pas toujours d'une égale commodité.

### 2.1.9. Mutuelle induction

Considérons deux circuits quasi-filiformes  $C_1$  et  $C_2$  dans lesquels circulent les courants  $I_1$  et  $I_2$  respectivement. Si  $C_{H1}$  et  $C_{H2}$  sont les coefficients vectoriels de champ de chacun des circuits au point courant, l'énergie magnétique totale s'écrit :

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int (C_{H1}I_1 + C_{H2}I_2)^2 dV = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (2.75)$$

avec :

$$L_1 = \mu_0 \int C_{H1}^2 dV ; L_2 = \mu_0 \int C_{H2}^2 dV ; M = \mu_0 \int C_{H1} C_{H2} dV \quad (2.76)$$

$L_1$  et  $L_2$  sont les coefficients d'auto-induction de chacun des circuits pris isolément, et  $M$  un nouveau coefficient dit *de mutuelle induction*. Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont les flux traversant respectivement  $C_1$  et  $C_2$ , on peut écrire par ailleurs, de la façon la plus générale compte tenu de la linéarité des équations de la magnétostatique :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \quad ; \quad \Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \quad (2.77)$$

Lorsque  $I_1$  et  $I_2$  varient respectivement de  $dI_1$  et de  $dI_2$ , le travail à fournir contre le champ électromoteur s'écrit, d'après les équations (2.59), (2.75) et (2.77) :

$$\begin{aligned} dW &= I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = I_1 (L_1 dI_1 + M_{12} dI_2) + I_2 (L_2 dI_2 + M_{21} dI_1) \\ &= L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M(I_1 dI_2 + I_2 dI_1) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Par identification, on démontre la réciprocité de l'induction mutuelle :

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (2.79)$$

### 2.1.10. Moments magnétiques spontanés et induits

Comme modèle simple de moment magnétique microscopique considérons un tube cylindrique d'axe  $Oz$ , de section  $S$  et de longueur  $l$  supportant un courant *spontané* circonférentiel  $I_0$ . On suppose que  $I_0$  est dû à des porteurs de masse nulle se déplaçant sans frottement sur la surface du cylindre (perpendiculairement à  $Oz$ ). Si  $l \gg S^{1/2}$ , l'énergie propre du moment se réduit à  $W = (\mu_0/2)(S/l)I_0^2$ , soit  $W = (\mu_0/2)(\mathbf{m}_0^2/V)$  où  $\mathbf{m}_0 = SI_0$  est le module du moment spontané associé à  $I_0$ . On note déjà que  $W$  tend vers l'infini lorsqu'à  $\mathbf{m}_0$  constant, on fait tendre le volume  $V = Sl$  du cylindre vers zéro.

Appliquons parallèlement au moment une induction extérieure  $B$ . La loi de Lenz appliquée à notre modèle donne simplement  $\mu_0 \Delta I / l = -B$  où  $\Delta I$  est la variation de courant induite par  $B$ . La variation relative de courant - et donc celle du moment - est  $\Delta I / I_0 = Bl / \mu_0 I_0 = BV / \mu_0 \mathbf{m}_0$ . On voit que la variation relative du moment induite par  $B$  tend vers zéro en même temps que  $V$ , à moment spontané  $\mathbf{m}_0$  donné. Le moment  $\mathbf{m}$  reste alors pratiquement égal à  $\mathbf{m}_0$ , indépendamment de l'induction qu'il subit. C'est pour cette raison qu'on le qualifie aussi de *rigide*.

Nous n'avons pas tenu compte ici de l'énergie cinétique associée à des porteurs de masse non nulle. Par ailleurs en compliquant le modèle, on peut même introduire diverses autres formes d'énergie interne (énergie potentielle).

La prise en compte de ces énergies supplémentaires ne modifie toutefois pas qualitativement la conclusion essentielle de ce paragraphe : l'existence des moments spontanés rigides à l'échelle atomique peut se concevoir en conformité avec la loi de l'induction comme résultant de la présence d'un réservoir d'énergie interne - de grande contenance - qui absorbe ou fournit pratiquement à moment constant le travail du champ électromoteur.

On verra que les moments atomiques spontanés sont à l'origine des propriétés des matériaux fortement magnétiques. En particulier, on verra que les processus

d'aimantation dans ces matériaux apparaissent en dernier ressort comme des *rotations* de moments spontanés.

Si l'on pose  $I_0 = 0$  dans le modèle simple défini au début de ce paragraphe, il n'y a plus de moment spontané et le seul moment qui apparaît en présence de l'induction appliquée  $\mathbf{B}$  est  $\mathbf{m} = -\mathbf{BV}/\mu_0 = -V\mathbf{H}$ , où  $\mathbf{H}$  est le champ appliqué. On parle alors de moment induit et l'on peut introduire par analogie avec l'électrostatique la polarisabilité magnétique  $\alpha = \mathbf{m}/\mathbf{H}$ . On a déjà expliqué plus haut (paragraphe 1.3.1) pourquoi on choisit  $\mathbf{H}$  plutôt que  $\mathbf{B}$  pour mesurer l'excitation.

On constate alors que  $\alpha$  se réduit à  $-V$  : en particulier le moment induit est opposé à l'induction ou au champ appliqué. C'est la raison pour laquelle on parle ici de diamagnétisme. Toutefois, la polarisabilité diamagnétique atomique donnée par ce modèle simple est très largement surestimée car on n'a pas tenu compte de l'énergie cinétique et potentielle des électrons. Si l'on en tient compte, on trouve que  $\alpha$ , tout en restant négatif, est réduit d'un facteur de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$  par rapport à la valeur précédente.

Dans la suite de cet ouvrage, il sera surtout question de matériaux fortement magnétiques, dont l'aimantation est due comme nous l'avons déjà écrit plus haut à la mise en ordre de moments atomiques spontanés et dans lesquels le diamagnétisme apparaîtra dans la majorité des cas comme un phénomène négligeable.

### 2.1.11. *Energie d'un moment rigide dans une induction donnée*

L'énergie du moment  $\mathbf{m}$  dans l'induction  $\mathbf{B}$  est par définition le travail fourni (au sens algébrique du terme) par le moment au système extérieur lorsqu'il s'éloigne à l'infini où  $\mathbf{B}$  est supposé nul. On vient de voir que pour un moment rigide la conservation du module de  $\mathbf{m}$  n'implique pas d'échange d'énergie avec le milieu extérieur. L'énergie cherchée se réduit donc au travail de la seule force donnée par l'équation (2.28), ce qui donne immédiatement :

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (2.80)$$

### 2.1.12. *Energie d'interaction dipolaire*

Nous serons amenés dans la suite de cet ouvrage à évoquer souvent l'*interaction dipolaire*. Ce terme pouvant prêter à confusion, nous apportons ici quelques précisions indispensables. Un dipôle 1, de moment rigide  $\mathbf{m}_1$  étant placé en  $\mathbf{r}_1$  et un dipôle 2 de moment rigide  $\mathbf{m}_2$  en  $\mathbf{r}_2$ , on définit leur énergie mutuelle ou d'interaction par les expressions équivalentes :

$$E_D = -\mathbf{m}_1 \mathbf{B}_{12} = -\mathbf{m}_2 \mathbf{B}_{21} = -(\mathbf{m}_1 \mathbf{B}_{12} + \mathbf{m}_2 \mathbf{B}_{21})/2 \quad (2.81)$$

Ici  $\mathbf{B}_{12}$  et  $\mathbf{B}_{21}$  sont les inductions créées respectivement en  $\mathbf{r}_1$  par  $\mathbf{m}_2$  et en  $\mathbf{r}_2$  par  $\mathbf{m}_1$ . On notera que la première des expressions (2.81) est celle de l'énergie au sens défini dans le paragraphe précédent du moment  $\mathbf{m}_1$  dans l'induction créée par  $\mathbf{m}_2$ . Réciproquement la deuxième expression est celle de l'énergie du moment  $\mathbf{m}_2$  dans

l'induction créée par  $\mathbf{m}_1$ . Il est bien sûr indifférent d'éloigner le deuxième dipôle à l'infini, le premier étant fixe ou bien de faire le contraire, d'où la deuxième égalité dans (2.81). On parlera d'énergie dipolaire de paire à propos des expressions (2.81).

Il est instructif d'examiner la situation où les moments de la paire sont parallèles et à une distance constante  $d$ . Il existe alors deux configurations remarquables, qualifiées respectivement de polaire et d'équatoriale.

Dans la configuration polaire chacun des moments est sur l'axe de l'autre. Pour simplifier on admet aussi qu'ils ont même module  $m$ , l'énergie d'interaction est alors  $-2\mu_0 m^2 / 4\pi d^3$  d'après (2.81) et (2.24).

Dans la configuration équatoriale chacun des moments est dans le plan équatorial (perpendiculaire à l'axe) de l'autre. L'énergie d'interaction est  $+\mu_0 m^2 / 4\pi d^3$ .

Ainsi la configuration polaire est d'énergie plus faible que la configuration équatoriale ; on montre plus généralement que c'est la configuration d'énergie minimale de deux moments libres en rotation, mais maintenus à distance constante.

Considérons maintenant le cas plus général d'un ensemble quelconque de  $n$  dipôles, de moments  $\mathbf{m}_i$  placés en  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). L'énergie dipolaire d'un tel ensemble est aussi par définition le travail à fournir contre les forces d'interaction pour rassembler dans leurs positions finales les dipôles provenant de l'infini. Elle est égale à la somme des énergies de toutes les paires distinctes, c'est-à-dire :

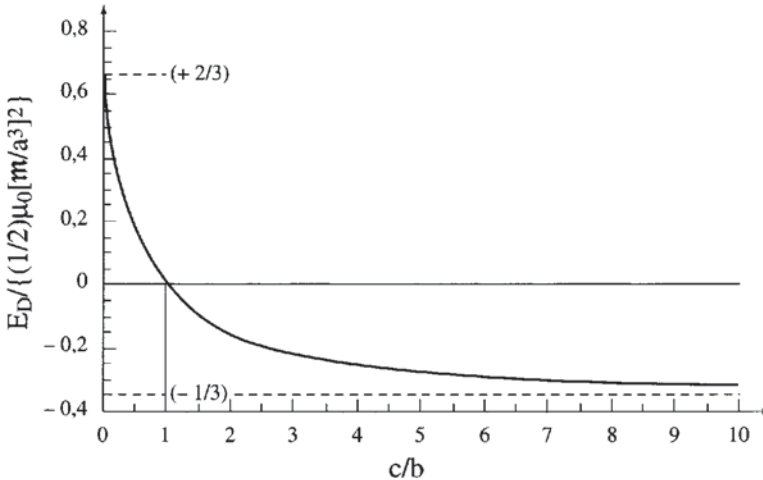
$$E_D = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \mathbf{m}_i \mathbf{B}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{B}_i \quad ; \quad \mathbf{B}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{B}_{ij} \quad (2.82)$$

Ici  $\mathbf{B}_{ij}$  est l'induction créée sur le site du moment  $i$  par le moment  $j < i$ . La dernière expression fait intervenir l'induction  $\mathbf{B}_i$  créée sur le site  $i$  considéré par tous les dipôles autres que  $i$ .

Nous allons considérer une situation sur laquelle nous reviendrons largement dans la suite, celle du réseau de moments. Soit un *échantillon* constitué de moments parallèles et de même module  $m$  placés aux nœuds d'un réseau cubique de paramètre de maille  $a$ . On pourrait penser que pour un échantillon infini (en pratique de dimensions très supérieures à  $a$ ) la notion de densité d'énergie d'interaction dipolaire ait un sens précis. En fait il n'en est rien : on trouve que la densité d'énergie calculée à partir de l'équation (2.82), où  $\mathbf{B}_{ij}$  est donné par (2.24), dépend de la forme de l'échantillon même si ses dimensions sont très supérieures à  $a$ . Dans le cas d'un ellipsoïde, la densité d'énergie considérée se calcule analytiquement.

Nous ne ferons ici qu'illustrer le résultat pour un ellipsoïde de révolution dont l'axe est parallèle aux moments. La figure 2.25 donne la densité réduite d'énergie dipolaire  $E_D / \{(\mu_0/2) [m/a^3]^2\}$  en fonction du rapport  $c/b$ , où  $c$  est la longueur de l'axe de révolution et  $b$  celle de l'autre axe de l'ellipsoïde. On constate que cette densité est maximum pour  $c/b = 0$  c'est-à-dire pour un ellipsoïde plat. Elle décroît lorsque  $c/b$  augmente et s'annule pour  $c/b = 1$ , c'est-à-dire pour une sphère. Lorsque  $c/b \rightarrow \infty$  la densité d'énergie dipolaire tend vers une valeur négative.

Ce comportement est à rapprocher de celui discuté plus haut de l'énergie dipolaire de paire. On comprend que l'énergie de l'ellipsoïde allongé est plus faible que celle de l'ellipsoïde aplati (à volume égal) parce que les configurations polaires de faible énergie y sont plus fortement représentées.



**Figure 2.25 - Energie d'interaction dipolaire réduite d'un réseau cubique de dipôles parallèles et de même moment  $m$**

Le réseau a pour paramètre de maille  $a$ , et remplit un ellipsoïde de révolution de diamètre  $b$ , et dont la longueur selon l'axe de symétrie est  $c$ .

On verra dans la suite qu'il sera commode de considérer l'énergie dipolaire d'un réseau comme la somme de deux contributions. Une contribution dite *intrinsèque* qui est la valeur minimum correspondant à un ellipsoïde infiniment allongé ( $c/b \rightarrow \infty$ ) et une énergie dite magnétostatique ou encore "de champ démagnétisant" qui n'est autre que celle nécessaire pour passer de l'ellipsoïde infiniment allongé à la forme de l'échantillon considéré, le nombre de dipôles (et le volume du réseau) étant conservé.

## 2.2. ENERGIE, FORCES ET COUPLES DANS LES SYSTÈMES MAGNÉTIQUES

Par système magnétique on entend, dans le cas le plus général, un ensemble comportant à la fois des courants (sous forme de distributions continues ou de circuits filiformes) et de la matière aimantée constituée de moments spontanés et de moments induits au sens du paragraphe 2.1.10. On trouvera dans l'ouvrage de Durand [1] un traitement très complet de l'énergie, des forces et des couples dans un tel système. Nous nous contenterons ici d'examiner les situations les plus importantes en pratique, en commençant par les plus évidentes.

### 2.2.1. Calcul direct des couples et des forces dans un système magnétique

Par calcul direct, on entend l'application de la formule de Laplace (2.3) et de celles qui en dérivent (2.27) et (2.28). Cette méthode s'applique immédiatement à la détermination des couples et des forces au sein d'un système constitué de circuits rigides et de solides aimantés. Pour des éléments rigides en effet, la force  $\mathbf{F}_i$ , et le couple  $\mathbf{\Gamma}_i$  ramenés en un point de référence donné, sont des quantités directement mesurables. Pour un circuit rigide  $C_i$ , il résulte des lois fondatrices que :

$$\mathbf{F}_i = \int_{C_i} Idl \times \mathbf{B}_i \quad ; \quad \mathbf{\Gamma}_i = \int_{C_i} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times Idl \times \mathbf{B}_i \quad (2.83)$$

où  $\mathbf{B}_i$  est l'induction créée par les éléments autres que le circuit considéré.  $\mathbf{r}$  définit le point courant et  $\mathbf{r}_i$  le point de référence.

Pour un élément  $V_i$  constitué de matière solide, les formules (2.27) et (2.28), qui dérivent directement de la loi de Laplace s'appliquent immédiatement. Il est commode d'écrire d'abord la force et le couple élémentaires qui s'exercent sur un volume  $dV$  de matière :

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{M}dV \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{B}_i \quad ; \quad d\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M} dV \times \mathbf{B}_i \quad (2.84)$$

où  $\mathbf{B}_i$  est encore une fois l'induction créée par tous les éléments du système autres que  $i$ . On intègre ensuite sur le volume de l'élément considéré :

$$\mathbf{F}_i = \int d\mathbf{F}_i \quad ; \quad \mathbf{\Gamma}_i = \int \{ d\mathbf{\Gamma}_i + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times d\mathbf{F}_i \} \quad (2.85)$$

où  $\mathbf{r}_i$  définit le point de référence pour l'élément  $i$ .

On démontre qu'il revient au même d'utiliser les masses magnétiques équivalentes à la distribution d'aimantation. Rappelant que les densités de masses magnétiques équivalente à une distribution donnée sont  $\rho_m = -\text{div } \mathbf{M}$ , et  $\sigma_m = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}$ , respectivement en volume et en surface, il vient avec des notations évidentes :

$$\mathbf{F}_i = \int_{V,S} (\rho_m dV + \sigma_m dS) \mathbf{B}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}_i = \int_{V,S} (\rho_m dV + \sigma_m dS) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{B}_i$$

Là encore l'induction  $\mathbf{B}_i$  est celle produite par tous les éléments du système, à l'exception de celui que l'on considère. On voit que ces méthodes directes ne sont utilisables que si l'on connaît non seulement les champs et l'aimantation en tous points, mais aussi les contributions respectives de tous les éléments du système. On en trouvera une illustration dans l'exercice 14.

#### Force de Lorentz au sein de la matière

Il s'agit là encore d'une situation où le calcul de la force est immédiat. En effet, une particule de charge électrique  $q$  traversant la matière aimantée avec la vitesse  $\mathbf{v}$  est soumise à la force instantanée  $q \mathbf{v} \times \mathbf{b}$  où  $\mathbf{b}$  est l'induction microscopique. Si le trajet de la particule dans la matière est de longueur très supérieure à une distance interatomique, il est évident que tout se passe en moyenne comme si la particule était soumise à la force  $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . En particulier dans un échantillon aimanté, en l'absence

de champ magnétique la force est directement  $q \mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{M}$ . Nous avons déjà indiqué que cet effet était mis à profit en microscopie électronique dite de Lorentz [4].

### 2.2.2. L'énergie d'aimantation de la matière et l'énergie de champ démagnétisant

Considérons, pour fixer les idées, un échantillon de matière magnétique en forme d'ellipsoïde de révolution autour d'un axe Oz, de coefficient de champ démagnétisant N selon cet axe, et posons-nous la question : *L'échantillon étant initialement désaimanté, quelle énergie faut-il lui fournir pour lui conférer une aimantation uniforme  $M_0$  selon Oz ?*

Cette énergie sera par définition son *énergie d'aimantation*. Nous allons montrer qu'il est commode de la considérer comme la somme de deux contributions. Pour cela, supposons que l'aimantation résulte de la mise en ordre de moments atomiques spontanés. Découpons par la pensée notre échantillon en *tubes d'aimantation* élémentaires (figure 2.26) de section  $dS$  et d'axes parallèles à Oz. Concrètement, on peut imaginer que chaque tube élémentaire traverse tout l'échantillon et a une section carrée de côté  $da$  très inférieur à la longueur des axes principaux de l'ellipsoïde, mais néanmoins très supérieur à la distance interatomique. L'échantillon est alors constitué initialement d'un pavage compact de  $S/(da)^2$  tubes élémentaires d'aimantation, S étant l'aire de la section droite perpendiculaire à Oz au centre de l'échantillon.

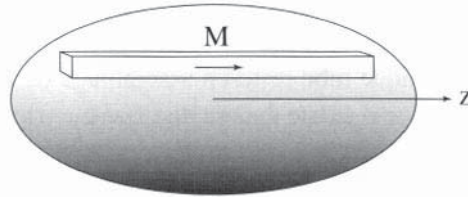


Figure 2.26 - Découpage d'un ellipsoïde aimanté en tubes d'aimantation élémentaires

Supposons maintenant que l'on prélève et que l'on envoie à l'infini une petite fraction de volume total  $dV$  de ces tubes élémentaires, en prenant soin de répartir bien régulièrement les prélèvements au sein du pavage. On réduit ainsi de manière uniforme l'aimantation macroscopique  $\mathbf{M}$  de l'échantillon. On a, si  $V$  est le volume de l'ellipsoïde,  $d\mathbf{M} = -\mathbf{M}_0(dV/V)$ . Le travail que *recueille* (au sens algébrique du terme) l'opérateur qui prélève et éloigne à l'infini un tube élémentaire est, d'après l'équation (2.80),  $dW_d = -d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_i$ , où  $d\mathbf{m}$  est le moment magnétique du tube, et  $\mathbf{B}_i$ , l'induction que le reste de l'échantillon crée au niveau du tube considéré. Rappelons que nous traitons ici les moments comme des moments rigides au sens du § 2.1.10.

$\mathbf{B}_i$  est donc l'induction régnant dans une cavité cylindrique d'axe parallèle à Oz, donc à  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}$ . Nous avons vu au paragraphe 1.2.3 que  $\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}$ , où  $\mathbf{H}$  est le champ dans la matière d'aimantation  $\mathbf{M}$ . Comme  $\mathbf{M}$  est la seule source considérée de champ,  $\mathbf{H}$  est aussi par définition le champ démagnétisant  $\mathbf{H}_d$ .

Si  $dV$  est le volume total de tubes prélevé pour réduire  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{M}_0 dV$ , il vient :

$$dW_d = -\mu_0 \mathbf{M}_0 dV \cdot \mathbf{H}_d = +\mu_0 d\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_d V \quad (2.86)$$

Et comme  $\mathbf{H}_d = -\mathbf{NM}$ ,  $dW_d = -\mu_0 \mathbf{NM} \cdot d\mathbf{M}$ , et finalement après intégration, on obtient l'énergie :

$$W_d = -\mu_0 \int_{M_0}^0 \mathbf{NM} \cdot d\mathbf{M} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{NM}_0^2 V = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M}_0 V \quad (2.87)$$

Nous obtenons bien ici l'énergie  $W_d$  positive qui, à l'inverse doit être *fournie*, pour *reconstruire* l'échantillon en rassemblant les tubes élémentaires déjà aimantés, que nous appellerons par définition *l'énergie de champ démagnétisant*. On utilise aussi les termes *d'énergie magnétostatique* et parfois malheureusement *d'énergie dipolaire*. Remarquons que chaque tube d'aimantation isolé se caractérise par un coefficient de champ démagnétisant nul selon son axe. Il ne comporte donc plus d'énergie de champ démagnétisant. Le lecteur pourra ainsi vérifier que la définition donnée ici, de cette énergie, rejoint celle déjà énoncée au paragraphe (2.1.12). Cela dit, chaque tube reste un assemblage de moments atomiques, entre lesquels de toute évidence il existe encore une énergie d'interaction.

Nous avons vu au paragraphe (2.1.12) qu'il subsistait effectivement une contribution d'origine *dipolaire* que nous sommes convenus de baptiser intrinsèque. On verra dans les chapitres suivants en particulier dans l'étude du ferromagnétisme que dans cette *configuration intrinsèque de barreau infiniment allongé*, il existe d'autres contributions à l'énergie, dont nous nous contenterons ici de citer sans plus d'explication les deux principales à savoir l'énergie d'échange et l'énergie d'anisotropie.

Il est en tous cas naturel de baptiser énergie intrinsèque d'aimantation l'énergie qu'il faut fournir à un barreau infiniment allongé pour passer de l'état désaimanté ( $\mathbf{M} = 0$ ) à l'état d'aimantation non nulle  $\mathbf{M}$ . On suppose ici que la seule variable  $\mathbf{M}$  définit parfaitement l'état du système, ce qui ne sera pas toujours le cas comme on le verra dans la suite.

La forme de la densité d'énergie magnétostatique donnée par l'équation (2.87) a été démontrée pour un échantillon ellipsoïdal uniformément aimanté et isolé. Elle se généralise au cas d'un échantillon quelconque aimanté de façon non uniforme et même au cas de plusieurs échantillons distincts en interaction :

$$W'_d = -(\mu_0/2) \mathbf{H}_d \mathbf{M} \quad (2.88)$$

expression dans laquelle  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}_d$  dépendent du point considéré.

Une variation infinitésimale  $d\mathbf{M}(\mathbf{r})$  de  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  produit inévitablement une variation  $d\mathbf{H}_d(\mathbf{r})$  de  $\mathbf{H}_d(\mathbf{r})$ . On a donc  $dW'_d = -(\mu_0/2)(\mathbf{H}_d d\mathbf{M} + \mathbf{M} d\mathbf{H}_d)$ .

Mais pour passer de  $\mathbf{M}$  à  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$  (et donc de  $\mathbf{H}_d$  à  $\mathbf{H}_d + d\mathbf{H}_d$ ), on peut imaginer de rassembler d'abord à l'infini des moments créant la distribution  $d\mathbf{M}$ , ce qui n'exige qu'un travail du second ordre en  $d\mathbf{M}$ . On peut ensuite soit transporter la distribution  $d\mathbf{M}$  jusqu'à sa position finale superposée à  $\mathbf{M}$ , soit faire l'inverse, transporter  $\mathbf{M}$  sur  $d\mathbf{M}$ . Dans le premier cas, le travail associé au transport est  $\mu_0 \int_V \mathbf{H}_d d\mathbf{M} dV$  et dans le deuxième cas  $\mu_0 \int_V \mathbf{M} d\mathbf{H}_d dV$ .

On trouve donc :

$$dW_d' = -(\mu_0/2) (\mathbf{H}_d d\mathbf{M} + \mathbf{M} d\mathbf{H}_d) = -\mu_0 \mathbf{H}_d d\mathbf{M} \quad (2.89)$$

Nous verrons dans la suite que le champ démagnétisant et l'énergie qui lui est associée sont à l'origine des *domaines* dans les matériaux ferromagnétiques.

### Energie d'aimantation intrinsèque

Rappelons la signification de la densité d'énergie donnée par l'équation (2.88) : c'est celle qu'il faut fournir pour rassembler des tubes élémentaires de matière ayant déjà l'aimantation  $\mathbf{M}$  (parallèle au tube). Nous ne comptons donc pas l'énergie qui a été nécessaire pour aimanter les tubes élémentaires, ce que nous avons appelé plus haut l'énergie intrinsèque d'aimantation. Pour donner une signification concrète à cette énergie, nous considérons un échantillon de matière magnétique en forme de barreau très allongé de section  $S$  sur lequel on bobine un solénoïde comportant  $n'$  spires par mètre. Le champ produit par un courant  $I$  dans la bobine est nul à l'extérieur du solénoïde et égal à  $n'I$  à l'intérieur (voir § 1.1.6.5). Comme nous venons de le voir, la présence du barreau très allongé ne modifie pas ce champ. Partant de la situation  $I = 0$  et  $\mathbf{M} = 0$ , on atteint l'aimantation  $\mathbf{M}$  en imposant le courant  $I$ . On admet pour simplifier que l'aimantation reste colinéaire au champ. Considérons le processus élémentaire réversible (au sens de la thermodynamique) dans lequel on passe de  $I$  à  $I + dI$  et de  $\mathbf{M}$  à  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$  ; l'énergie fournie au système par unité de longueur du solénoïde dans ce processus se réduit à :  $I d\Phi = I n' S dB = H_i S dB$ .

La notation  $H_i$  ( $i$  pour intrinsèque) rappelle que dans un processus réversible, on se déplace nécessairement sur la courbe de réponse statique du barreau allongé, celle qui caractérise précisément la réponse intrinsèque du matériau. La densité volumique d'énergie qui a été fournie au système bobine-échantillon pour atteindre l'état  $I, H, M, B$  est donc en définitive :

$$W' = \int_0^B H_i dB = \frac{1}{2} \mu_0 H_i^2 + \mu_0 \int_0^M H_i dM \quad (2.90)$$

Mais cette densité d'énergie doit être attribuée au système *vide plus matière* : elle se décompose en effet en un terme qui correspond à la création dans le vide du champ  $H_i$  et en un terme lié à la matière aimantée. C'est ce deuxième terme seul qu'il convient de considérer comme l'énergie intrinsèque d'aimantation.

Notons que d'un point de vue théorique, il n'est pas indispensable d'appliquer un champ pour aimanter un échantillon de matière : on peut imaginer d'appliquer directement à l'échelle microscopique les forces et les couples nécessaires à la rotation des moments spontanés. Dans ce cas l'énergie fournie à la matière se réduit bien à :

$$W'_i = \mu_0 \int_0^M H_i dM \quad (2.91)$$

Pour résumer, il est commode d'imaginer le processus d'aimantation d'un échantillon comme se déroulant en deux étapes :

- ◆ aimantation de tubes élémentaires isolés, ce qui implique la fourniture de la densité d'énergie (2.91),
- ◆ reconstruction de l'échantillon par rassemblement des tubes élémentaires, ce qui implique la fourniture de l'énergie de champ démagnétisant de densité donnée par (2.88).

Notons que, dans cette opération, nous n'avons pas à considérer le travail du champ électromoteur puisque les moments sont rigides au sens du paragraphe 2.1.10.

### 2.2.3. *Energie de Zeeman et énergie magnétostatique*

Soit un échantillon aimanté dans un champ extérieur nul et transportons-le dans le champ  $\mathbf{H}_0$ , pas nécessairement uniforme, l'aimantation étant maintenue constante.

Dans cette opération, on fournit d'après (2.80) le travail  $W_z = -\int_V \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0 dV$  qu'on appelle énergie de Zeeman. La densité d'énergie correspondante est :

$$W'_z = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0 \quad (2.92)$$

En définitive, la densité d'énergie fournie pour reconstruire *dans un champ extérieur*  $\mathbf{H}_0$  un échantillon aimanté en rassemblant des tubes élémentaires d'aimantation est la somme  $W'_m = W'_d + W'_z$ . On la qualifie souvent de magnétostatique.

### 2.2.4. *Couple magnétostatique agissant sur l'aimantation*

Considérons dans un système magnétique un échantillon de matière aimantée que nous assimilons à un réseau fini de moments parallèles, de module constant comme dans le paragraphe 2.1.12.

Contrairement à ce que nous avons fait dans les paragraphes précédents, nous devons en fait considérer cet échantillon comme formé de *deux systèmes découplés*, le réseau d'une part qui possède tous les degrés de liberté d'un solide, et l'aimantation d'autre part à laquelle sont associés deux degrés de liberté en rotation. La *densité* de couple à laquelle nous nous intéressons ici est celle qui agit sur l'aimantation seule et donc qui est produite par tous les autres composants du système considéré y compris le réseau portant l'aimantation. La densité cherchée  $\Gamma'$  se calcule donc à partir de la variation de la densité d'énergie magnétostatique dans une rotation infinitésimale  $d\omega$  de l'aimantation, le réseau (donc la matière) restant fixe.

Imposons au vecteur aimantation  $\mathbf{M}$  de l'échantillon une rotation infinitésimale  $d\omega$  de manière à produire en chaque point une variation  $d\mathbf{M} = d\omega \times \mathbf{M}$ .

D'après (2.88) et (2.89), il vient :

$$\begin{aligned} dW'_m &= \Gamma d\omega = -\mu_0 \left\{ (1/2) \mathbf{H}_d \cdot d\mathbf{M} + (1/2) \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{M} \right\} \\ &= -\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = -\mu_0 \mathbf{H} (d\omega \times \mathbf{M}) = \mu_0 (\mathbf{H} \times \mathbf{M}) d\omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

où  $-\Gamma$  est le couple appliqué par l'opérateur pour produire la rotation  $d\omega$ , et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_0$  est le champ total régnant au sein de la matière. D'où, par identification :

$$\Gamma = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (2.94)$$

Il s'agit donc là du couple que l'on peut qualifier de magnétostatique. Le couple total comporte aussi la contribution associée à l'énergie intrinsèque sur laquelle nous reviendrons dans les prochains chapitres.

### 2.2.5. Energie d'un système magnétique complet

Soit maintenant un système complet comportant de la matière aimantée constituée de moments atomiques rigides au sens du paragraphe 2.1.10, et des courants. On prend comme état de référence (à énergie nulle) celui où les courants et les aimantations sont nuls partout. Pour atteindre l'état considéré du système par un processus réversible au sens de la thermodynamique, on peut procéder en deux étapes : d'abord, on crée la distribution d'aimantation  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  sans appliquer de champ (selon le processus virtuel évoqué ci-dessus c'est-à-dire en appliquant à l'échelle microscopique sur chaque dipôle le couple nécessaire à son orientation). On fournit donc l'énergie intrinsèque d'aimantation de la matière, et l'énergie de champ démagnétisant.

Après quoi l'aimantation étant bloquée (ce qui pour des moments rigides ne nécessite aucune dépense d'énergie), on fait croître tous les courants de zéro à leurs valeurs nominales. Dans ce processus, on ne fournit que l'énergie magnétique  $(\mu_0 / 2) \int \mathbf{H}_0^2 dV$  où  $\mathbf{H}_0$  est le champ que produisent *les seuls courants* en l'absence de matière aimantée, l'intégrale étant prise sur la totalité du volume.

On voit que l'énergie totale du système reste égale à la somme de deux termes *indépendants*, l'énergie des courants et l'énergie des aimantations. Cette énergie totale ne dépend pas des positions relatives du sous-système des échantillons aimantés par rapport au sous-système des courants, chacun d'eux étant considéré comme rigide. Nous aurons l'occasion d'utiliser cette propriété dans des calculs de forces et de couples, mais pour le moment nous allons en déduire un théorème utile.

#### Théorème de réciprocité

Considérons le système simple formé par une seule bobine (créant dans le vide l'induction  $\mathbf{B}_0$ ) et un seul échantillon de matière aimantée. L'échantillon aimanté étant initialement loin de la bobine (où  $\mathbf{B}_0$  est nul), on le rapproche de celle-ci jusqu'à une position donnée où  $\mathbf{B}_0$  est non nul. D'après (2.92), on fournit pour cela le travail  $-\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 dV = -I \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_B dV$  où  $\mathbf{C}_B = \mu_0 \mathbf{C}_H$ ,  $\mathbf{C}_H$  étant le coefficient vectoriel de champ de la bobine défini par l'équation (2.16). Mais il faut tenir compte du phénomène d'induction et du travail nécessaire au maintien du courant  $I$  dans la bobine. Ce travail est égal à  $I \Delta \Phi$  où  $\Delta \Phi$  est en l'occurrence le flux envoyé

par l'échantillon dans la bobine. Comme on a vu plus haut que l'énergie du système ne dépendait pas de la position relative de la bobine et de l'échantillon aimanté, il vient nécessairement :  $I\Delta\Phi - I \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_B dV = 0$ , d'où la relation particulièrement intéressante, connue sous le nom de relation de réciprocité :

$$\Delta\Phi = \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_B dV \quad (2.95)$$

En fait, il ne s'agit là que d'une formulation simplifiée du théorème de réciprocité dont on trouvera ailleurs, notamment dans l'ouvrage de Durand [1], des formes beaucoup plus générales.

### 3. CALCULS ANNEXES

#### 3.1. CALCUL DE $\mathbf{B}_m$ HORS DE LA MATIÈRE

Hors de la matière, on peut considérer que l'on est loin des sources même près de la matière car celle-ci peut être divisée en éléments pratiquement aussi petits que l'on veut. Utilisant l'approximation dipolaire, on peut écrire, en généralisant l'expression du potentiel vecteur créé par un moment magnétique donnée dans l'équation (2.17) :

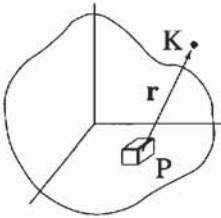


Figure 2.27 - Le point K est hors de la matière magnétique

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV.$$

$$\text{Or : } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\mathbf{grad}_K \left( \frac{1}{r} \right) = \mathbf{grad}_P \left( \frac{1}{r} \right)$$

où K et P sont définis sur la figure 2.27.

De plus :  $\mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{V}) = f \cdot \mathbf{rot} \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \mathbf{grad} f$ , où  $f$  et  $\mathbf{V}$  sont un scalaire et un vecteur respectivement. Il en résulte que :

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) dV$$

$$\text{Or : } \int_V \mathbf{rot} \mathbf{a} dV = - \int_S (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{n}}) dS$$

où  $S$  est la surface entourant le volume  $V$  considéré et  $\hat{\mathbf{n}}$  le vecteur unitaire normal à la surface et orienté vers l'extérieur de celle-ci. On en déduit que :

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{r} dS \quad (2.96)$$

En comparant cette expression à la relation (2.12), on peut conclure que  $\mathbf{A}_m$ , et en conséquence  $\mathbf{B}_m$ , sont créés par deux densités de courants équivalents (courants associés à la matière aimantée, dits courants liés) :

- ♦ une densité volumique  $\mathbf{j}_m = \mathbf{rot} \mathbf{M}$
- ♦ une densité surfacique  $\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ .

### 3.2. CALCUL DE $\mathbf{B}_m$ DANS LA MATIÈRE

Dans ce paragraphe et le suivant on notera par  $\mathbf{r}_{AB}$  un vecteur allant de A à B. Localement, on peut définir  $\mathbf{b}_m$  qui fluctue énormément dans l'espace, en particulier d'un atome à l'autre. Il n'est pas possible de le déterminer (au moins simplement) et pour ce qui est de la magnéto-statique, sa connaissance nous importe peu. Comme on l'a vu au paragraphe 3, on s'intéresse au champ  $\mathbf{B}_m$  moyenne spatiale du champ local  $\mathbf{b}_m$ , soit  $\mathbf{B}_m = \langle \mathbf{b}_m \rangle$ . Dans la matière l'approximation dipolaire n'est, *a priori*, pas valable.

Il faut donc partir des véritables sources que sont les courants associés au mouvement électronique et que l'on peut caractériser par la densité de courants liés  $\mathbf{j}_m$ , telle que :

$$d\mathbf{b}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}_m \times \mathbf{r}}{r^3} dV \quad (2.97)$$

Pour calculer  $\mathbf{B}_m = \langle \mathbf{b}_m \rangle$  en un point O on procède de la manière suivante. On considère une sphère de centre O et de volume V assez grand devant les distances interatomiques mais petits à l'échelle des variations de l'aimantation pour que cette dernière puisse y être considérée comme uniforme. On veut calculer  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  moyenne de  $\mathbf{b}_m$  sur le volume V. Il est la somme de  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  (int) créé par les sources intérieures à la sphère et de  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  (ext) créé par les sources extérieures (y compris celles localisées sur la cavité sphérique).

Intéressons-nous tout d'abord à  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  (int) et cherchons quelle est la moyenne sur V du champ  $\mathbf{b}_{mI}$  créé par une source  $\mathbf{j}_m dV_I$  localisée au voisinage d'un point I intérieur à la sphère. On a :

$$\langle \mathbf{b}_{mI} \rangle_V = \frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \frac{\mathbf{j}_m dV_I \times \mathbf{r}_{IM}}{|\mathbf{r}_{IM}|^3} dV_M = \frac{\mu_0}{4\pi V} \mathbf{j}_m dV_I \times \int_V \frac{\mathbf{r}_{IM}}{|\mathbf{r}_{IM}|^3} dV_M \quad (2.98)$$

Or dans le § 2.3.3, on montrera que cette dernière intégrale est égale à  $-(4\pi/3) \mathbf{r}_{OI}$ . Il en résulte que :

$$\langle \mathbf{b}_{mI} \rangle_V = -\frac{\mu_0}{3V} \mathbf{j}_m dV_I \times \mathbf{r}_{OI} \quad (2.99)$$

En tenant compte maintenant de toutes les sources intérieures à la sphère, on obtient :

$$\langle \mathbf{b}_m \rangle_V \text{ (int)} = \frac{\mu_0}{3V} \int_V (\mathbf{r}_{OI} \times \mathbf{j}_m) dV_I.$$

Or la quantité  $\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r}_{OI} \times \mathbf{j}_m) dV_I$  est par définition le moment magnétique  $\mathbf{m}$  de toute la sphère, ce qui conduit à :

$$\langle \mathbf{b}_m \rangle_V \text{ (int)} = \frac{2\mu_0}{3V} \mathbf{m} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \quad (2.100)$$

Intéressons-nous à présent à  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  (ext). On peut reprendre l'expression (2.98) de  $\langle \mathbf{b}_{ml} \rangle_V$  en supposant maintenant que les sources sont à l'extérieur de la sphère (et sur sa surface). En utilisant la valeur correspondante de  $\Sigma$  (voir § 3.3), on obtient :

$$\langle \mathbf{b}_{ml} \rangle_V = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}_m dV_I \times \frac{\mathbf{r}_{IO}}{|\mathbf{r}_{IO}|^3} = \mathbf{b}_{ml}(O).$$

Donc la moyenne de  $\mathbf{b}_m$  sur une sphère de volume  $V$  est égale à sa valeur au centre de celle-ci. Cette dernière valeur peut être calculée comme au paragraphe précédent (car le point  $O$  considéré est dans une cavité c'est-à-dire en dehors de la matière) à partir des densités de courant équivalentes. Ainsi  $\langle \mathbf{b}_m \rangle_V$  (ext) est le champ au point  $O$  provenant de trois contributions et s'écrit :

$$\langle \mathbf{b}_m \rangle_V(\text{ext}) = -\frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_m \times \mathbf{r}}{r^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{ms} \times \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (2.101)$$

où les trois contributions proviennent dans l'ordre de :

- ◆ les densités surfaciques de courants liés tapissant la cavité dont le calcul fait l'objet de l'exercice n° 4,
- ◆ celles réparties sur la surface extérieure du matériau,
- ◆ et les densités volumiques de courants liés.

On est donc ramené à une expression  $\mathbf{B}_m = \langle \mathbf{b}_m \rangle_V(\text{int}) + \langle \mathbf{b}_m \rangle_V(\text{ext})$  identique à celle utilisée pour un point hors de la matière à savoir :

$$\mathbf{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_m \times \mathbf{r}}{r^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{ms} \times \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (2.102)$$

En effet, en considérant les expressions des densités de courants en fonction de l'aimantation (voir § 2.3.1) cette expression de  $\mathbf{B}_m$  est bien le rotationnel du potentiel vecteur  $\mathbf{A}_m$  défini par l'équation (2.96).

### 3.3. CALCUL DE L'INTÉGRALE $\Sigma$

Soient  $O$  le centre d'une sphère de volume  $V$ ,  $M$  un point courant de celle-ci et  $I$  un point quelconque, on s'intéresse à l'intégrale :

$$\Sigma = \int_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{r}_{IM}}{|\mathbf{r}_{IM}|^3} dV_M = - \int_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{r}_{MI}}{|\mathbf{r}_{MI}|^3} dV_M \quad (2.103)$$

qui est, à une constante près, l'expression du champ électrique  $\mathbf{E}$  créé en  $I$  par une sphère (centrée en  $O$  et de volume  $V$ ) uniformément chargée en volume (densité de charge  $\rho$ ) soit :

$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{r}_{MI}}{|\mathbf{r}_{MI}|^3} dV_M$ . Ce champ peut être calculé aisément

à l'aide du théorème de Gauss et vaut :  $\mathbf{E} = (\rho/4\pi\epsilon_0)\mathbf{r}_{OI}$  si  $I$  est intérieur à la sphère et  $\mathbf{E} = (\rho V/4\pi\epsilon_0)\mathbf{r}_{OI}/|\mathbf{r}_{OI}|^3$  si  $I$  est extérieur à celle-ci. Il en résulte que si le point  $I$  appartient à la sphère  $\Sigma = -(4\pi/3)\mathbf{r}_{OI}$  et si  $I$  est extérieur à celle-ci,  $\Sigma = V\mathbf{r}_{IO}/|\mathbf{r}_{IO}|^3$ .

## EXERCICES

### E.1 Champ le long de l'axe d'un cylindre uniformément aimanté selon cet axe

Un cylindre de longueur  $2L$  et de rayon  $R$  est uniformément aimanté le long de son axe (axe  $Oz$ ). Exprimer l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  en tout point  $P$  de l'axe en utilisant successivement les deux approches (ampérienne et coulombienne).

On exprimera  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  d'une part en fonction des demi-angles au sommet  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des cônes s'appuyant sur les bases du cylindre et de sommet  $P$  ( $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/2]$ ) et d'autre part en fonction de  $z$  (l'origine étant prise au centre du cylindre) (figure 2.28). Etudier les cas limites  $D \ll R$  et  $D \gg R$ .

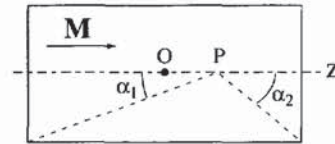


Figure 2.28 - Cylindre aimanté

### E.2 Champ dans l'entrefer d'un aimant

Deux demi-barreaux cylindriques de grande longueur, coaxiaux, de rayon  $R$  et espacés de  $2e$  sont uniformément aimantés le long de leur axe (axe  $z$ ) et dans le même sens (figure 2.29).

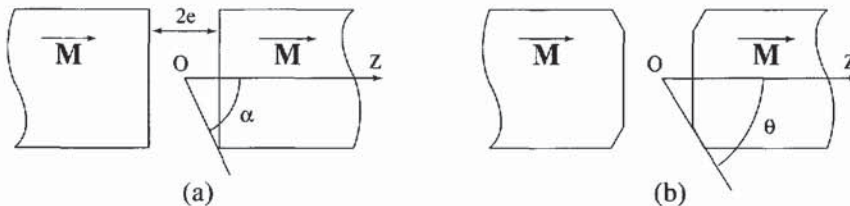


Figure 2.29 - Entrefer d'un aimant avec pièces polaires (a) cylindriques (b) tronc-conique

Calculer en utilisant successivement les deux approches (ampérienne et coulombienne) l'induction  $\mathbf{B}_0$  au centre  $O$  de l'entrefer en fonction de l'aimantation  $\mathbf{M}$  et du demi-angle au sommet  $\alpha$  du cône de sommet  $O$  et s'appuyant sur le contour des pièces polaires (figure 2.29-a). On tronque les pièces polaires par un cône de révolution de sommet  $O$ , de demi-angle au sommet  $\theta$  et d'axe  $z$  (figure 2.29-b). Toujours en utilisant successivement les deux approches, donner l'expression de l'induction  $\mathbf{B}_0$  en  $O$  en fonction de  $\mathbf{M}$ ,  $\theta$  et  $\alpha$ . Montrer que  $\mathbf{B}_0$  est maximale pour une valeur  $\theta_0$  que l'on précisera.

### E.3 Champ créé par une sphère uniformément aimantée : première méthode

Soient deux sphères de rayon  $a$  ayant des densités volumiques de masses magnétiques uniformément réparties  $-\rho_m$  et  $+\rho_m$ . Leurs centres  $N$  et  $P$ , respectivement, sont tels que  $|r_{NP}| \ll a$  et  $r_{NP}$  (vecteur joignant  $N$  à  $P$ ) est parallèle à l'axe  $z$ . On prendra l'origine  $O$  des coordonnées au milieu du segment  $NP$ .

**E.3.1** - Montrer que le système ainsi formé est pratiquement équivalent à une densité surfacique sphérique  $\sigma_m = |\mathbf{r}_{NP}| \rho_m \cos \theta$  où  $\theta$  est l'angle entre Oz et le vecteur joignant O au point considéré.

**E.3.2** - En utilisant cette équivalence, montrer que :

- ◆ Le champ  $\mathbf{H}_m$  à l'intérieur de la sphère est uniforme. Donner sa direction et sa valeur.
- ◆ Le potentiel  $V_m$  et en conséquence le champ  $\mathbf{H}_m$  à l'extérieur de la sphère est celui d'un dipôle magnétique ponctuel situé en O et de moment dipolaire  $\mathbf{m} = \mathbf{r}_{NP} Q_m$ , où  $Q_m$  est la valeur absolue de la masse magnétique totale de chacune des sphères.

**E.3.3** - En utilisant ces résultats montrer que, dans le cas d'une sphère d'aimantation uniforme  $\mathbf{M}$  :

- ◆ Le champ démagnétisant est uniforme et vaut  $\mathbf{H}_d = -\mathbf{M}/3$ . En déduire que  $\mathbf{B}_m$  est uniforme et vaut  $\mathbf{B}_m = 2\mu_0\mathbf{M}/3$ .
- ◆ le champ  $\mathbf{H}_m$  et l'induction  $\mathbf{B}_m$  à l'extérieur sont ceux d'un moment magnétique considéré comme ponctuel, situé au centre de la sphère et de valeur  $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$ , où  $V$  est le volume de la sphère.

#### **E.4 Champ au sein d'une cavité sphérique**

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, donner l'expression du champ  $\mathbf{H}_m$  et de l'induction  $\mathbf{B}_m$  dans une cavité sphérique creusée au sein d'un matériau uniformément aimanté de dimensions infinies.

*Pour les exercices E.5 à E.9, il sera utile de se reporter aux expressions d'analyse vectorielle données en fin d'annexe 7.*

#### **E.5 Champ créé par une sphère uniformément aimantée : 2<sup>e</sup> méthode**

Soit une sphère de rayon  $a$ , uniformément aimantée (aimantation  $\mathbf{M}$  parallèle à Oz). On veut retrouver les résultats de l'exercice E.3.3 en utilisant les deux approches (ampérienne et coulombienne).

**E.5.1 Approche ampérienne** (courants liés) - Par symétrie,  $\mathbf{A} = A_\phi(\theta, r)\hat{\mathbf{e}}_\phi$  en coordonnées sphériques, où  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  est un vecteur unitaire. Montrer que, dans chacun des milieux,  $A_\phi$  est solution de l'équation  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  et peut s'écrire  $A_\phi = f(r) \sin \theta$ . Montrer que  $f(r) = C_m r^m + C_n r^n$  et déterminer  $m$  et  $n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $C_m$  et  $C_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors les résultats de E.3.3.

**E.5.2 Approche coulombienne** (charges équivalentes) - Montrer que, dans chacun des milieux,  $V_m$  est solution de l'équation de Laplace :  $\Delta V_m = 0$  et s'écrit  $V_m = f(r) \cos \theta$ . Montrer que  $f(r) = D_m r^m + D_n r^n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $D_m$  et  $D_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors les résultats de E.3.3.

### E.6 Sphère de perméabilité $\mu$ soumise à un champ uniforme

Une sphère de rayon  $a$  constituée d'un matériau LHI (perméabilité relative  $\mu_r$ ) est soumise à une induction magnétique  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  uniforme (parallèle à Oz). On veut déterminer, en tout point,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  en utilisant les deux approches.

**E.6.1 Approche ampérienne** (courants liés) - Par symétrie  $\mathbf{A} = A_\varphi(\theta, r) \hat{\mathbf{e}}_\varphi$  en coordonnées sphériques, où  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  est un vecteur unitaire. Montrer que, dans chacun des milieux,  $A_\varphi$  est solution de l'équation  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  et peut s'écrire  $A_\varphi = f(r) \sin \theta$ . Montrer que  $f(r) = C_m r^m + C_n r^n$  et déterminer  $m$  et  $n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $C_m$  et  $C_n$  dans chacun des milieux. Montrer que  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont uniformes dans la sphère et donner leur expression en fonction de  $\mathbf{H}_0$  et  $\mu_r$ .

**E.6.2 Approche coulombienne** (charges équivalentes) - Montrer que, dans chacun des milieux,  $V_m$  est solution de l'équation de Laplace :  $\Delta V_m = 0$  et s'écrit  $V_m = f(r) \cos \theta$ . Montrer que  $f(r) = D_m r^m + D_n r^n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $D_m$  et  $D_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors les expressions de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  dans la sphère.

### E.7 Barreau cylindrique de perméabilité $\mu$ soumise à un champ uniforme perpendiculaire à son axe

Un barreau cylindrique (rayon  $a$ ) d'un matériau LHI (perméabilité relative  $\mu_r$ ) et de longueur infinie est soumis à une induction uniforme  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  perpendiculaire à son axe. On veut déterminer en tout point  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  en utilisant les deux approches.

**E.7.1 Approche ampérienne** (courants liés) - Par symétrie  $\mathbf{A} = A_z(\theta, r) \hat{\mathbf{e}}_z$  en coordonnées cylindriques, où  $\hat{\mathbf{e}}_z$  est un vecteur unitaire. Montrer que, dans chacun des milieux,  $A_z$  est solution de l'équation  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  et peut s'écrire  $A_z = f(r) \sin \theta$ . Montrer que  $f(r) = C_m r^m + C_n r^n$  et déterminer  $m$  et  $n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $C_m$  et  $C_n$  dans chacun des milieux. Montrer que  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont uniformes dans le cylindre et donner leur expression en fonction de  $\mathbf{H}_0$  et  $\mu_r$ .

**E.7.2 Approche coulombienne** (charges équivalentes) - Montrer que, dans chacun des milieux,  $V_m$  est solution de l'équation de Laplace :  $\Delta V_m = 0$  et a pour expression  $V_m = f(r) \cos \theta$ . Montrer que  $f(r) = D_m r^m + D_n r^n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $D_m$  et  $D_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors les expressions de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  dans le cylindre.

### E.8 Ecran magnétique sphérique

Une sphère creuse (rayons extérieur et intérieur  $a$  et  $b$ , respectivement) d'un matériau LHI, de perméabilité relative  $\mu_r$  est soumise à une induction uniforme  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ .

**E.8.1 Approche ampérienne** - Par symétrie  $\mathbf{A} = A_\varphi(\theta, r)\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  en coordonnées sphériques, où  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  est un vecteur unitaire. Montrer que la solution de l'équation  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  dans chacun des milieux peut s'écrire  $A_\varphi = f(r) \sin \theta$ . Montrer que  $f(r) = C_m r^m + C_n r^n$  et déterminer  $m$  et  $n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage déterminer  $C_m$  et  $C_n$  dans la cavité. Préciser, en fonction de  $\mathbf{B}_0$  et de  $\mu_r$ , l'induction  $\mathbf{B}$  à l'intérieur de la cavité.

**E.8.2 Approche coulombienne** - Montrer que la solution de l'équation de Laplace  $\Delta V_m = 0$  dans chacun des milieux est du type  $V_m = f(r) \cos \theta$ . Montrer que  $f(r) = D_m r^m + D_n r^n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $D_m$  et  $D_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors l'expression de  $\mathbf{B}$  dans la cavité en fonction de  $\mathbf{B}_0$  et de  $\mu_r$ .

**A.N.** - De combien est réduite  $B_0$  pour  $\mu_r = 5\,000$ ,  $a = 64$  mm et  $b = 60$  mm ?

## E.9 Ecran magnétique cylindrique

Un cylindre creux (rayons extérieur et intérieur  $a$  et  $b$ , respectivement) d'un matériau LHI (de perméabilité relative  $\mu_r$ ) et de très grande longueur est soumis à une induction uniforme  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  perpendiculaire à son axe.

**E.9.1 Approche ampérienne** - Par symétrie  $\mathbf{A} = A_z(\theta, r)\hat{\mathbf{e}}_z$  en coordonnées cylindriques, où  $\hat{\mathbf{e}}_z$  est un vecteur unitaire. Montrer que la solution de l'équation  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$  dans chacun des milieux peut s'écrire  $A_z = f(r) \sin \theta$ . Montrer que  $f(r) = C_m r^m + C_n r^n$  et déterminer  $m$  et  $n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $C_m$  et  $C_n$  dans la cavité. Préciser, en fonction de  $\mathbf{B}_0$  et de  $\mu_r$ , l'induction  $\mathbf{B}$  à l'intérieur de la cavité.

**E.9.2 Approche coulombienne** - Montrer que la solution de l'équation de Laplace  $\Delta V_m = 0$  dans chacun des milieux est du type  $V_m = f(r) \cos \theta$ . Montrer que  $f(r) = D_m r^m + D_n r^n$ . A partir des conditions aux limites et des conditions de passage, déterminer  $D_m$  et  $D_n$  dans chacun des milieux. Retrouver alors l'expression de  $\mathbf{B}$  dans la cavité en fonction de  $\mathbf{B}_0$  et de  $\mu_r$ .

**A.N.** - De combien est réduite  $B_0$  pour  $\mu_r = 5\,000$ ,  $a = 64$  mm et  $b = 60$  mm ?

## E.10 Le cylindre magique

**E.10.1** - Soient deux cylindres d'axe parallèle à  $z$  de longueur infinie et de rayon  $R$  contenant une densité volumique de charge magnétique uniforme. Le premier a pour densité  $-\rho_m$  et son axe coupe le plan  $z = 0$  en  $O_1$  de coordonnées  $x = -a$  et  $y = 0$ . Le second a pour densité  $+\rho_m$  et son axe coupe le plan  $z = 0$  en  $O_2$  de coordonnées  $x = +a$  et  $y = 0$ . Montrer que, si  $a \ll R$ , on peut assimiler ce système à un cylindre de rayon  $R$  chargé en surface, la densité en un point  $A$  (de coordonnées cylindriques  $R, \theta$  et  $z$ ) étant donnée par  $\sigma_m(\theta) = 2a\rho_m \cos \theta$ .

**E.10.2** - En utilisant le théorème de superposition montrer que le champ magnétique créé par une densité surfacique cylindrique du type  $\sigma_m = \sigma_0 \cos \theta$ , en un point  $P$

intérieur au cylindre, est uniforme et a pour expression  $\mathbf{H}_m = -(\sigma_0/2) \hat{\mathbf{e}}_x$ , où  $\hat{\mathbf{e}}_x$  est un vecteur unitaire (pour ce faire, on calculera ce champ en prenant P dans le plan  $z = 0$  et en faisant apparaître explicitement les vecteurs  $\mathbf{r}|_{O_1P}$  et  $\mathbf{r}|_{O_2P}$  dans les contributions provenant de chaque cylindre).

**E.10.3** - Soit un cylindre creux (rayons intérieur et extérieur  $R_i$  et  $R_e$  respectivement) considéré comme infini dont l'aimantation  $\mathbf{M}(r, \theta, z)$ , de module  $M_0$ , est perpendiculaire à  $z$  et fait un angle  $2\theta$  avec  $\hat{\mathbf{e}}_x$ .

- ◆ Préciser les densités de masses magnétiques surfaciques équivalentes à la matière et déterminer, dans la cavité, le champ magnétique créé par l'ensemble de ces densités.
- ◆ Préciser la densité de masse magnétique volumique équivalente à la matière.
- ◆ En utilisant les résultats de E.10.1 et E.10.2, donner l'expression du champ  $d\mathbf{H}_m$ , dans la cavité, créé par une couche cylindrique de matière de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .
- ◆ Donner l'expression du champ  $\mathbf{H}_m$  total dans la cavité.

## E.11 Couplage électromagnétique

On considère un condensateur plan formé de deux électrodes identiques A et B d'aire  $S$  qu'on supposera circulaires pour fixer les idées. Un brin conducteur de longueur  $d$  relie au plus court les centres des deux électrodes. On définit un sens positif sur le brin par le vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{u}}$  orienté dans le sens A vers B. Une induction magnétique  $\mathbf{B}$  est appliquée parallèlement aux plaques du condensateur (donc perpendiculairement au brin) et le dispositif se déplace à la vitesse  $v$  perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{B}$ .

On imagine un modèle naïf d'électromètre constitué d'une charge ponctuelle  $q$  mobile au sein d'un châssis rigide et rappelée en une position de repos liée à ce châssis par un ressort de dureté connue. On supposera que le châssis et éventuellement les électrodes du condensateur n'ont aucune influence sur la charge  $q$ .

**E.11.1** - Décrire la situation d'équilibre dans le brin et calculer la charge prise par le condensateur.

**E.11.2** - L'électromètre est placé dans l'espace inter-électrode et se déplace avec le condensateur. Quel champ électrique indique-t-il ? Même question si l'électromètre reste entre les plaques mais ne se déplace plus avec elles.

**E.11.3** - L'électromètre est dans le vide loin du condensateur plan et se déplace encore à la vitesse  $v$ . Quel champ électrique mesure-t-il ?

## E.12 Couples magnétiques

On considère un petit échantillon magnétique en forme d'ellipsoïde de révolution de volume  $V$  et de coefficient de champ démagnétisant  $N$  selon l'axe de symétrie.

**E.12.1** - L'échantillon est en matériau doux linéaire et isotrope de susceptibilité  $\chi$ , et on le place dans une induction  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  qui fait l'angle  $\theta$  avec son axe de symétrie. Calculer le couple  $\Gamma$  auquel il est soumis. Discuter les cas particuliers intéressants.

**E.12.2** - Même question pour un échantillon toujours linéaire de susceptibilité  $\chi$  mais possédant une aimantation *rémanente*  $\mathbf{M}_0$  alignée avec son axe.

**E.12.3** - L'échantillon a toujours l'aimantation rigide  $\mathbf{M}_0$  mais sa susceptibilité est nulle de même que l'induction appliquée  $\mathbf{B}$ . On le place à la distance  $d$  d'une plaque de fer doux qu'on assimilera à un demi-espace de perméabilité infinie. On suppose la distance  $d$  grande devant les dimensions de l'échantillon de sorte qu'on peut assimiler ce dernier à un moment ponctuel.

Montrer que le champ (et l'induction) créé par cet arrangement dans le vide est celui de deux *dipôles*, le premier étant le moment considéré et le deuxième un *dipôle-image* de même moment dont on précisera la position et l'orientation.

**E.12.4** - Dans la géométrie du § E.12.3, l'échantillon est mobile en rotation autour d'un axe parallèle à la plaque de fer. Calculer le couple auquel il est soumis. Quelles sont les positions d'équilibre stable ?

**E.12.5** - On désire réaliser un magnétomètre reposant sur la mesure du couple  $\Gamma$  qu'exerce l'induction inconnue  $\mathbf{B}$  sur un échantillon de moment rigide donné. Quel type d'artefact peut-on craindre avec un tel principe ?

### E.13 Ventouse magnétique

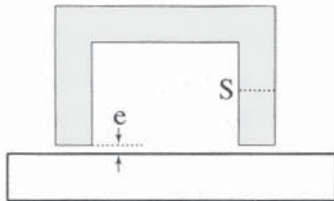


Figure 2.30 - Ventouse magnétique

La figure 2.30 est un schéma simplifié de *ventouse magnétique* : le circuit magnétique rectangulaire de périmètre  $l$  de section  $S$  (partie grisée de la figure 2.30) est approché d'une pièce massive en acier doux qu'on assimilera à un demi-espace de perméabilité infinie. Soit  $e$  l'entrefer résiduel entre la ventouse et la pièce.

Le circuit magnétique est excité par un enroulement de longueur  $l$ , de  $n$  spires réparties uniformément et parcourues par le courant  $I$ .

Dans ces conditions soit  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  la distribution d'aimantation dans le demi-tore.

**E.13.1** - On suppose d'abord que  $I = 0$ , mais qu'en appliquant à l'échelle atomique les couples nécessaires, on recrée cette même aimantation  $\mathbf{M}$  dans le demi-tore. Dans l'approximation des circuits magnétiques, calculer le champ  $H_f$  dans le circuit. En déduire un coefficient de champ démagnétisant  $N$ .

**E.13.2** - On fait maintenant  $I \neq 0$  et on admet que le tore travaille dans son domaine linéaire avec la perméabilité  $\mu$ .

Donner l'expression de l'énergie totale du système magnétique en fonction de  $I$  et de  $e$ . On pourra faire les approximations  $e \ll l \ll \mu e$ .

**E.13.3** - En appliquant de deux façons le théorème des travaux virtuels pour une variation  $\delta e$  de  $e$ , calculer la force  $F$  exercée par la ventouse sur la pièce massive :

- ◆  $e$  varie à courant  $I$  constant
- ◆  $e$  varie à flux constant donc à induction constante dans le circuit.

**E.13.4** - Le circuit est remplacé par un aimant permanent de même forme d'aimantation rigide  $\mathbf{M}_0$  et on supprime bien entendu l'enroulement. On suppose que  $\mathbf{M}_0$  reste partout parallèle aux surfaces latérales du tore et que  $\text{div } \mathbf{M}_0 = 0$ . En utilisant les charges magnétiques et la méthode des images (voir exercice précédent) décrire qualitativement la forme du champ créé par le dispositif. Est-elle conforme à l'approximation des circuits magnétiques ? Pourquoi ?

**E.13.5** - En utilisant la méthode directe appliquée aux charges magnétiques, calculer la force  $F$ .

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1** A l'intérieur :  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}(2 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)/2$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)/2$ .

A l'extérieur :  $\mathbf{H} = \mathbf{M}|\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2|/2$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}|\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2|/2$ .

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mathbf{M}}{2} \left( \frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} + \frac{L+z}{\sqrt{R^2 + (L+z)^2}} \right) \text{ quel que soit } z.$$

A l'extérieur :  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ .

$$\text{A l'intérieur : } \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{M}}{2} \left( 2 - \frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} - \frac{L+z}{\sqrt{R^2 + (L+z)^2}} \right)$$

A l'intérieur d'un cylindre très allongé et suffisamment loin des faces :  $\mathbf{H} = 0$  et  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}$ . A l'intérieur d'un disque de faible épaisseur :  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$ , et  $\mathbf{B} = 0$ .

**S.2** Avant troncage,  $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{M}(1 - \cos\alpha)$ .

Après troncage,  $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{M}[1 - \cos\theta + \sin^2\theta \cos\theta \ln(\text{tg } \alpha / \text{tg } \theta)]$ .

$$\theta_0 = \text{Arccos}(\sqrt{3}/3) = 54,73^\circ.$$

**S.3** S.3.2 ◆  $\mathbf{H}_m$  est la somme vectorielle des champs créés par chaque sphère et calculés à l'aide du théorème de Gauss.

Ainsi  $\mathbf{H}_m = \rho_m(\mathbf{r}_{PA} - \mathbf{r}_{NA})/3 = -\mathbf{r}_{NP}\rho_m/3$  où  $A$  est le point où l'on calcule le champ.

- ◆  $V_m = Q_m/4\pi[(1/|\mathbf{r}_{PA}|) - (1/|\mathbf{r}_{NA}|)]$ . Le premier terme du développement limité des distances  $PA$  et  $NA$  en fonction de  $r = OA$  et  $\theta$  conduit à :  $V_m = Q_m|\mathbf{r}_{NP}|\cos\theta/4\pi r^2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}/4\pi r^3$ , premier terme du développement du potentiel d'un dipôle.

S.3.3 La sphère est équivalente à une densité surfacique  $\sigma_m = M \cos\theta$ . Il suffit donc de remplacer dans les résultats ci-dessus  $|\mathbf{r}_{NP}|\rho_m$  par  $M$  et  $\mathbf{m}$  par  $M\mathbf{V}$ .

**S.4**  $\mathbf{H}_m = -\mathbf{M}/3$  et  $\mathbf{B}_m = 2\mu_0\mathbf{M}/3$ .

**S.5** *S.5.1*  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mu_0(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m) = 0$ , car il n'y a pas de courant libre ( $\mathbf{j}_0 = 0$ ) et  $\mathbf{j}_m = \mathbf{rot}(\mathbf{M}) = 0$ .  $m = 1$  et  $n = -2$ . Conditions aux limites :  $A_\varphi$  reste fini pour  $r = 0$ ,  $\mathbf{B} = 0$  à l'infini, continuité de  $A_\varphi$  (ou de  $B_r$ ) et de  $H_\theta$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $C_m^e = 0$  et  $C_n^e = \mu_0 M a^3/3$ .

A l'intérieur :  $C_m^i = \mu_0 M/3$  et  $C_n^i = 0$ .

*S.5.2*  $\Delta V_m = 0$  car  $\rho_m = -\text{div}\mathbf{M} = 0$ .  $m = 1$  et  $n = -2$ .

Conditions aux limites :  $V_m$  reste fini à l'origine et à l'infini, continuité de  $V_m$  (ou de  $H_\theta$ ) et de  $B_r$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $D_m^e = 0$  et  $D_n^e = M a^3/3$ .

A l'intérieur :  $D_m^i = M/3$  et  $D_n^i = 0$ .

**S.6** *S.6.1*  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mu_0(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m)$ , or  $\mathbf{j}_m = \mathbf{rot}(\mathbf{M}) = \chi \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \chi \mathbf{j}_0$ .

Donc  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = 0$ , là où il n'y a pas de courant libre, c'est-à-dire dans chacun des milieux.  $m = 1$  et  $n = -2$ . Conditions aux limites :  $A_\varphi$  reste fini pour  $r = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  à l'infini, continuité de  $A_\varphi$  et de  $H_\theta$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $C_m^e = \mu_0 H_0/2$  et  $C_n^e = \mu_0(\mu_r - 1)a^3 H_0/(\mu_r + 2)$ .

A l'intérieur :  $C_m^i = 3\mu_0 \mu_r H_0/2(\mu_r + 2)$  et  $C_n^i = 0$ .

$\mathbf{B} = 3\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_0/(\mu_r + 2) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$  et  $\mathbf{M} = 3(\mu_r - 1)\mathbf{H}_0/(\mu_r + 2)$ .

*S.6.2*  $\Delta V_m + \rho_m = 0$ . Or  $\rho_m = -\text{div}\mathbf{M} = -(\chi/\mu) \text{div}\mathbf{B} = 0$ , donc  $\Delta V_m = 0$ .  $m = 1$  et  $n = -2$ . Conditions aux limites :  $V_m$  reste fini à l'origine et à l'infini, continuité de  $V_m$  et de  $B_r$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $D_m^e = 0$  et  $D_n^e = (\mu_r - 1)a^3 H_0/(\mu_r + 2)$ .

A l'intérieur :  $D_m^i = (\mu_r - 1)H_0/(\mu_r + 2)$  et  $D_n^i = 0$ .

**S.7** *S.7.1*  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mu_0(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_m)$ , or  $\mathbf{j}_m = \mathbf{rot}(\mathbf{M}) = \chi \mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \chi \mathbf{j}_0$ .

Donc  $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = 0$ , là où il n'y a pas de courant libre, c'est-à-dire dans chacun des milieux.  $m = 1$  et  $n = -1$ . Conditions aux limites :  $A_z$  reste fini pour  $r = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  à l'infini, continuité de  $A_z$  et de  $H_\theta$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $C_m^e = \mu_0 H_0$  et  $C_n^e = \mu_0(\mu_r - 1)a^2 H_0/(\mu_r + 1)$ .

A l'intérieur :  $C_m^i = 2\mu H_0/(\mu_r + 1)$  et  $C_n^i = 0$ .

$\mathbf{B} = 2\mu \mathbf{H}_0/(\mu_r + 1) = \mu \mathbf{H}$  et  $\mathbf{M} = 2\mathbf{H}_0(\mu_r - 1)/(\mu_r + 1)$ .

*S.7.2*  $\Delta V_m + \rho_m = 0$ . Or  $\rho_m = -\text{div}\mathbf{M} = -(\chi/\mu) \text{div}\mathbf{B} = 0$ , donc  $\Delta V_m = 0$ .

$m = 1$  et  $n = -1$ . Conditions aux limites :  $V_m$  reste fini à l'origine et à l'infini, continuité de  $V_m$  et de  $B_r$  en  $r = a$ .

A l'extérieur :  $D_m^e = 0$  et  $D_n^e = (\mu_r - 1)a^2 H_0/(\mu_r + 1)$ .

A l'intérieur :  $D_m^i = (\mu_r - 1)H_0/(\mu_r + 1)$  et  $D_n^i = 0$ .

**S.8**  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0[1 + 2(\mu_r - 1)^2(1 - b^3/a^3)/9\mu_r]^{-1}$ . *A.N.* -  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0/196$ .

**S.9**  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0[1 + (\mu_r - 1)^2(1 - b^2/a^2)/4\mu_r]^{-1}$ . *A.N.* -  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0/152$ .

**S.10 S.10.3** ♦  $\sigma_m(R_e) = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = M_0 \cos \theta$  et  $\sigma_m(R_i) = \mathbf{M} \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_r) = -M_0 \cos \theta$ , où  $\hat{\mathbf{e}}_r$  est un vecteur unitaire. Le résultat de E.10.1 montre que ces deux contributions conduisent à un champ résultant nul.

♦  $\rho_m = -(2M_0/r) \cos \theta$ .

♦ Champ uniforme  $d\mathbf{H}_m = M_0(dr/r) \hat{\mathbf{e}}_x$ .

♦ Champ uniforme  $\mathbf{H}_m = M_0 \ln(R_e/R_i) \hat{\mathbf{e}}_x$ .

**S.11 S.11.1** Les porteurs libres du conducteur sont en équilibre lorsque le champ auquel ils sont soumis est nul : ce champ est la somme du champ de Lorentz  $\mathbf{E}_L = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  et du champ de réaction électrostatique  $\mathbf{E}_e$  créé par les charges  $Q_A$  et  $Q_B = -Q_A$  accumulées sur les plateaux du condensateur soit :  $E_e = +Q_A/\epsilon_0 S = -Q_0/\epsilon_0 S$  d'où :  $Q_B = \epsilon_0 S (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \hat{\mathbf{u}}$ .

**S.11.2** L'électromètre placé entre les plaques et se déplaçant avec elles mesure le champ total auquel sont soumis les porteurs du brin, c'est-à-dire : 0. L'électromètre fixe ne mesure que le champ électrostatique donc  $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  et la différence de potentiel correspondante  $V_B - V_A = \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d$  est donc égale à la force électromotrice induite :  $e = \mathbf{E}_L \cdot \hat{\mathbf{u}} d$ .

**S.11.3** Le seul champ de Lorentz  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

**S.12 S.12.1** Oxyz est un système d'axes rectangulaire lié à l'échantillon tel que Ox est l'axe de révolution et que le plan Oxy contient l'induction appliquée  $\mathbf{B}$ . Par raison de symétrie Oxyz est le système des axes principaux de la susceptibilité externe  $[\chi_e]$ . Par ailleurs les coefficients de champ démagnétisant selon Oy et Oz sont tous deux égaux à  $(1 - N)/2$ . Une généralisation immédiate de la formule (2.54) donne :

$$[\chi_e] = \begin{bmatrix} \frac{\chi}{1 + N \cdot \chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\chi}{1 + \frac{(1-N)\chi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi}{1 + \frac{(1-N)\chi}{2}} \end{bmatrix}$$

Connaissant les composantes de champ  $H_x = H \cos \theta$ ,  $H_y = H \sin \theta$  et  $H_z = 0$ , cette matrice donne immédiatement les composantes  $M_x$  et  $M_y$  et le couple  $\Gamma = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} V$  de composante  $\Gamma_1$  selon Oz :

$$\Gamma_1 = (1/2) \mu_0 H^2 V \sin 2\theta \frac{1 - 3N}{\left(\frac{2}{\chi} - N + 1\right) \left(\frac{1}{\chi} + N\right)}$$

Les cas particuliers intéressants sont notamment ceux qui permettent de vérifier la formule en retrouvant des résultats évidents : cas de la sphère ( $N = 1/3$ ), le couple s'annule pour tous les angles ; les positions d'équilibre,  $\theta = 0$  ou  $\pi/2$  avec la position stable en  $\theta = 0$  pour l'ellipsoïde allongé ( $N < 1/3$ ) et en  $\theta = \pi/2$  pour l'ellipsoïde aplati ( $1/3 < N < 1$ ) ;  $N = 0$  avec  $\chi \gg 2$ , le barreau s'aimante essentiellement selon son axe et le couple s'écrit directement  $\Gamma_1 = \mu_0 MVH \sin \theta$ , soit  $\Gamma_1 = \mu_0 (\chi H \cos \theta V) H \sin \theta = (1/2) \mu_0 \chi H^2 V \sin 2\theta$  qui est aussi le résultat obtenu en faisant  $N = 0$  et  $\chi \gg 2$  dans la formule générale.

S.12.2 L'aimantation  $\mathbf{M}$  de l'échantillon est telle que  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \chi \mathbf{H}_i$  où  $\mathbf{H}_i$  est la *champ interne*. Dans le système d'axes Oxyz, cette relation s'écrit :  $[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_0] + \chi ([\mathbf{H}] - [\mathbf{N}] [\mathbf{M}])$  où la notation  $[\ ]$  est utilisée indifféremment pour les vecteurs colonnes ou les matrices.

D'où  $([1] + \chi [\mathbf{N}]) [\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_0] + \chi [\mathbf{H}]$ . La résolution de ce système linéaire donne  $M_x = (M_0 + \chi H \cos \theta) / (1 + \chi N)$ ,

$M_y = \chi H (\sin \theta) / \{1 + \chi(1 - N)/2\}$ ,  $M_z = 0$ , et finalement le couple s'écrit :  $\Gamma_z = \Gamma = BM_y \cos \theta - BM_x \sin \theta = \Gamma_1 - BM_0 \sin \theta / (1 + \chi N)$  où  $\Gamma_1$  est le couple trouvé dans la question 12.1. Cas particuliers :  $M_0 = 0$ , on retrouve 12.1 ;  $\chi = 0$ , on retrouve le résultat évident  $BM_0 \sin \theta$ .

S.12.3 Le champ créé par les deux dipôles est *par construction* une solution des équations de la magnétostatique dans le demi-espace vide au dessus du substrat de fer doux. Dans l'approximation de la perméabilité infinie, le champ  $\mathbf{H}$  est *nécessairement nul* dans le fer (sinon l'aimantation et l'induction seraient infinies). Les conditions aux limites s'écrivent, pour la composante tangentielle du champ juste au dessus du fer,  $H_t = 0$ , et pour la composante normale de l'induction  $B_n = M_n$  où  $M_n$  est la composante normale de l'aimantation dans le fer à l'interface. On vérifie que la première condition est satisfaite si le moment image a même composante normale que le moment source, une composante tangentielle opposée et une position symétrique de celle du moment source par rapport à l'interface. La deuxième permet, si on le désire, de calculer la composante  $M_n$  et la densité superficielle de masses magnétiques équivalentes  $\sigma_m = -M_n$  induite à la surface du fer par le dipôle considéré. Sachant que la solution est unique, celle qui satisfait à la fois les équations de la magnétostatique et les conditions aux limites est nécessairement la solution du problème.

S.12.4 L'induction  $\mathbf{B}_a$  agissant sur le dipôle considéré de moment  $\mathbf{m}$  ( $= M_0 V$ ) est celle *créée par l'image*. Le calcul direct du couple est alors immédiat. Si  $\alpha$  est l'angle que fait  $\mathbf{m}$  avec la normale à l'interface,  $B_a$  a pour composante *normale*  $B_n$  l'induction *axiale* du moment  $\mathbf{m} \cos \alpha$ ,

et pour composante *tangentielle*  $B_t$  l'induction *équatoriale* du moment  $\mathbf{m} \sin \alpha$  (voir l'équation 2.24), ce qui donne :

$$B_n = (2\mu_0/4\pi) (\mathbf{m} \cos \alpha / r^3) \text{ et } B_t = -(\mu_0/4\pi) (\mathbf{m} \sin \alpha / r^3) \text{ où } r = 2d.$$

D'où le couple cherché de composante unique  $\Gamma_a$  perpendiculaire au plan dans lequel s'effectue la rotation  $\alpha$  :

$\Gamma_a = -(1/2) (\mu_0 \mathbf{m}^2 / 32\pi d^3) \sin 2\alpha$ . Ce couple s'annule pour  $\alpha = 0$  ou  $\pi$  et  $\alpha = \pm \pi/2$ . On vérifie que les positions 0 ou  $\pi$  sont stables (car  $d\Gamma/d\alpha < 0$ ) et que les positions  $\alpha = \pm \pi/2$  sont instables : le moment s'oriente perpendiculairement à la plaque.

S.12.5 Dans les mesures de champ au voisinage de matériaux doux (par exemple dans l'entrefer d'un électroaimant), le résultat sera faussé par l'effet image discuté plus haut si l'induction à mesurer est du même ordre que  $\mu_0 \mathbf{m} / 32\pi d^3$ .

**S.13** S.13.1 Dans l'approximation des circuits magnétiques, le module du champ est uniforme et égal à  $H_f$  dans le fer et de même uniforme et égal à  $H_e$  dans les entrefers. Les champs et l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont de plus essentiellement perpendiculaires partout à la section courante du circuit. Le théorème d'Ampère et la conservation du flux donnent :

$lH_f + 2eH_e = 0$  ;  $H_f + M - H_e = 0$  ; d'où  $H_f = -2eM/(l+2e)$  ; c'est donc une relation de la forme  $H = -NM$  avec  $N = 2e/(2e+l) \cong 2e/l$ , si  $e \ll l$ .

S.13.2 Si  $M = (\mu - 1)H_f$ , il vient  $lH_f + 2eH_e = nI$  ;  $\mu H_f - H_e = 0$ , d'où  $H_f = nI/(l + 2\mu e)$  et  $M = (\mu - 1)nI/(l + 2\mu e)$ .

Si  $2\mu e \gg l$ , et  $l \gg e$ ,  $M = nI/2e$ . On arrive au même résultat en raisonnant sur les réluctances.

S.13.3 L'énergie s'écrit d'après (le § 2.2.5) :

$$W = (1/2)L_0 I^2 + (1/2)\mu_0 N M^2 l S, \text{ soit :}$$

$$W \cong (1/2)L_0 I^2 + (1/2)\mu_0 (2eS)M^2 = (1/2)L_0 I^2 + (1/2)\mu_0 V_e M^2$$

où  $L_0 = \mu_0 n^2 S / l$  est l'auto-inductance de l'enroulement en l'absence de matériau magnétique, et  $V_e$  le volume total des entrefers. Avec l'expression approchée de  $M$ , on a :  $W = (1/2)I^2 \{L_0 + \mu_0 V_e (n^2 / 4e^2)\}$ ,

soit  $W = (1/2)\mu_0 n^2 S I^2 (1/l + 1/2e) \cong (1/2)\mu_0 (n^2 S / 2e) I^2 = (1/2)LI^2$

où  $L$  n'est autre que l'auto-inductance de l'enroulement en présence du circuit magnétique (dans l'approximation  $2\mu e \gg l$ ).

Équilibrons la force magnétostatique  $F$  subie par le tore par une force appliquée  $-F$  et laissons l'entrefer  $e$  croître d'une quantité infinitésimale  $\delta e$ .

$$\bullet \text{ à courant constant, } \delta W = -F \delta e + I \delta \Phi = (1/2)I^2 \delta L.$$

Mais  $\delta \Phi = I \delta L$ , donc  $-F \delta e = -(1/2)I^2 \delta L = -(1/2)LI^2 (-2\delta e / e)$ , soit :  $F \delta e = -(1/2)\mu_0 M^2 S 2\delta e$ , d'où :  $F / 2S = -(1/2)\mu_0 M^2$ .

La pression magnétostatique de la ventouse est donc négative ce qui correspond bien à une attraction.

- ◆ à flux constant, le champ électromoteur est nul,  
donc  $\delta W = -F\delta e = \delta \left\{ (1/2)LI^2 \right\}$ , soit  $\delta W = (1/2)I^2 \delta L + LI \delta I$ .  
A flux donc à champ constant dans l'entrefer,  $\delta I = +2\delta e/e$   
et finalement,  $Fde = +(1/2)LI^2 2\delta e/e = -(1/2)\mu_0 M^2 2S\delta e$   
et donc  $F/2S = -(1/2)\mu_0 M^2$ .

*S.13.4* La distribution de charges magnétiques équivalente à l'aimantation  $M_0$  se réduit à une densité superficielle  $+M_0$  sur une extrémité du demi-tore et  $-M_0$  sur l'autre. Les images sont des distributions de charges de signes contraires symétriques par rapport à la surface de la pièce massive. Le champ créé dans le demi-espace supérieur (côté aimant) aussi bien dans le vide que dans l'aimant lui-même est donc celui de deux feuillets magnétiques d'épaisseur finie ( $2e$ ). En particulier, il n'est pas parallèle aux surfaces latérales du demi-tore et il n'est pas négligeable à l'extérieur de ce dernier. Le champ est donc non conforme à l'approximation des circuits magnétiques, ce qui n'est pas inattendu car nous sommes très éloignés ici d'un circuit magnétique de forte perméabilité. Dans un tel circuit, on aurait forcément des charges sur les surfaces latérales qui imposeraient au champ la forme supposée dans l'approximation des circuits magnétiques.

*S.13.5* Il n'y a pas d'enroulement et l'on n'a pas à se préoccuper du phénomène d'induction. On peut appliquer la méthode directe. Le champ créé sur une nappe de charges par son image qui lui fait face est simplement  $(1/2)M_0$  et la force  $(1/2)\mu_0 M_0^2(2S)$ , résultat identique aux précédents.

## RÉFÉRENCES

- [1] E. DURAND, Magnétostatique (1968) Masson et Cie, Paris.
- [2] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Théorie classique des champs (1967) Mir, Moscou.
- [3] R. FEYNMAN, Electromagnétisme 1 (1979) InterÉditions, Paris.
- [4] P.B. HIRSCH, A. HOWIE, R.B. NICHOLSON, D.W. PASHLEY, M.J. WHELAN in «Electron microscopy of thin crystals» (1965), Butterworths London, chap. 16, p. 388.
- [5] M. BERTIN, J.P. FAROUX, J. RENAULT, Electromagnétisme 4 (1984) Dunod, Paris.
- [6] E.M. PURCELL, Cours de Physique de Berkeley : Electricité et magnétisme, vol. 2 (1973) Armand Colin, Paris.
- [7] C. VASSALO, Electromagnétisme classique dans la matière (1980) Dunod, Paris.

## CHAPITRE 3

# PHÉNOMÉNOLOGIE DU MAGNÉTISME À L'ÉCHELLE MACROSCOPIQUE

*Les grandes classes de matériaux magnétiques sont ici présentées schématiquement, et définies par rapport à leur réponse au champ magnétique interne : dia-, para-, antiferro-, ferro-, ferrimagnétiques, etc. En raison de l'importance capitale des substances ferro- et ferrimagnétiques, les propriétés magnétiques macroscopiques de celles-ci sont examinées ensuite de plus près : on introduit ici les notions de domaine de Weiss et d'anisotropie magnétique. On évoque enfin très brièvement les contributions magnétiques aux autres propriétés physiques de ces substances, ce qui permet d'introduire la notion de phénomènes de couplage.*

### 1. PRÉSENTATION DE QUELQUES TYPES DE COMPORTEMENTS MAGNÉTIQUES

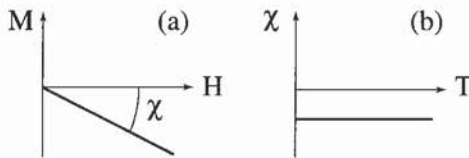
A l'état libre, nous disons qu'un atome est magnétique s'il est porteur d'un moment magnétique permanent représenté par un vecteur de module constant. Toute substance matérielle est formée d'un ensemble d'atomes qui peuvent être soit non magnétiques soit magnétiques ; dans ce dernier cas, la direction et parfois le module du moment magnétique peuvent dépendre de l'environnement particulier de chaque atome (nature et position des atomes voisins, température, champs magnétiques appliqués).

Nous allons maintenant présenter très sommairement les principaux types de comportements magnétiques, avant de les décrire plus en détail au chapitre 4. Ces principaux types de magnétisme sont les suivants : diamagnétisme, paramagnétisme, antiferromagnétisme, ferromagnétisme et ferrimagnétisme.

#### 1.1. DIAMAGNÉTISME

Le diamagnétisme caractérise les substances qui ne comportent que des atomes non magnétiques : leur aimantation, induite par le champ, est très faible et opposée à ce dernier. La susceptibilité, pratiquement indépendante du champ et de la température,

est négative (voir le § 1 du chapitre 4) et habituellement de l'ordre de  $10^{-5}$  (figure 3.1). Ce magnétisme trouve son origine dans la modification du mouvement orbital des électrons sous l'effet du champ appliqué. Selon la loi de Lenz, les courants induits donnent naissance à un flux d'induction opposé à la variation du champ appliqué. Ce magnétisme existe également dans les substances possédant des atomes magnétiques, mais il est si faible qu'il est alors totalement masqué par la contribution des atomes magnétiques. Un très fort diamagnétisme existe enfin dans les substances supraconductrices, avec une susceptibilité égale à  $-1$  : un chapitre spécial est consacré à la supraconductivité (chapitre 19) en raison des effets physiques très particuliers qui lui sont associés et de l'importance technologique croissante des matériaux supraconducteurs.

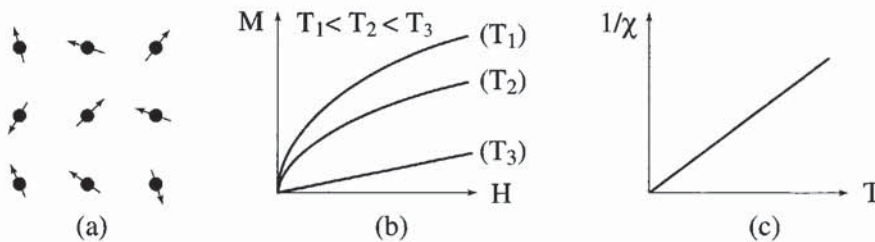


**Figure 3.1 - Variations sous champ magnétique de l'aimantation (a) et variation thermique de la susceptibilité magnétique (b) pour une substance diamagnétique**

Les valeurs de la susceptibilité diamagnétique de quelques substances d'usage courant sont données en annexe 4.

## 1.2. PARAMAGNÉTISME

Dans un grand nombre de cas, le magnétisme des substances paramagnétiques provient des moments magnétiques permanents portés par tout ou partie des atomes. Ces moments n'interagissent pratiquement pas entre eux et peuvent s'orienter librement dans n'importe quelle direction, on parle alors de paramagnétisme des atomes libres (figure 3.2-a).



**Figure 3.2 - Paramagnétisme des atomes libres**

Sous l'action d'un champ magnétique, la valeur moyenne de l'orientation des moments est modifiée et une aimantation induite parallèle au champ apparaît. Cette aimantation est d'autant plus faible que la température est élevée, c'est-à-dire que l'agitation thermique est importante (figure 3.2-b). Au fur et à mesure que la température augmente les variations de l'aimantation en fonction du champ deviennent de plus en plus linéaires. La susceptibilité initiale, positive, est infinie au zéro absolu et décroît lorsque la température augmente. Elle est généralement de l'ordre de  $10^{-3}$  à

$10^{-5}$  à la température ambiante. Dans le cas idéal, l'inverse de la susceptibilité initiale varie proportionnellement à la température : c'est la *loi de Curie* (figure 3.2-c).

Dans les matériaux réels, des écarts à la loi de Curie sont souvent observés, en particulier à basse température. Une des plus fréquentes contributions à ces écarts est le paramagnétisme de Van Vleck qui sera évoqué au chapitre 7. Dans les métaux, les électrons de conduction peuvent également donner lieu à un comportement paramagnétique, appelé *paramagnétisme de Pauli*, avec une susceptibilité pratiquement indépendante de la température.

Nous donnons en annexe 4 les valeurs de la susceptibilité paramagnétique de quelques substances d'usage courant.

### 1.3. ANTIFERROMAGNÉTISME

L'antiferromagnétisme est un magnétisme faible similaire au paramagnétisme dans le sens où la susceptibilité est faible et positive. Cependant la variation thermique de l'inverse de la susceptibilité, mesurée sur une substance polycristalline, présente un minimum à la température dite température de Néel  $T_N$  (figure 3.3-c). Ce maximum de susceptibilité a pour origine l'apparition, en-dessous de  $T_N$ , d'un arrangement antiparallèle des moments magnétiques présents dans la substance qui se divisent, dans les cas les plus simples, en deux sous-réseaux d'aimantations égales et opposées de sorte qu'en l'absence de champ, l'aimantation totale est nulle (figure 3.3-a). Cet arrangement antiparallèle des moments individuels est la conséquence d'interactions entre atomes voisins (appelées *interactions d'échange négatives*). Celles-ci s'opposent à l'action du champ appliqué qui tendrait à rendre les moments parallèles. Quand la température décroît en dessous de  $T_N$ , la susceptibilité diminue car l'agitation thermique qui s'oppose à l'ordre antiferromagnétique des moments diminue. A haute température, l'agitation thermique prend le dessus et l'on retrouve une variation thermique de la susceptibilité similaire à celle d'un paramagnétique (figure 3.3-b et -c).

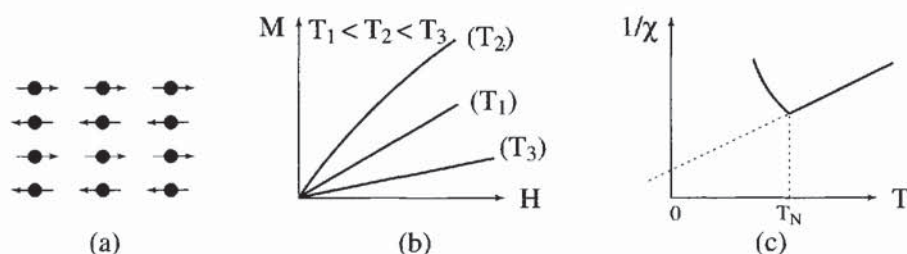


Figure 3.3 – Antiferromagnétisme : (a) réseau de spins - (b)  $M(H)$  ; (c)  $\chi^{-1}(T)$

Nous avons présenté ici le cas le plus simple d'antiferromagnétisme, constitué de deux sous-réseaux antiparallèles. Il existe en fait de nombreuses substances antiferromagnétiques qui présentent des structures magnétiques plus complexes, en particulier non colinéaires comme nous le verrons au chapitre 4.

### 1.4. FERROMAGNÉTISME

Contrairement au cas précédent, des interactions dites *d'échange positives* favorisent, dans une substance ferromagnétique, le parallélisme des moments magnétiques d'atomes voisins (figure 3.4-a). Tout se passe alors comme si un champ magnétique, appelé *champ moléculaire*, alignait les moments (ce champ fictif nous sera utile pour décrire le ferromagnétisme, mais en réalité ce n'est pas un vrai champ magnétique). Comme pour l'antiferromagnétisme, à haute température l'agitation thermique conduit à une susceptibilité similaire à celle d'un paramagnétique : c'est la *loi de Curie-Weiss* schématisée sur la figure 3.4-c.

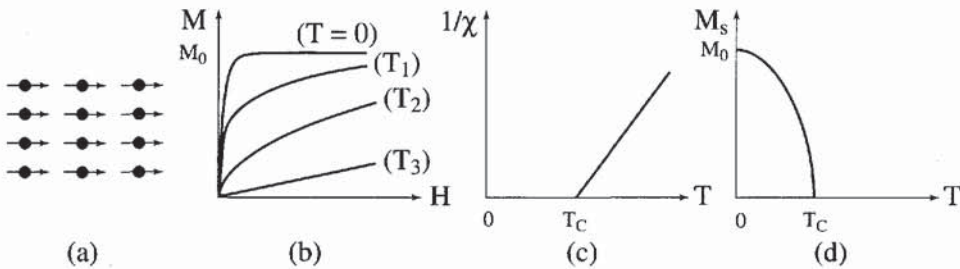


Figure 3.4 - Ferromagnétisme :

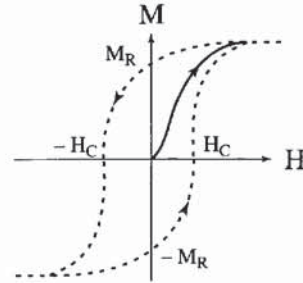
- (a) Réseau de spins - (b) Variation sous champ de l'aimantation ( $T_1 < T_c < T_2 < T_3$ )  
 (c) Variation thermique de  $1/\chi$  - (d) Variation thermique de l'aimantation spontanée

Cependant, en raison des interactions magnétiques, la susceptibilité - au lieu de devenir infinie à 0 K comme dans un paramagnétique - devient infinie à une température caractéristique, appelée *température de Curie*  $T_C$ . En dessous de cette température, les interactions dominent l'agitation thermique et une *aimantation spontanée* ( $M_s$ ) apparaît *en l'absence de champ appliqué*, aimantation qui atteint à température nulle sa valeur maximale,  $M_0$ , correspondant au parallélisme de tous les moments individuels (figures 3.4-b et 3.4-d).

Malgré l'existence d'une aimantation spontanée en dessous de  $T_C$ , un morceau de matériau ferromagnétique n'est pas toujours spontanément aimanté : son moment magnétique peut être nul, on dit alors que le matériau est désaimanté. Ceci résulte du fait que l'intérieur du matériau est divisé en domaines magnétiques, appelés *domaines de Weiss* ; chaque domaine, qui comporte un grand nombre d'atomes, est spontanément aimanté. D'un domaine à l'autre la direction des moments, c'est-à-dire de l'aimantation spontanée locale, varie de sorte que le moment magnétique total de l'échantillon est nul. Cependant en appliquant un champ, on modifie la répartition des domaines et il en résulte la variation de l'aimantation représentée en trait plein sur la figure 3.5 et appelée *courbe de première aimantation* : ainsi, au niveau macroscopique, un ferromagnétique est une substance qui acquiert généralement une forte aimantation sous l'action d'un champ.

**Figure 3.5 - Courbe d'aimantation d'un matériau non aimanté ou courbe de première aimantation (trait plein)  
Cycle d'hystérésis (traits discontinus)**

Ici les échelles de champ ( $1 \text{ à } 10^6 \text{ Am}^{-1}$ ) sont totalement différentes de celles de la figure 3.4-b (de  $10^7 \text{ à } 10^3 \text{ Am}^{-1}$ )

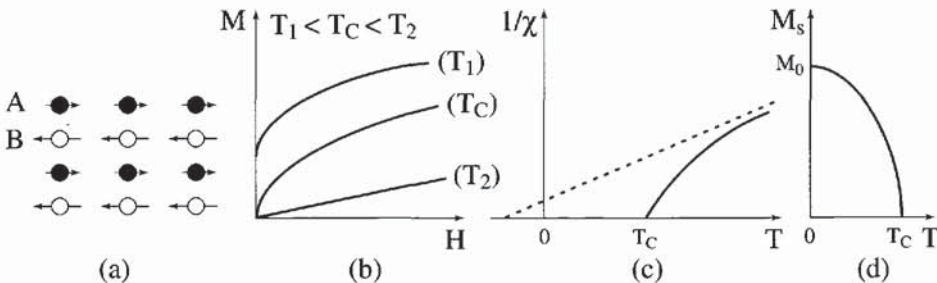


Sous des champs magnétiques suffisamment élevés, l'aimantation tend à se saturer. Les lois d'approche à la saturation dont il est en principe possible de déduire l'aimantation spontanée seront discutées plus loin au chapitre 5 (§ 7.5).

Si l'on fait ensuite varier continûment le champ appliqué entre deux valeurs extrêmes  $\pm H_0$ , la variation de l'aimantation n'est plus réversible et décrit un *cycle d'hystérésis*. Outre une forte aimantation, la courbe de première aimantation ainsi que le cycle d'hystérésis comptent donc parmi les propriétés essentielles des substances ferromagnétiques. La plupart des applications technologiques sont basées sur l'existence de ce cycle.

### 1.5. FERRIMAGNÉTISME

Le ferrimagnétisme caractérise un matériau de type antiferromagnétique dans lequel les deux sous-réseaux n'ont pas la même aimantation (figure 3.6-a) : il n'y a alors plus compensation exacte de l'aimantation des deux sous-réseaux. Il en résulte, en dessous de la température d'ordre  $T_C$ , une aimantation spontanée de sorte que, comme le montrent les figures 3.6-b et 3.6-d, les propriétés macroscopiques d'un ferrimagnétique dans cette gamme de températures peuvent présenter une ressemblance frappante avec celles d'un ferromagnétique.



**Figure 3.6 - Ferrimagnétisme : (a) Réseau de spins - (b) Variation sous champ de l'aimantation  
(c) Variation thermique de  $1/\chi$  - (d) Variation thermique de l'aimantation spontanée**

Notons toutefois que l'aimantation spontanée des substances ferrimagnétiques peut présenter des variations thermiques beaucoup plus tourmentées que celle présentée sur la figure 3.6-d, avec en particulier la possibilité de s'annuler à une température

$T_{\text{comp}}$  inférieure à  $T_C$ , en raison de la compensation exacte des deux sous-réseaux :  $T_{\text{comp}}$  est alors appelée *température de compensation*. De même, si à très haute température, l'inverse de la susceptibilité magnétique varie à peu près linéairement avec la température, elle s'écarte notablement de ce comportement linéaire en approchant de la température de Curie.

Par ailleurs, l'asymptote de la courbe  $1/\chi$  (T) coupe l'axe des abscisses dans la zone des températures négatives (voir figure 3.6-c), contrairement au cas des substances ferromagnétiques. Ces comportements seront discutés en détail au chapitre suivant.

Nous verrons par la suite que de nombreux matériaux qui présentent des structures magnétiques non colinéaires et /ou qui sont constituées de plusieurs types d'atomes magnétiques présentant des moments différents peuvent être classées dans la catégorie des substances ferromagnétiques ou ferrimagnétiques.

### 1.6. PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES ÉLÉMENTS PURS À L'ÉTAT ATOMIQUE

79 parmi les 103 premiers éléments purs sont porteurs d'un moment magnétique à l'état atomique fondamental, ainsi que le montre le tableau 3.1.

Tableau 3.1 - Propriétés magnétiques des éléments à l'état atomique

H																			<b>He</b>
Li	<b>Be</b>											B	<b>C</b>	N	O	F			<b>Ne</b>
Na	<b>Mg</b>											Al	<b>Si</b>	P	S	Cl			<b>Ar</b>
K	<b>Ca</b>	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	<b>Zn</b>	Ga	<b>Ge</b>	As	Se	Br			<b>Kr</b>
Rb	<b>Sr</b>	Y	Zr	Nb	Mo	<i>Tc</i>	Ru	Rh	<b>Pd</b>	Ag	<b>Cd</b>	In	<b>Sn</b>	Sb	Te	I			<b>Xe</b>
Cs	<b>Ba</b>	La	Hf	Ta	<b>W</b>	Re	Os	Ir	Pt	Au	<b>Hg</b>	Tl	<b>Pb</b>	Bi	Po	At			<b>Rn</b>
<i>Fr</i>	<i>Ra</i>	<i>Ac</i>																	
						Ce	Pr	Nd	<i>Pm</i>	<b>Sm</b>	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	<b>Yb</b>	Lu
						Th	<i>Pa</i>	U	<i>Np</i>	<i>Pu</i>	<i>Am</i>	<i>Cm</i>	<i>Bk</i>	<i>Cf</i>	<i>Es</i>	<i>Fm</i>	<i>Md</i>	<i>No</i>	<i>Lw</i>

A l'état atomique fondamental, les seuls éléments **non** magnétiques (gras encadrés) sont ceux pour lesquels  $J=0$  (voir le chapitre 7) : Be..., Zn..., He..., Pd, Yb ( $^1S_0$ ), C... ( $^3P_0$ ), W ( $^5D_0$ ) et Sm ( $^7F_0$ ). Les atomes radioactifs sont donnés en italique.

### 1.7. PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES ÉDIFICES POLYATOMIQUES

Au contraire, dès lors qu'ils sont intégrés à un édifice polyatomique (molécule, cristal pur, composés et alliages, ...), seulement un petit nombre d'atomes sont porteurs d'un moment magnétique permanent. Le tableau 3.2 illustre dans le cas des éléments solides purs. Très peu d'entre eux sont ferromagnétiques ou ferri-

magnétiques : ce sont le fer, le cobalt et le nickel, ainsi que plusieurs métaux de la série 4f des terres rares (Eu à Tm). Et encore, le caractère magnétique peut-il dépendre de la structure cristallographique : dans sa phase cubique centrée, le fer ( $\alpha$ -Fe) est ferromagnétique à la température ambiante, tandis que dans sa phase cubique à faces centrées ( $\gamma$ -Fe), il ne l'est pas sous pression atmosphérique et, de plus, son moment est alors très sensible à la distance interatomique (tableau 3.3).

**Tableau 3.2 - Propriétés magnétiques à basse température des éléments purs à l'état solide. En gras encadré : les substances ordonnées**

H																		He
Li	Be											B	C	N	O	F		Ne
para	dia											dia	dia	dia	AF	dia		dia
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl		Ar
para	para											para	dia	dia	dia	dia		dia
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br		Kr
para	para	para	para	para	AF	AF	Ferro	Ferro	Ferro	dia	dia	dia	dia	dia	dia	dia		dia
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I		Xe
para	para	para	para	para	para		para	para	para	dia	dia	dia	*	dia	dia	dia		dia
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At		Rn
para			para	para	para	para	para	para	para	dia	dia	dia	dia	dia				dia
Fr	Ra	Ac																
			Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu		
			*	para	AF		AF	Ferri	Ferro	Ferro	Ferro	Ferri	Ferri	Ferri	para	para		
			Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lw		
			para		para													

Les structures complexes (hélimagnétiques...) sont comptées Ferri ; AF signifie antiferromagnétique. L'état magnétique (para ou dia) de l'étain et du cérium dépend de leur structure cristallographique. Les substances en grisé sont supraconductrices à très basse température, et celles en italique sont radioactives.

Dans le cas des substances comportant plus d'une espèce atomique, le moment de chaque type d'atome dépend également du matériau considéré et aucun raisonnement élémentaire ne permet de prédire *a priori* si telle ou telle substance sera – ou non – magnétique. Le tableau 3.3 l'illustre bien dans le cas du fer.

**Tableau 3.3 - Moment magnétique porté par les atomes de fer, à 0 K et en champ extérieur nul, dans différents matériaux**

Composé	$\gamma$ -Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$\alpha$ -Fe	YFe <sub>2</sub>	$\gamma$ -Fe	YFe <sub>2</sub> Si <sub>2</sub>
type	ferri	ferro	ferro	antiferro	–
$m_{Fe}$ ( $\mu_B$ )	5,0	2,2	1,45	instable	0

*N.B.* - Le  $\mu_B$  est une unité pratique à l'échelle atomique pour désigner les moments atomiques :  $1 \mu_B = 0,9274 \times 10^{-23} \text{Am}^2$  (voir § 1 du chapitre 7 et Annexe 2).

Il existe des matériaux dont aucun des constituants ne présente de ferromagnétisme à l'état pur et qui sont cependant ferromagnétiques : par exemple, l'alliage d'Heusler

$\text{Cu}_2\text{MnAl}$  est ferromagnétique à la température ambiante, alors que le cuivre est diamagnétique, le manganèse est antiferromagnétique et l'aluminium est paramagnétique. La théorie quantique du magnétisme qui sera présentée aux chapitres 7 et 8 permet d'interpréter ces résultats *a priori* surprenants.

## 2. PHÉNOMÉNOLOGIE DES MATÉRIAUX FORTEMENT MAGNÉTIQUES

C'est en raison de la grande ressemblance entre substances ferrimagnétiques et ferromagnétiques au niveau des propriétés macroscopiques à une température donnée, que l'on parlera généralement de comportement ferromagnétique même dans le cas de substances ferrimagnétiques. Plus généralement, on classera *dans la suite de ce chapitre* comme ferromagnétique toute substance ordonnée magnétiquement dont les moments ne sont pas forcément alignés ni de même grandeur mais dont l'aimantation résultante à l'échelle mésoscopique et en l'absence de champ extérieur, est non nulle. Par mésoscopique, on entendra une échelle de dimensions intermédiaire entre l'échelle microscopique (ou atomique) et l'échelle macroscopique : on verra qu'il s'agit d'une dimension de l'ordre de grandeur des domaines de Weiss (donc essentiellement variable selon les matériaux, mais typiquement de l'ordre du  $\mu\text{m}$ ).

### 2.1. COURBES D'AIMANTATION ISOTHERMES

A l'échelle macroscopique, les variations sous champ de l'aimantation d'une substance ferromagnétique, pour un échantillon massif relativement pur et qui n'a jamais été aimanté, présentent généralement l'allure reportée sur la figure 3.7.

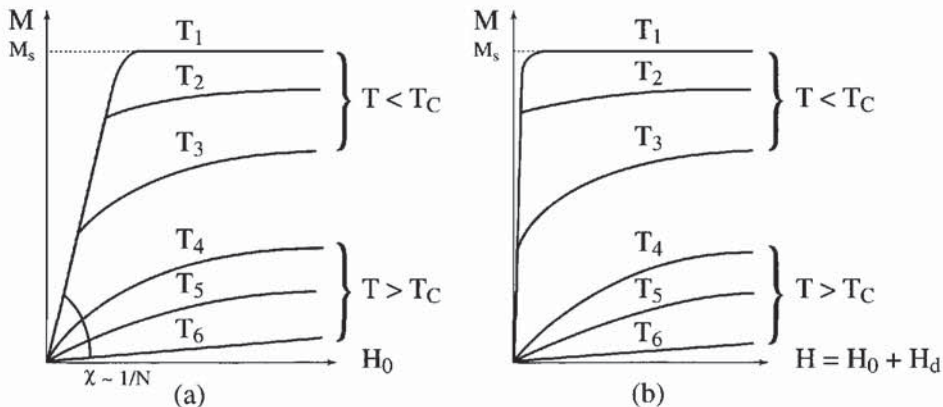


Figure 3.7 - Représentation schématique expérimentale de quelques isothermes dans un ferromagnétique sans défaut en fonction du champ appliqué  $H_0$  (a) et du champ interne  $H$  (b)

Pour  $T < T_C$ , la susceptibilité est élevée sous champ magnétique faible (figure 3.7-a) et si l'on trace l'aimantation en fonction du champ total (ou champ interne)  $H = H_0 + H_d$ , on obtient une susceptibilité initiale "pratiquement" infinie (figure 3.7-b). Dès que le champ augmente, l'aimantation tend à se saturer. L'extrapolation en champ interne nul de la région où l'aimantation dépend peu du champ définit l'aimantation spontanée  $M_s(T)$  (valeur que l'on observe dans une expérience de diffraction neutronique). Lorsque  $T$  augmente, les courbes d'aimantation sont du même type, mais  $M_s(T)$  diminue en raison de l'agitation thermique et présente l'allure schématisée sur la figure 3.8. A la température critique  $T_C$ , dite *température de Curie*, l'aimantation spontanée s'annule.

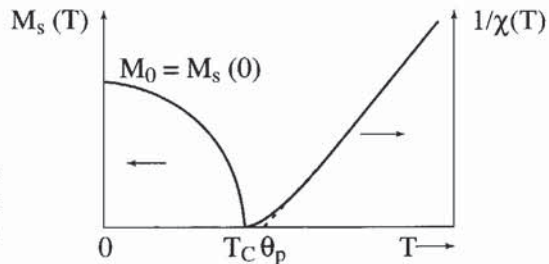
Pour  $T > T_C$ , la substance est paramagnétique et les courbes d'aimantation ont l'allure présentée sur la figure 3.7 en fonction du champ magnétique pour différentes températures. Elles deviennent de plus en plus linéaires en même temps que la susceptibilité initiale diminue. A haute température, l'inverse de la susceptibilité varie linéairement avec la température selon la *loi de Curie-Weiss* (figure 3.8) :

$$1/\chi = (T - \theta_p)/\mathcal{C} \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{C}$  est la *constante de Curie* et  $\theta_p$  est la *température de Curie paramagnétique*, qui est souvent légèrement supérieure à  $T_C$ .

**Figure 3.8 - Variations thermiques de l'aimantation spontanée  $M_s(T)$  et de l'inverse de la susceptibilité paramagnétique dans une substance ferromagnétique**

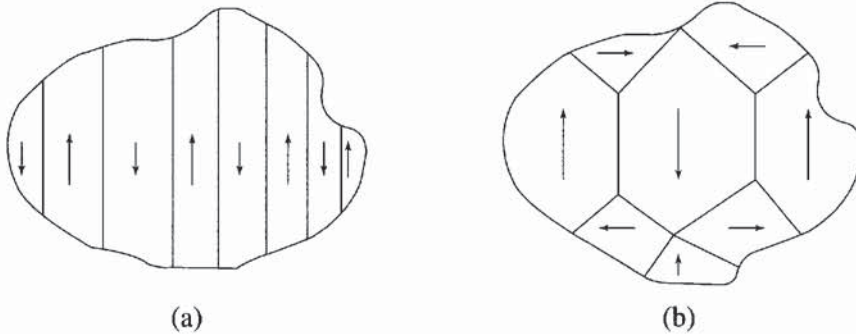
L'habitude s'est prise chez les magnéticiens de représenter sur un même graphe ces deux variations thermiques,  $M_s$  étant nul pour  $T > T_C$ , et  $1/\chi$  nul pour  $T < T_C$ .



## 2.2. DOMAINES DE WEISS ET PAROIS DE BLOCH

Sachant qu'un matériau ferromagnétique (en l'absence de champ) possède une aimantation spontanée, on s'attendrait à ce que tout échantillon de ce matériau possède un moment permanent. Or, il n'en est rien et par exemple, en général, un morceau de fer n'attire pas un autre morceau de fer (sauf s'il a été précédemment aimanté). Pierre Weiss a levé cette contradiction en supposant qu'au niveau macroscopique (typiquement pour des dimensions supérieures au micron) un matériau ferromagnétique se subdivise spontanément en domaines. Chaque domaine possède bien une aimantation spontanée, mais d'un domaine à l'autre l'aimantation résultante n'a pas la même direction, de sorte qu'au niveau macroscopique il n'y a plus de moment résultant. Ainsi, à 20°C, un monocristal de cobalt de structure hexagonale voit son aimantation s'orienter préférentiellement parallèlement à l'axe  $c$  : l'échantillon se trouve divisé en une égale proportion de deux types de domaines

correspondant aux deux orientations possibles selon cet axe (figure 3.9-a). De même, un monocristal de fer, de structure cubique et dont les moments magnétiques sont selon l'un des trois axes quaternaires [100], [010] ou [001], est divisé en proportions égales en six types de domaines (six phases) correspondant aux six orientations possibles des moments magnétiques : la figure 3.9-b montre quatre de ces phases pour une lamelle peu épaisse taillée dans un plan (001).



**Figure 3.9 - Représentation schématique de la division en domaines**  
**(a) Cristal hexagonal où l'axe sénaire [001] est de facile aimantation**  
**(b) Cristal cubique où les axes quaternaires  $\langle 100 \rangle$  sont de facile aimantation**  
 (la notation  $\langle 100 \rangle$  désigne l'ensemble des directions [100], [010] et [001])

Les domaines magnétiques ont été appelés *domaines de Weiss* en souvenir de leur inventeur. Ils sont séparés par des parois, les *parois de Bloch*, comprenant un certain nombre de plans atomiques dans lesquelles l'orientation des moments passe plus ou moins progressivement de celle d'un domaine à celle de l'autre. Sous l'influence d'un champ magnétique croissant,  $H_0$ , le processus d'aimantation initial dominant  $M(H_0)$  a lieu par déplacement des parois ce qui entraîne un grossissement des domaines énergétiquement favorisés et la disparition progressive des autres.

Dans un échantillon ayant peu de défauts, les parois se déplacent pratiquement librement de sorte que l'aimantation macroscopique atteint l'aimantation spontanée pour un champ interne très faible : on qualifiera un tel matériau de matériau *ferromagnétique doux*. En revanche, si l'échantillon présente de nombreux défauts, ces derniers constituent des obstacles au déplacement des parois si bien que l'aimantation croît plus lentement en fonction du champ appliqué : c'est le cas des matériaux *ferromagnétiques durs*.

En fait, si l'on examine en détail cette région où le champ interne est très faible, la susceptibilité reste finie : le début de la courbe d'aimantation dépend beaucoup de la pureté de l'échantillon, de son histoire magnétique, métallurgique et mécanique. C'est pour cette raison que les courbes d'aimantation en dessous de  $T_C$  ne sont pas toutes du type décrit ci-dessus et qu'il est difficile de caractériser un ferromagnétique à partir de ses seules courbes d'aimantation.

Les domaines magnétiques et les parois associées jouent un rôle essentiel dans la plupart des applications technologiques du magnétisme : aussi y reviendrons-nous largement par la suite, en particulier dans les chapitres 5 et 6.

### 2.3. ANISOTROPIE MAGNÉTIQUE

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'aimantation d'une substance cristallisée s'orientait préférentiellement selon certaines directions cristallographiques : c'est là l'un des aspects de l'anisotropie magnétique qui s'explique par la symétrie de l'environnement local des atomes magnétiques. Dans les liquides et les matériaux amorphes, la distribution statistique des environnements locaux conduit généralement à une anisotropie macroscopique nulle.

En revanche, dans les matériaux magnétiques cristallisés, cas le plus fréquent, cette anisotropie provenant de l'environnement local joue un rôle prépondérant : elle porte le nom d'*anisotropie magnétocristalline* et provient généralement de l'interaction électrostatique entre la distribution de charges de l'environnement et les orbitales des électrons magnétiques de l'atome considéré : on parle alors de champ électrique cristallin (*crystalline electric field*, ou CEF en anglais). Nous verrons plus loin qu'il existe d'autres formes d'anisotropie telles que l'anisotropie de forme, l'anisotropie d'échange, l'anisotropie induite... mais celles-ci sont généralement plus faibles.

Cette anisotropie magnétocristalline joue un rôle fondamental sur les propriétés magnétiques de la plupart des matériaux, en particulier ceux contenant des terres rares : ainsi, la variation de l'aimantation en fonction du champ et celle de la susceptibilité en fonction de la température dépendent fortement de l'orientation lorsque ces mesures sont effectuées sur un monocristal. L'approche phénoménologique de l'anisotropie magnétocristalline consiste à considérer que l'énergie ne dépend que de l'orientation du moment (en réalité le champ cristallin a un effet non seulement sur l'orientation mais également sur le module du moment).

On exprime ainsi la densité d'énergie libre  $F$  à l'aide d'un polynôme développé selon les puissances paires croissantes des cosinus directeurs de l'aimantation. Les termes constituant ce polynôme dépendent de la symétrie du système considéré de sorte que l'énergie reste invariante dans les opérations de symétrie. Il en résulte que le nombre de termes est d'autant plus faible que la symétrie est élevée. De plus, l'expérience montre qu'en général l'importance de ces termes décroît très rapidement lorsque leur degré augmente, si bien qu'il suffit de se limiter aux premiers termes du polynôme. Nous développons ci-dessous l'expression de cette densité d'énergie d'anisotropie magnétocristalline pour les cas les plus fréquemment rencontrés.

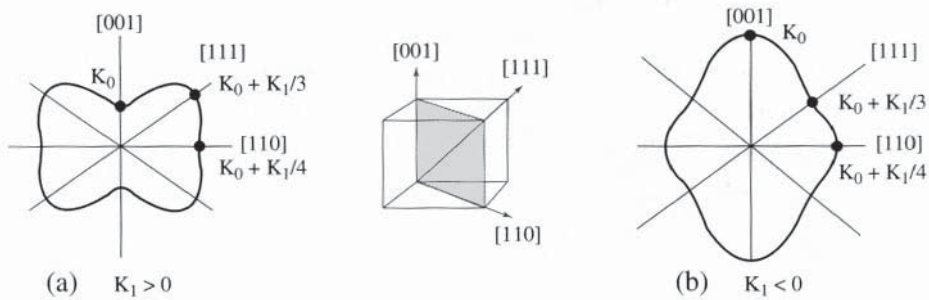
#### 2.3.1. Cas de la Symétrie cubique

Désignons par  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  les cosinus des angles que fait l'aimantation avec les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallèles aux axes quaternaires.

La densité d'énergie d'anisotropie s'écrit dans ce cas :

$$F = K_1 (\alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2) + K_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \dots \quad (3.2)$$

Les  $K_i$  sont des *constantes d'anisotropie* qui dépendent de la température. A titre d'exemple nous avons représenté sur la figure 3.10 la variation de  $F$ , dans le plan contenant les trois axes de symétrie principaux, en coordonnées polaires, dans deux cas simples où  $K_2 = 0$  :  $K_1 > 0$  et  $K_1 < 0$ .



**Figure 3.10 - Représentation polaire de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline**

Cas d'un cristal cubique. L'énergie est représentée en fonction de la direction de l'aimantation dans le plan (perpendiculaire à un axe binaire) contenant les trois directions principales de symétrie. L'énergie étant définie à une constante près, nous avons rajouté un terme  $K_0$  pour faciliter la représentation.

On peut aisément en conclure que, pour  $K_1 > 0$ , l'énergie est minimum lorsque les moments sont orientés selon un axe quaternaire  $\langle 001 \rangle$  ( $[001]$ ,  $[100]$  ou  $[010]$  car toutes ces directions sont équivalentes). Cette direction est donc de facile aimantation. En revanche, pour  $K_1 < 0$ , ce sont les axes ternaires comme  $[111]$  qui sont de facile aimantation. Rappelons qu'un axe binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire est tel que le système reste invariant dans une rotation de  $2\pi/2$ ,  $2\pi/3$ ,  $2\pi/4$  ou  $2\pi/6$ , respectivement. On a également l'habitude de parler d'*axe d'ordre  $n$*  pour désigner une rotation de  $2\pi/n$  qui laisse le système invariant.

### 2.3.2. Cas de la symétrie hexagonale

$\theta$  et  $\phi$  étant les angles définis en coordonnées polaires, et l'axe  $z$  étant parallèle à l'axe sénaire  $[001]$  (figure 3.11-a), la densité d'énergie libre se présente sous la forme :

$$F = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta + K_3 \sin^6\theta + K_4 \sin^6\theta \cos 6\phi + \dots \quad (3.3)$$

### 2.3.3. Cas de la symétrie quadratique

Dans cette symétrie (figure 3.11-b) caractérisée par un axe quaternaire  $[001]$  parallèle à  $z$ , on a l'expression suivante de l'énergie d'anisotropie magnétique :

$$F = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta + K_3 \sin^4\theta \cos 4\phi + \dots \quad (3.4)$$

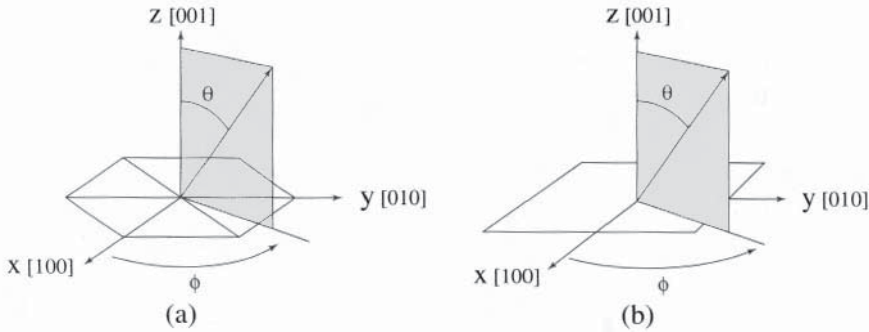


Figure 3.11 - Définition des angle  $\theta$  et  $\phi$  en symétries (a) hexagonale et (b) quadratique

**N.B.** - En symétrie hexagonale, les directions [100] et [010] font entre elles un angle de  $120^\circ$ , alors qu'en symétrie quadratique, elles sont orthogonales. C'est la direction [120] qui est perpendiculaire à [100] en symétrie hexagonale.

### 2.3.4. Cas de la symétrie uniaxiale

En symétrie hexagonale et quadratique, nous venons de voir que le premier terme est d'ordre 2 et ne dépend que de l'angle entre le moment magnétique et l'axe de plus haute symétrie (d'ordre 6 et 4 respectivement). Il en est de même en symétrie rhomboédrique où l'axe de plus haute symétrie est d'ordre 3. Le terme de degré plus élevé est d'ordre 4 et d'au moins un ordre de grandeur plus petit. C'est pourquoi pour ces trois types de symétrie, on exprime la densité d'énergie d'anisotropie à l'aide du seul terme d'ordre deux qui ne fait intervenir qu'un seul axe de symétrie :

$$F = K_1 \sin^2\theta \quad (3.5)$$

Cette anisotropie, dite *uniaxiale*, peut aussi se rencontrer dans les matériaux amorphes sous contrainte, ou les matériaux isotropes recuits sous champ magnétique.

### 2.3.5. Quelques remarques sur l'anisotropie magnétique

- ◆ Les constantes d'anisotropie magnétocristalline sont généralement exprimées en énergie par unité de volume. Elles peuvent aller de quelques dizaines de  $\text{Jm}^{-3}$  dans les matériaux très doux à  $10^7$ - $10^8 \text{Jm}^{-3}$  dans certains alliages de terres rares en passant par  $10^3$  à  $10^4 \text{Jm}^{-3}$  pour les métaux 3d de symétrie cubique (nickel, fer).
- ◆ Les constantes d'anisotropie décroissent en général rapidement lorsque l'ordre du monôme associé augmente, c'est la raison pour laquelle on se limite aux premiers termes. Le terme d'ordre 2 n'existe pas en symétrie cubique, alors qu'il apparaît dans toutes les autres symétries, il en résulte d'après ce qui vient d'être dit que l'anisotropie d'un matériau de symétrie cubique est généralement plus faible (pour un même type d'atome magnétique). De même, en symétrie hexagonale (ou quadratique), l'anisotropie dans le plan perpendiculaire à l'axe sénaire (ou quaternaire) est beaucoup plus faible que l'anisotropie entre ce plan et l'axe sénaire (ou quaternaire).

- ◆ Signalons enfin que les constantes d'anisotropie varient souvent en fonction de la température beaucoup plus rapidement que l'aimantation. Dans les substances magnétiques isolantes, ces constantes varient généralement comme  $[M_s(T)]^{n(n+1)/2}$  à basse température, si  $M_s(T)$  est l'aimantation spontanée, et  $n$  est l'ordre du monôme où apparaît la constante d'anisotropie : ainsi à basse température en symétrie hexagonale (équation 3.3),  $K_1$  varie comme  $[M_s]^3$  et  $K_2$  comme  $[M_s]^{10}$ , tandis qu'en symétrie cubique (équation 3.2),  $K_1$  varie comme  $[M_s]^{10}$ . Vers  $T_C$ , la variation est moins rapide, par exemple en  $(3/5)[M_s(T)]^2$  pour la constante  $K_1$  en symétrie hexagonale. En réalité, les choses ne sont pas aussi simples, et une étude thermodynamique détaillée a été publiée par Callen et ses collaborateurs [1], pour le cas des isolants : ces auteurs montrent qu'une analyse de l'anisotropie magnétocristalline en polynômes harmoniques des cosinus directeurs de l'aimantation serait préférable à l'analyse en polynômes homogènes donnée ci-dessus (équations 3.2 à 3.4) : pour plus de détail, le lecteur est invité à se reporter à l'annexe 6, § A6.5. Dans le cas des métaux, aucune loi générale ne semble plus s'appliquer, car le détail de la structure de bande joue souvent un rôle essentiel : c'est le cas du nickel par exemple, dont la constante  $K_1$  varie très vite avec l'aimantation à basse température, et de plus dont les constantes d'anisotropie d'ordre supérieur sont toutes notables jusqu'à un ordre très élevé ( $n = 34$ ) [2].

## 2.4. EFFETS LIÉS À L'ANISOTROPIE - NOTION DE CHAMP D'ANISOTROPIE RÈGLE DES PHASES

Pour comprendre l'effet de l'anisotropie magnétocristalline sur les propriétés magnétiques des solides, nous allons d'abord étudier les courbes d'aimantation de quelques cristaux sans défauts présentant différentes symétries. Nous nous pencherons ensuite sur le cas de la symétrie cubique, avant d'examiner l'effet de l'anisotropie sur la susceptibilité paramagnétique.

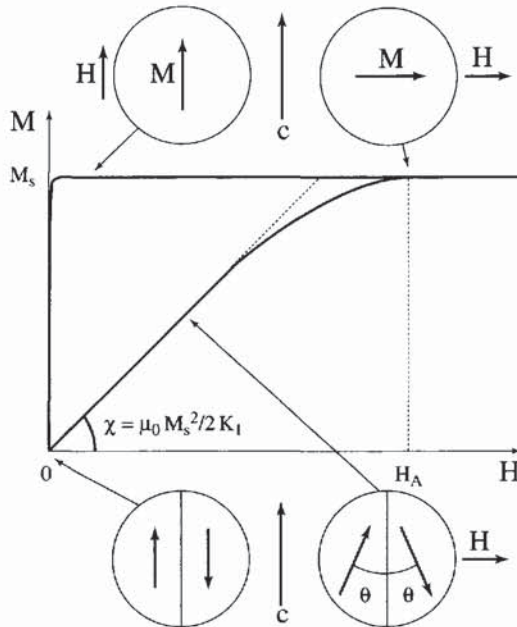
### 2.4.1. Matériau uniaxial de symétrie quadratique ou hexagonale

Comme nous l'avons signalé précédemment la constante d'anisotropie  $K_1$  (voir formules 3.3 et 3.4) d'ordre deux est la plupart du temps prépondérante devant les constantes d'ordre supérieur. C'est l'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons ci-dessous. Considérons un monocristal *de forme sphérique* porté à très basse température, et intéressons-nous aux courbes d'aimantation lorsque le champ est appliqué selon les trois différentes directions principales de symétrie, à savoir l'axe  $c$  et les deux autres directions du plan perpendiculaire à  $c$ , appelé également *plan de base*. La forme sphérique permet de s'affranchir de l'anisotropie de forme, et garantit d'autre part que le champ est uniforme dans la matière (§ 1.2.7 du chapitre 2). Nous allons examiner les deux situations opposées selon que  $K_1$  est positif ou négatif.

### L'axe «c» est de facile aimantation

Lorsque  $K_1$  est positif, les équations (3.3) et (3.4) montrent aisément que l'axe  $c$  est de facile aimantation.

- ◆ En champ nul, le matériau est divisé en deux types de domaines en proportions égales et l'on ne change rien à la généralité du problème en considérant qu'il existe deux domaines égaux comme cela est indiqué sur la figure 3.12.
- ◆ Lorsque le champ est appliqué selon  $c$ , le libre déplacement des parois conduit à la disparition des domaines dont l'aimantation est opposée au champ, dès que le champ appliqué  $H_0$  est supérieur à  $M_s/3$  (c'est-à-dire au champ démagnétisant maximum atteint lorsque la sphère est devenue monodomaine), au profit des domaines dont l'aimantation est parallèle au champ. L'aimantation macroscopique est alors égale à l'aimantation microscopique  $M_s$  (c'est-à-dire l'aimantation dans un domaine).



**Figure 3.12 - Matériau uniaxial ferromagnétique où l'axe de haute symétrie ( $c$ ) est de facile aimantation : variations théoriques de l'aimantation en fonction du champ interne à basse température parallèlement et perpendiculairement à l'axe de haute symétrie**  
Représentation schématique de la répartition en domaines pour différents champs

- ◆ Lorsque le champ est appliqué perpendiculairement à l'axe  $c$ , aucun domaine n'étant favorisé leur volume ne change pas. L'aimantation de chacun d'eux tourne du même angle  $\theta$ . Pour un champ appliquée  $H_0$  et en se limitant au terme du quatrième ordre dans le développement de l'anisotropie, la densité d'énergie libre a pour expression :

$$F = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta - \mu_0 H_0 M_s \sin \theta + \mu_0 N M_s^2 \sin^2\theta/2 \quad (3.6)$$

Dans cette équation l'avant-dernier terme, appelé terme de Zeeman (équation 2.80) représente l'énergie d'un dipôle rigide de moment  $\mathbf{M}_s V$  soumis à une induction  $\mu_0 \mathbf{H}_0$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{M}_s$ . Le dernier terme exprime l'énergie de champ démagnétisant. La minimisation de cette énergie par rapport à  $\theta$  conduit à deux solutions :

- ♦  $\cos \theta = 0$ , c'est-à-dire que l'aimantation de chaque domaine est parallèle au champ et  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_s$  ; c'est la solution qui s'impose lorsque le champ est suffisamment grand,
- ♦ et en champ plus faible, c'est-à-dire tant que l'aimantation  $\mathbf{M}_s$  dans chaque domaine n'est pas parallèle au champ magnétique, on obtient :

$$2K_1 \sin \theta + 4K_2 \sin^3 \theta = \mu_0 (H_0 - NM_s \sin \theta) M_s = \mu_0 H M_s,$$

qui, sachant que  $\sin \theta = M/M_s$ , conduit à l'égalité :

$$2K_1 M/M_s + 4K_2 (M/M_s)^3 = \mu_0 H M_s \quad (3.7)$$

Précisons que  $M$  est l'aimantation macroscopique qui est parallèle au champ et qui n'est autre que la composante selon le champ de l'aimantation de chaque domaine. L'équation (3.7) montre que la susceptibilité en champ faible vaut :  $\chi = \mu_0 M_s^2 / 2K_1$ , et que la saturation ( $M = M_s$ ) est atteinte pour un certain champ  $H_A$  appelé champ d'anisotropie qui est donné par l'équation :

$$H_A = \frac{2K_1 + 4K_2}{\mu_0 M_s} \quad (3.8)$$

C'est le champ interne pour lequel l'aimantation de chaque domaine est devenue parallèle au champ appliqué. On peut également montrer que l'aire comprise entre les deux courbes  $H_0 // c$  et  $H_0 \perp c$  est égale à  $K_1 + K_2$ . Ainsi la mesure des courbes  $M(H)$  selon  $c$  et perpendiculairement à  $c$  permet une détermination des constantes d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$ . On notera que  $\chi \sim M_s / H_A$  si  $K_2 \ll K_1$ .

A titre d'exemple, les courbes  $M(H)$  mesurées à 4.2 K sur un cristal du composé hexagonal  $YCo_5$ , où seul le cobalt est magnétique, sont reportées sur la figure 3.13.

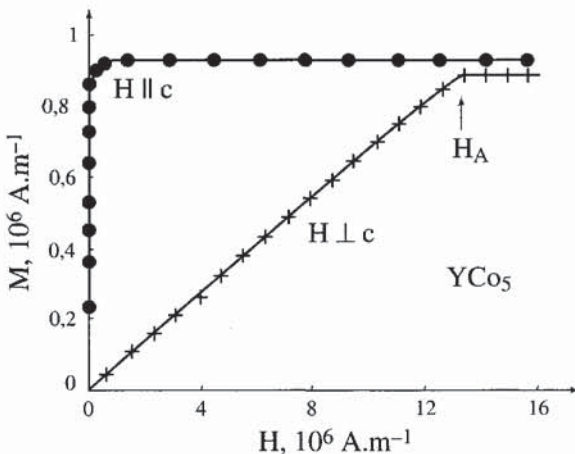


Figure 3.13 - Variations de l'aimantation en fonction du champ interne mesurées à 4,2 K sur un monocristal du composé hexagonal  $YCo_5$ , d'après [3]

Seul le cobalt porte un moment magnétique. La courbe en trait plein - pour  $H \perp c$  - représente la variation ajustée à l'aide du modèle théorique (relation 3.7) légèrement modifié pour tenir compte d'une faible variation du module de l'aimantation au cours du processus (anisotropie de l'aimantation).

On peut remarquer qu'au-dessus du champ d'anisotropie, l'aimantation perpendiculaire est légèrement inférieure à l'aimantation parallèle. Un tel écart fréquemment observé porte le nom d'*anisotropie de l'aimantation*.

**Remarque sur le rôle de l'anisotropie dans le plan perpendiculaire à  $c$**

Si l'on tient compte des termes d'ordres supérieurs représentant l'anisotropie dans le plan de base (terme en  $K_4$  et  $K_3$  dans les équations (3.3) et (3.4), respectivement), la pente à l'origine de la courbe d'aimantation est toujours égale à  $\mu_0 M_s^2 / 2K_1$ , que l'on applique le champ selon l'une ou l'autre des directions de symétrie du plan de base. En revanche il y aura une légère différence des champs d'anisotropie. Par exemple en symétrie quadratique,  $H_A$  est donné par l'expression (3.8) dans laquelle on remplace  $K_2$  par  $K_2 + K_3$  ou  $K_2 - K_3$  selon que le champ est appliqué selon  $\langle 100 \rangle$  ou  $\langle 110 \rangle$ , respectivement. Cet effet n'est généralement pas observable en raison de la faiblesse du coefficient  $K_3$  en symétrie quadratique et à plus forte raison du terme  $K_4$  en symétrie hexagonal.

**Anisotropie planaire : l'axe «c» est de difficile aimantation**

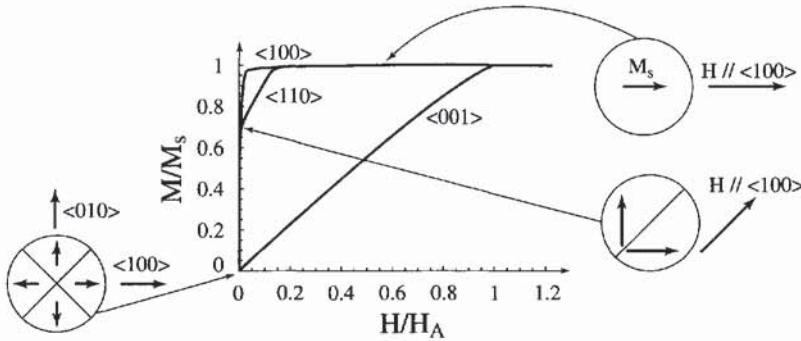
Lorsque la constante  $K_1$  est négative, l'axe  $c$  est de difficile aimantation. C'est alors l'une des directions de symétrie du plan de base qui est de facile aimantation et l'on observe en champ faible des différences notables selon que le champ est appliqué suivant l'une ou l'autre des directions de symétrie du plan. A titre d'exemple, nous avons simulé les courbes d'aimantation d'un cristal quadratique lorsque le champ est appliqué selon les trois types de directions de symétrie à savoir  $\langle 001 \rangle$ ,  $\langle 100 \rangle$  et  $\langle 110 \rangle$  (figure 3.14). Dans cet exemple nous avons considéré  $K_3 < 0$  (voir équation 3.4) et  $|K_3/K_1| = 10^{-2}$ . On montre facilement que les directions  $\langle 100 \rangle$  sont de facile aimantation. En champ nul, le matériau est divisé en quatre types de domaines dans lesquels l'aimantation spontanée est orientée selon l'une de ces directions. Un champ très faible appliqué selon un axe  $\langle 100 \rangle$  rend l'échantillon monodomaine et l'aimantation mesurée est égale à l'aimantation spontanée  $M_s$ . Lorsque le champ est appliqué selon un axe  $\langle 110 \rangle$ , en champ très faible il ne reste plus que deux types de domaines dont les aimantations sont à  $45^\circ$  de part et d'autre du champ. L'aimantation extrapolée en champ interne nul vaut alors  $M_s \cos 45^\circ = M_s / \sqrt{2}$ . C'est la *règle des phases*. En champ croissant l'aimantation augmente et atteint l'aimantation spontanée d'autant plus rapidement que  $K_3$  est petit. Lorsque le champ est appliqué selon  $\langle 001 \rangle$  aucun des domaines n'est favorisé, les quatre types de domaines subsistent mais la variation de l'aimantation est la même que si l'échantillon était monodomaine.

En champ croissant l'aimantation varie de 0 jusqu'à  $M_s$ , valeur atteinte pour le champ d'anisotropie  $H_A$  donné par l'expression :

$$H_A = 2|K_1|/\mu_0 M_s \quad (3.9)$$

On pourrait définir un champ d'anisotropie lorsque le champ est appliqué selon  $\langle 110 \rangle$  mais, dans le cas d'un système uniaxial, on réserve généralement le terme de

champ d'anisotropie  $H_A$  pour caractériser l'anisotropie entre l'axe  $c$  et le plan de base. Une analyse plus complète des courbes d'aimantation du cas traité ci-dessus fait l'objet de l'exercice 2.



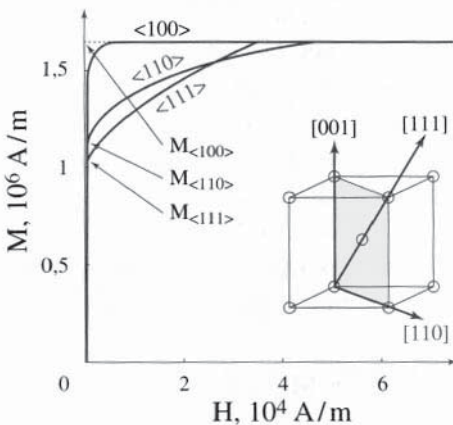
**Figure 3.14 - Courbes d'aimantation d'un cristal de symétrie quadratique**

Les variations sous champ de l'aimantation sont tracées selon les trois axes de symétrie principaux lorsque les axes  $\langle 100 \rangle$  sont de facile aimantation (voir texte).  $H_A$  est fourni par l'équation (3.9). Le calcul a été effectué pour  $K_2 = |K_1|/10$  et  $|K_3| = |K_1|/100$ .  $H$  désigne le champ interne.

Dans le cas d'une substance hexagonale, dont le plan de base est également de facile aimantation, en champ nul il existe six types de domaines correspondant aux trois directions faciles équivalentes ; ils occupent le même volume. Lorsqu'un champ très faible est appliqué selon l'une des trois directions plus difficiles du plan de base, la *règle des phases* conduit à une aimantation mesurée égale à  $M_s \cos 30^\circ = M_s \sqrt{3}/2$ .

#### 2.4.2. Anisotropie magnétocristalline en symétrie cubique

En symétrie cubique, il existe trois types d'axes de haute symétrie différents, à savoir les axes  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$  d'ordre quatre, deux et trois respectivement. Les



**Figure 3.15 - Courbes d'aimantation d'un monocristal de fer (symétrie cubique) lorsque le champ est appliqué selon les trois directions de haute symétrie**

comportements magnétiques observés diffèrent selon que l'un ou l'autre de ces axes est de difficile ou facile aimantation. A titre d'exemple, les courbes d'aimantation mesurées à 300 K sur un monocristal de fer sont reportées sur la figure 3.15 d'après [4].

Selon  $\langle 100 \rangle$ , l'aimantation est la plus élevée et atteint sa valeur maximum en champ très faible ; c'est la direction de facile aimantation. En champ nul, le matériau est divisé en six types de domaines, appelés *phases*, dans lesquels l'aimantation spontanée  $M_s$  est orientée selon l'une de ces directions. Lorsque le champ est appliqué selon

les axes  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$  on retrouve la *règle des phases* : en champ très faible l'aimantation reste parallèle à  $\langle 100 \rangle$  et les aimantations extrapolées en champ interne nul,  $M_{\langle 110 \rangle}$  et  $M_{\langle 111 \rangle}$  (figure 3.15) correspondent à la projection de l'aimantation spontanée  $M_{\langle 100 \rangle} = M_s$  selon chacune de ces directions ( $M_{\langle 110 \rangle} = M_s / \sqrt{2}$  et  $M_{\langle 111 \rangle} = M_s / \sqrt{3}$ ).

Une analyse du même type que celle développée précédemment dans le cas uniaxial montre que :

- ◆ l'aire entre les courbes mesurées selon les directions  $\langle 100 \rangle$  et  $\langle 110 \rangle$  est égale à  $K_1/4$ ,
- ◆ et le champ pour lequel ces deux courbes se rejoignent a pour expression  $H_{A\langle 110 \rangle} = 2K_1 / \mu_0 M_s$ .

### 2.4.3. Anisotropie magnétique en phase paramagnétique

Signalons que dans les systèmes uniaxiaux, de symétrie hexagonale ou quadratique par exemple, où le magnétisme provient de terres rares pour lesquelles  $L \neq 0$  (voir chapitre 7), la forte anisotropie magnétocristalline de ces dernières conduit à une *anisotropie de la susceptibilité magnétique*. En particulier on observe, au-dessus de la température d'ordre, deux lois de Curie-Weiss décalées pour les susceptibilités parallèle et perpendiculaire à l'axe  $c$  de haute symétrie, à savoir :  $1/\chi_{\parallel} = (T - \theta_{p\parallel})/\mathcal{C}$  et  $1/\chi_{\perp} = (T - \theta_{p\perp})/\mathcal{C}$ . L'écart entre les températures de Curie paramagnétiques parallèle ( $\theta_{p\parallel}$ ) et perpendiculaire ( $\theta_{p\perp}$ ) est alors une mesure de la contribution principale à l'anisotropie, à savoir le terme d'ordre deux.

## 2.5. PHÉNOMÈNES DÉPENDANT DU TEMPS

Après application d'un champ magnétique sur une substance ferromagnétique, celle-ci acquiert une aimantation qui dépend de l'intensité du champ magnétique, de la nature de la substance, de la température, mais aussi de l'histoire antérieure de l'échantillon considéré : en particulier, l'aimantation dépend souvent de façon critique de l'ordre dans lequel se sont succédés *traitements thermiques, contraintes mécaniques* et variations de *champ magnétique*. Mais il est un autre paramètre essentiel à considérer, c'est *le temps*, car on observe bien souvent une évolution temporelle des propriétés magnétiques : *une substance soumise à un champ magnétique n'acquiert pas instantanément une aimantation finale et immuable*.

De nombreux effets contribuent à cette évolution temporelle de l'aimantation :

- ◆ le *vieillissement* (aging en anglais) consiste en une évolution des propriétés magnétiques liée aux modifications irréversibles de la structure des matériaux concernés (par exemple, la formation de précipités) ; ces modifications structurales peuvent accompagner des traitements mécaniques, être dues à des effets chimiques (oxydation ou autres) ou résulter d'un phénomène de diffusion atomique.

- ◆ divers phénomènes de *relaxation* peuvent aussi s'observer. Ainsi verrons-nous au § 2 du chapitre 4 qu'il s'écoule un certain laps de temps qui peut atteindre  $10^{-12}$  s à  $10^{-7}$  s avant qu'un *moment magnétique atomique* ne s'aligne sur le champ qui vient de lui être appliqué ; ce phénomène de relaxation peut être sensible dans certaines applications en électronique rapide (voir chapitres 17 et 23). A l'échelle de l'échantillon, on peut encore rencontrer – dans le cas de matériaux conducteurs – une relaxation d'origine électromagnétique due aux *courants de Foucault* qui accompagnent toute variation de flux magnétique dans la matière et qui, pendant quelques secondes ou fractions de seconde, empêchent la pénétration d'un champ rapidement variable à l'intérieur du matériau métallique considéré ; la vitesse de déplacement des parois, mesurée par Sixtus et Tonks au sein de filaments métalliques [5], est – par exemple – conforme à ce que prévoient les calculs qui prennent en compte le délai imposé par les courants de Foucault.
- ◆ les *traînages magnétiques* (magnetic after-effect en anglais) : après application d'un champ magnétique, l'aimantation n'évolue qu'après un certain temps et continue à évoluer dans une gamme de temps tout à fait accessible à l'expérience ; il y a retard entre la cause et l'effet. On distingue le *traînage de fluctuations thermiques* (irréversible) de caractère thermodynamique et présent dans toutes les substances ferromagnétiques, et le *traînage de diffusion* (réversible) dû au déplacement de particules matérielles au sein de la matière. Deux ouvrages essentiels [6, 7] fournissent une excellente présentation très détaillée de ces effets, que nous présentons brièvement ici et qui seront développés au § 5 du chapitre 6.

### 2.5.1. Traînage de fluctuations thermiques

Nous avons vu sur la figure 3.5 qu'à une même valeur de champ magnétique, il correspondait trois valeurs différentes de l'aimantation : l'une définit la courbe de première aimantation, la seconde s'observe lorsque le champ magnétique décroît depuis une valeur élevée et positive, et le troisième lorsque le champ croît depuis les valeurs négatives. Chacune de ces valeurs correspond à une valeur d'équilibre de l'énergie totale du système, mais il s'agit d'équilibres métastables. C'est en particulier le cas de l'aimantation rémanente, qui s'observe lorsque le champ magnétique est ramené à zéro après avoir saturé l'échantillon. On conçoit alors aisément que l'agitation thermique puisse faire évoluer tout doucement le système vers un état d'équilibre plus stable : l'aimantation rémanente va alors diminuer peu à peu, et de plus en plus lentement au cours du temps pour tendre vers zéro en un temps infini. L'état d'équilibre final ( $M = 0$ ,  $H = 0$ ) sera le même quels que soient le signe et l'intensité du champ magnétique appliqué avant retour au zéro.

Ce point ( $M = 0$ ,  $H = 0$ ) est l'origine de ce que l'on définit comme étant la *courbe d'aimantation anhystérétique* de la substance. En effet, à toute valeur non nulle  $H_0$  du champ magnétique appliqué à une substance ferromagnétique, il correspond de

même une seule valeur de l'aimantation anhystérétique, valeur qui serait observée au bout d'un temps infiniment long. Il existe cependant une technique plus réaliste pour relever cette courbe d'aimantation anhystérétique sur un matériau doux, c'est de superposer à la valeur du champ statique  $H_0$  considéré un champ magnétique alternatif d'amplitude lentement décroissante jusqu'à zéro : la valeur d'équilibre est l'aimantation recherchée. La figure 3.16 montre le résultat ainsi obtenu sur un alliage de fer au silicium : la courbe anhystérétique a été tracée dans le premier quadrant, elle est située au-dessus de toute courbe expérimentale partant de l'origine (y compris la courbe de première aimantation) et en dessous de toute courbe mesurée à champ décroissant à partir d'un champ supérieur au champ de saturation.

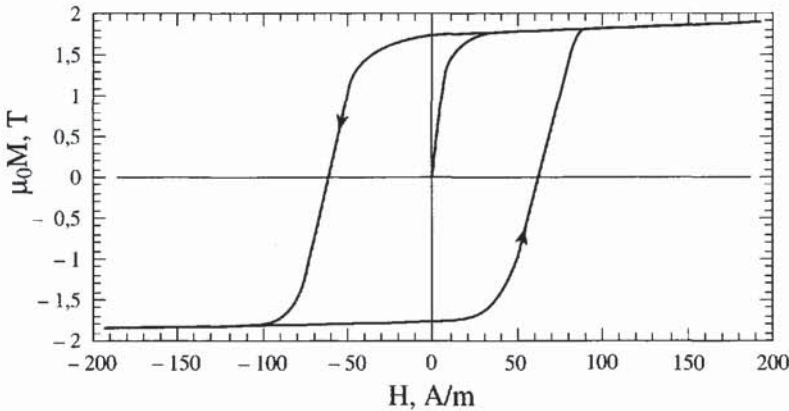


Figure 3.16 - Courbe d'aimantation d'un alliage Fe-Si texturé : cycle d'hystérésis et courbe anhystérétique

Le traînage purement magnétique qui vient d'être évoqué ne met en jeu que des retournements de moments magnétiques dans une matrice cristalline ou amorphe supposée parfaitement stable : les valeurs de l'aimantation à saturation et des constantes d'anisotropie magnétocristalline restent alors constantes dans ce processus.

### 2.5.2. Traînage de diffusion

Contrairement à la situation précédente, le traînage de diffusion est lié à la diffusion réversible d'atomes et/ou de lacunes entre sites interstitiels du réseau d'un matériau magnétique. Cela peut conduire à une variation de son aimantation et même de ses constantes d'anisotropie : les caractéristiques magnétiques essentielles de la substance sont alors modifiées. Cet effet n'existe que dans les substances pouvant contenir des impuretés de petite taille dans des sites interstitiels (carbone, azote, ...), et se manifeste seulement dans la gamme des températures où la diffusion de ces impuretés est suffisante. Il peut être mis à profit pour induire dans un matériau, isotrope au départ, une anisotropie magnétique uniaxiale appelée *anisotropie induite*. C'est ainsi, par exemple, que les fabricants de ferrites peuvent optimiser les performances de leurs produits.

### 3. PHÉNOMÈNES PHYSIQUES ASSOCIÉS AU MAGNÉTISME

Nous avons considéré jusqu'ici les effets d'un champ magnétique exciteur sur la réponse magnétique, aimantation ou induction magnétique. Mais la présence du magnétisme dans une substance donnée s'accompagne de nombreux effets secondaires, qui affectent l'ensemble de ses propriétés physiques : thermiques, élastiques, thermoélastiques, électriques, etc. ; nous allons en présenter ici quelques exemples à titre d'illustration. C'est au voisinage de la température critique ( $T_C$ ,  $T_N$ ) que tous ces effets secondaires sont les plus spectaculaires comme on pourra le voir sur les figures qui suivent.

La figure 3.17 montre les variations thermiques de la contribution magnétique à la chaleur spécifique du composé antiferromagnétique  $\text{ErGa}_2$ .

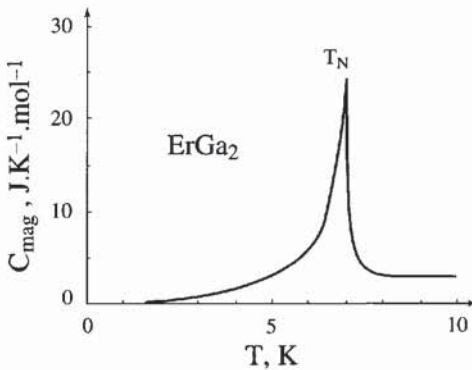


Figure 3.17 - Variation thermique de la chaleur spécifique de  $\text{ErGa}_2$  [8]

Le pic très marqué que l'on observe au voisinage de sa température de Néel signifie que l'entropie du système des moments magnétiques augmente notablement à  $T_N$ , au passage de l'ordre antiferromagnétique vers l'état paramagnétique plus désordonné ; des explications plus détaillées sur le couplage des propriétés thermiques et magnétiques seront fournies au chapitre consacré au couplage magnétocalorique (chapitre 11).

Les variations thermiques de la résistivité réduite  $\rho/\rho_0$  et de sa dérivée  $d\rho/\rho_0dT$  sont reportées toutes deux sur la figure 3.18 : la contribution magnétique à la résistivité électrique  $\rho$  décroît – en valeur absolue – de façon régulière quand la température s'élève pour s'annuler au voisinage de  $T_C$  (voir également au chapitre 14 la figure 14.2). Sa dérivée présente un pic en lambda très accentué, centré sur  $T_C$ .

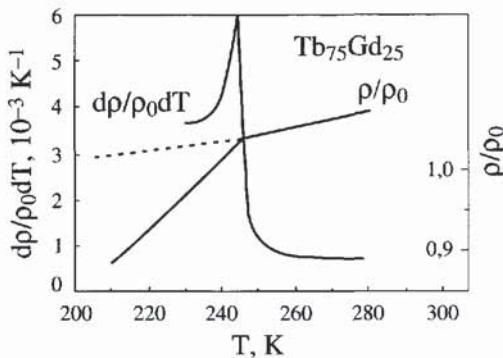


Figure 3.18 - Variations thermiques de la résistivité électrique de  $\text{Tb}_{75}\text{Gd}_{25}$  selon l'axe b et de sa dérivée par rapport à la température ( $\rho_0$  = résistivité à  $T_C$ ) [9]  
(En pointillé : le comportement attendu pour une substance non magnétique)

Deux autres exemples sont encore présentés sur les figures 3.19 et 3.20 : la dilatation thermique de  $\text{GdAl}_2$  présente un comportement linéaire normal au-dessus de sa température de Curie  $T_C = 170$  K. A plus basse température, on voit apparaître une contraction du paramètre de réseau cristallin d'origine magnétique que nous identifierons plus loin comme étant la *magnétostriction d'échange*, c'est-à-dire un effet de couplage magnétoélastique du premier ordre (voir le chapitre 12). Enfin, la variation thermique de la constante élastique  $c_{44}$  de  $\text{GdZn}$  présente aussi une anomalie positive en dessous de  $T_C = 270$  K : il s'agit là d'un effet de couplage magnétoélastique du second ordre. Les dérivées par rapport à la température de ces deux grandeurs physiques (c'est-à-dire le coefficient de dilatation thermique et le coefficient de température de la constante élastique) présentent, elles aussi, une anomalie en forme de lambda très marquée à  $T_C$ .

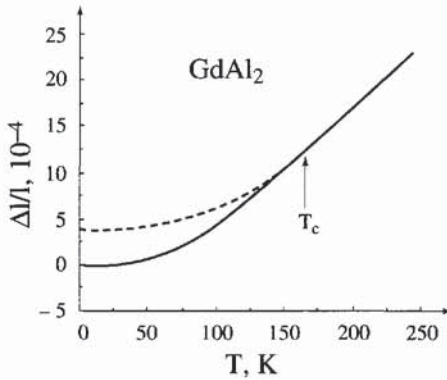


Figure 3.19 - Dilatation thermique longitudinale du composé  $\text{GdAl}_2$  [10]

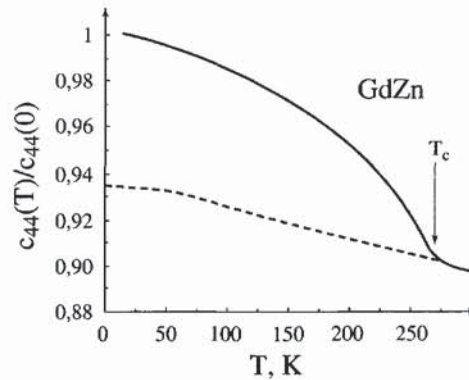


Figure 3.20 - Variation de la constante élastique  $c_{44}(T)$  de  $\text{GdZn}$  [11]

En pointillé : les comportements attendus pour des substances non magnétiques.

Tous ces effets, et bien d'autres encore, sont la manifestation de couplages entre les différentes propriétés physiques de la substance : couplages magnétocalorique, magnétoélastique, magnétoélectrique, magnéto-optique, etc. ... Leur étude ne relève pas que de la pure spéculation : en effet, d'une part leur connaissance peut être précieuse au chercheur qui veut préciser une structure magnétique, mais aussi et surtout, ces effets donnent lieu à de nombreuses applications industrielles qui seront traitées dans la suite de cet ouvrage.

L'approche thermodynamique du magnétisme qui sera présentée au chapitre 10 permettra de rendre compte formellement de ces couplages, de prévoir les effets associés et d'en donner une description qualitative.

## EXERCICES

**E.1** Soit un composé ferromagnétique quadratique dont l'axe  $c$  est de facile aimantation. Le tableau ci-dessous donne quelques couples de valeurs du champ appliqué  $H_0$  et de l'aimantation  $M$  mesurée à 4 K dans une direction perpendiculaire à l'axe  $c$ .

$H_0$ ( $10^4 \text{ Am}^{-1}$ )	9,58	43,77	63,42	95,49	127,32
$M$ ( $10^4 \text{ Am}^{-1}$ )	5,83	26,24	37,46	54,57	70,10

**E.1.1** - Sachant que l'échantillon est taillé sous forme de sphère, donner pour chaque couple le champ interne  $H$ .

**E.1.2** - Dédurre de la formule (3.7) l'expression de  $H/M$  en fonction de  $M^2$ .

**E.1.3** - Tracer cette courbe expérimentale. L'allure de cette dernière correspond-elle à celle attendue ?

Dédurre les valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  sachant que  $M_s = 85,12 \times 10^4 \text{ Am}^{-1}$ .

**E.2** On considère un cristal de symétrie quadratique ayant les caractéristiques du cas considéré au § 2.4.1.2, dans lequel  $K_1 < 0$  et  $K_3 < 0$  et tel que  $K_1$  soit prépondérant devant  $K_2$  et  $K_3$  (voir équation 3.4).

**E.2.1** - Lorsque le champ est appliqué selon la direction  $\langle 001 \rangle$ , montrer que la pente initiale de la courbe d'aimantation (en champ interne) a pour expression :  $\chi = dM/dH = \mu_0 M_s^2 / (2|K_1| - 4K_2 + 4|K_3|)$ , et retrouver l'expression (3.9) du champ d'anisotropie  $H_A$ .

**E.2.2** - Quand le champ est appliqué selon  $\langle 110 \rangle$ , montrer que la pente initiale de la courbe d'aimantation (en champ interne) a pour expression :  $\chi = dM/dH = \mu_0 M_s^2 / 32 |K_3|$  et que le champ d'anisotropie dans le plan de base (celui pour lequel la courbe selon  $\langle 110 \rangle$  rejoint celle selon  $\langle 100 \rangle$ ) s'écrit :  $H'_A = 16|K_3| / \mu_0 M_s$ .

**E.3** On considère un cristal ferromagnétique de symétrie cubique présentant une anisotropie magnétocristalline définie par  $K_1 < 0$  et  $K_2 = 0$ .

**E.3.1** - Quelles sont les directions de facile aimantation ? Combien y a-t-il de types de domaines magnétiques ?

**E.3.2** - En s'inspirant du raisonnement développé au § 2.4.3, tracer schématiquement les variations de l'aimantation en fonction du champ interne lorsque  $H_0$  est appliqué selon les trois directions principales successivement. On discutera les différents processus d'aimantation mis en jeu.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1** S.1.1  $H = H_0 - M/3$ .

S1.3 La variation expérimentale de  $H/M$  en fonction de  $M^2$  est bien linéaire. De l'ordonnée à l'origine on déduit  $K_1 = 5,96 \times 10^5 \text{ Jm}^{-3}$  et de la pente on tire  $K_2 = 0,59 \times 10^5 \text{ Jm}^{-3}$ .

**S.2** S.2.1 Au cours du processus  $\phi = 0$  (voir figure 3.11). En minimisant l'énergie totale par rapport à  $\theta$ , on peut tirer une relation entre  $M$  et  $H$  pour  $H$  compris entre 0 et  $H_A$ .

S.2.2 Au cours du processus  $\theta = 90^\circ$ . En minimisant l'énergie totale par rapport à  $\phi$  on trouve une expression de  $H$  en fonction de  $\phi$ . Sachant que  $M = M_s \cos(\pi/4 - \phi)$ , on calculera la pente à l'origine à partir des dérivées  $dH/d\phi$  et  $dM/d\phi$ . Pour la détermination de  $H'_A$ , un développement limité est nécessaire.

**S.3** S.3.1  $\langle 111 \rangle$ . Il y a 8 types de domaines magnétiques.

S.3.2 Soit  $M_s$  l'aimantation d'un domaine. On obtient des variations du même genre que celles de la figure 3.15, à la différence que les aimantations extrapolées en champ interne nul sont maintenant  $M_{\langle 111 \rangle} = M_s$ ,  $M_{\langle 110 \rangle} = M_s \sqrt{2}/\sqrt{3}$  et  $M_{\langle 100 \rangle} = M_s/\sqrt{3}$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] E.R. CALLEN, H.B. CALLEN, *J. Phys. Chem. Solids*, **16** (1960) 310.
- [2] R. GERSDORF, *Phys. Rev. Lett.*, **40** (1978) 344.
- [3] J.M. ALAMEDA, D. GIVORD, R. LEMAIRE, Q. LU, *J. Appl. Phys.* (1981) **52**, 2079.
- [4] K. HONDA, S. KAYA, *Sci. Reports Tohoku Univ.* (1926) **15**, 721.
- [5] K.J. SIXTUS, L. TONKS, *Phys. Rev.* (1931) **37**, 930 ; *ibid.* (1932) **42**, 419.
- [6] A. AHARONI, Introduction to the Theory of Ferromagnetism (1996) Clarendon Press, Oxford, 315 pages.
- [7] J.L. DORMANN, D. FIORANI, E. TRONC, Magnetic relaxation in fine-particle systems, in *Advance in Chemical Physics* (1997), **XCVIII**, 284-494, I. Prigogine & S.A. Rice, éditeurs, Wiley & sons, New York.
- [8] D. SCHMITT, communication privée.
- [9] J.B. SOUSA, M.M. AMADO, M.E. BRAGA, R.S. PINTO, J.M. MOREIRA, *Communications on Physics* **2** (1977) 95.
- [10] E. du TRÉMOLET de LACHEISSERIE, *J. Magn. Magn. Mater.*, **73** (1988) 289.
- [11] J. ROUCHY, P. MORIN, E. du TRÉMOLET de LACHEISSERIE, *J. Magn. Magn. Mater.* **23** (1981) 59.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

## CHAPITRE 4

# PHÉNOMÉNOLOGIE DU MAGNÉTISME À L'ÉCHELLE MICROSCOPIQUE

*Ce chapitre présente quelques modèles simples qui rendent compte des trois principaux types de magnétisme introduits précédemment : celui des substances qui ne comportent pas d'atome magnétique (**diamagnétisme**), celui des substances qui comportent des atomes magnétiques sans interaction mutuelle (**paramagnétisme**) et enfin celui des substances comportant des atomes dont les moments magnétiques sont en forte interaction (**ferro**, **antiferro**, et **ferrimagnétisme**, etc.). Les modèles décrits dans ce chapitre s'appliquent aux seules substances dont les électrons responsables du magnétisme sont bien localisés, mais non à celles dont le magnétisme est associé aux électrons de conduction qui, par définition, sont itinérants. Pour ces dernières, des modèles différents et moins intuitifs ont été développés (diamagnétisme de Landau, paramagnétisme de Pauli et ferromagnétisme de Stoner-Wohlfarth) : ces modèles du «magnétisme itinérant» seront décrits au chapitre 8.*

### 1. LE MODÈLE CLASSIQUE DU DIAMAGNÉTISME : CAS DES ÉLECTRONS LOCALISÉS

Nous avons vu au chapitre 3 que l'on qualifie de diamagnétique une substance qui ne comporte que des atomes dépourvus de moment magnétique permanent, et qui présente une susceptibilité magnétique négative généralement faible et pratiquement indépendante de la température.

La manière la plus simple de rendre compte de cette propriété est de considérer le modèle classique d'un électron se déplaçant sur une orbite circulaire. On peut assimiler le mouvement de cet électron à une spire de courant. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué perpendiculairement au plan de l'orbite, le courant est modifié d'une quantité telle que la variation du flux créée par la spire sur elle-même soit égale et opposée au flux créé par l'application du champ (loi de Lenz). Il en résulte une variation du moment magnétique orbital opposée au champ appliqué.

Cette variation du moment magnétique est la même quel que soit le sens du déplacement de l'électron sur son orbite, c'est-à-dire le sens du moment magnétique orbital initial : la variation est toujours opposée au champ magnétique (figure 4.1).

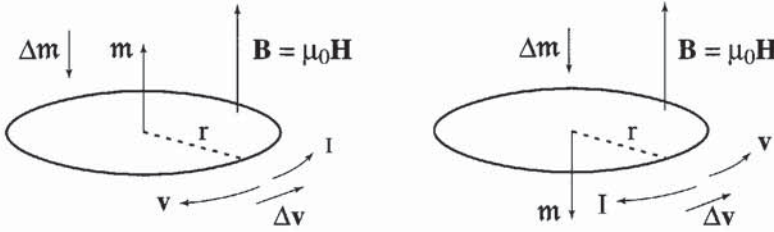


Figure 4.1 - Effet d'un champ magnétique sur deux électrons parcourant la même orbite circulaire en sens inverses

Comme un électron sur une orbite est équivalent à une spire de courant supraconductrice, c'est-à-dire sans résistance, la variation de courant, et donc de moment magnétique, persiste tant que le champ appliqué est maintenu.

Supposons que la même orbite soit parcourue en sens inverse par deux électrons de spin opposé. Le moment cinétique (aussi bien orbital que de spin) et par suite le moment magnétique de cette paire est nul. A l'application d'un champ, la variation du moment magnétique orbital étant opposée au champ pour les deux électrons, le système acquiert une aimantation opposée au champ.

Examinons de manière plus quantitative la variation de moment magnétique dans le cas d'un électron (charge  $-e$  et masse  $m_e$ ) se déplaçant à la vitesse  $v$  sur une orbite de rayon  $r$  (figure 4.1). Nous verrons plus loin (équation 7.3) que le moment magnétique orbital s'écrit :

$$m_o = -erv/2 \quad (4.1)$$

D'après la loi de Lenz, la force électromotrice  $u$  engendrée par la variation de flux  $\Phi$  dans la spire de courant lors de l'application d'un champ  $\mathbf{B}$  perpendiculairement au plan de l'orbite s'écrit :

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (4.2)$$

Nous supposons, hypothèse que nous justifierons plus loin, que le rayon de l'orbite n'est pas modifié. Soit  $\mathbf{E}$  le champ électrique agissant alors sur l'électron le long de l'orbite ( $u = 2\pi rE$ ), on obtient :

$$|\mathbf{E}| = -\frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (4.3)$$

Il en résulte une force agissant sur l'électron parallèlement à sa vitesse :

$$|\mathbf{F}| = -e|\mathbf{E}| = m_e \frac{dv}{dt} \quad (4.4)$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{er}{2m_e} \frac{dB}{dt} \quad (4.5)$$

En intégrant sur la variation totale de l'induction de 0 à B, on obtient :

$$\Delta v = \frac{e r}{2m_e} \int_0^B dB = \frac{e r}{2m_e} B \quad (4.6)$$

et reportant cette variation de v dans l'équation (4.1), on en déduit la variation du moment magnétique :

$$\Delta m = -(e^2 r^2 / 4m_e) B \quad (4.7)$$

Avant d'aller plus loin, justifions l'hypothèse selon laquelle l'orbite n'est pas modifiée par le champ. A l'application du champ, l'électron est soumis à deux forces radiales supplémentaires :

- ♦ d'une part, la force exercée par le champ **B** sur l'électron :  $F_B = e v B$ ,
- ♦ d'autre part, la variation de la force centrifuge associée à la variation de vitesse :  $\Delta F_c = 2m_e v \Delta v / r$ .

En remplaçant  $\Delta v$  par son expression en (4.6) on voit que ces deux forces sont égales et opposées (figure 4.2), et qu'en conséquence le rayon de l'orbite n'est pas modifié.

L'expression de la variation du moment magnétique (4.7) a été établie dans le cas d'une orbite plane perpendiculaire au champ appliqué.

D'une manière générale, on doit considérer qu'en fait l'orbite n'est pas plane. Dans le cas le plus simple, l'électron se déplace sur une orbite sphérique à une distance moyenne  $\langle r^2 \rangle$  du centre de l'atome. Soit z la direction parallèle au champ. Dans l'expression (4.7),  $r^2$  vaut  $x^2 + y^2$ , et la valeur moyenne de cette quantité est égale aux 2/3 de la moyenne du carré de la distance radiale  $\langle r^2 \rangle$  ( $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$ ).

L'expression (4.7) devient alors :

$$\Delta m = -(e^2 r^2 / 6m_e) B \quad (4.8)$$

La variation du moment magnétique d'un atome contenant Z électrons s'écrit :

$$\Delta m_{\text{par atome}} = -(e^2 B / 6m_e) \sum \langle r_n^2 \rangle \quad (4.9)$$

où  $\sum \langle r_n^2 \rangle$  est la valeur moyenne du carré du rayon de la n<sup>ième</sup> orbite. La sommation peut être remplacée par  $Z R^2$  où  $R^2$  est la valeur moyenne du carré du rayon des différentes orbites.

Finalement, si N est le nombre d'atomes de l'élément considéré par unité de volume, la susceptibilité diamagnétique s'écrit :

$$\chi = \partial M / \partial H = -\mu_0 N e^2 Z R^2 / 6m_e \quad (4.10)$$

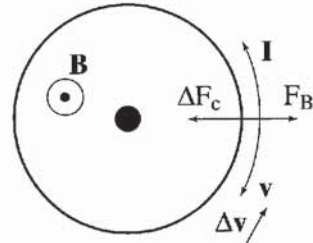


Figure 4.2 - Équilibre des forces radiales lors de l'application d'un champ magnétique

La valeur de  $R^2$  peut être évaluée à l'aide de la mécanique quantique. La susceptibilité diamagnétique calculée à l'aide du modèle développé ci-dessus est en assez bon accord avec les valeurs mesurées dans les isolants, en particulier dans les gaz rares. Ces susceptibilités sont de l'ordre de  $10^{-6}$  (voir Annexe 4).

Les paramètres dont dépend la susceptibilité diamagnétique donnée par l'expression (4.10) sont indépendants ( $Z$ ,  $e$ ,  $m_e$ ) ou très peu dépendants ( $N$ ,  $R^2$ ) de la température. Ceci est en accord avec le fait que les susceptibilités des substances diamagnétiques sont, à quelques exceptions près, indépendantes de la température.

Dans les substances diamagnétiques, les atomes constituants ne présentent que des orbites électroniques pleines soit à l'état atomique, soit suite à la formation de liaisons chimiques. Ce sont principalement :

- ◆ les gaz rares monoatomiques tels que He, Ne, Ar,
- ◆ la plupart des gaz polyatomiques tels que  $H_2$ ,  $N_2$ ,
- ◆ les solides ioniques tels que NaCl,
- ◆ les substances formées par liaison covalente, en particulier les composés organiques. Les mesures de susceptibilité effectuées sur ces derniers ont fourni de précieuses informations, à travers la détermination de  $R^2$ , sur la taille des orbites électroniques.

Le diamagnétisme dû aux électrons de conduction dans les métaux sera traité au chapitre 8, comme nous l'avons dit en introduction. Le diamagnétisme existe aussi, bien sûr, dans toutes les substances portant des moments magnétiques permanents, car c'est une loi universelle de la matière (loi de Lenz) mais sa contribution à la susceptibilité est si faible devant les autres qu'elle est la plupart du temps négligée.

Il faut enfin signaler le cas des supraconducteurs qui sont des diamagnétiques parfaits dont la susceptibilité vaut  $-1$  (effet Meissner). Nous les étudierons plus loin.

## **2. SYSTÈMES COMPORTANT DES MOMENTS MAGNÉTIQUES LOCALISÉS SANS INTERACTION**

### **2.1. EFFET D'UN CHAMP UNIFORME SUR UN MOMENT MAGNÉTIQUE : LA PRÉCESSION**

Avant d'étudier le comportement sous champ magnétique d'une assemblée de moments magnétiques, nous allons nous pencher sur le cas d'un moment magnétique isolé soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme. Nous allons constater qu'il se comporte comme un gyroscope. En effet, considérons d'abord un gyroscope de masse  $m$  et de moment cinétique  $\mathfrak{L}$  dont les deux extrémités O et M sont initialement maintenues fixes de manière à ce que l'axe de rotation fasse un angle  $\theta$  avec la verticale (figure 4.3-a), puis libérons l'extrémité M en laissant le gyroscope libre de tourner autour du point O.

L'action de la pesanteur agit alors sous la forme d'un couple :

$$\Gamma = \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{g} \quad (4.11)$$

où  $G$  est le centre de gravité du gyroscope et  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur.

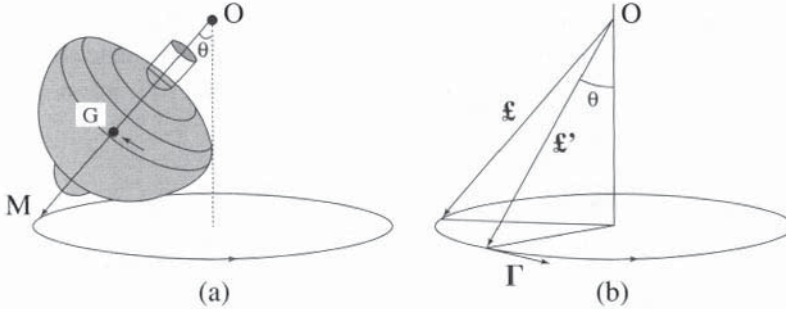


Figure 4.3 - Effet de la pesanteur sur un gyroscope

L'équation fondamentale de la dynamique pour un solide en rotation s'écrit dans ce cas :

$$d\mathbf{L}/dt = \Gamma \quad (4.12)$$

$\Gamma$  est toujours perpendiculaire au plan vertical passant par l'axe du gyroscope. Il en résulte que l'extrémité  $M$  va se déplacer sur un cercle de rayon  $OM \sin \theta$ . C'est ce que l'on appelle un *mouvement de précession* que chacun de nous a pu observer un jour ou l'autre dans le cas d'une toupie (dans ce dernier cas, c'est l'extrémité supérieure qui décrit un cercle). Supposons que pendant le temps  $\Delta t$ ,  $\mathbf{L}$  devienne  $\mathbf{L}'$  comme cela est indiqué sur la figure 4.3-b, avec le même angle  $\theta$ , et soit  $\omega_p$  la vitesse angulaire de précession. Pendant cet intervalle de temps, la variation de moment cinétique  $\Delta \mathbf{L}$  s'écrit :  $\Delta \mathbf{L} = (\mathbf{L} \sin \theta) (\omega_p \Delta t)$ . On en déduit  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{L} \omega_p \sin \theta$ . En reportant cette valeur dans (4.12) et sachant que  $\Gamma = mgl \sin \theta$  avec  $l = |\mathbf{r}_{OG}|$ , on obtient :

$$\omega_p = mgl/\mathbf{L} \quad (4.13)$$

On voit que la fréquence de précession est indépendante de l'inclinaison du gyroscope (ou de la toupie). Ainsi, bien que soumis à un couple, en raison de son moment cinétique le gyroscope ne vient pas se mettre verticalement, comme ce serait le cas pour un solide sans moment cinétique, mais précessionne en gardant constamment le même angle avec la verticale. Cependant, si une force de frottement s'oppose au mouvement de précession, le gyroscope se soumet progressivement au couple dû à la pesanteur : l'extrémité  $M$  du gyroscope décrit une spirale de rayon décroissant jusqu'à ce que le gyroscope prenne la position verticale correspondant au minimum d'énergie. C'est ce qui se produit lorsque l'extrémité  $M$  est en contact avec un liquide. Revenons maintenant au magnétisme : un moment magnétique se comporte comme un gyroscope en raison du moment cinétique qui lui est associé comme nous le verrons au chapitre 7. Soumis à un couple par l'application d'un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ , un moment magnétique libre  $\mathbf{m}$  ne vient pas s'aligner

parallèlement à ce dernier mais prend un mouvement de précession (figure 4.4), comme le gyroscope dans le champ de gravitation. L'équation (4.12) devient alors :

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{\Gamma} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 \quad (4.14)$$

Considérons les moments cinétiques et magnétiques de manière classique et utilisons l'équation (7.28) du chapitre 7. Le même raisonnement que dans le cas du gyroscope conduit à :  $\omega_0 = |\gamma B_0|$  (précession de Larmor). La fréquence de précession est proportionnelle à  $B_0$  et sa mesure permet la détermination du facteur gyromagnétique  $\gamma$ .

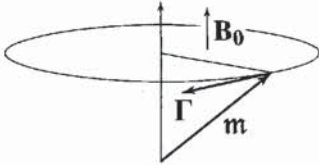


Figure 4.4 - Précession d'un moment magnétique  $\mathbf{m}$  autour d'un champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$

Cette mesure peut être réalisée à l'aide de différentes techniques, entre autres la résonance ferromagnétique. Il est important de signaler que si l'atome n'est plus isolé, le moment magnétique se comporte comme un gyroscope amorti, son amortissement provenant des interactions avec les atomes voisins : peu à peu le moment magnétique vient s'orienter parallèlement au champ et le mouvement de précession s'amortit. Ce processus est très rapide, si bien que l'on pourra toujours considérer que, lorsque le mouvement de précession n'est pas entretenu par un apport en énergie, le moment vient se mettre presque instantanément ( $10^{-7}$  à  $10^{-11}$  sec.) dans son état d'énergie minimum, c'est-à-dire parallèlement au champ. Sinon, l'aimantation comporte généralement deux composantes, l'une parallèle au champ appliqué, et l'autre perpendiculaire. Cette dernière est à l'origine du phénomène physique des *ondes de spin* (voir § 9 du chapitre 10), et du phénomène de résonance, très utile pour caractériser les matériaux magnétiques (voir § 5 du chapitre 17), et dans lequel le mouvement de précession est entretenu par l'action d'un champ tournant perpendiculaire au champ statique.

## 2.2. CAS D'UNE ASSEMBLÉE DE MOMENTS MAGNÉTIQUES

### LOCALISÉS SANS INTERACTION : LE PARAMAGNÉTISME DE CURIE

Dans bon nombre de substances, on observe une susceptibilité magnétique positive, généralement faible à la température ambiante ( $10^{-6} \leq \chi \leq 10^{-4}$ ) et qui varie proportionnellement à l'inverse de la température sur une large gamme de température (figure 4.5) :

$$\chi = C/T \quad (4.15)$$

C'est la loi de Curie, qui caractérise le paramagnétisme des atomes libres ; la constante  $C$  est appelée *constante de Curie*.

Ce comportement s'interprète de la manière suivante : une substance paramagnétique contient des atomes magnétiques dont le moment est libre de s'orienter dans

n'importe quelle direction. En l'absence de champ, les atomes pointent statistiquement dans toutes les directions et l'aimantation de la substance est nulle. Lorsque l'on applique un champ magnétique, les moments ont tendance à s'orienter parallèlement à ce dernier, et si rien ne vient s'opposer à cet effet, le système acquiert une forte aimantation. C'est ce qui se passe à température nulle. En revanche, à température finie, l'agitation thermique s'oppose au parallélisme, si bien que l'alignement des moments est partiel et que l'on observe seulement une faible susceptibilité positive. En augmentant la température, le désordre croît et la susceptibilité décroît en accord avec la loi de Curie.

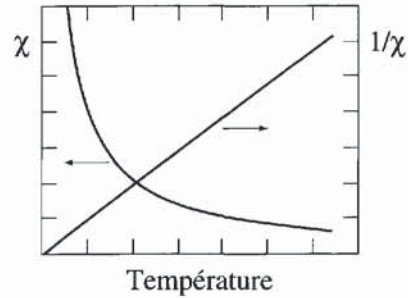


Figure 4.5 - Loi de Curie dans le cas de moments magnétiques sans interaction

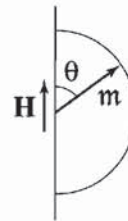
Le premier modèle quantitatif, développé par Langevin, utilise une description classique selon laquelle le vecteur moment magnétique de chaque atome peut prendre une direction quelconque. L'énergie d'un moment magnétique atomique  $\mathbf{m}$  de module  $m_0$  dans le champ  $\mathbf{H}$  s'écrit :  $E(\theta) = -\mu_0 m_0 H \cos \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{H}$ . A une température donnée  $T$ , la probabilité pour que l'énergie d'un moment soit  $E(\theta)$  est proportionnelle au facteur de Boltzmann :  $e^{-E(\theta)/k_B T}$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. La probabilité pour que le moment fasse un angle compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  par rapport au champ (figure 4.6) est proportionnelle à l'angle solide ( $2\pi \sin \theta d\theta$ ) correspondant et s'écrit alors :

$$dp(\theta) = 2\pi \exp[-E(\theta)/k_B T] \sin \theta d\theta / Z \quad (4.16)$$

où  $Z$  est la somme d'états :

$$Z = \int_0^\pi 2\pi \exp[-E(\theta)/k_B T] \sin \theta d\theta \quad (4.17)$$

Figure 4.6 - En mécanique classique, le moment magnétique peut s'orienter selon n'importe quelle direction



La moyenne thermique de la composante du moment magnétique selon le champ a pour expression :

$$\langle \mathbf{m} \rangle_T = \int_0^\pi m_0 \cos \theta dp(\theta) = m_0 \frac{2\pi \int_0^\pi \cos \theta \exp\left[\frac{\mu_0 m_0 H \cos \theta}{k_B T}\right] \sin \theta d\theta}{2\pi \int_0^\pi \exp\left[\frac{\mu_0 m_0 H \cos \theta}{k_B T}\right] \sin \theta d\theta} \quad (4.18)$$

En posant  $x = \mu_0 m_0 H / k_B T$ , on trouve aisément que  $Z = 4\pi \text{sh}(x)/x$  et que :

$$\langle m \rangle_T = m_0 dZ/Z dx \quad (4.19)$$

On en déduit l'aimantation  $M(T, H)$  selon la direction du champ :

$$M = Nm_0 \{ \coth(x) - 1/x \} = M_0 \mathcal{L}(x) \quad (4.20)$$

où  $N$  est le nombre d'atomes magnétiques par unité de volume et  $M_0 = M(0, 0)$  est l'aimantation spontanée à  $T = 0$ . La fonction  $\mathcal{L}(x)$ , appelée fonction de Langevin, rend compte de l'aimantation réduite  $m = M/M_0$  en fonction du rapport  $\mu_0 m_0 H / k_B T$ . Elle est représentée sur la figure A6.3 de l'annexe 6 en fin d'ouvrage.

On voit que  $\mathcal{L}(x)$  tend vers 1, c'est-à-dire que  $M$  tend vers  $M_0$ , lorsque  $H$  devient grand et/ou  $T$  devient petit, conditions nécessaires pour que l'effet d'alignement dû au champ l'emporte sur l'agitation thermique.

A la température ambiante et pour des champs relativement élevés ( $\mu_0 H \approx 1 \text{ T}$ ),  $x$  est de l'ordre de  $1,5 \times 10^{-2}$  pour une substance paramagnétique à base de gadolinium et  $M/M_0$  ne vaut que  $5 \times 10^{-3}$ . Il faut descendre à des températures de l'ordre de 1 K pour que, dans de tels champs,  $M/M_0$  atteigne 0,8.

Ainsi, en particulier lorsque l'on s'intéresse à la susceptibilité initiale c'est-à-dire en champ faible, on sera presque toujours dans la partie initiale de la courbe, région où la fonction de Langevin est de la forme :

$$\mathcal{L}(x) = x/3 - x^3/45 + \dots \quad (4.21)$$

On en déduit :

$$M = \frac{\mu_0 N m_0^2 H}{3 k_B T} \quad (4.22)$$

La susceptibilité s'écrit alors :

$$\chi = \frac{\mu_0 N m_0^2}{3 k_B T} = \frac{\mathcal{C}}{T} \quad (4.23)$$

On retrouve bien la loi expérimentale de Curie, avec pour constante de Curie :

$$\mathcal{C} = \mu_0 N m_0^2 / 3 k_B T \quad (4.24)$$

La susceptibilité d'un paramagnétique est typiquement de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  à la température ambiante, donc bien plus élevée que la susceptibilité diamagnétique mais, comme on le verra plus loin, nettement inférieure à celle d'un ferromagnétique.

La figure 4.7 montre les courbes d'aimantation observées aux très basses températures, pour trois sels contenant des ions  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Gd}^{3+}$ . Pour chacun d'eux, les points expérimentaux reportés en fonction du rapport  $H/T$  se situent parfaitement sur la même courbe, mais une remarque s'impose : les variations réduites de  $M/M_0$  en fonction de  $H/T$  ne sont pas tout à fait les mêmes pour ces différents sels et toutes trois diffèrent de la courbe de Langevin, d'autant plus que le moment magnétique par atome est plus faible ; pour une même température, elles saturent sous des champs magnétiques systématiquement plus faibles que ceux que prévoyait la théorie de Langevin ( $\mathcal{L}(x)$  est représentée en pointillés).

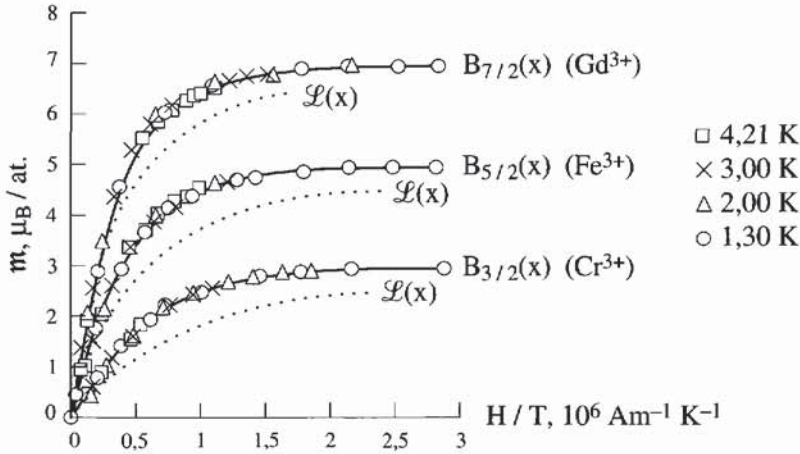


Figure 4.7 - Courbes d'aimantation, en fonction de  $H/T$ , pour trois sels contenant un ion magnétique :  $\text{CrK}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Fe}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ , et  $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ , d'après [1]

Or le calcul précédent a été effectué dans l'hypothèse classique de moments pouvant prendre n'importe quelle direction. En fait, nous verrons au chapitre 7 qu'en raison de la quantification du moment magnétique, sa projection sur le champ (dont la direction définit l'axe  $z$ ) ne peut prendre que des valeurs discrètes :  $m_z = -g_J \mu_B M_J$ , le nombre  $M_J$  pouvant prendre  $2J + 1$  valeurs allant de  $+J$  à  $-J$  par saut de 1 (figure 4.8) et  $J$  pouvant prendre uniquement des valeurs entières ou demi-entières ( $g_J$  est une constante appelée *facteur de Landé* qui sera détaillée au chapitre 7 et  $M_J$  est la projection du moment cinétique total  $J$  sur l'axe de quantification). L'énergie potentielle dans le champ  $H$  s'écrit alors :  $E = \mu_0 g_J \mu_B M_J H$ .

En appliquant la statistique de Boltzmann comme précédemment, mais en posant maintenant :  $x = \mu_0 g_J \mu_B J H / k_B T$ , l'aimantation induite par le champ devient :

$$M = \frac{N}{Z} \sum_{-J}^{+J} -g_J \mu_B M_J \exp\left(-\frac{x M_J}{J}\right) = -\frac{N g_J \mu_B J}{JZ} \sum_{-J}^{+J} M_J \exp\left(-\frac{x M_J}{J}\right)$$

$$M = M_0 dZ / Z dx \quad (4.25)$$

où la somme d'états,  $Z$ , s'écrit :

$$Z = \sum_{-J}^{+J} \exp(-x M_J / J) \quad (4.26)$$

$M_0 = N g_J \mu_B J = N m_0$  est l'aimantation maximum ou aimantation à saturation, et  $m_0$  le moment magnétique par atome. Or  $Z = e^{-x}(1 + e^{x/J} + (e^{x/J})^2 + \dots + (e^{x/J})^{2J})$ . C'est la somme d'une progression géométrique qui vaut :

$$Z = \text{sh}\left(\frac{2J+1}{2J} x\right) / \text{sh}\left(\frac{x}{2J}\right) \quad (4.27)$$

On en déduit : 
$$M = M_0 \mathcal{B}_J(x) \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{B}_J(x)$  est la fonction de Brillouin :

$$\mathcal{B}_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J}x\right) \quad (4.29)$$

Cette fonction est représentée sur la figure A6.3 (Annexe 6) pour différentes valeurs de  $J$ . Lorsque  $J$  devient grand, on se rapproche du cas classique, car  $\mathcal{B}_J(x)$  se rapproche de  $\mathcal{L}(x)$  lorsque  $J$  augmente indéfiniment.

Lorsque  $J = 1/2$ , ce qui correspond au plus faible moment magnétique que l'on puisse observer, la fonction de Brillouin se réduit à :  $M = M_0 \text{th } x$ .

Pour les faibles valeurs de  $x$ , on utilise le développement :

$$\coth x = 1/x + x/3 + \dots \quad (4.30)$$

qui conduit, au premier ordre, à :

$$\mathcal{B}_J(x) = (J+1) x/3J \quad (4.31)$$

D'où : 
$$M = M_0 (J+1) x/3J \quad (4.32)$$

La susceptibilité se présente sous la même forme qu'en (4.15) :  $\chi = \mathcal{C}/T$ , mais la constante de Curie s'écrit maintenant :

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0 N g_J^2 J(J+1) \mu_B^2}{3k_B} = \frac{\mu_0 N m_{\text{eff}}^2}{3k_B} \quad (4.33)$$

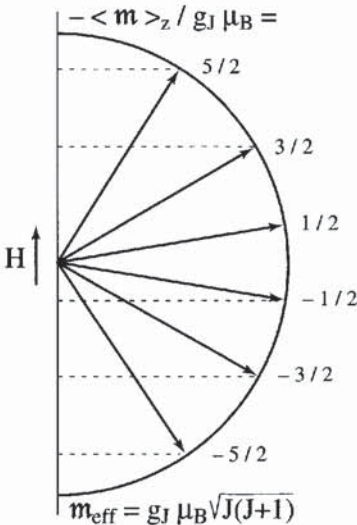


Figure 4.8 - Quantification du moment magnétique ( $J = 5/2$ )

$m_{\text{eff}}$  représente la longueur du vecteur moment et  $m_z$  sa projection sur l'axe vertical.

où  $m_{\text{eff}} = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$  est le *moment effectif*, qui n'est plus égal au moment maximum  $m_0 = g_J \mu_B J$  mesuré selon le champ (comme c'était le cas dans la théorie de Langevin), mais un peu supérieur. Ceci résulte d'une propriété de la mécanique quantique que nous verrons au chapitre 7 : la valeur moyenne  $\langle J^2 \rangle$  du carré d'un opérateur  $J$ , vaut  $J(J+1)$  alors que la valeur maximum de la projection de cet opérateur sur l'axe  $z$  de quantification,  $\langle J_z \rangle$ , vaut  $J$ . Ainsi la détermination expérimentale de la constante de Curie permet d'accéder au moment effectif atomique de la substance.

Pour chacun des 3 composés dont il a été question sur la figure 4.7, les points expérimentaux reportés en fonction du rapport  $H/T$  se situent parfaitement sur trois fonctions de Brillouin : la  $\mathcal{B}_{3/2}$ , la  $\mathcal{B}_{5/2}$  et la  $\mathcal{B}_{7/2}$  respectivement, en accord avec la valeur du moment qui sera prédite au chapitre 7 pour chacun de ces ions.

Le paramagnétisme des atomes libres s'observe dans les substances qui possèdent des atomes magnétiques et où les distances entre ces atomes sont suffisamment grandes pour qu'ils n'interagissent pas entre eux. Les substances qui satisfont à ces conditions sont les suivantes :

- ◆ les gaz d'atomes ou molécules magnétiques,
- ◆ les sels d'éléments de transition et de terres rares tels que ceux dont le comportement est évoqué ci-dessus,
- ◆ certains oxydes de terres rares.

On désigne par substances paramagnétiques seulement celles qui présentent un tel comportement jusqu'aux très basses températures. Nous verrons plus loin que tous les matériaux qui s'ordonnent magnétiquement (ferro-, ferri-, antiferromagnétiques...) se comportent comme des paramagnétiques au-dessus d'une température critique.

Enfin, nous traiterons au chapitre 8 le paramagnétisme des métaux (sodium, cuivre, or, argent, plomb, ...) qui présentent une susceptibilité peu sensible à la température et plus faible que celle des paramagnétiques de Curie. C'est le paramagnétisme de Pauli, qui est dû aux électrons de conduction.

### 2.3. LE SUPERPARAMAGNÉTISME

Nous verrons plus loin que les particules ferromagnétiques ou antiferromagnétiques de très petites dimensions peuvent se comporter, au-dessus d'une température dite de blocage, comme un *moment magnétique géant* (ou macro-spin). L'application d'un champ magnétique induira donc une aimantation qui suivra une loi en  $H/T$  donnée par la *fonction de Langevin*, puisque l'on se retrouve dans la limite classique des spins infinis.

Il faut toutefois noter que la température de blocage varie avec l'échelle de temps de la mesure et avec le volume de la particule, car c'est un phénomène de relaxation qui fait passer la particule de l'état bloqué (porteur d'un moment rigidement orienté selon une direction déterminée) vers l'état *superparamagnétique*. Ainsi, à température ambiante, des grains fins peuvent paraître superparamagnétiques lorsque leur aimantation est mesurée par la technique classique d'extraction (durée de l'expérience de l'ordre de la seconde) tandis qu'une expérience de diffraction neutronique les verra «bloqués» car la collision neutron-spin est infiniment plus rapide.

C'est L. Néel qui a développé en 1949 la théorie du superparamagnétisme (sans le nommer ainsi) des grains fins ferromagnétiques [2], et l'a étendue en 1961 aux grains fins antiferromagnétiques [3]. Ces deux articles fondamentaux ont été réédités dans ses Œuvres Scientifiques [4].

### 3. INTERACTIONS D'ÉCHANGE

#### 3.1. GÉNÉRALITÉS

Souvent, dans la matière, les moments magnétiques ne sont pas libres mais interagissent entre eux et avec leur environnement. Il en résulte un comportement collectif qui se manifeste, en dessous d'une température critique, par l'apparition d'ordres magnétiques tels que le ferro-, le ferri- ou l'antiferromagnétisme. Ceux-ci se caractérisent, à basse température, par un arrangement microscopique des moments magnétiques atomiques que l'on peut observer par diffraction neutronique, technique expérimentale essentielle en magnétisme. A haute température, l'agitation thermique finit par l'emporter et l'on observe un comportement paramagnétique. Parmi les interactions que nous venons d'évoquer, deux sont prépondérantes et donc responsables des comportements magnétiques microscopiques de la plupart des matériaux : ce sont l'interaction d'échange et les interactions responsables de l'anisotropie magnétocristalline.

Les aspects fondamentaux de ces deux types d'interaction font appel à la mécanique quantique et seront présentés en détail dans les chapitres 7 à 9. D'autres interactions sont également présentes mais constituent seulement une faible perturbation des propriétés magnétiques, certaines seront abordées ultérieurement.

Bien entendu, il existe aussi l'interaction magnétique dipolaire classique entre moments magnétiques, dont nous avons parlé au chapitre 2 et qui est responsable du champ créé par la matière à l'intérieur comme à l'extérieur de celle-ci. Cependant, cette interaction est si faible en comparaison des autres qu'elle ne contribue pas (ou très peu) aux propriétés magnétiques microscopiques de la matière. En revanche, parce que c'est une interaction à longue portée, elle joue un rôle fondamental dans les processus d'aimantation des ferromagnétiques (qui seront traités aux chapitres 5 et 6), et dans la plupart des applications techniques.

Nous allons décrire maintenant l'interaction d'échange et ses effets, puisque c'est elle qui est responsable de l'apparition d'un ordre magnétique dans bon nombre de substances.

#### 3.2. L'INTERACTION D'ÉCHANGE ET L'APPROXIMATION DU CHAMP MOLÉCULAIRE

L'interaction d'échange est une interaction d'origine électrostatique qui a été introduite en 1929 par Heisenberg dans le cadre de la mécanique quantique. On montrera au chapitre 9 que l'énergie associée à cette interaction peut s'exprimer en fonction des moments magnétiques de deux atomes voisins  $i$  et  $j$  de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{ij} = -\mu_0 n_{ij} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \quad (4.34)$$

Selon que le coefficient  $n_{ij}$  est positif ou négatif, les moments magnétiques  $\mathbf{m}_i$  et  $\mathbf{m}_j$  ont tendance à s'orienter respectivement parallèlement ou antiparallèlement. L'énergie d'échange  $E_{\text{éch}}$  par unité de volume s'écrit alors, en effectuant les sommations sur le volume unité :

$$E_{\text{éch}} = -\frac{\mu_0}{2} \sum_{i,j \neq i} n_{ij} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \quad (4.35)$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$E_{\text{éch}} = -\frac{\mu_0}{2} \sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{H}_i \quad (4.36)$$

avec :

$$\mathbf{H}_i = \sum_{j \neq i} n_{ij} \mathbf{m}_j \quad (4.37)$$

Le facteur 1/2 provient du fait que, dans la sommation sur  $i$  et  $j$ , l'interaction de chacune des paires est prise deux fois.  $\mathbf{H}_i$  peut être considéré comme un champ local agissant sur le moment  $\mathbf{m}_i$ . Ce champ, comme chacun des moments  $\mathbf{m}_j$  qui le crée, fluctue en fonction du temps. Il est alors impossible de déterminer exactement l'orientation de tous les moments magnétiques pour un champ appliqué et une température donnée. Pour expliquer le ferromagnétisme, P. Weiss proposa en 1906 (23 ans avant le modèle d'Heisenberg) le modèle du champ moléculaire qui fut à l'origine de progrès considérables en magnétisme. Ce modèle consiste à négliger le caractère fluctuant de  $\mathbf{H}_i$  et à ne retenir que sa valeur moyenne à la température considérée. L'énergie moyenne d'un échantillon à une température donnée  $T$  s'écrit :

$\langle \mathcal{E}_{\text{éch}} \rangle_T = -\mu_0 \sum_i \langle \mathbf{m}_i \mathbf{H}_i \rangle_T$ , qui devient dans l'hypothèse de Weiss :

$$\langle \mathcal{E}_{\text{éch}} \rangle_T = -\mu_0 \sum_i \langle \mathbf{m}_i \rangle_T \langle \mathbf{H}_i \rangle_T \quad (4.38)$$

où :

$$\langle \mathbf{H}_i \rangle_T = \mathbf{H}_m = \sum_{j \neq i} n_{ij} \langle \mathbf{m}_j \rangle_T \quad (4.39)$$

$\mathbf{H}_m$  porte le nom de *champ moléculaire*, ou champ d'échange.

Si tous les moments considérés sont identiques :  $\langle \mathbf{m}_j \rangle_T = \langle \mathbf{m} \rangle_T$  et :

$$\mathbf{H}_m = w \cdot \mathbf{M} \quad (4.40)$$

où  $\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m} \rangle_T$  est l'aimantation,  $N$  étant le nombre d'atomes magnétiques par unité de volume.  $w = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} n_{ij}$  est le coefficient de champ moléculaire.  $\mathbf{H}_m$  et  $\mathbf{M}$

étant exprimés dans les mêmes unités en SI,  $w$  est sans dimension. Le champ moléculaire a donc le même effet qu'un champ appliqué mais il est, la plupart du temps, beaucoup plus grand si bien que ce qu'un champ extérieur ne peut réaliser qu'aux très basses températures, à savoir l'alignement de tous les moments, le champ moléculaire en est capable à des températures qui peuvent être parfois bien supérieures à la température ambiante, dans le cas d'un ferromagnétique par exemple.

Notons enfin qu'en terme de champ moléculaire, l'énergie d'échange par unité de volume (ou densité d'énergie) définie au début de ce paragraphe devient, dans l'hypothèse ci-dessus où tous les moments sont identiques :

$$E_{\text{éch}} = -(1/2)\mu_0 w M^2 \quad (4.41)$$

### 3.3. ASPECTS EXPÉRIMENTAUX

Nous verrons plus loin qu'il est possible d'évaluer le coefficient de champ moléculaire  $w$  à partir de la détermination expérimentale de la température critique à laquelle les moments magnétiques s'ordonnent. Il est alors facile d'en déduire l'énergie d'interaction d'échange entre deux sites voisins  $i$  et  $j$ . On considère en général que la figure 4.9 témoigne de la variation de l'énergie  $\mathcal{E}_{ij}$  ainsi calculée en fonction de la distance entre couches magnétiques dans les métaux et alliages de la série 3d.

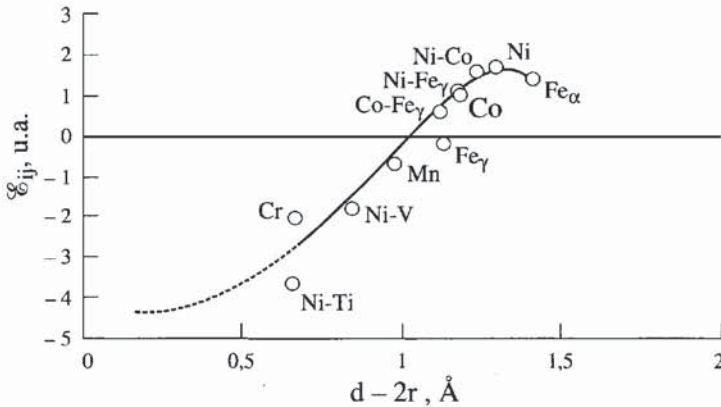


Figure 4.9 - Courbe de Slater-Néel

Interaction d'échange (quantité  $\mathcal{E}_{ij}$  de la relation 4.34 en unités arbitraires) en fonction de la distance entre couches magnétiques ( $d$  = distance entre deux atomes,  $r$  = rayon moyen de la couche magnétique) dans des métaux et alliages d'éléments 3d, d'après [4].

En réalité, cette courbe manifeste sans doute tout autant la dépendance des interactions d'échange en fonction du remplissage de la bande  $d$  (voir chapitre 8). L'étude du magnétisme de bande nous apprend en effet que les interactions, de nature anti-ferromagnétique en milieu de bande, sont de plus en plus fortement ferromagnétiques en fin de bande. C'est ce qui explique les valeurs observées pour  $\mathcal{E}_{ij}$ , négatives pour Cr et Mn, positives et de plus en plus fortes en allant du Co vers le Ni.

## 4. LE FERROMAGNÉTISME DANS LE MODÈLE DU CHAMP MOLÉCULAIRE

Nous qualifierons ici de ferromagnétique toute substance dont les moments magnétiques sont, au niveau microscopique et en dessous d'une température critique  $T_C$ , alignés *parallèlement les uns aux autres* et *spontanément*, c'est-à-dire en l'absence de tout champ extérieur (§ 1.4 et 2 du chap. 3). Il en résulte une aimantation spontanée  $M_s(T)$ . Un tel *ordre magnétique* peut être observé à l'aide d'une expérience de diffraction neutronique. Le cas des substances ferrimagnétiques, analogue dans ses aspects macroscopiques, diffère profondément du ferromagnétisme à l'échelle microscopique et ne sera donc pas traité ici, mais plus loin au paragraphe 6.

Revenons à l'aspect microscopique du ferromagnétisme. Le modèle le plus simple consiste à considérer des moments magnétiques égaux, entre lesquels il existe une interaction d'échange positive se traduisant par un champ moléculaire  $H_m = wM$  ( $w > 0$ ).

Ce champ moléculaire a le même effet qu'un champ extérieur et vient simplement se rajouter à ce dernier dans la fonction de Brillouin (description quantique) ou de Langevin (description classique) associée à l'ion magnétique considéré et dans laquelle il suffit donc de remplacer  $H$  par  $H + wM$ .

Nous ne raisonnons pas ici sur des vecteurs mais sur des scalaires, car dans cette description nous ne tenons pas compte de l'anisotropie et en conséquence l'aimantation est supposée parallèle au champ appliqué.

On a donc  $x = \mu_0 m_0 (H + wM) / k_B T$ , ce qui donne dans la description quantique :

$$m = M/M_0 = \mathcal{B}_J(x) = \mathcal{B}_J \left\{ \frac{\mu_0 m_0 H}{k_B T} + \frac{\mu_0 w M_0^2}{N k_B T} m \right\} \quad (4.42)$$

Pour des valeurs de  $H$  et  $T$  données, l'aimantation réduite  $m$  est donnée par les deux équations suivantes :

$$m = \mathcal{B}_J(x) \quad (4.43)$$

$$m = -\frac{H}{wM_0} + \frac{Nk_B T}{\mu_0 w M_0^2} x \quad (4.44)$$

La résolution de ces deux équations peut être effectuée soit numériquement, soit graphiquement à l'aide de la figure 4.10. Dans cette dernière approche, en l'absence de champ extérieur ( $H = 0$ ), la droite donnée par l'équation (4.44) passe par l'origine. Lorsque la température est suffisamment basse pour que sa pente soit inférieure à  $(J+1)/3J$ , c'est-à-dire la pente à l'origine de la fonction de Brillouin, il existe, en dehors de la solution triviale  $M = 0$ , une solution donnée par le point A. La substance possède alors une aimantation spontanée  $M_s(T) = m M_0$ . A  $T = 0$ , ce point se trouve en  $x$  infini et  $m$  vaut alors 1, ce qui correspond à  $M_s = M_0 = N g_J \mu_B J$ .

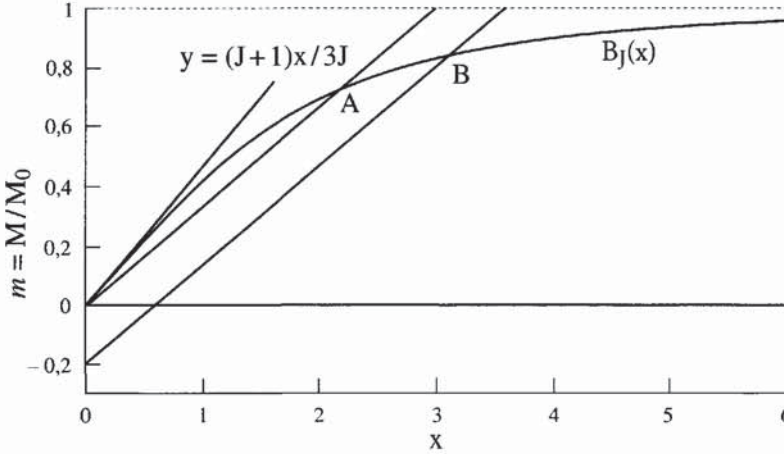


Figure 4.10 - Détermination graphique de l'aimantation pour un champ et une température quelconques dans un ferromagnétique simple, à l'aide d'une fonction de Brillouin (ou de Langevin)

Quand la température s'élève, le point A se déplace vers la gauche et  $M_s(T)$  décroît puis s'annule à  $T_C$ , température pour laquelle la pente de la droite vaut  $(J+1)/3J$ . On en déduit la température de Curie :

$$T_C = \mu_0 \frac{(J+1)M_0^2 w}{3JNk_B} = \mathcal{C}w \quad (4.45)$$

où  $\mathcal{C}$  a été défini précédemment (équation 4.33). En description classique, on obtient également  $T_C = \mathcal{C}w$ , mais alors  $\mathcal{C}$  est donné par l'équation (4.24). Notons que l'aimantation spontanée varie d'autant plus rapidement que l'on se rapproche de  $T_C$  comme cela est observé expérimentalement (figure 3.8).

Maintenant, lorsqu'un champ extérieur est appliqué à une température inférieure à  $T_C$ , la droite représentative de l'équation (4.44) se déplace parallèlement à elle-même vers les  $x$  croissants, si bien que l'intersection des deux courbes se déplace dans la même direction (point B pour  $H = H_B$ ). L'aimantation augmente donc avec le champ appliqué. (Notons que le champ  $H$  utilisé dans ce formalisme est toujours le champ total, ou champ interne,  $H = H_0 + H_d$ ).

Au-dessus de  $T_C$ , en champ faible, l'aimantation est également faible ;  $x$  étant petit, on peut utiliser la relation (4.31) qui conduit à :

$$y = \frac{J+1}{3J} \mu_0 \left\{ \frac{m_0 H}{k_B T} + \frac{w M_0^2}{N k_B T} y \right\},$$

d'où l'on tire facilement :  $\chi = \mathcal{C}/(T - T_C)$  (4.46)

C'est la loi de Curie-Weiss que l'on peut encore écrire :

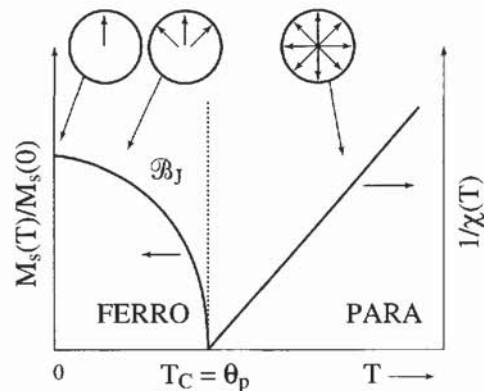
$$\chi^{-1} = T/\mathcal{C} - w \quad (4.47)$$

La variation thermique de l'inverse de la susceptibilité est linéaire mais, à la différence de la loi de Curie qui passe par l'origine, celle-ci coupe l'axe des températures pour  $T = \theta_p$  qui est appelée *température de Curie paramagnétique*. La figure 4.11 montre que les interactions d'échange conduisent simplement à une translation de l'inverse de la susceptibilité sans interaction et que la température d'ordre  $T_C$  du composé, c'est-à-dire celle où l'aimantation spontanée disparaît, est confondue avec  $\theta_p$ . Comme nous le signalions au § 3.3, la valeur de  $T_C$  donnée par l'équation (4.45) est une mesure de l'importance des interactions d'échange. Dans le fer, le cobalt et le nickel purs, où les interactions d'échange sont parmi les plus élevées,  $T_C$  vaut respectivement 1043 K, 1404 K et 631 K.

Qualitativement, la variation thermique de l'aimantation spontanée (en valeur relative) associée à une fonction  $\mathcal{B}_J$  est représentée sur la figure 4.11, ainsi que celle de l'inverse de la susceptibilité magnétique : ces deux courbes ne sont valables que dans l'approximation du champ moléculaire. Nous avons adopté le mode de représentation habituel ( $M$  et  $1/\chi$  sur la même figure : voir la légende de la figure 3.8).

**Figure 4.11 - Représentation théorique de la variation thermique de  $M_s$  et de  $\chi^{-1}$  paramagnétique dans un ferromagnétique simple**

Les bulles illustrent l'effet de l'agitation thermique sur les moments (approximation du champ moléculaire)



En réalité, nous avons vu sur la figure 3.8 qu'expérimentalement la loi de Curie-Weiss n'est pas exactement vérifiée au voisinage de  $T_C$ , région où l'approximation du champ moléculaire est la moins valable. La variation thermique de  $1/\chi$  s'écrit alors à haute température :

$$1/\chi = (T - \theta_p)/\mathcal{C} \quad (4.48)$$

$\theta_p$  est légèrement supérieure à  $T_C$ . La différence  $\theta_p - T_C$  dépend de la substance et est associée à la persistance d'un ordre à courte distance légèrement au-dessus de  $T_C$ , comme nous le verrons au § 7 du chapitre 10.

Parmi les meilleures illustrations du modèle ci-dessus, il faut citer les composés à base de gadolinium dans lesquels les moments sont bien définis et où n'intervient aucune interaction supplémentaire significative, en particulier l'anisotropie magnéto-cristalline.

## 5. L'ANTIFERROMAGNÉTISME DANS LE MODÈLE DE CHAMP MOLÉCULAIRE

On qualifie d'antiferromagnétique toute substance dont les moments magnétiques, en dessous de la température d'ordre magnétique appelée température de Néel, peuvent être divisés en deux sous-réseaux dont les aimantations sont égales et opposées, de sorte que l'aimantation résultante soit nulle (voir par exemple la figure 3.3-a). Plus généralement, on classera comme antiferromagnétique toute substance ordonnée magnétiquement dont les moments ne sont pas forcément parallèles ou antiparallèles ni de même grandeur, mais dont l'aimantation résultante est nulle. La figure 4.12 présente deux exemples de réseaux de moments magnétiques présentant un ordre antiferromagnétique.

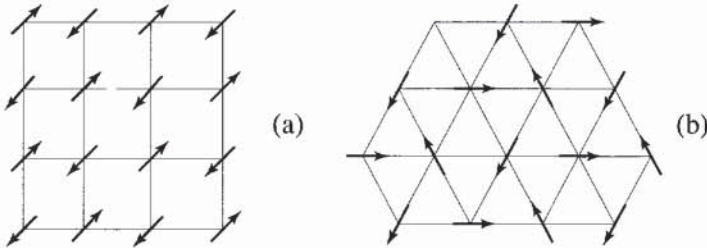


Figure 4.12 - Deux exemples de réseaux antiferromagnétiques

- (a) Réseau carré où les moments des premiers voisins sont tous antiparallèles et ceux des seconds proches voisins tous parallèles.
- (b) Réseau hexagonal dans lequel les moments situés sur des lignes verticales sont parallèles, et tournés de  $\pm 120^\circ$  par rapport à ceux situés sur les deux verticales voisines.

Expérimentalement, l'antiferromagnétisme présente les caractéristiques suivantes : la susceptibilité magnétique schématisée sur la figure 4.13-a est toujours faible et passe par un maximum à la *température de Néel*  $T_N$ , qui est la température d'ordre du composé. Au-dessus de  $T_N$  le composé est paramagnétique et la susceptibilité décroît en suivant une loi de Curie-Weiss comme pour un ferromagnétique (équation 4.48) mais  $\theta_p$  est alors toujours inférieur à  $T_N$  et souvent négatif. En dessous de  $T_N$ , l'aimantation varie faiblement et linéairement avec le champ jusqu'à un certain champ seuil où elle présente une transition appelée *métamagnétique* (figure 4.13-b). Selon la substance, cette transition est plus ou moins brutale et a lieu pour un champ plus ou moins élevé. Pour une substance donnée, cette transition est d'autant moins marquée que l'on se rapproche de  $T_N$  et elle disparaît à cette température.

Dans certaines substances, le champ de transition est trop élevé pour pouvoir être observé, dans d'autres au contraire, on peut observer plusieurs transitions. Dans une substance antiferromagnétique simple, ce champ correspond au retournement brutal de l'aimantation de l'un des sous-réseaux, initialement opposée au champ, qui s'oriente parallèlement à ce dernier. Le modèle de champ moléculaire permet de rendre compte des résultats expérimentaux.

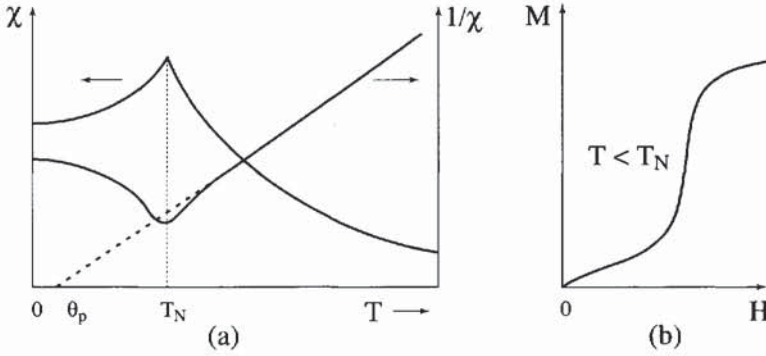


Figure 4.13 - (a) Représentation schématique des variations expérimentales de la susceptibilité et de son inverse pour un matériau antiferromagnétique  
(b) Allure de l'aimantation en fonction du champ, en dessous de la température d'ordre  $T_N$

### 5.1. TEMPÉRATURE DE NÉEL

L'interprétation la plus simple de l'antiferromagnétisme, due à L. Néel, consiste à considérer deux sous-réseaux identiques A et B ; les interactions d'échange sont supposées positives à l'intérieur de chaque sous-réseau A et B, et négatives entre les deux sous-réseaux. Soient :  $w_{AB} = w_{BA} = -w$  et  $w_{AA} = w_{BB} = w'$  (avec  $w$  et  $w' > 0$ ) les coefficients de champ moléculaire entre les deux sous-réseaux et à l'intérieur de chaque sous-réseau respectivement. Le champ total agissant sur chacun des sous-réseaux s'écrit alors,  $i$  et  $j$  ( $i \neq j$ ) représentant A ou B :

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} - w\mathbf{M}_j + w'\mathbf{M}_i \quad (4.49)$$

A toute température,  $\mathbf{M}_i$  est parallèle à  $\mathbf{H}_i$  et l'on peut écrire :

$$M_i = M_i^0 \mathcal{B}_J \left( \frac{\mu_0 m_0 |\mathbf{H}_i|}{k_B T} \right) \quad (4.50)$$

Dans le domaine paramagnétique, l'argument de la fonction de Brillouin est petit et tous les vecteurs sont colinéaires de sorte que l'on peut écrire algébriquement :

$$M_i = (\mathcal{C}/T) (H - wM_j + w'M_i) \quad (4.51)$$

avec  $\mathcal{C} = N' \mu_0 m_{\text{eff}}^2 / 3k_B$ , où  $N' = N/2$  est le nombre d'atomes magnétiques de chacun des sous-réseaux par unité de volume. En champ nul ( $H = 0$ ), le système des deux équations linéaires (4.51) a une solution telle que  $M_A$  et  $M_B$  soient différents de zéro seulement si le déterminant des coefficients de ces équations est nul.

La température la plus élevée pour laquelle une telle solution existe est la température de Néel qui vérifie alors l'équation  $(1 - \mathcal{C}w'/T_N)^2 - (\mathcal{C}w/T_N)^2 = 0$ , ce qui conduit à :

$$T_N = \mathcal{C}(w + w') \quad (4.52)$$

On voit que la température de Néel est une mesure de la somme des valeurs absolues des coefficients de champ moléculaire.

**Remarques :**

- ◆ L'aimantation des sous-réseaux étant finie à toute température inférieure à  $T_N$ , on ne voit pas pourquoi l'équation n'est vérifiée que pour  $T_N$  et pas pour des températures inférieures. En fait, l'approximation linéaire qui conduit aux équations (4.51) n'est valable qu'au dessus de  $T_N$  et à la limite à  $T_N$ , mais pas en dessous où l'aimantation de chaque sous-réseau augmente rapidement.
- ◆ La théorie qui vient d'être exposée ne définit pas la direction selon laquelle s'établit l'antiferromagnétisme. En effet, jusqu'ici, nous avons ignoré l'anisotropie magnétocristalline de la substance. En fait, les aimantations des sous-réseaux ont tendance à s'orienter selon une ou des directions privilégiées appelées indifféremment directions d'antiferromagnétisme ou directions de facile aimantation. Cette anisotropie se laisse décrire par le même formalisme que dans les substances ferromagnétiques.

**5.2. SUSCEPTIBILITÉ PARAMAGNÉTIQUE**

Au-dessus de la température de Néel, lorsque le champ appliqué est faible, le système d'équations (4.51) conduit à :  $M = M_A + M_B = 2\mathcal{C}H/(T - \theta_p)$ , ce qui donne :

$$\chi^{-1} = (T - \theta_p)/2\mathcal{C} \quad (4.53)$$

avec  $\theta_p = \mathcal{C}(w' - w)$ . On obtient encore une loi de Curie-Weiss où, à la différence du ferromagnétisme, la température  $\theta_p$  est inférieure à  $T_N$ , et peut même être négative. A  $T_N$ ,  $\chi$  présente une valeur finie et faible, comme on le voit sur la figure 4.13.

**5.3. SUSCEPTIBILITÉ PERPENDICULAIRE**

Considérons un cristal antiferromagnétique de symétrie uniaxiale. Quand, en dessous de  $T_N$ , un champ faible est appliqué perpendiculairement à la direction (D) d'antiferromagnétisme, l'aimantation de chaque sous-réseau tourne d'un faible angle  $\theta$  (figure 4.14) ce qui minimise la somme des densités d'énergie en jeu, à savoir l'énergie Zeeman due au champ appliqué  $E_z$ , l'énergie d'échange  $E_{\text{éch}}$  et l'énergie d'anisotropie  $E_a$ . En posant :  $|M_A| = |M_B| = M'$ , aimantation de chaque sous-réseau, ces densités d'énergie (par unité de volume) s'écrivent en se limitant aux termes du 2<sup>e</sup> ordre en  $\theta$  :

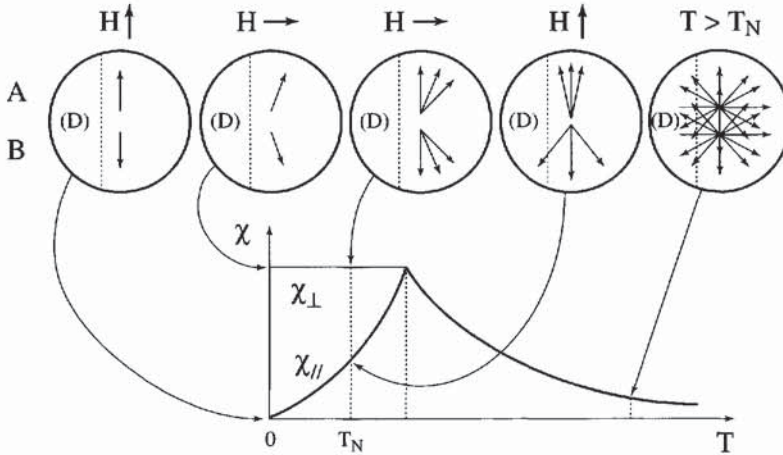
$$E_z = -2\mu_0 M' H \theta, E_{\text{éch}} = \mu_0 \{-wM'^2 - wM'^2(1 - 2\theta^2)\} \text{ et } E_a = K_1 \theta^2$$

en considérant que l'anisotropie est uniaxiale.

La minimisation de l'énergie totale par rapport à  $\theta$  conduit à la valeur d'équilibre :  $\theta = \mu_0 M' H / (2\mu_0 w M'^2 + K_1)$  et à la susceptibilité perpendiculaire :

$$\chi_{\perp} = \frac{2M'\theta}{H} = \left[ w \left( 1 + \frac{K_1}{2w\mu_0 M'^2} \right) \right]^{-1} \quad (4.54)$$

Comme le coefficient  $w$  est pratiquement indépendant de la température et que  $K_1/2w\mu_0M^2$  reste en général très faible devant l'unité et, de plus, varie peu avec la température, la susceptibilité perpendiculaire est sensiblement constante en dessous de  $T_N$  (figure 4.14) et conserve une valeur proche de  $1/w$ .



**Figure 4.14 - Variation thermique des susceptibilités parallèle et perpendiculaire à la direction des moments d'un matériau antiferromagnétique uniaxial dans le cas où (D) est l'axe de haute symétrie**

Les bulles illustrent l'effet du champ et de l'agitation thermique sur les moments.

#### 5.4. SUSCEPTIBILITÉ PARALLÈLE

Le champ est maintenant appliqué selon la direction d'antiferromagnétisme (voir figure 4.14). Sous l'action du champ, les aimantations des sous-réseaux parallèle et antiparallèle sont sensiblement modifiées (si  $T \neq 0$ ) selon la loi de Brillouin et valent respectivement  $M' + \Delta M$  et  $M' - \Delta M$ . En champ faible, un développement limité au premier ordre conduit naturellement à la susceptibilité parallèle :

$$\chi_{\parallel} = \frac{2\Delta M}{H} = 2A\mathcal{B}'_J(x_0) / \{T + A(w - w')\mathcal{B}'_J(x_0)\} \quad (4.55)$$

où  $A = \mu_0 m_0 M'_0 / k_B$ ,  $x_0 = (w + w')M' \{ \mu_0 m_0 / k_B T \}$  et  $\mathcal{B}'_J(x)$  est la dérivée de  $\mathcal{B}_J(x)$  par rapport à  $x$ .

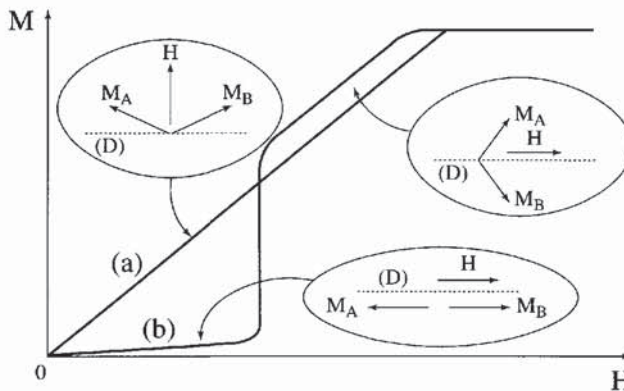
A 0 K, l'aimantation de chaque sous-réseau est maximum et  $\Delta M = 0$ . Il en résulte que, dans le modèle considéré, la susceptibilité parallèle est nulle à cette température. A  $T_N$ ,  $x_0 = 0$  et  $\mathcal{B}'_J(x_0) = (J + 1)/3J$ . On montre alors que  $\chi_{\parallel} = 1/w$  et qu'elle a donc la même valeur que  $\chi_{\perp}$  et que la susceptibilité paramagnétique. Entre 0 K et la température de Néel,  $\chi_{\parallel}$  augmente continûment. On peut montrer facilement que les susceptibilités parallèle et perpendiculaire présentent toutes deux un changement de pente à  $T_N$  et qu'au-dessus de  $T_N$ , elles sont égales. Toutes ces caractéristiques schématisées sur la figure 4.14 sont en accord avec les résultats expérimentaux

obtenus sur bon nombre de substances antiferromagnétiques, en particulier celles où les seules interactions significatives sont celles utilisées dans le modèle. Pour les autres matériaux, le modèle rend compte qualitativement des observations.

### 5.5. LE MÉTAMAGNÉTISME

Dans un antiferromagnétique en dessous de  $T_N$ ,  $\chi_{\perp}$  est plus grand que  $\chi_{\parallel}$ . La densité d'énergie dans un certain champ s'écrivant  $E = -\chi \mu_0 H^2/2$ , l'état où l'aimantation est perpendiculaire (ou presque) au champ magnétique est énergétiquement favorisé par rapport à celui où l'aimantation lui est parallèle (ou antiparallèle). Il en résulte que si l'on se trouve initialement (c'est-à-dire en champ faible) selon cette dernière configuration, le système aura tendance à basculer dans la première - et ce d'autant plus que le champ est plus élevé. Cependant cet effet s'oppose à l'anisotropie magnétocristalline qui favorise la configuration stable en champ nul. Ainsi pour étudier l'effet du champ sur un antiferromagnétique dans le modèle simple utilisé ci-dessus, deux situations doivent être considérées :

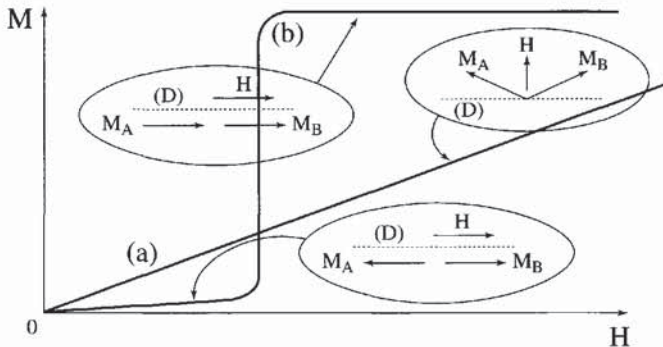
- ◆ Si l'énergie d'anisotropie est suffisamment faible (figure 4.15), et qu'un champ magnétique croissant est appliqué selon la direction d'antiferromagnétisme (D), l'aimantation de chaque sous-réseau passe brusquement, pour une valeur critique du champ, dans la configuration perpendiculaire schématisée sur la figure de sorte que l'aimantation totale augmente brusquement. Sous des champs plus élevés, l'aimantation de chaque sous-réseau tourne progressivement et tend à s'aligner sur la direction du champ. La variation de l'aimantation totale associée correspond à la courbe (b) de la figure 4.15. Une telle transition est qualifiée de *spin-flop* dans la littérature anglo-saxonne.



**Figure 4.15 - Représentation schématique du processus d'aimantation à basse température d'un matériau antiferromagnétique à faible anisotropie magnétocristalline**  
(a)  $H \perp (D)$  - (b)  $H \parallel (D)$  : dans ce dernier cas, on observe une transition métamagnétique

- ◆ Si l'anisotropie supposée uniaxiale comme précédemment est élevée, lorsqu'un champ modéré est appliqué parallèlement à (D), l'aimantation de chaque sous-

réseau reste parallèle à cette direction (figure 4.16). En champ croissant, l'aimantation du sous-réseau antiparallèle au champ se retourne brusquement pour une certaine valeur critique du champ, et lui devient parallèle de sorte que l'aimantation totale transite d'une valeur faible à une valeur très élevée proche de la saturation (courbe (b) de la figure 4.16). Une telle transition est qualifiée de *spin-flip* dans la littérature anglo-saxonne.



**Figure 4.16 - Représentation schématique du processus d'aimantation à basse température d'un matériau antiferromagnétique à forte anisotropie magnétocristalline**  
(a)  $H \perp (D)$  - (b)  $H \parallel (D)$  : dans ce dernier cas, on observe une transition métamagnétique

Dans les deux cas, lorsque le champ est appliqué perpendiculairement à  $(D)$ , l'aimantation croît linéairement jusqu'à la saturation (courbes (a) des figures 4.15 et 4.16). Cette variation correspond à la rotation progressive des moments vers le champ appliqué. Quelle que soit l'importance de l'anisotropie le modèle prévoit donc, en accord avec les résultats expérimentaux, qu'une transition a lieu dans la courbe d'aimantation d'un monocristal lorsque le champ est appliqué parallèlement à la direction d'antiferromagnétisme. Il en résulte que la transition métamagnétique doit également être observée sur un polycristal.

Signalons que dans de nombreux composés antiferromagnétiques colinéaires à forte anisotropie uniaxiale plusieurs transitions métamagnétiques sont observées, chacune d'elle correspondant au retournement partiel des moments du sous-réseau antiparallèle au champ. Les configurations magnétiques des différentes phases intermédiaires peuvent être déterminées grâce à la diffraction des neutrons.

## 6. LE FERRIMAGNÉTISME

### DANS LE MODÈLE DE CHAMP MOLÉCULAIRE

On qualifie de ferrimagnétique une substance antiferromagnétique dans laquelle les différents sous-réseaux ne se compensent pas exactement de sorte qu'il en résulte une aimantation spontanée. Un tel arrangement magnétique peut exister lorsque les sous-réseaux ne sont pas identiques du fait que le nombre d'atomes de chaque sous-

réseau est différent et/ou qu'ils sont constitués d'atomes différents (et donc de moments différents). Le ferrimagnétisme a été prévu par Louis Néel avant d'être confirmé par l'expérience. Dans le modèle du champ moléculaire, il a considéré deux sous-réseaux colinéaires d'aimantations différentes  $M_A$  et  $M_B$ . Soient  $w_{AB} = w_{BA} = -w$  ( $w > 0$ ),  $w_{AA} = \alpha_A w$  et  $w_{BB} = \alpha_B w$  ( $w_{AA}$  et  $w_{BB} > 0$ ) les différents coefficients de champ moléculaire. Le champ total agissant sur chacun des sous-réseaux s'écrit :

$$H_i = H - w(M_j - \alpha_i M_i) \quad (4.56)$$

Dans le domaine paramagnétique, la formule (4.51) devient :

$$M_i = (\mathcal{C}_i/T) H_i \quad (4.57)$$

où  $\mathcal{C}_i$  ( $i = A$  ou  $B$ ) désigne la constante de Curie de chaque sous-réseau,  $\mathcal{C}_i = N_i \mu_0 m_{i(\text{eff})}^2 / 3k_B$ . La résolution des équations (4.56) permet de déduire l'aimantation totale :

$$M = M_A + M_B = \chi H \quad (4.58)$$

Dans cette expression, la susceptibilité est telle que :

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T - \theta_p}{\mathcal{C}} - \frac{\gamma}{T - \theta} \quad (4.59)$$

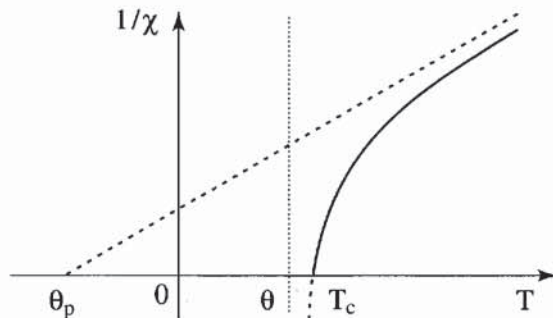
où  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B$ , avec :

$$\theta = w(2 + \alpha_A + \alpha_B) \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B / (\mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B) \quad (4.60)$$

$$\gamma = w^2 [\mathcal{C}_A(1 + \alpha_A) - \mathcal{C}_B(1 + \alpha_B)]^2 \{ \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B / (\mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B)^3 \} \quad (4.61)$$

$$\theta_p = w \frac{\alpha_A \mathcal{C}_A^2 + \alpha_B \mathcal{C}_B^2 - 2 \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B}{\mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B} \quad (4.62)$$

L'inverse de la susceptibilité magnétique suit donc une loi hyperbolique, représentée sur la figure 4.17, avec pour asymptotes : à haute température  $1/\chi = (T - \theta_p)/\mathcal{C}$  qui coupe l'axe des températures en  $T = \theta_p$  et, au voisinage de la température d'ordre  $T_C$ , une asymptote verticale  $T = \theta$ .



**Figure 4.17 - Variation théorique de la susceptibilité paramagnétique dans un matériau ferrimagnétique**

$T_C$  est définie par l'annulation de  $1/\chi$  ( $\chi$  devient infinie). Elle est donnée par une équation du second degré dont une seule des solutions est réaliste :

$$T_C = \frac{w}{2} \left\{ \alpha_A \mathcal{C}_A + \alpha_B \mathcal{C}_B + \sqrt{4\mathcal{C}_A \mathcal{C}_B + (\alpha_A \mathcal{C}_A - \alpha_B \mathcal{C}_B)^2} \right\} \quad (4.63)$$

En dessous de  $T_C$  et en l'absence de champ extérieur, la résolution numérique des deux équations (4.57) permet de déduire la dépendance thermique de l'aimantation spontanée  $|M_s| = |M_A| - |M_B|$  dont les variations possibles sont schématisées sur la figure 4.18. Le cas (N) est le plus intéressant, car l'aimantation spontanée passe par zéro à une température inférieure à la température de Curie, appelée *température de compensation*  $T_{comp}$ . Ce comportement a lieu lorsque la variation thermique de l'aimantation du sous-réseau qui l'emporte à basse température est plus rapide que celle de l'autre sous-réseau.

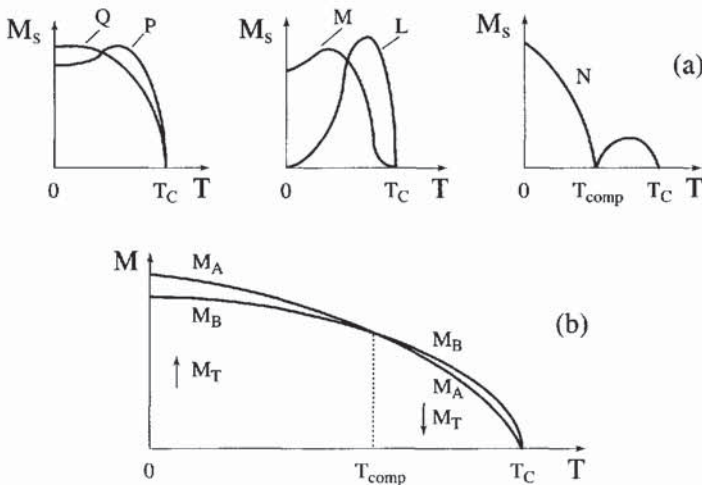


Figure 4.18 - (a) Différents types de variations thermiques de l'aimantation spontanée dans un matériau ferrimagnétique tels qu'ils ont été proposés par Néel [2]  
(b) Détails du cas N :  $M_T = M_A - M_B$

## 7. AUTRES TYPES D'ARRANGEMENTS MAGNÉTIQUES (HÉLIMAGNÉTISME, STRUCTURES MODULÉES EN AMPLITUDE ...) DANS LE MODÈLE DE CHAMP MOLÉCULAIRE

Les arrangements magnétiques, et les comportements magnétiques associés, que nous avons décrits ci-dessus sont les plus simples, en particulier tous les moments magnétiques sont colinéaires. En fait, la diffraction des neutrons a permis d'observer dans les substances cristallisées des structures nettement plus complexes, souvent non colinéaires, qui doivent être décrites à l'aide d'un nombre de sous-réseaux supérieur à deux. Nous en citerons deux exemples : les structures héli-magnétiques

et les structures modulées sinusoidalement en amplitude. Enfin, dans les substances amorphes, caractérisées par l'absence d'anisotropie macroscopique, on observe des configurations de spin bien différentes des précédentes, et appelées spéromagnétiques, aspéromagnétiques et spérismagnétiques.

### 7.1. STRUCTURE HÉLIMAGNÉTIQUE

Considérons un cristal uniaxial (de symétrie hexagonale ou quadratique par exemple) dans lequel les atomes magnétiques, tous identiques, appartiennent à des couches parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe  $z$  (sénaire ou quaternaire, respectivement). Supposons également que :

- ◆ dans chaque couche, les moments sont parallèles et leur aimantation vaut  $M_c$ ,
- ◆ d'une couche à l'autre les moments font un angle  $\phi$  (figure 4.19-a).

Pour simplifier le problème, on ne considère, ce qui est raisonnable, que les interactions entre atomes d'une même couche, et entre ceux appartenant à des couches premières et deuxièmes voisines. Soit  $w_0$ ,  $w_1$  et  $w_2$  les coefficients des champs moléculaires dus respectivement aux moments d'une même couche et à ceux des couches premières et deuxièmes voisines. La densité d'énergie d'échange s'écrit alors :

$$E_{\text{éch}} = -\mu_0 M_c^2 (w_0 + 2 w_1 \cos \phi + 2 w_2 \cos 2\phi) / 2 \quad (4.64)$$

La minimisation de cette énergie par rapport à  $\phi$  conduit à l'équation suivante ( $w_1 + 4w_2 \cos \phi$ )  $\sin \phi = 0$ , qui est vérifiée pour trois configurations magnétiques :

- ◆  $\phi = 0$ , c'est-à-dire le ferromagnétisme,
- ◆  $\phi = 180^\circ$ , c'est-à-dire l'antiferromagnétisme,
- ◆ un angle  $\phi$  tel que :

$$\cos \phi = -w_1 / 4w_2 \quad (4.65)$$

Ce dernier cas correspond à l'hélimagnétisme qui est schématisé sur la figure 4.19-a.

Remarquons que cette dernière configuration ne peut exister que si  $|w_1 / 4w_2| < 1$ . De plus, l'étude du signe de la dérivée seconde de l'énergie et la comparaison des énergies de ces configurations conduit au diagramme de stabilité présenté sur la figure 4.20. La configuration hélimagnétique est la plus stable lorsque  $w_2 < 0$  et que  $|w_2| > |w_1 / 4|$ . Ce type de structure est observé dans de nombreux composés hexagonaux et quadratiques à base de terres rares.

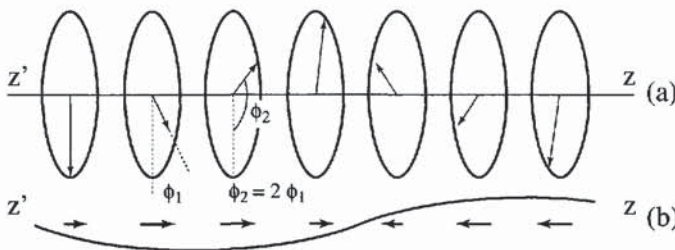


Figure 4.19 - Structure hélimagnétique (a) et structure modulée sinusoidalement en amplitude (b)

## 7.2. STRUCTURE MODULÉE SINUSOÏDALEMENT EN AMPLITUDE

Considérons maintenant le cas où l'anisotropie uniaxiale est telle qu'elle impose aux moments d'être parallèles à l'axe z, perpendiculaire aux couches. Le seul degré de liberté qui reste à l'aimantation est alors son module : supposons que son amplitude présente une variation sinusoïdale (figure 4.19-b) telle que :  $M_n = M_{\max} \cos(n\phi + \phi_0)$ , où  $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  désigne le numéro des couches successives.

En considérant les mêmes interactions d'échange que précédemment, la densité d'énergie s'écrit :

$$E_{\text{éch}} = (\mu_0/2) (M_{\max})^2 \cos \phi_0 [w_0 \cos \phi_0 + w_1 \{ \cos(\phi + \phi_0) + \cos(-\phi + \phi_0) \} + w_2 \{ \cos(2\phi + \phi_0) + \cos(-2\phi + \phi_0) \}]$$

soit encore :  $E_{\text{éch}} = \mu_0 (M_{\max})^2 \cos^2 \phi_0 (w_0 + 2w_1 \cos \phi + 2w_2 \cos 2\phi) / 2$ .

Comme on doit considérer que le plan  $n = 0$  peut être situé en n'importe quel point de la sinusoïde, l'énergie d'échange moyenne est telle que  $\cos^2 \phi_0 = 1/2$  de sorte que :

$$E_{\text{éch}} = \mu_0 (M_{\max})^2 (w_0 + 2w_1 \cos \phi + 2w_2 \cos 2\phi) / 4 \quad (4.66)$$

A un facteur 2 près, c'est la même énergie qu'en (4.64), elle conduit au même diagramme de stabilité (figure 4.20) sauf que la structure hélimagnétique est remplacée par une structure modulée sinusoïdalement en amplitude de même périodicité. Ainsi, pour les mêmes interactions d'échange, le composé adoptera une structure soit hélimagnétique soit modulée selon que l'anisotropie est planaire ou axiale, respectivement.

Notons que, dans la structure modulée, un grand nombre d'atomes ont leur moment magnétique réduit. Dans la description adoptée jusqu'à présent, où la valeur moyenne thermique de chaque moment suit la fonction de Brillouin, une telle réduction du moment ne peut exister que si la température n'est pas trop basse car à 0 K, quel que soit le champ, les moments magnétiques ont leur valeur maximum.

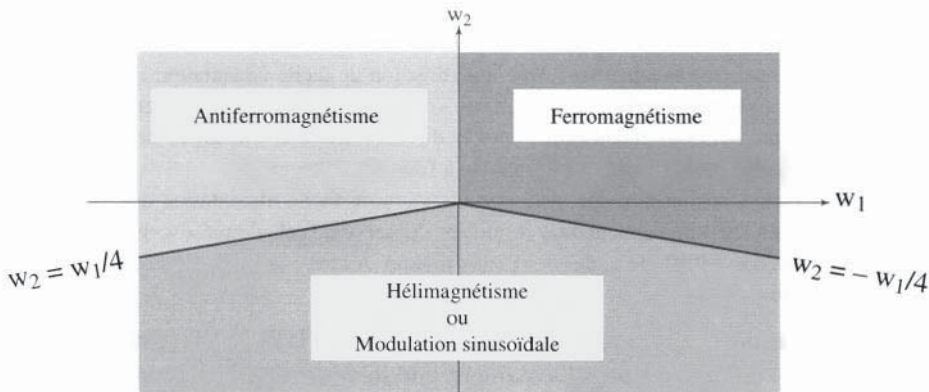


Figure 4.20 - Diagramme de phase de différents types de structures dans l'espace  $w_1$ - $w_2$

C'est la raison pour laquelle une structure modulée n'est pas stable à basse température, elle apparaît généralement juste en dessous de la température de Néel et se transforme à basse température en une structure à moments égaux. Il existe cependant quelques composés particuliers dans lesquels la structure modulée reste stable jusqu'aux très basses températures, la réduction du moment pouvant avoir une origine autre que purement thermique.

Comme les structures décrites ci-dessus ont une aimantation résultante nulle, leurs propriétés magnétiques sont similaires à celles d'un antiferromagnétique simple et on les classe par conséquent dans la même catégorie : la susceptibilité est toujours faible et présente un maximum à la température de Néel. De même, en dessous de  $T_N$ , une transition métamagnétique se produit, quoique moins brutale que dans le cas d'un antiferromagnétique simple.

### 7.3. STRUCTURES MAGNÉTIQUES OBSERVÉES DANS LES SUBSTANCES AMORPHES

Dans les substances amorphes, caractérisées par une direction d'anisotropie locale qui varie aléatoirement de site en site, on peut rencontrer des structures *ferromagnétiques*, c'est le cas de certains verres métalliques qui présentent une très faible anisotropie : l'interaction d'échange positive domine alors et impose un arrangement colinéaire des moments.



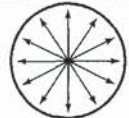
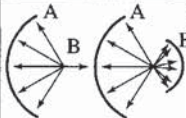
			
Ferromagnétisme	Aspéromagnétisme	Spéromagnétisme	Spérimagnétisme
Aimantation spontanée (a)	Aimantation spontanée (b)	Pas d'aimantation spontanée (c)	Aimantation spontanée (d)

Figure 4.21 - Les différentes structures magnétiques rencontrées avec les alliages amorphes

- (a) Ferromagnétisme colinéaire ;
- (b) Aspéromagnétisme (ferromagnétisme avec une direction de facile aimantation qui varie aléatoirement de site en site : une aimantation résultante s'observe à l'échelle mésoscopique) ;
- (c) Spéromagnétisme (antiferromagnétisme, mais la direction d'antiferromagnétisme varie aléatoirement de site en site : pas d'aimantation résultante à l'échelle mésoscopique) ;
- (d) Spérimagnétisme (ferrimagnétisme avec une direction de facile aimantation qui varie aléatoirement de site en site : une aimantation résultante s'observe à l'échelle mésoscopique, qui résulte de la différence des aimantations des deux sous-réseaux A et B ; l'un des deux sous-réseaux peut d'ailleurs être ferromagnétique).

On observe une aimantation spontanée (figure 4.21-a). Lorsque l'anisotropie locale devient notable, elle va imposer localement une direction de facile aimantation ; en présence d'interactions ferromagnétiques, il apparaît localement des moments magnétiques plus ou moins orientés parallèlement entre eux et si, à longue portée, il

n'y a pas de moment magnétique permanent, localement il existe bien une aimantation spontanée : la structure magnétique est dite *aspéromagnétique* (figure 4.21-b). Au contraire, en présence d'interactions antiferromagnétiques, à chaque moment sera associé un voisin antiparallèle, et la structure dite *spéromagnétique* ne présentera donc aucune aimantation spontanée (figure 4.21 c). C'est le cas des alliages amorphes TbAg et Dy<sub>21</sub>Ni<sub>79</sub>.

Enfin, dans les alliages amorphes binaires de deux éléments A et B, s'il existe des interactions ferromagnétiques A-A et B-B, et des interactions antiferromagnétiques A-B, on peut observer des structures *spéromagnétiques* (figure 4.21-d), couplant un aspéromagnétique et un ferromagnétique (cas des alliages amorphes Dy<sub>23</sub>Co<sub>77</sub>), ou bien deux "sous-réseaux" aspéromagnétiques (cas des alliages amorphes Dy<sub>21</sub>Fe<sub>79</sub>). Ces différents comportements ont été identifiés par J.M D. Coey [5].

## 8. LES DEUX GRANDES FAMILLES DE MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

Les structures magnétiques décrites et discutées ci-dessus sont les plus simples. La diffraction neutronique a révélé qu'il existe en fait une multitude de structures magnétiques plus complexes qui, toutes, résultent essentiellement des interactions d'échange et de l'anisotropie. On observe en particulier un grand nombre de structures complexes non colinéaires, par exemple la structure triangulaire qui est observée dans certains composés hexagonaux et qui résulte de la *frustration* d'interactions d'échange négatives entre premiers voisins (figure 4.12-b). Le terme de frustration utilisé dans ce cas signifie que l'antiparallélisme entre premiers voisins ne peut exister en raison de la position de ces atomes situés aux sommets d'un triangle.

Quelle que soit la structure magnétique, on peut classer les substances qui s'ordonnent magnétiquement en deux catégories, vis-à-vis de leurs propriétés macroscopiques :

- ◆ D'une part, les composés qui ont une *aimantation spontanée* et un comportement de type *ferromagnétique* avec les caractéristiques qui ont été évoquées au § 1.4 et 2.1 du chapitre 3 et schématisées sur les figures 3.7 et 3.8. Bien que la variation thermique de l'aimantation spontanée d'un ferrimagnétique puisse être un peu particulière, on inclura souvent ces composés dans la catégorie des ferromagnétiques.
- ◆ D'autre part, les composés qui n'ont *pas d'aimantation spontanée* et qui ont un comportement de type *antiferromagnétique* avec les caractéristiques évoquées au § 1.3 du chapitre 3 et schématisées sur la figure 4.13.

## 9. LES TRACÉS D'ARROTT

Les caractéristiques magnétiques macroscopiques des matériaux font appel à la connaissance de l'aimantation en champ faible. C'est le cas pour la détermination de l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique, de la détermination de la température d'ordre ou de la susceptibilité lorsqu'il n'y a pas d'aimantation spontanée. Or expérimentalement il n'est pas toujours aisé de déterminer ces diverses quantités. En effet, elles ne sont réellement définies qu'en champ nul.

Dans la réalité on applique toujours un champ fini et la mesure est souvent erronée pour différentes raisons telles que la faiblesse du signal ou, plus grave, l'influence des inhomogénéités ou d'impuretés éventuelles (surtout si elle sont ferromagnétiques avec une température de Curie plus élevée que la température d'ordre du matériau étudié). Cependant, même dans le cas d'une expérience parfaitement précise sur un échantillon pur, il est nécessaire – pour connaître l'aimantation spontanée – de rendre l'échantillon monodomaine et d'aligner tous les moments dans la direction du champ. Cela nécessite parfois des champs assez intenses pour que l'on ne se trouve plus dans la partie linéaire de la susceptibilité initiale : on mesure alors une aimantation "qui s'approche de la saturation" mais qui n'est jamais saturée, et l'on définit expérimentalement des lois d'approche permettant d'extrapoler "à champ infini" la valeur de l'aimantation à saturation. Celle-ci peut différer profondément de l'aimantation spontanée, surtout quand on approche de la température de Curie vers laquelle le champ magnétique appliqué à l'échantillon est de moins en moins négligeable par rapport au champ moléculaire.

Il est donc préférable d'analyser les isothermes sur une certaine gamme de champs tant que le développement limité faisant appel aux termes de plus bas degré reste valable (dans la réalité cette gamme de champ est souvent relativement étendue). Pour ce faire on utilise des tracés d'Arrott, du nom du chercheur qui a pour la première fois proposé cette approche [6]. Il s'agit de tracer les variations isothermes de  $M^2$  en fonction de  $H/M$  ou, ce qui revient souvent au même, de  $H_0/M$ . Nous allons voir maintenant ce que peuvent apporter ces tracés dans les différentes situations expérimentales que nous avons rencontrées précédemment.

### 9.1. MATÉRIAU N'AYANT PAS D'AIMANTATION SPONTANÉE

C'est le cas pour tous les matériaux dans le domaine paramagnétique, ou pour les matériaux de type antiferromagnétique dans le domaine ordonné. On peut alors toujours développer  $M$  en puissances croissantes de  $H$ , ou  $H$  en puissances de  $M$ . Dans cette dernière approche en se limitant au troisième ordre et en considérant que l'aimantation est une fonction impaire du champ, on peut écrire :

$$H = M/\chi + AM^3 \quad (4.67)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité initiale et  $A$  une constante (qui dépend de la température).

On en déduit : 
$$M^2 = (H/M - 1/\chi)/A \quad (4.68)$$

Les tracés d'Arrott sont donc des droites dont l'abscisse à l'origine est égale à  $1/\chi$ .

La figure 4.22 montre un exemple de tels tracés sur le composé antiferromagnétique  $\text{DyNi}_2\text{Si}_2$ . Il est intéressant de remarquer que les points en aimantation faible, c'est-à-dire en champ faible, s'écartent de la droite, ce qui justifie l'utilisation de tels tracés plutôt que de mesurer l'aimantation dans un champ très faible.

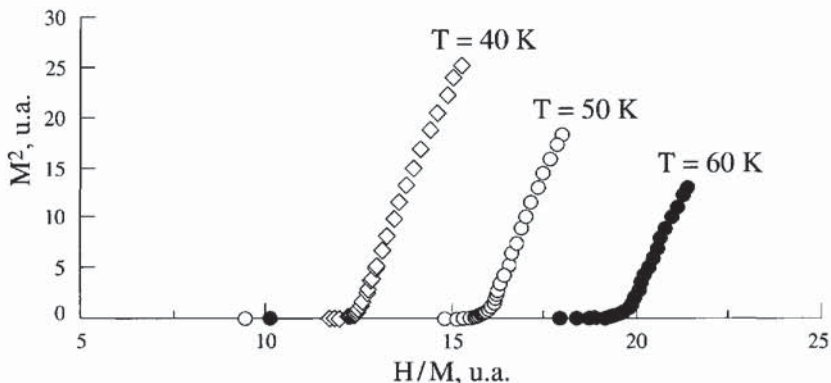


Figure 4.22 - Tracés d'Arrott dans le domaine paramagnétique pour le composé  $\text{DyNi}_2\text{Si}_2$  antiferromagnétique, dont la température de Néel est  $T_N = 6 \text{ K}$  [7]

## 9.2. MATÉRIAU PRÉSENTANT UNE FAIBLE AIMANTATION SPONTANÉE

C'est le cas de tous les matériaux ferromagnétiques (ou ferrimagnétiques) au voisinage de la température de Curie  $T_C$ , ou de certains de ces matériaux dont l'aimantation est faible quelle que soit la température. En supposant que  $M$  soit faible, la contribution magnétique à l'énergie libre en présence d'un champ interne  $H$  (champ appliqué plus champ démagnétisant) peut être exprimée à l'aide d'un développement limité, dit de Landau (voir § 6 au chapitre 10) :

$$F(M) = a M^2/2 + b M^4/4 + \dots - \mu_0 M H \quad (4.69)$$

où  $a$  et  $b$  sont des coefficients qui dépendent de la température. Dans les phases ferromagnétiques et paramagnétiques,  $b$  est toujours positif. En champ nul,  $F(M)$  est paire, car indépendante du sens de l'aimantation.

Sur la figure 4.23, nous avons représenté cette fonction en champ nul dans deux cas. Dans le cas (F),  $a$  est négatif et  $F(M)$  est minimum pour une valeur non nulle de l'aimantation : le composé est ferromagnétique. Dans le cas (P),  $a$  est positif et  $F(M)$  est minimum pour  $M = 0$  : le composé est paramagnétique. Ainsi le coefficient  $a$  devient nul à  $T_C$ . En présence d'un champ  $H$ , la minimisation de  $F(M)$  par rapport  $M$  conduit à l'équation  $a M + b M^3 = \mu_0 H$ , soit :

$$M^2 = (\mu_0/b) H/M - a/b \quad (4.70)$$

On retrouve que les tracés de Arrott sont bien linéaires (voir figure 4.24). Pour  $T < T_C$  ( $a < 0$ ), l'ordonnée à l'origine  $-a/b$  est égale à  $M_S^2$ . Pour  $T > T_C$  ( $a > 0$ ), il n'y a plus d'aimantation spontanée et l'abscisse à l'origine  $a/\mu_0$  est égale à  $1/\chi$  l'inverse de la susceptibilité initiale comme on l'a vu précédemment. Le tracé de Arrott qui passe par l'origine correspond à la température de Curie.

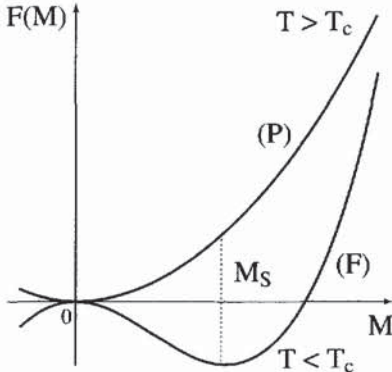


Figure 4.23 - Contribution magnétique à l'énergie libre pour un matériau ferromagnétique

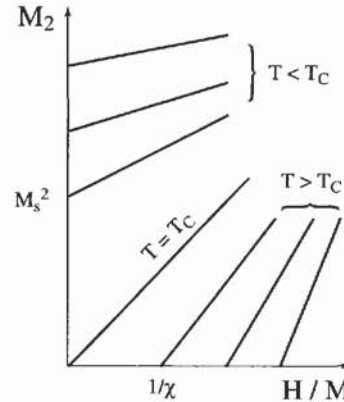


Figure 4.24 - Représentation schématique des tracés d'Arrott pour un corps ferromagnétique

Les résultats ci-dessus sont indépendants du modèle utilisé pour décrire le magnétisme du matériau considéré, il est donc logique de les retrouver dans le cadre du modèle de magnétisme localisé utilisé jusqu'à présent et dans lequel l'aimantation s'exprime à l'aide de la fonction de Brillouin (ou de Langevin) :

$$m = M/M_0 = \mathcal{B}_J \left[ \frac{\mu_0 m_0}{k_B T} (H + wM) \right] \quad (4.71)$$

Le développement limité de cette fonction jusqu'au troisième ordre en  $M$  conduit à :  $\mu_0 H = a M + b M^3$ , et par la suite à la relation (4.70) avec  $a = \mu_0 w (T/T_C - 1)$  et  $b = \mu_0 \{3(2J^2 + 2J + 1)T\} / 10 M_0^2 (J + 1)^2 \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est la constante de Curie. On voit bien que  $b$  est positif et que  $a$ , positif au-dessus de  $T_C$ , s'annule à  $T_C$  pour devenir négatif à plus basse température.

En conclusion les tracés d'Arrott sont une excellente manière d'exploiter les résultats de mesures d'aimantation pour caractériser en détail un matériau.

**Remarque :** Les tracés d'Arrott sont souvent effectués en prenant le champ appliqué  $H_0$  à la place du champ interne  $H$ . Dans ce cas, il se produit un décalage des abscisses. En effet, en supposant que  $H_d = -NM$ , la formule (4.68) devient :

$$M^2 = \{H_0/M - N - (1/\chi)\} / A \quad (4.72)$$

La figure 4.25 illustre un tracé d'Arrott dans le cas d'un composé présentant un faible ferromagnétisme [8]. Ici encore, on observe que la droite passant par l'origine correspond à la température de Curie, et que les points en champ faible s'écartent de

la linéarité. Il est bon de rappeler que de tels tracés ne doivent être effectués qu'avec des matériaux présentant un très faible ferromagnétisme à toute température, ou bien avec des ferromagnétiques forts dans leur phase paramagnétique, et dans leur phase ferromagnétique seulement tout près de la température de Curie.

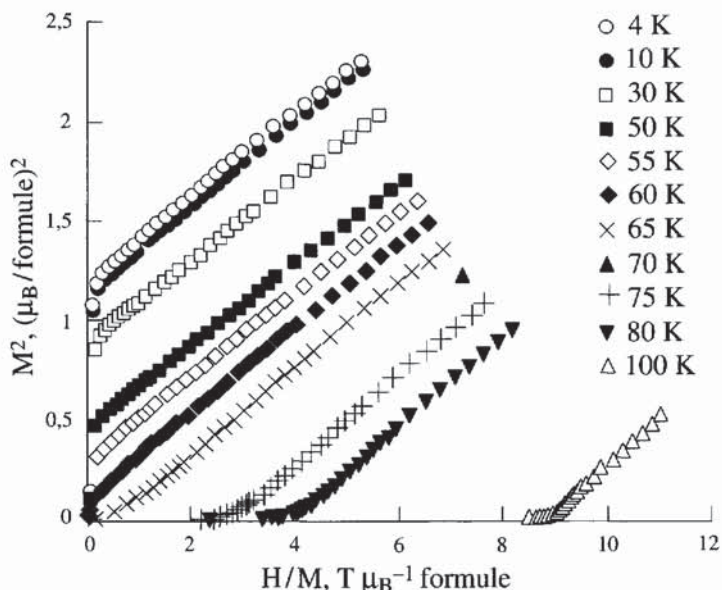


Figure 4.25 - Tracés d'Arrott pour un très faible ferromagnétique,  $\text{Lu}_3\text{C}_{07,77}\text{Sn}_4$  [8]

On notera que la courbe passant par l'origine correspond à la température de Curie, soit  $T_C = 63 \text{ K}$ .

## 10. CONCLUSIONS

La description phénoménologique du magnétisme localisé exposée au chapitre 3 à l'échelle macroscopique et au chapitre 4 à l'échelle microscopique a l'avantage d'être pédagogique et relativement simple. Il est bon, toutefois, de se rappeler que nombre de substances relèvent d'une autre description, à savoir le modèle du magnétisme itinérant : ce sont des électrons partiellement ou totalement délocalisés qui sont alors responsables du magnétisme de la substance. Ce modèle sera décrit au chapitre 8. Cependant, qu'il s'agisse de magnétisme localisé ou itinérant, les phénomènes de base seront les mêmes :

- ◆ à l'échelle microscopique, la structure magnétique spontanée sera toujours imposée par une interaction d'échange qui s'efforcera d'orienter les moments magnétiques soit parallèlement, soit antiparallèlement et par des interactions anisotropes qui définiront sur chaque site une ou plusieurs orientations privilégiées pour les moments magnétiques.
- ◆ à l'échelle mésoscopique, l'interaction dipolaire (qui est relativement faible par rapport aux deux précédentes, mais à longue portée) jouera un rôle fondamental dans la division en domaine, dès lors qu'il existe une aimantation spontanée.

Dans les deux chapitres qui suivent, nous allons maintenant analyser dans le détail les comportements physiques mésoscopique et macroscopique d'une substance ferro-magnétique (configuration en domaines de Weiss, processus d'aimantation, phénomènes d'hystérésis), comportements à caractère universel et donc indépendants de la substance considérée et du caractère localisé ou itinérant des électrons responsables du magnétisme.

## EXERCICES

**E.1** La susceptibilité d'un matériau paramagnétique, qui contient un seul type d'ion terre rare au nombre de  $N = 10^{27}/\text{m}^3$ , suit une loi de Curie donnée par  $\chi = 0,162/T$  (en SI). Déterminer le moment effectif ; en déduire de quelle terre rare il s'agit.

**E.2** Le cobalt métallique cristallise dans la structure hexagonale compacte ( $a = 0,251 \times 10^{-9}$  m et  $c = 0,407 \times 10^{-9}$  m) qui comprend deux atomes par maille en  $(0, 0, 0)$  et  $(1/3, 2/3, 1/2)$ . Il est ferromagnétique avec  $T_C = 1404$  K et le moment magnétique porté par chaque atome à basse température est  $\mathbf{m} = 1,7 \mu_B$ .

**E.2.1** - Combien y a-t-il d'atomes premiers voisins et à quelle distance ?

**E.2.2** - En supposant que l'interaction d'échange n'a lieu qu'entre atomes premiers voisins et en considérant que l'énergie de cette interaction s'écrit  $\mathcal{E}_{\text{éch}} = -n\mathbf{m}^2$ , exprimer le coefficient de champ moléculaire  $w$  en fonction de  $n$ .

**E.2.3** - En se plaçant dans le cas classique où le moment effectif est égal à  $\mathbf{m}$ , donner en SI la valeur de  $\mathcal{E}_{\text{éch}}$ .

**E.2.4** - On veut comparer cette énergie à l'énergie dipolaire. Calculer cette dernière ( $\mathcal{E}_{\text{dip}}$ ) entre deux atomes de cobalt en considérant qu'ils sont distants de  $a$ , que leurs moments magnétiques sont parallèles et que ces derniers sont parallèles à la droite qui les relie. Comparer  $\mathcal{E}_{\text{éch}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{dip}}$ .

On rappelle que l'énergie dipolaire entre deux moments  $\mathbf{m}_i$  et  $\mathbf{m}_j$  a pour expression :

$$\mathcal{E}_{ij} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{(\mathbf{m}_i \mathbf{r})(\mathbf{m}_j \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j}{r^3} \right] \text{ où } \mathbf{r} \text{ est le vecteur reliant les deux}$$

atomes ; cette expression se déduit des équations (2.24) et (2.80), chapitre 2.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1**  $m_{\text{eff}} = 7,94 \mu_B$ , il s'agit de l'ion  $\text{Gd}^{3+}$ .

**S.2** **S.2.1**  $12, 0,251 \times 10^{-9}$  m.

**S.2.2**  $w = 12 n/N$  où  $N$  est le nombre d'atomes par unité de volume.

$$S.2.3 \mathcal{E}_{\text{éch}} = 4,95 \times 10^{-21} \text{ J.}$$

$$S.2.4 \mathcal{E}_{\text{dip}} = 3,14 \times 10^{-24} \text{ J.}$$

L'énergie dipolaire est plus de trois ordres de grandeur inférieure à l'énergie d'échange.

## RÉFÉRENCES

- [1] W.F. HENRY, *Phys. Rev.* (1952) **88**, 559.
- [2] L. NÉEL, *Ann. Géophys.* (1949) **5**, 99-136.
- [3] L. NÉEL, *C. R. Ac. Sci.* (1961) **252**, 4075-4080.
- [4] L. NÉEL, *Oeuvres Scientifiques* (1978) Editions du CNRS, Paris, 586 pages.  
Traduction anglaise : *Selected works of Louis Néel* (1988) Gordon & Breach, Sci. Publishers, New York, London.
- [5] J.M.D. COEY, P.W. READMAN, *Nature* (1973) **246**, 476 ; J.M.D. COEY, J. CHAPPERT, J.P. REBOUILLAT, T.S. WANG, *Phys. Rev. Lett.* (1976) **36**, 1061 ; R. ARRESE-BOGGIANO, J. CHAPPERT, J.M.D. COEY, A. LIÉNARD, J.P. REBOUILLAT, *J. Physique* (1976) **37**, C6-77.
- [6] A. ARROTT, *Phys. Rev.* (1957) **108**, 1394.
- [7] A. GARNIER, D. GIGNOUX, D. SCHMITT, communication privée.
- [8] R. SKOLOZDRA, B. GARCIA-LANDA, D. FRUCHART, D. GIGNOUX, J.L. SOUBEYROUX, L. AKSELRUD, *J. Alloys and Compounds* (1996), **235**, 210.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

## CHAPITRE 5

# FERROMAGNÉTISME D'UN SYSTÈME IDÉAL

*Dans un système idéal de moments magnétiques, coexistent trois types d'interactions : les interactions d'échange qui favorisent – pour ce qui nous intéresse dans ce chapitre – un ordre ferromagnétique ou ferrimagnétique, les interactions avec le réseau qui engendrent une anisotropie magnétocristalline, et les interactions dipolaires magnétiques.*

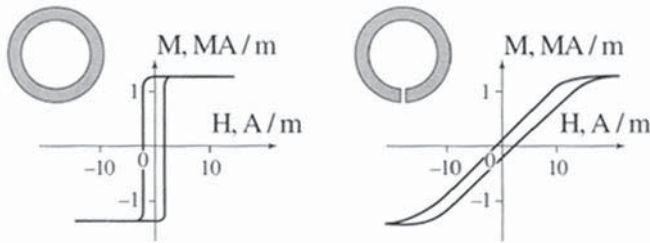
*L'impossibilité de satisfaire à la fois les exigences associées à toutes ces interactions conduit le plus souvent à l'établissement d'une structure en domaines des moments magnétiques du système : la configuration des moments ainsi obtenue résulte d'un compromis et peut, de ce fait, être aisément perturbée. La taille du système considéré, et ses dimensions relatives, influent radicalement sur la configuration d'équilibre obtenue ainsi que sur l'intensité des perturbations capables de la modifier.*

*Dans un système parfait, anisotrope et de taille suffisante pour présenter une structure multidomaines à l'état désaimanté, tous les processus d'aimantation à partir de cet état sont parfaitement réversibles. A l'opposé, le renversement de l'aimantation à partir de l'état saturé exige le franchissement d'une barrière d'énergie. En présence d'anisotropie magnétocristalline, le retournement ne se produit que pour des champs inverses appliqués supérieurs au champ d'anisotropie (théorème de Brown). En l'absence d'anisotropie magnétocristalline, des configurations d'aimantation non uniformes permettent son renversement en champs plus faibles.*

### 1. INTRODUCTION

Lorsque la température d'un système ferromagnétique est maintenue en-dessous de  $T_C$ , les interactions d'échange deviennent prépondérantes et conduisent à une mise en ordre parallèle des moments individuels. Tous les matériaux ferromagnétiques dont la température de Curie est supérieure à la température ambiante devraient donc apparaître spontanément aimantés. L'expérience nous apprend qu'il n'en est rien, et l'aimantation de nombreux systèmes ferromagnétiques (fer, nickel, tôles de fer-silicium par exemple) ne devient manifeste que sous champ appliqué. Mais l'on

sait aussi qu'un tore de n'importe quelle substance ferromagnétique, une fois qu'il a été saturé sous l'effet d'un champ appliqué, conserve une aimantation rémanente proche de  $M_s$ , même après que le champ inducteur ait été ramené à zéro. Cette aimantation disparaît lorsqu'une fente (ou entrefer), si étroite soit-elle, est aménagée dans le tore (figure 5.1). Pour réaimanter à saturation le tore ainsi sectionné, il faut lui appliquer un champ magnétique très supérieur à celui qui avait été nécessaire pour aimanter le tore sans entrefer. En outre, cette aimantation retombe à une valeur proche de zéro dès que l'on supprime le champ inducteur.



**Figure 5.1 - Influence d'un entrefer sur la courbe d'aimantation d'un tore en fer doux en fonction du champ magnétique extérieur appliqué**

Cette observation nous montre que l'absence d'aimantation spontanée dans la plupart des matériaux ferromagnétiques répond au besoin d'empêcher la formation de pôles à la surface d'un échantillon. Les interactions d'échange, qui favorisent le parallélisme des moments, tendent à engendrer de tels pôles ; au contraire les interactions dipolaires tendent à les faire disparaître. Nous allons rappeler quelles sont les caractéristiques essentielles de ces deux interactions, et de la troisième, fréquemment présente : l'anisotropie magnétique locale. Nous verrons comment leur compétition peut donner naissance à des configurations de moments extrêmement variées, d'abord en champ appliqué nul (§ 2 à 4) puis en présence d'un champ magnétique (§ 7 et 8). Le § 5 traite du cas particulier des particules de petites dimensions, et le § 6 des techniques de visualisation des domaines magnétiques.

## **2. LE PRINCIPE DES CONFIGURATIONS FERROMAGNÉTIQUES OU L'ART DU COMPROMIS**

### **2.1. L'INTERACTION D'ÉCHANGE**

D'origine quantique, l'interaction d'échange est de nature électrostatique. Elle est très intense, mais n'agit qu'entre moments voisins et s'atténue très vite avec la distance. Dans les systèmes ferromagnétiques où elle tend à aligner les moments parallèlement les uns aux autres, elle favorise une aimantation uniforme. Cependant, son influence est faible à grande distance (où elle n'agit que par l'effet de chaîne) et elle autorise l'indépendance mutuelle de moments suffisamment éloignés, pour un coût énergétique relativement modeste. Nous avons donné une expression

analytique de cette énergie d'interaction au chapitre précédent (éq. 4.34). Cette expression est proportionnelle au produit  $\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j$ , et donc à  $\alpha_{1i} \alpha_{1j} + \alpha_{2i} \alpha_{2j} + \alpha_{3i} \alpha_{3j}$ , où les  $\alpha_n$  sont les cosinus directeurs des vecteurs moment magnétique sur les sites  $i$  et  $j$  respectivement. L. Néel et C. Kittel ont montré [1] que cette expression pouvait encore être écrite en fonction des gradients de ces cosinus directeurs sous la forme d'une densité d'énergie :

$$F_{\text{éch}} = A_{\text{éch}} [ (\nabla\alpha_1)^2 + (\nabla\alpha_2)^2 + (\nabla\alpha_3)^2 ] \quad (5.1)$$

Pour un cristal de symétrie cubique, où les atomes magnétiques premiers voisins sont distants de  $\xi$ , et portent le même moment magnétique, le coefficient  $A_{\text{éch}}$  s'écrit :

$$A_{\text{éch}} = \mu_0 (w M_s^2 / 12) \xi^2 \quad (5.2)$$

Ce coefficient d'échange peut encore s'exprimer en fonction de l'énergie de champ moléculaire de Weiss,  $E_w = (1/2)\mu_0 w M_s^2$  :  $A_{\text{éch}} = (1/6) \xi^2 E_w$ .  $w$  est le coefficient d'échange dans le modèle du champ moléculaire ( $w = T_C/C$ , voir équation 4.45). Ce coefficient  $A_{\text{éch}}$  (en joules par mètre) caractérise l'intensité des interactions d'échange au sein du matériau. L'expression (5.1) – que l'on désigne souvent comme "terme d'échange" – exprime la densité d'énergie que coûte au système le décalage  $\nabla\alpha_i$  entre les cosinus directeurs  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de moments voisins.

## 2.2. L'INTERACTION DIPOLAIRE MAGNÉTIQUE

Chaque moment magnétique de la substance subit, de la part des autres moments, une interaction dipolaire magnétique. Celle-ci décroît comme le cube de l'inverse de la distance entre moments, mais le nombre de moments voisins d'un moment donné augmente comme le cube de cette distance (voir équation 2.103) : l'interaction dipolaire, beaucoup plus faible que l'interaction d'échange entre moments proches voisins, devient prépondérante à grande distance. Pour éviter la formation de pôles, elle tend à refermer les lignes de flux magnétique au sein de la matière aimantée et s'oppose ainsi à l'établissement d'une aimantation macroscopique résultante uniforme. De l'équation (2.88), on déduit l'expression de la densité d'énergie de champ démagnétisant :

$$F_{\text{dip}} = -(1/2)\mu_0 \mathbf{M} \mathbf{H}_d \quad (5.3)$$

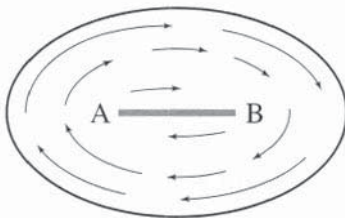
où  $\mathbf{H}_d = -\mathbf{NM}$  est le champ démagnétisant de l'échantillon considéré. Comme le terme d'interaction avec le champ extérieur appliqué,  $F_H = -\mu_0 \mathbf{M} \mathbf{H}_0$  (d'après l'équation 2.80),  $F_{\text{dip}}$  exprime que l'énergie d'interaction avec le champ démagnétisant abaisserait l'énergie totale du système si le champ démagnétisant était parallèle à l'aimantation. Comme  $\mathbf{H}_d$  est antiparallèle à  $\mathbf{M}$  (ou fait avec  $\mathbf{M}$  un angle supérieur à  $90^\circ$ ),  $F_{\text{dip}}$  est un terme positif, proportionnel à  $M^2$ , qui élève l'énergie du système. Mais à la différence de l'équation (2.80) ce terme comporte un facteur (1/2) car il s'agit d'une *auto-énergie* (en anglais *self-energy*) : le champ démagnétisant n'est pas extérieur à la matière, mais c'est la matière elle-même qui l'engendre.

### 2.3. COMPÉTITION ENTRE INTERACTIONS D'ÉCHANGE ET INTERACTIONS DIPOLAIRES

Les interactions d'échange ferromagnétique et de couplage dipolaire, visant des objectifs opposés, ne peuvent être totalement satisfaites en même temps, et l'énergie d'un système ferromagnétique ne peut correspondre à un minimum absolu d'énergie. La coexistence de ces interactions s'organise grâce au fait que chacune possède sa zone d'influence privilégiée : le proche voisinage pour l'échange, les régions plus éloignées pour les interactions dipolaires. On définit une distance typique, dite *longueur d'échange* ( $l_{éch}$ ), construite comme le rapport des racines carrées des énergies caractéristiques mises en jeu :

$$l_{éch} = (A_{éch}/\mu_0 M_S^2)^{1/2} \quad (5.4)$$

Cette distance caractéristique sépare la zone d'influence où l'emporte l'échange ( $l < l_{éch}$ ), de celle où règne l'interaction dipolaire ( $l > l_{éch}$ ). Dans la zone d'influence de l'échange, chaque moment ne peut s'écarter beaucoup de la direction de ses voisins immédiats. Mais, de faible écart en faible écart, les moments situés à  $l > l_{éch}$  acquièrent une totale indépendance vis-à-vis du moment origine. De proche en proche, le flux magnétique peut ainsi se refermer au sein du matériau, évitant la création de pôles en surface. L'énergie de champ démagnétisant est ainsi considérablement réduite. Une telle configuration des moments a été observée par Van den Berg [2] dans le cas d'école d'un disque plat en forme d'ellipse, taillé dans un matériau amorphe *parfaitement isotrope* aux échelles macroscopique et semi-microscopique. Les moments se disposent alors spontanément en sorte que le flux magnétique se referme sans laisser paraître de pôles magnétiques (figure 5.2). Au centre, une *paroi* dont la largeur est de l'ordre de grandeur de  $l_{éch}$  sépare deux zones d'orientations inverses. Les interactions d'échange sont sévèrement frustrées au sein de la paroi et au voisinage des points singuliers A et B ; elles ne le sont pratiquement pas ailleurs, où les moments sont presque alignés.



**Figure 5.2 - Lignes de flux magnétique observées dans un échantillon ferro-magnétique dépourvu d'anisotropie et taillé en forme de disque elliptique [2]**

### 2.4. RÔLE DE L'ANISOTROPIE MAGNÉTOCRISTALLINE

Dans la plupart des matériaux, les moments magnétiques interagissent avec le champ électrique des ions environnants par l'intermédiaire de leur composante orbitale. Une première conséquence de cette interaction avec le réseau est l'apparition de l'anisotropie magnétocristalline. Celle-ci agit individuellement sur chaque

moment magnétique, qu'elle tend à orienter selon une direction du réseau, privilégiée du fait de sa symétrie particulière. Toutes les directions de même symétrie sont théoriquement équivalentes, et l'alignement des moments selon chaque direction est donc également probable. Ainsi, l'interaction magnétocristalline conduit à *elle seule* à l'existence d'une aimantation résultante nulle. L'énergie d'anisotropie magnétocristalline est très variable d'un matériau à un autre, et son expression a été donnée pour les symétries les plus courantes dans les équations (3.2) à (3.5). Cette expression mesure la densité d'énergie que coûte une rotation de l'aimantation locale à partir de l'une des directions de facile aimantation.

Les énergies d'anisotropie magnétocristalline et d'échange peuvent souvent coexister sans frustration. Dans les systèmes ferromagnétiques en particulier, elles favorisent *ensemble* l'existence d'une aimantation spontanée. En symétrie cubique, l'anisotropie magnétocristalline est également compatible avec l'interaction dipolaire, (à condition de négliger les effets magnétostrictifs dans les domaines de fermeture : voir plus loin la figure 12.24). En revanche, dans les systèmes ferromagnétiques uniaxes, la minimisation de l'énergie d'échange et de l'énergie magnétocristalline ne correspond jamais à la pleine satisfaction de l'énergie dipolaire.

## 2.5. LES SOLUTIONS DE COMPROMIS

La notion de compromis entre les trois types d'interactions principales qui existent dans tous les matériaux ferromagnétiques fonde la diversité des comportements magnétiques. Elle explique et justifie la variété des matériaux et des applications du magnétisme. L'état auquel aboutit le compromis dans le cas des systèmes de grande taille est celui qui a été suggéré par Pierre Weiss (1906-1907) : la matière ferromagnétique se décompose en domaines élémentaires au sein desquels l'aimantation est orientée selon l'une ou l'autre des différentes directions de facile aimantation équivalentes. En l'absence de champ appliqué et de toute autre contrainte, il y a équipartition du volume des domaines entre les diverses directions : à l'échelle macroscopique, l'aimantation résultante est donc nulle conformément à ce que l'expérience montre le plus souvent.

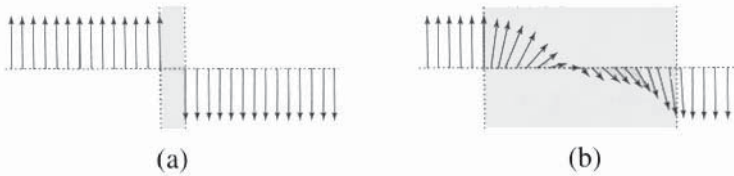
Entre deux domaines, on observe une zone tampon, plus ou moins large, à l'intérieur de laquelle l'aimantation tourne : c'est une *paroi*, qui met en jeu un compromis entre les trois énergies précitées ; elle possède une largeur définie et emmagasine une énergie fixe : largeur et énergie de paroi sont caractéristiques du matériau considéré. D'une manière générale dans un matériau ferromagnétique idéal, lorsque l'on passe d'une région où l'aimantation est saturée dans une certaine direction à une autre région où l'aimantation est saturée dans une direction différente, ou bien lorsque l'on crée, au sein d'un volume saturé selon un axe  $x$ , un noyau d'aimantation saturée selon  $y$  ( $y$  pouvant être  $-x$ ), une paroi sépare les régions saturées.

L'approche la plus générale pour la détermination des états d'équilibre magnétique de l'objet ferromagnétique – configuration de l'ensemble des moments qui correspond au compromis d'énergie minimale – s'appuie sur la minimisation de la densité d'énergie libre totale,  $F_T$ . Pour un objet ferromagnétique homogène, cette densité d'énergie  $F_T$  peut s'écrire comme la somme des quatre termes d'énergie principaux (échange, anisotropie, dipolaire et couplage avec le champ appliqué) :

$$F_T = F_{\text{éch}} + F_{\text{an}} + F_{\text{dip}} + F_H \quad (5.5)$$

### 3. LES PAROIS ENTRE DOMAINES

Les parois sont les interfaces obligées entre domaines. Comme toute configuration de moments magnétiques, elles doivent correspondre au meilleur compromis entre les termes d'énergie qui entrent en jeu. Si deux domaines voisins se trouvent en contact direct l'un avec l'autre (sans zone tampon entre les deux : figure 5.3-a), les moments magnétiques des atomes situés à la frontière font deux à deux un angle important. Une forte augmentation de l'énergie d'échange en résulte, qui est d'autant plus élevée que la constante d'échange  $A_{\text{éch}}$  est grande (équation 5.1).



**Figure 5.3 - Parois étroites et parois larges**

Une paroi étroite (a) sans zone tampon représente un coût élevé en énergie d'échange, tandis qu'une paroi large (b) représente un coût élevé en énergie d'anisotropie.

A l'inverse, on peut imaginer réduire à presque rien le coût en énergie d'échange, en répartissant la transition angulaire des aimantations entre domaines voisins sur un très grand nombre d'atomes (figure 5.3-b), de sorte que l'angle entre deux moments adjacents soit tout petit, mais c'est alors le prix à payer en énergie d'anisotropie qui devient prohibitif. En effet, presque tous les moments participant à la transition se trouvent écartés des directions de facile aimantation, et cela coûte pour chacun d'eux une énergie magnétocristalline, d'autant plus importante que  $K$  est grand.

La largeur de paroi réelle est définie par le compromis le moins onéreux. Celui-ci dépend évidemment des valeurs relatives des constantes  $A_{\text{éch}}$  et  $K$  dans le matériau considéré. Pour un matériau donné, plus le rapport  $A_{\text{éch}}/K$  est grand, plus les parois sont larges, et plus  $A_{\text{éch}}/K$  est faible, plus les parois sont étroites. Nous allons maintenant préciser et compléter quantitativement les remarques faites ci-dessus.

### 3.1. PAROIS DES MILIEUX ORDINAIRES (PAROIS DE BLOCH)

#### 3.1.1. Géométrie des parois de Bloch

L'existence de parois permet de réduire autant que possible l'énergie mise en jeu à la frontière entre domaines. Le compromis inclut nécessairement l'énergie d'échange et l'énergie d'anisotropie, mais il faut aussi que la mise en place de parois n'entraîne pas, localement, une augmentation d'énergie dipolaire, ce qui exige que n'apparaisse aucune masse magnétique, ni en surface des parois, ni dans leur volume.

La densité de masses magnétiques à l'interface entre deux zones 1 et 2 où règnent respectivement les aimantations  $\mathbf{M}(1)$  et  $\mathbf{M}(2)$ , se déduit de la relation (2.42) et s'écrit, si  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire de la normale à l'interface :

$$\sigma_s = \mathbf{M}(1) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{M}(2) \cdot \mathbf{n} \quad (5.6)$$

La condition souhaitée implique que  $\sigma_s = 0$ , soit :

$$\mathbf{M}(1) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M}(2) \cdot \mathbf{n} \quad (5.7)$$

La paroi étant formée de plans successifs où l'aimantation est uniforme, c'est-à-dire où tous les moments sont parallèles, la relation (5.7) s'applique de plan en plan, de sorte que la composante normale de l'aimantation doit se conserver dans toute l'épaisseur de la paroi. Cela revient à écrire que le long de l'axe  $z$ , perpendiculaire au plan de la paroi, on doit avoir :  $dM_z/dz = 0$ . La projection de  $\mathbf{M}$  sur le plan  $xy$ , perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ , décrit un cercle (figure 5.4). Une telle rotation de  $\mathbf{M}$  autour de la normale  $\mathbf{n}$  au plan de la paroi, l'angle entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{n}$  restant constant, constitue une *paroi de Bloch* ainsi appelée car elle fut modélisée par F. Bloch en 1932 [3].

Lorsque la paroi de Bloch sépare deux domaines aimantés antiparallèlement, elle est appelée *paroi à 180°*. Dans le cas des systèmes uniaxes, dont l'axe de facile aimantation est l'axe préférentiel, il n'existe que ce type de parois. Toute direction contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe de facile aimantation peut alors servir de normale à la paroi, ce qui rend possible l'existence de parois courbées et même cylindriques (voir figure 5.5). Les parois à 180° peuvent aussi exister dans les cristaux cubiques, mais alors il n'est pas indifférent que  $\mathbf{n}$  soit parallèle à  $x$  ou à la bissectrice de  $xOy$ .

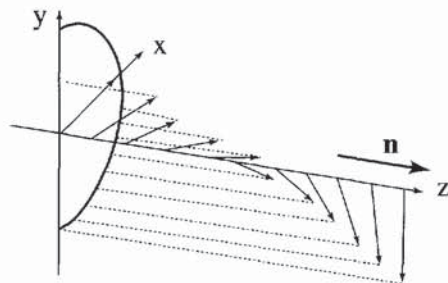


Figure 5.4 - La projection de l'aimantation sur le plan de la paroi décrit un cercle

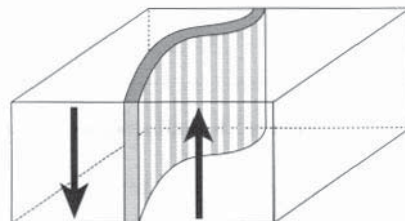


Figure 5.5 - Une paroi à 180° n'est pas forcément plane

Selon le cas, l'aimantation tourne en passant, ou non, par un axe de difficile aimantation. L'énergie stockée dans la paroi est moindre, quand les moments ne sont jamais orientés selon la direction de plus difficile aimantation.

Dans un cristal de symétrie cubique il peut exister d'autres types de parois : parois à  $90^\circ$  qui séparent des domaines aimantés à  $\pi/2$  l'un de l'autre (selon deux axes quaternaires, dans le fer par exemple), parois à  $70,53^\circ$  séparant des domaines  $[111]$  et  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$  ou à  $109,47^\circ$  entre des domaines  $[111]$  et  $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$  (dans le nickel par exemple). En général, et par abus de langage, toutes les parois qui séparent des domaines décalés d'un angle différent de  $180^\circ$  sont appelées *parois à  $90^\circ$* .

### 3.1.2. Evaluation de l'énergie et de la largeur de paroi

Deux grandeurs caractérisent une paroi de Bloch :

- ♦ son épaisseur  $\delta$ , que l'on appelle aussi *largeur de paroi*,
- ♦ et l'élévation d'énergie locale,  $\gamma$ , à laquelle donne lieu la configuration des moments qu'elle contient. Cette élévation d'énergie est évaluée par rapport à l'état de saturation (qui règne notamment au sein des domaines jouxtant la paroi). Elle est normalement donnée par unité de surface de paroi. C'est la raison pour laquelle on désigne  $\gamma$  sous le nom d'*énergie superficielle de paroi*.

#### Supplément d'énergie d'échange dû au décalage angulaire entre moments dans la paroi

- ♦ Soit un système de deux moments magnétiques adjacents de même module  $\mathbf{m}$ . S'ils sont sans interaction l'un avec l'autre, ces moments sont indépendants (c'est l'état d'énergie zéro). Dans un système ferromagnétique, ils sont couplés par échange. L'abaissement d'énergie correspondant à la situation d'ordre parallèle, est exprimée par la relation (4.34) :  $\mathcal{E}_{\text{éch}}^{\text{sat}} = -\mu_0 n \mathbf{m}^2$ , où  $n$  désigne le coefficient d'échange local.

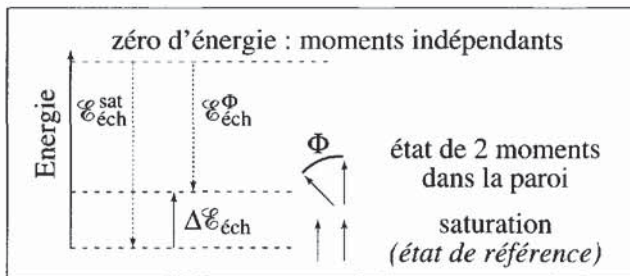


Figure 5.6 - Influence de l'état magnétique local sur l'énergie d'échange

Considérons que ces deux moments se retrouvent au sein d'une paroi, où ils font entre eux un angle aigu  $\Phi$  ; les interactions d'échange agissant entre ces moments n'abaissent alors l'énergie du système que de :  $\mathcal{E}_{\text{éch}}^{\Phi} = -\mu_0 n \mathbf{m}^2 \cos \Phi$ . Par conséquent, deux moments voisins qui, dans une paroi, sont angulairement

décalés de  $\Phi$  élèvent l'énergie du système de  $\Delta \mathcal{E}_{\text{éch}}$  par rapport à l'état de couplage parallèle :  $\Delta \mathcal{E}_{\text{éch}} = \mathcal{E}_{\text{éch}}^{\Phi} - \mathcal{E}_{\text{éch}}^{\text{sat}} = \mu_0 n m^2 (1 - \cos \Phi)$ . Le schéma présenté sur la figure 5.6 explicite ces divers états d'énergie.

- ◆ Nous considérons maintenant une *chaîne de moments atomiques*, de paramètre  $a$ , qui traverse une paroi à  $180^\circ$  dans le sens de son épaisseur (figure 5.7), et nous posons  $\delta = Na$  ( $N$  atomes dans cette chaîne). Au sein de la paroi, les moments voisins sont angulairement décalés les uns par rapport aux autres. Supposons qu'ils fassent entre eux un angle  $\Phi = \pi/N$ , constant d'un bord de la paroi à l'autre.

La traversée de la paroi coûte une énergie d'échange :

$$\mathcal{E}_{\text{éch}}^{\text{chaîne}} = N \mu_0 n m^2 (1 - \cos \Phi) \quad (5.8)$$

En admettant que la paroi soit suffisamment large, l'angle  $\Phi$  est petit, et l'on a :

$$\mathcal{E}_{\text{éch}}^{\text{chaîne}} \sim N \mu_0 n m^2 \Phi^2 / 2 = \mu_0 \pi^2 n m^2 / 2N.$$

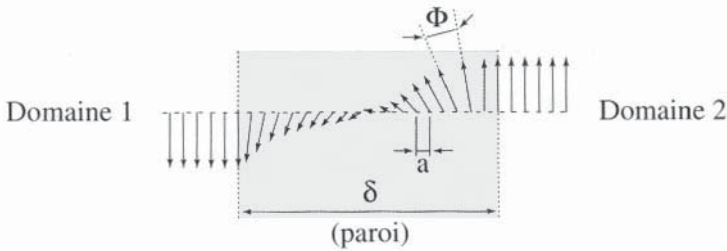


Figure 5.7 - Paroi à  $180^\circ$

- ◆ Si les atomes magnétiques constituent un réseau cubique simple, il y aura  $1/a^2$  chaînes atomiques du type précédent par unité de surface de paroi. Le coût de la paroi en énergie d'échange, rapporté à l'unité de surface de paroi (énergie superficielle), sera donc :

$$E_{\text{éch}}^{\text{paroi}} = \mu_0 \pi^2 n m^2 / (2N a^2) \quad (5.9)$$

Plus  $N$  est grand, plus la paroi est large, moins elle coûte en énergie d'échange. On confirme le résultat prévu intuitivement.

### Coût de la paroi en énergie d'anisotropie

L'énergie d'anisotropie est minimale quand les moments atomiques sont orientés selon l'une ou l'autre des directions de facile aimantation, ce qui est la situation dans les domaines 1 et 2, de part et d'autre de la paroi (figure 5.7). Dès que les moments s'écartent de ces directions, il apparaît une perte d'énergie, décrite par les relations (3.3) à (3.5). Pour le  $p^{\text{ième}}$  moment, décalé par rapport à la direction d'anisotropie de l'angle  $\theta_p$ , l'énergie d'anisotropie vaut  $K_{\text{at}} \sin^2 \theta_p$ , où :

$$K_{\text{at}} = K a^3 \quad (5.10)$$

pour un réseau cubique simple, en se limitant au terme d'ordre 2 ( $K = K_1$ ). Pour la section de paroi correspondante de surface unité, l'énergie d'anisotropie perdue est  $Ka \sin^2\theta_p$ . Pour l'ensemble de la paroi, le coût en énergie d'anisotropie par unité de surface est donc approximativement  $NK \overline{\sin^2 \theta}$ , où  $\overline{\sin^2 \theta}$  représente la valeur moyenne de  $\sin^2 \theta$ , prise entre 0 et  $\pi$ , soit 1/2. On a donc :

$$E_{\text{anis}}^{\text{paroi}} = N a K / 2 \quad (5.11)$$

Le coût de la paroi en énergie d'anisotropie est d'autant plus faible que la paroi est plus étroite ( $N$  plus petit). On retrouve là aussi le résultat prévu intuitivement.

### Coût total en énergie de la paroi

Le supplément d'énergie par unité de surface,  $\gamma$ , mis en jeu dans une paroi de largeur  $\delta = Na$ , vaut :

$$\gamma = E_{\text{éch}}^{\text{paroi}} + E_{\text{anis}}^{\text{paroi}} = \frac{\mu_0 \pi^2 n m^2}{2 N a^2} + \frac{N a K}{2} = \frac{\mu_0 \pi^2 n m^2}{2 \delta a} + \frac{\delta K}{2} \quad (5.12)$$

$\gamma$  est minimisée pour la valeur de  $\delta$  qui rend les deux contributions (en  $\delta$  et  $1/\delta$ ) égales. La largeur de paroi dans ce modèle simple est alors donnée par la relation suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu_0 \pi^2 n m^2}{K a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{a}} \pi m \sqrt{\frac{n}{K}} \quad (5.13)$$

En reportant cette expression de  $\delta$  dans celle de  $\gamma$  on obtient l'énergie superficielle totale emmagasinée dans la paroi (coût total de la paroi par unité de surface) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 \pi^2 n m^2 K}{a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{a}} \pi m \sqrt{n K} \quad (5.14)$$

### 3.1.3. Calcul exact de $\gamma$ et $\delta$

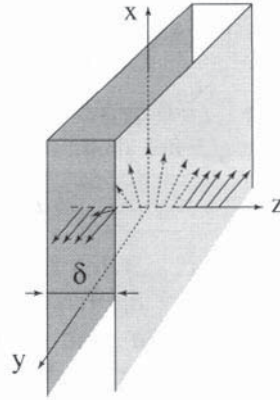
Dans le modèle qui précède, nous avons simplifié les calculs en supposant uniforme la rotation des moments à l'intérieur de la paroi. Les expressions exactes de  $\gamma$  et  $\delta$  dans le cas général se calculent selon la méthode présentée ci-dessous.

La figure 5.8 montre la structure d'une paroi. L'axe  $Oz$ , perpendiculaire au plan de cette paroi, est l'axe selon lequel on la traverse dans le sens de son épaisseur. L'origine  $O$  est choisie au milieu de la paroi. Dans le plan médian de la paroi se trouvent donc les directions orthogonales  $Ox$  et  $Oy$  qui forment avec  $Oz$  un trièdre trirectangle direct. Pour satisfaire à la condition (5.7), les moments doivent tourner autour de  $Oz$  en restant dans un plan parallèle au plan  $xOy$ . La direction  $Ox$  peut alors être choisie comme celle des moments contenus dans le plan médian  $xOy$  et devient ainsi la direction bissectrice de l'angle que font entre elles les directions des moments dans les deux domaines que sépare la paroi. Ainsi construite,  $Ox$  sera prise comme direction de référence pour l'orientation des moments de la paroi. Les moments situés à la cote  $z = z_1$  font avec la direction  $Ox$  un angle  $\theta$ , et l'angle entre

deux moments successifs le long de l'axe  $z$  sera égal à  $\Delta\theta$ . Nous considérons la variation de  $\theta$  avec  $z$  comme continue mais pas nécessairement constante, soit :  $\Delta\theta = (\partial\theta/\partial z) \Delta z$ .

**Figure 5.8 - Paroi simplifiée à 180°**

Les moments tournent entre les deux plans matérialisés sur la figure et restent parallèles en dehors de ces deux plans.



L'aimantation au sein de la paroi n'est pas uniforme dans la direction  $Oz$ . Conformément à l'équation (5.1), le coût en énergie d'échange par unité de volume s'écrit :

$$F_{\text{éch}} = A_{\text{éch}} (\partial\theta/\partial z)^2 \quad (5.15)$$

où  $A_{\text{éch}}$  est le coefficient d'énergie d'échange défini par l'équation (5.2). Pour un élément de paroi de surface unité, l'énergie d'échange mise en jeu est :

$$E_{\text{éch}} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{éch}} dz \quad (5.16)$$

soit :

$$E_{\text{éch}}^{\text{paroi}} = A_{\text{éch}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 dz \quad (5.17)$$

L'intégration entre  $-\infty$  et  $+\infty$  est possible car la fonction à intégrer est nulle dès que l'on se trouve à l'intérieur d'un domaine (moments parallèles). La relation ci-dessus est vraie quelle que soit la géométrie envisagée, à condition d'utiliser la valeur de  $A_{\text{éch}}$  adaptée à cette géométrie.

L'énergie d'anisotropie est toujours une fonction de  $\theta$ . Désignons cette fonction par  $g(\theta)$  et supposons-la nulle le long d'une direction de facile aimantation. Le supplément d'énergie d'anisotropie mis en jeu dans la paroi, par rapport à ce qu'est cette énergie à l'intérieur du domaine adjacent vaut :

$$E_{\text{anis}}^{\text{paroi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) dz \quad (5.18)$$

L'énergie totale par unité de surface de paroi créée est donc :

$$\gamma = E_{\text{éch}}^{\text{paroi}} + E_{\text{anis}}^{\text{paroi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ A_{\text{éch}} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + g(\theta) \right] dz \quad (5.19)$$

et  $\theta$  doit prendre, en fonction de  $z$ , les valeurs qui minimisent cette intégrale. Il faut pour cela que si, en chaque point  $z$ ,  $\theta(z)$  varie d'une petite quantité  $\delta\theta(z)$ , la modification résultante de la configuration des spins ne provoque aucune variation  $\delta\gamma$  de l'énergie de paroi au premier ordre,

$$\text{soit : } \delta\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2A_{\text{éch}} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} \delta\theta \right] dz = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{Or, } \int_{-\infty}^{+\infty} 2A_{\text{éch}} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} \right) dz = \left[ 2A_{\text{éch}} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2A_{\text{éch}} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \delta\theta dz \quad (5.21)$$

Comme  $\delta\theta = 0$  quand  $z \rightarrow \pm \infty$ , le premier terme du second membre de l'équation ci-dessus est nul, d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} \right] - 2A_{\text{éch}} \left[ \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \right] \right\} \delta\theta dz = 0 \quad (5.22)$$

La relation (5.22) doit rester vraie quelle que soit la variation  $\delta\theta(z)$  choisie. Cela implique que :  $\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} - 2A_{\text{éch}} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$ . C'est l'équation d'Euler du calcul variationnel. En multipliant par  $\frac{\partial\theta}{\partial z}$  et en intégrant sur  $z$ , on obtient :  $g(\theta) = A_{\text{éch}} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2$  à une constante additive près. Or, quand  $|z| \rightarrow \infty$ , ce qui signifie que l'on se trouve au sein d'un domaine,  $g(\theta) = 0$  et  $(\frac{\partial\theta}{\partial z}) = 0$ . La constante est donc nulle, et l'équation obtenue devient :

$$g(\theta) = A_{\text{éch}} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 \quad (5.23)$$

En tout point de la paroi, les coûts en énergie d'anisotropie et en énergie d'échange s'équilibrent. En d'autres termes, au sein de la paroi, là où l'énergie d'anisotropie est plus chère, l'angle entre spins adjacents est plus grand et réciproquement. L'énergie de paroi vaut :  $\gamma = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) dz$ , soit deux fois l'énergie d'anisotropie. On peut tirer  $dz$  de l'équation (5.24) :

$$dz = \sqrt{A_{\text{éch}} / g(\theta)} d\theta \quad (5.24)$$

d'où l'on déduit l'expression la plus générale de l'énergie d'une paroi de Bloch, dont les spins tournent entre l'angle initial  $\theta_i$  et l'angle final  $\theta_f$  :

$$\gamma = 2\sqrt{A_{\text{éch}}} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sqrt{g(\theta)} d\theta \quad (5.25)$$

Pour une paroi à  $180^\circ$  ( $\theta_i = -\pi/2$  et  $\theta_f = \pi/2$ ) et en supposant que l'énergie d'anisotropie locale, d'origine magnétocristalline, peut être réduite à son premier terme, soit  $g(\theta) = K_1 \cos^2\theta$ , le coût énergétique de la paroi a pour expression :

$$\gamma = 2\sqrt{A_{\text{éch}} K_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta, \text{ soit :} \quad (5.26)$$

$$\gamma = 4\sqrt{A_{\text{éch}} K_1}$$

Dans le même contexte d'une anisotropie uniaxiale, on peut calculer  $z$  à partir de la relation (5.24) :

$$z = \sqrt{\frac{A_{\text{éch}}}{K_1}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{A_{\text{éch}}}{K_1}} \log \left[ \text{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.27)$$

On en déduit la variation de  $\theta$  avec  $z$  (figure 5.9) ; celle-ci est maximum au centre de la paroi, là où l'énergie d'anisotropie magnétocristalline est maximum. On remarque aussi que la paroi n'a pas d'extrémités nettes, ce qui résulte du fait que l'intégrale (5.27) n'est pas calculable jusqu'à la borne  $\theta = \pi/2$  ou  $-\pi/2$ . En première approximation, on définit d'habitude l'épaisseur  $\delta$  de la paroi à  $180^\circ$  comme celle qu'elle aurait si le décalage angulaire entre les moments qui la constituent était constant et égal à la valeur qu'il a réellement au milieu de la paroi, soit :

$$\delta = \pi(\partial z / \partial \theta)_{z=0} = \pi(A_{\text{éch}}/K_1)^{1/2} \quad (5.28)$$

où l'on a supposé  $\theta_f - \theta_i = \pi$ , et tenu compte du fait que la tangente d'inflexion au centre vaut  $(A_{\text{éch}}/K)^{1/2}$ .

La paroi de Bloch classique qui vient d'être décrite n'est pas l'unique type de paroi qui puisse exister. C'est seulement le plus courant. Nous décrivons dans le paragraphe suivant les propriétés particulières que présentent les parois de Bloch lorsqu'elles deviennent très étroites. Nous discutons ensuite (voir § 3.3) les types de parois spécifiques que l'on peut trouver dans les couches minces.

### 3.2. LES PAROIS DANS LES MILIEUX TRÈS ANISOTROPES (PAROIS ÉTROITES)

Dans les milieux où l'énergie d'anisotropie approche ou dépasse l'énergie d'échange, la largeur de paroi  $\delta = \pi(A_{\text{éch}}/K)^{1/2}$  devient très faible, et l'approximation continue n'est plus valide. Il faut prendre en compte le caractère discret de la matière.

Si le  $p^{\text{ième}}$  moment de la paroi est décalé par rapport à la direction d'anisotropie d'un angle  $\theta_p$ , deux moments voisins, repérés par les indices  $p-1$  et  $p$ , font entre eux un angle  $\theta_p - \theta_{p-1}$ . L'énergie d'échange emmagasinée entre premiers voisins, s'exprime (comme on l'a vu plus haut) par :  $\mathcal{E}_{\text{éch}} = \mu_0 n m^2 [1 - \cos(\theta_p - \theta_{p-1})]$ .

Limitée au terme du second ordre, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline uniaxe (exprimée en joules) vaut pour le  $p^{\text{ième}}$  atome de la paroi :  $\mathcal{E}_{\text{anis}} = K_{\text{at}} \sin^2 \theta_p$ .

L'énergie totale, associée au  $p^{\text{ième}}$  moment de la paroi (qui interagit avec les moments  $p-1$  et  $p+1$ ), est donc :

$$\gamma_p = K_{\text{at}} \sin^2 \theta_p + aA_{\text{éch}} \left[ 1 - \frac{\cos(\theta_{p+1} - \theta_p) + \cos(\theta_p - \theta_{p-1})}{2} \right] \quad (5.29)$$

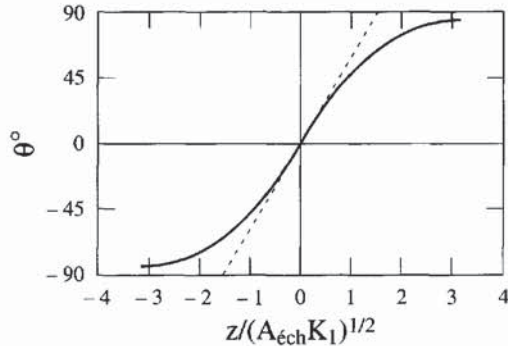


Figure 5.9 - Déviation  $\theta$  des moments magnétiques au sein d'une paroi à  $180^\circ$ , en fonction de leur position dans la paroi

Pour un réseau cubique simple d'ions magnétiques, de paramètre  $a$  (où l'on suppose pourtant que règne une anisotropie uniaxe), l'énergie totale que coûte l'unité de surface de paroi, est donnée par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{a^2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_p \quad (5.30)$$

Les extrema d'énergie correspondent à  $d\gamma/d\theta_p = 0$ . Ils s'obtiennent en résolvant un ensemble infini d'équations non linéaires de la forme :

$$(K_{at}/aA_{éch}) \sin 2\theta_p = \sin(\theta_{p+1} - \theta_p) + \sin(\theta_{p-1} - \theta_p) \quad (5.31)$$

où  $p$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  par pas de 1.

De façon générale, on peut calculer numériquement une configuration d'équilibre de la paroi, solution du système (5.31), à condition de fixer arbitrairement les directions de deux moments. La configuration d'énergie minimale (figure 5.10 a), obtenue par ajustements successifs, est symétrique et la discontinuité angulaire au centre de la paroi est fonction du rapport  $\eta = (K_{at}/aA_{éch}) = Ka^2/A_{éch}$  pour un réseau cubique simple en raison de l'équation (5.10). La configuration d'énergie maximale, également symétrique, a un moment perpendiculaire à l'axe de facile aimantation (figure 5.10-b).

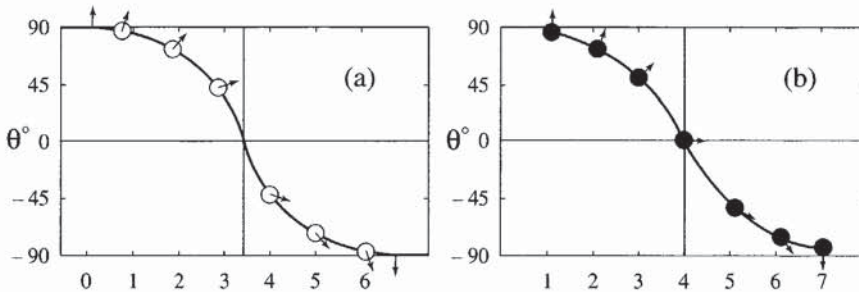


Figure 5.10 - Configurations d'énergie minimale (a) et maximale (b)

En abscisse sont repérées les positions atomiques au sein de la paroi.

Dans le cas de parois étroites considéré ici ( $\eta \geq 1$ ), les moments ne s'éloignent jamais beaucoup de la direction de facile aimantation.  $\theta_p$  est proche de zéro d'un côté de la paroi, de  $\pi$  de l'autre. La linéarisation de l'équation (5.31) conduit à :  $\theta_{p+1} + \theta_{p-1} = \rho \theta_p$  avec  $\rho = 2(\eta + 1)$ . La solution de ce système d'équations est :  $\theta_p = \theta_0 e^{-p\Psi}$  avec :  $\Psi = \text{Argch}(\rho/2)$ . Lorsque  $p$  croît, les angles  $\theta_p$  décroissent comme une progression géométrique de raison  $x = e^{-\Psi}$ . La paroi est entièrement définie par la raison de la progression et par l'angle  $\theta_0$  au centre de la paroi, qui satisfait à l'équation :  $[1 - \eta] \sin 2\theta_0 = \sin[\theta_0(1 - x)]$ .

Le développement au troisième ordre de cette relation permet de discuter l'évolution de la paroi [4] :  $(\theta_0)^2 = [12\eta - 6(1+x)]/[8(\eta - 1) + (1+x)^3]$ .

Quand  $\eta$  croît,  $\theta_0$  diminue rapidement.  $\theta_0 = 0$  pour  $2\eta = 4/3$ . Pour  $\eta > 2/3$ , la largeur de la paroi n'est que d'une distance interatomique (car  $\theta_0 = 0$  est alors l'unique

solution de l'équation). La figure 5.11 présente l'évolution de l'épaisseur réduite  $\delta/a = N$  (nombre d'intervalles interatomiques dans la paroi) en fonction du rapport  $\eta$  des constantes d'anisotropie et d'échange du matériau.

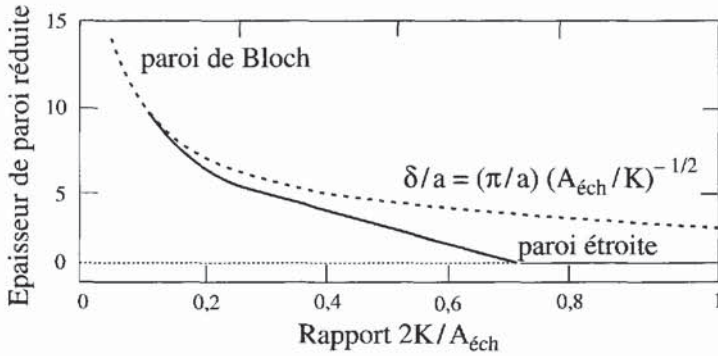


Figure 5.11 - Epaisseur de paroi en fonction de  $\eta$

L'épaisseur de paroi réduite est exprimée en nombre de distances interatomiques.

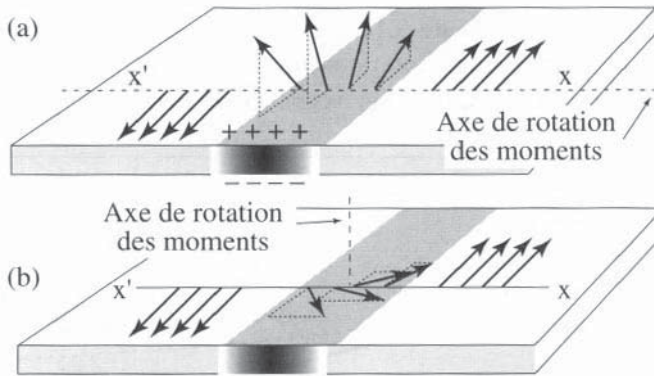
### 3.3. LES PAROIS DANS LES MATÉRIAUX EN COUCHES TRÈS MINCES

Dans les systèmes en couches minces, les champs démagnétisants sont très importants dans la direction de la petite dimension, c'est pourquoi l'aimantation des domaines s'oriente généralement dans le plan de la couche. Considérons deux domaines adjacents séparés par une paroi à  $180^\circ$ . Une paroi de Bloch, où les moments tournent autour de la normale à la surface de la paroi (voir figure 5.12 a), entraîne alors l'apparition de pôles magnétiques, nord sur une face de la couche et sud sur l'autre face. L'énergie magnétostatique associée est d'autant plus importante que le rapport épaisseur de couche ( $e$ ) sur largeur de paroi ( $\delta$ ) diminue. La prise en compte de cette énergie magnétostatique conduit à une nouvelle expression de l'énergie de paroi :

$$\gamma = \frac{1}{2} \gamma_0 \left( \frac{\delta}{\delta_0} + \frac{\delta_0}{\delta} + \frac{\mu_0 M_s^2}{2\gamma_0} \frac{\delta^2}{e} \right),$$

où  $\gamma_0$  et  $\delta_0$  sont respectivement l'énergie et l'épaisseur habituelles de la paroi de Bloch. Cette approximation est valable tant que  $\delta$  reste petit devant  $D$ . Ainsi, cette énergie de paroi est la somme de trois contributions, respectivement anisotropie magnétocristalline qui varie en  $\delta$ , énergie d'échange qui varie en  $\delta^{-1}$  et énergie dipolaire qui varie en  $\delta^2$ .

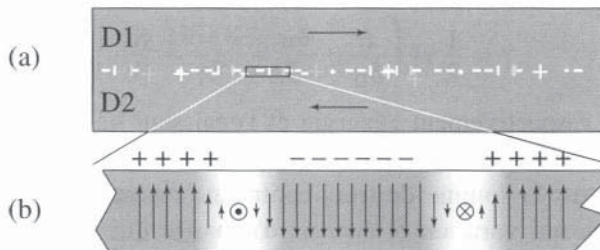
$\gamma$  est fonction non seulement de la nature du matériau, mais aussi de l'épaisseur de la couche. Aux faibles épaisseurs, d'autres structures de paroi sont favorisées. Néel a considéré en particulier [5] une structure de paroi dans laquelle les moments tournent autour de l'axe perpendiculaire au plan de la couche (figure 5.12 b). La contribution des pôles magnétiques est éliminée, mais la configuration des moments dans la paroi est source d'un champ de dispersion.



**Figure 5.12 - (a) Paroi de Bloch - (b) paroi de Néel**

- (a) selon un ligne  $x'x$  perpendiculaire à la paroi, les moments magnétiques tournent progressivement en sortant du plan de la couche, laissant apparaître des masses magnétiques à la surface de la couche. Au milieu de la paroi, les moments sont perpendiculaires au plan de la couche.
- (b) ici les moments tournent progressivement mais en restant dans le plan de la couche, et ainsi, il n'apparaît plus de masses magnétiques à la surface de la couche. Ici, l'axe de rotation est perpendiculaire à  $x'x$ .

L'énergie d'une telle *paroi de Néel* est alors :  $\gamma_m = \gamma_0 + \mu_0 M_s^2 e$ . Cette expression indique que l'énergie associée au champ de dispersion diminue avec l'épaisseur de la couche. En dessous d'une épaisseur critique, l'énergie d'une paroi de Néel est inférieure à celle d'une paroi de Bloch. Cependant, on ne passe pas brutalement d'un type de paroi à l'autre. Aux épaisseurs intermédiaires, des structures complexes existent, mélanges de parois de Bloch et de Néel. Dans un film de  $Fe_{80}Ni_{20}$  de 100 nm d'épaisseur, la séparation entre domaines prend l'aspect d'une ligne pointillée (figure 5.13). La paroi de Bloch se subdivise en segments avec des sens de rotation alternés, induisant sur chaque surface du film des masses magnétiques successivement positives et négatives.

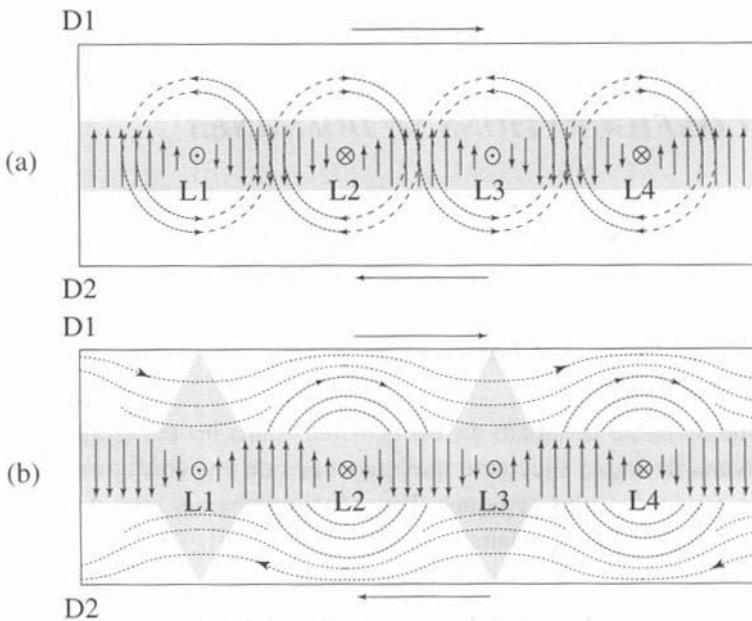


**Figure 5.13 - Parois observées par méthode de Bitter sur une couche mince de Fe-Ni de 100 nm d'épaisseur, d'après [6]**

- (a) Couche mince vue de dessus ; les domaines sont notés D1 et D2 ;
- (b) Vue en coupe, très agrandie, de la couche au centre de la paroi, laissant apparaître la structure locale ; des zones à fort gradient de champ (parois de Néel) concentrent la poudre magnétique, donnant ainsi l'aspect de points singuliers.

Entre les segments de paroi de Bloch apparaissent de courtes zones dans lesquelles les moments au lieu de tourner autour de la normale à la paroi, tournent autour de la normale à la couche : ce sont des morceaux de paroi de Néel. Le mélange des diverses structures de paroi entraîne une alternance de pôles magnétiques de signe opposés à courtes distances. L'énergie dipolaire est fortement réduite. Si l'épaisseur de la couche diminue encore, chaque segment de paroi de Néel prend de l'extension au détriment des segments de paroi de Bloch. Vers 60 nm d'épaisseur, le film de  $\text{Fe}_{80}\text{Ni}_{20}$  ne contient plus que des parois de Néel.

On observe une alternance assez régulière de deux types de parois de Néel caractérisés par le sens de rotation de l'aimantation. Au centre des zones de passage d'un type à l'autre, les lignes d'aimantation sont normales à la couche comme le montre la figure 5.14 : ce sont les résidus des parois de Bloch observées à plus forte épaisseur que l'on appelle *lignes de Bloch*.

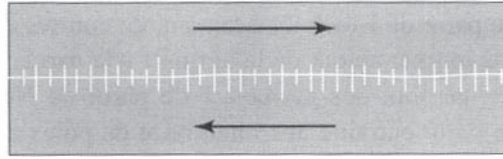


**Figure 5.14 - Mécanisme de création des parois en échelle de perroquet**

Couche vue de dessus.

- (a) au niveau des lignes de Bloch L1 et L3, on constate que les lignes de flux (en pointillés) seraient orientées à l'opposé de l'aimantation présente dans chacun des domaines.
- (b) les segments de parois de Néel, représentés par des triangles au niveau des lignes L1 et L3, corrigent notablement les lignes de flux.

Aussitôt que s'installent les parois de ce type, elles prennent l'allure d'échelles de perroquet (*cross tie* en anglais) : il y a alors formation, à intervalles presque réguliers, de courts segments de paroi de Néel perpendiculaires à la paroi principale qui les traverse en leur milieu (figure 5.15).



**Figure 5.15 - Parois de Néel et lignes de Bloch observées sur une couche très mince de Fe-Ni de 60 nm d'épaisseur**

Qualitativement, cela s'explique comme suit : autour de chaque ligne de Bloch, des champs dipolaires sont engendrés au sein des domaines par les segments de paroi de Néel adjacents (figure 5.14-a) ; autour d'une ligne de Bloch sur deux, ces champs dipolaires parcourent les domaines en sens inverse de l'aimantation, élevant fortement l'énergie du système. Les segments de paroi de Néel perpendiculaires à la paroi principale apparaissent à hauteur des lignes de Bloch incriminées ; ils suppriment les champs dipolaires défavorables et assurent la continuité des champs dipolaires parallèles à l'aimantation des domaines (figure 5.14-b).

## 4. LES CONFIGURATIONS EN DOMAINES

Nous avons vu que la répartition en domaines dans les substances ferromagnétiques résultait d'un compromis, dans lequel les énergies impliquées ne sont pas individuellement minimisées. De fortes frustrations locales, liées par exemple à la géométrie ou la structure cristallographique des systèmes magnétiques considérés, peuvent exister, qui conduisent à des modes de subdivision en domaines adaptés à chaque situation particulière.

Une extrême diversité de situations est possible. Dans les paragraphes qui suivent, nous décrivons de façon succincte quelques unes de ces configurations, parmi les plus communes et les plus typiques. Les développements sont donnés, en cas de besoin, dans les chapitres spécialisés.

### 4.1. CONFIGURATIONS EN DOMAINES DANS LES CRISTAUX UNIAXES

Considérons le cas le plus simple d'un parallélépipède monocristallin, taillé dans une substance ferromagnétique uniaxe (d'aimantation spontanée  $\mathbf{M}_s$ ), tel que l'axe de facile aimantation  $\mathbf{c}$  soit perpendiculaire à l'une des faces. Supposons les moments dirigés selon cet axe. Si ce cristal est monodomaine, il rayonne à l'extérieur un champ dipolaire important, et le champ démagnétisant associé  $\mathbf{H}_d$ , régnant dans la matière, donne lieu à une perte d'énergie magnétostatique :

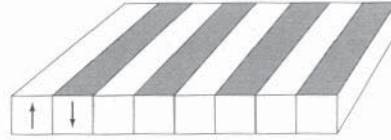
$$W_{\text{dip}} = -(\mu_0/2) \int_{\text{vol}} \mathbf{M}_s \mathbf{H}_d \, dv \quad (5.32)$$

$\mathbf{H}_d$  étant orienté en sens inverse de  $\mathbf{M}_s$ , on vérifie que l'énergie magnétostatique ainsi écrite est positive. Cette énergie peut être réduite d'un facteur de l'ordre de

deux, de l'ordre de quatre, de l'ordre de huit, etc. si le cristal se subdivise en deux, quatre, huit, etc. domaines (figure 5.16). Le champ démagnétisant en un point situé à l'intérieur du cristal peut, en effet, être considéré comme la somme des champs créés en ce point par les masses magnétiques présentes en surface.

Au fur et à mesure que le nombre de domaines superficiels croît, ces masses se mélangent de plus en plus intimement et tendent, par conséquent, à neutraliser leurs effets à des distances de plus en plus courtes. On pourrait imaginer la disparition totale de la perte d'énergie magnétostatique par subdivision du cristal en domaines jusqu'à l'infini. Mais l'apparition d'un nombre croissant de domaines s'accompagne nécessairement de la création d'un nombre équivalent de parois.

**Figure 5.16 - Décomposition d'un parallélépipède de symétrie uniaxe en domaines en rubans**



Alors que le gain en énergie dipolaire magnétique est de plus en plus faible au fur et à mesure des subdivisions successives, la perte en énergie de paroi est strictement proportionnelle à la surface de paroi, c'est-à-dire au nombre de parois créées.

Pour illustrer ce processus de compromis, considérons le monocristal précédent, taillé sous la forme d'une plaquette de dimensions  $L \times L \times e$  ( $e \ll L$ ), l'axe  $c$  étant parallèle à  $e$ . Si le cristal est monodomaine, il règne dans la plaquette un champ démagnétisant très intense. Assimilant la plaquette à un ellipsoïde très aplati, l'énergie magnétostatique vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{M}_s \mathbf{H}_d \, dv = -\frac{\mu_0}{2} M_s H_d \int_{\text{vol}} dv \quad (5.33)$$

soit par unité de volume  $E_{\text{mag}} = -(\mu_0/2) M_s H_d = (\mu_0/2) N M_s^2$ , car  $H_d = -N M_s$ , où  $N$  est le coefficient de champ démagnétisant. Du fait que  $e \ll L$ , le coefficient de champ démagnétisant est voisin de l'unité, d'où :  $E_{\text{mag}} \sim \mu_0 M_s^2 / 2$ .

Ramenée à l'unité de surface de plaquette, l'énergie magnétostatique s'écrit :  $E_{\text{mag}}^{\text{surf}} = E_{\text{tot}}^{\text{surf}} \approx (\mu_0 / 2) M_s^2 e$ .

Considérons maintenant le cas d'une configuration en bandes parallèles, telle que celle qui est présentée sur la figure 5.16. Le calcul de l'énergie magnétostatique utilise le potentiel scalaire  $\Phi$  dont dérive le champ  $H_d$  et qui doit satisfaire à l'équation de Laplace,  $\Delta \Phi = 0$  avec la condition :  $(\partial \Phi / \partial z)_{z > 0} = \sigma_{\text{mag}} / \mu_0 = M_s$ .

La décomposition de la plaquette en domaines parallélépipédiques correspond à une énergie magnétostatique qui vaut :  $E_{\text{mag}}^{\text{surf}} = 0,136 \mu_0 M_s^2 d$  par unité de surface de plaquette, où  $d$  est la largeur des domaines et doit rester petite devant l'épaisseur  $e$  de la plaquette. Cette expression confirme que  $E_{\text{mag}}$  est d'autant plus faible que le nombre de domaines (mesuré par  $1/d$ ) est grand.

A cette énergie, il faut ajouter pour la plaquette toute entière l'énergie des  $L/d$  parois qu'elle contient, et dont la surface totale vaut  $L e$  ( $L/d$ ), soit une énergie de paroi :  $E_{\text{par}} = \gamma e L^2/d$ , si  $\gamma$  désigne l'énergie superficielle de paroi. Cela donne, par unité de surface de plaquette :  $E_{\text{par}}^{\text{surf}} = \gamma e/d$ .

L'énergie totale est la somme des énergies magnétostatique et de parois, soit :

$$E_{\text{tot}}^{\text{surf}} = E_{\text{mag}}^{\text{surf}} + E_{\text{par}}^{\text{surf}} = 0,136 \mu_0 M_s^2 d + \gamma(e/d) \quad (5.34)$$

Cette énergie est minimum pour  $dE_{\text{tot}}/dd = 0,136 \mu_0 M_s^2 - \gamma(e/d^2) = 0$ , c'est-à-dire pour une largeur de domaines :

$$d = \sqrt{\gamma e} / \sqrt{0,136 \mu_0 M_s^2} \quad (5.35)$$

L'énergie totale du système vaut alors :

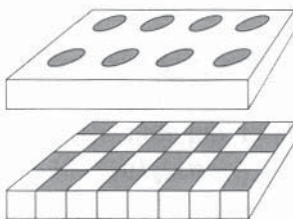
$$E_{\text{tot}}^{\text{surf}} = 2\sqrt{0,136 \mu_0 M_s^2 \gamma e} \quad (5.36)$$

Appliquons ces considérations au cas du cobalt. A température ambiante, le cobalt présente une aimantation à saturation  $M_s = 1,45 \times 10^6 \text{ A.m}^{-1}$  et une énergie de paroi  $\gamma = 7,6 \times 10^{-3} \text{ J.m}^{-2}$ .

Pour un échantillon de cobalt taillé en plaquette d'épaisseur  $e = 1 \text{ cm}$ , les relations (5.35) et (5.36) fournissent les valeurs suivantes :

- ◆ Énergie magnétique totale dans l'état monodomaine :  $E_{\text{tot}}^{\text{surf}} \approx 13,2 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2}$
- ◆ Énergie magnétique totale dans l'état polydomaine :  $E_{\text{tot}}^{\text{surf}} = 10,5 \text{ J.m}^{-2}$ .
- ◆ Largeur des domaines :  $d = 14,5 \text{ }\mu\text{m}$  (à comparer avec les  $12,5 \text{ nm}$  d'épaisseur de parois, qui sont environ 1000 fois plus fines que les domaines qu'elles séparent).

Le gain d'énergie magnétique obtenu par la division en domaines en forme de bandes atteint un facteur supérieur à 1200. Le calcul donne 687 domaines par centimètre linéaire de plaquette. Il ne s'agit naturellement que d'un ordre de grandeur.



**Figure 5.17 - Diverses configurations en domaines**

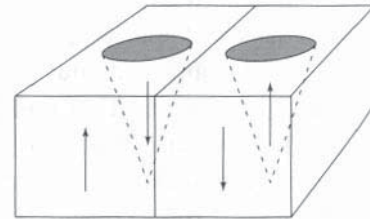
Nous venons de voir que la subdivision en domaines d'un parallélépipède aplati réduit considérablement l'énergie magnétostatique d'un système saturé selon la petite dimension. D'autres types de configuration sont-ils capables de réduire davantage cette énergie ? Diverses configurations en damier, à pois, etc. (figure 5.17) ont effectivement été étudiées, qui conduisent à une énergie magnétostatique légèrement plus faible que la subdivision en bandes simples de la figure 5.16. Il apparaît cependant qu'elles nécessitent une surface de parois par domaine beaucoup plus importante, et le bilan global ne leur est pas favorable. En revanche, on observe

Il apparaît cependant qu'elles nécessitent une surface de parois par domaine beaucoup plus importante, et le bilan global ne leur est pas favorable. En revanche, on observe

souvent la formation de domaines très imbriqués dont l'énergie n'est que très légèrement supérieure à celle de la configuration en bandes parallèles. Les parois, tout en restant parallèles à l'axe perpendiculaire Oz de facile aimantation, se courbent dans le plan xOy sans que l'augmentation de leur surface ne devienne prohibitive (du fait de la faible épaisseur). Vus de dessus, les domaines présentent une allure caractéristique en labyrinthe (figure 5.18) : les moments sont perpendiculaires au plan de la figure, et le contraste entre domaines noirs et blancs traduit un renversement des moments ( $\uparrow$  et  $\downarrow$ ).



**Figure 5.18 - Structure en domaines visualisée par effet Faraday dans une couche de grenat magnétique (largeur des bandes  $\sim 5 \mu\text{m}$ )**



**Figure 5.19 - Domaines en cônes observables à la surface du cobalt, les moments sont parallèles à l'axe de symétrie hexagonale**

Dans les systèmes plus épais, le mélange des masses magnétiques de surface est plutôt obtenu, sans une trop grosse dépense en supplément de surface de paroi, par la formation, à l'intérieur des domaines en bande, de domaines inverses en forme de pointes (figure 5.19), qui s'évasent en surface (où ils compensent la masse environnante par des masses de signe contraire) et ne s'enfoncent pas très profondément au sein du matériau (pour ne pas coûter trop cher en surface de paroi).

Cependant, cette forme de cône fait apparaître des masses magnétiques sur les parois, du fait de la discontinuité de la composante de l'aimantation normale à la paroi, et la quantité de ces masses est d'autant plus grande que le cône est moins allongé. Comme chaque fois, la structure en domaines réelle résulte donc d'un compromis.

#### **4.2. DOMAINES DE FERMETURE**

Dans les cristaux de symétrie cubique, le nombre des directions de facile aimantation est plus grand que dans les cristaux uniaxes : 6 directions de type  $\langle 100 \rangle$ , 8 directions  $\langle 111 \rangle$ . Outre les parois à  $180^\circ$ , des parois à  $90^\circ$  peuvent se former dans les matériaux dont les axes de facile aimantation sont du type  $\langle 100 \rangle$ , le fer par exemple, ainsi que des parois à  $71^\circ$  ou  $109^\circ$ , dans les matériaux dont les axes de facile aimantation sont du type  $\langle 111 \rangle$ , par exemple le nickel.

L'existence de domaines orientés à  $90^\circ$  l'un de l'autre donne au flux magnétique l'opportunité de se refermer à l'intérieur de l'échantillon, sans faire apparaître de pôles, ni en surface, ni au sein du matériau magnétique. L'énergie magnétostatique du système est ainsi réduite à zéro. La figure 5.20 présente la disposition de tels

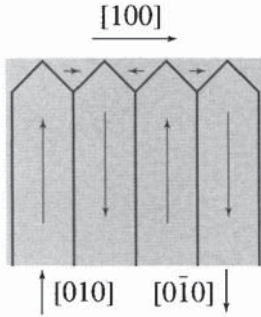


Figure 5.20 - Domaines de fermeture observés sur un cristal de fer au silicium

*domaines de fermeture.* Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la formation de ces domaines coûte plus que la seule énergie de paroi. L'apparition de l'ordre magnétique entraîne souvent, au sein d'un domaine, un phénomène de déformation du réseau cristallin dans la direction de l'aimantation, c'est la magnétostriction (voir chapitre 12).

Ainsi, dans le cas du fer où cette magnétostriction est positive à champ faible, un domaine de fermeture selon [100] devrait s'allonger dans la direction des moments, comme le montre la figure 12.24 (l'allongement relatif est alors noté  $\lambda_{100}$ ). Il en est empêché par les domaines adjacents [010] et [010]. Une *énergie magnétoélastique* est donc stockée dans le domaine [100], proportionnelle à son volume. La réduire, revient à diminuer ce volume, ce qui peut être réalisé en réduisant la largeur de tous les domaines de type [010] et multipliant donc leur nombre. La situation d'équilibre résulte du compromis qui s'établit entre l'énergie magnétoélastique stockée dans les domaines de fermeture et le nombre de domaines principaux mis en jeu, c'est-à-dire la surface de paroi nécessaire. Notons que les domaines de fermeture peuvent exister également dans les matériaux uniaxes lorsque l'anisotropie n'y est pas trop forte.

## 5. LES CONFIGURATIONS MAGNÉTIQUES DANS LES PARTICULES DE PETITES DIMENSIONS PARTICULES MONODOMAINES

Pour un monocristal d'une substance ferromagnétique uniaxiale, taillé en forme de parallélépipède d'épaisseur  $e$  égale à 1 cm, nous avons évalué au § 4.1 le gain d'énergie interne, associé à la subdivision en domaines magnétiques en bandes. De façon plus générale, l'expression du rapport énergétique entre les deux états considérés est :

$$\frac{E_{\text{monodom}}}{E_{\text{multidom}}} = \frac{\mu_0 M_s^2 e}{4\sqrt{0,136\mu_0 M_s^2 \gamma e}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2,176\gamma}} M_s \sqrt{e} \quad (5.37)$$

Ce rapport tend vers zéro avec  $e$ . Il doit donc exister une épaisseur critique,  $e_c$ , en-dessous de laquelle la configuration monodomaine devient d'énergie inférieure à la configuration polydomaine, et représente donc l'état stable du système.

Ce résultat exprime le fait que l'énergie de champ démagnétisant est proportionnelle à  $M_s^2 V$ , donc au volume de l'échantillon, tandis que l'énergie dépensée en parois, égale à  $\gamma S$ , est proportionnelle à la surface totale de paroi,  $S$ . Il est classique que, aux petites dimensions, l'énergie d'un terme de surface devienne relativement plus importante que celle d'un terme de volume.

Pour illustrer cette compétition entre énergie magnétostatique et énergie de paroi, Kittel [1] a comparé, pour une sphère, l'énergie de l'état monodomaine à celle d'un état où la sphère est divisée en deux domaines de même volume par une paroi plane passant en son centre. Dans l'état monodomaine, l'énergie de champ démagnétisant est :  $E_{\text{mag}} = (4\pi/18)\mu_0 M_s^2 R^3$ , où  $R$  est le rayon de la sphère. Dans l'état à une paroi, on suppose que l'énergie de champ démagnétisant est divisée par deux, d'où :  $E_{\text{tot}} = (2\pi/18)\mu_0 M_s^2 R^3 + \gamma 4\pi R^2$ . Le rayon critique en dessous duquel l'état monodomaine est de plus basse énergie est obtenu en égalant les deux énergies ci-dessus, soit :  $R_K = 9\gamma/\mu_0 M_s^2$ .

Cette relation exprime la dépendance fonctionnelle entre la dimension critique et les grandeurs magnétiques  $\gamma$  et  $M_s$ . Si l'énergie de paroi est grande, introduire une ou plusieurs parois coûte cher et le rayon critique est élevé, mais ce rayon est élevé également lorsque l'aimantation spontanée est faible, conduisant à une énergie de champ démagnétisant réduite. Dans le cas du fer,  $\gamma \approx 3 \times 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$  et  $M_s = 1,71 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}$ , on en déduit  $R_K = 7,3 \text{ nm}$ . Notons que  $\delta \approx 30 \text{ nm}$ .

### 5.1. CONFIGURATIONS STABLES LES PLUS PROBABLES

La discussion précédente concerne la comparaison énergétique entre les états d'aimantation uniforme et multidomaines. D'autres configurations de moments, non-uniformes et sans domaines, peuvent être envisagées (par exemple, celle qu'a décrite Van den Berg, rappelée dans l'introduction à ce chapitre). De telles configurations, qui sollicitent en général un coût direct en énergie d'échange, sont possibles avec des matériaux présentant une anisotropie magnétocristalline très faible, et elles dépendent surtout de la forme de l'échantillon. Le calcul de l'énergie interne magnétique de ces configurations est délicat, car il ne peut s'appuyer que sur la théorie du micromagnétisme, qui met en œuvre des équations différentielles non linéaires.

Pour une sphère, un ellipsoïde allongé ou un cylindre, la plus classique, et la plus probable de ces configurations non-uniformes sans domaines, correspond au schéma de la figure 5.21, que nous désignerons comme "état d'aimantation enroulée" (magnetization *curling* en anglais). C'est un état proche de celui qu'a décrit Van den Berg pour un disque aplati [2].

S'appuyant sur les résultats des calculs exacts de Brown [7] ou approchés de Kittel [1], Zijlstra [8] a comparé, dans un matériau uniaxial taillé sous forme de sphère, les énergies respectives de trois états :

- ◆ aimantation uniforme,
- ◆ aimantation enroulée,
- ◆ état à deux domaines.

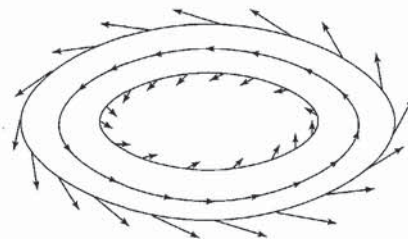


Figure 5.21

Etat d'aimantation enroulée (curling)

En comparant l'état monodomaine aux deux autres états, on montre qu'il existe un rayon  $R_{c0}$  en dessous duquel l'état monodomaine est certainement de plus basse énergie, avec  $R_{c0} = 5,099 (A_{\text{éch}}/\mu_0 M_s^2)^{1/2}$ , où  $A_{\text{éch}}$  est la constante d'échange. Pour le fer,  $A_{\text{éch}} \approx 1,95 \times 10^{-11} \text{ Jm}^{-1}$ , d'où  $R_{c0} = 11,75 \text{ nm}$ . Pour des valeurs de  $R$  supérieures à  $R_{c0}$ , il convient de distinguer deux cas. Le cas d'une faible anisotropie magnétocristalline correspond à  $K \equiv K_1 < 0,178 \mu_0 M_s^2$  [8]. L'état d'aimantation uniforme doit, dans ce cas, être comparé à l'état d'aimantation enroulée. Le rayon critique  $R_{c1}$  associé est alors :

$$R_{c1} = 6,4053 \sqrt{A_{\text{éch}}/\mu_0 M_s^2} \left[ 1 - 5,615 (K/\mu_0 M_s^2) \right]^{-1} \quad (5.38)$$

Pour  $K = 0$ ,  $R_{c1} = 1,2562 R_{c0}$ . Pour  $K > 0,178 \mu_0 M_s^2$  (forte anisotropie magnéto-cristalline),  $R_{c1} \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que l'état d'aimantation enroulée devient instable par rapport à celui d'aimantation uniforme. L'état à deux domaines doit alors être comparé à l'état d'aimantation uniforme. Le rayon critique qui les sépare est :

$$R_{c2} = 56,129 \sqrt{A_{\text{éch}}/\mu_0 M_s^2} \left[ 1,5708 + (K/\mu_0 M_s^2) \right] \quad (5.39)$$

Pour le fer  $R_{c2} = 160 \text{ nm}$ , supérieur à l'épaisseur de paroi.

Pour  $R > R_{c2}$ , l'état à deux domaines est de plus basse énergie que l'état uniformément aimanté, même quand l'anisotropie est faible (au sens de Brown).

La figure 5.22 présente l'évolution des rayons critiques  $R_{c1}$  et  $R_{c2}$ , rapportés à  $R_{c0}$ , en fonction du paramètre  $x = K/\mu_0 M_s^2$ , selon Zijlstra-Brown.

On a en particulier :

pour  $K = 0$ ,  $R_{c1} = 1,2562 R_{c0}$  et  $R_{c2} = 13,7965 R_{c0}$

pour  $K = 0,178 \mu_0 M_s^2$ ,  $R_{c1} \rightarrow \infty$  et  $R_{c2} = 13,7965 R_{c0}$

pour  $K = 0,1627 \mu_0 M_s^2$ ,  $R_{c1} = R_{c2} = 14,5 R_{c0}$ .

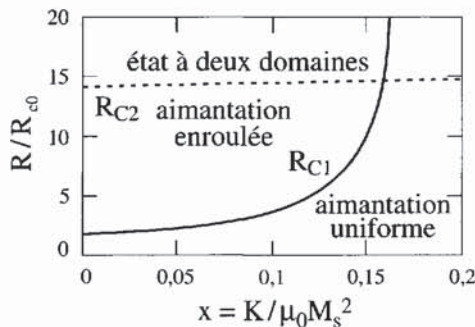


Figure 5.22 - Evolution des rayons critiques en fonction du paramètre  $x = K/\mu_0 M_s^2$

## 5.2. PARTICULES ELLIPSOÏDALES ET ANISOTROPIE DE FORME

Considérons une particule dont la forme est assimilable à un ellipsoïde de révolution allongé, de grand axe  $2c$  et de petits axes  $2a$ . Supposons d'abord que l'aimantation de la particule soit orientée selon le grand axe de l'ellipsoïde. Le coefficient de champ démagnétisant dans cette direction,  $N_c$ , a été donné par l'équation (2.48). Nous nous limiterons dans ce paragraphe à reprendre le modèle de Kittel pour comparer l'état (1) saturé (aimantation uniforme) à un état (2) bi-domaine avec paroi plane médiane. Rappelons que ce modèle considère que l'énergie magnétostatique résiduelle dans l'état bi-domaine est approximativement réduite de moitié par rapport à celle qui existe dans l'état monodomaine.

On peut donc écrire les énergies magnétiques des deux états :

$$E(1) = (\mu_0/2) N_c M_s^2 V_{\text{ellipsoïde}} = (\mu_0/2) N_c M_s^2 4\pi a^2 c / 3$$

$$E(2) = E(1)/2 + \gamma S_{\text{ellipse}} = E(1)/2 + \gamma \pi a c$$

d'où  $E(1) < E(2)$  pour  $a < a_c$ , tel que :  $a_c = 3\gamma/\mu_0 N_c M_s^2$ .

Considérons encore le cas d'une particule de fer et supposons qu'elle a la forme d'un ellipsoïde très allongé ( $c/a = 10$ ). On a alors  $N_c = 2 \times 10^{-2}$ , et  $a_c = 150\gamma/\mu_0 M_s^2$ .

Avec les valeurs de  $\gamma$  et  $M_s$  du fer (voir le paragraphe précédent), on obtient comme dimension critique  $2a_c = 240$  nm pour un grand axe  $2c$  de  $2,4$   $\mu\text{m}$ .

Les particules allongées restent donc monodomaines pour des volumes beaucoup plus importants que les particules sphériques. Ce résultat est tout à fait cohérent avec les remarques faites en début de paragraphe : avec une particule allongée, les effets dipolaires sont moins sensibles à taille comparable, et la paroi coûte plus cher.

A l'inverse, pour un ellipsoïde aplati dans lequel l'aimantation serait astreinte à demeurer orientée selon le petit axe, les effets dipolaires interviennent plus intensément et la situation monodomaine n'existe que pour des particules très petites.

Ces deux dernières remarques conduisent au concept d'*anisotropie de forme* ou *anisotropie de champ démagnétisant* : dans tout système ouvert, non sphérique, et possédant une aimantation résultante  $\mathbf{M}$  non nulle, celle-ci tend à s'aligner selon la plus grande dimension. Pour un ellipsoïde allongé ( $c \gg a$ ), l'énergie magnétostatique est décrite par :  $E_d = (\mu_0 M^2 / 2) [N_a \sin^2 \theta + N_c \cos^2 \theta]$ , si  $\theta$  est l'angle que fait  $\mathbf{M}$  avec son axe  $Oz$  de révolution, ce qui conduit – en remplaçant  $\cos^2 \theta$  par  $(1 - \sin^2 \theta)$  et en oubliant la constante – à une énergie d'anisotropie uniaxiale de la forme :

$$E_d = (\mu_0 M_s^2 / 2) (N_a - N_c) \sin^2 \theta = K_f \sin^2 \theta \quad (5.40)$$

Par analogie avec les expressions (3.8, 3.9) qui définissent un champ d'anisotropie magnétocristalline, on peut définir un *champ d'anisotropie de forme*,  $H_A^f$  :

$$H_A^f = (N_a - N_c) M_s \quad (5.41)$$

## 6. OBSERVATION DES DOMAINES ET DES PAROIS

Depuis que P. Weiss a postulé l'existence de domaines au sein des matériaux ferromagnétiques, de nombreuses techniques expérimentales ont été proposées pour mettre en évidence ces domaines magnétiques et les parois qui les séparent. L'approche physique de l'observation des domaines est nettement différente suivant qu'il s'agit de matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques (présentant une aimantation spontanée  $M_s$ ) ou antiferromagnétiques ( $M_s = 0$ ).

Dans le premier cas, la répartition d'aimantation agit directement sur différentes sondes : *la lumière* par les effets magnétooptiques (chapitre 13), *les électrons* par la force de Lorentz, et *les neutrons* par le terme d'énergie potentielle d'interaction entre le champ et le moment magnétique du neutron, qui entraîne une contribution magnétique à la diffraction ; de plus, les hétérogénéités de l'aimantation créent un champ dipolaire, dit *champ de dispersion*, qui peut attirer de fines particules magnétiques (*méthode de Bitter*), dont la plus forte concentration locale pourra être observée au microscope.

Pour les antiferromagnétiques, la seule méthode directe est l'imagerie par diffraction de neutrons.

### 6.1. DOMAINES FERRO- ET FERRIMAGNÉTIQUES

#### 6.1.1. La méthode de Bitter

F. Bitter a eu l'idée de saupoudrer d'une fine poudre ferromagnétique la surface polie du matériau à observer. Les particules sont attirées par les gradients de champ de dispersion d'autant plus fortement que ceux-ci sont plus importants. Elles se concentrent sur les *parois*, permettant de déceler leur émergence à la surface de l'échantillon à l'aide d'un microscope optique, et par là de révéler les domaines.

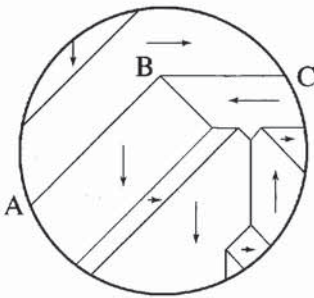


Figure 5.23 - Observation d'une structure en domaines de Weiss par technique de Bitter [9]

La version actuelle de cette technique utilise des suspensions colloïdales de particules dans un liquide, et en particulier certains des ferrofluides commercialement disponibles. La figure 5.23 (d'après S. Chikazumi [9]) schématise l'aspect obtenu avec un cristal de Fe-4%Si. Les aimantations sont dans les directions  $\langle 100 \rangle$  voisines de la surface; ainsi, la ligne AB constitue

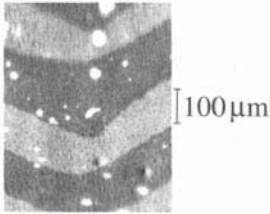
une paroi à  $90^\circ$  et la ligne BC une paroi à  $180^\circ$ . Une technique dérivée de la précédente utilise des bactéries magnétotactiques (organismes unicellulaires porteurs de grains de matière aimantée, voir figure 25.2) pour visualiser les parois.

### **6.1.2. Observation de domaines magnétiques par les effets magnétooptiques**

L'effet Faraday et les trois effets Kerr magnéto-optiques sont utilisables pour l'observation de domaines. L'observation par effet Faraday met en jeu une lumière polarisée rectilignement. A la traversée de l'échantillon se produit une rotation du plan de polarisation de la lumière qui est proportionnelle à la projection de l'aimantation le long de la direction de propagation du faisceau, et à la longueur du trajet parcouru. Pour deux domaines à  $180^\circ$ , les sens de rotation de la polarisation sont opposés. L'effet Faraday n'est envisageable que pour les échantillons transparents ; son utilisation est facile et spectaculaire, la rotation de la polarisation étant notable. Un microscope polarisant de qualité moyenne y suffit. L'agrément de l'observation est accru par le fait que, l'amplitude de la rotation dépendant de la longueur d'onde, on observe en général des images colorées. L'application d'un champ magnétique permet de suivre, en temps réel, la réorganisation des domaines.

Pour les échantillons métalliques, non transparents sauf s'il s'agit de couches très minces, les observations se font en réflexion. Elles mettent en jeu les effets magnéto-optiques de Kerr. L'effet Kerr polaire, analogue à l'effet Faraday, permet de révéler les domaines magnétiques lorsque l'aimantation possède une composante appréciable dans la direction perpendiculaire à la surface éclairée de l'échantillon. L'effet Kerr longitudinal et l'effet Kerr transverse permettent de révéler les domaines lorsque les aimantations sont confinées dans le plan de la surface. L'effet longitudinal se manifeste par des rotations du plan de polarisation, différentes suivant la composante dans le plan d'incidence de la direction de l'aimantation, l'effet transverse par une différence d'intensité réfléchie suivant le signe de la composante de l'aimantation perpendiculaire au plan d'incidence. Les signaux issus de l'effet Kerr sont plus faibles que ceux associés à l'effet Faraday. L'observation est donc plus difficile qu'en transmission, et exige une bonne instrumentation, ainsi qu'un excellent polissage de la surface. D'une part, la surface doit être lisse optiquement, en particulier dans les effets Kerr longitudinal et transverse, où l'incidence est oblique : cette géométrie est en effet très sensible à la rugosité, et le contraste magnétique peut facilement être noyé par les ondulations de surface. Leur influence peut être atténuée par des couches interférentielles (voir chapitre 13) qui augmentent la rotation Kerr et donc le contraste magnétique. D'autre part, comme ce mode d'observation ne concerne qu'une couche superficielle d'épaisseur typique 20 nm, il est indispensable que les domaines ne soient pas compliqués, au voisinage de la surface, par l'apparition, due à l'effet des contraintes internes *via* la magnétostriction, de petits domaines parasites. Ce dernier effet ne peut pas être compensé par des artifices. Pour l'éviter, on est conduit à effectuer un polissage mécanochimique, ou à pratiquer un polissage électrolytique ou chimique après la phase mécanique.

En ce qui concerne l'instrumentation, un bon microscope polarisant est utilisable pour les observations en effet Kerr polaire, donc pour la visualisation de domaines où l'aimantation a une composante perpendiculaire à la surface significative.



**Figure 5.24 - Domaines de Weiss révélés par effet Kerr longitudinal**

Des observations à faible grandissement en effet Kerr longitudinal (voir figure 5.24) sont possibles avec un dispositif simple constitué d'un petit microscope incliné, et d'un illuminateur symétrique, qui peut être réalisé par modification d'un tube de microscope. Seule une bande du champ d'observation est alors nette. Le contraste est satisfaisant moyennant deux précautions.

D'une part, il faut supprimer les rayons qui s'écartent trop du plan d'incidence moyen, et ne peuvent pas être éteints car ils acquièrent une polarisation elliptique en dehors de tout effet magnétique ; pour cela, un diaphragme d'ouverture en forme de fente parallèle au plan d'incidence doit être placé dans le plan focal arrière de l'objectif de l'illuminateur [10]. D'autre part, on évite les effets de dépolarisation par l'optique de l'illuminateur et du microscope en plaçant le polariseur et l'analyseur à l'extérieur des tubes de microscopes, donc immédiatement avant et après l'échantillon. De bons polariseurs dichroïques conviennent bien.

Pour obtenir des grossissements forts, ce dispositif est inadéquat. On peut cependant utiliser un très bon microscope polarisant, avec un objectif (pour polarisation) de grande ouverture numérique, à condition de fermer beaucoup le diaphragme d'ouverture et de le décentrer, de façon à réaliser un éclairage oblique ; il est encore préférable de remplacer le diaphragme d'ouverture circulaire par une fente. La réduction de l'ouverture de l'éclairage détériore la résolution par rapport aux performances normales de l'objectif, mais elle peut atteindre le  $\mu\text{m}$  environ.

La microscopie optique en champ proche (Scanning Near-field Optical Microscopy, SNOM) a fourni de premiers résultats très prometteurs pour l'étude, à une résolution de l'ordre de la dizaine de nm, et donc bien au-delà de la microscopie en champ lointain, de domaines ferromagnétiques. Le chapitre 13 (magnéto-optique) y fait allusion.

### **6.1.3. Observation de domaines magnétiques par les rayons X**

L'imagerie par diffraction de Bragg des rayons X, souvent appelée *topographie aux rayons X*, permet de faire l'image de défauts contenus dans un échantillon monocristallin ou dans des grains suffisamment grands [11]. Son principe est que l'hétérogénéité du faisceau diffracté fournit, si on l'enregistre sur un détecteur à localisation (film ou caméra CCD), une image de l'échantillon, en général par le biais des déformations des plans réticulaires utilisés pour la réflexion de Bragg. Cette méthode révèle également les domaines, ou les parois entre domaines.

Dans la quasi-totalité des travaux effectués jusqu'à présent, la visibilité des domaines ou parois magnétiques y est indirecte. En effet le contraste est dû à l'effet secondaire que constitue la différence de distorsion, associée à la magnétostriction, entre domaines. A l'intérieur d'un domaine, la magnétostriction tend à imposer une déformation spontanée qui dépend de la direction, mais non du sens, de l'aimantation. La nécessité de raccorder le réseau cristallin, si possible sans mettre en jeu des contraintes, entre domaines à directions d'aimantation différentes conduit généralement, de plus, à une rotation relative du réseau dans les deux domaines.

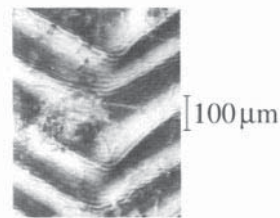
Deux domaines à directions d'aimantation spontanée différentes sont alors dans des situations légèrement différentes vis-à-vis du faisceau incident, et en particulier des conditions de diffraction de Bragg. Si la divergence effective du faisceau est inférieure à leur différence d'orientation effective, les intensités diffractées par ces domaines sont différentes, ce qui conduit à des gris différents sur les régions correspondantes de l'image. Dans le cas contraire, plus fréquent au laboratoire, où l'écart angulaire entre les domaines est petit par rapport à la divergence effective du faisceau, les domaines ne se distinguent plus en eux-mêmes. Ce sont alors les parois que l'on observe, leurs images étant dues aux perturbations qu'elles imposent à la propagation des rayons X dans l'échantillon.

La topographie aux rayons X utilisant les rayons X fournis par une source de rayonnement synchrotron se prête à des observations en temps réel. L'abondance des photons de haute énergie fournis par une machine telle que ESRF, la source européenne de rayonnement synchrotron, permet de voir des parois ou des domaines (à  $90^\circ$ ,  $71^\circ$  ou  $109^\circ$ ) situés à l'intérieur d'échantillons relativement épais (plus d'un mm pour du fer). L'une des variantes de cette technique expérimentale, la topographie en faisceau blanc, est très simple instrumentalement ; elle est bien adaptée à l'application de champs magnétiques et à l'étude de l'effet de la température, et s'accommode d'une subdivision en sous-grains de l'échantillon.

La figure 5.25 montre la même structure en domaines que la figure 5.24, révélée cette fois-ci par topographie aux rayons X en transmission. On voit ici les parois, en particulier par un jeu de franges d'égale épaisseur, dans l'épaisseur de l'échantillon.

Récemment, Kawata et Mori [12] ont montré la faisabilité d'une observation *directe* de domaines par le terme de diffusion magnétique résonnante de rayons X, au voisinage du seuil K du fer, dans la magnétite  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ .

Les rayons X de rayonnement synchrotron sont exploités de façon radicalement différente, mais également pour fournir des images, par les effets de dichroïsme au voisinage de seuils d'absorption. On parle de dichroïsme magnétique des rayons X pour désigner la variation d'absorption en fonction de l'état de polarisation du faisceau. La grandeur pertinente est en fait l'orientation relative



**Figure 5.25**  
**Domaines de Weiss**  
**révélés par topographie**  
**aux rayons X**

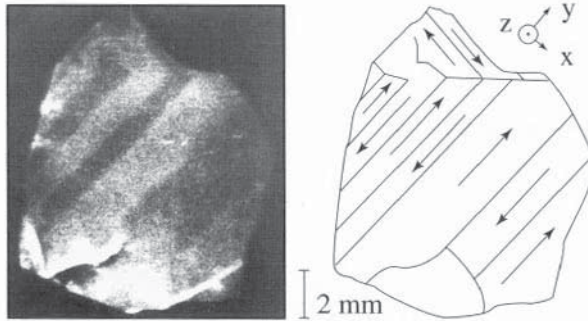
de la polarisation et de l'aimantation. Ainsi, pour le dichroïsme magnétique circulaire, la variation d'absorption lorsque l'on passe d'une polarisation circulaire droite à une polarisation circulaire gauche pour une direction donnée de l'aimantation s'obtient tout aussi bien, à polarisation constante, lorsque l'aimantation change de sens.

Cet effet est intimement associé au mécanisme même de l'absorption, dans lequel un électron interne est éjecté vers un état électronique où une place est disponible, la différence d'énergie étant celle du photon absorbé. Les différences d'énergie caractérisent les positions en énergie ou en longueur d'onde des seuils d'absorption de chaque atome ou ion. Le dichroïsme est associé au fait que l'aimantation affecte profondément la répartition des états occupés et libres. Stöhr, Swiech et leurs collaborateurs [13] utilisent le fait que les photoélectrons sont émis, à la suite de l'absorption, avec des probabilités différentes et donc en densités différentes, à partir de domaines différents, pour former l'image à l'aide d'une optique électronique. Il s'agit cette fois d'une observation qui ne concerne que le voisinage de la surface à cause du faible parcours des photoélectrons, et qui doit être pratiquée sous ultravide. Dans une approche un peu différente basée sur un microscope à rayons X mous, Fischer *et al.* utilisent directement les rayons X transmis, avec plus ou moins d'intensité suivant l'absorption locale, pour obtenir le même type d'images [14]. Le caractère remarquable de cette technique est qu'elle concerne un élément chimique à la fois, celui dont on explore un seuil d'absorption. Elle donne donc des renseignements précieux sur le magnétisme des multicouches, et en particulier le couplage entre couches de compositions différentes.

#### **6.1.4. Observation de domaines magnétiques par les neutrons**

Les neutrons interagissent avec la matière par deux mécanismes principaux. D'une part, ils subissent la diffusion nucléaire parce qu'ils subissent l'interaction forte avec les noyaux. D'autre part, ayant un moment magnétique associé à leur moment cinétique intrinsèque (spin 1/2), ils ressentent le champ magnétique que créent à l'échelle microscopique les moments magnétiques atomiques. Ce mécanisme de diffusion magnétique des neutrons constitue, par les travaux de diffraction des neutrons menés dans l'approche classique, c'est-à-dire d'exploration du réseau réciproque, la source de la plupart des informations dont on dispose sur les structures magnétiques. Le même effet, utilisé autrement, conduit à l'imagerie par diffraction de Bragg de neutrons (ou topographie aux neutrons), analogue dans son principe à la topographie aux rayons X. Cette méthode peut fournir des images des domaines magnétiques de tous types à l'intérieur d'échantillons monocristallins massifs, et cette fois, à la différence du cas des rayons X, l'information magnétique est directement associée à la définition des domaines, et non à un effet secondaire. La technique la plus utile, dans le cas des domaines ferro- ou ferrimagnétiques, est basée sur les neutrons polarisés. Suivant l'orientation relative de l'aimantation et de la polarisation des neutrons incidents, les contributions nucléaire et magnétique à la diffraction s'ajoutent ou se retranchent.

A une polarisation donnée du faisceau correspond un contraste entre domaines (par exemple à  $180^\circ$ ) qui se renverse quand on inverse la polarisation du faisceau. Cette méthode nécessite de longs temps de pose et, en raison de la faible intensité des faisceaux disponibles, sa résolution est médiocre (plusieurs dizaines de  $\mu\text{m}$ ). La figure 5.26 montre des domaines ferromagnétiques ainsi révélés par topographie aux neutrons.



**Figure 5.26 - Domaines de Weiss, révélés par topographie aux neutrons polarisés**

Il s'agit d'un cristal de Fe – 3% Si, de surface (001) et de 0,12 mm d'épaisseur.  $\lambda = 0,135 \text{ nm}$ .

Deux autres approches utilisent la précession de Larmor du moment magnétique des neutrons autour du champ magnétique moyen, ou induction  $\mathbf{B}$ , pour cartographier des domaines. L'intensité diffractée par un analyseur, détectant une composante de la polarisation du fin faisceau de neutrons transmis à travers l'échantillon, varie, lorsque l'on déplace l'échantillon par rapport à lui, selon la direction du champ magnétique ressenti, donc de l'aimantation locale [15]. Le même principe, même s'il est habituellement décrit en termes de déphasage plutôt que de précession de Larmor, fournit des images de domaines grâce à un interféromètre neutronique [16]. Il s'agit d'un dispositif constitué de trois ou quatre cristaux de silicium rigoureusement parallèles et parfaits, dans lequel le faisceau est divisé en deux de façon cohérente, puis recombinaison après que les deux trajets aient subi des avatars différents, comme dans un interféromètre optique (de Mach-Zehnder par exemple). Les cristaux de silicium, qui appartiennent en fait à un bloc monolithique, opèrent la division, la déviation et la recombinaison des faisceaux par diffraction de Bragg. En interférométrie aux neutrons aussi, l'utilisation en imagerie est moins habituelle que les applications métrologiques. La diffraction successive, dans un sens puis dans l'autre, par deux cristaux parfaits et identiques exige que ces cristaux soient rigoureusement parallèles. La très grande sensibilité angulaire qui en résulte a été élégamment utilisée pour détecter la réfraction des neutrons dans un échantillon placé entre les deux cristaux. Une image des parois à l'intérieur d'échantillons très massifs (diamètre 13 mm) de fer-silicium a ainsi été obtenue [17, 18].

### 6.1.5. Observation de domaines magnétiques par les électrons

Les microscopies électroniques offrent des possibilités très riches d'observation de domaines ferromagnétiques, et la littérature est abondante.

La technique la plus utilisée, et la plus directe, est la microscopie en transmission (TEM). Elle est basée sur le déphasage ou, en termes de physique classique, la force de Lorentz, qu'exerce le champ  $\mathbf{B}$  sur les électrons. Le renversement de l'aimantation entraîne l'inversion de la force de Lorentz, et donc une déviation en sens opposé du faisceau d'électrons. L'objet de phase que constitue la structure en domaines n'est pas visible dans l'image au point parce que des rayons issus d'un même point de l'objet convergent alors en un même point de l'image, quelle que soit leur déviation. La structure en domaines devient visible dès lors que l'on défocalise suffisamment (*microscopie de Lorentz*) : les parois apparaissent alors sous forme de lignes sombres ou claires. On peut aussi profiter du fait que le plan focal de l'objectif contient le diagramme de diffraction de l'objet, chaque direction de faisceau correspondant à un point de ce plan. En y disposant un cache (*microscopie de Foucault*), on peut occulter le faisceau dévié par l'une des familles de domaines. L'image présente alors un contraste noir/blanc entre domaines pour des domaines à  $180^\circ$ . Cette technique exige des échantillons très minces ; elle impose également un mode de fonctionnement du microscope non standard, dans lequel l'objectif habituel n'est pas utilisé. Dans tous les microscopes actuels, les lentilles sont en effet magnétiques, et le champ par lequel elles jouent leur rôle vis-à-vis du faisceau électronique est incompatible avec l'observation de domaines et de leur évolution sous un champ magnétique contrôlé. Des accessoires permettent les observations à haute ou basse température. L'utilisation d'un détecteur à quadrants permet de déterminer les composantes de l'aimantation dans l'échantillon [19].

La microscopie électronique à balayage (SEM), en réflexion, peut également, quoique de façon moins directe, montrer les domaines au voisinage de la surface d'échantillons qui, cette fois, peuvent être massifs. Le microscope à balayage à analyse de polarisation (SEMPA) donne la possibilité de déterminer quantitativement, sur la surface, l'orientation de l'aimantation.

Il faut citer enfin les superbes expériences d'holographie interférométrique aux électrons de A. Tonomura et son groupe. On montre sans difficulté qu'un déphasage de  $\pi$  de l'onde associée aux électrons correspond à un flux, égal au quantum de flux  $\Phi_0 = h/2e$ , où  $h$  est la constante de Planck et  $e$  la charge de l'électron. Les interférogrammes, obtenus grâce à une source d'électrons extrêmement fine à émission sous champ, montrent ainsi les lignes de flux, graduées de façon quantitative, et donc, en particulier, les domaines [20]. On peut remarquer que cette expérience est particulièrement spectaculaire dans l'observation de lignes de vortex dans des supraconducteurs : chaque ligne de vortex est alors associée précisément au flux  $\Phi_0$ , et constitue donc un objet de phase idéal [21]. Enfin, le microscope à effet tunnel à spins polarisés (spin-polarized STM) est riche d'espoirs pour l'observation directe, à très haute résolution, des structures magnétiques.

### **6.1.6. Observation des domaines magnétiques par l'anisotropie d'une précipitation**

Libovicky [22] a montré que l'on peut observer, à température ambiante et donc à l'état fossile, les domaines existant vers 600°C dans des échantillons de fer-silicium (10 à 15% atomique) grâce à l'anisotropie, associée à la direction locale de l'aimantation, de la précipitation qui se produit lors d'un revenu. Le phénomène de ségrégation de phase métallurgique est probablement complexe. Il est sensible à la direction locale de l'aimantation. Cette technique ne se prête aucunement aux expériences en temps réel, et est limitée à des matériaux aux diagrammes de phase compliqués. Néanmoins, au-delà de son caractère très original, elle permet d'observer sans platine spéciale, et dans le volume, les domaines existant à haute température.

## **6.2. OBSERVATION DE DOMAINES ANTIFERROMAGNÉTIQUES**

Bien que ce chapitre soit consacré au ferromagnétisme, nous donnons ici quelques indications sur les techniques de visualisation des *domaines antiferromagnétiques*. L'existence de domaines antiferromagnétiques ne conduit pas à un abaissement de l'énergie libre d'un échantillon, contrairement au cas des domaines ferro- et ferrimagnétiques pour lesquels l'énergie dipolaire (magnétostatique) joue un rôle actif. En revanche, leur existence est attendue : le passage de l'état paramagnétique à l'ordre antiferromagnétique étant associé à un abaissement de symétrie, plusieurs individus sont possibles. Ils se déduisent les uns des autres, géométriquement, par les éléments de symétrie perdus lors de la transition de phase. Leur étude est plus fondamentale que celle des domaines ferro- ou ferrimagnétiques, et très peu de travaux leur ont été consacrés, essentiellement parce que les matériaux antiferromagnétiques sont peu utilisés dans les applications. Le couplage ferro-antiferromagnétique qui est à la base de dispositifs à magnétorésistance géante est une exception notable. Par ailleurs, il existe plusieurs types de domaines antiferromagnétiques. Nous décrirons brièvement ceux que nous évoquerons.

### **6.2.1. Observation des domaines antiferromagnétiques par microscopie optique**

La visualisation des domaines antiferromagnétiques est quelquefois possible optiquement. L'oxyde de nickel, cubique au-dessus de sa température de Néel, comporte deux types de domaines. L'arrangement des moments magnétiques correspond à une alternance de plans dans lesquels les moments magnétiques sont alignés, le sens des moments étant inversé d'un plan au suivant. Cet ordre, qui correspond à une symétrie trigonale, caractérise quatre familles de domaines, suivant qu'il s'agit de l'une ou l'autre des quatre familles de plans  $\{111\}$  tels que  $(\bar{1}11)$ ,  $(1\bar{1}1)$ , etc. (figure 5.27). On les appelle domaines **q**, évoquant le vecteur de propagation perpendiculaire à ces plans d'alignement qui caractérise cet arrangement, ou encore domaines T (comme twin), nom donné à l'origine, et évoquant l'analogie avec des macles [23].

Par ailleurs, l'orientation des moments magnétiques correspond à un abaissement supplémentaire de symétrie, et à d'autres domaines, appelés domaines S (comme spin) [24]. Les biréfringences associées à ces distorsions permettent, en lumière polarisée, de voir les domaines. Il s'agit d'une visualisation indirecte dans la mesure où la distorsion est un effet secondaire de l'arrangement (striction d'échange) ou de l'orientation (magnétostriction) des moments magnétiques.

Une autre famille de matériaux antiferromagnétiques classiques est celle des fluorures de métaux de transition,  $\text{MnF}_2$ ,  $\text{CoF}_2$ ,  $\text{FeF}_2$ . La structure cristallographique est celle du rutile, de réseau de Bravais tétragonal primitif. Les ions magnétiques (par exemple  $\text{Mn}^{2+}$ ) occupent les sommets et le centre de la maille mais leurs environnements (deux ions fluor) sont orientés différemment. Les moments magnétiques, en l'absence de champ appliqué, sont parallèles à l'axe [001], dans un sens ou dans l'autre, et seuls peuvent donc exister des domaines antiferromagnétiques à  $180^\circ$ . Le domaine I correspondra par exemple à l'orientation  $\uparrow$  pour le moment magnétique des sommets, et à l'orientation  $\downarrow$  du moment magnétique du centre de maille, le domaine II aux orientations opposées (voir figure 5.28).

Ces domaines ne sont visibles en l'absence de champ que par topographie aux neutrons (voir plus loin). En revanche, ils deviennent visibles optiquement sous un champ suffisamment fort [25] dans  $\text{CoF}_2$  et  $\text{FeF}_2$ , pour lesquels l'effet de biréfringence linéaire induite (voir chapitre 13) est relativement grand.

On peut s'en faire une représentation physique simplifiée en s'appuyant sur l'effet inhabituel de piézomagnétisme que présente, dans la phase antiferromagnétique, cette famille de composés : l'application d'un champ magnétique  $y$  induit une déformation dont la variation avec  $B$  est linéaire (la magnétostriction, phénomène général, est, quant à elle, quadratique par rapport au champ), et qui change donc de signe quand on renverse  $B$ . Si les ions fluor se rapprochent très légèrement de l'ion magnétique dont le moment est dans le sens du champ, l'indice de réfraction correspondant à de la lumière dont la polarisation est parallèle à la direction de leur liaison sera par exemple augmenté par rapport à l'indice de réfraction pour la lumière dont le champ électrique lui est perpendiculaire. Les deux domaines acquièrent donc des biréfringences opposées.

### ***6.2.2. Observation des domaines antiferromagnétiques par les rayons X et les électrons***

La sensibilité de la diffraction de Bragg des rayons X à des distorsions cristallines permet à la topographie aux rayons X de déceler les domaines du type de ceux de NiO [26]. Le mécanisme conduisant à leur visibilité est, comme dans le cas de la biréfringence optique de NiO, associé aux distorsions dues à l'arrangement et à l'orientation des moments magnétiques (striction d'échange et magnétostriction). La topographie aux rayons X présente généralement sur la lumière visible l'avantage d'une plus grande sensibilité à ces variations de distorsion, mais il s'agit à nouveau d'un effet indirect.

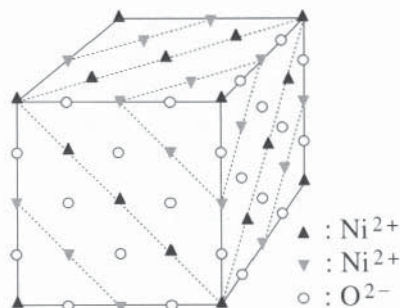
La microscopie électronique, moins sensible aux différences de distorsion, mais à résolution bien meilleure, a également permis des observations de domaines antiferromagnétiques basées sur les effets élastiques.

### 6.2.3. Observation des domaines antiferromagnétiques par les neutrons

Le champ d'application le plus intéressant, sur le plan fondamental, de la topographie aux neutrons est probablement l'observation des domaines antiferromagnétiques. C'est en effet la seule technique qui les montre directement, par la contribution magnétique à la diffraction de Bragg. Dans le cas de NiO abordé au paragraphe précédent, l'arrangement des moments magnétiques des ions  $\text{Ni}^{2+}$  en feuillets à l'intérieur desquels ils sont parallèles conduit à une période spatiale doublée vis-à-vis de la sonde, sensible au sens des moments magnétiques, que constituent les neutrons (fig. 5.27). Des réflexions de Bragg purement magnétiques apparaissent ainsi.

Figure 5.27 - Arrangement des moments magnétiques dans NiO

Dans le cas représenté, les moments magnétiques sont représentés par des triangles pointant vers le haut ou vers le bas. Les moments contenus dans des plans (111) sont alignés ferromagnétiquement, et leur sens est inversé en passant d'un plan au suivant. Cette situation définit l'un des quatre domaines T ou q. Les trois autres correspondent à des empilements ferromagnétiques sur les plans  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  etc.



Elles sont caractérisées par les vecteurs diffraction du type  $\frac{\bar{1}}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$  pour le domaine dont les plans alignés ferromagnétiquement sont  $(\bar{1}11)$ , ou  $\frac{1}{2} \frac{\bar{1}}{2} \frac{1}{2}$  pour ceux dont les plans ferromagnétiques sont  $(1\bar{1}\bar{1})$  etc. Lorsque le cristal est réglé en position de Bragg pour l'une de ces réflexions magnétiques, par exemple  $\frac{\bar{1}}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ , seuls les domaines correspondant à ce vecteur propagation diffractent, et on en obtiendra donc directement l'image. L'utilisation successive des quatre réflexions magnétiques de ce type fournit donc à la fois l'image et la caractérisation certaine de ces domaines q ou T. Les domaines S peuvent également être visualisés de façon directe, à l'aide de réflexions magnétiques du type  $\frac{3}{2} \frac{\bar{1}}{2} \frac{1}{2}$ , en utilisant la variation de l'intensité diffractée avec l'angle entre les moments magnétiques et le vecteur diffraction. Les études expérimentales ont confirmé, sur NiO, les conclusions des techniques indirectes [26].

La topographie aux neutrons a également permis d'observer des domaines qu'aucune autre technique ne révèle. Ainsi, dans  $\text{MnF}_2$ , les domaines à  $180^\circ$  (figure 5.28) peuvent être observés directement, et en l'absence de champ magnétique, à l'aide de

neutrons polarisés et d'une réflexion mixte, c'est-à-dire comportant des contributions nucléaire et magnétique. Qualitativement, on peut dire que la contribution nucléaire, sensible aux sites fluor, donne un repère permettant de distinguer les sommets et les centres de maille par la direction des voisins, et que la contribution magnétique permet alors de distinguer l'orientation des moments.

Quantitativement, la réflexion [210] présente, vers 20 K, des facteurs de structure nucléaire et magnétique pratiquement égaux en module : pour un domaine donné, ils s'ajoutent ou se retranchent suivant la polarisation du faisceau incident, conduisant à une intensité diffractée issue exclusivement de l'un des types de domaines. Le comportement de ces domaines à  $180^\circ$  a montré des effets de mémoire surprenants et mal compris lors de refroidissements successifs à travers la température de Néel [27].

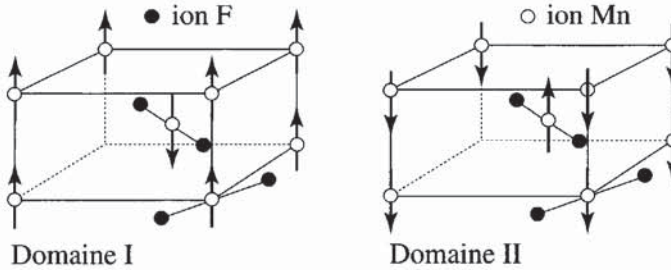


Figure 5.28 - Structure magnétique des deux domaines à  $180^\circ$  de  $\text{MnF}_2$

Les flèches représentent les moments magnétiques portés par les ions Mn des sommets et du centre de la maille, ces sites se distinguant par l'orientation des deux ions F voisins.

Les domaines de chiralité, associés à la rotation à droite ou à gauche des spins dans des héliomagnétiques, ont également été observés dans le terbium [27]. Dans ce cas, les réflexions magnétiques (réflexions "satellites") sont associées au vecteur propagation de l'hélice qui caractérise la répartition spatiale de l'orientation des moments magnétiques. Ce vecteur propagation est en général incommensurable, c'est-à-dire non égal à une fraction simple des vecteurs du réseau réciproque. Suivant le sens de la polarisation des neutrons incidents, les domaines à hélice droite ou à hélice gauche sont seuls en position de diffraction, et on en obtient donc à nouveau une image de façon très directe, et unique.

## **7. DE L'ÉTAT MACROSCOPIQUEMENT DÉSAIMANTÉ À L'ÉTAT SATURÉ : LES PROCESSUS D'AIMANTATION SOUS L'EFFET D'UN CHAMP EXTÉRIEUR**

Après avoir décrit aussi précisément que possible la configuration d'aimantation spontanée des substances ferromagnétiques, arrive le moment d'étudier l'effet d'un champ magnétique extérieur. Notre objectif, dans ce paragraphe, est de modéliser

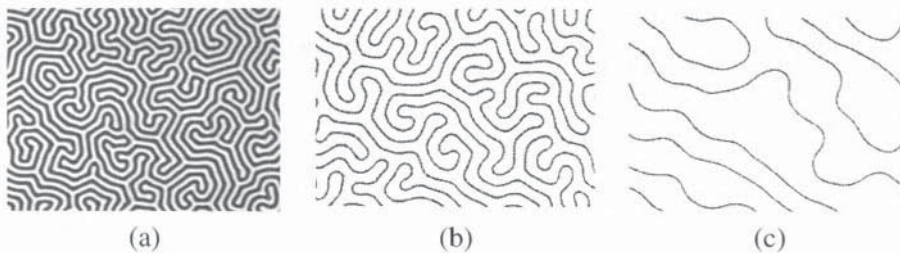
les lois de comportements de systèmes macroscopiquement désaimantés, soumis à un champ magnétique d'intensité croissante. Le système considéré est désaimanté dans l'état initial. La plus efficace des désaimantations consiste à porter la substance au-dessus de sa température de Curie, puis de laisser redescendre la température. Au cours du refroidissement, les germes des domaines d'orientations différentes apparaissent spontanément dans les systèmes, dès que les interactions d'échange imposent l'ordre ferromagnétique à courte distance. L'arrangement des domaines est tel que l'aimantation macroscopique reste nulle par compensation volumique.

### **7.1. EFFET D'UN CHAMP APPLIQUÉ PARALLÈLEMENT À L'AXE FACILE DANS UN SYSTÈME UNIAXE : AIMANTATION PAR DÉPLACEMENT DE PAROIS**

Nous considérons ici les systèmes uniaxes où l'anisotropie intrinsèque impose l'orientation des moments selon les deux directions (opposées) parallèles à l'axe préférentiel  $c$ .

#### **7.1.1. Résultat d'observations : grossissement des domaines parallèles au champ au détriment des autres**

Observons une couche monocristalline de grenat d'yttrium et de gallium, de quelques micromètres d'épaisseur, où la forte anisotropie uniaxiale surpasse l'anisotropie de forme et impose à l'aimantation, au sein de chaque domaine, de rester perpendiculaire à la couche. Nous avons déjà décrit le cas des couches minces, et leurs domaines enchevêtrés en labyrinthe (voir § 4.1). L'observation en microscopie optique d'un tel échantillon transparent permet de révéler les domaines par effet Faraday (voir § 6 et chapitre 13). Ils apparaissent respectivement en clair ou en sombre suivant que leur aimantation est dirigée vers le haut ou vers le bas.



**Figure 5.29 - Evolution d'une structure en domaines sous l'influence d'un champ magnétique**

Le champ est appliqué vers le haut normalement à la surface d'une plaquette ferrimagnétique présentant une anisotropie uniaxiale avec direction de facile aimantation perpendiculaire à son plan. Les domaines paraissent en clair ou en sombre selon que leur aimantation est dirigée vers le haut ou vers le bas ; (a)  $H_0 = 0$ , (b)  $H_0 = 4,2 \text{ kA/m}$ , (c)  $H_0 = 5,6 \text{ kA/m}$ .

En appliquant un champ magnétique normal à la plaquette et dirigé vers le haut, c'est-à-dire parallèle à l'une des directions de l'aimantation et antiparallèle à l'autre, on peut observer l'influence de ce champ. Les domaines dont l'aimantation est

parallèle au champ grandissent au rythme de la croissance du champ, au détriment des domaines d'aimantation antiparallèle (figure 5.29). Ces derniers (zone sombre) disparaissent totalement lorsque le champ appliqué atteint  $7 \text{ kAm}^{-1}$  ( $\sim 8,8 \text{ mT}$ ).

### 7.1.2. La loi de comportement : droite de champ démagnétisant

Considérons un monocristal uniaxe de forme ellipsoïdale, par exemple un monocristal de cobalt (lequel cristallise dans le système hexagonal, avec l'axe principal  $c$  d'ordre 6 comme axe de facile aimantation). En l'absence de champ appliqué, quoique ferromagnétique à la température ambiante, le matériau apparaît désaimanté. Il est subdivisé en domaines dans lesquels l'aimantation spontanée est orientée selon l'axe facile, dans un sens ou dans l'autre. On dit qu'il s'agit là d'un système à deux phases (une phase est définie comme la partie du matériau dont l'aimantation est polarisée dans un sens déterminé : c'est donc l'ensemble des domaines de même orientation). En l'absence d'aimantation résultante, chacune des deux phases occupe le même volume.

Pour paramétrer le phénomène de grossissement d'une phase aux dépens de l'autre, sous champ magnétique, nous désignerons par  $u$  la proportion du volume d'échantillon occupée par les domaines orientés dans le sens du champ appliqué (phase 1). La proportion en volume de domaines inverses (phase 2) sera évidemment  $1 - u$ , et en champ nul ( $H_0 = 0$ ) :  $u = 1 - u = 1/2$  (figure 5.30-a).

L'effet d'un champ très faible appliqué, est de faire grossir la proportion volumique de la phase 1 aux dépens de celle de la phase 2 (figure 5.30-b). Une aimantation résultante  $M$  apparaît, qui vaut :

$$M = [u - (1 - u)] M_s = (2u - 1) M_s \quad (5.42)$$

A cette valeur de l'aimantation,  $M$ , est associé un champ démagnétisant  $H_d$ . En admettant que ce champ soit égal à ce qu'il serait si l'aimantation  $M$  de l'échantillon était uniforme, et en supposant que l'échantillon soit de forme ellipsoïdale, on obtient :  $H_d = -NM$  ;  $H_d$  est antiparallèle à  $M$ .

La densité d'énergie magnétostatique du cristal associée à l'aimantation  $M$  s'écrit alors :

$$E_{\text{mag}} = (\mu_0/2) NM^2 = (\mu_0/2) N(2u - 1)^2 M_s^2 \quad (5.43)$$

tandis que l'énergie de couplage avec le champ extérieur  $H_0$ ,  $E_H = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0$  est :

$$E_H = -\mu_0 (2u - 1) M_s H_0 \quad (5.44)$$

La variation de l'aimantation macroscopique  $M$  sous champ est déterminée par les variations des deux termes d'énergie ci-dessus. On peut donc écrire l'énergie totale du système :

$$E_{\text{tot}} = E_0 + E_{\text{mag}} + E_H \quad (5.45)$$

où  $E_0$  contient tous les termes qui ne dépendent pas de  $u$  (on néglige en particulier l'énergie stockée dans les parois). Pour chaque valeur de  $H_0$ , l'état d'équilibre du

système est défini par  $\partial E_{\text{tot}}/\partial u = 0$ , ce qui conduit à  $(2u - 1)M_s = H_0/N$ , soit :  $M = H_0/N$ . On remarque que le champ interne ( $H = H_0 - NM$ ) reste nul durant tout ce processus.

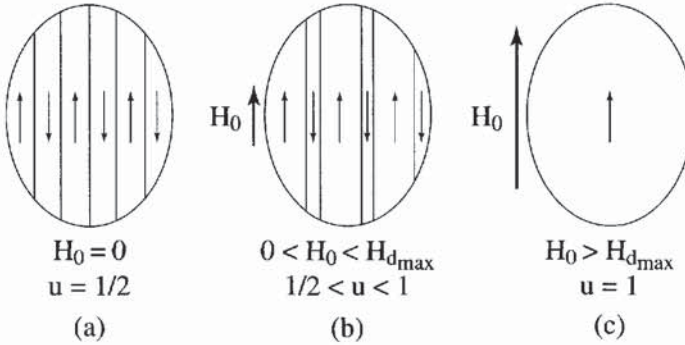


Figure 5.30 - Aimantation d'un cristal uniaxe par déplacement de parois

Ainsi, tant que les domaines d'aimantation antiparallèle au champ appliqué  $H_0$  n'ont pas totalement disparu (c'est-à-dire pour  $1/2 \leq u \leq 1$ , figure 5.30-b), l'aimantation macroscopique  $M$  de l'échantillon, mesurée selon la direction du champ, varie linéairement avec le champ appliqué, et la pente de la droite  $M(H_0)$  est égale à l'inverse du coefficient de champ démagnétisant : par exemple, la pente de la droite  $M(H_0)$ ,  $1/N$ , est égale à 3 pour un échantillon monocristallin de forme sphérique ( $N = 1/3$  dans toutes les directions). Cette droite, de pente  $1/N$ , est désignée comme la "droite de champ démagnétisant". Son équation avait déjà été obtenue au chapitre 2 (§ 1.3.5 et figure 2.18) sans que le mécanisme d'apparition de l'aimantation n'ait été envisagé.

Cette partie de la courbe d'aimantation ne dépend pas de  $M_s$ , c'est-à-dire de la nature du matériau magnétique considéré. Seule la forme de l'échantillon intervient. Ce n'est que lorsque la saturation est atteinte ( $u = 1$ , figure 5.30-c) que la nature du matériau ferromagnétique se manifeste par la valeur caractéristique de son aimantation spontanée  $M_s$ . On a alors  $M = (2u - 1)M_s = M_s$ , et le champ appliqué qui correspond à l'obtention de la saturation vaut  $NM_s$ . Tant que  $H_0 < NM_s$ , la variation d'aimantation induite par l'application du champ  $H_0$  est telle qu'elle permet à tout instant d'annuler le champ interne. Le champ  $NM_s$  est exactement égal (au signe près) au champ démagnétisant,  $H_{d\text{max}}$ , de l'échantillon monodomaine saturé. Lorsque le champ appliqué grandit au delà de cette valeur, l'aimantation  $M$  reste égale à  $M_s$  : c'est le phénomène de saturation. Au cas où une susceptibilité, superposée à la saturation, se manifeste, elle traduit un effet du champ sur le module des moments individuels.

La figure 5.31 présente les courbes d'aimantation mesurées selon l'axe de facile aimantation des composés uniaxes  $\text{SmCo}_5$  et  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ . Les valeurs de saturation différencient les deux composés, mais les droites de champ démagnétisant sont identiques, car les mesures ont été effectuées sur deux échantillons monocristallins, tous deux taillés en forme de sphères.

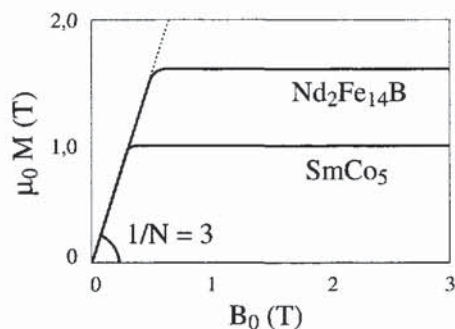


Figure 5.31 - Courbes d'aimantation des composés  $\text{SmCo}_5$  et  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  taillés sous forme de sphères

En pointillé, on a reporté la droite de pente  $1/N = 3$

### 7.1.3. Le mécanisme de déplacement de parois dans les systèmes parfaits où l'échange est dominant

Ainsi, lorsqu'une substance ferromagnétique est soumise à un champ orienté parallèlement à l'un de ses axes de facile aimantation, le changement de son aimantation macroscopique provient du grossissement des domaines d'aimantation parallèle au champ appliqué, au détriment des autres domaines. A l'échelle microscopique, ce grossissement résulte du déplacement des parois entre domaines contigus, dont les directions d'aimantation restent fixes.

Le déplacement des parois résulte du fait que celles-ci sont le lieu privilégié de l'existence d'un couple dû au champ et s'exerçant sur l'aimantation locale. Soumises à ce couple et cherchant à minimiser leur énergie interne (largeur sensiblement constante), les parois entre domaines antiparallèles réagissent en trois temps (figure 5.32-a, -b et -c), qui correspondent à :

- ◆ léger déplacement et perte de symétrie entraînant une augmentation de l'énergie de paroi  $\gamma$ ,
- ◆ déplacement d'une demi-distance interatomique et passage par la configuration symétrique d'énergie maximum  $\gamma + \Delta\gamma$  : configuration avec moments perpendiculaires à la direction d'anisotropie au centre de la paroi (voir figure 5.10-b, § 3.2),
- ◆ retour à la configuration symétrique initiale après déplacement de la paroi d'une distance interatomique  $a$ .

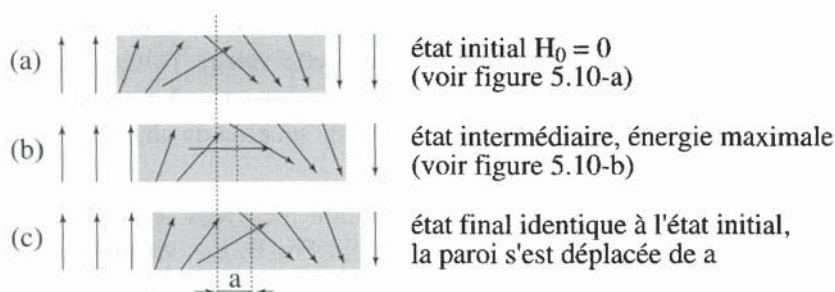


Figure 5.32 - Mécanisme de déplacement de paroi à  $180^\circ$

Si le système considéré ne contient aucun défaut, toutes les positions d'équilibre stable de la paroi, distantes d'une période du réseau dans la direction de propagation de la paroi, correspondent à la même valeur de son énergie interne  $\gamma$ . Pour passer d'une position d'équilibre stable à la suivante, il faut franchir la barrière d'énergie  $\Delta\gamma$  (figure 5.33), grâce à l'énergie apportée par le champ appliqué. Cette barrière est d'autant plus faible que la largeur de la paroi est plus grande. On montre que  $\Delta\gamma$  est proportionnel à  $e^{-\delta/a}$  [28, 29], où  $a$  est le paramètre du réseau dans la direction de propagation. Dans les systèmes magnétiques à température ambiante, l'échange est dominant ( $A_{\text{éch}} \gg K$ ) et les parois entre domaines sont des parois de Bloch, larges de plusieurs dizaines de distances interatomiques (voir figure 5.11) ; la barrière d'énergie qui tend à s'opposer au déplacement de paroi, est extrêmement faible ; on peut considérer que les parois sont totalement libres de réagir à la moindre pression exercée sur elles par le champ.

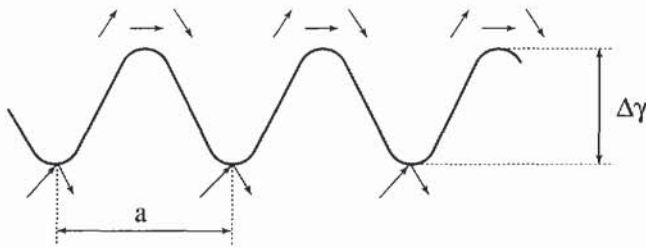


Figure 5.33 - Barrière d'énergie de paroi intrinsèque

### *Pression équivalente exercée par le champ sur une paroi*

Le couple local, appliqué aux moments de la paroi, peut être considéré comme l'équivalent d'une pression, s'exerçant à plus grande échelle sur la paroi toute entière.

Lorsqu'un champ d'induction  $B_0 = \mu_0 H_0$  est appliqué selon l'une des directions de facile aimantation d'un système ferromagnétique subdivisé en domaines, provoquant le déplacement  $\Delta x$  d'une paroi donnée (figure 5.34), la variation de moment,  $\Delta \mathbf{m}$ , consécutive au déplacement de cette paroi :  $\Delta \mathbf{m} = (\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_j) \Delta x$  (par unité de surface de paroi), est limitée au volume balayé par la paroi. Cela correspond à une variation d'énergie :  $\Delta E = -\Delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0 = -[(\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_j) \cdot \mathbf{B}_0] \Delta x$  (par unité de surface de paroi).

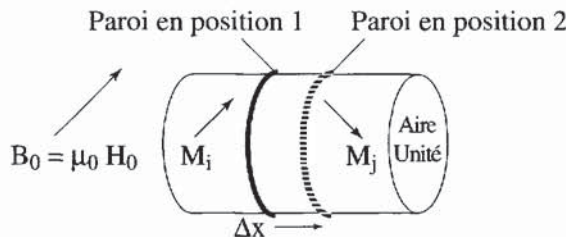


Figure 5.34 - Pression exercée sur une paroi, après application de  $B_0 // M_i$

Tout se passe comme si la paroi se trouvait soumise, de la part du champ, à une pression équivalente  $\Pi$  donnée par :

$$\Pi = (M_i - M_j) \cdot B_0 \tag{5.46}$$

Puisque le déplacement de la paroi ne met en jeu aucun frottement appréciable, il peut se poursuivre tant que règne un champ au sein de la substance magnétique, c'est-à-dire jusqu'à ce que le champ interne s'annule.

### 7.1.4. Le mécanisme de déplacement de parois dans les systèmes parfaits à très forte anisotropie intrinsèque

Dans les systèmes où l'énergie d'anisotropie magnétocristalline est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'échange, les parois sont très étroites et l'énergie qui est stockée en leur sein satisfait aux relations (5.31) et (5.32) (voir § 3.2 de ce chapitre).

Si l'anisotropie l'emporte sur l'échange, la paroi ne s'étend plus que sur une seule distance interatomique. Alors que la valeur du champ de propagation intrinsèque  $H_p$  est négligeable pour les parois de Bloch larges, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, elle grandit progressivement lorsque la paroi devient plus étroite, c'est-à-dire que le rapport  $K/A_{\text{éch}}$  croît (figure 5.35). La valeur limite théorique du champ de propagation obtenue pour  $K/A_{\text{éch}}$  très grand est celle du champ moléculaire local,  $H_{\text{mol}}^{\text{local}}$ , agissant au centre de la paroi. Les moments magnétiques

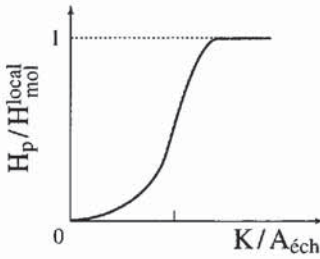


Figure 5.35 - Influence des paramètres du matériau ( $K, A_{\text{éch}}$ ) sur le champ de propagation [29]

orientés antiparallèlement au champ se renversent alors les uns après les autres ; le champ de propagation intrinsèque,  $H_p$ , ne dépend pas de l'anisotropie. Le composé  $Dy_3Al_2$ , où le rapport  $K/A_{\text{éch}}$  varie fortement avec la température, a permis de mettre en évidence expérimentalement l'évolution qui vient d'être décrite. A 30 K, le

processus d'aimantation de ce composé est classique : la loi d'approche à la saturation est une simple droite de champ démagnétisant de pente égale à  $1/N$ . A 4,2 K, le champ  $B_0$  – toujours appliqué selon l'axe de facile aimantation – ne produit presque aucune variation de l'aimantation tant qu'il n'atteint pas 2,1 T. Au-delà de cette valeur seuil, correspondant au champ de propagation intrinsèque, l'aimantation croît brutalement jusqu'à la saturation (figure 5.36).

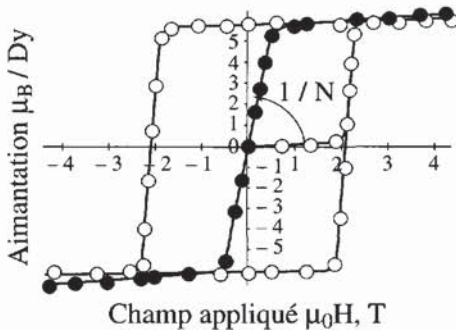
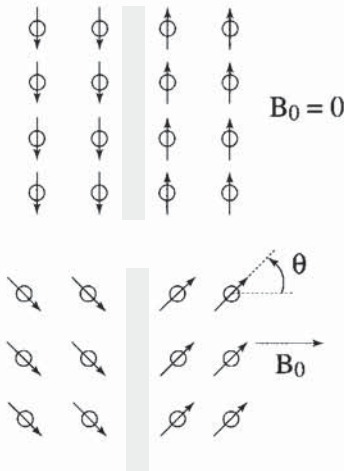


Figure 5.36 - Cycles d'hystérésis du composé  $Dy_3Al_2$  à 4,2 K (o) et à 30 K (•) [4]

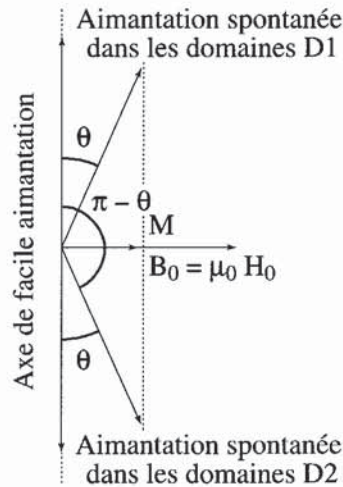
**7.2. EFFET DU CHAMP APPLIQUÉ PERPENDICULAIREMENT À L'AXE FACILE DANS UN SYSTÈME UNIAXE : AIMANTATION PAR ROTATION DES MOMENTS**

Dans ce paragraphe, nous considérons toujours un système uniaxe, mais le champ est appliqué perpendiculairement à l'axe *c* de facile aimantation. Les moments individuels, qu'ils appartiennent à l'un ou à l'autre type de domaines, sont soumis, de la part du champ extérieur appliqué,  $B_0$ , à un couple qui tend à les aligner dans la direction du champ (figure 5.37). Le champ est appliqué de façon symétrique sur les deux types de domaines. Ils n'ont donc aucune raison d'être différenciés.

A l'équilibre, sous l'effet de  $B_0 = \mu_0 H_0$ , les aimantations de chacun des deux domaines ont tourné du même angle  $\theta$  par rapport à l'axe de facile aimantation le long duquel elles étaient alignées avant l'application du champ (figure 5.38).



**Figure 5.37 - Le champ appliqué perpendiculairement à l'axe facile fait tourner les moments des domaines**



**Figure 5.38 - Les aimantations des deux types de domaines évoluent symétriquement**

Il en résulte l'apparition d'une aimantation macroscopique  $M$ , telle que  $M = M_s \sin \theta$ , dans la direction du champ appliqué. Les composantes suivant  $\pm c$  de l'aimantation dans chacun des domaines se compensent macroscopiquement car les deux domaines – dont aucun n'est favorisé – occupent chacun une moitié du volume de l'échantillon. En présence du champ extérieur, l'énergie totale du système  $F_t$  contient trois termes, dans lesquels intervient l'angle  $\theta$  (les autres sont regroupés dans un seul terme  $F_0$ ) : le terme d'énergie d'anisotropie  $F_A = K_1 \sin^2 \theta$ , le terme d'énergie magnétostatique  $F_m = (\mu_0/2) N M_s^2 \sin^2 \theta$  (où  $N$  est le coefficient de champ démagnétisant selon  $H$ ), et le terme de couplage avec le champ  $F_B = -M_s B_0 \sin \theta$ . L'état d'équilibre du système est défini par  $\partial F_t / \partial \theta = 0$ , soit :

$$(2 K_1 + \mu_0 N M_s^2) \sin \theta \cos \theta - M_s B_0 \cos \theta = 0,$$

ce qui conduit à la valeur d'équilibre :  $\theta = \text{Arcsin}\{M_s B_{\text{ext}} / (2 K_1 + \mu_0 N M_s^2)\}$  qui correspond au minimum d'énergie, et comme  $M = M_s \sin \theta$ , cela signifie que :

$$M = \frac{M_s H_0}{(2K_1 / \mu_0 M_s) + N M_s} \quad (5.47)$$

La courbe  $M(H_0)$  représentative de cette équation est présentée sur la figure 5.39. A champ faible, la variation de  $M$  est linéaire en  $H_0$  avec une pente égale à :

$$dM/dH_0 = (N + 2K_1 / \mu_0 M_s^2)^{-1} \quad (5.48)$$

L'aimantation atteint sa valeur à saturation,  $M_s$ , lorsque le champ atteint la valeur critique  $H_s$  définie par l'équation :

$$H_s = N M_s + 2K_1 / \mu_0 M_s \quad (5.49)$$

Pour  $H \geq H_s$ , l'état d'équilibre du système correspond à  $\cos\theta = 1$ , soit  $\theta = \pi/2$ , l'aimantation reste alors saturée :  $M = M_s$ .

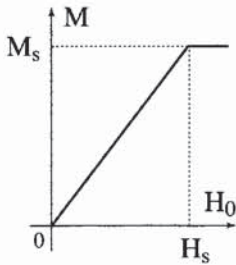


Figure 5.39 - Le champ seuil  $H_s$  marque la fin de la rotation

Ainsi le champ seuil,  $H_s$ , correspond à la valeur que doit atteindre le champ extérieur pour aligner tous les moments magnétiques de la substance dans sa propre direction. Ce champ doit à la fois, compenser le champ démagnétisant lié à l'apparition d'une aimantation macroscopique, et créer un couple égal au couple de rappel de l'anisotropie. Il est souvent commode de considérer l'anisotropie au travers d'un champ fictif équivalent  $H_A$ , qui correspond au champ appliqué selon la direction de difficile aimantation et qui contrebalance le couple dû à l'anisotropie. Ce champ fictif est dénommé *champ d'anisotropie* et vaut (voir chapitre 3, § 2.4.1.1) :

$$H_A = 2K_1 / \mu_0 M_s \quad (5.50)$$

Le mécanisme par lequel l'aimantation macroscopique apparaît et se développe dans cette configuration de champ appliqué est la simple rotation des moments magnétiques individuels. C'est un mécanisme réversible.

### 7.3. CHAMP APPLIQUÉ OBLIQUEMENT PAR RAPPORT À L'AXE FACILE

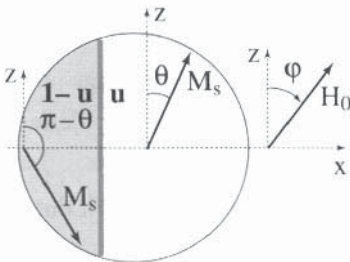


Figure 5.40 - Champ appliqué hors de la direction de facile aimantation

Quand le champ, appliqué à un monocristal uniaxe désaimanté, fait avec l'axe facile un angle  $\varphi$  quelconque, différent de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (voir figure 5.40), les mécanismes de déplacement de parois et de rotation d'aimantation interviennent tous les deux dans le processus d'aimantation. La composante du champ selon l'axe facile  $Oz$  donne lieu au déplacement des parois, avec accroissement de la proportion en volume ( $u$ ) des domaines dont l'aimantation est approximativement alignée selon cette composante du champ.

est approximativement alignée selon cette composante du champ.

Le déplacement se poursuit jusqu'à annuler le champ interne selon l'axe facile. On a donc :  $H_0 \cos \varphi = (2u - 1)NM_s \cos \theta$ . Le champ interne est donc dirigé selon Ox et les moments magnétiques dans un domaine sont orientés symétriquement par rapport à Ox de ceux dans l'autre domaine. On en déduit :

$$M_z = [u - (1 - u)]M_s \cos \theta = (2u - 1)M_s \cos \theta \quad \text{et} \quad M_x = [u + (1 - u)]M_s \sin \theta = M_s \sin \theta.$$

Pour une valeur donnée de  $H_0$  ( $H_0 \cos \varphi$ ,  $H_0 \sin \varphi$ ), la densité d'énergie du système s'écrit :

$$E = K_1 \sin^2 \theta - \mu_0 M_s \sin \theta \sin \varphi - \mu_0 (2u - 1)M_s H_0 \cos \theta \cos \varphi + (\mu_0/2)NM_s^2 \sin^2 \theta + (\mu_0/2)N(2u - 1)^2 M_s^2 \cos^2 \theta$$

et l'équilibre correspond à la valeur de  $\theta$  pour laquelle  $dE/d\theta = 0$ . Pour  $\theta \neq \pi/2$ , la combinaison des équations  $H_z = 0$  et  $dE/d\theta = 0$  conduit à :

$$\sin \theta = H_0 \sin \varphi / \{NM_s + (2K_1/\mu_0 M_s)\}.$$

L'aimantation macroscopique,  $M_H$ , mesurée dans la direction du champ appliqué s'obtient par :  $M_H = \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0 / H_0 = M_s [\sin \theta \sin \varphi + (2u - 1) \cos \theta \cos \varphi]$ .

En remplaçant  $\sin \theta$  et  $u$  par leurs expressions trouvées plus haut, on obtient (tant que  $u \leq 1$ ) :

$$M_H = H_0 \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{N + (2K_1/\mu_0 M_s^2)} + \frac{\cos^2 \varphi}{N} \right] \quad (5.51)$$

Jusqu'au champ  $H_s$  pour lequel  $u = 1$ , la caractéristique  $M(H_0)$  est une droite dont la pente  $\alpha$  vaut :

$$\alpha = \frac{\sin^2 \varphi}{N + (2K_1/\mu_0 M_s^2)} + \frac{\cos^2 \varphi}{N} \quad (5.52)$$

- ◆ pour  $\varphi = 0$  (champ magnétique parallèle à l'axe facile), on retrouve la pente  $1/N$ ,
- ◆ pour  $\varphi = \pi/2$  (champ perpendiculaire à la direction de facile aimantation), on retrouve aussi le résultat déjà obtenu :  $\alpha_{(\pi/2)} = \{N + (2K_1/\mu_0 M_s^2)\}^{-1}$ ,
- ◆ dans le cas général, où  $0 < \varphi < \pi/2$ , la pente  $\alpha$  est comprise entre ces 2 valeurs (voir figure 5.41). Le champ seuil,  $H_s$ , correspond au point où le matériau constituant l'échantillon devient monodomaine, le processus d'aimantation par déplacement des parois étant terminé ( $u = 1$ ). En portant  $u = 1$  dans la relation donnée plus haut, on obtient la composante selon Oz de  $H_s$ ,  $H_s \cos \varphi = NM_s \cos \theta$ ,

$$\text{d'où : } H_s = \frac{NM_s}{\cos \varphi} \cos \theta = \frac{NM_s}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \frac{H_0^2 \sin^2 \varphi}{[NM_s + (2K_1/\mu_0 M_s)]^2}}, \quad \text{où } H_0 = H_s$$

$$\text{soit : } H_s = M_s \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{N^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{[N + (2K_1/\mu_0 M_s^2)]^2}} \quad (5.53)$$

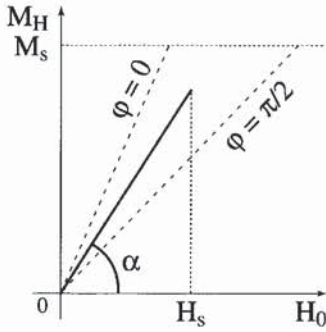


Figure 5.41 - Processus d'aimantation ( $H_0 < H_s$ )

Pour  $H_0 = H_s$ , l'aimantation au sein de l'échantillon n'est pas colinéaire au champ appliqué.

Lorsque le champ appliqué  $H_0$  croît au-delà de  $H_s$ , l'aimantation qui est maintenant égale à  $M_s$  tourne jusqu'à s'aligner selon  $H_0$ . Le seul mécanisme d'aimantation qui intervient alors est la rotation des moments individuels. L'énergie totale du système contient deux termes dans lesquels intervient l'orientation  $\theta$  de  $M_s$  : le terme d'anisotropie et le terme d'interaction avec le champ appliqué (si l'échantillon n'est pas sphérique,

l'interaction avec le champ démagnétisant donne lieu à un terme d'anisotropie, lui aussi fonction de  $\theta$  : cet effet est négligé ici). Cette énergie s'écrit :

$$F_{\text{tot}} = F_0' + (\mu_0/2) N M_s^2 + K_1 \sin^2\theta - \mu_0 M_s H_0 \cos(\varphi - \theta)$$

ou, en groupant tous les termes indépendants de  $\theta$  dans  $F_0$  :

$$F_{\text{tot}} = F_0 + K_1 \sin^2\theta - \mu_0 M_s H_0 \cos(\varphi - \theta).$$

L'équilibre nécessite  $\partial F_1 / \partial \theta = 0$ , soit  $K_1 \sin 2\theta - \mu_0 M_s H_0 \sin(\varphi - \theta) = 0$ , d'où :

$$H_0 = K_1 \sin 2\varphi / \mu_0 M_s \sin(\varphi - \theta) \tag{5.54}$$

Cela signifie que  $\theta \rightarrow \varphi$ , lorsque  $H_0 \rightarrow \infty$ . La loi d'approche à la saturation est une loi asymptotique (figure 5.42), contrairement aux cas précédemment envisagés (champ appliqué parallèlement ou perpendiculairement à l'axe préférentiel).

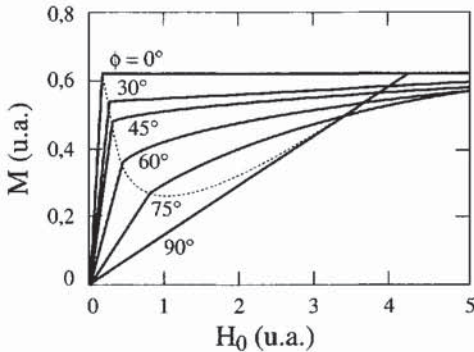


Figure 5.42 - Processus d'aimantation pour différentes orientations du champ magnétique

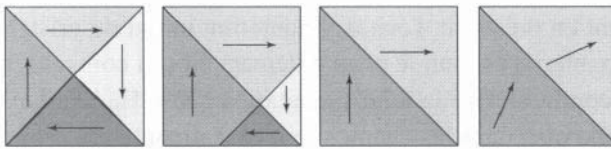
La courbe en pointillés représente le lieu des seuils pour lesquels l'échantillon devient monodomaine ( $H_0 = H_s$ ).

### 7.4. SYSTÈMES MONOCRISTALLINS CUBIQUES (RÈGLE DES PHASES DE NÉEL)

Sous l'effet du champ appliqué, le processus d'aimantation macroscopique des monocristaux cubiques met en œuvre les deux mécanismes présentés plus haut : déplacement de parois et rotation de l'aimantation dans les domaines. Généralement les deux mécanismes interviennent l'un après l'autre, car les mécanismes de déplacement de parois en champs faibles permettent d'annuler strictement le champ interne.

Sous champ très faible, le mécanisme de déplacement des parois conduit au grossissement des domaines dont la direction est la plus proche du champ, au détriment des autres. Le mécanisme de rotation de l'aimantation intervient dès que le déplacement de paroi ne permet plus d'annuler le champ interne dans toutes les directions. Le processus est résumé dans la figure 5.43.

Dans un système cubique en champ nul, le nombre de phases (domaines d'orientations différentes) en présence dépend de l'ordre de symétrie des axes de facile aimantation : 6 phases correspondent aux trois axes de symétrie d'ordre 4, 8 phases aux 4 axes d'ordre 3 et 12 phases aux 6 axes d'ordre 2. Les volumes occupés par ces phases sont équivalents dans l'état désaimanté.



**Figure 5.43 - Processus d'aimantation d'un monocristal de symétrie cubique dont les axes quaternaires sont de facile aimantation**

Après déplacement des parois à  $90^\circ$ , il ne subsiste plus que deux domaines. Lorsque le champ continue de croître, une rotation des moments intervient vers la direction  $[110]$  selon laquelle le champ est appliqué.

Dans le cas le plus quelconque, où la direction du champ n'est pas une direction de symétrie du cristal, une seule des phases en présence est privilégiée. Si le champ  $H_0$  est appliqué selon une direction de symétrie du cristal, plusieurs phases peuvent être privilégiées. Considérons, par exemple, un monocristal d'une substance magnétique dont le réseau cristallin appartient au système cubique, et supposons que les axes de type  $\langle 100 \rangle$  sont de facile aimantation (c'est le cas du fer). Dans un tel système, Néel [30] a exprimé les remarques faites plus haut sous la forme suivante :

- ◆ Lorsque le champ interne est nul, les six phases peuvent subsister en équilibre les unes avec les autres.
- ◆ Si le champ interne n'est pas nul, on définit sa direction par les cosinus directeurs  $p$ ,  $q$  et  $r$ . Pour  $p > q \geq r$ , les équilibres entre phases sont impossibles : le cristal ne renferme qu'une seule phase.
- ◆ Pour qu'il y ait équilibre entre deux phases, la direction du champ interne doit être telle que deux de ses cosinus directeurs soient égaux, le troisième étant plus petit que les deux autres.
- ◆ Pour qu'il y ait équilibre entre trois phases, il faut que le champ interne soit parallèle à un axe ternaire.

Dans les systèmes cubiques, on peut donc distinguer quatre modes d'aimantation suivant le nombre de phases en présence et l'orientation du champ interne (règle des phases de Néel). Le tableau 5.1 résume les caractéristiques de ces modes (numérotés de I à IV). En général, la courbe d'aimantation d'un monocristal se subdivise

en plusieurs portions se raccordant en des points anguleux, correspondant chacune à un mode d'aimantation différent (figure 5.44).

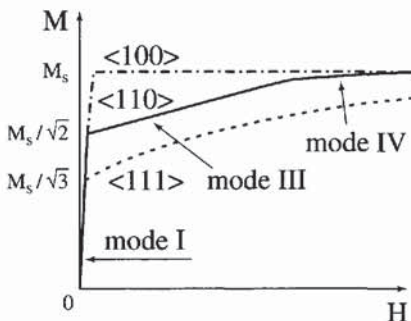
**Tableau 5.1 - Règle des phases pour un cristal de symétrie cubique dont les directions faciles sont portées par les axes quaternaires**

Mode d'aimantation	Champ interne		Nombre des phases
	Intensité	Cosinus directeurs	
I	$H_i = 0$		6
II	$H_i > 0$	$p = q = r$	3
III	$H_i > 0$	$p = q \geq r$	2
IV	$H_i > 0$	$p > q \geq r$	1

Lorsque les six phases sont en présence, l'état d'aimantation initial du cristal appartient au mode I. Le champ interne est nul, le champ démagnétisant compensant juste le champ appliqué. Cette condition fixe la loi d'aimantation :  $M = H_0/N$  (dans le cas d'un ellipsoïde), qui rappelle que, dans les champs faibles, l'aimantation est parallèle au champ et lui est proportionnelle. Sa variation est indépendante de l'orientation du champ extérieur, elle ne dépend que de la forme extérieure de l'échantillon. Ce mode d'aimantation, au cours duquel les volumes relatifs des différentes phases se modifient par des déplacements de parois, dure tant qu'il y a plus de trois phases en présence. L'aimantation  $M^*$  atteinte en fin de mode I est donnée par :

$$M^* = M_s / (1 + m + n) \quad (5.55)$$

si  $l$ ,  $m$  et  $n$  sont les cosinus directeurs de la direction du champ appliqué  $H_0$  [31].



**Figure 5.44 - Courbes d'aimantation d'un cristal de symétrie cubique**

On passe ensuite au mode II, ou directement au mode III, ou même au mode IV. Si le champ est appliqué selon un axe ternaire, le mode II commence pour  $M^* = M_s / \sqrt{3}$ , tandis que si le champ est appliqué selon un axe binaire, le mode III commence à  $M^* = M_s / \sqrt{2}$  (figure 5.44). Dans tous les cas, l'aimantation obtenue après avoir ramené le champ à zéro, à partir de la saturation, sans qu'aucune création de paroi n'intervienne, est appelée *aimantation rémanente*,  $M_r$ .

## 7.5. PROCESSUS D'AIMANTATION DANS LES SYSTÈMES POLYCRISTALLINS

Un matériau polycristallin est constitué d'une assemblée de monocristaux de petite taille, orientés au hasard. Si l'on fait l'hypothèse que les cristallites sont indépendants, les propriétés attendues sont directement déduites de celles des monocristaux, par un mélange statistique. Ainsi l'aimantation rémanente  $M_r$  peut être théoriquement

reliée à l'aimantation spontanée  $M_s$ . Les valeurs obtenues dépendent de la structure cristalline et du type d'axes de facile aimantation. Dans le cas des systèmes cubiques [32],  $M_r/M_s = 0,83$  si les axes quaternaires sont de facile aimantation et  $M_r/M_s = 0,86$  si ce sont les axes ternaires. Dans le cas de systèmes uniaxes, où l'axe préférentiel est de facile aimantation,  $M_r/M_s = 0,5$ .

La loi d'aimantation d'un polycristal cubique (figure 5.45) se confond avec la droite de champ démagnétisant tant que le mécanisme de déplacement de parois est mis en œuvre seul, c'est-à-dire jusqu'à  $M = M_r$ . Ensuite, la loi d'aimantation théorique est la moyenne des courbes d'aimantation du cristal pour les différentes orientations du champ par rapport à ses axes cristallographiques. La courbe d'aimantation d'un polycristal uniaxe est aussi la somme des courbes d'aimantation des cristaux constitutifs, orientés au hasard par rapport au champ

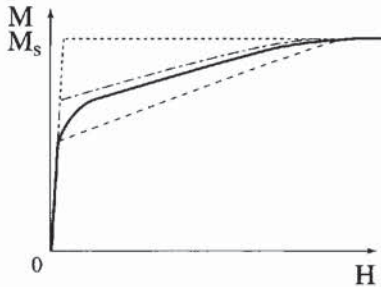


Figure 5.45 - Courbe d'aimantation d'un matériau polycristallin de symétrie cubique

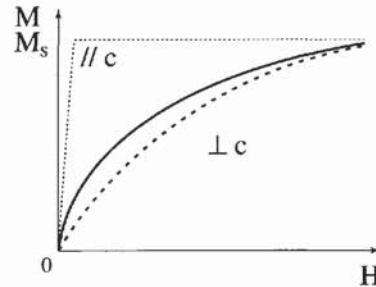


Figure 5.46 - Courbe d'aimantation d'un matériau polycristallin de symétrie uniaxe

En pointillé, les courbes relatives au monocristal.

Contrairement à celle des polycristaux cubiques, la loi d'aimantation dans ce cas ne fait pas apparaître la droite de champ démagnétisant, fonction de la seule forme de l'échantillon (figure 5.46).

En effet, le mécanisme de rotation de l'aimantation au sein des domaines entre en jeu dès l'origine, pour tous les cristallites dont l'axe facile n'est pas parallèle au champ (voir § 7.2 et 7.3). En champs intenses, la loi d'approche à la saturation dans les polycristaux est déterminée en principe par la réaction de l'anisotropie au couple exercé par le champ appliqué. Ce couple vaut  $M_s H \sin \psi$ , si  $\psi$  est l'angle entre le champ et l'aimantation  $M_s$  d'un cristallite monodomaine (figure 5.47).

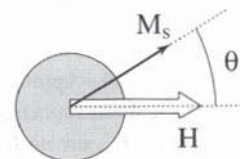


Figure 5.47  
Cristallite monodomaine soumis au champ interne

Au voisinage de la saturation,  $\psi$  est petit. On peut donc écrire :  $M_s H \psi = \Gamma_A$ , si  $\Gamma_A$  désigne le couple de rappel dû à l'anisotropie, soit encore :  $\psi = \Gamma_A / M_s H$ . D'autre part,  $M_H = M_s \cos \psi = M_s (1 - \psi^2 / 2 + \dots)$ .

$\Gamma_A$  vaut  $K\cos^2\psi$  et peut être considéré comme constant pour  $\psi$  petit, d'où :  $M_H = M_s(1 - b/H^2 + \dots)$  avec  $b = \Gamma_A^2/2M_s^2$ . L'existence d'un tel terme a été vérifiée, et les valeurs de  $\Gamma_A$  déduites sont de l'ordre de grandeur attendu [33].

Théoriquement, le développement de  $M_H$  ne peut pas contenir de terme en  $a/H$ , car la présence de ce terme conduit à une énergie d'aimantation infinie, comme on peut le voir si l'on écrit cette énergie :

$$W = \mu_0 \int_M^{M_s} HdM = \mu_0 \int_H^\infty H \frac{dM}{dH} dH = \mu_0 \int_H^\infty M_s \left( \frac{a}{H} + 2 \frac{b}{H^2} + \dots \right) dH,$$

soit :

$$W = M_s \left( a \log H \Big|_H^\infty - \left| \frac{2b}{H} \right|_H^\infty + \dots \right) \rightarrow \infty.$$

Pourtant, l'expérience montre que la loi d'approche à la saturation est souvent décrite par une fonction du champ de la forme :

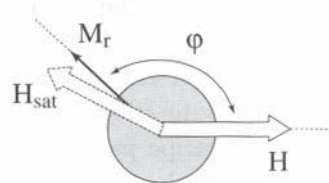
$$M_H = M_s \{ 1 - (a/H) - b/H^2 \} + \chi H \quad (5.56)$$

Le terme  $\chi H$ , que l'on dit souvent correspondre à une "susceptibilité superposée", provient de l'augmentation du module de  $M_s$ , pour des raisons liées à la définition quantique des moments (voir chapitre 8). Le terme en  $(a/H)$  n'est influent que dans les champs intermédiaires. Néel l'attribue à des effets de défauts [34] au sein des cristallites et surtout aux joints de grains.

## 8. RETOURNEMENT DE L'AIMANTATION À PARTIR DE L'ÉTAT SATURÉ ET COERCITIVITÉ

Nous analysons ici le comportement d'un système ferromagnétique qui, après saturation sous champ très élevé, est soumis à un champ inverse, faisant avec la direction de l'aimantation rémanente un angle  $\varphi$  compris entre  $\pi/2$  et  $\pi$  (figure 5.48), si bien que le champ tend à provoquer le retournement de l'aimantation.

**Figure 5.48 - Application d'un champ dans le demi-espace opposé au champ initial  $H_{sat}$  sur un ferromagnétique aimanté ( $\pi/2 \leq \pi$ )**



L'étude des mécanismes de renversement d'aimantation permet de comprendre les propriétés de plusieurs types de matériaux magnétiques, notamment les aimants permanents et les mémoires magnétiques. En préambule à cette étude, rappelons que lorsque le champ initial de saturation est progressivement réduit, les aimantations locales se réorientent de façon réversible vers la direction de facile aimantation la plus proche. Pour un monocristal aimanté selon une direction de facile aimantation, l'aimantation rémanente  $M_r$  obtenue en champ interne nul, est

égale à l'aimantation spontanée,  $M_s$ . De façon plus générale, le rapport  $M_r/M_s$  est donné par les relations établies au paragraphe 7-5. Dès que le champ extérieur devient plus faible que le champ démagnétisant, le champ interne dans la matière est de direction opposée à l'aimantation. C'est alors qu'interviennent les mécanismes de renversement d'aimantation.

### 8.1. RÉVERSIBILITÉ OU IRRÉVERSIBILITÉ ?

Les phénomènes décrits précédemment sont-ils - ou non - réversibles ? On pourrait s'attendre à ce que le premier effet de l'apparition d'un champ interne opposé à l'aimantation soit de redéplacer réversiblement les parois en sens inverse pour conduire aux configurations d'aimantation de plus basse énergie. Mais pour cela, il faut qu'il existe des parois, ce qui n'est pas le cas à la saturation. Ainsi, la première étape consiste à créer un petit *noyau* d'aimantation inverse, et naturellement la paroi qui lui est associée. Nous montrerons au § 8.3.1 que cette *nucléation* entraîne, dans le cas des systèmes magnétiques sans défaut, une élévation d'énergie globale supérieure à celle qu'impliquent les processus envisagés ci-après (§ 8.2 et 8.3). Le comportement d'un système ferromagnétique amené à la saturation devient donc irréversible quand le champ interne change de signe.

### 8.2. RETOURNEMENT PAR ROTATION COLLECTIVE UNIFORME DES MOMENTS (ROTATION DE L'AIMANTATION À SATURATION) : MODÈLE DE STONER-WOHLFARTH [35]

En raison de sa simplicité, le modèle de Stoner-Wohlfarth sert en général de référence aux autres descriptions théoriques possibles du renversement d'aimantation. On fait l'hypothèse que toute variation d'aimantation ne peut résulter que d'une rotation à l'unisson des moments magnétiques. Attention ! dans ce paragraphe, l'aimantation rémanente (considérée comme point de départ) est définie comme l'aimantation en champ *appliqué* nul (c'est-à-dire en champ *interne* faiblement inverse).

#### 8.2.1. Présentation et mise en équation du système modèle

Soit un monocristal ferromagnétique de symétrie uniaxe, dont l'axe  $c$  est de facile aimantation. Taillons dans ce monocristal un ellipsoïde de révolution allongé dont le grand axe  $Oz$  soit colinéaire à  $c$  : anisotropie magnétocristalline et anisotropie de forme agissent dans le même sens. L'orientation de l'axe  $Oz$  est choisie de telle sorte que  $(Oz, \mathbf{H}_{\text{sat}}) \leq \pi/2$  (fig. 5.49).

Après avoir été saturée, l'aimantation revient le long de  $Oz$  : elle est positive et sa valeur est égale à celle de l'aimantation spontanée,  $M_s$ . L'étude du renversement d'aimantation se réduit à définir le comportement de

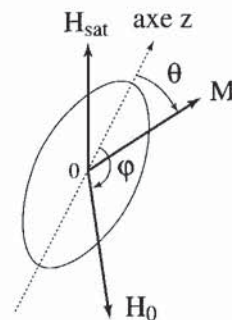


Figure 5.49 - Monocristal uniaxe taillé en ellipsoïde

l'aimantation soumise à l'action d'un champ magnétique extérieur croissant,  $H_0$ , faisant avec elle un angle initialement obtus. Les conventions utilisées pour noter les angles sont celles de la figure 5.49.

L'équilibre du système met en jeu trois densités d'énergie :

- ◆ l'énergie d'anisotropie magnétocristalline (limitée ici au second ordre) :

$$E_A = K_1 \sin^2\theta \quad (5.57)$$

- ◆ l'énergie magnétostatique (ou de champ démagnétisant), qui est à l'origine de l'anisotropie de forme (voir équation 5.40) :

$$E_{\text{dip}} = \frac{1}{2} \mu_0 [ N_{//} M_s^2 + (N_{\perp} - N_{//}) M_s^2 \sin^2\theta ] \quad (5.58)$$

où  $N_{\perp}$  et  $N_{//}$  sont les coefficients de champ démagnétisant relatifs aux directions respectivement perpendiculaire et parallèle à l'axe Oz. Lorsque  $\theta \neq 0$ , ces deux termes d'anisotropie élèvent l'énergie du système : ils s'opposent donc à la rotation de l'aimantation en constituant une barrière d'énergie.

- ◆ l'énergie de couplage avec le champ appliqué :

$$E_H = -\mu_0 M_s H_0 \cos(\varphi - \theta) \quad (5.59)$$

Ce terme abaisse d'autant plus l'énergie du système que les moments sont plus proches de la direction de  $H_0$ .

Les conditions d'équilibre stable, correspondant à une configuration  $[\varphi, \theta]$  donnée, s'obtiennent en minimisant l'énergie totale  $E = E_A + E_D + E_H$ . Elles sont donc solution du système d'équations suivant :

$$dE/d\theta = \mu_0 M_s H_0 \sin(\theta - \varphi) + K' \sin 2\theta = 0 \quad (5.60)$$

$$d^2E/d\theta^2 = \mu_0 M_s H_0 \cos(\theta - \varphi) + 2K' \cos 2\theta > 0 \quad (5.61)$$

où  $K' = K_1 + K_f = K_1 + \mu_0 (N_{\perp} - N_{//}) M_s^2 / 2$  définit une anisotropie totale équivalente, somme de l'anisotropie intrinsèque (paramètre  $K_1$ ) et de l'anisotropie de forme (paramètre  $K_f = \mu_0 (N_{\perp} - N_{//}) M_s^2 / 2$ ).

### 8.2.2. Champ appliqué antiparallèlement à $M_r$

#### Loi de comportement de l'aimantation M

Lorsque  $H_0$  est appliqué antiparallèlement à  $M_r$ , soit  $\varphi = \pi$ , avec  $H_0$  supposé positif, les équations (5.60) deviennent :  $\partial E/d\theta = 2K' \sin \theta \cos \theta - \mu_0 M_s H_0 \sin \theta = 0$ , et  $\partial^2 E/d\theta^2 = 2K' \cos 2\theta - \mu_0 M_s H_0 \cos \theta > 0$ .  $\partial E/d\theta$  s'annule pour  $\sin \theta = 0$  ou  $\cos \theta = \mu_0 M_s H_0 / 2K'$ .  $\theta$  étant compris entre zéro et  $\pi$ , trois solutions sont possibles  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  et  $\theta = \arccos(\mu_0 M_s H_0 / 2K')$ .

Pour  $\theta = \pi$ ,  $\partial^2 E/d\theta^2$  est positif. L'alignement de l'aimantation selon le champ correspond toujours, naturellement, à un minimum d'énergie.

Tant que  $H_0 < 2K' / \mu_0 M_s$ ,  $\partial^2 E/d\theta^2 > 0$  pour la solution  $\theta = 0$ , et  $\partial^2 E/d\theta^2 < 0$  pour la solution  $\theta = \arccos(\mu_0 M_s H_0 / 2K')$  qui correspond donc à un maximum

d'énergie. Ainsi la configuration initiale d'aimantation antiparallèle au champ est une situation métastable d'énergie minimum. L'aimantation ne peut basculer et s'aligner selon le champ que lorsque  $H_0$  atteint la valeur critique  $2K'/\mu_0 M_s$  au-delà de laquelle la configuration définie par  $\theta = 0$  n'est plus d'énergie minimum.

Ces résultats, tracés sous la forme d'une courbe classique  $M(H_0)$ , en considérant  $H_0$  comme positif ou négatif selon qu'il est appliqué parallèlement ou antiparallèlement à  $M_s$  initial, donnent la portion de cycle d'hystérésis présentée sur la figure 5.51. La valeur critique,  $2K'/\mu_0 M_s$ , de  $H_0$  pour laquelle l'aimantation bascule est celle du champ d'anisotropie défini par la relation (5.50) dans laquelle  $K$  est remplacé par  $K'$ , représentant l'anisotropie totale équivalente définie au paragraphe précédent.

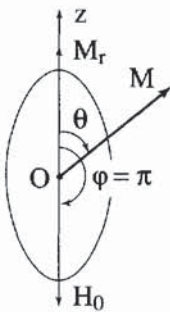


Figure 5.50 - Champ opposé à l'aimantation rémanente

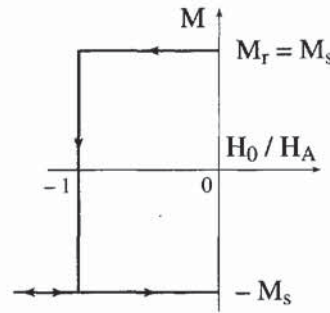


Figure 5.51 - Portion de cycle d'hystérésis résultant

### Analyse et commentaires : effet du champ sur la barrière d'énergie d'anisotropie

Dans la configuration présente, le champ est toujours soit parallèle, soit antiparallèle à l'aimantation ; le couple dû au champ est nul ; il est normal que l'aimantation ne tourne pas du tout avant basculement.

Une représentation de l'énergie du système en fonction de l'orientation de  $M_s$ , pour diverses valeurs du champ appliqué antiparallèlement à  $M_r$ , explicite le comportement de ce système (figure 5.52).

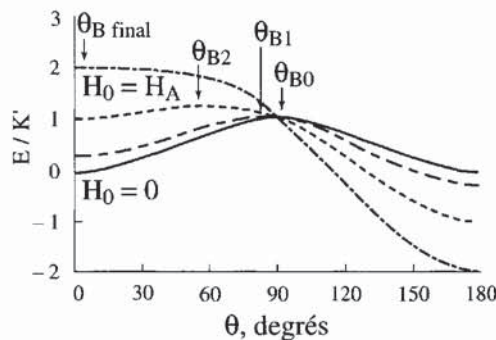


Figure 5.52 - Évolution de la barrière d'énergie avec le champ appliqué

En champ nul, les deux directions portées par l'axe Oz ( $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ) correspondent à des états également stables : minima de même énergie  $E_0$ , définissant les deux directions de facile aimantation. Entre ces deux minima existe l'état de maximum d'énergie  $E_1$ , qui définit la barrière d'énergie entre les états stables. La position de cette barrière est donnée par  $dE/d\theta = 0$  et par :

$$-\mu_0 M_s H_0 \cos \theta + 2 K' \cos 2\theta < 0 \quad (5.62)$$

Avec  $H_0 = 0$ , on obtient  $\theta = \theta_{B0} = \pi/2$ . La position de la barrière d'énergie entre les états stables correspond ici à une orientation de l'aimantation  $M_s$  perpendiculaire à Oz, c'est-à-dire au maximum des énergies d'anisotropie.

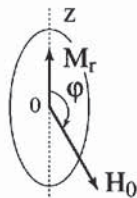
La hauteur de la barrière d'énergie correspond à la différence  $\Delta E = E_1 - E_0$  entre l'énergie du maximum et l'énergie de l'état stable occupé :  $E_1 = (\mu_0/2) N_{//} M_s^2 + K'$  et  $E_0 = (\mu_0/2) N_{//} M_s^2$ , soit :  $\Delta E = K'$  ; il s'agit bien d'une barrière d'énergie fournie par l'anisotropie.

Lorsque  $H_0$  grandit en module de 0 à  $2K'/\mu_0 M_s$ , la position du maximum de la barrière, repérée par une flèche sur chaque courbe de la figure 5.52, évolue de  $\theta_{B0} = \pi/2$  pour  $H_0 = 0$  à  $\theta_B = 0$  pour  $H_0 = H_A$ . Dans le même temps, la hauteur de la barrière d'énergie,  $\Delta E$ , diminue de sa valeur initiale à zéro (voir figure 5.52). L'état défini par  $\theta = \pi$  devient aussi de plus en plus stable puisque son énergie vaut  $E_0 - \mu_0 M_s H_0$ , alors que l'énergie de l'état stable occupé augmente comme  $E_0 + \mu_0 M_s H_0$ .

Le renversement de l'aimantation provient de la disparition de la barrière d'énergie entre l'état occupé, qui devient instable (maximum d'énergie), et l'état stable correspondant à  $\theta = \pi$ . Ceci se produit lorsque  $H_0 = 2K'/\mu_0 M_s = H_A$ . Dans le processus présent, où le retournement d'aimantation s'effectue par rotation collective uniforme des moments magnétiques individuels, chaque moment et l'aimantation résultante doivent passer par la direction de difficile aimantation. On comprend que le champ de retournement (le champ coercitif  $H_C$ ) ait été trouvé égal au champ d'anisotropie.

### 8.2.3. Champ inverse appliqué obliquement par rapport à la direction de $M_r$

Figure 5.53  
Champ inverse  
oblique



Dans ce cas,  $\pi/2 \leq \varphi < \pi$  (figure 5.53). La résolution de l'équation (5.60) est un peu plus compliquée que lorsque  $\varphi$  est égal à  $\pi$  (ou qu'il est exactement égal à  $\pi/2$ ). Cette résolution a été effectuée pour plusieurs valeurs de  $\varphi$  par Stoner et Wohlfarth [35].

Elle conduit aux comportements  $M(H_0)$  représentés sur la figure 5.54.

Cette fois, le champ  $H_0$  exerce un couple sur l'aimantation  $M_s$  du système. Ce couple est d'autant plus fort – pour une même valeur de  $H_0$  – que l'angle  $\varphi$  d'application du champ est plus voisin de  $\pi/2$ . La diminution progressive de l'aimantation mesurée,  $M$ , provient de la rotation de  $M_s$  sous l'effet de ce couple. Le basculement de l'aimantation est toujours un phénomène brutal. Il intervient pour des valeurs  $H_R$  de  $H_0$  de qui dépendent de l'angle d'application du champ (figure 5.55) mais qui restent inférieures à la valeur  $H_A$  obtenue pour  $\varphi = \pi$  ou  $\pi/2$ . Pour  $\varphi = 3\pi/4$ , la valeur du champ de retournement est minimale et vaut  $H_A/2$ .

Si l'on pose  $\Psi = \pi - \varphi$ , la valeur du champ de retournement  $H_R$  en fonction de l'angle d'application du champ  $H_0$  s'écrit :

$$H_R = H_A (\sin^{2/3}\Psi + \cos^{2/3}\Psi)^{-3/2} \quad (5.63)$$

La variation de l'énergie magnétique totale du système en fonction de l'orientation possible de  $M_s$ , pour plusieurs valeurs de  $H_0$  est représentée sur la figure 5.56. Comme dans le cas où  $\varphi = \pi$ , les positions de l'état stable occupé et du sommet de la barrière glissent l'une vers l'autre au fur et à mesure que  $H_0$  augmente.

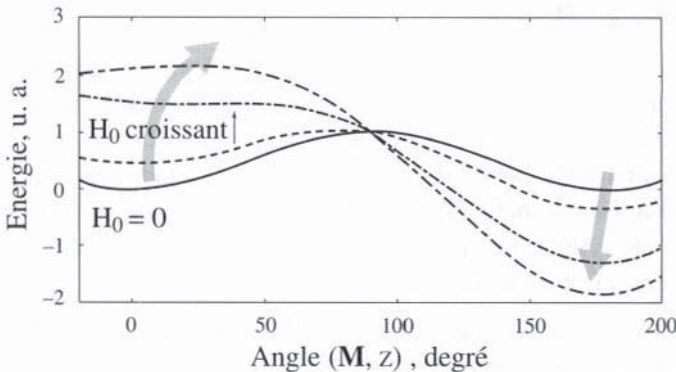


Figure 5.56 - Evolution de l'énergie du système avec l'orientation de  $M_s$  par rapport à  $Oz$

Les différentes courbes correspondent à plusieurs valeurs du champ appliqué entre 0 et  $H_R$  pour le même angle  $\varphi \approx 10^\circ$ . L'évolution des minima d'énergie est représentée en grisé.

**Remarque :** Si à un ensemble de cristallites du type précédent, dont les axes  $c$  sont distribués selon toutes les directions de l'espace de façon totalement aléatoire, on applique, d'abord un champ de saturation qui oriente tous les moments des

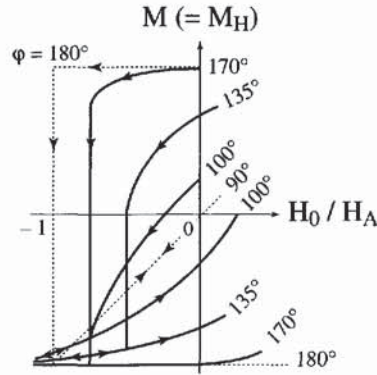


Figure 5.54 - Comportement sous champ de l'aimantation

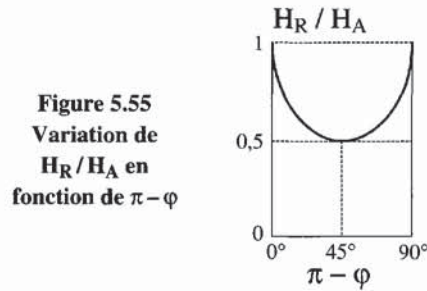
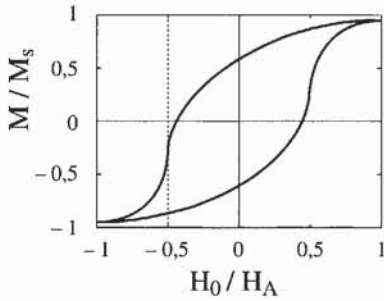


Figure 5.55  
Variation de  $H_R/H_A$  en fonction de  $\pi - \varphi$



**Figure 5.57 - Cycle d'hystérésis prévu par le modèle de Stoner-Wohlfarth**

On note que le cycle coupe l'axe des abscisses pour  $H_0 = -0,49 H_A$ .

crystallites dans le même demi-espace, puis un champ croissant dans le sens opposé au champ de saturation (procédure de cycle d'hystérésis), le résultat théorique escompté selon le modèle de Stoner-Wohlfarth est présenté sur la figure 5.57 : l'aimantation résultante s'annule dans un champ égal à  $0,49 H_A$ , sous le seul effet des rotations réversibles des moments de grains, tandis que le point d'inflexion correspondant au maximum de susceptibilité irréversible intervient pour  $0,5 H_A$ .

### 8.3. D'AUTRES MODES DE RETOURNEMENT COLLECTIF SONT-ILS POSSIBLES ?

Le modèle de Stoner-Wohlfarth définit une référence de barrière d'énergie correspondant à la rotation *collective et uniforme* des moments du système. Il reste à examiner si des processus collectifs, mais *non uniformes*, pourraient permettre un retournement plus facile. Pour cela, nous considérons à nouveau le cas modèle d'un grain monocristallin isolé, provenant d'un matériau ferromagnétique sans défaut, dans les deux cas limites d'une anisotropie magnétocristalline très forte, puis évanescence.

#### 8.3.1. Systèmes possédant une forte anisotropie magnétocristalline : inégalité de Brown

Que le processus de rotation des moments du système se produise uniformément ou *via* des configurations plus complexes, c'est toujours la même énergie d'anisotropie qui entre en jeu. En effet, elle intervient au niveau de chaque moment individuel qui, au cours du retournement, est amené à s'écarter du même angle, quel que soit le processus en jeu. En revanche, une énergie d'échange, associée au non-parallélisme des moments, interviendra dans un processus de rotation non uniforme, mais non pas si la rotation s'effectue de manière uniforme.

Ainsi, dans le cas de systèmes à forte anisotropie magnétocristalline, tout processus de retournement de l'aimantation selon un mode collectif non-uniforme coûtera plus cher que la rotation cohérente. C'est cette constatation qui a conduit Brown à écrire que le champ de retournement théorique est :

$$H_R \geq 2 K_1 / \mu_0 M_s \quad (5.64)$$

dans un système homogène idéal régi par une anisotropie uniaxiale d'origine magnétocristalline [8]. Nous verrons au chapitre suivant que ce résultat n'est pas observé dans les systèmes réels où les défauts jouent un rôle fondamental.

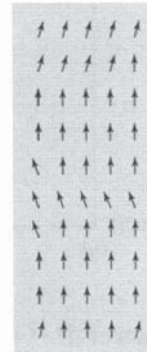
### 8.3.2. Systèmes sans anisotropie magnétocristalline

Supposons que le grain monocristallin considéré, n'ayant aucune anisotropie magnétocristalline ( $K_1 = 0$ ), est un ellipsoïde allongé. Il possède une anisotropie de forme définie par la relation (5.58). En champ nul, l'aimantation est orientée selon le grand axe  $c$  de l'ellipsoïde.

Quand ce grain est placé dans un champ inverse croissant, le champ coercitif associé à la rotation uniforme des moments est égal au champ d'anisotropie de forme  $H_A^f = (N_{\perp} - N_{\parallel}) M_s$ , où  $N_{\parallel}$  et  $N_{\perp}$  sont les coefficients de champ démagnétisant définis plus haut (équations 2.48 et 5.42). Dans cette limite, la discussion déjà faite du modèle de Stoner-Wohlfarth s'applique intégralement.

Mais on peut imaginer des processus dans lesquels la variation d'aimantation sous champ inverse appliqué résulte de la formation de configurations des moments non uniformes. Pour toute configuration dans laquelle l'aimantation totale diminue tout en restant parallèle à  $Oz$ , l'énergie de champ démagnétisant ne fait que diminuer jusqu'à ce que l'aimantation s'annule. Elle ne peut donc constituer une barrière. A l'opposé, une augmentation de l'énergie d'échange est associée à la formation de configurations non uniformes des moments. C'est donc l'échange qui tend à s'opposer au retournement.

Différents modes de retournement non uniformes ont été envisagés : par enroulement (*curling*) de l'aimantation locale (figure 5.21), par flambage (*buckling*, figure 5.58), etc. Le mode de retournement effectivement mis en jeu sera celui qui correspondra à la barrière d'énergie la plus basse. On trouve en général que des modes non-uniformes sont plus économiques énergétiquement que le mode collectif uniforme. Le champ coercitif est donc plus petit que le champ d'anisotropie de forme  $H_A^f$ , et l'inégalité de Brown n'est ainsi pas valide dans ce cas.



**Figure 5.58**  
Mode d'aimantation  
par flambage

Plusieurs auteurs [36] ont comparé, dans le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé, la rotation uniforme à des processus non-uniformes tels que ceux que nous avons cités plus haut. Le résultat dépend de la dimension du petit axe de l'ellipsoïde. Un certain rayon critique minimum  $R_c$  (demi petit axe de l'ellipsoïde) existe, en dessous duquel le retournement d'aimantation s'opère par rotation uniforme (alors  $H_c = H_A^f$ ).  $R_c$  est défini par les propriétés intrinsèques du matériau. Dans le cas du fer,  $R_c = 8$  nm [7]. Pour  $R > R_c$ , le mode de retournement par enroulement de l'aimantation locale (*curling*) est favorisé en général. Pour un cylindre infini de fer de rayon de l'ordre de  $10 R_c$ ,  $H_c$  est typiquement de l'ordre de  $H_A^f/10$ . La figure 5.59 compare les champs de retournement associés à des modes de rotation uniforme et non-uniformes, en fonction du diamètre d'un grain allongé [36].

Pour d'autres formes de grain, d'autres modes peuvent éventuellement être impliqués dans le retournement d'aimantation. Mais dans tous les cas, la rotation uniforme tend à se produire pour les grains de faible volume et la rotation non uniforme pour les grains de volume plus grand.

Quand un grain allongé ( $R \sim 10 R_c$ ) est placé dans un champ faisant avec l'axe  $c$  de l'ellipsoïde un angle  $\varphi$  variable entre  $\pi/2$  et  $\pi$  (encart de la figure 5.60), le renversement d'aimantation se produit pour des valeurs de champ qui augmentent beaucoup avec  $\pi - \varphi$  [37]. On remarque que la variation du champ coercitif suit approximativement une loi en  $1/\cos \varphi$  (figure 5.60). Ce comportement s'explique en considérant que la composante du champ appliqué perpendiculaire à  $c$ , source de rotation réversible des moments, reste trop faible (jusqu'à  $H_c \sim H_A^f/10$ ) pour que les moments tournent de façon appréciable ; le renversement (rotation irréversible) n'est dû qu'à la composante antiparallèle du champ appliqué qui vaut  $H \cos \varphi$ .

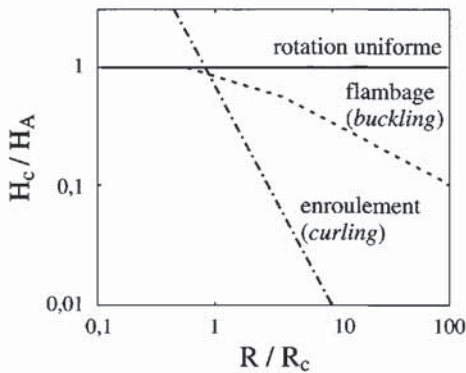


Figure 5.59 - Comparaison des champs de retournement selon différents processus en fonction du diamètre de grain dans le cas d'un matériau sans anisotropie magnétocristalline

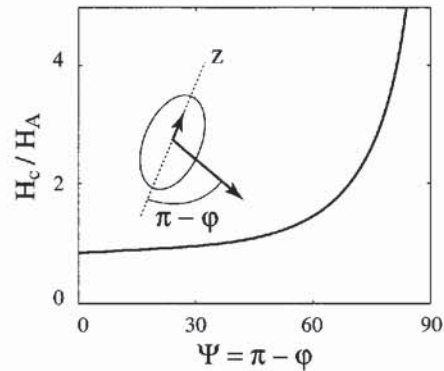


Figure 5.60 - Dépendance angulaire calculée du champ de renversement irréversible  $H_c$ , lorsque le renversement n'est précédé par aucune rotation réversible des moments (loi en  $1/\cos \theta_H$ )

Ce comportement caractérise donc le fait que le champ coercitif est beaucoup plus faible que le champ d'anisotropie. Il n'est pas observé pour le renversement par rotation uniforme (voir la figure 5.55).

**Remarque** : le lecteur désireux d'approfondir la physique des domaines magnétiques est invité à se reporter à l'excellent ouvrage de A. Hubert et R. Schäfer [38].

## RÉFÉRENCES

- [1] L. NÉEL, *Cah. Phys.* (1944) **25**, 1 ; C. KITTEL, *Rev. Mod. Phys.* (1949) **21**, 541.
- [2] H.A.M. VAN DEN BERG, *Thèse* (1984) Université de Delft, Nederland.
- [3] F. BLOCH, *Z. für Physik* (1932) **74**, 295.

- [4] B. BARBARA, *J. de Physique* (1973) **34**, 1039.
- [5] L. NÉEL, *C. R. Acad. Sci. Paris* (1955) **241**, 533.
- [6] S. METHFESSEL, S. MIDDELHOEK, H. THOMAS, *I.B.M. Res. Dev.* (1960) **4**, 96.
- [7] W.F. BROWN JR., *Micromagnetism* (1963) Interscience Publ., New York.
- [8] H. ZIJLSTRA, in *Ferromagnetic Materials* (1982) **III**, chap. 1, E.P. Wohlfarth éd., North Holland, Amsterdam.
- [9] S. CHIKAZUMI, *Physics of Ferromagnetism* (1997) Clarendon Press, Oxford.
- [10] J. KRANZ, A. HUBERT, *Z. Angew. Physik* (1963) **15**, 220.
- [11] M. SCHLENKER, J. BARUCHEL, X-ray diffraction topography, in *Handbook of Microscopy* (1997) S. Amelinckx, D. van Dyck, J. van Landuyt, G. van Tendeloo éd. vol. I. VCH, Weinheim.
- [12] H. KAWATA, K. MORI, *Rev. Sci. Instr.* (1995) **66**, 1407.
- [13] J. STÖHR, Y. WU, B.D. HERMSMEIER, M.G. SAMANT, G.R. HARP, S. KORANDA, D. DUNHAM, B.P. TONNER, *Science* (1993) **259**, 658 ; W. SWIECH, G.H. FECHER, CH. ZIETHEN, O. SCHMIDT, G. SCHÖNHENSE, K. GRZELAKOWSKI, C.M. SCHNEIDER, R. FRÖMTER, H.P. OEPEN, J. KIRSCHNER, *J. Electron Spectroscopy and Related Phenomena* (1997) **84**, 171.
- [14] P. FISCHER, T. EIMÜLLER, G. SCHÜTZ, P. GUTTMANN, G. SCHMAHL, K. PRUEGL, G. BAYREUTHER, *J. Phys. D : Appl. Phys.* (1998) **31**, 649.
- [15] M. SCHLENKER, C.G. SHULL, *J. Appl. Phys.* (1973) **44**, 4181-4184.
- [16] M. SCHLENKER, W. BAUSPIESS, W. GRAEFF, U. BONSE, H. RAUCH, *J. Magn. Magn. Mat.* (1980) **15-18**, 1507-1509.
- [17] K.M. PODURETS, V.A. SOMENKOV, R.R. CHISTYAKOV, S.SH. SHILSTEIN, *Physica B* (1989) **156-157**, 694-697.
- [18] K.M. PODURETS, D.V. SOKOL'SKII, R.R. CHISTYAKOV, S.SH. SHIL'SHTEIN, *Sov. Phys. Solid State* (1991) **33**, 1668-1672.
- [19] J.N. CHAPMAN, *J. Phys. D : Appl. Phys.* (1984) **17**, 623.
- [20] A. TONOMURA, *Adv. in Phys.* (1992) **41**, 59.
- [21] S. HASEGAWA, T. MATSUDA, J. ENDO, N. OSAKABE, M. IGARASHI, T. KOBAYASHI, M. NAITO, A. TONOMURA, *Phys. Rev. B* (1991) **43**, 7631.
- [22] S. LIBOVICKÝ, *Phys stat. Sol. (a)*, (1972) **12**, 539.
- [23] W.L. ROTH, *J. Appl. Phys.* (1960) **31**, 2000.
- [24] H. KONDOH, T. TAKEDA, *J. Phys. Soc. Japan* (1964) **19**, 2041.
- [25] N.F. KHARCHENKO, *Ferroelectrics* (1994) **162**, 173.
- [26] S. SAITO, *J. Phys. Soc. Japan* (1962) **17**, 1287.
- [27] M. SCHLENKER, J. BARUCHEL, *IEEE Trans. Magn.* (1981) **MAG 17**, 3085.
- [28] H.R. HILZINGER, H. KRONMÜLLER, *Phys. Status Sol. (b)* (1972) **54**, 593.
- [29] B. BARBARA, in *Lectures on Modern Magnetism*, Science Press Beijing et Springer Verlag Berlin - Heidelberg (1988) p. 166 ; B. BARBARA, *J. Magn. Magn. Mater.* (1994) **129**, 79.
- [30] L. NÉEL, *J. Phys. Rad.* (1944) **5**, 241

- [31] J.C. GORTER, *Nature* (1933) **132**, 517.
- [32] R. GANS, *Ann. Phys.*(1932) **15**, 28.
- [33] E. CZERLINSKY, *Ann. Phys.*(1932) **13**, 80.
- [34] L. NÉEL, *J. Phys. Radium* (1948) **9**, 184.
- [35] E.C. STONER, E.P. WOHLFARTH, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* (1948) **240 A**, 599.
- [36] E.H. FREI, S. SHTRIKMAN, D. TREVES, *Phys. Rev.* (1957) **106**, 446 ; A. AHARONI, S. SHTRIKMAN, *Phys. Rev.* (1958) **109**, 1522.
- [37] A. AHARONI, *Introduction to the Theory of Ferromagnetism* (1996) Oxford University Press.
- [38] A. HUBERT, R. SCHÄFER, *Magnetic domains* (1998) Springer (Berlin).

## CHAPITRE 6

# **IRRÉVERSIBILITÉ DES PROCESSUS D'AIMANTATION ET HYSTÉRÉSIS DANS LES MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES RÉELS : LE RÔLE DES DÉFAUTS**

*On présente ici l'effet des défauts sur les processus d'aimantation des matériaux ferro et ferrimagnétiques réels. Les défauts induisent une irréversibilité lors de la première aimantation, où il n'y en avait pas dans le système idéal (mécanisme de déplacement des parois) ; ils peuvent réduire – au contraire – très fortement l'hystérésis, attachée (dans ce même système idéal) au renversement de l'aimantation à partir de l'état saturé. De la valeur de l'anisotropie, de l'influence des divers types de défauts, ainsi que des effets de taille et de forme des grains sont nées plusieurs gammes de matériaux magnétiques à fonction spécifique, notamment – aux extrêmes – les matériaux magnétiques doux et les matériaux magnétiques durs.*

*L'activation thermique – capable de concentrer de l'énergie en tel ou tel point de la substance, dans un volume de taille variable mais souvent petite – produit des effets remarquables, qui peuvent altérer les propriétés intrinsèques du matériau : nous envisageons ces effets à la fin de ce chapitre.*

### **1. INTRODUCTION : LE MODÈLE DU MATÉRIAU PARFAIT N'EST PAS SUFFISANT**

Les mécanismes théoriques d'évolution de l'aimantation présentés au chapitre précédent conduisent à un comportement qui ne correspond pas totalement à celui que révèle l'expérience. Considérons par exemple une substance ferromagnétique dont la forte anisotropie uniaxe est caractérisée par la seule constante du second ordre  $K_1$ . Un échantillon sphérique de cette substance, assez volumineux pour contenir plusieurs domaines après désaimantation thermique, devrait s'aimanter – conformément à la théorie – de façon réversible selon une droite de pente  $M/H$  égale à 3 jusqu'à ce que son aimantation  $M$ , mesurée dans la direction du champ  $H // Oz$ , atteigne sa valeur à saturation  $M_s$ .

Soumis ensuite à un champ oscillant entre  $+H_{\text{sat}}$  et  $-H_{\text{sat}}$ , l'échantillon devrait voir son aimantation  $M$  décrire un cycle rectangulaire de largeur égale à 2 fois le champ d'anisotropie  $H_A (= 2K_1/\mu_0M_s)$  (voir figure 6.1).

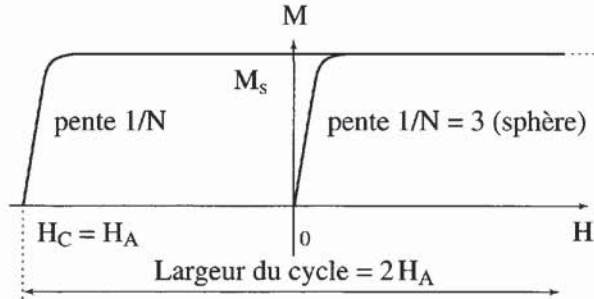


Figure 6.1 - Cycle théorique pour un matériau sans défaut

En réalité, les choses ne se passent pas tout à fait comme cela. L'écart le plus flagrant concerne la largeur des cycles obtenus après saturation qui est beaucoup plus faible que prévu (figure 6.2). La largeur des cycles observés ne correspond même pas à une fraction constante de  $H_A$  ni d'aucun autre paramètre magnétique intrinsèque. Elle dépend de la substance uniaxe considérée et de son conditionnement, et peut varier de quelques pour-cent de  $H_A$  à des valeurs voisines de  $2H_A/3$ .

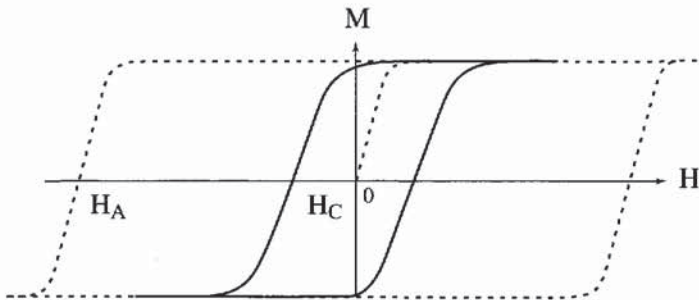


Figure 6.2 - Cycles réel (trait plein) et théorique (pointillés)

Par ailleurs, si la courbe de première aimantation d'une substance ferromagnétique semble varier linéairement avec le champ (pente  $1/N$ ) comme prévu par la théorie, c'est que l'on n'y regarde pas d'assez près. En effet, si l'on s'affranchit des effets démagnétisants macroscopiques en choisissant des échantillons très allongés selon l'axe facile ( $N \ll 1$ ), ou mieux, des échantillons toriques ( $N = 0$ ), le caractère irréversible de la courbe de première aimantation est mis en évidence, et ce caractère apparaît être une loi générale, qui concerne tous les matériaux (figure 6.3).

Tous ces écarts entre réalité observée et comportements modélisés proviennent de ce que, jusqu'à présent, nous avons envisagé seulement de la matière magnétique idéale, c'est-à-dire parfaitement homogène, en tous les points de laquelle les divers paramètres magnétiques sont absolument identiques. Nous n'avons pas encore tenu compte du rôle que jouent les défauts (écarts locaux à l'homogénéité).

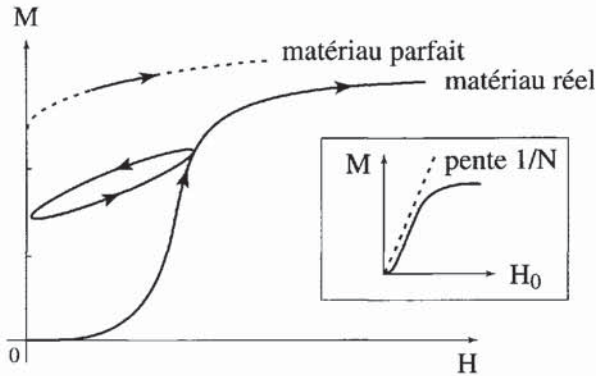


Figure 6.3 - Courbe de première aimantation théorique (pointillé) et réelle (trait plein) en champ interne ; encart : en champ externe

## 2. LE RÔLE DES DÉFAUTS DANS LE PHÉNOMÈNE D'IRRÉVERSIBILITÉ DU PROCESSUS D'AIMANTATION PAR DÉPLACEMENT DE PAROIS

Dans un matériau homogène, où les parois sont des parois de Bloch assez larges (matériau dominé par les interactions d'échange), nous avons vu que le processus d'aimantation par déplacement de parois peut être considéré comme réversible, le seul phénomène mis en jeu étant la compétition entre le champ démagnétisant (ou dipolaire), et le champ extérieur appliqué. Le déséquilibre entre ces deux champs, dans un sens ou dans l'autre, donne naissance à un champ interne à la matière (positif ou négatif) qui est à l'origine de la pression exercée sur les parois d'un côté ou de l'autre. Cette pression disparaît dès que la compensation des champs, obtenue par le déplacement des parois, est atteinte. L'hypothèse qui supporte cette analyse, est que les parois dans un matériau parfait se déplacent librement, car elles coûtent exactement la même énergie quelle que soit leur position au sein de l'échantillon.

Une telle hypothèse n'est évidemment pas valide dans le cas d'un matériau réel qui n'est jamais homogène. Son énergie magnétique varie alors en fonction de la position des parois qu'il contient. Kersten [1] fut le premier à prendre ce fait en considération, et il a envisagé le comportement d'un élément de système magnétique contenant une seule paroi, dont l'énergie interne dépend de la position de cette paroi selon une loi périodique sinusoïdale. Ce cas simple, mais peu réaliste, sera traité plus loin à propos de l'exemple des interactions parois-contraintes : il met en évidence le phénomène d'irréversibilité, mais n'explique pas les comportements observés. Le formalisme le plus adapté pour décrire un déplacement non libre des parois au sein de la matière ferro ou ferrimagnétique réelle a été proposé par Néel [2] ; nous en donnons le principe ci-dessous et le présenterons plus en détail au paragraphe 4.2.

## 2.1. PRINCIPE DU MODÈLE :

### MISE EN ŒUVRE D'UN POTENTIEL OSCILLANT IRRÉGULIER

Comme Kersten, Néel envisage un système magnétique simple à une seule paroi, supposée rigide et sans épaisseur (figure 6.4-a).

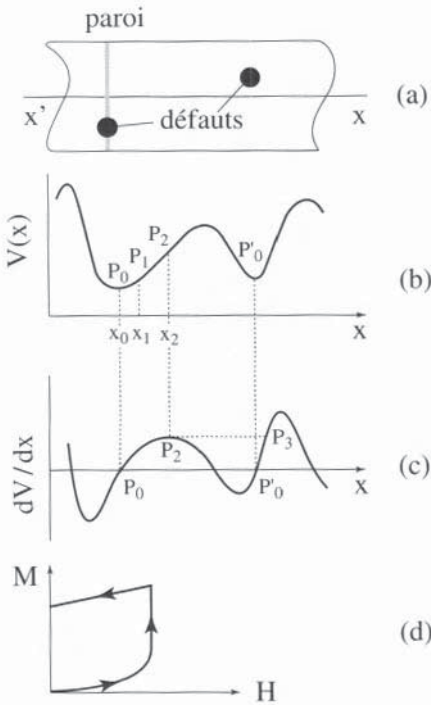


Figure 6.4 - Modèle de Néel

Les énergies sont rapportées à l'unité de surface de cette paroi qui peut, dans la petite région où on la considère, être assimilée à un plan autorisé à se déplacer selon une direction qui lui est orthogonale : une seule coordonnée  $x$  suffit donc à repérer sa position. L'effet des défauts, qui jouent le rôle d'obstacles au déplacement de la paroi, est traduit simplement par l'évolution de l'énergie potentielle  $V$  du système avec la position  $x$  de cette paroi. Ainsi  $V(x)$  oscille sans régularité le long de  $Ox$  (figure 6.4-b), au rythme des défauts rencontrés et de leur capacité à accrocher la paroi plus ou moins efficacement.  $V(x)$  présente donc une suite alternée de minima et maxima d'amplitudes différentes. Les minima sont de possibles positions d'équilibre stable de la paroi. Les maxima constituent des barrières d'énergie entre ces positions d'équilibre. En chaque point  $x$  du matériau, on

peut écrire la force de rappel spontanée s'exerçant sur la paroi (par unité de surface) pour la ramener en un point d'équilibre :

$$F_r = -dV/dx \quad (6.1)$$

Ainsi, en champ nul, la paroi est piégée, dans l'un des minima de  $V(x)$ , par exemple en  $x_0$  correspondant au point  $P_0$  de la figure 6.4-b, où  $F_r = 0$ . Du fait des aimantations différentes  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  qui existent de part et d'autre de la paroi, l'application d'un champ magnétique  $\mathbf{H}$  produit sur cette paroi une pression, qui, par unité d'aire de paroi, s'écrit (voir équation 5.46) :

$$F_H = \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \mathbf{H} \quad (6.2)$$

ou :

$$F_H = 2 \mu_0 M_S H \cos \theta \quad (6.3)$$

si  $\mathbf{H}$  fait avec la direction d'aimantation  $\mathbf{M}_i$  la plus proche l'angle  $\theta$  ( $M_S = |\mathbf{M}_i|$ ).

Dans le cas où le champ est appliqué parallèlement à  $\mathbf{M}_1$ , et où  $\mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1$  (paroi à  $180^\circ$ ), cette force devient :

$$F_H = 2\mu_0 M_S H \quad (6.4)$$

Dès qu'apparaît un champ  $H$  – si petit soit-il –, la paroi de la figure 6.4-a est soumise à une force ( $F_H + F_r$ ) non nulle et elle se déplace. Elle s'immobilise au point d'abscisse  $x_1$  le plus voisin de  $x_0$ , où la force  $F_r(x_1)$  compense exactement  $F_H$ . En ce point, noté  $P_1$  sur la figure 6.4, on a :

$$F_r(x_1) + F_H = 0 \quad (6.5)$$

soit :

$$2\mu_0 M_S H = \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x_1} \quad (6.6)$$

Si  $H$  revient alors à zéro, la paroi reprend sa position initiale : son mouvement entre  $x_0$  et  $x_1$  est donc réversible. Au contraire, si  $H$  est assez grand pour pousser la paroi jusqu'au delà du point d'inflexion  $P_2$  (d'abscisse  $x_2$ ), où la force de rappel vers  $x_0$  – notée  $F_r(x_2)$  – est maximale, la paroi franchit la barrière de potentiel voisine du minimum  $P_0$ , et son déplacement devient irréversible. Comme on le voit, le franchissement des barrières correspond à des forces mesurées par les pentes aux points d'inflexion de part et d'autre de la position de la paroi ; il est donc plus commode de raisonner à partir de la courbe dérivée de  $V(x)$ , où les points d'inflexion apparaissent comme des maxima pour l'une ou l'autre des directions d'application du champ. Dans cette nouvelle représentation (figure 6.4-c), la paroi ayant atteint le sommet  $P_2$ , saute brutalement au point  $P_3$  entraînant une variation brusque et irréversible de l'aimantation du système : en effet, si le champ est ramené à zéro, le système trouve son équilibre au point  $P_0'$  et non pas au point  $P_0$  initial. Le volume de matière situé entre les points  $P_0$  et  $P_0'$  voit son aimantation se renverser au cours du cycle de champ, produisant une variation irréversible d'aimantation,  $\Delta M$  (figure 6.4-d).

Le champ  $H$  qui intervient dans ce qui précède est le champ ressenti par la paroi. C'est donc le champ interne, bilan entre le champ appliqué de l'extérieur,  $H_0$ , et le champ démagnétisant,  $H_d$ , associé à l'aimantation macroscopique du système. Grâce à la relation (6.6), on peut associer une valeur de  $H$  à chaque valeur de  $dV/dx$  :

$$H = (2\mu_0 M_S)^{-1} (dV/dx) \quad (6.7)$$

Au déplacement de la paroi est associée une variation d'aimantation décrite par le cycle de la figure 6.5-b, si  $H$  varie de  $H_1$  à  $H_2$  et retour à  $H_1$ .

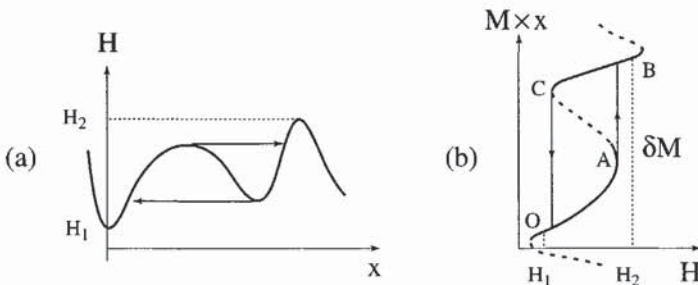


Figure 6.5 - Variations du champ interne avec la position de la paroi (a) et variation associée de l'aimantation (b)

## 2.2. MÉCANISMES D'ACCROCHAGE DES PAROIS SUR DES DÉFAUTS PARTICULIERS

Il existe divers mécanismes d'interaction entre les parois et les inhomogénéités ou défauts du réseau. Les plus classiques reposent sur :

- ◆ la modification locale des paramètres magnétiques intrinsèques de la substance ( $A_{\text{éch}}$ ,  $K$ , etc.),
- ◆ l'apparition, par suite des discontinuités d'aimantation, de champs démagnétisants localisés en leur voisinage,
- ◆ et un effet purement géométrique de réduction locale de la surface de paroi. Nous allons illustrer ces mécanismes par des exemples simples dans le cas de parois planes, puis estimer la valeur du champ critique maximum capable de décrocher les parois des défauts où elles sont piégées.

### 2.2.1. Champ de contraintes inhomogène : mise en jeu d'une anisotropie uniaxiale induite modifiant localement l'énergie de paroi

Le mécanisme sur lequel s'appuie l'interaction entre une paroi et une inhomogénéité de contrainte est le phénomène de couplage magnétoélastique, traité au chapitre 12. Ce phénomène est à l'origine de la magnétostriction caractérisée par une constante  $\lambda_S$  qui mesure la déformation relative à la saturation des matériaux isotropes (voir dans le chapitre 12 les paragraphes 1.4, 1.5 et 6.2.2). Pour l'instant, nous admettrons que, dans un milieu magnétique *isotrope*, l'existence d'une contrainte uniaxiale  $\sigma$  aboutit à créer une anisotropie magnétique de la forme :

$$E_{\sigma} = K_u \sin^2 \theta + \text{Cte} \quad (6.8)$$

où  $K_u = 3/2 \lambda_S \sigma$  (voir équation 12.39).

On doit tenir compte de cette anisotropie, en particulier pour les calculs de l'énergie  $\gamma$  et de la largeur  $\delta$  des parois contenues dans le matériau soumis à contraintes. L'énergie d'anisotropie intervient au travers d'une fonction  $g(\theta)$  [voir équations (5.18) et suivantes], qui doit maintenant contenir  $E_{\sigma}$ . Cela rend plus complexe son intégration. Suivant Kersten [1], Chikazumi [3] fait l'approximation que la forme fonctionnelle de l'énergie d'anisotropie,  $g(\theta)$ , est commune aux termes en  $K_1$  et  $K_u$ .

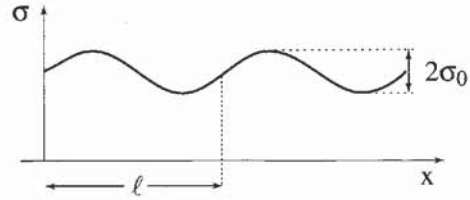
Au cas où règne au sein du matériau un champ de contraintes inhomogène, ce qui signifie formellement que  $\sigma$  évolue d'un point à un autre,  $\gamma$  et  $\delta$  ont des valeurs différentes suivant la position de la paroi dans le matériau. Cette variation de l'énergie de chaque paroi avec sa position, aboutit à l'accrochage de ces parois sur des zones favorables et gêne leur déplacement lorsqu'un champ est appliqué.

Si, dans ce modèle simplifié, au-delà de l'approximation signalée, nous adoptons l'hypothèse de Kersten d'une variation sinusoïdale de  $\sigma$  dans la seule direction  $Ox$ , soit :

$$\sigma = \text{Cte} + \sigma_0 \sin(2\pi x / \ell),$$

$\ell$  étant la longueur d'onde de la variation (voir figure 6.6), et si nous supposons  $\delta$  petite devant  $\ell$ , on peut considérer que  $\sigma$  reste constant au sein de la paroi.

Figure 6.6 - La contrainte varie comme le sinus de la position (modèle de Kersten)



L'énergie superficielle de la paroi s'écrit alors [3] :

$$\gamma = 2 \{ A_{\text{éch}} [K_1 - (3/2)\lambda_S \sigma(x)] \}^{1/2} \quad (6.9)$$

et, en supposant que  $K_1 \gg \lambda_S \sigma$ , elle peut être développée sous la forme :

$$\gamma = 2(A_{\text{éch}} K_1)^{1/2} [1 - (3/4)(\lambda_S \sigma / K_1) + \dots] \quad (6.10)$$

La force de rappel par unité d'aire qui *accroche* une paroi au voisinage des valeurs de  $x$  minimisant la fonction ci-dessus (positions d'équilibre en champ nul), est donnée par  $d\gamma/dx = F_r = -(3/2) (A_{\text{éch}}/K_1)^{1/2} \lambda_S (d\sigma/dx)$ , où  $3(A_{\text{éch}}/K_1)^{1/2}$  mesure approximativement la largeur de paroi  $\delta$ . Soit, pour la force de rappel, l'expression suivante :

$$F_r = -(1/2)\lambda_S \delta (d\sigma/dx) \quad (6.11)$$

et, dans le cas d'une variation sinusoïdale de  $\sigma$  :

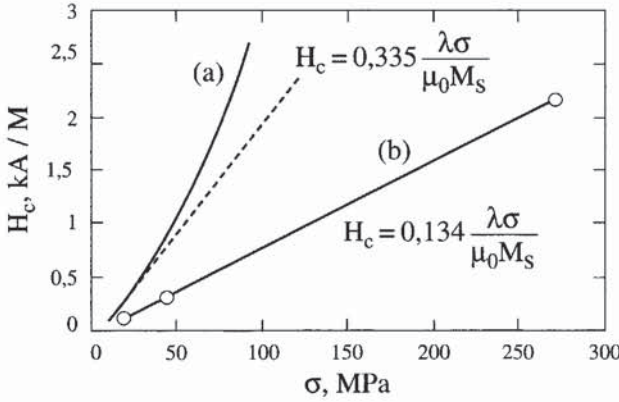
$$F_r = -(\pi\sigma_0 \lambda_S \delta / \ell) \cos(2\pi x / \ell) \quad (6.12)$$

L'existence d'une interaction entre les parois et les contraintes inhomogènes présentes au sein d'un matériau a été suggérée par Becker dès 1932 [4]. La preuve expérimentale en a été donnée par Kersten [1] qui a étudié l'effet des contraintes internes sur la valeur du champ coercitif – défini par l'équation (6.16) – de barreaux de nickel (figure 6.7) : il apparaît que l'échantillon (a) est fortement écroui suite aux traitements mécaniques nécessaires à son élaboration, tandis que l'échantillon (b), ayant subi ultérieurement un traitement de recuit pour relâcher les contraintes internes, présente un champ coercitif beaucoup plus faible. L'interprétation de ces effets a été donnée par Becker et Döring [5], Kondorsky [6] et Kersten [1]. On trouvera une bonne revue sur le sujet dans l'ouvrage déjà ancien de K. Hoselitz [7].

### 2.2.2. Lacunes ou inclusions non magnétiques de grande taille : réductions locales de l'aire des parois et de l'énergie magnétostatique

#### Effet géométrique

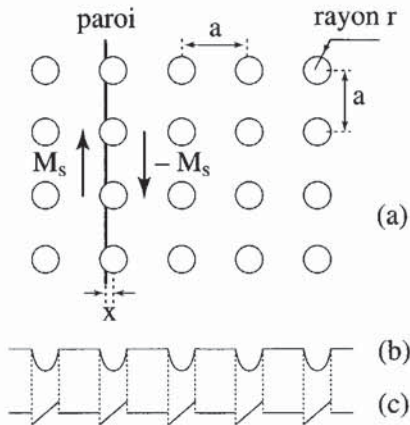
Le principe de ce modèle est très simple, il est fondé sur la remarque de Kersten [8] qu'une paroi, coûtant une énergie proportionnelle à son aire, est en équilibre lorsqu'elle occupe une position pour laquelle son aire est minimum.



**Figure 6.7**  
Variation du champ coercitif avec la contrainte

Echantillons en nickel écroui (a) et recuit (b), d'après Kersten [1] Dans les formules reliant  $H_c$  à  $\sigma$ ,  $H_c$  est exprimé en A/m,  $\sigma$  en Pa,  $\lambda = 36 \times 10^{-6}$  et  $\mu_0 M_s = 0,603$  T. Les coefficients numériques sont alors sans dimension.

Considérons des cavités ou des inclusions non magnétiques, supposées sphériques de rayon  $r$ , distribuées à l'intérieur d'un matériau ferromagnétique et centrées sur les nœuds d'un réseau cubique simple de paramètre  $a$  (voir la figure 6.8-a).



**Figure 6.8 - Modèle des inclusions de Kersten**

- (a) réseau d'inclusions sphériques
- (b) profil d'énergie de ce réseau
- (c) force de rappel agissant sur la paroi.

Une paroi à 180°, par hypothèse plane, rigide et parallèle à l'une des faces du cube des défauts, possède une énergie superficielle que nous désignons par  $\gamma$ . Quand la position de la paroi coïncide avec l'un quelconque des plans réticulaires des défauts, sa surface est minimale, car la surface des trous produits par les défauts dans la paroi est maximale. Par unité de surface de paroi, il y a  $1/a^2$  trous, présentant chacun une aire  $\mathcal{A} = \pi r^2$ . Ces plans réticulaires constituent donc des minima d'énergie où la paroi est en équilibre en l'absence de champ. Déplacée de l'une de ces positions d'équilibre d'une quantité  $x$ , inférieure à  $r$ , la paroi ne se

trouve plus amputée, par les défauts, que d'une aire  $\mathcal{A}'$ . La variation relative d'aire est  $\delta\mathcal{A}/a^2 = (\mathcal{A} - \mathcal{A}')/a^2 = \pi(r^2 - x^2)/a^2$ .

La variation d'énergie d'une paroi s'écrit alors, au voisinage des plans réticulaires :

$$\Delta E_p(x) = \pi x^2 \gamma / a^2 \tag{6.13}$$

ce qui, pour un système magnétique de surface unité ne contenant qu'une seule paroi (figure 6.8-a), conduit à un profil d'énergie schématisé figure 6.8-b. Nulle ailleurs, la force de rappel vers les positions d'équilibre n'existe que dans la zone de largeur  $r$  de part et d'autre de chacun des minima (figure 6.8-c). Elle vaut :

$$F_r = -dE_p/dx = -2 \pi x \gamma \tag{6.14}$$

### Réduction de l'énergie magnétostatique associée à la présence du défaut

Pourtant non négligeable, le rôle du champ démagnétisant au voisinage des défauts non magnétiques a été totalement ignoré dans le modèle précédent. L'énergie magnétostatique associée à une lacune ou une inclusion non magnétique sphérique, de rayon  $r$ , totalement immergée dans un domaine magnétique (figure 6.9-a), s'écrit :

$$E_{d0} = \frac{2}{9} \mu_0 \pi M_s^2 r^3 \quad (6.15)$$

Cette énergie, réduite quand une paroi traverse le défaut (figure 6.9-b), passe par un minimum lorsque la paroi coupe la sphère en deux parties égales [9, 10]. Elle vaut alors  $0,46 E_{d0}$ . La réduction d'énergie du système magnétique selon ce schéma est en général beaucoup plus importante que celle obtenue en ne considérant que la diminution de surface de paroi. C'est à Néel [3] que l'on doit la prise en compte de ces contributions dipolaires, qui existent aussi au voisinage des inhomogénéités de contrainte comme le montre la figure 6.10 [10].

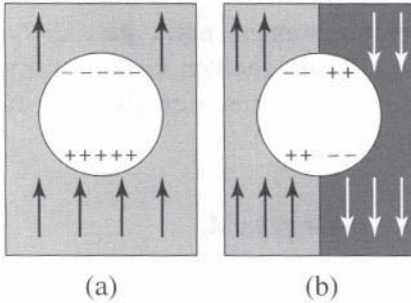


Figure 6.9 - La forte énergie magnétostatique liée à la situation (a) d'une inclusion sphérique placée dans un milieu d'aimantation uniforme est réduite si la paroi traverse cette inclusion sphérique (b)

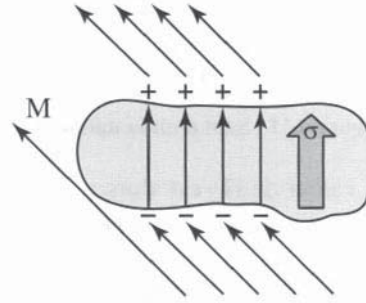


Figure 6.10 - La contrainte  $\sigma$  dévie localement les moments et crée ainsi des zones où apparaissent des masses magnétiques

## 2.3. LE CHAMP CRITIQUE DE "DÉCROCHAGE" ASSOCIÉ AU PROCESSUS DE DÉPLACEMENT NON LIBRE DES PAROIS

L'irréversibilité du processus d'aimantation par déplacement de parois est due aux barrières d'énergie, engendrées par divers défauts au sein du matériau magnétique, et elle est à l'origine du phénomène d'hystérésis. Le plus grand des cycles d'hystérésis  $M(H)$ , obtenu en faisant osciller le champ magnétique entre deux valeurs suffisantes pour atteindre la saturation, permet de définir la rémanence et le champ coercitif (voir la figure 3.5) associés au processus de déplacement non libre des parois.

### 2.3.1. Champ coercitif associé au modèle du potentiel oscillant

Dans les modèles à une dimension décrits plus haut, où une énergie potentielle  $V(x)$  rapportée à l'unité de surface de paroi traduit l'effet des défauts, la force d'accrochage que la structure du matériau exerce sur la paroi en un point  $x_1$  est mesurée par

$(dV/dx)_{x=x_1}$ . Le champ coercitif  $H_C$  grâce auquel on peut annuler l'aimantation acquise correspond au champ de décrochage maximum, celui qui permet de franchir les barrières les plus hautes, en engendrant une force motrice (voir équation 6.6) de la forme  $2 \mu_0 M_S H$  au moins égale à la plus grande des forces d'accrochage que puisse fournir le matériau, celle qui correspond à  $(dV/dx)_{\max}$  soit, en tenant compte du décalage  $\theta$  entre la direction du champ et celle de l'aimantation de la phase favorisée :

$$H_C = (1/2 \mu_0 M_S) (dV/dx)_{\max} = F_{\max} / 2 \mu_0 M_S \cos \theta \quad (6.16)$$

Avec les mécanismes décrits au § 2.2, cette analyse donne les résultats qui suivent.

### Gros défauts non magnétiques (modèle de Kersten)

La force de rappel donnée par l'équation (6.14) croît jusqu'à une valeur  $F_{\max}$  pour laquelle  $x = r$ . Le champ magnétique qui permet de déplacer la paroi jusque là vaut  $H_C$ . Dès que  $H > H_C$ , la paroi traverse tout le matériau, la force de rappel ne prenant nulle part de valeurs supérieures à celle que l'on vient de surmonter. La figure 6.11 présente la courbe d'aimantation correspondante.

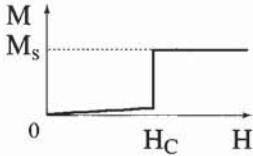


Figure 6.11 - Saut d'aimantation

La valeur de  $H_C$  est alors :

$$H_C = -F_{\max} / 2 \mu_0 M_S = \pi r \gamma / \mu_0 M_S \quad (6.17)$$

### Champ de contrainte inhomogène périodique

Dans le modèle de Kersten, la contrainte varie sinusoidalement avec la distance,  $\sigma = Cte + \sigma_0 \sin(2 \pi x / \ell)$ . La force d'accrochage est alors donnée par la relation (6.12). Sa valeur maximale est  $(F_r)_{\max} = 2 c \lambda_S \sigma_0 \delta / \ell$ , ce qui donne un champ coercitif :  $H_C = \pi \sigma_0 \lambda_S \delta / 2 \mu_0 M_S \ell$ .

#### 2.3.2. Le champ critique dans le cas d'une paroi déformable

Si une paroi est accrochée à ses frontières et que sous la pression d'un champ  $H$ , elle se gonfle à la manière d'une membrane élastique (figure 6.12), l'énergie mise en jeu dans cette déformation est égale à l'énergie superficielle de la paroi,  $\gamma$ , multipliée par l'accroissement de surface résultant de sa déformation,  $S(H) - S(0)$ , soit :

$$E = \gamma [S(H) - S(0)] \quad (6.18)$$

Nous supposons que la déformation est cylindrique. En fonction du rayon de courbure  $r$  atteint, la force de rappel par unité de surface de la paroi s'écrit alors :

$$F = \gamma / r \quad (6.19)$$

par analogie avec l'expression obtenue lorsqu'une membrane élastique est soumise à une différence de pression [10, 11].

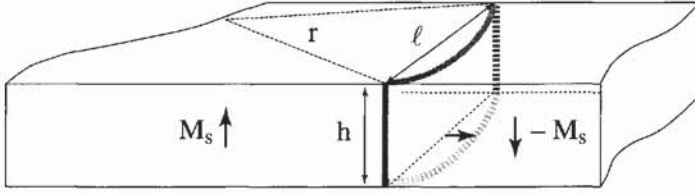


Figure 6.12 - Paroi déformable "en cylindre"

L'interaction d'une paroi déformable avec les défauts du réseau peut être envisagée de manières différentes selon l'intensité de la force d'accrochage par rapport à l'énergie mise en jeu dans la déformation de la paroi.

- ◆ Si la paroi est relativement peu déformable, c'est-à-dire si la force de rappel que met en jeu sa déformation est supérieure à la force d'accrochage (accrochage faible), on peut considérer que la paroi reste plane et le champ coercitif est donné directement par l'équation (6.16). Au cas où les sites d'accrochage sont régulièrement répartis dans le matériau, donnant lieu à une énergie potentielle  $V(x)$  de la forme :  $V(x) = V_0 \sin(2\pi x / \ell)$ , alors  $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\max} = \frac{2\pi V_0}{\ell}$  et :

$$H_C = \frac{\pi V_0}{\ell \mu_0 M_S \cos \theta} \tag{6.20}$$

Le nombre de sites d'accrochage intervient dans cette expression par l'intermédiaire de leur distance  $\ell$ .

- ◆ Si la paroi est au contraire très déformable, c'est-à-dire que son énergie superficielle  $\gamma$  est faible comparée à l'énergie impliquée dans l'accrochage sur des sites distants de  $\ell$  (accrochage fort), alors la paroi gonfle sous l'effet du champ appliqué. La force de rappel associée à cette déformation donnée par l'équation (6.19) compense, à l'équilibre, la force exercée par le champ.

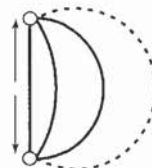
Si l'on considère une paroi à  $180^\circ$ , l'équilibre correspond à :

$$2 \mu_0 M_S H \cos \theta = \gamma / r \tag{6.21}$$

La situation critique intervient lorsque le rayon de courbure atteint la demi-distance entre sites  $\ell/2$  (figure 6.13), où la paroi se déforme irréversiblement par à-coups. Cette situation correspond à un champ critique  $H_C$  qui vaut :

$$H_C = \gamma / \ell \mu_0 M_S \cos \theta \tag{6.22}$$

Figure 6.13 - Gonflement d'une paroi cylindrique très déformable



### **3. LE RÔLE DES DÉFAUTS DANS LE PHÉNOMÈNE DE RETOURNEMENT DE L'AIMANTATION À PARTIR DE L'ÉTAT SATURÉ**

#### **3.1. PARADOXE DE BROWN**

Revenons à un matériau idéal, c'est-à-dire supposé parfaitement homogène et sans défaut. Nous cherchons, maintenant, à retourner son aimantation, préalablement saturée, en appliquant un champ magnétique antiparallèlement à cette aimantation. L'application de ce champ fournit une énergie de couplage avec l'aimantation uniformément répartie, qui produit un retournement impliquant tous les moments à la fois. Si ce processus correspond à une rotation cohérente et uniforme des moments, le champ capable de produire ce phénomène est obligatoirement égal au champ d'anisotropie total du système étudié (voir Chapitre 5, § 8.2.2), c'est-à-dire la somme du champ d'anisotropie intrinsèque (anisotropie magnétocristalline) et d'un éventuel champ d'anisotropie macroscopique (anisotropie de forme).

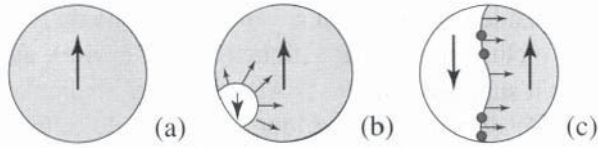
Même si l'on peut imaginer que d'autres processus (non uniformes) permettent de substituer une barrière d'énergie moins élevée à la barrière d'anisotropie de forme (un champ de moindre valeur remplace alors le champ d'anisotropie de forme), il n'est en aucun cas possible – théoriquement – de renverser l'aimantation d'un système ferromagnétique homogène, avec un champ appliqué inférieur au champ d'anisotropie magnétocristalline.

C'est là l'énoncé du théorème de Brown [12].

Néanmoins, la réalité contredit ce principe théorique, car quels que soient les matériaux ferro- ou ferrimagnétiques possédant une grande anisotropie magnétocristalline que l'on considère, les champs de retournement mesurés sont toujours trouvés très largement inférieurs au champ d'anisotropie magnétocristalline attendu (voir figure 6.2). Ce désaccord entre théorie et expérience est connu sous le nom de *Paradoxe de Brown* [13].

Aucune explication n'a pu être donnée à ce désaccord dans le cadre d'un matériau idéal. La valeur mesurée du champ de retournement de l'aimantation ne traduit donc pas une propriété intrinsèque du matériau idéal, mais caractérise plutôt la présence en son sein de défauts : corps étrangers, lacunes, ou simplement inhomogénéités ou irrégularités du réseau. On est amené à associer à ces défauts la formation de *noyaux* où, localement, s'amorce le retournement d'aimantation. Inévitablement, des parois prennent naissance entre ces noyaux, où l'aimantation se retourne, et le reste du matériau. Le renversement complet de l'aimantation du matériau se produit ensuite lorsque ces parois, poussées par le champ appliqué, traversent plus ou moins facilement l'échantillon tout entier (voir figure 6.14).

**Figure 6.14**  
**Renversement d'aimantation**  
**Matériau saturé (a)**  
**Nucléation (b) - Piégeage (c)**



Selon ce schéma, le phénomène de retournement de l'aimantation doit être considéré comme lié à la mise en jeu d'un processus essentiellement non collectif qui procède en plusieurs étapes. Parmi celles-ci, on en notera deux, essentielles :

- ◆ la formation de noyaux d'aimantation inverse, avec émergence des parois associées, que l'on désigne sous le nom de *nucléation*,
- ◆ et le balayage du matériau par les parois sous la pression du champ, avec accrochage et décrochage de ces parois, qui correspond au phénomène dit de *piégeage* (ou "pinning") que nous avons évoqué au § 2 de ce chapitre.

A chacun de ces mécanismes est associé un champ critique, qui déclenche le phénomène considéré. Le champ coercitif (identifié au champ de retournement de l'aimantation) est théoriquement le plus grand de ces champs critiques.

### 3.2. DÉFAUTS ET NUCLÉATION

Quand on part de l'état saturé, le phénomène de nucléation est toujours à l'origine du retournement de l'aimantation, si l'échantillon considéré (ou les grains qui le composent) sont de taille suffisante. Ce phénomène implique la désolidarisation magnétique d'une ou plusieurs zones du matériau, par rapport à leur environnement immédiat. Une telle désolidarisation coûte de l'énergie (énergie de paroi) et engage toujours la situation locale de la zone concernée. Mais elle peut la mettre en cause de deux manières très différentes :

- ◆ ou bien la zone qui se désolidarise subit les mêmes pressions que tout son environnement, et elle est seulement moins apte que lui à résister à ces pressions ;
- ◆ ou bien les pressions qui agissent sur la zone de renversement sont particulières et ne sont pas subies de la même façon ou au même degré par l'environnement.

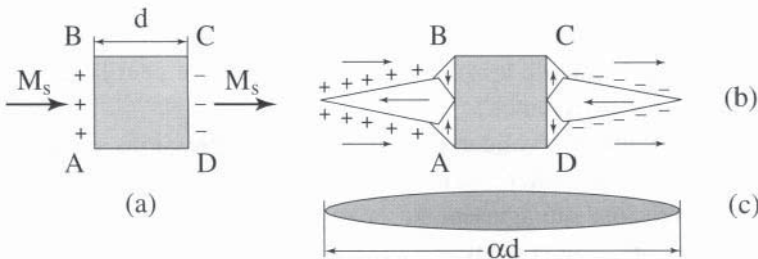
Nous envisagerons ces deux types de "défauts" et nous verrons qu'ils semblent être à l'origine de comportements très différenciés.

#### 3.2.1. Les défauts donnant lieu à la nucléation de domaines inverses en champ nul

Revenons, par exemple, au cas de l'inclusion non magnétique isolée, immergée dans un domaine magnétique (figure 6.9-a). Elle est à l'origine d'une grosse perte d'énergie démagnétisante (expression approchée donnée en 6.15), qui n'est pas acceptée, telle quelle, par le système. Comme Néel l'a montré [9, 10], une altération profonde de l'environnement magnétique du défaut se produit nécessairement, qui minimise les pertes associées à sa présence : on a vu plus haut par exemple (§ 2.2.2.), que la perte d'énergie dipolaire pouvait être réduite d'un facteur supérieur à 2 par l'introduction d'une paroi traversant l'inclusion en son milieu.

Reconsidérons ce cas en suivant l'approche de Néel, qui, par commodité, considère une inclusion non magnétique (ou une cavité), ayant la forme d'un cube d'arête  $d$ , dont il suppose deux faces AB et CD perpendiculaires à l'aimantation spontanée  $M_S$  dans le domaine magnétique contenant le défaut (figure 6.15-a). Sur la face AB apparaît une charge totale positive  $M_S d^2$ , tandis que sur la face CD apparaît la charge opposée. L'énergie dipolaire mise en jeu par ces charges est approximativement de l'ordre de l'énergie de champ démagnétisant régnant dans une cavité sphérique de même volume ( $E_{d_0}$  voir expression 6.15). Il est impossible que la situation reste en l'état, car elle entraîne l'existence de champs magnétiques élevés au voisinage des faces AB et CD (champs proches du tesla, pour l'aimantation spontanée du fer), qui suffisent à faire tourner l'aimantation dans ces régions, au point de l'amener à être parallèle à ces faces. Qualitativement il paraît clair que, pour diminuer l'énergie magnétostatique, il serait bon que les charges se répartissent sur une plus grande surface et s'éloignent les unes des autres ; cela ne peut se faire que par la création de nouveaux domaines et des parois associées.

La structure apte à diminuer l'énergie magnétostatique que Néel a proposée comprend (figure 6.15-b) quatre petits domaines de fermeture dont le coût est réduit si le réseau est cubique avec un axe facile quaternaire ou si l'anisotropie est faible, et deux longs domaines en fuseau, aimantés antiparallèlement au domaine principal dans lequel est immergée l'inclusion. La longueur totale de cette structure est  $\alpha d$  ( $\alpha$  : coefficient caractérisant l'allongement des domaines en fuseau).



**Figure 6.15 - Intérêt des domaines de fermeture**

L'inclusion cubique (a) immergée dans un domaine uniformément aimanté est très coûteuse en énergie ; la création des domaines présentés en (b) réduit notablement l'énergie magnétostatique de l'ensemble qui peut être modélisé par un ellipsoïde allongé de même rapport d'aspect  $\alpha$ .

Un calcul approché simple peut être fait en remplaçant cet arrangement de domaines par un seul domaine d'aimantation inverse, ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé ( $a \times a \times c$  : figure 6.15-c), de longueur  $2c = \alpha d$  et de section équatoriale :  $\pi a^2 = d^2/2$ , pour lequel l'énergie totale mise en jeu,  $E_{tot}$ , est un compromis entre énergie de paroi (autour de l'ellipsoïde) et énergie magnétostatique. Il donnera une idée de l'économie apportée par l'apparition de domaines inverses en réponse à la présence de la lacune.

Le volume  $V$  et la surface  $S$  de l'ellipsoïde considéré sont donnés par les relations suivantes :

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 c = \frac{1}{3} \alpha d^3 \quad ; \quad S = \pi^2 a c = \sqrt{\frac{\pi^3}{8}} \alpha d^2 \quad (6.23)$$

Pour un tel ellipsoïde très allongé ( $k = c/a \gg 1$ ), le coefficient de champ démagnétisant dans la direction du grand axe est donné par :

$$N_c = \{\ln(2k) - 1\} / k^2, \text{ avec : } k = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha \quad (\alpha \gg 1), \text{ soit :}$$

$$N_c = \frac{2}{\pi \alpha^2} [\ln(\alpha \sqrt{2\pi}) - 1] \quad (6.24)$$

L'énergie magnétostatique correspondante :  $E_{\text{mag}} = \mu_0 N_c M_S^2 V / 2$  est calculée en remarquant que le fuseau, d'aimantation uniforme  $M_S$ , n'est pas isolé dans un milieu non magnétique, mais qu'il est immergé dans une phase d'aimantation  $-M_S$ , ce qui double les charges superficielles (dans la relation précédente,  $M = 2M_S$ ) et quadruple l'énergie. Cela donne :

$$E_{\text{mag}} = \frac{4}{3} \mu_0 \frac{M_S^2}{\pi \alpha} d^3 [\ln(\alpha \sqrt{2\pi}) - 1] \quad (6.25)$$

Quant à l'énergie de paroi,  $E_{\text{par}} = \gamma S$ , elle vaut :

$$E_{\text{par}} = \gamma \sqrt{\frac{\pi^3}{8}} \alpha d^2 \quad (6.26)$$

La valeur de  $\alpha$  qui minimise  $E_{\text{tot}} = E_{\text{mag}} + E_{\text{par}}$  est solution de :

$$\frac{3\pi^2}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma}{\mu_0 M_S^2 d} = \frac{1}{\alpha^2} [\ln(\alpha \sqrt{2\pi}) - 2] \quad (6.27)$$

Ce résultat fait ressortir l'influence de la taille du défaut. Ainsi, pour des inclusions de quelques dixièmes de micron de diamètre immergées dans du fer (paramètres utilisés :  $M_S = 1,71 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}$  et  $\gamma = 1,4 \times 10^{-3} \text{ Jm}^{-2}$ ), la différence d'énergie entre inclusion isolée simple et inclusion avec domaines en fuseau est minime :  $E_{\text{tot}}/E_{d0}$  est de l'ordre de 0,8 à 0,9 (avec  $\alpha \sim 10$ ). Mais lorsque le diamètre de l'inclusion atteint quelques microns ( $\alpha \sim 100$  à 200), la configuration avec domaines inverses en fuseau réduit l'énergie d'un facteur 5 à 10.

Le résultat numérique de ce calcul ne reflète sans doute pas exactement la réalité. Mais il confirme que plus une inclusion non magnétique est large, plus elle favorise l'apparition spontanée (c'est-à-dire en champ nul) de domaines d'aimantation inverse. La nucléation, première étape du retournement d'aimantation, s'est déjà produite quand le champ de saturation revient à zéro. Pour un matériau qui contient de tels défauts, la valeur du champ inverse que l'on doit appliquer pour retourner son aimantation après saturation (champ coercitif du matériau), ne dépend que de la force d'accrochage des parois par les défauts (à l'image de ce qui se passe quand on applique un champ inverse avant saturation).

D'une manière générale, les défauts capables d'induire, en champ nul (ou légèrement positif), la formation de noyaux d'aimantation inverse sont ceux qui engendrent des pertes dipolaires locales importantes : inclusions non magnétiques, lacunes, angles aigus en bord de grain, etc.

### ***3.2.2. Les défauts ne donnant lieu à nucléation que dans un champ inverse notable***

La seconde catégorie de défauts n'induit pas de pertes dipolaires locales significatives, car les discontinuités d'aimantation à la jonction entre le défaut et son environnement immédiat sont faibles. Les défauts envisagés ici sont simplement des zones de moindres performances magnétiques, notamment en ce qui concerne l'anisotropie. Elles résistent donc moins bien et surtout moins longtemps à l'effet d'un champ inverse appliqué croissant. C'est le couplage de l'aimantation du défaut avec le champ inverse appliqué qui fournit, dans ce cas, l'énergie nécessaire à la création de paroi associée au retournement.

Si le champ inverse qui produit cette nucléation dans le matériau considéré, est supérieur en module aux champs critiques associés au grossissement et au déplacement dans tout l'échantillon de la paroi créée, le champ coercitif du matériau pourra être confondu avec le champ de nucléation.

## ***4. HYSTÉRÉSIS ET IRRÉVERSIBILITÉ : EXPÉRIENCE ET MODÈLES SIMPLES***

L'aimantation d'une substance ferromagnétique répond de façon complexe à l'application d'un champ extérieur, alternativement croissant et décroissant.

Cette réponse dépend de plusieurs éléments : l'état magnétique initial de la substance, la forme de l'échantillon étudié, l'amplitude de la variation de champ considérée, le sens de cette variation comparé au sens de la variation précédente, etc. Il convient donc de préciser très clairement les conditions expérimentales mises en œuvre.

### ***4.1. COMPORTEMENTS OBSERVÉS***

#### ***4.1.1. La courbe de première aimantation, tracée à partir d'un état désaimanté***

Considérons un échantillon ferromagnétique ou ferrimagnétique de forme torique – ce qui élimine les effets de champ démagnétisant – *et qui a été désaimanté sous champ magnétique alternatif évanescent* par le processus qui sera décrit au § 4.1.3. Soumis à un champ magnétique croissant, cet échantillon voit son aimantation croître selon la courbe OABC (figure 6.16), dite courbe de première aimantation.

Cette courbe est traditionnellement divisée en trois régions :

- ◆ celle des *champs faibles* où l'aimantation évolue conformément aux lois de Rayleigh (énoncées au paragraphe suivant),
- ◆ la *région intermédiaire*, où l'aimantation croît très rapidement de façon très irréversible (une hystérésis importante apparaît chaque fois que l'on inverse le champ), et où un agrandissement révélerait qu'elle est en fait constituée d'une suite de sauts d'aimantation séparés par de brèves zones de croissance continue : les *sauts de Barkhausen* (encart de la figure 6.16),
- ◆ et la région des *champs forts*, où la variation d'aimantation change de courbure et tend asymptotiquement vers une limite, notée  $M_s$ , et désignée comme *aimantation à saturation* ; les processus de rotation sont majoritaires dans cette troisième région.

Par de petites variations de champ autour d'un champ donné, on peut obtenir la susceptibilité réversible,  $\chi_{\text{rév}}$ , pour chaque point de la courbe de première aimantation (figure 6.17).

De cette valeur, comparée à celle de la susceptibilité différentielle totale, on déduit la valeur de la susceptibilité irréversible  $\chi_{\text{irr}}$ .

*Les lois expérimentales de Rayleigh* L'étude de la partie initiale de la courbe de première aimantation, celle qui correspond aux champs faibles, met en évidence les faits suivants que Rayleigh [14] avait observés dès 1887 :

- ◆ La courbe a la forme d'une simple parabole satisfaisant à l'équation :

$$M = \chi H + R H^2 \quad (6.28)$$

- ◆ Si, à partir d'un point de coordonnées  $[H_m, M_m]$  situé au sein de cette zone, on revient en arrière, la tangente à la courbe de recul est parallèle à la tangente initiale et la courbe de recul est à nouveau une parabole (voir figure 6.18) dont l'équation s'écrit :  $M_{\downarrow} - M_m = \chi (H - H_m) - (R/2) (H - H_m)^2$ , où  $M_{\downarrow}$  désigne l'aimantation du point courant obtenu en diminuant la valeur du champ ( $H < H_m$ ). Il en est de même si l'on fait à nouveau croître le champ après une phase de champ décroissant. Les constantes  $\chi$  et  $R$  sont respectivement appelées susceptibilité initiale et constante de Rayleigh.

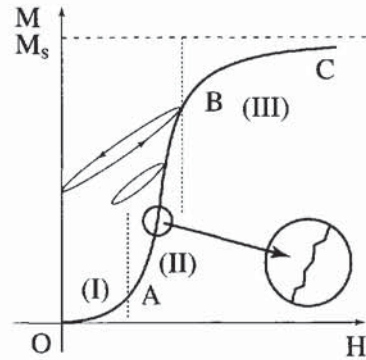


Figure 6.16 - Courbe de première aimantation d'une substance ferromagnétique

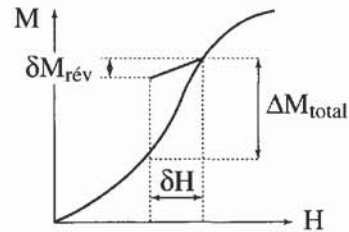


Figure 6.17 - Définition de la susceptibilité réversible  
 $\chi_{\text{rév}} = \delta M_{\text{rév}} / \delta H$

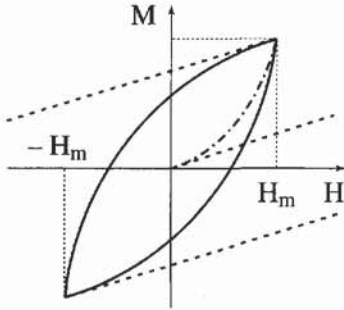


Figure 6.18 - Cycle de Rayleigh

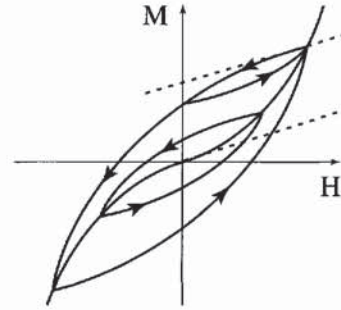


Figure 6.19 - Ensemble de cycles de Rayleigh

Brown a énoncé ces constatations sous forme d'une loi (dite *loi de Rayleigh*) qui est la suivante : *une variation  $\Delta H$  du champ magnétique, de sens inverse à la variation qui l'a immédiatement précédée, entraîne une variation de l'aimantation de même signe que  $\Delta H$ , qui vaut (en valeur absolue) :*

$$|\Delta M| = \chi |\Delta H| + (R/2) |\Delta H|^2$$

Cette loi n'est valable que si le champ reste dans l'intervalle  $(-H_m, +H_m)$ ,  $H_m$  étant la valeur absolue maximum atteinte par le champ depuis la dernière désaimantation. Sur la figure 6.19 est reporté un jeu de cycles possibles obtenus selon la loi de Rayleigh. La courbe de première aimantation est le lieu des sommets des cycles symétriques par rapport à l'origine (champ variant entre  $-H_m$  et  $+H_m$ ). Les équations des branches montante et descendante du cycle symétrique obtenu entre  $-M_m$  et  $+M_m$  sont respectivement :

$$M_{\uparrow} = (\chi + R H_m) H + (R/2) (H^2 - H_m^2) \quad (6.29)$$

$$M_{\downarrow} = (\chi + R H_m) H - (R/2) (H^2 - H_m^2) \quad (6.30)$$

D'où l'on déduit (en posant  $H = 0$  dans l'équation de la branche descendante) :

- ◆ que la rémanence vaut :

$$M_r = (R/2) H_m^2 \quad (6.31)$$

- ◆ que l'énergie dissipée lorsque l'on décrit ce cycle symétrique est :

$$W = \int H dM = \frac{4}{3} R H_m^3 \quad (6.32)$$

- ◆ et que, lorsque  $H$  passe de  $-H_m$  à  $+H_m$ , la variation d'aimantation  $\Delta M$ , qui s'écrit :  $\Delta M = 2\chi H_m + 2R H_m^2$  contient une partie réversible (le premier terme) et une partie irréversible (le deuxième terme, où  $H_m$  apparaît au carré). Par conséquent :

$$(\Delta M)_{\text{irr}} = 2R H_m^2 \quad (6.33)$$

et :

$$M_r = (\Delta M)_{\text{irr}} / 4 \quad (6.34)$$

Le domaine de validité des lois de Rayleigh diffère d'un matériau à l'autre. Il est typiquement de l'ordre de quelques dixièmes du champ coercitif. Comme on va le voir, il correspond à une zone où les barrières franchies par les parois, grâce au champ mis en œuvre, sont à peu près uniformément distribuées.

#### 4.1.2. L'aimantation d'une substance donnée peut prendre toutes les valeurs contenues dans son cycle d'hystérésis majeur

Les cycles symétriques par rapport à l'origine, tracés à partir d'un point quelconque de la courbe de première aimantation, situé avant la saturation, sont appelés *cycles mineurs* ; ils sont tous différents et leur aire est d'autant plus grande que leur point de départ correspond à un champ plus élevé (cycles 1 et 2 : figure 6.20). Lorsque la saturation est atteinte, un cycle limite est obtenu, qui est désigné sous le nom de *cycle majeur* ; il ne varie plus en fonction du point de départ (cycle 3 : figure 6.20). Sauf indication contraire, quand on parle du *cycle d'hystérésis* d'une substance, on veut désigner le cycle majeur de son aimantation.

La figure 6.21 présente un cycle majeur typique, avec deux retours à zéro en champ négatif (cycles de recul dont la pente moyenne fournit la valeur de la susceptibilité réversible). Les intersections du cycle majeur avec les axes définissent la rémanence et la coercitivité, grandeurs utilisées pour caractériser le matériau. L'aimantation

rémanente  $M_r$  est l'aimantation résiduelle en champ nul après saturation ; le champ coercitif  $H_C$  correspond au champ inverse qu'il faut appliquer pour obtenir une aimantation nulle, après que le matériau ait été saturé.

Un agrandissement des zones de descente et de montée rapides de l'aimantation fait apparaître – notamment dans le cas des matériaux doux – l'existence de sauts de Barkhausen (encart de la figure 6.21). Ces sauts peuvent être mis en évidence, et leur amplitude mesurée, grâce à la force électromotrice qu'ils induisent aux bornes d'un bobinage entourant l'échantillon (*bruit de Barkhausen*). Par leur amplitude, ils révèlent que dans ces zones – comme dans la partie centrale de la courbe de première aimantation (voir figure 6.16) – les déplacements irréversibles de paroi s'accompagnent du retournement de l'aimantation de volumes de matière importants. Dans un échantillon donné, l'amplitude du bruit de Barkhausen passe par un

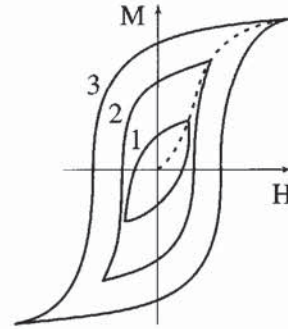


Figure 6.20 - Cycles mineurs et majeur

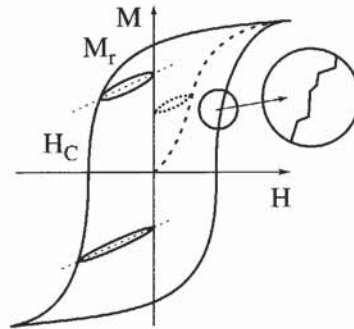


Figure 6.21 - Cycle majeur et cycles de recul

maximum deux fois par cycle quand les parois effectuent leurs plus grands sauts irréversibles, généralement au voisinage du champ coercitif  $\pm H_C$ .

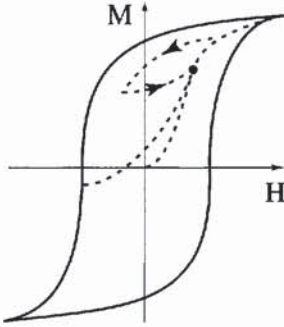


Figure 6.22 - Une infinité de chemins peuvent conduire au même point P à l'intérieur du cycle majeur

Sur les cycles mineurs, il est possible de définir également une aimantation rémanente et un champ coercitif, mais les valeurs obtenues ne sont pas caractéristiques du matériau, car elles dépendent aussi du point de départ choisi et, éventuellement, de l'histoire magnétique du matériau. En effet, un point quelconque du plan  $[H, M]$  situé à l'intérieur du cycle majeur, peut être atteint d'un très grand nombre de façons : il est l'aboutissement de chemins divers tracés dans ce plan, le système ne repassant pas par ses états précédents quand le sens du champ s'inverse (figure 6.22).

#### 4.1.3. La courbe d'aimantation anhystérétique

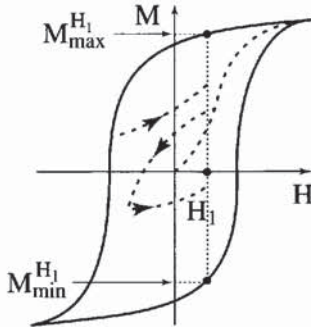


Figure 6.23 - Toutes les valeurs de M comprises entre  $M_{\min}^{H_1}$  et  $M_{\max}^{H_1}$  sont accessibles, par divers chemins

Nous venons de voir que pour une valeur donnée du champ, l'aimantation d'une substance dépend de l'histoire magnétique de cette substance. En fait, tous les points du segment  $M_{\min}^{H_1} M_{\max}^{H_1}$  (figure 6.23) sont accessibles, chacun par de nombreux chemins différents. N'existe-t-il pas d'états reproductibles, qui puissent servir d'états de référence ? Jusqu'à présent nous en avons rencontré deux : l'état thermiquement désaimanté et l'état de saturation. Il peut en exister un troisième, accessible seulement dans le cas où la coercitivité est due au phénomène d'accrochage des parois par les défauts : c'est un état à aimantation nulle, obtenu par application d'un champ alternatif dont l'amplitude décroît jusqu'à zéro depuis une valeur grande, de l'ordre de plusieurs fois  $H_C$ . Cette procédure (figure 6.24) fournit un état désaimanté à l'échelle macroscopique, qui est souvent utilisé comme état de référence ; mais les configurations microscopiques qu'il recouvre sont très nombreuses et non reproductibles. C'est seulement en partant de cet état que l'on peut observer les lois de Rayleigh [15].

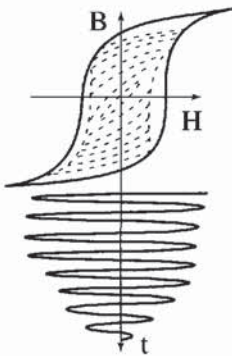


Figure 6.24 - Désaimantation sous champ alternatif évanescent

Cette procédure de champ alternatif évanescant ne conduit pas à un état de référence quand la coercitivité est largement dominée par le processus de nucléation, ce qui est le cas de beaucoup de matériaux durs.

Revenons aux matériaux doux. L'état  $M_a(0) = 0$ , obtenu par désaimantation sous champ alternatif évanescant, n'est que le premier point d'une courbe possible, dite courbe d'aimantation anhystérétique (voir § 2.5.1, chapitre 3). On obtient le point  $M_a(H_1)$  de la courbe anhystérétique correspondant à un champ donné  $H_1$  comme on a obtenu le point  $M_a(0)$ , c'est-à-dire en soumettant l'échantillon à un champ constitué de  $H_1$  – qui reste fixe – et d'un champ alternatif à valeur moyenne nulle, dont l'amplitude est initialement suffisante pour dépasser le champ de saturation et qui est, petit à petit, ramenée à zéro (ces deux champs peuvent être produits par des bobines différentes ou par la même bobine). Ce n'est qu'au bout de cette opération (figure 6.25) que la valeur  $M_a(H_1)$  est mesurée. La courbe anhystérétique ainsi construite point par point est indépendante de l'histoire magnétique antérieure de l'échantillon et elle est reproductible. Elle se situe toujours au-dessus de la courbe de première aimantation et ne présente pas de point d'inflexion. La procédure d'obtention de la courbe *idéale* anhystérétique (dépourvue d'hystérésis) revient "à secouer la structure en domaines de toutes les façons possibles autour d'un champ donné" [16]. Elle fournit donc la configuration de plus basse énergie dans ce champ.

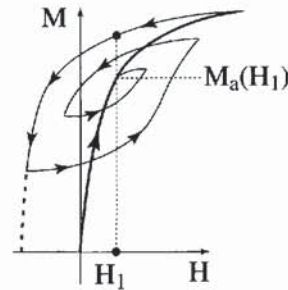


Figure 6.25 - Courbe d'aimantation anhystérétique

## 4.2. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT OBSERVÉ DANS LE DOMAINE DE RAYLEIGH

Le modèle de l'énergie potentielle irrégulièrement oscillante permet une représentation qualitative de l'hystérésis d'un système ferro ou ferrimagnétique non saturé (voir figure 6.5). Mais le passage du qualitatif au quantitatif dans les cas réels est encore hors de portée des modèles, car il est difficile de déterminer une fonction  $V(x)$  réaliste. De plus, quand les variations de champ sont d'amplitude suffisante pour que la saturation soit atteinte, interviennent aussi dans l'hystérésis le phénomène de nucléation des domaines inverses et d'autres mécanismes – d'ailleurs encore imparfaitement précisés (voir chapitre 15) – que l'on ne sait pas bien traiter. Pourtant les résultats obtenus en champs très faibles, dans le domaine de Rayleigh, ont pu être retrouvés à partir de la théorie de Néel s'appuyant sur la construction très simple mise au point par Preisach.

### 4.2.1. Représentation de Preisach

Preisach [17], reprenant une idée de Weiss et Freudenreich [18], imagine un ensemble de petits éléments possédant chacun un cycle d'aimantation rectangulaire

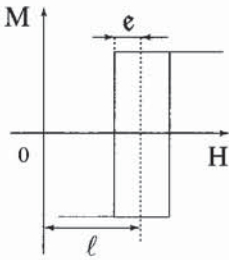


Figure 6.26 – Cycle élémentaire de Preisach

et symétrique (figure 6.26) voisin de celui qui a été précédemment obtenu (voir figure 6.5-b). Ces cycles, de demi-largeur  $e$ , sont centrés sur une valeur quelconque du champ située à une distance  $\ell$  de  $H = 0$  ( $e$  et  $\ell$  mesurent donc des champs) ;  $e$  est considéré en valeur absolue (toujours  $> 0$ ), tandis que  $\ell$  peut prendre des valeurs positives ou négatives.

En champ magnétique nul, tous les éléments pour lesquels  $\ell > e$  sont aimantés négativement, et tous ceux pour lesquels  $\ell < -e$  sont aimantés positivement. Les autres sont aimantés positivement ou négativement selon l'histoire magnétique de l'échantillon contenant l'ensemble des éléments considérés.

Si, en champ nul, l'échantillon est totalement désaimanté, cela implique qu'il y ait autant d'élément aimantés positivement que négativement. Les points représentatifs des éléments de l'échantillon sont alors uniformément répartis dans un seul demi-plan du diagramme  $[\ell, e]$ , par lequel Preisach représente l'état du système : voir figure 6.27-a, où les zones d'aimantation positive (gris sombre), négative (gris clair) ou quelconque (gris moyen) sont différenciées.

Lorsqu'un champ  $H$  positif est appliqué, tous les éléments dont le cycle correspond au champ  $\ell$  tel que  $\ell < H - e$ , sont aimantés positivement. Les autres conservent l'état d'aimantation dans lequel ils se trouvaient avant application du champ. La figure 6.27-b rend compte de cette situation : les éléments dont le point représentatif se trouve dans le triangle  $OHP$  ont vu leur aimantation se retourner ; il en est de même pour ceux des éléments de la bande  $A'OPB'$  dont l'aimantation était préalablement négative.

Le retour en champ nul ramène à un diagramme de type a (figure 6.27-c), mais si les éléments représentés par les points contenus dans le triangle  $OHP$  se sont à nouveau renversés et ont retrouvé une aimantation négative, il n'en est pas de même pour ceux de la bande  $A'OPB'$  dont l'aimantation est restée en l'état.

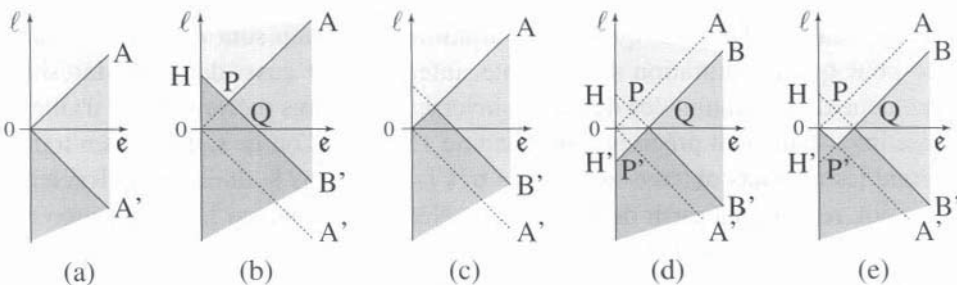


Figure 6.27 - Diagrammes de Preisach (voir texte)

Appliquer, alors – pour décrire un cycle symétrique –, un champ négatif,  $H' = -H$ , de même intensité que celui qui avait été appliqué précédemment (dans le cas de la

figure 6.27-b), conduit à la situation de la figure 6.27-d. Tous les éléments représentés par des points pour lesquels  $\ell > (-H + e)$  sont aimantés négativement. La suppression de ce champ complète le cycle, et conduit au diagramme de la figure 6.27-e. Comme précédemment, les éléments représentés par des points situés à l'intérieur du triangle OH'P' voient leur aimantation basculer vers des valeurs positives. Tous les autres restent en l'état.

Entre les deux valeurs extrêmes du champ (valeurs symétriques  $+H$  et  $-H$ ) correspondant au passage du diagramme b au diagramme d de la figure 6.27, les éléments qui ont vu leur aimantation se retourner sont ceux dont les points représentatifs occupent le triangle QHH'. Faisons l'hypothèse que la densité  $n$  de ces points dans le demi plan  $[\ell, e]$  est constante. Dans ces conditions, le nombre d'éléments affectés est proportionnel à  $H^2$ , aire du triangle en question. La partie irréversible de la variation d'aimantation  $\Delta M_{\text{irr}}$  de l'échantillon lorsque le champ varie de  $+H$  à  $-H$ , est donc proportionnelle à  $H^2$ . Compte tenu du fait que l'aimantation varie de  $2M_S$  au cours d'un renversement, on peut écrire que :

$$|\Delta M_{\text{irr}}| = 2nM_S H^2 \quad (6.35)$$

D'autre part, après avoir décrit un cycle de champ symétrique et complet, de  $H=0$  à  $H=0$ , soit du diagramme (a) au diagramme (e) en passant par les étapes b, c, et d, l'échantillon conserve une aimantation rémanente proportionnelle à la surface du carré OPQP'. Le module de l'aimantation rémanente  $M_r$  peut donc s'écrire :  $M_r = nM_S (H/\sqrt{2})^2$ , car  $(H/\sqrt{2})^2$  est la surface du carré OPQP', soit :

$$M_r = nM_S H^2/2 \quad (6.36)$$

ou encore :

$$M_r = \Delta M_{\text{irr}}/4 \quad (6.37)$$

Les résultats donnés par les relations (6.35) et (6.37), comparés aux relations (6.33) et (6.34) qui avaient pu être tirées de l'observation directe, démontrent que la représentation de Preisach (avec l'hypothèse de répartition uniforme des cycles élémentaires), constitue une bonne image du comportement des matériaux magnétiques dans le domaine de Rayleigh, à partir de cycles élémentaires que Preisach pensait être des cycles réels. Dans son modèle, que nous allons maintenant présenter, Néel a montré le caractère fictif de ces cycles pour un matériau massif ; pour des grains fins, au contraire, ces cycles sont tout à fait réalistes.

#### **4.2.2. Théorie de l'hystérésis dans le domaine de Rayleigh (potentiel aléatoire de Néel)**

Pour mieux figurer l'irrégularité des défauts de la substance, Néel [2] bâtit le potentiel  $V(x)$  correspondant à une substance ferromagnétique quelconque à partir d'une ligne brisée dont chaque segment présente la même projection égale à  $\Delta x$  sur l'axe des  $x$ , les ordonnées de chaque point de rupture de pente étant réparties au hasard autour d'une valeur moyenne nulle. Cette ligne brisée est ensuite remplacée

par une succession de morceaux de paraboles, pour supprimer les angles vifs qui ne correspondent à aucune réalité physique. Il en résulte une fonction  $(dV/dx)$ , ayant aussi une forme de ligne brisée  $A_1A_2A_3 \dots$  dont les segments ont tous une projection égale à  $\Delta x$ , et qui ressemble à celle que nous avons représentée sur la figure 6.28-a. Sur cette figure,  $x$  a été porté verticalement parce que le déplacement de la paroi selon  $x$  produit une variation proportionnelle de l'aimantation  $M$  ; l'axe portant  $(dV/dx)$  est gradué en champ magnétique, grâce à l'équation (6.7).

Supposons que lorsque le champ magnétique  $H$  prend la valeur  $H_1$ , le point représentatif du système se trouve en  $M$  sur notre schéma.

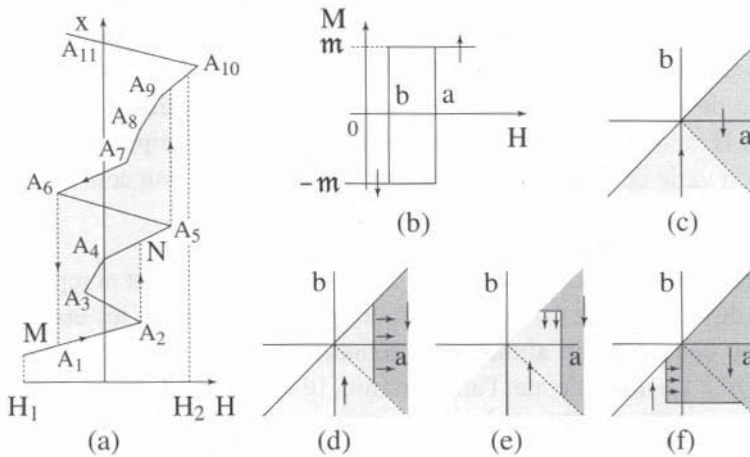


Figure 6.28 - Modèle du potentiel aléatoire de Néel

Quand le champ croît, le point représentatif vient réversiblement de  $M$  en  $A_2$  (l'égalité 6.7 restant satisfaite), puis il saute de  $A_2$  en  $N$  (saut irréversible de la paroi), et il continue ainsi de suite. Finalement, si le champ décrit un petit cycle entre les deux valeurs  $H_1$  et  $H_2$ , le point représentatif décrit un cycle représenté en gris sur le schéma (figure 6.28-a). Le cycle d'hystérésis de la substance ainsi modélisée résulte de la superposition d'un très grand nombre de tels cycles partiels.

Néel décompose ces cycles d'hystérésis partiels en cycles fictifs élémentaires plus simples. Ceux de ces cycles fictifs auxquels correspondent des termes irréversibles dans l'expression de l'aimantation (voir équations 6.28, 6.29, 6.30 ou 6.33) sont, au second ordre près des cycles rectangulaires de hauteur fixe  $2m$  dont les branches verticales correspondent à  $H=a$  et  $H=b$  (avec  $a>b$ ). Pour l'ensemble de l'échantillon,  $a$  et  $b$  se trouvent répartis avec une densité uniforme autour de la valeur 0. C'était là le point de départ de la théorie de Weiss et Freudenberg, puis de Preisach et Kondorsky, mais ils voyaient dans ces cycles des cycles d'hystérésis réels de domaines élémentaires à contour invariable.

Reprenant donc la présentation de Preisach (légèrement modifiée), Néel reporte dans le demi-plan  $[a, b]$  ( $a > b$ ) les points représentant chacun des cycles fictifs ainsi

obtenus (figure 6.28-c à 6.28-f). Après désaimantation dans un champ alternatif évanescant, la paroi est d'un côté pour la moitié des cycles, ceux pour lesquels  $a+b>0$ , et de l'autre côté pour l'autre moitié, ceux pour lesquels  $a+b<0$  : c'est ce que représente la figure 6.28-c.

On retrouve ainsi la forme du terme irréversible des lois de Rayleigh : un terme en  $H^2$  pour la courbe de première aimantation (figure 6.27-d) d'après l'équation (6.28) ; un terme en  $H^2/2$  pour la branche descendante d'un cycle de Rayleigh (figure 6.27-e) d'après l'équation (6.29) ; également un terme en  $H^2/2$  pour la branche montante (figure 6.27-f), d'après l'équation (6.30) et, moyennant une hypothèse sur la distribution des points  $A_1, A_2, A_3, \dots$  autour de  $Ox$  (par exemple une gaussienne), cette théorie fournit aussi une relation entre les constantes de Rayleigh et le champ coercitif. Elle montre en outre que le diagramme de Preisach dépend de la position des parois dans l'état désaimanté.

### 4.3. DES MATÉRIAUX DOUX AUX MATÉRIAUX DURS

Les cycles d'hystérésis des substances ou matériaux ferro ou ferrimagnétiques existants sont tous à peu près conformes au schéma présenté. Cependant, les échelles de champ  $H$  varient dans une très large gamme d'un type de matériau à l'autre. Aux extrêmes, il y a les matériaux désignés comme *doux*, dont les cycles sont très étroits (alliage fer-nickel par exemple :  $10^{-1} \text{ Am}^{-1} \leq H_C \leq 10^2 \text{ Am}^{-1}$ , voir figure 6.29-a), et les matériaux *durs*, dont les cycles sont au contraire très larges (aimant  $\text{SmCo}_5$  par exemple :  $10^4 \text{ Am}^{-1} \leq H_C \leq 2 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}$ , voir figure 6.29-b), ce qui donne un rapport supérieur à  $10^7$  entre les coercitivités des extrêmes.

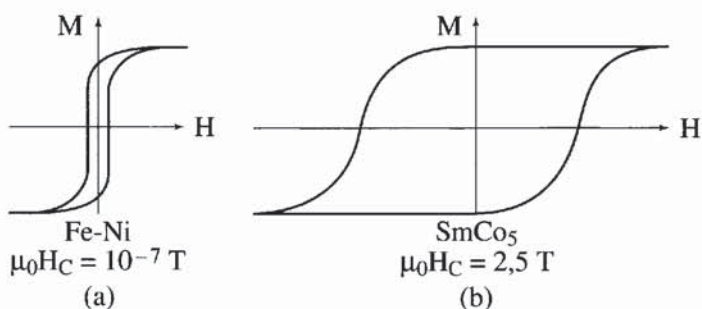


Figure 6.29 - Cycles d'hystérésis du Fe-Ni (doux) et du SmCo<sub>5</sub> (dur)

Les *matériaux doux* sont utilisés principalement pour guider et concentrer le flux, ainsi que comme amplificateurs de signal. Les qualités premières qu'on attend d'eux sont une perméabilité différentielle maximale et un cycle d'hystérésis de largeur minimale. La substance qui les compose doit donc posséder une anisotropie intrinsèque très faible, qui laisse les moments libres de tourner facilement.

Idéalement, ces matériaux devraient en outre toujours contenir un grand nombre de parois extrêmement mobiles, permettant des changements d'aimantation importants

sous l'effet de la moindre sollicitation de champ. Comme le montrent les cycles d'hystérésis, la nucléation est déjà intervenue lorsque le champ appliqué s'inverse (figure 6.29 a).

Les *matériaux durs* qui servent à la fabrication des aimants sont d'autant plus performants que leur cycle d'hystérésis est plus large et plus carré (figure 6.29-b). Cela ne peut s'obtenir que grâce à une anisotropie magnétocristalline uniaxiale très forte de la substance de base.

La coercitivité définit la largeur du cycle majeur ; pour la rendre maximale, on dispose de deux méthodes :

- ◆ Méthode la plus utilisée : empêcher le plus longtemps possible, en champ inverse croissant, la nucléation de domaines inverses et des parois qui naissent avec eux. On cherche donc, d'abord, à éviter toute nucléation spontanée ou en faible champ inverse. Pour cela, on supprime tous les défauts dont l'aimantation serait très différente de celle de la matrice et qui pourraient, de ce fait, constituer une source efficace d'effets dipolaires locaux. La présence de défauts susceptibles d'être activés par le champ inverse est très difficile à éviter, ne serait-ce qu'en bordure des grains. On s'efforce surtout d'en limiter l'efficacité en rapprochant, autant que possible, les caractéristiques magnétiques de ces défauts (notamment l'anisotropie) de celles de la matrice. On parle alors de *coercitivité de nucléation* (figure 6.14-b).
- ◆ Méthode alternative : bloquer la propagation des parois qui se sont formées, au moyen de réseaux de défauts dont le pouvoir de piégeage soit suffisamment efficace. Ce pouvoir est généralement fondé sur une forte modification locale de l'énergie de paroi, plutôt que sur la mise en œuvre d'effets démagnétisants locaux qui aboutirait, par l'existence de parois trop nombreuses, à un adoucissement du matériau. Il s'agit dans ce cas de *coercitivité de piégeage* (figure 6.14-c).

La comparaison des gammes de champ sur lesquelles s'effectuent, la première aimantation, de l'état désaimanté à la saturation, et le passage de  $-M_r$  à  $+M_s$  sur le cycle majeur, peut renseigner sur le processus principal de la coercitivité. Si la gamme des champs impliqués pour produire l'une et l'autre variations est la même, la coercitivité doit provenir de l'accrochage ou de l'immobilisation durable des parois (voir matériaux doux : figure 6.30-a et quelques matériaux durs : figure 6.30-b). Si, à partir de l'état désaimanté, la saturation est atteinte dans un champ beaucoup plus faible que celui qui est nécessaire au renversement de l'aimantation à partir de l'état rémanent, de  $-M_r$  à  $+M_s$  (la plupart des matériaux durs actuels : figure 6.31), le mécanisme d'accrochage des parois ne joue sans doute pas un rôle principal dans la coercitivité et il faut envisager les diverses étapes de la nucléation (voir chapitre 15).

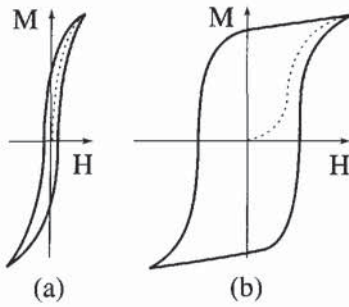


Figure 6.30 - Processus dominant : piégeage de parois

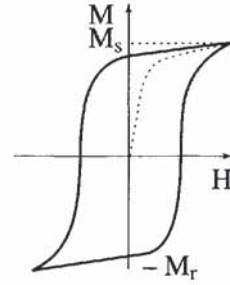


Figure 6.31 - Processus dominant : nucléation

## 5. LES TRAÎNAGES MAGNÉTIQUES : DES EFFETS À LA FOIS RETARDÉS ET AMPLIFIÉS

Que des effets magnétiques dépendant du temps interviennent dans les matériaux ferromagnétiques, cela tient évidemment surtout à leur configuration en domaines. L'équilibre fragile d'une configuration résulte de la confrontation de divers termes d'énergie, les uns ou les autres pouvant être fortement altérés localement par la présence au sein du réseau de défauts d'origines multiples.

Trois types très différents d'évolution temporelle des propriétés magnétiques doivent être distingués :

- ◆ Le *vieillissement*, «aging» en anglais, lié aux modifications irréversibles de la structure des matériaux concernés (comme, par exemple, la formation de précipités) ; ces modifications structurales peuvent accompagner des traitements mécaniques, être dues à des effets chimiques (oxydation ou autres) ou simplement résulter d'un phénomène de diffusion atomique.
- ◆ Dans le cas des substances conductrices, l'effet (purement électromagnétique) des *courants de Foucault* (eddy currents, en anglais) qui, pendant quelques secondes ou fractions de seconde, empêchent la pénétration à l'intérieur du matériau métallique d'un champ magnétique qui vient d'être appliqué ; la vitesse de déplacement des parois, mesurée par Sixtus et Tonks au sein de filaments métalliques [19], est conforme à ce que prévoient les calculs qui tiennent compte du délai imposé par les courants de Foucault.
- ◆ Les *traînages magnétiques* (magnetic after effect, en anglais) caractérisant le fait que lorsqu'à l'instant  $t_0$ , un champ magnétique est brutalement appliqué à une substance ferromagnétique (isolante ou conductrice), il induit un changement de son aimantation qui commence à un instant  $t_i$  très voisin de  $t_0$ , mais qui peut se poursuivre pendant des temps très longs au delà de  $t_i$ .

Nous nous intéressons ici seulement au troisième type cité des phénomènes dépendants du temps : le traînage magnétique. L'objet du présent paragraphe est de préci-

ser les manifestations caractéristiques du phénomène de traînage, ses conditions d'existence, et les mécanismes qui peuvent l'expliquer (déjà évoqués au chapitre 5, § 2.5). Ces mécanismes différencient le traînage de diffusion et le traînage de fluctuation.

### **5.1. DES EFFETS D'ACTIVATION THERMIQUE À L'ORIGINE DES DEUX SORTES DE TRAÎNAGE MAGNÉTIQUE**

D'une façon générale, le phénomène de traînage magnétique se manifeste non seulement par un décalage dans le temps entre l'instant de fin d'application d'un échelon de champ à un matériau et l'instant où commence l'évolution de son aimantation, mais aussi – et surtout – par la durée de cette évolution, qui peut être significative pendant des minutes ou des heures, voire quelques jours. Deux mécanismes différents sont invoqués pour expliquer ce comportement. Tous les deux impliquent la température sous une forme dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à maintenant : l'activation thermique.

L'effet thermique statistique consiste en l'apport d'une densité d'énergie distribuée uniformément dans tout le volume de l'échantillon : il provoque l'abaissement uniforme des barrières et la modification, généralement réversible, des propriétés magnétiques intrinsèques de la substance ( $K$ ,  $M$ ,  $A_{\text{éch}}$ , etc.).

L'autre effet de la température n'est pas uniforme ; en accumulant de l'énergie en tel point, puis en tel autre, au hasard d'une agitation désordonnée, il permet d'activer des processus irréversibles qui peuvent modifier radicalement l'état d'un système. Les deux mécanismes reconnus, par lesquels la configuration microscopique d'une substance magnétique peut être modifiée par l'activation thermique, sont :

- ◆ la diffusion d'espèces étrangères (petits atomes, lacunes, ...) d'un site interstitiel à un autre, susceptibles, en induisant une anisotropie uniaxiale supplémentaire au voisinage des parois, d'en modifier la position.
- ◆ la naissance de fluctuations localisées entraînant le franchissement (irréversible) de barrières d'énergie qui, jusqu'alors, maintenaient un état métastable.

Dans ce dernier cas, plus le volume concerné est petit, plus les effets d'activation thermique sont importants. Ils ne donnent naissance au traînage magnétique dit *de fluctuation* que lorsque le système considéré est proche de ses conditions d'irréversibilité, c'est-à-dire lorsque le champ appliqué, proche d'une valeur critique, a déjà beaucoup réduit la hauteur des barrières d'énergie ; les barrières qui subsistent sont alors peu élevées, et l'activation thermique permet de les franchir dans les délais qu'autorise l'expérience. Selon ce schéma, l'activation thermique provoque des fluctuations locales par rapport à l'état statistique, qui sont peu sensibles à la valeur absolue de la température.

Dans le cas d'une diffusion atomique, au contraire, les barrières d'énergie mises en jeu sont caractéristiques de la structure cristalline considérée, la contribution du

champ n'intervenant qu'au travers de la magnétostriction. Si la température est trop basse, les temps de diffusion sont trop longs pour donner lieu à des effets sensibles au cours d'expériences accessibles. Si la température est trop élevée, la diffusion est quasi immédiate et aucun effet de retard n'est observé.

Le traînage de diffusion, très sensible à la température, ne se manifeste donc que dans des gammes de température déterminées appelées *bandes de traînage*.

## 5.2. LE TRAÎNAGE MAGNÉTIQUE DE FLUCTUATIONS

### EXEMPLE DES MATÉRIAUX DURS AU VOISINAGE DU CHAMP COERCITIF

Ce type de traînage magnétique apparaît comme une variation spontanée et continue de l'aimantation avec le temps, après l'application d'une marche de champ magnétique (figure 6.32-a).

Cette variation peut intervenir chaque fois que le matériau est au voisinage immédiat de conditions critiques, aussi bien dans les zones d'existence des sauts de Barkhausen, par exemple (figure 6.32-b), que lors du renversement d'aimantation, grain par grain, d'un aimant permanent, dans la région de son champ coercitif (figure 6.32-c).

L'aimantation varie selon une loi d'allure généralement logarithmique dont la variation s'atténue avec le temps. Le coefficient de relaxation magnétique (ou encore paramètre de viscosité magnétique), noté  $S$ , caractérise ce comportement ; il est défini par le taux de variation de  $M$  en fonction du logarithme du temps, soit :

$$S = \partial M / \partial \ln t \quad (6.38)$$

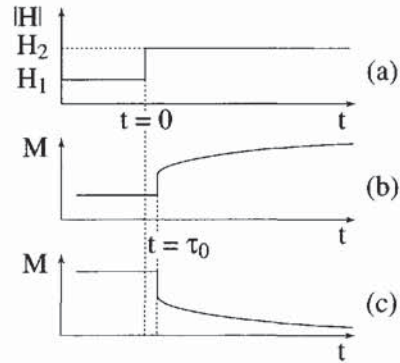


Figure 6.32 - Réponse à un échelon de champ magnétique

### 5.2.1. Fondements de l'analyse du comportement observé : application au retournement d'aimantation dans les aimants permanents

Les comportements de traînage irréversible de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques sont généralement interprétés [20, 21] comme fondamentalement reliés à un processus, thermiquement activé, de franchissement de barrières d'énergie, dans des systèmes métastables à deux niveaux (figure 6.33). Leur traitement mathématique s'appuie sur deux hypothèses classiques :

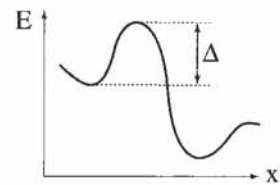


Figure 6.33  
Système à deux niveaux

- ♦ La première hypothèse concerne la variation d'aimantation avec le temps. Elle stipule que le phénomène de franchissement d'une barrière  $\Delta$  donnée, est

parfaitement aléatoire et ne dépend donc pas du temps déjà écoulé. Autrement dit : durant un petit intervalle de temps  $dt$ , la probabilité de franchissement de  $\Delta$  est la même, quel que soit le moment où l'on considère l'intervalle  $dt$ . Cette probabilité est proportionnelle à la durée de l'intervalle  $dt$  et s'écrira donc  $dt/\tau$  où  $\tau$  a les dimensions d'un temps (car une probabilité est un nombre sans dimension). Cela conduit à une loi de probabilité classique de Poisson, où le temps  $\tau$  apparaît comme le temps moyen de franchissement d'une barrière de hauteur  $\Delta$  : c'est le *temps de relaxation* associé à  $\Delta$ .

- ◆ Conformément à la seconde hypothèse,  $\Delta$  et  $\tau$  sont reliés par la loi classique de Boltzmann-Arrhenius :

$$\tau = \tau_0 \exp(\Delta/k_B T) \quad (6.39)$$

$\tau_0$  est le temps de relaxation intrinsèque et correspond au temps de franchissement d'une barrière de hauteur nulle. Compte tenu de la complexité de certains processus irréversibles d'aimantation dans les systèmes réels (processus de renversement d'aimantation par exemple),  $\tau_0$  ne correspond peut-être pas à une simple propriété intrinsèque du matériau [22, 23].

A partir de ces deux hypothèses, la variation logarithmique de l'aimantation observée en fonction du temps peut être comprise et interprétée, à condition de ne considérer que la gamme des temps normalement accessible à l'expérience. La forme de la distribution  $f(\Delta)$  des hauteurs de barrières d'énergie (voir figure 6.34) n'influe pas sur le caractère logarithmique de la variation de  $M$  dès lors que la gamme des temps d'expérience est raisonnable (de quelques fractions de secondes à quelques heures).

A titre d'exemple, considérons le phénomène irréversible majeur des matériaux ferromagnétiques : le retournement de l'aimantation, et étudions-le dans un échantillon constitué d'un ensemble de grains ferromagnétiques indépendants (modèle d'un aimant). Nous envisageons cet échantillon placé dans un champ inverse, légèrement inférieur (en module) au champ coercitif. A partir de la première hypothèse, une algèbre simple montre que, pour un grain donné, la probabilité  $P(t)$  pour que le renversement de l'aimantation intervienne entre les temps 0 et  $t$  peut s'écrire :

$$P(t) = 1 - \exp(-t/\tau) \quad (6.40)$$

Pour une assemblée de particules indépendantes identiques à la précédente, où n'existerait qu'un seul type de barrières d'énergie de hauteur  $\Delta$ , la relation ci-dessus donne aussi la proportion,  $\delta N/N$ , de grains dont l'aimantation s'est retournée durant le temps  $t$ . Elle permet donc de calculer la variation relative de l'aimantation,  $\delta M(t)/2M_0$ , où  $M_0$  est l'aimantation rémanente de l'assemblée.

Pour un système contenant des grains qui mettent en jeu une distribution  $f(\Delta)$  de barrières d'énergie (figure 6.34), la variation irréversible relative de l'aimantation avec le temps est donnée par :

$$\frac{M(t)}{M_0} = m(t, T) = \int_{\Delta=0}^{\infty} \left[ 2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right] f(\Delta) d\Delta \quad (6.41)$$

avec évidemment : 
$$\int_{\Delta=0}^{\infty} f(\Delta) d\Delta = 1.$$

L'expression du coefficient de relaxation magnétique,  $S$ , est alors :

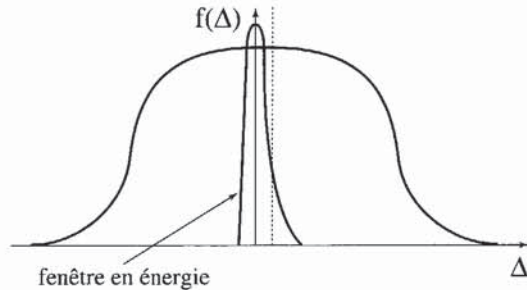
$$S = \frac{\partial M}{\partial \ln t} = t \frac{\partial M}{\partial t} = 2M_0 \int_{\Delta=0}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda) f(\Delta) d\Delta \quad (6.42)$$

où  $\lambda$  est le temps réduit, c'est-à-dire :  $\lambda = t/\tau(\Delta)$ .

Dans cette expression de  $S$ , la fonction de distribution  $f(\Delta)$  est pondérée par la fonction  $\lambda e^{-\lambda}$ , qui définit ce que l'on peut appeler une *fenêtre d'énergie*.

Du fait de l'existence de cette fenêtre (de cette pondération), une petite partie seulement de  $f(\Delta)$ , autour de  $\tau(\Delta) = t$  (c'est-à-dire caractérisée par  $\lambda = 1$ ), contribue à  $S$  (figure 6.34).

**Figure 6.34**  
**Fonction de distribution des barrières d'énergie  $f(\Delta)$  et fenêtre sélectionnant les barrières actives au temps  $t = 1$  s à 300 K**  
 Le trait pointillé vertical indique la position qu'occupera le centre de la fenêtre au temps  $t = 1000$  s.



La position et la largeur de la fenêtre sont déterminées grâce à la seconde hypothèse. La position  $\Delta_c$  de la fenêtre, à un instant  $t$  donné et à une température  $T$  fixée, correspond à :

$$\Delta_c(t, T) = k_B T \ln(t/\tau_0) \quad (6.43)$$

Les effets du temps et de la température sont donc de décaler la fenêtre d'énergie vers les plus grandes valeurs de l'énergie, le premier de façon logarithmique, le second linéairement. On peut montrer [24] que la largeur de la fenêtre est approximativement égale à  $k_B T$ .

La partie de  $f(\Delta)$  qui contribue effectivement à  $S$  (voir équation 6.42), est définie par la largeur de la fenêtre déplacée durant le temps d'observation du traînage. Aux basses valeurs de la température, la largeur de la fenêtre est faible ; la partie de la distribution des barrières d'énergie qui contribue à  $S$ , est essentiellement définie par le déplacement de  $\Delta_c$  entre l'instant initial  $t_i$  et l'instant final  $t_f$  de la période de mesure du traînage. A 300 K, pour des expériences entre  $t_i = 1$  s et  $t_f = 1000$  s, la largeur et le déplacement de la fenêtre contribuent sensiblement à égalité (figure 6.34).

Compte tenu des remarques précédentes, les expériences de traînage peuvent être analysées en considérant  $f(\Delta)$  constant, et égal à  $f(\langle \Delta_c \rangle)$  ( $\langle \Delta_c \rangle$  étant la valeur de

$\Delta_c$  prise à l'instant moyen  $t_m$ , entre  $t_i$  et  $t_f$ ). La variation de  $M$  est alors une fonction logarithmique du temps.

En tenant compte du fait que le retournement d'aimantation correspond à une décroissance de  $M$ , c'est-à-dire  $\partial M$  négatif dans l'équation (6.42), on obtient ainsi :

$$S = 2M_0 f(< \Delta_c >) \int_{\Delta=0}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda) d\Delta \quad (6.44)$$

avec :

$$\lambda = \frac{t}{\tau(\Delta)} = \frac{t}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)$$

soit :

$$S = 2M_0 k_B T f(< \Delta_c >) \quad (6.45)$$

Si l'on considère, maintenant, le cas le plus général où la variation d'aimantation serait observée sur une période de temps arbitrairement longue, à partir d'un temps initial proche de zéro, la variation temporelle de l'aimantation ne serait plus logarithmique.

Combinant la seconde hypothèse à l'équation (6.41), on obtient l'expression :

$$m(t, T) = 1 - 2 \int_0^{\Delta_c(t)} f(\Delta) d\Delta \quad (6.46)$$

Cette relation signifie que la variation de l'aimantation avec le temps est alors directement liée à la forme de la fonction de distribution  $f(\Delta)$ . Comme  $m(t, T)$  est une fonction de  $\Delta$ , une loi d'échelle en  $T \ln(t/\tau_0)$  peut être déduite. Labarta *et al.* ont reporté, sur une seule et même courbe, les valeurs de  $m(t, T)$ , obtenues à différentes températures, en fonction de la variable  $T \ln(t/\tau_0) = \Delta_c/k_B$ , en donnant à  $\tau_0$  des valeurs adaptées, c'est-à-dire en le considérant comme un paramètre ajustable [24]. Des valeurs variant entre  $10^{-12}$  s et  $5 \times 10^{-7}$  s ont ainsi été obtenues pour  $\tau_0$ .

### 5.2.2. Variation de l'aimantation avec le temps comparée à la variation de l'aimantation avec le champ : notion de champ de fluctuations

Les mécanismes intervenant dans le renversement de l'aimantation sous l'effet de l'activation thermique, en particulier dans un matériau dur, ne sont pas exactement connus. Ils diffèrent certainement de ceux qui sont mis en œuvre lorsque ce phénomène se produit sous l'influence d'un accroissement du champ inverse appliqué. Pourtant, la comparaison des résultats produits par ces deux processus permet de quantifier les effets de l'activation thermique en introduisant un *coefficient de viscosité magnétique*  $S_v$  et un *champ de fluctuations*, proposé pour la première fois par Néel en 1950 [20].

Le coefficient de viscosité magnétique est défini comme :  $S_v = S/\chi_{irr}$ , où  $\chi_{irr}$  représente la susceptibilité irréversible en l'absence d'effets d'activation thermique. Autour d'une valeur donnée de  $M(t=0, T)$ , une petite variation de  $M$  est proportionnelle à la valeur correspondante de  $f(\Delta)$  et  $\chi_{irr}$  peut être écrit comme :

$$\chi_{irr} = 2M_0 f(\Delta) \partial\Delta/\partial H \quad (6.47)$$

Ainsi, l'expression de  $S_v$  est :

$$S_v = \frac{2M_0 f(\Delta) k_B T}{2M_0 f(\Delta) \partial \Delta / \partial H} = \frac{k_B T}{\partial \Delta / \partial H} \quad (6.48)$$

Cette expression n'est valide que si la même valeur de  $f(\Delta)$  est impliquée dans les mesures de  $S$  et de  $\chi_{irr}$ , ce qui oblige à quelques précautions dans la mise en œuvre des expériences [25, 26].

La combinaison des équations (6.45) et (6.47) donne accès à l'expression de la variation de champ  $\delta H_{i,j}$  qui conduirait à la même variation d'aimantation que l'effet du traînage magnétique entre les temps  $t_i$  et  $t_j$  :

$$\chi_{irr} \delta H_{i,j} = S \ln(t_i/t_j) \quad (6.49)$$

Cette dernière relation implique que les courbes d'aimantation mesurées au voisinage du champ coercitif, avec des retards différents  $t_i$  et  $t_j$  par rapport à l'instant de fin d'application des marches de champ, soient décalées les unes par rapport aux autres d'un champ  $\delta H_{i,j}$  qui vaut :

$$\delta H_{i,j} = S_v \ln(t_i/t_j) \quad (6.50)$$

Par extension, la courbe relevée au bout du temps  $t$  après l'instant de fin d'application des marches de champ (origine des temps :  $t=0$ ) est décalée, par rapport à la courbe hypothétique qui serait relevée au temps  $t=0$ , d'un champ  $H_{eff}$  :

$$H_{eff} = S_v \ln(t/\tau_0) \quad (6.51)$$

$H_{eff}$  est ce que l'on appelle le *champ de fluctuations* et, plutôt que le coefficient de viscosité magnétique (sa dénomination usuelle),  $S_v$  apparaît être le coefficient de champ de fluctuations. Des portions de cycle d'hystérésis tracées point par point à plusieurs temps  $t$  au voisinage de  $H = H_C$  (figure 6.35), ont permis de vérifier la relation (6.50) ; la courbe qu'une expérience, impossible à réaliser, aurait fournie au temps origine est déduite de l'équation (6.51).

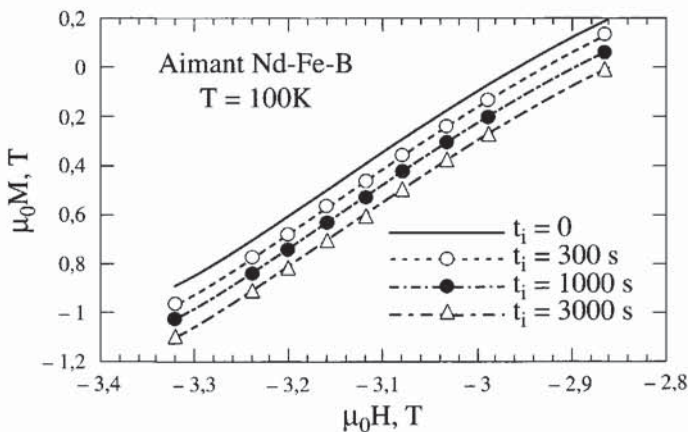
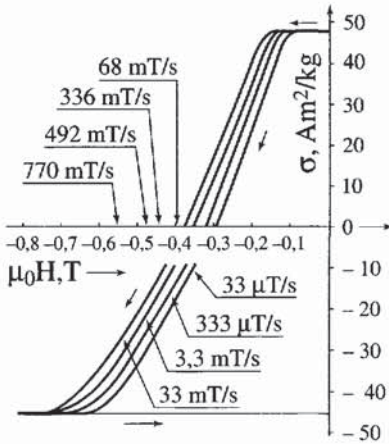


Figure 6.35 - Portions de la même zone du cycle d'hystérésis proches du champ coercitif d'un aimant Nd-Fe-B, obtenues point par point à 100 K, après avoir attendu un temps  $t_i$  variable. La courbe en trait plein, inaccessible à l'expérience, est déduite des autres grâce à la relation (6.51).

L'existence du traînage de fluctuation impose des précautions et la prise en compte des effets du temps, notamment lors des mesures du champ coercitif à l'aide d'appareils à balayage de champ (figure 6.36).



**Figure 6.36**  
Portions de cycles d'hystérésis  
de  $\text{SmCo}_{3,5}\text{Cu}_{1,5}$  [27]

Les cycles sont très sensibles à la vitesse de balayage en champ. Plus celle-ci est élevée et plus élevé est aussi le champ coercitif mesuré.

En examinant plusieurs séries de matériaux possédant des champs coercitifs étalés sur plus de quatre ordres de grandeurs, Barbier a mis en évidence un lien possible entre  $H_C$  et  $S_v$ , qui se traduit par la relation empirique :  $S_v = H_C^{1,59}$  [28]. Cette relation tient encore lorsque l'on rajoute aujourd'hui les points correspondant aux aimants modernes ( $\text{NdFeB}$ ). Une interprétation ( $S_v \approx H_C^{1,5}$ ) a pu être donnée [26], qui s'appuie sur le concept de volume d'activation, introduit par Wohlfarth en 1985 [29]. Ce volume d'activation,  $V$ , serait le volume dans lequel le champ de fluctuation effectif  $H_{\text{eff}}$  pourrait produire les effets d'un champ réel (voir § 7.3.2. du chapitre 15). Dans le domaine des matériaux durs et des matériaux pour mémoires magnétiques, ces notions de champ de fluctuation et de volume d'activation se sont révélées très importantes pour l'analyse des comportements observés.

### 5.3. LE TRAÎNAGE MAGNÉTIQUE DE DIFFUSION

Ce phénomène, lié à la diffusion réversible d'atomes et/ou de lacunes entre sites interstitiels du réseau d'un matériau magnétique, a été observé dès la fin du siècle dernier, et largement étudié depuis, par Richter [30], et bien d'autres [5]. Il n'existe que dans les substances pouvant contenir des impuretés de petite taille dans des sites interstitiels (carbone, azote, ...), et se manifeste seulement dans la gamme des températures où la diffusion de ces impuretés est suffisante.

#### 5.3.1. Une anisotropie uniaxe localisée, thermiquement activée

L'exemple type du matériau présentant ce phénomène est le fer ( $\alpha\text{-Fe}$ , réseau cubique centré), où des atomes de carbone peuvent occuper les sites situés à mi-chemin entre deux atomes de fer le long des trois directions de référence  $O_x$ ,  $O_y$  et

Oz, notés respectivement : sites x, sites y et sites z (figure 6.37). Snoek [31] explique que lorsqu'un atome de carbone occupe un site, il écarte les atomes de fer qui l'entourent, rendant moindre la dépense en énergie magnétoélastique qui accompagne l'orientation des moments selon la direction associée (en cas de magnétostriction positive).

Il existe donc un lien entre l'occupation préférentielle d'une famille de sites et la direction de l'aimantation au voisinage immédiat de ces sites. Autrement dit, l'énergie magnétique globale d'un système à l'équilibre, correspondant à une certaine configuration des domaines, s'abaisse progressivement (constituant un puits de potentiel de plus en plus profond) au fur et à mesure de la diffusion des atomes de carbone vers les sites associés à la direction de l'aimantation dans les divers domaines. Snoek traduit ce fait en comparant le système magnétique à une bille massive posée sur un support recouvert d'une substance pâteuse qui se creuse sous l'effet du poids de la bille, pourvu que celle-ci occupe la même place pendant un temps suffisamment long (figure 6.38).

Ainsi, Snoek, considérant que la contrainte magnétostrictive, due à la présence d'un atome en position interstitielle, favorise l'alignement des moments magnétiques dans la direction correspondante, décrit le phénomène par le biais d'une anisotropie uniaxe locale, induite par la contrainte. Tout en conservant les principes de base du mécanisme imaginé par Snoek, Néel attribue la principale cause d'anisotropie induite par la diffusion des atomes, à un effet dipolaire (anisotropie de l'échange) plutôt qu'à l'effet magnétoélastique, ce qui est confirmé par les travaux expérimentaux sur  $\alpha$ -Fe de [32]. En outre, un effet de traînage magnétique est également observé dans des substances ne présentant aucun traînage de la déformation élastique, par exemple dans certains ferrites.

Quelle que soit l'origine de l'anisotropie uniaxe locale engendrée par la diffusion des atomes, le point important du modèle est l'existence de cette anisotropie induite par l'activation thermique, *via* la diffusion. Dans la gamme des températures où la diffusion est significative mais non instantanée, l'application d'un champ magnétique ne peut donner lieu à l'établissement immédiat d'une configuration d'équilibre. L'aimantation macroscopique évolue pendant un certain temps, accompagnant la diffusion des impuretés au voisinage des parois, surtout à  $90^\circ$ .

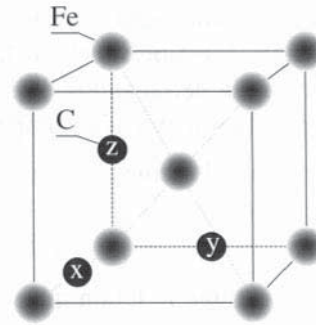


Figure 6.37 - Sites interstitiels du carbone dans le fer-alpha

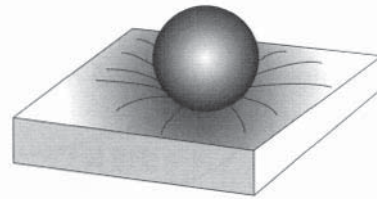


Figure 6.38  
Modèle de la bille de Snoek

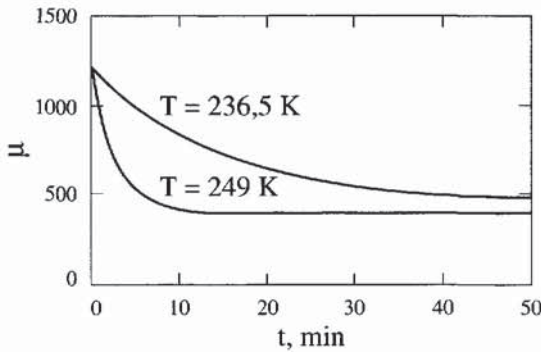
### 5.3.2. La désaccommodation

Le phénomène ainsi désigné est une manifestation spectaculaire du traînage de diffusion. Il est présenté sur la figure 6.39 et consiste en une diminution, avec le temps, de la perméabilité en régime alternatif mesurée en champ faible, après une désaimantation obtenue par application d'un champ alternatif évanescent.

En fonction du temps  $t$ , écoulé entre la désaimantation et la mesure, la perméabilité varie comme :

$$\mu(t) = \mu(\infty) + [\mu(0) - \mu(\infty)]\psi(t) \quad (6.52)$$

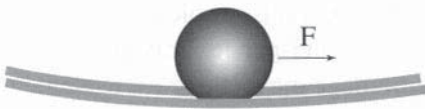
où  $\psi(t)$  est une fonction qui vaut 1 quand  $t = 0$  et qui tend exponentiellement vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. La différence  $\mu(0) - \mu(\infty)$  peut aller jusqu'à avoisiner 50% de  $\mu(0)$  : le phénomène est donc considérable.



**Figure 6.39**  
Evolution dans le temps de la perméabilité magnétique

La perméabilité relative d'un acier au carbone évolue d'autant plus vite que la température est plus élevée.

Ses causes sont bien explicitées par le modèle proposé par Snoek, et schématisé par la figure 6.38 : quand la bille massive, représentant le système magnétique, roule d'une position à une autre, elle est très mobile et peut aisément être déplacée par des forces même faibles ; mais si elle s'arrête en un point et qu'elle y demeure quelque temps, elle perd progressivement sa mobilité au fur et à mesure qu'elle s'enfonce dans le revêtement pâteux sur lequel elle est posée (figure 6.40).



**Figure 6.40** - Comme une bille pesante reposant sur un sol mou, la paroi "creuse son trou" au bout d'un temps plus ou moins long : il faut alors exercer un effort plus important pour la déplacer

La perméabilité en champs faibles mesure la mobilité des parois. Sa forte décroissance en fonction du temps écoulé depuis la dernière modification notable du champ, indique que les parois se sont stabilisées dans leur position d'équilibre. Cet effet provient de l'apparition de l'anisotropie uniaxiale locale engendrée par la diffusion, à la fois au sein des domaines et dans les parois, puisque la direction de cette anisotropie correspond à la direction locale de l'aimantation. Les parois voient baisser leur énergie en restant longtemps dans une même position. Tout déplacement de parois élèvera donc leur énergie, en les tirant du puits de potentiel creusé pendant leur temps d'immobilité. La force qui tend à les maintenir dans ce

puits peut être considérée comme une force de rappel, à rajouter à celles que nous avons considérées au paragraphe 2 de ce chapitre, et qui étaient associées à des défauts de réseau. Ainsi la relation d'équilibre (6.5) doit s'écrire ici :

$$F_r + F_d + F_H = 0 \quad (6.53)$$

où  $F_d$ , qui tient compte de l'anisotropie induite par l'activation thermique *via* la diffusion, aura la forme :

$$F_d(u) = K_a f'(u) \quad (6.54)$$

ou 
$$F_d(u) = K_a f''(u) \quad (6.55)$$

respectivement pour une paroi à  $90^\circ$  ou une paroi à  $180^\circ$  se déplaçant de  $u$  [33] ;  $K_a$  est une constante du matériau liée à l'énergie d'anisotropie uniaxiale par :

$$E_K = -K_a (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2) \quad (6.56)$$

les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i$  sont les cosinus directeurs relatifs respectivement à la direction de l'aimantation et à celle de l'anisotropie induite. Les formes des fonctions  $f'(u)$  et  $f''(u)$  données par Néel sont présentées sur les figures 6.41 et 6.42 ; dans le second cas, la fonction s'annule si  $u$  tend vers l'infini, car aucune contrainte magnétostrictive à longue distance n'est induite en présence de parois à  $180^\circ$ .

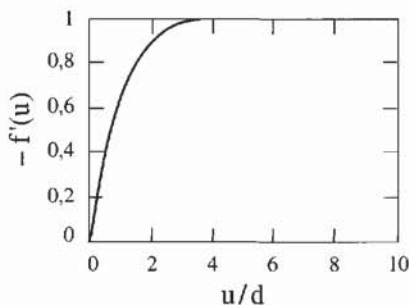


Figure 6.41

Variations de  $-f'(u)$  en fonction de  $u/d$

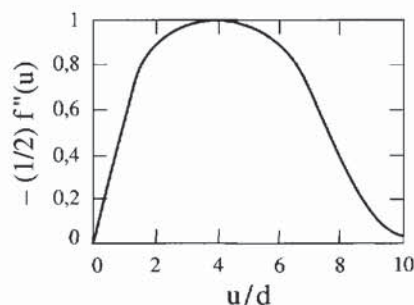


Figure 6.42

Variations de  $-f''(u)/2$  en fonction de  $u/d$

La distance  $d$  est définie par la relation :  $d = d_0 (E/6K)^{1/2}$ , où  $d_0$  est la distance entre atomes interagissant magnétiquement, et  $E$  est l'énergie de champ moléculaire et  $K$  l'énergie d'anisotropie magnétocristalline.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. KERSTEN, *Phys. Zeits.* (1938) **39**, 860 ; M. KERSTEN, *in* Probleme der Technischen Magnetisierungskurve, éditeur R. Becker (1938) Springer, Berlin, p. 42.
- [2] L. NÉEL, *Oeuvres complètes* (1978) Editions du CNRS, Paris, **A 45**, p. 269 ; *Cahiers de Physique* (1942) **12**, 1 ; *Cahiers de Physique* (1943) **13**, 1.
- [3] S. CHIKAZUMI, *Physics of Magnetism* (1964) Wiley & sons, New York.

- [4] R. BECKER, *Phys. Zeits.* (1932) **33**, 905.
- [5] R. BECKER AND W. DÖRING, *Ferromagnetismus* (1939) J. Springer, Berlin.
- [6] E. KONDORSKY, *Physik. Z. Sowjet.* (1937) **11**, 597.
- [7] K. HOSELITZ, in *Ferromagnetic Properties of Metals and Alloys* (1952) Oxford University Press, Oxford.
- [8] M. KERSTEN, *Phys. Zeits.* (1943) **44**, 63.
- [9] L. NÉEL, *Cahiers de Physique* (1944) **25**, 21.
- [10] L. NÉEL, *Annales Univ. Grenoble* (1946) **22**, 299.
- [11] M. KERSTEN, *Z. Angew. Phys.* (1956) **7**, 313.
- [12] W.F. BROWN JR., *Micromagnetics* (1963) Interscience Publishers, N. Y., p. 68.
- [13] W.F. BROWN JR., *Rev. Modern Phys.* (1945) **17**, 15.
- [14] LORD RAYLEIGH, *Phil. Mag.* (1887) **23**, 225.
- [15] P. MOLHO, Thèse (1986) Université de Grenoble.
- [16] J.L. PORTESEIL, *Techniques de l'Ingénieur, Electronique* (1989) E 1730, 1
- [17] F. PREISACH, *Z. Physik* (1935) **94**, 277.
- [18] P. WEISS, J. DE FREUDENREICH, *Arch. Sci. (Genève)* (1916) **42**, 449.
- [19] K.J. SIXTUS, L. TONKS, *Phys. Rev.* (1931) **37**, 930 ; *Phys. Rev.* (1932) **42**, 419.
- [20] L. NÉEL, *J. Phys. Radium* (1950) **11**, 49 ; *J. Phys. Radium* (1951) **12**, 339.
- [21] R. STREET, J.C. WOOLLEY, *Proc. Phys. Soc.* (1949) **62 A**, 562.
- [22] J.M. GONZALEZ, R. RAMIREZ, R. SMIRNOV-RUEDA, J. GONZALEZ, *Phys. Rev.* (1995) **B 52**, N° 22, 16034.
- [23] J.C. TOUSSAINT, B. KEVORKIAN, D. GIVORD, M.F. ROSSIGNOL, Proc. 9th Intern. Symposium on Magnetic Anisotropy and Coercivity in Rare-Earth Transition-Metals Alloys, vol. 2 (1996) éd. F. P. Missel, V. Villas Boas, H. R. Rechenberg, World Scientific, Singapore.
- [24] A. LABARTA, O. IGLESIAS, L. BALCELLS, F. BADIA, *Phys. Rev.* (1993) **B 48**, 10240.
- [25] D. GIVORD, M.F. ROSSIGNOL, V. VILLAS-BOAS, F. CEBOLLADA, J.M. GONZALEZ, Proc. 9th Intern. Symposium on Magnetic Anisotropy and Coercivity in Rare-Earth Transition-Metals Alloys, vol. 2 (1996) éd. F. P. Missel, V. Villas Boas, H.R. Rechenberg, World Scientific, Singapore, 21.
- [26] Y. ESTRIN, P.G. MCCORMICK, R. STREET, *J. Phys. Condens. Matter* (1989) **1**, 4845.
- [27] M. UEHARA, *J. Appl. Phys.* (1978) **49**, 4155.
- [28] J.C. BARBIER, *Ann. Phys.* (1954) **9**, 84.
- [29] E.P. WOHLFARTH, *J. Phys. F* (1985) **14**, L155.
- [30] G. RICHTER, *Ann. Phys.* (1937) **29**, 605 ; *Ann. Phys.* (1938) **32**, 683.
- [31] J.L. SNOEK, *Physica* (1938) **5**, 663 ; *Ann. Phys.* (1939) **6**, 161.
- [32] G. DE VRIES, D.W. VAN GEEST, R. GERSDORF, G.W. RATHENAU, *Physica* (1959) **25**, 113.
- [33] L. NÉEL, *J. Phys. Rad.* (1952) **13**, 249.

# CHAPITRE 7

## MAGNÉTISME DANS LE MODÈLE DES ÉLECTRONS LOCALISÉS

(de caractère plus fondamental, ce chapitre peut être ignoré en première lecture ;  
il suppose connues les bases de la mécanique quantique).

*Dans ce chapitre, nous introduisons tout d'abord les deux contributions au moment cinétique et en conséquence au moment magnétique d'un électron, à savoir les contributions orbitale et de spin. Puis nous décrivons, en faisant appel à la mécanique quantique, comment dans un atome ou ion libre les contributions de chaque électron se combinent pour donner le moment magnétique total. Nous montrons ensuite que, tandis que la plupart des éléments portent un moment magnétique lorsqu'ils sont isolés, seuls quelques uns conservent un moment lorsqu'ils font partie d'un édifice atomique (molécule, liquide, solide, ...). Ces éléments sont ceux qui comportent une couche électronique 3d, 4f ou 5f incomplète et qui appartiennent donc respectivement aux séries du fer, des lanthanides (ou terres rares) et des actinides. Leurs principales caractéristiques sont brièvement décrites.*

### 1. MAGNÉTISME DE L'ATOME OU DE L'ION LIBRE

#### 1.1. CAS D'UN SEUL ÉLECTRON

##### 1.1.1. Moment magnétique orbital

Nous avons vu au chapitre 2 que le moment magnétique  $\mathbf{m}$  associé à une répartition de courant de densité  $\mathbf{j}$  occupant le volume  $V$  est donné par :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \quad (7.1)$$

Considérons maintenant le cas d'un électron au sein d'un atome. Soient  $\mathbf{v}$  sa vitesse et  $\mathbf{r}$  sa position à un instant donné, alors :

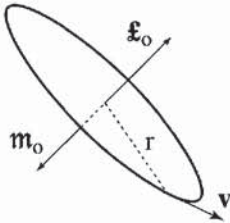
$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (7.2)$$

où  $-e$  est la charge de l'électron ( $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C). La distribution  $\delta(\mathbf{r})$  a les dimensions de l'inverse d'un volume, car son intégrale sur l'espace vaut 1.

En reportant cette expression dans l'équation (7.1), on obtient le moment magnétique orbital (c'est-à-dire correspondant au mouvement de l'électron sur son orbite) :

$$\mathbf{m}_o = -(e/2) \mathbf{r} \times \mathbf{v} = -(e/2m_e) \mathbf{L}_o \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$  est le moment cinétique orbital de l'électron et  $m_e$  sa masse. Ce résultat, tout à fait général, fait apparaître que le *moment magnétique orbital d'une particule chargée est proportionnel à son moment cinétique*.



**Figure 7.1**  
Représentation schématique  
du moment orbital d'un électron

Il est facile de retrouver la formule (7.3) en utilisant la représentation simpliste de la figure 7.1 d'un électron parcourant à la vitesse  $v$  une orbite circulaire de rayon  $r$ .

A ce stade il est nécessaire, pour aller plus loin, de faire appel à la mécanique quantique. Selon celle-ci, les états stationnaires d'un électron soumis au potentiel du noyau et au potentiel moyen dû aux autres électrons sont caractérisés par 4 nombres quantiques  $n$ ,  $\ell$ ,  $m$  et  $\sigma$ .

Rappelons que :

- ◆ le nombre quantique *principal*  $n$  peut prendre comme valeur 1, 2, 3, 4, ...
- ◆ pour  $n$  donné, le nombre quantique *orbital*  $\ell$  peut prendre des valeurs entières telles que  $0 \leq \ell \leq n - 1$ . Pour  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$  on parle d'états s, p, d, f, ...
- ◆ pour  $\ell$  donné, le nombre quantique *azimutal*  $m$  peut prendre des valeurs entières telles que  $-\ell \leq m \leq \ell$ ,
- ◆ enfin le nombre quantique de *spin*  $\sigma$  peut prendre les deux valeurs  $\pm 1/2$ .

Le moment cinétique orbital associé à ces états s'écrit :

$$\mathbf{L}_o = \hbar \ell \quad (7.4)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ ,  $\hbar = h/2\pi = 1,054 \times 10^{-34}$  J.sec, et  $\ell$  un opérateur vectoriel sans dimension, que l'on appelle souvent moment cinétique orbital. Les valeurs propres de  $\ell^2$  et de  $\ell_z$  sont caractérisées par deux nombres quantiques entiers  $\ell$  et  $m$  de sorte que, pour un état donné caractérisé par  $\ell$  et  $m$  :

$$\langle \ell^2 \rangle = \ell(\ell + 1) \text{ et } \langle \ell_z \rangle = m, \quad (7.5)$$

où l'axe  $z$  est l'axe de quantification (par exemple, la direction d'un champ magnétique). Pour un état  $\ell$  donné le nombre quantique  $m$  peut prendre les  $2\ell + 1$  valeurs entières :  $m = \ell, (\ell - 1), \dots, 0, \dots, -(\ell - 1), -\ell$ .

La proportionnalité entre les moments cinétique et magnétique orbitaux (relation 7.3) conduit à :

$$\mathbf{m}_o = -(\hbar e/2m_e) \ell = -\mu_B \ell \quad (7.6)$$

où  $\mu_B = (\hbar e/2m_e) = 0,92732 \times 10^{-23}$  Am<sup>2</sup> est le "*magnéton de Bohr*".

C'est la plus petite valeur possible du moment magnétique électronique. C'est pourquoi elle est très souvent utilisée comme unité de mesure du magnétisme au niveau atomique.

Bien qu'une représentation spatiale ne puisse rendre compte des spécificités de la mécanique quantique, elle permet de visualiser cette propriété des moments magnétiques et cinétiques orbitaux. La figure 7.2 donne un exemple de ce type de représentation pour  $l = 2$ . Ainsi, alors qu'en mécanique classique le moment cinétique (et magnétique) peut prendre n'importe quelle direction et n'importe quel module, la mécanique quantique montre que son module et sa projection sur un axe donné ne peuvent prendre que des valeurs discrètes bien définies.

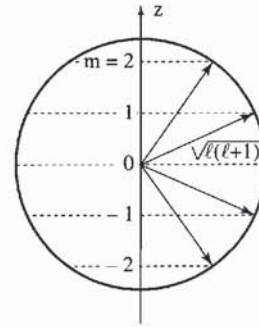


Figure 7.2  
Représentation spatiale  
des moments cinétiques orbitaux

### 1.1.2. Moment magnétique de spin

Le magnétisme orbital n'est en fait pas la seule contribution des électrons au magnétisme. Expérimentalement, Stern et Gerlach ont montré que l'électron possède aussi un moment magnétique intrinsèque associé à un moment cinétique intrinsèque, que l'on a pris l'habitude d'appeler le "spin", car une manière inexacte mais pratique de se représenter cet effet est d'imaginer l'électron en rotation sur lui-même (en anglais, *to spin* signifie tourner sur soi-même). L'électron ne peut avoir que deux états de spin caractérisés par  $\sigma = \pm 1/2$ . Le moment cinétique associé s'écrit :

$$\mathbf{L}_s = \hbar \mathbf{s} \quad (7.7)$$

où  $\mathbf{s}$  est un opérateur vectoriel sans dimension appelé «spin». Les valeurs propres de  $s^2$  et  $s_z$  sont caractérisées par les nombres quantiques  $s = 1/2$  et  $\sigma = \pm 1/2$ . Pour un état  $\sigma$  donné, on a :

$$\langle s^2 \rangle = s(s+1) = 3/4 \text{ et } \langle s_z \rangle = \sigma \quad (7.8)$$

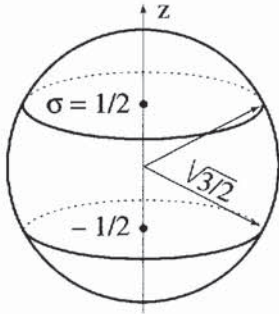
Le moment magnétique de spin est, comme le moment orbital, proportionnel au moment cinétique de spin mais la constante de proportionnalité a la particularité d'être deux fois plus grande que pour l'orbite de sorte que :

$$\mathbf{m}_s = -2 \mu_B \mathbf{s} \quad (7.9)$$

Il en résulte que  $\langle (m_s)_z \rangle = \pm 1 \mu_B$ . Le magnéton de Bohr apparaît ainsi comme la quantité fondamentale du magnétisme atomique.

Les caractéristiques des moments magnétiques orbitaux et de spin sont représentées de manière schématique sur la figure 7.3.

Les relations (7.6) et (7.9) nous montrent que le moment magnétique total  $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_s$  n'est généralement pas colinéaire au moment cinétique total  $\mathbf{L}_t = \hbar(\mathbf{l} + \mathbf{s})$ , sauf cas particulier. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.



**Figure 7.3**  
Représentation spatiale des moments cinétiques de spin

**Remarque** : toute particule possède un moment magnétique et un moment cinétique intrinsèque. Par exemple pour le proton :  $\mathbf{m} = g(\hbar e/2m_p) \mathbf{x}$  où  $e$  et  $m_p$  sont respectivement la charge et la masse du proton. Le facteur  $g$  n'est pas égal à 2 comme pour l'électron, mais à 2,793. Bien que le neutron ne porte pas de charge électrique, il possède un moment magnétique et un moment cinétique intrinsèques reliés par la même formule, avec un facteur  $g$  qui vaut  $-1,913$ . Signalons enfin que la masse de ces particules étant environ 2000 fois plus grande que celle de l'électron, leur moment magnétique est trois ordres de grandeur plus faible que le moment magnétique électronique, donc totalement négligeable en magnétisme macroscopique.

### 1.1.3. Les états électroniques individuels ou atomes hydrogénoïdes

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principales étapes qui conduisent à la description des états électroniques à un seul électron. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se reporter à l'abondante littérature qui traite de ce sujet [1].

Les états stationnaires d'un électron soumis à un potentiel central  $V(\mathbf{r})$  sont obtenus à partir de l'équation de Schrödinger :

$$\mathcal{H}\phi = E\phi \quad (7.10)$$

où l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  a pour expression  $\mathbf{p}^2/2m_e + V(\mathbf{r})^*$ . Pour l'atome d'hydrogène, le potentiel s'écrit tout simplement  $V(\mathbf{r}) = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$  où  $r$  est la distance entre l'électron et le noyau. Pour les autres atomes, nous verrons qu'il s'agit du potentiel central dû au noyau ( $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$ ) et à une distribution moyenne sphérique provenant des autres électrons.

La résolution de l'équation (7.10) conduit aux énergies propres  $E_{n,\ell}$  et aux états propres avec leurs fonctions d'onde associées  $\phi_{n,\ell,m}(\mathbf{r}) = R_{n,\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , qui sont le produit d'une partie radiale,  $R_{n,\ell}(r)$ , par une partie angulaire (les  $Y_\ell^m$  sont des *harmoniques sphériques* qui sont définis en annexe 6, § A6.1). La densité de probabilité de présence de l'électron au point  $\mathbf{r}$  est égale au produit  $\phi\phi^*$ .

Dans le cas de l'hydrogène, les niveaux d'énergie ne dépendent que de  $n$  et s'écrivent  $E_n = -E_R/n^2$  où le "Rydberg"  $E_R = 13,6$  eV correspond à l'énergie du niveau fondamental (le plus bas niveau d'énergie possible).

Pour les autres atomes (ou ions) chaque  $E_{n,\ell}$  dépend du numéro atomique de l'élément et du nombre d'électrons considérés dans le potentiel central. La figure 7.4 montre schématiquement les niveaux d'énergie (ou plutôt leur racine carrée) pour

\*  $\mathbf{p}$  est l'opérateur quantité de mouvement.

un électron lorsque les niveaux inférieurs sont occupés par d'autres électrons. Ce schéma permet de comprendre l'ordre de remplissage des différentes couches électroniques.

En fait la fonction d'onde totale  $\phi$  d'un électron est le produit de la fonction d'onde orbitale ci-dessus par une fonction d'onde de spin :  $\psi_{n,\ell,m,s} = \phi_{n,\ell,m}(\mathbf{r}) \cdot \chi_\sigma$ , où  $\chi_\sigma$  correspond à l'état de spin caractérisé par  $\sigma$ .

Chaque niveau d'énergie, ou chaque *sous-couche*, est donc  $2(2\ell + 1)$  fois dégénérée, c'est-à-dire que  $4\ell + 2$  états électroniques différents présentent cette même énergie.

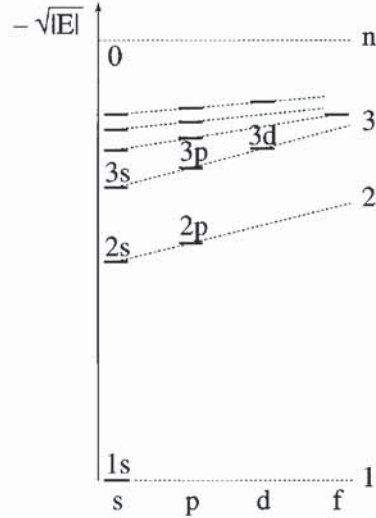


Figure 7.4 - Schéma des niveaux d'énergie pour un électron dans un atome

## 1.2. ATOME AYANT UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉLECTRONS

### 1.2.1. Méthode de Hartree - Approximation du champ central : les configurations

L'hamiltonien électronique d'un atome ayant un nombre quelconque d'électrons a pour expression :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{s.o.} \tag{7.11}$$

Ze étant la charge du noyau et N le nombre d'électrons,  $\mathcal{H}_e$  s'écrit :

$$\mathcal{H}_e = \sum_i \left[ \frac{p_i^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right] + \sum_{i>k} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}} \tag{7.12}$$

$\mathcal{H}_{s.o.}$  est l'hamiltonien de couplage spin-orbite. Nous verrons plus loin son origine ainsi que son traitement ; notons que cette contribution est petite devant les autres. L'équation de Schrödinger d'un tel système est impossible à résoudre directement. Cependant cet obstacle a été surmonté en réécrivant  $\mathcal{H}_e$  de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \tag{7.13}$$

où :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \left[ \frac{p_i^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + U(r_i) \right] \tag{7.14}$$

et :

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{i>k} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}} - \sum_i U(r_i) \tag{7.15}$$

$U(r)$  est un potentiel fictif central tel que, s'il est bien choisi,  $\mathcal{H}_1$  est suffisamment petit devant  $\mathcal{H}_0$  pour être traité comme une perturbation bien qu'aucune des deux

contributions de  $\mathcal{H}_1$  ne soit petite.  $U(r)$  est obtenu par itération (champ autocohérent de Hartree) et représente assez bien le potentiel répulsif moyen sphérique agissant sur un électron et provenant de l'ensemble des autres électrons. En ne considérant en première approximation que  $\mathcal{H}_0$ , nous sommes donc ramenés à considérer un ensemble d'électrons indépendants soumis à un potentiel central. La description de l'état d'un atome est alors très simple : il suffit de préciser que parmi les  $N$  électrons, il y en a un dans l'état  $\psi_{n_1, \ell_1, m_1, s_1}$ , un autre dans l'état  $\psi_{n_2, \ell_2, m_2, s_2}$  etc. L'énergie de l'état atomique est alors :

$$E = E_{n_1, \ell_1} + E_{n_2, \ell_2} + \dots + E_{n_N, \ell_N} \quad (7.16)$$

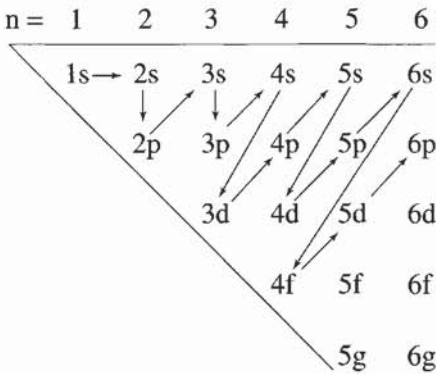


Figure 7.5 - Règle de remplissage des niveaux d'énergie électroniques

Un tel état d'énergie porte le nom de *configuration*. La configuration de plus basse énergie est obtenue en remplissant successivement les états individuels de plus basse énergie conformément à l'étalement des niveaux de la figure 7.4. En fait, un moyen facile de trouver bien souvent la configuration de plus basse énergie est d'utiliser la règle de remplissage de la figure 7.5. Par exemple, dans le cas de l'atome de fer de numéro atomique  $Z = 26$ , la configuration fondamentale s'écrit :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$ , c'est

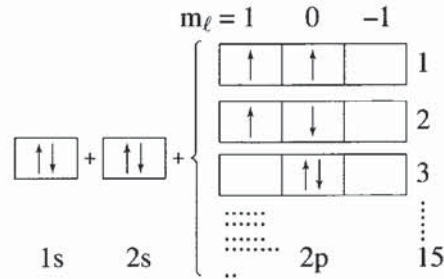
la configuration de  $\text{Ar} + 3d^6$  où  $\text{Ar}$  désigne l'argon.

Les configurations fondamentales des atomes neutres figurent généralement dans le tableau périodique des éléments : voir l'annexe 3 en fin d'ouvrage, où les configurations ne sont désignées que par l'occupation des couches les plus externes, par exemple  $3p^3$  pour le phosphore, mais  $3d^8 4s^2$  pour le nickel car la couche  $4s$  a été peuplée avant que la couche  $3d$  ne soit pleine. En effet, comme le montre le tableau périodique des éléments, de légères anomalies à la règle de remplissage ont lieu lorsque des sous-couches ont des énergies très proches. C'est le cas des états  $4s$  et  $3d$ , ainsi que des états  $4f$  et  $5d$ .

**Remarque :** Une configuration dont toutes les sous-couches sont pleines est non dégénérée, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule fonction d'onde associée à ce niveau d'énergie. En revanche, une configuration dont la sous-couche externe n'est pas pleine est dégénérée.

Par exemple, pour l'atome de carbone qui a deux électrons  $p$ , si l'on évalue les différentes valeurs possibles de  $m$  et de  $\sigma$  de chaque électron, et si l'on considère qu'il s'agit de particules indiscernables, on trouve facilement que la dégénérescence vaut 15, comme on le voit sur la figure 7.6 : ces quinze états électroniques différents présentent la même énergie.

Figure 7.6 - Exemple de différents états appartenant à la configuration fondamentale  $1s^2, 2s^2, 2p^2$  de l'atome de carbone ( $Z = 6$ ) : la multiplicité (le nombre d'états différents) est de 15



**Moments orbitaux et de spin totaux :** Les moments cinétiques orbitaux et de spin individuels s'ajoutent pour donner lieu aux moments orbitaux et de spin résultants :

$$\mathbf{L} = \sum \ell_i \text{ et } \mathbf{S} = \sum \mathbf{s}_i \quad (7.17)$$

Dans le cas d'une sous-couche pleine :

$$\langle \mathbf{L}_z \rangle = \sum \langle \ell_{iz} \rangle = 0 \text{ et } \langle \mathbf{S}_z \rangle = \sum \langle s_{iz} \rangle = 0 \quad (7.18)$$

Il en est de même pour les composantes selon  $x$  et  $y$ . Il en résulte qu'une sous-couche pleine n'est pas magnétique ou encore, ce qui revient au même, ne porte pas de moment magnétique permanent.

### 1.2.2. Termes

Examinons à présent le cas des sous-couches électroniques non saturées, le plus intéressant pour ce qui est du magnétisme. Le terme  $\mathcal{H}_1$ , qui tient compte des corrélations intra-atomiques entre les électrons, lève partiellement la dégénérescence de chaque configuration et conduit à des niveaux d'énergies appelés "termes". Chaque terme est caractérisé par les nombres quantiques  $L$  et  $S$ , ceux-là mêmes qui caractérisent les états propres et valeurs propres de  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{S}^2$ . Les états propres d'un terme donné sont du type  $|L, S, M_L, M_S\rangle$  où  $M_L$  et  $M_S$  peuvent prendre n'importe quelle valeur allant respectivement de  $-L$  à  $+L$  et de  $-S$  à  $+S$  par saut d'une unité. Chaque terme est ainsi  $(2L + 1)(2S + 1)$  fois dégénéré.

La séparation entre les termes est typiquement de l'ordre de 10 eV, c'est-à-dire environ  $10^5$  kelvin : les physiciens mesurent souvent les énergies atomiques en unités de température, utilisant la correspondance  $\mathcal{E} \leftrightarrow k_B T$ , c'est-à-dire que 1 kelvin équivaut à une énergie égale numériquement à la constante  $k_B$  soit  $1,38 \times 10^{-23}$  J (annexe 2).

Les valeurs de  $L$  et  $S$  du terme de plus basse énergie sont données par la relation :

$$L = |\sum m_i| \text{ et } S = |\sum \sigma_i| \quad (7.19)$$

dans laquelle les  $m_i$  et  $\sigma_i$  sont définis par les règles de Hund, qui stipulent que :

- ♦ les valeurs  $\sigma_i$  des spins individuels sont celles qui en s'ajoutant algébriquement donnent la valeur maximum de  $S$  compatible avec le principe d'exclusion de Pauli. Par exemple, dans le cas du carbone,  $S = 1/2 + 1/2 = 1$ .

- ◆ les valeurs  $m_i$  des moments orbitaux individuels sont celles qui en s'ajoutant algébriquement donnent la valeur maximum de  $L$  compatible avec la règle précédente et le principe de Pauli. Dans le cas du carbone,  $L = 1 + 0 = 1$ .

Les règles de Hund sont faciles à appliquer en utilisant le type de représentation classique schématisé sur la figure 7.6 dans le cas du carbone. La première règle rend compte du fait que les électrons préfèrent d'une part avoir la même composante de spin, ce qui réduit leur probabilité de passer d'une orbite à une autre déjà occupée (principe de Pauli), et d'autre part occuper des orbites différentes, car ils ont moins de chance de se trouver à proximité les uns des autres. La seconde règle est moins facile à saisir. On peut la résumer ainsi : pour conserver l'invariance par rotation du système, qui ne fait intervenir que des interactions isotropes, il y a nécessairement transfert d'électrons sur les différentes orbites, transfert d'autant plus facile que le moment cinétique des électrons est de même signe.

### 1.2.3. Couplage spin-orbite

Avant d'affiner la description détaillée des niveaux d'énergie électroniques, nous allons introduire la notion fondamentale de *couplage spin-orbite* : il s'agit d'une interaction entre les moments orbitaux et les moments de spin individuels de la forme  $-\lambda_{ij} \ell_i s_j$ , appelée encore *couplage Russel-Saunders*. En fait, le couplage des termes tels que  $i \neq j$  est négligeable devant celui pour lequel  $i = j$ . L'origine de ce couplage est la suivante : dans le référentiel d'un électron, le mouvement du noyau crée un champ magnétique qui interagit avec le moment magnétique de spin. En raison des couplages entre les orbites et les spins décrits ci-dessus et qui ont conduit aux différents *termes*, ces couplages individuels peuvent se réduire à l'énergie d'interaction suivante :

$$\mathcal{H}_{so} = -\lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (7.20)$$

où le paramètre  $\lambda$  est négatif dans le cas d'une couche moins qu'à moitié pleine et positif dans le cas contraire, si bien que les moments cinétiques orbitaux et de spin ont tendance à être respectivement, selon le cas, antiparallèles et parallèles. On peut montrer simplement que le coefficient  $\lambda$  est effectivement négatif dans le cas d'un seul électron, et positif pour des couches plus qu'à moitié pleines [2].

### 1.2.4. Multiplets

La dégénérescence de chaque terme est de nouveau partiellement levée par l'interaction spin-orbite évoquée ci-dessus. Chaque nouveau niveau d'énergie, appelé "*multiplet*", est caractérisé par le nombre quantique entier ou demi-entier  $J$  qui caractérise le moment cinétique total  $\hbar \mathbf{J}$  tel que :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (7.21)$$

A l'intérieur d'un multiplet, il existe une base de  $2J + 1$  états  $|L, S, J, M_J\rangle$  tels que  $M_J$  peut prendre des valeurs allant de  $+J$  à  $-J$  par sauts d'une unité. Ils sont vecteurs propres de  $\mathbf{J}^2$  et de  $J_z$ , en sorte que :

$$J^2 |L, S, J, M_J\rangle = J(J + 1) |L, S, J, M_J\rangle \tag{7.22}$$

et  $J_z |L, S, J, M_J\rangle = M_J |L, S, J, M_J\rangle \tag{7.23}$

Chaque multiplet est donc  $2J + 1$  fois dégénéré. Les valeurs de  $J$  des différents multiplets issus d'un même terme varient de  $L + S$  à  $|L - S|$  par sauts d'une unité. De l'équation (7.21) élevée au carré, on déduit que  $\mathcal{H}_{so} = -(\lambda/2)(J^2 - L^2 - S^2)$ . L'énergie d'un multiplet est alors donnée par :

$$E_J = \langle \mathcal{H}_{so} \rangle = -(\lambda/2) [J(J + 1) - L(L + 1) - S(S + 1)].$$

Le multiplet fondamental est tel que  $J = L + S$  si la couche est plus qu'à moitié pleine et  $J = |L - S|$  dans le cas contraire. Si la couche est à moitié remplie,  $J = S$  car la règle de Hund donne  $L = 0$ . Le couplage spin-orbite augmente avec le numéro atomique de l'élément considéré. La différence d'énergie entre deux multiplets est typiquement de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$  eV ( $10^2$  à  $10^3$  K) pour les éléments du groupe du fer, et de 1 eV ( $10^4$  K) pour les terres rares. Le schéma de la figure 7.7 illustre, dans le cas de l'ion  $Cr^{3+}$ , les différentes étapes qui conduisent à l'état d'énergie la plus basse d'un atome (ou ion) libre.

A ce stade, les levées de dégénérescence ultérieures ne peuvent avoir lieu qu'en présence de perturbations extérieures telles qu'un champ magnétique (effet Zeeman) ou les effets d'environnement dus aux atomes voisins, lorsque l'atome considéré n'est plus libre, mais fait partie d'une substance solide. Les multiplets sont généralement désignés par des symboles tels que  $^2S_{1/2}$ ,  $^3P_0$ ,  $^4F_{9/2}$ , etc. C'est la notation spectroscopique où les lettres S, P, D, F, G, H, I, ... signifient que le moment orbital total  $L$  vaut respectivement 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Les nombres en haut à gauche et en bas à droite valent respectivement  $2S + 1$  et  $J$ .

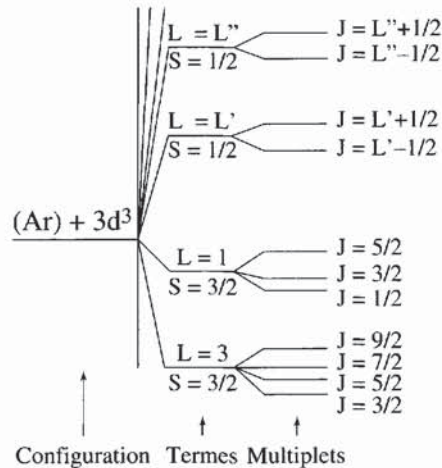


Figure 7.7 - Décomposition de la configuration fondamentale de l'ion  $Cr^{3+}$  en termes et en multiplets

Compte tenu de l'écart d'énergie entre les différents multiplets, on pourra ne considérer dans les éléments de terre rare (4f) que le multiplet fondamental, car aux températures usuelles le taux d'occupation des multiplets supérieurs est négligeable. Outre la structure électronique des atomes libres, le tableau périodique des éléments donné en annexe 3 fournit aussi leur état fondamental spectroscopique.

Nous avons vu sur le tableau 3.1 que tous les atomes isolés non magnétiques à l'état fondamental se trouvaient caractérisés par  $J = 0$  (états spectroscopiques  $^1S_0$ ,  $^3P_0$ ,  $^5D_0$ , etc.). Nous allons voir maintenant qu'en effet, le moment magnétique d'un atome ou d'un ion est étroitement lié à son nombre quantique  $J$ .

Regardons le moment magnétique associé au moment cinétique orbital d'un multiplet. D'après la relation (7.6), le moment magnétique orbital s'écrit :

$$\mathbf{m}_o = -\mu_B \mathbf{L} \quad (7.24)$$

De même, d'après l'équation (7.9), le moment magnétique de spin s'écrit :

$$\mathbf{m}_s = -2\mu_B \mathbf{S} \quad (7.25)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, les relations (7.24) et (7.25) montrent que le moment magnétique total  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_o + \mathbf{m}_s$  n'a aucune raison d'être colinéaire au moment cinétique total  $\hbar \mathbf{J} = \hbar(\mathbf{L} + \mathbf{S})$ . En fait, la mécanique quantique nous apprend qu'à l'intérieur de chaque multiplet le moment magnétique total et le moment cinétique total peuvent être considérés comme colinéaires et liés par la formule :

$$\mathbf{m} = -g_J \mu_B \mathbf{J} \quad (7.26)$$

où le facteur  $g_J$ , appelé *facteur de Landé*, caractérise le multiplet considéré. Il s'exprime en fonction de J, de L et de S :

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (7.27)$$

Le facteur  $g_J$  vaut 1 ou 2 selon que, seule, la contribution orbitale ou de spin est présente, respectivement, mais il n'est pas forcément compris entre 1 et 2. Par exemple, on peut voir dans le tableau 7.1 que  $g_J$  est inférieur à 1 lorsque  $L > S$  et  $J = L - S$ .

Les principales caractéristiques magnétiques des ions  $R^{3+}$  de la série des terres rares sont reportées sur le tableau 7.1. C'est dans cet état de valence que ces éléments se trouvent dans la plupart des matériaux. Signalons toutefois que le cérium peut être tétravalent et que le samarium, l'euporium, et l'ytterbium peuvent être divalents.

**Remarque :** Le résultat ci-dessus a été établi dans le cas presque idéal d'atomes isolés. Nous allons voir maintenant qu'il pourra encore s'appliquer dans les substances où l'atome magnétique n'est pas trop perturbé par les liaisons interatomiques. Cependant, quelle que soit la substance considérée, il sera toujours possible d'écrire que le moment magnétique  $\mathbf{m}$  et le moment cinétique  $\mathbf{L}$  de ses atomes sont proportionnels :

$$\mathbf{m} = -g \frac{e}{2m_e} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L} \quad (7.28)$$

$\gamma$  est le *facteur gyromagnétique*. Sa valeur permet d'estimer l'importance relative des contributions orbitales,  $\gamma = -(e/2m_e)$  et de spin,  $\gamma = -2(e/2m_e)$  au moment magnétique des atomes de la substance considérée.

#### **A retenir :**

- ◆ Les sous-couches électroniques pleines ne sont pas magnétiques.
- ◆ Seules les sous-couches non saturées possèdent un moment magnétique.
- ◆ Le moment magnétique des atomes ou ions libres est donné par :  $\mathbf{m} = -g_J \mu_B \mathbf{J}$  où  $\hbar \mathbf{J}$  est le moment cinétique total. Pour une configuration donnée, le nombre quantique J et par suite le facteur  $g_J$  sont déterminés généralement à partir des règles de Hund.

**Tableau 7.1 - Principales caractéristiques des ions libres  $R^{3+}$  des éléments du groupe des terres rares R ou lanthanides**

Ion 4f	$2S+1L_J$	L	S	J	gJ	$m_0$ ( $\mu_B$ )	$m_{eff}$ ( $\mu_B$ )
Ce <sup>3+</sup> (4f <sup>1</sup> )	<sup>2</sup> F <sub>5/2</sub>	3	1/2	5/2	6/7	2,14	2,54
Pr <sup>3+</sup> (4f <sup>2</sup> )	<sup>3</sup> H <sub>4</sub>	5	1	4	4/5	3,20	3,58
Nd <sup>3+</sup> (4f <sup>3</sup> )	<sup>4</sup> I <sub>9/2</sub>	6	3/2	9/2	8/11	3,27	3,62
Pm <sup>3+</sup> (4f <sup>4</sup> )	<sup>5</sup> I <sub>4</sub>	6	2	4	3/5	2,40	2,68
Sm <sup>3+</sup> (4f <sup>5</sup> )	<sup>6</sup> H <sub>5/2</sub>	5	5/2	5/2	2/7	0,71	0,85
Eu <sup>3+</sup> (4f <sup>6</sup> )	<sup>7</sup> F <sub>0</sub>	3	3	0	–	0	0
Gd <sup>3+</sup> (4f <sup>7</sup> )	<sup>8</sup> S <sub>7/2</sub>	0	7/2	7/2	2	7,00	7,94
Tb <sup>3+</sup> (4f <sup>8</sup> )	<sup>7</sup> F <sub>6</sub>	3	3	6	3/2	9,00	9,72
Dy <sup>3+</sup> (4f <sup>9</sup> )	<sup>6</sup> H <sub>15/2</sub>	5	5/2	15/2	4/3	10,00	10,65
Ho <sup>3+</sup> (4f <sup>10</sup> )	<sup>5</sup> I <sub>8</sub>	6	2	8	5/4	10,00	10,61
Er <sup>3+</sup> (4f <sup>11</sup> )	<sup>4</sup> I <sub>15/2</sub>	6	3/2	15/2	6/5	9,00	9,58
Tm <sup>3+</sup> (4f <sup>12</sup> )	<sup>3</sup> H <sub>6</sub>	5	1	6	7/6	7,00	7,56
Yb <sup>3+</sup> (4f <sup>13</sup> )	<sup>2</sup> F <sub>7/2</sub>	3	1/2	7/2	8/7	4,00	4,53

Les notions de module du moment ( $m_0$ ) et de moment effectif ( $m_{eff}$ ) ont été introduites au chapitre 4, § 2.2. Les ions La<sup>3+</sup> et Lu<sup>3+</sup> avec leur couche 4f, respectivement vide et pleine, ne sont pas magnétiques.

## 2. LE MAGNÉTISME DES ATOMES LIÉS

### 2.1. MAGNÉTISME LOCALISÉ ET MAGNÉTISME ITINÉRANT

La description du magnétisme des atomes constituant les différentes substances telles les molécules, les liquides, les solides, ... est plus complexe que celle du magnétisme des atomes libres, car il s'agit alors d'un problème à N corps, impossible à résoudre exactement.

Deux modèles ont été développés, qui tous deux ne sont que des approximations d'une réalité souvent plus complexe. Le premier consiste à considérer que les électrons responsables du magnétisme restent parfaitement localisés autour de leur noyau d'origine et se trouvent dans un état électronique assez proche de celui de l'atome ou de l'ion libre : c'est le modèle du *magnétisme des électrons localisés*. A l'opposé, le modèle du *magnétisme des électrons itinérants* considère que les électrons responsables du magnétisme sont des électrons de conduction totalement délocalisés et libres de parcourir en tous sens l'échantillon.

En réalité, dans un solide, les électrons localisés – s'ils restent liés au noyau atomique – voient cependant leur orbite plus ou moins perturbée par le champ

électrique créé par les atomes ou ions voisins : le modèle de l'ion isolé ne sera donc pas toujours une bonne base de départ. De façon symétrique, les électrons libres dans un métal ressentiront le potentiel électrique périodique créé par les sites atomiques ionisés (puisque les atomes ont perdu leurs électrons de conduction) : ces électrons ne seront donc pas vraiment libres, et le potentiel périodique du réseau (dans le cas de métaux à l'état cristallin) viendra perturber la description fournie par le modèle des électrons itinérants.

Le modèle des électrons itinérants, qui est une approximation raisonnable dans le cas de certains métaux de transition et de leurs alliages, est assez théorique tandis que le modèle des électrons localisés, qui s'applique essentiellement aux isolants et dans une certaine mesure aux métaux de terres rares, se prête plus facilement à un traitement quantitatif relativement simple et pédagogique.

C'est pourquoi nous allons commencer, dans la suite de ce chapitre, par décrire le modèle du *magnétisme des électrons localisés*. Le *magnétisme des électrons itinérants* ne sera abordé qu'au chapitre suivant.

## 2.2. SUBSTANCES NON MAGNÉTIQUES

Pour appréhender ce qui se passe lorsque les atomes font partie d'une substance, on peut mettre à profit certains résultats établis dans le paragraphe 1. Ainsi, toute couche atomique pleine n'est pas magnétique. Dans les édifices atomiques, les électrons appartiennent souvent, dans l'état fondamental, à des orbites ne pouvant contenir que deux électrons : si de telles orbites sont occupées par deux électrons, les moments cinétiques et magnétiques orbitaux et de spin résultants sont nuls. Un moment magnétique permanent provient donc d'*électrons non appariés*.

Nous avons déjà dit au chapitre 3 que la plupart des éléments qui sont magnétiques à l'état d'atome ou d'ion libres ne le sont plus lorsqu'ils sont intégrés dans une substance solide, car les liaisons (moléculaires, métalliques, ...) sont justement obtenues par la mise en commun sur la même orbite d'électrons provenant d'éléments différents. Il y a alors formation d'orbitales qui sont généralement non magnétiques. Ce résultat est illustré par la comparaison des tableaux 3.1 et 3.2.

Le cas le plus simple est celui de l'hydrogène, magnétique à l'état atomique avec un seul électron. La molécule  $H_2$  n'est plus magnétique car, dans l'état fondamental, les deux électrons évoluent sur la même orbite de moment cinétique nul et avec des spins opposés. C'est également le cas de nombreuses molécules organiques telles que  $CH_4$ , par exemple, où les quatre liaisons s'effectuent par la mise en commun de deux électrons sur chacune des 4 orbites reliant le carbone à l'hydrogène.

Dans le cas des composés ioniques, la liaison ionique a souvent lieu par la perte et le gain d'électrons sur les différents éléments de manière à n'avoir que des couches saturées, donc non magnétiques. C'est par exemple le cas du sel de cuisine  $NaCl$  : alors que les atomes libres de  $Na$  et de  $Cl$  sont magnétiques, ils ne le sont plus à l'état ionique  $Na^+$  et  $Cl^-$ .

La situation des matériaux métalliques, qui sera développée au chapitre suivant, est plus complexe. De manière très simplifiée, les électrons qui forment la *bande de conduction* occupent par paires des orbitales, leurs spins s'annulant deux à deux. C'est le cas des éléments de transition caractérisés par le remplissage des couches 4d (Y, Zr, ...) et 5d (Hf, Ta, ...) : ces couches sont en effet relativement délocalisées et les électrons qui les occupent peuvent participer à la cohésion, tout au moins dans le cas des métaux qui ne sont pas magnétiques.

Ainsi, nous qualifions de *non magnétiques* toutes ces substances qui sont dépourvues de moment magnétique permanent, mais bien évidemment elles présentent cependant un magnétisme très faible (diamagnétisme, et parfois paramagnétisme de Pauli).

### **2.3. QUELLES SONT DONC LES SUBSTANCES QUI PEUVENT PRÉSENTER UN MAGNÉTISME NOTABLE ?**

Seules les couches électroniques non saturées internes, et donc protégées par des couches plus externes, sont capables de rester incomplètes lorsque l'atome est incorporé dans un édifice polyatomique : elles conservent alors leur magnétisme.

C'est le cas des éléments de transition du groupe du fer (3d) et des éléments de la série des terres rares (4f). Une autre série, celle des actinides caractérisée par le remplissage de la couche 5f, doit être également signalée bien qu'elle soit moins étudiée car la majorité des éléments qui la composent sont radioactifs et leur intérêt est donc plus fondamental qu'appliqué.

Il est important de rappeler que le magnétisme d'un élément dépend fortement de son environnement, c'est-à-dire que la valeur de son moment magnétique peut présenter des variations notables selon le type de substance à laquelle il appartient : le cas du fer est tout à fait significatif à cet égard, comme nous avons pu le constater sur le tableau 3.3.

Finalement le nombre de substances contenant des atomes porteurs d'un moment magnétique (en l'absence de champ) est relativement limité et si l'on fait le compte des éléments qui contribuent de façon significative au magnétisme de la matière on trouve une quinzaine d'éléments parmi lesquels des éléments 3d : Cr, Mn, Fe, Co et Ni, ainsi que la plupart des éléments 4f, les terres rares, encore appelées *lanthanides* (voir le tableau 3.2).

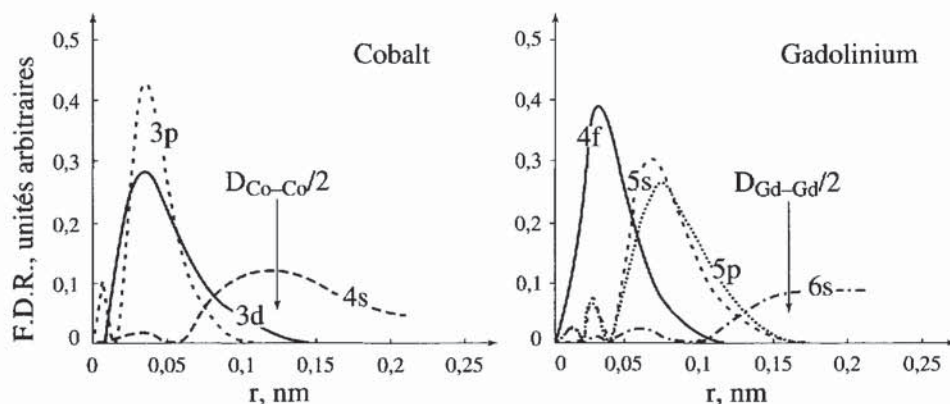
### **2.4. LES DEUX SÉRIES FONDAMENTALES D'ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES**

Deux séries d'éléments jouent donc un rôle essentiel en magnétisme, aussi bien au niveau fondamental qu'en ce qui concerne les applications technologiques : il s'agit d'une part des éléments du groupe du fer caractérisés par le remplissage de la couche 3d, et d'autre part des éléments de la série des terres rares caractérisés par le

remplissage de la couche 4f. L'importance de ces deux séries vient du fait que leurs couches électroniques partiellement remplies (3d et 4f) peuvent contenir un nombre relativement élevé d'électrons et sont assez profondes pour demeurer incomplètes même dans un édifice polyatomique : elles sont donc porteuses d'un moment magnétique permanent.

### 2.4.1. Distribution spatiale des orbitales électroniques

L'extension spatiale des électrons les plus externes des séries 3d et 4f est assez différente. A titre d'exemple, les densités radiales (densité de probabilité de trouver un électron à une distance  $r$  du noyau) des couches auxquelles appartient ces électrons ont été calculées à partir de leurs fonctions d'onde, et représentées sur la figure 7.8 pour le cobalt 3d et le gadolinium 4f métalliques. On peut noter que la couche 4f est plus localisée que la couche 3d. Il en résulte que le magnétisme des éléments 4f est moins perturbé par les liaisons que celui des éléments 3d.



**Figure 7.8 - Fonctions de distribution radiales (F.D.R.) des couches électroniques externes pour le cobalt et le gadolinium**

Les F. D. R. sont données en unités arbitraires. En trait plein : les électrons 3d pour Co et les électrons 4f pour Gd, responsables du magnétisme.  $D_{Co-Co}$  et  $D_{Gd-Gd}$  représentent les plus petites distances Co-Co et Gd-Gd, respectivement dans le cobalt et le gadolinium purs.

### 2.4.2. Influence des atomes voisins : effets de champ cristallin

On observe fréquemment que les ions métalliques présentent, quand ils sont liés à une structure polyatomique, un moment magnétique différent de celui de l'ion libre  $g_J J \mu_B$  (ou  $g_J [J(J+1)]^{1/2} \mu_B$  pour le moment effectif). Cet effet est particulièrement marqué avec les ions 3d, dont le moment magnétique peut approcher parfois la valeur à saturation  $2 S \mu_B$  (ou  $2 [S(S+1)]^{1/2} \mu_B$  pour le moment effectif) que l'on observerait si, seul, le moment de spin participait aux propriétés magnétiques de la substance. Tout se passe alors comme si le *moment magnétique orbital était pratiquement nul*, et donc insensible à l'application d'un champ magnétique. Seul le moment magnétique de spin est donc en mesure de «suivre» le champ magnétique appliqué.

Cette extinction du moment orbital, désignée par le terme “*quenching*” en anglais, est due au champ électrique cristallin qui sera discuté dans la section 4 de ce chapitre. Il est inexistant pour les ions ( $Mn^{2+}$ ,  $Fe^{3+}$ ) présentant un moment orbital nul (on parle alors d'états S) : leur moment magnétique reste celui de l'ion libre, même s'ils sont liés à une structure polyatomique. Cet effet sera discuté au § 4.3.1.

Notons que le terme de *blocaje* du moment orbital, souvent utilisé par les auteurs francophones pour désigner cette extinction, est impropre et a créé une certaine confusion dans les esprits.

Le tableau 7.2 présente pour les ions 3d les mêmes données qui ont été fournies au tableau 7.1 pour les ions 4f, avec en plus le moment magnétique  $2S\mu_B$  et le moment effectif  $2[S(S+1)]^{1/2}\mu_B$  que l'on attend en cas d'extinction du moment orbital.

**Tableau 7.2 - Propriétés magnétiques des ions 3d**

Ion 3d	3d <sup>n</sup>	<sup>2S+1</sup> L <sub>J</sub>	g <sub>J</sub>	m <sub>0</sub> (μ <sub>B</sub> )	2S	m <sub>eff</sub> (μ <sub>B</sub> )	m* (μ <sub>B</sub> )
Ti <sup>3+</sup> , V <sup>4+</sup>	3d <sup>1</sup>	<sup>2</sup> D <sub>3/2</sub>	4/5	6/5	1	1,549	1,732
Ti <sup>2+</sup> , V <sup>3+</sup>	3d <sup>2</sup>	<sup>3</sup> F <sub>2</sub>	2/3	4/3	2	1,633	2,828
V <sup>2+</sup> , Cr <sup>3+</sup>	3d <sup>3</sup>	<sup>4</sup> F <sub>3/2</sub>	2/5	3/5	3	0,775	3,872
Cr <sup>2+</sup> , Mn <sup>3+</sup>	3d <sup>4</sup>	<sup>5</sup> D <sub>0</sub>	–	–	4	–	4,899
Mn <sup>2+</sup> , Fe <sup>3+</sup>	3d <sup>5</sup>	<sup>6</sup> S <sub>5/2</sub>	2	5	5	5,916	5,916
Fe <sup>2+</sup> , Co <sup>3+</sup>	3d <sup>6</sup>	<sup>5</sup> D <sub>4</sub>	3/2	6	4	6,708	4,899
Co <sup>2+</sup> , Ni <sup>3+</sup>	3d <sup>7</sup>	<sup>4</sup> F <sub>9/2</sub>	4/3	6	3	6,633	3,872
Ni <sup>2+</sup>	3d <sup>8</sup>	<sup>3</sup> F <sub>4</sub>	5/4	5	2	5,590	2,828
Cu <sup>2+</sup>	3d <sup>9</sup>	<sup>2</sup> D <sub>5/2</sub>	6/5	3	1	3,550	1,732

Exprimé en μ<sub>B</sub>/ion, le moment magnétique attendu en présence de liaisons chimiques sera intermédiaire entre celui de l'ion libre, m<sub>0</sub> = g<sub>J</sub>J (et m<sub>eff</sub> = g<sub>J</sub>√J(J+1) pour le moment effectif) et celui de l'ion pour lequel il y a extinction totale du moment orbital (colonnes en grisé) : m'<sub>0</sub> = 2 S (et m\* = 2√S(S+1) pour le moment effectif).

Même si le champ électrique cristallin perturbe plus ou moins les ions 4f, J reste cependant pour ceux-ci en première approximation une bonne mesure du moment magnétique. Au contraire, J n'est plus le “bon nombre quantique” pour décrire les propriétés magnétiques des ions 3d.

Le tableau 7.2 nous permet d'interpréter maintenant la courbe d'aimantation du sel de chrome CrK(SO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>.12H<sub>2</sub>O qui avait été présentée à la figure 4.7 : son moment magnétique à saturation est de 3 μ<sub>B</sub> par molécule, alors que le modèle d'ion libre n'en prévoit que 0,6. L'ion Cr<sup>3+</sup>, seul ion magnétique dans cette substance, présente donc <L> = 0, et ce n'est plus J mais S qui doit, dans ce cas, entrer dans la sommation (4.25) exprimant les variations de l'aimantation en fonction de H/T.

### 3. QUELQUES EXEMPLES DE MOMENTS MAGNÉTIQUES LOCALISÉS

#### 3.1. LES OXYDES DE FER

- ◆ Le protoxyde de fer, FeO, comporte un ion  $\text{Fe}^{2+}$  par molécule, dont le moment magnétique effectif a été déduit des variations thermiques de la susceptibilité paramagnétique : il est de  $5,33 \mu_B$  [3]. Cette valeur, intermédiaire entre  $6,71 \mu_B$ , valeur attendue pour l'ion libre et  $4,89 \mu_B$ , valeur du moment en cas d'extinction totale du moment cinétique orbital, suggère une *extinction partielle du moment orbital*, et elle est en bon accord avec les valeurs observées sur d'autres composés contenant l'ion  $\text{Fe}^{2+}$  :  $\text{FeF}_2$  ( $5,59 \mu_B$ ),  $\text{FeCl}_2$  ( $5,38 \mu_B$ ),  $\text{FeS}$  ( $5,24 \mu_B$ ) [4].
- ◆ La magnétite,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  ou  $\text{Fe}^{2+}\text{O}^{2-}, 2\text{Fe}^{3+}3\text{O}^{2-}$ , est une substance ferrimagnétique : la moitié des ions  $\text{Fe}^{3+}$  et les ions  $\text{Fe}^{2+}$  qu'elle comporte forment le premier sous-réseau, tandis que les ions  $\text{Fe}^{3+}$  restant forment le second. Dans un modèle d'ions libres, on s'attendrait donc à la structure :  $\uparrow(6\mu_B) \uparrow(5\mu_B) \downarrow(5\mu_B)$  qui donnerait un moment résultant de  $g_J J = 6 \mu_B$  par formule. Or on déduit de l'aimantation spontanée à très basse température un moment magnétique de seulement  $4,1 \mu_B$  par formule, très proche de la valeur attendue ( $4 \mu_B$ ) en cas d'*extinction totale du moment cinétique orbital* des ions  $\text{Fe}^{2+}$ .
- ◆ En ce qui concerne la maghémite ferrimagnétique ( $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ), cinq ions  $\text{Fe}^{3+}$  sont situés sur un sous-réseau, et trois sur l'autre, ce qui donne pour moment résultant :  $\{(5 - 3)/(5 + 3)\} \times 5 \mu_B = 1,25 \mu_B$  par atome de fer en excellent accord avec l'expérience car il s'agit d'ions magnétiques dans l'état S (§ 2.4.2). Cet oxyde est utilisé en poudre dans les mémoires magnétiques (rubans, disquettes).
- ◆ Le cas de l'hématite, ( $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ), est plus délicat, car il s'agit là d'une substance antiferromagnétique qui présente un faible "ferromagnétisme parasite", qui est interprété comme une manifestation de l'interaction d'échange antisymétrique qui sera discutée au paragraphe 2.2 du chapitre 9. Nous n'en dirons pas plus pour le moment.
- ◆ Le grenat d'yttrium-fer  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  est un oxyde mixte de fer et d'yttrium.  $\text{Y}^{3+}$  étant non magnétique, les seuls ions magnétiques sont les ions du fer. Cet oxyde est ferrimagnétique et compte par formule 3 ions  $\text{Fe}^{3+}$  situés sur un sous-réseau, et 2 sur l'autre : le moment résultant que l'on attend est donc associé à  $\text{Fe}^{3+}$ , soit  $5 \mu_B$ . La valeur expérimentale ( $5 \mu_B$  par formule à 0 K) est en parfait accord avec cette valeur théorique : il s'agit encore d'ions magnétiques dans l'état S. Ce grenat est utilisé en électronique aux hyperfréquences.

#### 3.2. AUTRES COMPOSÉS IONIQUES DE MÉTAUX 3d

Le monoxyde de manganèse,  $\text{MnO}$ , est antiferromagnétique. Le moment magnétique effectif déduit des variations thermiques de la susceptibilité magnétique

au-dessus de sa température de Néel ( $5,9 \mu_B$ ), est en excellent accord avec la valeur théorique  $\sqrt{35} \mu_B$ . Cet accord n'est pas fortuit : comme l'ion  $Fe^{3+}$ , l'ion  $Mn^{2+}$  est dans un "état S" c'est-à-dire que son moment orbital est nul.

En revanche, le moment effectif déduit des mesures de susceptibilité paramagnétique n'est plus que de  $3,5 \mu_B$  pour  $NiF_2$  et  $3,3 \mu_B$  pour  $NiCl_2$ . Ces valeurs sont intermédiaires entre la valeur  $5,59 \mu_B$  prévue pour un ion libre  $Ni^{2+}$  et la valeur  $2,83 \mu_B$  que l'on observerait en cas d'extinction totale du moment orbital.

De même, on prévoit un moment effectif de  $6,63 \mu_B$  pour l'ion  $Co^{2+}$  libre, et de  $3,87 \mu_B$  en cas d'extinction totale du moment orbital. Les résultats expérimentaux :  $4,9 \mu_B$  pour  $CoO$  et  $5,12 \mu_B$  pour  $CoF_2$  sont encore intermédiaires entre ces deux valeurs extrêmes. Avec les ions  $Ni^{2+}$  et  $Co^{2+}$ , il y a donc *extinction partielle* du moment orbital.

Nous avons vu qu'il y avait extinction totale du moment orbital dans le cas du  $Cr^{3+}$  incorporé à un alun de chrome et de potassium.

Enfin, dans certaines situations, l'influence du champ cristallin est telle que, non seulement  $J$  n'est plus un "bon nombre quantique", mais même la règle de Hund peut être mise en défaut. Ainsi, dans le grenat d'yttrium-fer (YIG), substituer quelques ions  $Ru^{3+}$  à des ions  $Fe^{3+}$  ne devrait pas changer le moment magnétique puisque les structures électroniques du ruthénium ( $4d^6 5s^2$ ) et du fer ( $3d^6 4s^2$ ) sont similaires. Or il apparaît que les ions  $Ru^{3+}$  se présentent dans un état quantique dit *de bas spin* tel que  $L = 6$  et  $S = 1/2$  ( $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ ) au lieu de  $L = 0$  et  $S = 5/2$  ( $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ ). Le grand moment orbital est alors totalement éteint ( $L = 6$  mais  $\langle L \rangle = 0$ ) par le très fort champ cristallin et seul le faible moment de spin est susceptible de contribuer à l'aimantation de ce grenat substitué YIG:Ru. Une analyse détaillée de ces comportements peut se trouver par exemple dans l'ouvrage de Zeiger et Pratt [1].

En conclusion, le modèle d'électrons localisés dans l'approximation de l'ion libre ne donne d'excellents résultats pour les ions 3d que lorsque ceux-ci se trouvent dans un état S ( $Fe^{3+}$ ,  $Mn^{2+}$ ). Autrement, le moment orbital étant plus ou moins éteint, il y a réduction du moment magnétique. Enfin, nous ne parlerons pas ici du moment magnétique associé aux atomes 3d, 4d et 5d à l'état métallique, car le modèle d'électrons localisés ne s'applique pas du tout à ces métaux, qui relèvent du modèle de magnétisme itinérant et seront traités dans le chapitre suivant.

### 3.3. COMPOSÉS IONIQUES À BASE D'ÉLÉMENTS TERRES RARES

Contrairement au cas des ions 3d, le moment magnétique effectif observé par mesure de susceptibilité paramagnétique sur bon nombre de substances ioniques comportant des ions trivalents de terres rares peut être très proche de la valeur théorique (th.) fournie par la dernière colonne du tableau 7.1 comme le montrent les quelques exemples suivants [4] :  $g_J[J(J+1)]^{1/2} = 2,51$  (th. : 2,54) pour  $CeF_3$  et  $CeCl_3$  ; 3,58 (th. : 3,62) pour  $Nd_2Se_3$  ; 7,94 (th. : 7,94) pour  $Gd_2O_3$  ; 9,67 (th. : 9,70) pour  $Tb_2O_3$  ;

7,28 (th. : 7,60) pour  $\text{Tm}_2\text{O}_3$ . On notera toutefois que c'est encore pour l'ion dont le moment orbital est nul ( $\text{Gd}^{3+}$  est dans un état S) que l'accord est le meilleur.

En revanche, le moment magnétique, déduit des courbes d'aimantation à basse température, pour les composés à base de terres rares ordonnés magnétiquement est souvent différent de la valeur théorique donnée dans l'avant-dernière colonne du même tableau 7.1. Ainsi, dans les grenats de terres rares  $\text{R}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  (RIG, où un ion de terre rare  $\text{R}^{3+}$  remplace l'ion  $\text{Y}^{3+}$  dans le grenat d'yttrium fer ou YIG déjà cité au § 3.2, Chikazumi cite les valeurs expérimentales suivantes :  $m_0 = 0,14 \mu_B$  (th. 0,71) pour  $\text{Sm}^{3+}$  ;  $0,74 \mu_B$  (th. 0) pour  $\text{Eu}^{3+}$  ;  $7 \mu_B$  (th. 7) pour  $\text{Gd}^{3+}$  ;  $7,7 \mu_B$  (th. 9) pour  $\text{Tb}^{3+}$  ;  $7,3 \mu_B$  (th. 10) pour  $\text{Dy}^{3+}$  ;  $6,7 \mu_B$  (th. 10) pour  $\text{Ho}^{3+}$  ;  $5,1 \mu_B$  (th. 9) pour  $\text{Er}^{3+}$  ;  $1,3 \mu_B$  (th. 7) pour  $\text{Tm}^{3+}$  et  $1,7 \mu_B$  (th. 4) pour  $\text{Yb}^{3+}$ . On n'observe un accord parfait entre théorie et expérience que pour l'ion  $\text{Gd}^{3+}$  ; le désaccord général observé avec les autres ions est dû principalement au caractère non colinéaire de la structure ferrimagnétique dans ces grenats, et au mélange des niveaux de  $M_J$  différents imputable à un fort champ cristallin.

### 3.4. COMPOSÉS INTERMÉTALLIQUES À BASE DE TERRES RARES

Ici, nous avons affaire à des métaux, mais la conduction électrique et la cohésion métallique sont assurées par des électrons qui ne contribuent que pour une faible part au moment magnétique de la substance : l'essentiel du moment magnétique provient des électrons 4f fortement localisés sur les sites des atomes de terres rares (R). Le tableau 7.3 présente les moments à saturation et effectifs, exprimés en  $\mu_B$ , pour trois séries de composés intermétalliques  $\text{R-Al}_2$ ,  $\text{R-Cu}_2$  [5], et  $\text{R-Ni}_2$  [6].

Tableau 7.3 - Moments magnétiques à saturation et moments magnétiques effectifs par formule, mesurés sur trois séries de composés intermétalliques à base de terres rares

R	$m$ ( $\text{RAl}_2$ )	$m_{\text{eff}}$ ( $\text{RAl}_2$ )	$m$ ( $\text{RCu}_2$ )	$m_{\text{eff}}$ ( $\text{RCu}_2$ )	$m$ ( $\text{RNi}_2$ )	$m_{\text{eff}}$ ( $\text{RNi}_2$ )
Ce	–	2,53-2,64	0,8	2,59	–	–
Pr	2,6	3,46-3,5	2,3	3,51	0,86	3,55
Nd	2,27-2,47	3,1-3,59	1,9	3,56	1,78	3,67
Sm	0,2	–	0,1	–	0,22	–
Eu	0,79-1,21	7,84-8,05	5,8	7,4	–	–
Gd	6,9-7,1	7,92-7,94	6	8,4	7,1	7,9
Tb	8,1-8,9	9,81-9,82	7,4	9,8	7,7	9,76
Dy	9,62-9,89	9,12-10,7	8,7	10,75	8,8	10,5
Ho	9,16-9,18	10,7	9,2	10,5	8,8	10,6
Er	7,05-7,92	9,2-9,56	5,6	9,35	6,9	9,55
Tm	4,8	–	4,2	7,49	3,27	7,42

Les alliages  $\text{RAl}_2$  et  $\text{RNi}_2$  présentent la symétrie cubique, et l'alliage  $\text{RCu}_2$  la symétrie orthorhombique.

On voit sur ce tableau que les moments effectifs, déduits des mesures de susceptibilité magnétique, sont en général en bon accord avec les valeurs théoriques données par le tableau 7.1, sauf dans le cas de l'euporium ; quant au samarium, il ne suit pas la loi de Curie-Weiss. Van Vleck et Frank ont expliqué ces désaccords par un mélange du multiplet fondamental avec le premier excité assez proche dans le cas des ions  $\text{Sm}^{3+}$  et  $\text{Eu}^{3+}$ .

Au contraire, les valeurs des moments magnétiques déduites des mesures d'aimantation à très basse température, sont très dispersées et généralement inférieures aux valeurs théoriques, sauf pour l'euporium dont le moment magnétique est non nul, et parfois même notable.

### 3.5. MÉTAUX DE TERRES RARES

Pour les métaux de terres rares purs, dans l'état paramagnétique, l'accord entre moment effectif par atome de terre rare *mesuré* et moment prévu pour les ions trivalents par la *théorie* (m/th) est excellent, à trois exceptions près : le samarium  $1,74 \mu_B / 0,85 \mu_B$  ( $1,55 \mu_B$  avec la correction de Van Vleck-Frank, voir le § 3.4), l'euporium  $8,3 \mu_B / 0 \mu_B$  ( $3,40 \mu_B$  avec la correction de Van Vleck-Frank) et l'ytterbium ( $0 \mu_B / 4,53 \mu_B$ ). Le profond désaccord que l'on observe avec l'euporium et l'ytterbium vient de ce que ces deux atomes ne sont pas ionisés trois fois, mais seulement deux fois ce qui leur permet de se retrouver avec une couche demi-pleine ( $4f^7$ ) pour l'euporium et pleine ( $4f^{14}$ ) pour l'ytterbium.

Dans l'état ordonné, les terres rares légères présentent des structures magnétiques qui ne facilitent pas la détermination des moments à saturation. Pour les terres rares lourdes, l'accord entre les moments à saturation mesurés et théoriques (m/th) est plutôt meilleur que dans les composés cités précédemment : Gd ( $7,55 \mu_B / 7 \mu_B$ ), Tb ( $9,34 \mu_B / 9 \mu_B$ ), Dy ( $10,2 \mu_B / 10 \mu_B$ ), Ho ( $10,34 \mu_B / 10 \mu_B$ ), Er ( $8,0 \mu_B / 9,0 \mu_B$ ), Tm ( $3,4 \mu_B / 7,0 \mu_B$ ). On notera en revanche que pour le gadolinium, le moment est assez différent de celui que prévoit la théorie pour  $\text{Gd}^{3+}$ , la différence pouvant être considérée comme la contribution des électrons de conduction.

*Ainsi l'on sent combien il est difficile de prédire exactement quel sera le moment magnétique d'une substance donnée, le niveau fondamental de l'ion étant toujours plus ou moins perturbé par l'environnement électrostatique au sein de la matière. Ceci nous conduit naturellement à nous pencher maintenant sur le champ électrique qui agit localement, au sein de la matière, sur les orbites électroniques.*

## 4. L'ANISOTROPIE MAGNÉTOCRISTALLINE : LE CHAMP ÉLECTRIQUE CRISTALLIN

Parmi les interactions responsables de la structure magnétique dans les différents matériaux, nous avons introduit précédemment (au § 2.3 du chapitre 3) la notion

d'anisotropie magnétocristalline, et sa description phénoménologique sous la forme d'une énergie faisant intervenir uniquement l'angle entre les moments magnétiques et les directions de symétrie de la structure cristallographique. Deux mécanismes microscopiques sont à l'origine de cette énergie : l'anisotropie des interactions d'échange (qui sera évoquée au chapitre 9) et le *champ électrique cristallin*, qui apparaît généralement comme le mécanisme le plus important et que nous allons traiter dans la fin de ce chapitre.

Avant d'approfondir le formalisme utilisé pour décrire cet effet, on peut dire en termes simples qu'en raison du potentiel électrostatique dû à l'environnement, les électrons responsables du magnétisme ne peuvent plus occuper indifféremment n'importe quelle orbitale 3d (4f) comme dans le cas de l'ion libre.

Il en résulte une anisotropie du moment cinétique orbital, et par suite du moment magnétique associé. L'anisotropie du moment magnétique total résulte alors du couplage spin-orbite. Rappelons que l'effet du champ cristallin n'est pas uniquement de favoriser certaines directions des moments magnétiques comme semblait l'indiquer la description phénoménologique, mais aussi de jouer sur l'amplitude même du moment magnétique.

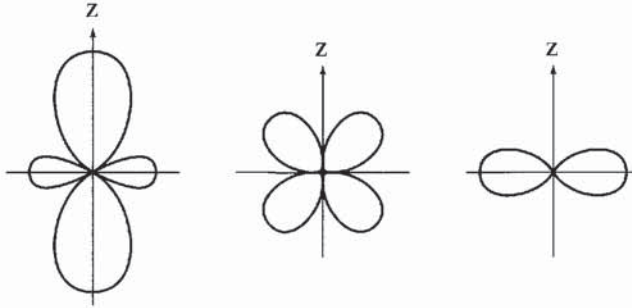
Nous allons tout d'abord (§ 4.1) traiter le cas simple d'un seul électron d. Nous ferons ensuite (§ 4.2) la distinction entre les éléments 3d et les éléments 4f pour ce qui est de l'importance relative du champ cristallin par rapport aux autres interactions. Dans les § 4.3 et 4.4, nous examinerons successivement les effets du champ cristallin sur ces deux types d'éléments. Enfin dans le dernier paragraphe, nous développerons davantage la description de l'anisotropie magnétique des composés uniaxiaux à base de terres rares.

#### 4.1. CAS D'UN ÉLECTRON *d* SOUMIS AU POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE D'UN ENVIRONNEMENT UNIAXIAL

Les contributions orbitales aux cinq fonctions d'ondes permettant de décrire l'état d'un électron d sont les harmoniques sphériques suivants :

$$\begin{aligned} Y_2^0 &= \sqrt{5/16\pi}(3\cos^2\theta - 1) \\ Y_2^1 &= -Y_2^{-1*} = -\sqrt{15/8\pi}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} \\ Y_2^2 &= Y_2^{-2*} = \sqrt{15/32\pi}\sin^2\theta e^{2i\varphi} \end{aligned} \quad (7.29)$$

En fait la fonction d'onde complète comporte aussi une partie radiale commune à ces cinq orbitales. Ces cinq orbitales conduisent aux trois distributions spatiales représentées sur la figure 7.9. On reconnaît les *harmoniques sphériques* décrits dans l'annexe 6, au § A6.1.



**Figure 7.9 - Distribution spatiale en représentation polaire du module de la fonction d'onde orbitale pour  $|Y_2^0|$  (à gauche),  $|Y_2^1|$  (au centre) et  $|Y_2^2|$  (à droite)**

En l'absence de champ magnétique et d'atomes environnants (cas d'un atome libre), la probabilité d'occupation de ces cinq orbitales est la même, si bien que l'on montre

que la distribution spatiale de l'électron d est sphérique :  $\left| \sum_m Y_2^m \right|^2 = \text{constante}$ .

On montre aussi aisément que le moment magnétique orbital induit par un champ est *isotrope* et vaut  $2 \mu_B$  dans la direction du champ.

Supposons maintenant que l'atome soit environné de deux charges (ions par exemple)  $-e$  disposées selon l'axe  $z$  de part et d'autre et à la même distance de l'atome considéré. En raison de la répulsion coulombienne entre l'électron d et les deux charges voisines, il est clair, au vu de la figure 7.9, que les cinq orbitales ne sont plus équivalentes énergétiquement et que (à 0 K) seules les orbitales  $Y_2^2$  et  $Y_2^{-2}$  sont occupées avec la même probabilité. Le niveau orbital fondamental n'est plus 5 fois mais 2 fois dégénéré et en algèbre de Dirac les deux états s'écrivent  $|m_\ell \rangle = |2\rangle$  et  $|-2\rangle$ . Compte tenu des deux états de spin possibles le niveau fondamental est quatre fois dégénéré, ce qui signifie que les quatre états de base :  $|m_\ell, \sigma \rangle = |2, 1/2\rangle, |2, -1/2\rangle, |-2, 1/2\rangle$  et  $|-2, -1/2\rangle$  correspondent tous à la même énergie et donc à la même probabilité d'occupation.

Faisons maintenant intervenir le couplage spin-orbite  $\mathcal{H}_{so} = |\lambda| \ell \cdot s$ , considéré ici comme bien inférieur au champ cristallin. Un simple calcul de perturbation au premier ordre lève la dégénérescence et conduit à deux doublets séparés d'une énergie  $\Delta E = 2|\lambda|$  et dont le fondamental a pour états de base :  $|2, -1/2\rangle$  et  $|-2, 1/2\rangle$ . (Ce résultat est obtenu aisément en diagonalisant la matrice  $4 \times 4$  formée des éléments  $\langle a | \mathcal{H}_{so} | b \rangle$ , où  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  désignent l'un des quatre états ci-dessus).

Regardons enfin l'effet d'un champ perturbateur  $\mathbf{H}$  agissant tout d'abord parallèlement à  $z$  puis perpendiculairement à cette direction, par exemple selon  $x$ .

Les hamiltoniens Zeeman perturbateurs associés s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{H}_Z = -\mu_0 \mathbf{m}_z \mathbf{H} = \mu_0 \mu_B (\ell_z + 2s_z) \mathbf{H} \quad (7.30)$$

et 
$$\mathcal{H}_Z = -\mu_0 \mathbf{m}_x \mathbf{H} = \mu_0 \mu_B (\ell_x + 2s_x) \mathbf{H} \quad (7.31)$$

Lorsque le champ  $\mathbf{H}$  est orienté selon  $z$ , le calcul de perturbation sur le doublet fondamental ci-dessus conduit à deux singulets d'énergies  $\pm \mu_0 \mu_B H$  (par rapport à l'énergie du doublet). Le nouveau singulet fondamental est l'état  $|-2, 1/2\rangle$  dont le moment magnétique est  $\langle -2, 1/2 | \mathbf{m}_z | -2, 1/2 \rangle = 1 \mu_B$ . En revanche, lorsque  $\mathbf{H}$  est orienté selon  $x$ , il n'y a pas de levée de dégénérescence du doublet au premier ordre et donc pas de moment magnétique (en effet, les éléments de matrice  $\langle \mp 2, \pm 1/2 | \ell_x + 2s_x | \mp 2, \pm 1/2 \rangle$  sont tous nuls). On en déduit que l'énergie est minimum et le moment maximum lorsque le champ est appliqué selon la *direction*  $z$  qui est donc l'*axe de facile aimantation*.

Examinons maintenant le cas opposé où les deux charges placées sur l'axe  $z$  de part et d'autre de l'ion considéré sont positives. En raison de l'attraction coulombienne, à 0 K, seule est occupée l'orbitale  $Y_2^0$  de moment cinétique orbital nul et par suite de moment magnétique orbital nul ( $\langle 0 | \ell_i | 0 \rangle = 0$ , quel que soit  $i = x, y$  ou  $z$ ). Le niveau fondamental est alors le doublet  $|0, \pm 1/2\rangle$ . On montre facilement qu'au premier ordre, le couplage spin-orbite ne lève pas la dégénérescence ( $\langle 0, \pm 1/2 | \mathcal{H}_{so} | 0, \pm 1/2 \rangle = 0$ ). Ainsi, au premier ordre, il n'y a pas de moment orbital et donc pas d'effet dû au couplage spin-orbite. La dégénérescence est levée par l'action d'un champ. En revanche, que ce champ  $\mathbf{H}$  soit parallèle ou perpendiculaire à  $z$ , le singulet fondamental a la même énergie  $-\mu_0 \mu_B H$  et le même moment magnétique  $\langle \mathbf{m}_z \rangle = \langle \mathbf{m}_x \rangle = 1 \mu_B$ . Par conséquent, le moment magnétique est purement de spin et isotrope. Notons qu'en fait un calcul au deuxième ordre montre que la direction  $z$  est de plus difficile aimantation.

#### 4.2. ORDRES DE GRANDEUR DU CHAMP CRISTALLIN

L'importance du champ cristallin par rapport aux autres interactions est différente selon que l'on s'intéresse à des éléments 3d ou 4f. Le schéma de la figure 7.10 montre dans les deux cas les ordres de grandeur des énergies agissant sur ces deux types d'éléments magnétiques au sein de la matière. On peut remarquer que l'interaction due au champ cristallin est beaucoup plus faible pour les éléments 4f que pour les éléments 3d. Ceci vient du fait que la couche 4f est beaucoup plus écrantée que la couche 3d par les couches plus externes (voir figure 7.8).

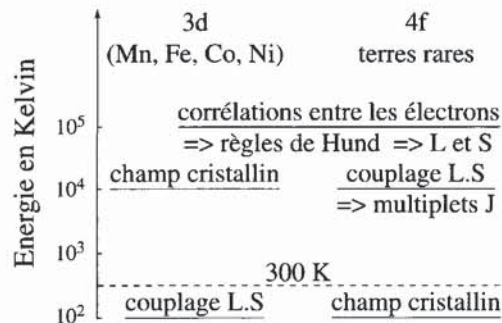


Figure 7.10 – Ordre de grandeur des différentes interactions agissant sur les atomes 3d et 4f dans la matière

### 4.3. EFFETS DU CHAMP CRISTALLIN SUR L'ANISOTROPIE MAGNÉTIQUE DES ÉLÉMENTS 3d

Comme le montre la figure 7.10, le cas des éléments 3d correspond généralement à la situation traitée au § 4.1 où le couplage spin-orbite est une perturbation devant le champ cristallin. En raison du caractère relativement délocalisé des électrons responsables du magnétisme, la situation des ions 3d est souvent complexe, en particulier dans le cas des métaux et alliages. Aussi donnerons-nous seulement de manière qualitative les principaux effets du champ cristallin sur ces éléments.

#### 4.3.1. Extinction du moment orbital

Dans les isolants, nous l'avons déjà vu, le champ électrique cristallin aboutit souvent à une *extinction* ("quenching" en anglais) presque totale du moment cinétique orbital qui signifie que, dans l'état fondamental,  $\langle L_i \rangle \approx 0$  en raison du champ cristallin, quel que soit  $i = x, y$  ou  $z$ . Le moment magnétique est alors presque exclusivement de spin : tel est le cas déjà cité de l'ion  $\text{Cr}^{2+}$  dans un alun de chrome et de potassium. *L'anisotropie magnétocristalline est alors faible* et provient du résidu de moment orbital sur lequel peut alors agir le couplage spin-orbite. Cet effet s'observe entre autres dans certains oxydes (ferrites par exemple), lorsque l'environnement de l'ion magnétique est cubique ou tétraédrique.

#### 4.3.2. Cas d'un état $L = 2$

Toujours dans le cas des isolants, lorsque l'environnement est octaédrique ou tétraédrique et que  $L = 2$  (c'est en particulier le cas de l'ion comportant un seul ou neuf électrons d) les cinq états orbitaux sont décomposés par le champ cristallin en deux niveaux : un doublet  $e_g$  de moment orbital nul et un triplet  $t_{2g}$  de moment orbital non nul. Si le doublet est le fondamental – et c'est souvent le cas – l'anisotropie magnétocristalline est très faible. En revanche, si le triplet est fondamental, le matériau peut présenter une anisotropie magnétocristalline significative.

#### 4.3.3. Cas des ions $\text{Fe}^{3+}$ et $\text{Mn}^{2+}$ dans des isolants (ferrites par exemple)

Ces ions ont une configuration  $3d^5$ . Il en résulte que le *terme* fondamental est tel que  $S = 5/2$  et  $L = 0$  (état orbital S). Il n'y a donc pas d'effet de champ cristallin et par conséquent pas d'anisotropie magnétocristalline jusqu'à un ordre d'approximation élevé, quelle que soit la symétrie. Ceci explique la très faible anisotropie intrinsèque de  $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$  (l'anisotropie des particules de ce matériau, utilisé pour l'enregistrement magnétique, est une anisotropie dipolaire due à la forme allongée des grains).

#### 4.3.4. Etats de bas spin

Un champ cristallin très intense peut parfois contrecarrer la répulsion électrostatique intra-atomique responsable des règles de Hund. Le peuplement des états électroniques 3d se fait alors en cherchant à rendre maximum d'abord la valeur du moment

cinétique orbital, puis celle du spin total maximum. On peuplera donc successivement les états :  $|2+\rangle$ ,  $|2-\rangle$ ,  $|1+\rangle$ ,  $|1-\rangle$ ,  $|0+\rangle$ ,  $|0-\rangle$ ,  $|-1+\rangle$ ,  $|-1-\rangle$ ,  $|-2+\rangle$ ,  $|-2-\rangle$ , et non l'inverse comme le prévoient les règles de Hund :  $|2+\rangle$ ,  $|1+\rangle$ ,  $|0+\rangle$ ,  $|-1+\rangle$ ,  $|-2+\rangle$ ,  $|2-\rangle$ ,  $|1-\rangle$ ,  $|0-\rangle$ ,  $|-1-\rangle$ ,  $|-2-\rangle$  (Ici  $|m_\ell \pm\rangle$  signifie que le spin vaut  $+1/2$  ou  $-1/2$ ). Au lieu d'atteindre  $5 \mu_B$ , le moment de spin oscille entre 0 et  $1 \mu_B$ . C'est un état de bas spin. L'anisotropie magnétocristalline peut en être fortement perturbée : par exemple, dans le cas déjà cité de l'ion  $\text{Ru}^{3+}$ , au lieu d'être nul le moment orbital vaut  $L = 6$ , et l'on observe une anisotropie magnétique très supérieure à celle que l'on attend d'un état S.

#### 4.3.5. Influence de la symétrie

Notons enfin que l'anisotropie magnétocristalline est d'un ou plusieurs ordres de grandeur plus élevée en symétrie uniaxiale, en particulier hexagonale ou quadratique, qu'en symétrie cubique. C'est la raison pour laquelle les matériaux doux sont généralement cubiques (par exemple bon nombre de ferrites spinelles, voir le chapitre 17), alors que les matériaux durs sont de plus basse symétrie, par exemple hexagonale (hexaferrite de baryum, voir le chapitre 15).

### 4.4. EFFETS DU CHAMP CRISTALLIN

#### SUR LES IONS DES ÉLÉMENTS DE TERRES RARES

Comme l'indique la figure 7.10, le champ cristallin est une perturbation agissant sur chaque multiplet J dont la dégénérescence est alors levée. Compte tenu de la grande différence d'énergie entre les multiplets, on ne considérera par la suite que l'effet du champ cristallin sur le multiplet fondamental. L'hamiltonien perturbateur a pour expression :  $\mathcal{H}_{cc} = -e|\sum_i V(\mathbf{r}_i)$  où  $V(\mathbf{r}_i)$  est le potentiel électrostatique dû à l'environnement de la couche 4f.

La sommation s'étend à tous les électrons 4f de l'élément considéré. Cet hamiltonien peut toujours s'écrire sous la forme [7] :

$$\mathcal{H}_{cc} = \sum_i \sum_{\ell} r_i^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} A_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta_i, \varphi_i) \quad (7.32)$$

où les  $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$  sont les harmoniques sphériques, et les  $A_{\ell}^m$  des paramètres, appelés *paramètres de champ cristallin*, qui dépendent de l'environnement. Le nombre de termes, c'est-à-dire de valeurs de  $\ell$  et  $m$  possibles, est limité par la symétrie et d'autant plus faible que la symétrie est élevée. De plus, on admettra que le nombre  $\ell$  est toujours pair et que les termes tels que  $\ell > 6$  n'interviennent pas.

En symétrie cubique, le terme de plus bas degré est d'ordre 4 alors que pour les autres symétries, les termes de plus bas degré sont d'ordre 2 et généralement prépondérants. A titre d'exemple en symétrie hexagonale, l'hamiltonien perturbateur se résumera à :

$$\mathcal{H}_{cc} = \sum_i \left[ r_i^2 A_2^0 Y_2^0 + r_i^4 A_4^0 Y_4^0 + r_i^6 A_6^0 Y_6^0 + r_i^6 A_6^6 (Y_6^6 + Y_6^{-6}) \right] \quad (7.33)$$

Le calcul de perturbation nécessite la détermination d'éléments de matrice du type  $\langle J, M_J | \mathcal{H}_{cc} | J, M_J \rangle$  où les états  $|J, M_J\rangle$  sont des fonctions relativement complexes des fonctions d'ondes individuelles de chaque électron  $f$ . Afin de simplifier la détermination de ces éléments de matrice une méthode élégante à été proposée qui consiste à remplacer chaque opérateur du type  $\sum_i r_i^\ell A_\ell^m Y_\ell^m(\theta_i, \varphi_i)$  par un opérateur équivalent faisant intervenir les composantes  $J_x, J_y$  et  $J_z$  du moment cinétique total  $\mathbf{J}$  et agissant directement et simplement sur les états  $|J, M_J\rangle$ . Par exemple pour le terme d'ordre 2, le plus souvent présent et prépondérant dès que la symétrie est inférieure à la symétrie cubique, on remplacera  $\sum_i r_i^2 A_2^0 Y_2^0(\theta_i, \varphi_i)$  par l'opérateur :

$$\alpha_J \langle r^2 \rangle A_2^0 O_2^0 = B_2^0 O_2^0 = B_2^0 [3J_z^2 - J(J+1)] \quad (7.34)$$

Les opérateurs  $O_\ell^m$  sont les *opérateurs équivalents de Stevens* et les  $\alpha_J$  ( $\beta_J$  et  $\gamma_J$  pour les termes d'ordre 4 et 6, respectivement) des *facteurs multiplicatifs* et caractéristiques de la distribution des électrons 4f de chacun des ions terres rares, parfois appelés *coefficients de Stevens*. Ces coefficients sans dimension sont tabulés et varient aussi bien en signe qu'en amplitude d'une terre rare à l'autre [8].

Pour simplifier, nous ne considérerons, par la suite, que le terme d'ordre deux décrit ci-dessus (équation 7.34) qui, à l'exception de la symétrie cubique, joue un rôle prépondérant dans la plupart des cas et permet de comprendre les effets du champ cristallin dans un grand nombre de composés uniaxiaux en particulier hexagonaux ou tétragonaux. C'est aussi ce terme d'ordre 2 qui est à l'origine du couplage magnétoélastique, et cela pour toutes les symétries, y compris la symétrie cubique. Nous allons nous intéresser à trois situations différentes et considérer l'effet, à 0 K, tout d'abord du champ cristallin puis de l'hamiltonien Zeeman  $\mathcal{H}_Z = -\mu_0 g_J \mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}$ . Signalons toutefois que dans la réalité ces deux effets (champ cristallin et effet Zeeman) sont considérés au même ordre de perturbation, si bien que l'on diagonalise directement  $\mathcal{H}_{cc} + \mathcal{H}_Z$ .

#### 4.4.1. Cas d'un multiplet $J = 4$ et $B_2^0 < 0$

C'est par exemple le cas de l'ion  $\text{Pr}^{3+}$ . Un calcul simple montre que la décomposition du multiplet fondamental (que l'on prend comme zéro d'énergie) conduit au doublet fondamental  $|\pm 4\rangle$  d'énergie  $-28 |B_2^0|$  alors que le premier état excité est le doublet  $|\pm 3\rangle$  d'énergie  $-7 |B_2^0|$  (figure 7.11). Un champ  $\mathbf{H}$  selon  $z$  conduit au singulet  $|-4\rangle$  comme fondamental, d'énergie  $-28 |B_2^0| - 4 \mu_0 g_J \mu_B H$  et ayant pour moment magnétique la valeur maximale de l'ion libre soit  $3,2 \mu_B$ .

En revanche, au premier ordre, un champ selon  $x$  ne lève pas la dégénérescence du doublet de champ cristallin dont le moment associé est alors nul.

*En conséquence, la direction  $z$  est de facile aimantation.*

### 4.4.2. Cas d'un multiplet $J = 4$ et $B_2^0 > 0$

Le niveau fondamental dû au champ cristallin est dans ce cas (figure 7.11) le singulet  $|0\rangle$  d'énergie  $-20 B_2^0$  alors que le premier excité est le doublet  $|\pm 1\rangle$  d'énergie  $-17 B_2^0$ . Un tel singulet est non magnétique, en effet  $\langle 0|m_z|0\rangle = \langle 0|m_x|0\rangle = 0$ . L'effet d'un champ est du deuxième ordre à travers des éléments de matrice de l'hamiltonien Zeeman entre le singulet fondamental et le premier niveau excité. On peut montrer que l'on aura un moment induit progressivement lorsque le champ est perpendiculaire à  $z$ , alors qu'un champ selon  $z$  n'aura pratiquement aucun effet, si bien que l'axe  $z$  est de difficile aimantation.

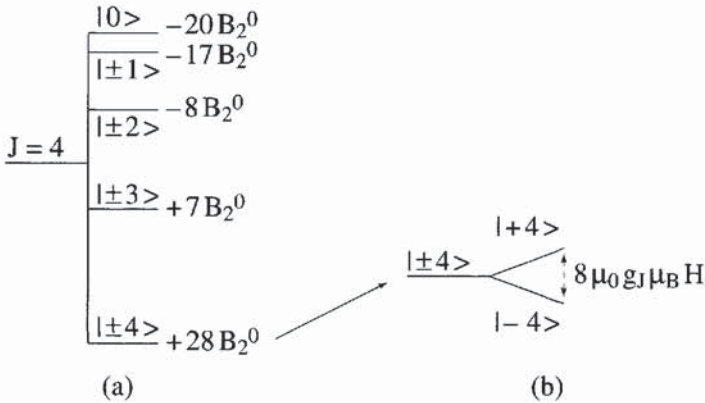


Figure 7.11 - (a) Décomposition du multiplet  $J = 4$  par le terme d'ordre deux du champ cristallin  $B_2^0 O_2^0$ . Le niveau fondamental est le doublet  $|M_J = \pm 4\rangle$  si  $B_2^0 < 0$ , et le singulet  $|M_J = 0\rangle$ , si  $B_2^0 > 0$  - (b) Décomposition du doublet  $|M_J = \pm 4\rangle$  par un champ  $H \parallel Oz$

### 4.4.3. Cas d'un multiplet $J = 5/2$ et $B_2^0 > 0$

C'est par exemple le cas de l'ion  $Ce^{3+}$ . La décomposition du multiplet conduit aux trois doublets  $|\pm 5/2\rangle$ ,  $|\pm 3/2\rangle$  et  $|\pm 1/2\rangle$  d'énergies  $10 B_2^0$ ,  $-2 B_2^0$  et  $-8 B_2^0$ , respectivement (figure 7.12).

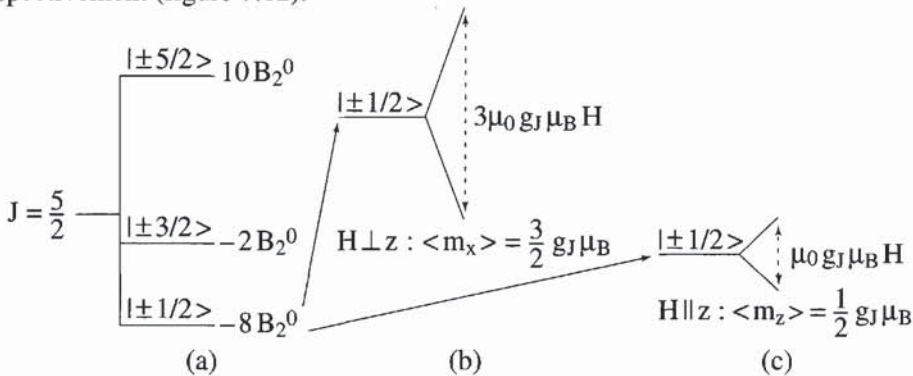


Figure 7.12 - (a) Décomposition du multiplet  $J = 5/2$  par le terme d'ordre deux du champ cristallin  $B_2^0 O_2^0$  - (b) Décomposition du doublet  $|\pm 1/2\rangle$  par un champ magnétique  $H \perp Oz$  - (c) Décomposition du même doublet par un champ magnétique  $H \parallel Oz$

L'action d'un champ selon Oz sur le fondamental  $|\pm 1/2\rangle$  donne lieu au singulet fondamental  $|-1/2\rangle$ , d'énergie  $-8 B_2^0 - \mu_0 g_J \mu_B H/2$  et de moment magnétique  $\langle m_z \rangle = g_J \mu_B/2$ , alors qu'un champ perpendiculaire à Oz conduit au singulet  $\{|1/2\rangle - |-1/2\rangle\}/\sqrt{2}$ , d'énergie  $-8 B_2^0 - 3 \mu_0 g_J \mu_B H/2$  et de moment magnétique  $\langle m_x \rangle = 3 g_J \mu_B/2$ . Pour la même valeur du champ, l'énergie est la plus élevée selon l'axe z qui est donc la direction de difficile aimantation. *Le plan perpendiculaire à z est alors de facile aimantation*, car on trouve la même énergie quelle que soit la direction de **H** dans ce plan.

Ces trois exemples donnent une idée de la grande diversité de situations possibles lorsque l'on considère l'ensemble des termes du champ cristallin. Dans les systèmes ferromagnétiques dont la température de Curie est suffisamment élevée, le champ moléculaire est tel que le moment magnétique est égal, ou presque, à la valeur maximale. Si le composé est de symétrie hexagonale ou quadratique, les différents cas étudiés ci-dessus permettent de tirer la conclusion suivante : *l'axe z est de facile ou difficile aimantation selon que  $B_2^0$  est respectivement négatif ou positif*.

#### 4.5. L'ANISOTROPIE DES COMPOSÉS 4f UNIAxiaux DE SYMÉTRIE HEXAGONALE OU QUADRATIQUE

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, le terme d'ordre deux  $B_2^0 O_2^0$  est la plupart du temps prépondérant. En se limitant à ce terme, les effets du champ cristallin, en particulier la direction de facile aimantation, dépendent des effets conjugués des paramètres  $A_2^0$  et  $\alpha_J$ , en particulier de leur signe.  $A_2^0$  caractérise le potentiel dû à l'environnement. Pour fixer les idées, deux charges négatives sur l'axe z et de part et d'autre de l'ion considéré conduisent à une valeur positive de  $A_2^0$ . Au contraire, si ces charges sont positives,  $A_2^0$  est négatif.  $\alpha_J$  caractérise la forme de la distribution électronique de la couche 4f, en particulier son moment quadrupolaire.

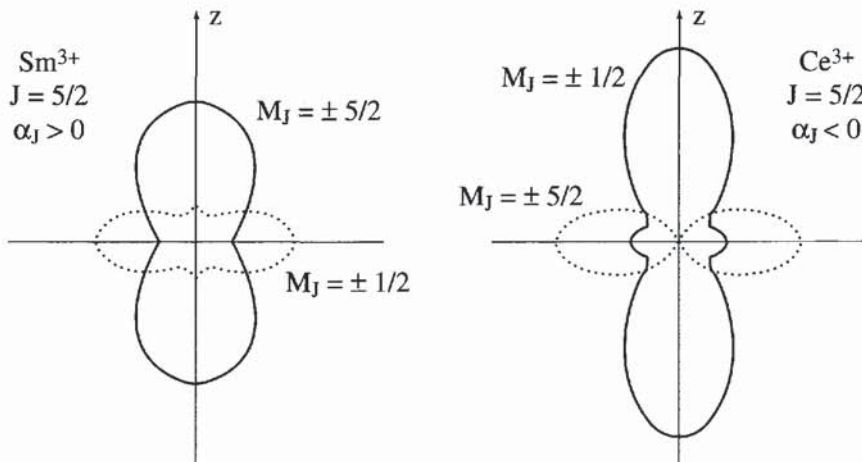


Figure 7.13 - Distribution angulaire des électrons 4f pour des ions présentant  $J = 5/2$  :  $\text{Sm}^{3+}$  avec  $\alpha_J > 0$  et  $\text{Ce}^{3+}$  avec  $\alpha_J < 0$  [9]



Comme l'illustre la figure 7.13, dans un ion dont  $\alpha_J$  est positif (ion  $\text{Sm}^{3+}$ ), la distribution 4f est allongée selon z (*prolate* en anglais) pour les états  $|M_J = \pm J\rangle$  et au contraire aplatie (*oblate*) pour les états  $|M_J = \pm 1/2\rangle$  ou  $|M_J = 0\rangle$  selon que J est respectivement demi-entier ou entier, et réciproquement. En revanche dans un ion dont  $\alpha_J$  est négatif (ion  $\text{Ce}^{3+}$ ) la distribution 4f est aplatie pour les états  $|M_J = \pm J\rangle$  et au contraire allongée pour les états  $|M_J = \pm 1/2\rangle$  ou  $|M_J = 0\rangle$  selon que J est demi-entier ou entier. La valeur absolue de  $\alpha_J$  est d'autant plus grande que l'écart à la sphéricité est prononcé. Les valeurs de ce paramètre pour les principales terres rares sont reportées dans le tableau 7.4. Noter que l'ion  $\text{Gd}^{3+}$  n'y figure pas car son moment orbital étant nul, la couche 4f a une distribution sphérique et donc une valeur nulle de  $\alpha_J$ .

Tableau 7.4 - Coefficient de Stevens  $\alpha_J$  pour les ions de terres rares

Ion	$\text{Ce}^{3+}$	$\text{Pr}^{3+}$	$\text{Nd}^{3+}$	$\text{Sm}^{3+}$	$\text{Tb}^{3+}$	$\text{Dy}^{3+}$	$\text{Ho}^{3+}$	$\text{Er}^{3+}$	$\text{Tm}^{3+}$	$\text{Yb}^{3+}$
$10^2\alpha_J$	-5,71	-2,10	-0,64	+4,13	-1,01	-0,63	-0,22	+0,25	+1,01	+3,17

Dans une série de composés à base de terres rares (c'est-à-dire de même stœchiométrie et de même structure cristallographique, ce qui est le cas la plupart du temps) le paramètre  $A_2^0$  qui caractérise l'environnement garde le même signe et change peu en valeur absolue lorsque l'on passe d'une terre rare à l'autre. Le coefficient  $\langle r^2 \rangle$  est toujours positif bien évidemment et décroît régulièrement d'un facteur deux environ lorsque l'on passe du cérium au thulium. Le terme  $B_2^0$ , en particulier son signe, suit alors à peu près la variation de  $\alpha_J$ . Pour discuter la direction de facile aimantation, on peut utiliser l'approche précédente ou bien, de manière plus physique, tenir compte de l'interaction coulombienne entre les électrons 4f d'une part et les charges avoisinantes d'autre part. On peut alors, comme cela est schématisé dans le tableau 7.5, déduire la direction de facile aimantation selon les signes respectifs de  $A_2^0$  et de  $\alpha_J$ .

Tableau 7.5 - Influence du signe de  $\alpha_J$  et de  $A_2^0$  sur l'allure des orbitales et sur l'anisotropie magnétocristalline

	Environnement	$\alpha_J$ est positif	$\alpha_J$ est négatif
$A_2^0 > 0$		orbitale aplatie occupée en sorte que $ M_J  = 1/2$ ou 0 => axe z difficile en accord avec $B_2^0 > 0$	orbitale aplatie occupée en sorte que $ M_J  = J$ => axe z facile en accord avec $B_2^0 < 0$
	$A_2^0 < 0$		orbitale allongée occupée en sorte que $ M_J  = J$ => axe z facile en accord avec $B_2^0 < 0$

Ainsi, si dans une série de composés, l'axe  $z$  est de facile aimantation pour les terres rares dont le paramètre  $\alpha_j$  est positif, cet axe est de difficile aimantation pour les terres rares dont ce paramètre est négatif.

Cette approche est particulièrement bien vérifiée dans les composés à base de terres rares  $R$  utilisés comme aimants permanents, en particulier les composés hexagonaux  $RCO_5$  et tétragonaux  $R_2Fe_{14}B$ . Comme on le verra plus loin, il est nécessaire pour avoir un bon aimant que l'axe  $z$  soit de facile aimantation. Dans les composés  $RCO_5$ ,  $A_2^0$  est négatif si bien qu'un aimant ne pourra être obtenu qu'avec les terres rares dont  $\alpha_j$  est positif, c'est pourquoi le meilleur aimant de la série est à base de  $SmCo_5$ . Au contraire dans les composés  $R_2Fe_{14}B$ ,  $A_2^0$  est positif et le meilleur aimant de la série est à base de  $Nd$ . Signalons que ces deux types d'aimants sont à l'heure actuelle les plus performants.

## EXERCICES

**E.1** Déterminer pour les ions  $Sm^{2+}$  et  $Eu^{2+}$ , qui ont 6 et 7 électrons  $4f$  respectivement, les valeurs de  $S$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $g_J$  et du moment magnétique maximum de l'état fondamental.

**E.2** Le fer, à l'état divalent et trivalent, a pour configuration externe  $3d^6$  et  $3d^5$ , respectivement. De plus, ces ions se comportent dans un grand nombre de matériaux isolants comme si leur moment orbital était nul (en raison du champ cristallin). Dans cette hypothèse, déterminer pour  $Fe^{2+}$  et  $Fe^{3+}$  les valeurs de  $S$ ,  $J$ ,  $g_J$  et du moment magnétique maximum dans l'état fondamental.

**E.3** Le coefficient du couplage spin-orbite  $\lambda$  des ions  $Sm^{3+}$  et  $Tb^{3+}$  vaut  $-630$  K et  $580$  K, respectivement. Donner pour ces ions les valeurs de  $S$ ,  $L$ ,  $J$ ,  $g_J$  et du moment magnétique maximum du premier multiplet excité. Donner également, en Kelvin, la différence d'énergie avec le multiplet fondamental.

**E.4** Soient deux charges identiques  $q$  situées en  $z = \pm a$  sur l'axe  $z$ . Écrire le développement limité au deuxième ordre en  $r/a$  du potentiel  $V(\mathbf{r})$  en un point  $M$  voisin de l'origine de coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . En déduire le terme d'ordre deux  $A_2^0$  de champ cristallin.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1**  $Sm^{2+}$  :  $S = 3$ ,  $L = 3$ ,  $J = |L - S| = 0$ ,  $m = 0$ .

$Eu^{2+}$  :  $S = 7/2$ ,  $L = 0$ ,  $J = 7/2$ ,  $g_J = 2$ ,  $m = 7 \mu_B$ .

**S.2**  $Fe^{2+}$  :  $S = J = 3$ ,  $g_J = 2$ ,  $m = 6 \mu_B$ .  $Fe^{3+}$  :  $S = J = 5/2$ ,  $g_J = 2$ ,  $m = 5 \mu_B$ .

**S.3**  $\text{Sm}^{3+}$  :  $S = 5/2$ ,  $L = 5$ ,  $J = |L - S| + 1 = 7/2$ ,  $g_J = 0,825$ ,  $m = 2.89 \mu_B$ ,  
 $\Delta E = 2205 \text{ K}$ .

$\text{Tb}^{3+}$  :  $S = 3$ ,  $L = 3$ ,  $J = L + S - 1 = 5$ ,  $g_J = 3/2$ ,  $m = 7,5 \mu_B$ ,  $\Delta E = 3480 \text{ K}$ .

**S.4**  $A_2^0 = -|e|q/\epsilon_0 a^3 \sqrt{5\pi}$  où  $|e|$  est la charge de l'électron. Noter que  $A_2^0 < 0$  pour  $q > 0$  et inversement.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALÔE, *Mécanique Quantique*, Tomes I et II (1977) Hermann éditeur, Paris ; FEYNMAN, LEIGHTON, SANDS, *Le cours de physique de Feynman, Mécanique Quantique* (1979) InterEditions ; L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Mécanique Quantique* (1966) Editions Mir, Moscou ; H.J. ZEIGER, G.W. PRATT, *Magnetic Interactions in Solids* (1973) Clarendon Press, Oxford ; J.C. SLATER, *Quantum Theory of Atomic Structure*, Vol. 1 (1960) McGraw-Hill Book Company.
- [2] A. MESSIAH, *Mécanique quantique* (1959) Dunod éditeur, Paris.
- [3] F.B. KOCH, M.E. FINE, *J. Appl. Phys.* (1967) **38**, 1470.
- [4] G. FOËX, C.-J. GORTER, L.-J. Smits, *Constantes sélectionnées diamagnétisme et paramagnétisme* (1957) Masson & Cie dépositaires, Paris.
- [5] K.H.J. BUSCHOW, *Rep. Prog. Phys.* (1979) **42**, 1373.
- [6] K.H.J. BUSCHOW, *Rep. Prog. Phys.* (1977) **40**, 1179.
- [7] M.T. HUTCHINGS, in *Solid State Physics*, F. Seitz et D.T. Turnbull éditeurs Academic Press, New York (1964) **16**, 227.
- [8] K.H.J. STEVENS, *Proc. Phys. Soc. London*, (1952) **A 65**, 209.
- [9] D. SCHMITT, *J. Physique*, (1986) **47**, 677.

## CHAPITRE 8

# MAGNÉTISME DANS LE MODÈLE DES ÉLECTRONS ITINÉRANTS

(de caractère fondamental, ce chapitre peut être survolé lors d'une première lecture)

*Dans le chapitre 7, nous avons montré à quelles conditions un moment magnétique peut exister sur un atome ou un ion isolé, puis dans un solide constitué à partir de ces atomes (ou ions) si les électrons restent localisés sur l'atome. Dans le cas de certains métaux, les électrons vont pouvoir se déplacer dans tout le solide. Comment un tel solide peut-il être magnétique ? C'est la question fondamentale de ce chapitre.*

### 1. GÉNÉRALITÉS

Nous avons vu au chapitre 3 qu'un grand nombre d'éléments du tableau périodique portent, à l'état d'atome isolé, un moment magnétique (tableau 3.1), alors qu'à l'état de solide pur, la plupart sont diamagnétiques : seuls portent un moment magnétique les métaux de la troisième série à partir du chrome jusqu'au nickel et la plupart des terres rares et des actinides (tableau 3.2). L'établissement de la liaison chimique perturbe donc notablement les orbites électroniques responsables du magnétisme. Cette perturbation est d'ailleurs beaucoup plus sensible dans le cas des métaux d'éléments de transition (série 3d) : le moment magnétique observé dans de telles substances diffère en général profondément de celui de l'atome ou de l'ion isolé. Il en va de même pour les alliages et composés. Nous avons déjà traité au chapitre précédent les matériaux dans lesquelles les électrons responsables du magnétisme sont localisés. Pour les autres, essentiellement les métaux et alliages des éléments de transition de la série 3d, le moment magnétique porté par un atome magnétique est rarement le même que celui de l'atome isolé, car les électrons de valence se déplacent dans tout le matériau et leurs fonctions d'onde sont alors très différentes de celles de l'atome isolé. Dans ce cas, on ne peut rien dire *a priori* sur le magnétisme du corps. La compréhension du magnétisme des métaux et alliages est donc plus délicate que celle des composés et des oxydes décrits dans le chapitre

précédent. Les terres rares constituent un cas particulier : leur moment magnétique est donné par les électrons  $f$ , et les électrons de valence qui assurent la conduction proviennent des états  $s$  et  $d$ . On observe alors des moments magnétiques localisés dans un environnement métallique. Nous reviendrons sur ce cas.

Dans ce chapitre, nous montrerons comment des électrons responsables de la conductivité électrique peuvent en même temps donner lieu au magnétisme. Nous établirons que le magnétisme est dû à la répulsion coulombienne entre électrons, associée au principe d'exclusion de Pauli, et que, dans un système métallique, l'existence d'un moment magnétique sur un atome de transition dépend énormément de l'environnement de cet atome.

Avant d'expliquer les raisons pour lesquelles certains matériaux sont magnétiques, rappelons pourquoi la majorité ne l'est pas. Dans un système d'atomes, les états électroniques qui s'étendent sur tous les atomes peuvent être occupés par deux électrons de spin opposés d'après le principe de Pauli. Dans la plupart des solides, tous les états sont doublement occupés et la substance reste alors diamagnétique.

## **2. PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DES MÉTAUX MAGNÉTIQUES**

Certains faits expérimentaux observés sur des métaux magnétiques ne s'expliquent pas dans le modèle simple décrit au chapitre précédent. Ainsi le moment magnétique à saturation, observé à basse température, est égal à  $0,61$ ,  $1,72$  et  $2,22 \mu_B$  par atome respectivement pour le nickel, le cobalt et le fer. Comme le rapport gyromagnétique de ces métaux ne diffère pas trop de  $-2 (e/2 m_e)$ , la contribution orbitale au magnétisme de ces métaux reste inférieure à 10%, même pour le cobalt ( $m_L = 0,17 \mu_B$ ). On s'attendrait donc à un moment magnétique à saturation proche d'un nombre entier de magnétons de Bohr, ce qui est loin d'être le cas. De même, le moment magnétique effectif tiré de la loi de Curie-Weiss au dessus de la température critique est systématiquement trop élevé. A titre d'exemple, pour le nickel  $m_{\text{eff}} \approx 1 \mu_B$ . Pour le corps ferromagnétique  $ZrZn_2$ , le moment déduit de la loi de Curie-Weiss est dix fois plus important que le moment à saturation.

Les règles du magnétisme localisé ne s'appliquent pas davantage au cas du chrome qui présente pour  $T < T_N = 310 \text{ K}$  une structure antiferromagnétique sinusoïdale de période incommensurable avec le réseau. Avec la température, la longueur d'onde de l'oscillation de densité magnétique varie de 21 à 27 fois la distance interatomique quand  $T$  passe de 0 à  $T_N$ . Son moment magnétique à saturation est de l'ordre de  $0,6 \mu_B$  par atome, tandis que son moment magnétique effectif est pratiquement nul.

Tous ces résultats et bien d'autres montrent que la théorie du magnétisme développée dans le modèle des électrons localisés n'est plus du tout valable lorsque les électrons responsables du magnétisme sont des électrons itinérants. Comme la

*théorie des bandes* rend bien compte de nombreux faits expérimentaux, nous partirons de celle-ci et introduirons les corrélations entre les électrons qui ont été négligées. Mais nous présentons d'abord les différents types de matériaux métalliques et magnétiques, car l'interprétation de leurs propriétés diffère notablement de l'un à l'autre.

### **2.1. LES TRÈS FAIBLES FERROMAGNÉTIQUES**

Certains matériaux sont ferromagnétiques bien qu'aucun de leurs constituants ne le soit. Ils ont une aimantation très faible. Le prototype de cette classe est le composé  $ZrZn_2$ . Sa température de Curie est de 35 K, son moment à saturation de  $0,18 \mu_B$  par formule. Aucun des deux éléments n'est magnétique par lui-même, et la densité magnétique n'est pas localisée sur un atome particulier. Citons encore le composé  $Ca_{0,995}La_{0,005}B_6$  qui présente un moment magnétique de  $0,07 \mu_B$  par formule et une température de Curie de 600 K [1]. La théorie de Stoner que nous allons développer s'applique bien à ce type de matériaux, qui toutefois ne présentent aucun intérêt industriel.

### **2.2. LES MÉTAUX DE TRANSITION ET LEURS ALLIAGES**

A l'état cristallisé, ils présentent des températures de transition élevées, largement supérieures à la température ambiante. Une addition de carbone, de phosphore, ou d'autres métalloïdes permet d'en obtenir certains à l'état amorphe. L'état magnétique de l'amorphe peut être différent de celui de l'état cristallisé, avec une température de Curie souvent plus faible. La théorie que nous allons présenter ici ne s'applique que qualitativement car aucune théorie complète n'a pu encore être développée pour ces matériaux, qui présentent toujours un certain intérêt technologique.

### **2.3. LES MÉTAUX DE TERRES RARES**

Le moment magnétique des éléments de terres rares vient à la fois des moments orbitaux et de spin des électrons  $f$  que leur faible extension spatiale rend peu sensibles à l'environnement. Les électrons  $s$  ou  $d$  se délocalisent plus ou moins pour devenir électrons de conduction, et c'est par leur intermédiaire que les moments magnétiques localisés des terres rares sont couplés. En général, les éléments de terres rares présentent un grand moment magnétique, comme nous l'avons vu au chapitre 7, mais une température de transition plus faible que les éléments  $3d$ . La plupart d'entre elles présentent aussi, ce qui est important pour certaines applications, une très grande anisotropie magnétocristalline, et aussi une anisotropie du moment magnétique.

## 2.4. LES COMPOSÉS DE TERRES RARES ET DE MÉTAUX DE TRANSITION

Ces composés présentent un grand intérêt industriel, car ils cumulent le grand moment magnétique des terres rares, et une anisotropie magnétique souvent énorme, avec les températures critiques élevées des métaux de transition. C'est donc dans cette classe de matériaux que l'on trouvera les meilleurs aimants permanents tels  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ,  $\text{SmCo}_5$  ....

## 3. LE MAGNÉTISME DES ÉLECTRONS TOTALEMENT LIBRES

### 3.1. DESCRIPTION SIMPLE D'UN MÉTAL

Avant d'expliquer le ferromagnétisme des métaux, rappelons quel est le modèle le plus simple pour décrire les propriétés d'un métal comme le cuivre ou l'aluminium : c'est de le considérer comme une boîte dans laquelle les électrons de valence des atomes peuvent se déplacer librement, tandis que ceux des couches internes restent localisés. On peut aussi dans une première approximation, considérer que le potentiel à l'intérieur de la boîte est constant, c'est-à-dire négliger le potentiel périodique dû aux ions. En mécanique quantique, chaque électron est décrit par une onde qui, dans le cas où le potentiel est constant, est une onde plane. Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de cette onde est relié par la relation de Louis de Broglie à la quantité de mouvement de la particule  $\mathbf{p}$  :  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . On rappelle que  $k = 2\pi/\lambda$ .

Comme les électrons sont dans une boîte, les ondes qui leur sont associées sont soumises à des conditions aux limites et seules certaines ondes peuvent exister. Les nombres d'onde  $k$  sont donc quantifiés. Dans un état caractérisé par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  qui correspond à une énergie :

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (8.1)$$

on ne peut mettre, d'après le principe de Pauli, que deux électrons de spins opposés. A température nulle, on doit minimiser l'énergie. Pour cela, on remplit tous les états à partir de l'état d'énergie minimum jusqu'à un état d'énergie  $E_F$  appelée énergie de Fermi, correspondant à un nombre d'onde  $k_F$ .  $k_F$  est évidemment fonction de la densité  $N_e$  des électrons de valence du métal et est donné par la relation :

$$k_F^3 = 3\pi^2 N_e \quad (8.2)$$

L'état que l'on vient de construire est non magnétique, car il y a autant d'électrons dont le spin est orienté dans une direction  $\uparrow$  que dans la direction opposée  $\downarrow$ . Cet état est-il paramagnétique ou diamagnétique ?

Si l'on applique une induction magnétique  $\mathbf{B}$  sur ce métal, les électrons dont le moment magnétique est parallèle à  $\mathbf{B}$  vont voir leur énergie diminuée d'une quantité  $\mu_B B$

tandis que les autres vont voir leur énergie augmentée de la même quantité. Cet état n'est plus l'état d'énergie minimum, car on peut alors transférer des électrons de spin  $\uparrow$  dans des états d'énergie plus faible  $\downarrow$  en renversant leur spin. L'état de base en présence de l'induction magnétique n'aura plus le même nombre d'électrons pour les deux directions de spin. Il y a maintenant une majorité d'électrons qui ont un moment magnétique dans la direction du champ  $\uparrow$  et le métal possède un moment magnétique dans le sens du champ. Le corps est donc paramagnétique.

### 3.2. NOTION DE DENSITÉ D'ÉTATS

Nous allons introduire une quantité fondamentale pour les corps métalliques, c'est la densité d'états. C'est en effet une caractéristique du métal qui détermine un bon nombre de ses propriétés physiques. Le nombre d'états compris entre les énergies  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  est par définition donné par  $N(\varepsilon)d\varepsilon$ , où  $N(\varepsilon)$  est la densité d'états pour une direction de spin, par unité de volume et par unité d'énergie. Cette densité est donnée dans le modèle simple d'électrons libres et sans interaction par la relation :

$$N(\varepsilon) = \frac{mk}{2\pi^2\hbar^2} = \frac{\sqrt{m^3\varepsilon}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \approx \sqrt{\varepsilon} \quad (8.3)$$

On sait aussi calculer cette densité d'états dans des modèles plus compliqués : elle dépend de la nature et de la structure cristallographique du métal comme nous le verrons plus loin. C'est pourquoi nous la supposons connue dans le cas général.

### 3.3. PARAMAGNÉTISME DE PAULI

Pour évaluer la susceptibilité magnétique, nous allons chercher quel est l'état de base, c'est-à-dire l'état d'énergie minimum, en présence d'une induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Pour cela, il faut transférer les électrons qui sont dans une couche d'épaisseur en énergie de valeur  $\mu_B B$  d'une direction de spin dans l'autre (figure 8.1). Il y a  $N(\varepsilon_F) \mu_B B$  électrons dans cette couche et donc après transfert, il y aura deux fois ce nombre d'électrons dont le moment magnétique se sera orienté dans le sens du champ. Ceux-ci créent un moment magnétique  $\mathbf{m} = 2(\mu_B)^2 N(\varepsilon_F) \mathbf{B}$ .

La susceptibilité des électrons libres et sans interaction est donc :

$$\chi^0 = 2\mu_0 (\mu_B)^2 N(\varepsilon_F) \quad (8.4)$$

Cette susceptibilité des électrons de valence d'un métal est appelée *susceptibilité de Pauli*. Elle est pratiquement indépendante de la température comme peut le montrer la généralisation de ce calcul à température finie.

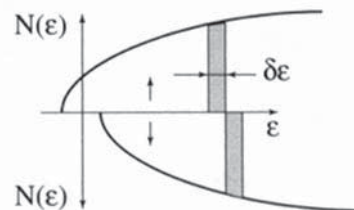


Figure 8.1 - Densité d'états d'un métal simple en présence d'une induction magnétique

On trouve :

$$\chi^0(T) = \chi^0(0) \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} k_B^2 \left[ \frac{N''}{N} - \left( \frac{N'}{N} \right)^2 \right] T^2 \right\} \quad (8.5)$$

où  $N = N(\epsilon_F)$ ,  $N' = dN/d\epsilon$ , et  $N'' = d^2N/d\epsilon^2$ .

Le premier terme correctif vient du changement de la densité d'états effective due à l'élargissement  $k_B T$  de la distribution de Fermi. Le deuxième terme provient du déplacement du niveau de Fermi nécessaire pour maintenir constant le nombre d'électrons. Comme les densités d'états varient en général sur des échelles d'énergie de l'ordre de 0,1 eV, ce qui correspond à 1000 K, le terme dépendant de la température est alors très petit et négligeable en première approximation.

### 3.4. DIAMAGNÉTISME DE LANDAU

Nous avons dit que le diamagnétisme était un phénomène universel dans la nature, qui existait même si, souvent, il était totalement masqué par des phénomènes de paramagnétisme, de ferromagnétisme, ... Les électrons libres n'échappent pas à la règle, et Landau a calculé la susceptibilité d'un ensemble d'électrons totalement libres. Nous ne donnerons pas ici la démonstration que le lecteur pourra trouver par exemple dans un ouvrage de physique du métal [2], mais le résultat est très simple et montre que le diamagnétisme dit "de Landau" est masqué par le «paramagnétisme de Pauli» mais apporte à ce dernier une correction non négligeable :

$$\chi_{\text{dia}} = -\chi_{\text{Pauli}}/3 \quad (8.6)$$

**Remarque** : les formules (8.5) et (8.6) ne s'appliquent qu'à la contribution des électrons de valence à la susceptibilité. Il faut se rappeler que les électrons des couches pleines de l'ion donnent aussi une contribution diamagnétique comme nous l'avons indiqué au chapitre 4. La susceptibilité mesurée est la somme de toutes ces contributions.

## 4. LE MODÈLE DE STONER DU FERROMAGNÉTISME ITINÉRANT

### 4.1. CRITÈRE D'INSTABILITÉ FERROMAGNÉTIQUE

La description donnée au § 3 ne tient pas compte de la répulsion coulombienne entre les électrons. Ceux-ci se meuvent pourtant dans le potentiel créé par tous les autres. Ce problème est un problème insoluble en mécanique quantique car beaucoup trop compliqué. Mais il est facile de comprendre pourquoi on peut obtenir une dissymétrie entre les électrons des deux directions de spins, et donc du ferromagnétisme. C'est ici qu'intervient le principe de Pauli. Il postule que la fonction d'onde de tous les électrons doit être totalement antisymétrique dans la permutation de deux électrons. La conséquence qui nous intéresse ici est que deux électrons de

mêmes spins ne peuvent jamais se trouver au même moment au même endroit. En revanche, rien n'interdit que la probabilité de trouver deux électrons de spins opposés au même endroit soit non nulle. Ceci veut dire que deux électrons de spins opposés se repousseront en moyenne plus que deux électrons de mêmes spins qui se sentent moins, puisqu'ils ne peuvent jamais être au même endroit.

Stoner a introduit un modèle où l'on admet que la répulsion entre électrons de spins opposés est plus grande d'une quantité  $I$  que celle entre électrons de mêmes spins. Cela revient à introduire une énergie potentielle d'interaction entre les électrons de la forme  $IN_{\uparrow}N_{\downarrow}$ , où  $N_{\uparrow}$  et  $N_{\downarrow}$  sont les densités d'électrons des deux directions de spin. Dans ce modèle, on a  $N/2$  électrons de chaque direction de spin.

Étudions la stabilité de cet état par rapport au ferromagnétisme, lorsque cette interaction existe, et montrons qu'il y a certains cas où l'on minimise l'énergie en transférant des électrons d'un état de spin à l'autre.

Si l'on transfère une couche d'épaisseur  $\delta\epsilon$  (voir figure 8.2), c'est-à-dire si l'on transfère  $N(\epsilon_F)\delta\epsilon$  électrons, l'énergie cinétique des électrons va être augmentée de :

$$\Delta E_c = N(\epsilon_F)(\delta\epsilon)^2 \quad (8.7)$$

Calculons la variation d'énergie d'interaction entre les électrons :

$$I \left[ \frac{N}{2} + N(\epsilon_F)\delta\epsilon \right] \left[ \frac{N}{2} - N(\epsilon_F)\delta\epsilon \right] - I \left[ \frac{N}{2} \right]^2 = -IN^2(\epsilon_F)(\delta\epsilon)^2 \quad (8.8)$$

La variation totale d'énergie est donc la somme de (8.7) et (8.8) :

$$\Delta E = N(\epsilon_F)(\delta\epsilon)^2 \{1 - IN(\epsilon_F)\} \quad (8.9)$$

L'état non magnétique n'est donc stable que si  $IN(\epsilon_F) < 1$ . Dans le cas contraire, l'énergie minimale est obtenue avec un nombre différent d'électrons  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . Il y a alors ferromagnétisme. Le critère d'instabilité par rapport au ferromagnétisme, dit critère de Stoner, est donc :

$$IN(\epsilon_F) > 1 \quad (8.10)$$

La répulsion  $I$  introduite dans ce critère est très difficile à évaluer et dans la pratique on l'ajuste à l'expérience. Mais nous retiendrons que ce critère montre que les métaux ferromagnétiques doivent présenter une grande densité d'états au niveau de Fermi.

#### 4.2. SUSCEPTIBILITÉ MAGNÉTIQUE D'UN MÉTAL EN PRÉSENCE D'INTERACTION

Nous allons maintenant calculer la susceptibilité du métal dans l'approximation de Stoner lorsque l'état non magnétique est stable.

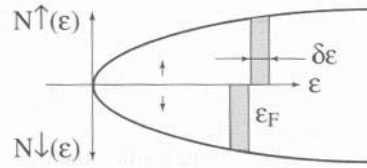


Figure 8.2 - Densité d'états pour les électrons de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$

En présence d'un induction  $B$ , les énergies des états  $k$  avec un moment dans le sens du champ ( $\uparrow$ ) sont :

$$E_{k\uparrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + IN_{\downarrow} - \mu_B B \quad (8.11)$$

et ceux des états de moment opposé :

$$E_{k\downarrow} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + IN_{\uparrow} + \mu_B B \quad (8.12)$$

Les deux bandes d'énergie sont alors décalées de :

$$2 \delta E = I(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) + 2\mu_B B \quad (8.13)$$

Or nous savons que  $N_{\uparrow} - N_{\downarrow} = 2N(\epsilon_F) \delta E$ , ce qui donne  $\delta E = \mu_B B / \{1 - IN(\epsilon_F)\}$ .

L'aimantation magnétique de l'échantillon est alors donné par :

$$M = \mu_B (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \frac{2\mu_B^2 N(\epsilon_F)}{1 - IN(\epsilon_F)} B \quad (8.14)$$

ce qui correspond à une susceptibilité magnétique :

$$\chi = \frac{2\mu_B^2 \mu_0 N(\epsilon_F)}{1 - IN(\epsilon_F)} \quad (8.15)$$

Cette susceptibilité est augmentée par rapport à celle d'un système d'électrons sans interaction (équation 8.4) par le facteur dit de Stoner :

$$S = 1 / \{1 - IN(\epsilon_F)\} \quad (8.16)$$

$S$  devient infini quand le critère d'instabilité (équation 8.10) est satisfait.

Notons que l'aimantation magnétique que prévoit l'équation (8.14) n'est pas égal à un nombre entier de magnétons de Bohr.

### 4.3. SOLUTION FERROMAGNÉTIQUE

Lorsque la solution non magnétique est instable, on peut observer soit ce que l'on appelle *ferromagnétisme fort* où tous les électrons ont le même spin, soit *ferromagnétisme faible* où il y a seulement un déséquilibre entre le nombre de spins dans les deux directions (figure 8.3). Ceci dépend de la forme de la densité d'états et du nombre d'électrons par atome.

Dans le cas magnétique, à température non nulle, on doit résoudre une équation autocohérente qui est l'analogue de celle du champ moléculaire comme on le soulignera plus tard :

$$m = \frac{\mathbf{m}}{\mu_B} = (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = \frac{1}{N} \sum_k [f(E_{k\uparrow}) - f(E_{k\downarrow})] \quad (8.17)$$

où  $\mathbf{m}$  est le moment magnétique exprimé en  $\mu_B$  et  $f(E)$  est la fonction de Fermi-Dirac qui détermine la répartition des électrons sur les différents niveaux d'énergie :

$$f(E) = \left\{ 1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) \right\}^{-1}$$

$\mu$  représente le potentiel chimique qui est égal à  $\epsilon_F$  à température nulle.

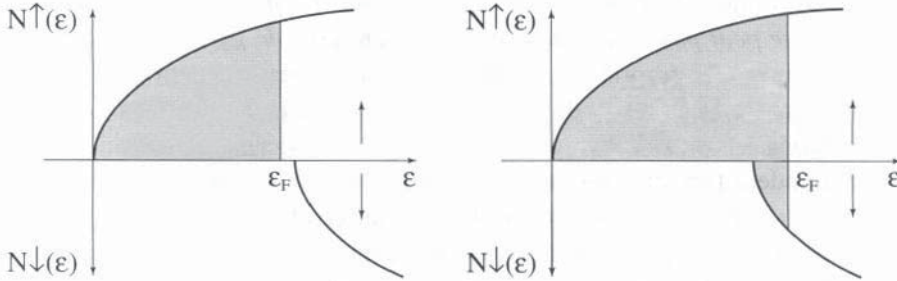


Figure 8.3 - Ferromagnétisme fort (à gauche) et faible (à droite)

La solution détaillée de cette équation dépend de la densité d'états et nous ne la discuterons pas. Nous allons simplement calculer la température de Curie. Celle-ci est donnée par l'équation (8.17) dans la limite où  $m$  tend vers zéro. On obtient :

$$1 = \frac{1}{N} \sum_k \frac{d}{dm} \left[ f(E_{k\uparrow}) - f(E_{k\downarrow}) \right]_{m=0} \quad (8.18)$$

En utilisant les relations (8.11) et (8.12), il vient  $1 = \frac{1}{N} \sum_k \left[ \frac{df(E_k)}{dm} \right]_{m=0}$ , d'où :

$$I \int N(\epsilon) \frac{df}{d\epsilon} d\epsilon = -1 \quad (8.19)$$

Cette équation détermine la température de Curie  $T_C$ . Cette dernière tend vers zéro lorsque  $IN(\epsilon_F)$  est égal à l'unité, car  $(df/d\epsilon) = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$  à température nulle. On a l'habitude d'introduire une densité effective d'états à la température  $T$  définie par :

$$N(T) = - \int N(\epsilon) \frac{df}{d\epsilon} d\epsilon \quad (8.20)$$

On vérifie facilement que cette densité d'états est reliée à la susceptibilité de Pauli à la température  $T$  du métal lorsqu'on néglige les interactions :

$$\chi^0(T) = 2\mu_B^2 \mu_0 N(T) \quad (8.21)$$

D'autre part, la température de Curie (8.19) est alors donnée par  $IN(T) = 1$ .

La susceptibilité au dessus de  $T_C$  en présence des interactions est donnée par une formule analogue à l'équation (8.15) :

$$\chi(T) = \frac{2\mu_B^2 \mu_0 N(T)}{1 - IN(T)} \quad (8.22)$$

$\chi(T)$  devient infini à  $T_C$ , mais pour les grandes valeurs de la température, cette formule ne donne pas une loi de Curie comme dans le cas du magnétisme localisé. La dépendance en température provient de  $N(T)$  et donc de la forme de la densité d'états.

#### 4.4. APPLICATIONS

La théorie de Stoner a été largement utilisée pour expliquer les propriétés des métaux et alliages ferromagnétiques. En effet, elle donne une explication qualitative de leurs propriétés. *Son grand succès a été d'expliquer pourquoi le moment magnétique ne peut pas s'exprimer en valeurs entières de  $\mu_B$  à température nulle.* Malheureusement les propriétés en fonction de la température sont mal décrites. A basse température, la variation de l'aimantation ne suit pas la loi prévue par Stoner à partir de l'équation (8.17). Plus grave, les températures critiques calculées sont un ordre de grandeur trop grandes et la loi de Curie-Weiss obtenue dans beaucoup de métaux n'est pas expliquée. Nous reviendrons sur ces points. La principale qualité de cette théorie est sa grande simplicité. Ses défauts proviennent du fait que c'est une approximation de champ moyen, comme nous allons maintenant le voir.

### 5. GÉNÉRALISATION DU CRITÈRE DE STONER

#### 5.1. THÉORIE DE STONER ET THÉORIE DU CHAMP MOLÉCULAIRE

Le critère de Stoner peut se généraliser à l'instabilité vis-à-vis d'un autre ordre magnétique que le ferromagnétisme. Pour cela, nous allons d'abord montrer que la théorie de Stoner est similaire à la théorie du champ moléculaire de Weiss. Le champ moléculaire agit comme un champ extérieur et s'ajoute au champ appliqué. Il est supposé décrire les interactions entre les moments magnétiques et être proportionnel à l'aimantation du matériau. Soit  $\chi^0$  la susceptibilité du matériau sans interaction et  $w$  le coefficient de champ moléculaire ; nous obtenons alors pour l'aimantation en présence d'un petit champ  $H$  appliqué :  $M = \chi^0 (H + wM) = \chi H$ , d'où l'on tire :

$$\chi = \chi^0 / (1 - w\chi^0) \quad (8.23)$$

En comparant avec l'équation (8.15) et la définition de  $\chi^0$ , on obtient le coefficient de champ moléculaire qui est à la base de la théorie de Stoner

$$w = I / (2\mu_0 \mu_B^2) \quad (8.24)$$

#### 5.2. SUSCEPTIBILITÉ GÉNÉRALISÉE

Pour pouvoir appliquer la théorie de Stoner à des structures magnétiques autres que ferromagnétiques, nous allons d'abord généraliser la notion de susceptibilité au cas d'un champ magnétique non uniforme.

Pour un champ quelconque  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ , un système invariant par translation présente une aimantation que nous pouvons écrire :  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{h}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ . Cette fonction  $\chi$  est la réponse linéaire à un champ non uniforme et s'appelle la susceptibilité généralisée.

Elle représente l'aimantation due à un champ magnétique statique localisé en un point  $\mathbf{r}_0$ . Si  $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}_{\mathbf{r}_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , nous avons alors :  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{h}_{\mathbf{r}_0}$ .

En passant en transformée de Fourier, on peut définir une susceptibilité pour le vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  comme la réponse linéaire à un champ magnétique  $\mathbf{h}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$  par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \chi(\mathbf{q}) \mathbf{h}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad (8.25)$$

### 5.3. LE CHAMP MOLÉCULAIRE LOCAL

L'approximation de Weiss ne s'applique jusqu'ici qu'à des états uniformes de polarisation. Afin de généraliser le calcul de Stoner, il convient d'introduire la notion de champ moléculaire local. En un point  $\mathbf{r}$  du matériau dans lequel il existe une aimantation statique  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , le champ moléculaire statique est défini par

$$\mathbf{H}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \int w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8.26)$$

où nous postulons l'existence d'un coefficient de champ moléculaire  $w(\mathbf{r})$  ayant une certaine portée caractéristique. Soit encore, en passant en transformée de Fourier et en utilisant l'invariance par translation,  $\mathbf{H}_{\text{mol}}(\mathbf{q}) = w(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) = w(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{q}) \mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{q})$ .

Dans ce cas, la réponse à un champ extérieur sinusoïdal  $\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{q})$  sera :

$$\chi(\mathbf{q}) = \chi^0(\mathbf{q}) \{1 + w(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{q})\} = \frac{\chi^0(\mathbf{q})}{1 - w(\mathbf{q}) \chi^0(\mathbf{q})} \quad (8.27)$$

Cette équation n'est valable que lorsque  $w(\mathbf{q}) \chi^0(\mathbf{q}) < 1$ . Elle est la généralisation des équations (8.15) et (8.23).

Lorsque pour une valeur de  $\mathbf{q}$  l'égalité est obtenue, cela signifie que le système va tendre spontanément à s'aimanter avec une structure périodique de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ . On dit que l'état non magnétique du système est instable par rapport à la formation d'une onde de densité de spin de vecteur  $\mathbf{q}$ .

Il est facile de voir que pour le modèle de Heisenberg  $w(\mathbf{q})$  est proportionnel à la transformée de Fourier de  $J_{ij}$  soit  $J(\mathbf{q})$  divisée par  $N_a(g\mu_B)^2$  où  $N_a$  est le nombre d'atomes par unité de volume et  $g$  a été défini au § 1.2.4. du chapitre 7. On peut montrer que pour un système métallique  $w(\mathbf{q})$  est indépendant de  $\mathbf{q}$  et est toujours donné par l'équation (8.24).

### 5.4. SUSCEPTIBILITÉ DYNAMIQUE

Pour traiter les effets dépendant du temps, il est intéressant de définir la notion de susceptibilité dynamique. Appliquons un champ magnétique uniforme pendant un temps très court au voisinage du temps  $t_0$  :  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(t_0) \delta(t - t_0)$ . Soumis à cette impulsion, le système prendra une aimantation  $\mathbf{M}(t)$  qui persistera pendant un certain temps caractéristique après la disparition de l'impulsion. On définit la susceptibilité dépendant du temps par la relation :  $\mathbf{M}(t) = \chi(t - t_0) \mathbf{h}(t_0)$ .

Remarquons que la causalité impose que  $\chi(t - t_0)$  soit nul pour  $t < t_0$ . Tout champ magnétique dépendant du temps peut être considéré comme une somme d'impulsions. Si  $h(t)$  est toujours petit, l'aimantation du système au temps  $t$  est la somme de toutes les aimantations qui se seront propagées des temps antérieurs au temps  $t$  considéré. Pour un champ uniforme dépendant du temps, l'aimantation au temps  $t$  est :

$$\mathbf{M}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \chi(t - t') \mathbf{h}(t').$$

En imposant  $\chi(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on peut alors écrire :  $\mathbf{M}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi(t - t') \mathbf{h}(t')$ .

Soit  $\mathbf{M}(\omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{M}(t) e^{-i\omega t - \eta t}$  la transformée de Fourier ; elle peut s'écrire :  $\mathbf{M}(\omega) = \chi(\omega) \mathbf{h}(\omega)$ .

La susceptibilité dynamique caractérise la réponse à un champ qui a été établi de façon adiabatique à partir du temps  $t = -\infty$  jusqu'au temps  $t = 0$ .

Si le champ magnétique varie dans le temps et dans l'espace, nous pouvons simplement généraliser les définitions et écrire :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{h}(\mathbf{r}', t')$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) = \chi(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{h}(\mathbf{q}, \omega)$ .  $\chi(\mathbf{q}, \omega)$  caractérise la réponse du système à un champ magnétique  $h(\mathbf{r}, t)$  avec :  $h(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{q}, \omega) e^{-i(\omega t + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}$

### 5.5. LE CHAMP MOLÉCULAIRE LOCAL INSTANTANÉ

Faisons l'hypothèse suivante : lorsqu'il apparaît au temps  $t$  au point  $\mathbf{r}$ , une aimantation  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ , il apparaît au même temps  $t$  au point  $\mathbf{r}'$  un champ moléculaire donné par :  $H_{\text{mol}}(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ .

Nous généralisons l'équation (8.26), mais nous négligeons les effets possibles de retard à la propagation du champ moléculaire. Ceux-ci doivent être peu importants puisque la propagation n'a lieu que sur des distances de l'ordre de la portée de  $w(\mathbf{r})$ . Cette hypothèse est équivalente à ce que l'on appelle l'approximation de la phase aléatoire (RPA en anglais) [3, 4]. Nous avons alors :

$$\mathbf{H}_{\text{mol}}(\mathbf{q}, \omega) = w(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) = w(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega).$$

L'équation (8.27) se généralise alors :

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \{1 + w(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{q}, \omega)\} = \frac{\chi^0(\mathbf{q}, \omega)}{1 - w(\mathbf{q}) \chi^0(\mathbf{q}, \omega)}$$

La simplicité de ces formules justifie l'emploi du concept de susceptibilité dynamique dépendant de  $\mathbf{q}$ . En outre, si pour une fréquence  $\omega$  et un vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ ,  $\chi(\mathbf{q}, \omega)$  est infinie, même si  $\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega)$  est nul,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega)$  peut être finie. Le système

possède un état excité où l'aimantation est :  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) \exp - i(\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r})$ . Un pôle de  $\chi(\mathbf{q}, \omega)$  est donc une excitation élémentaire du système. En fait les pôles sont souvent dans le plan complexe ce qui donne un temps de vie à ces excitations. Elles sont souvent appelées dans la littérature, fluctuations de spin ou paramagnons [4].

## 6. LES MÉTAUX DE TRANSITION

Les métaux de transition ne sont pas décrits par le modèle d'électrons libres du § 3.1. Les électrons s sont complètement délocalisés et se comportent comme des électrons libres. Mais la densité d'états correspondante est extrêmement faible. Aussi ont-ils peu d'importance. Ce sont les électrons d qui vont surtout être responsables des propriétés des métaux de transition. Les deux densités d'états sont schématisées sur la figure 8.4.

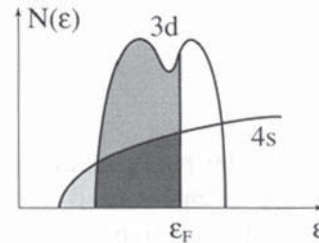


Figure 8.4 - Densité d'états schématisée d'une bande s et d'une bande d

Nous allons expliquer l'origine de cette grande densité d'états d.

### 6.1. LA BANDE d DES MÉTAUX DE TRANSITION

Les orbitales d des électrons de valence des métaux de transition sont petites comparées à des orbitales s ou p de même énergie. Elles ne sont pas beaucoup perturbées par le réseau bien qu'elles se recouvrent un peu avec les orbitales des atomes voisins (voir la figure 7.8). C'est pourquoi l'approximation des électrons libres que nous avons développée dans les paragraphes précédents n'est pas bonne. On utilise une autre approche dite des *liaisons fortes* où l'on considère que la fonction d'onde des électrons itinérants est une combinaison linéaire des orbitales atomiques. Plus précisément, on tient compte du potentiel des ions que l'on écrit comme une somme de potentiels atomiques centrés sur tous les sites  $i$  du réseau :

$$V = \sum_i V_i \quad (8.28)$$

Pour chaque site du réseau, il y a cinq orbitales d notées  $|i, m_i\rangle$  où le nombre quantique orbital  $m_i$  varie de 1 à 5. Elles sont fonctions propres de l'hamiltonien avec l'énergie  $E_0$ . Pour simplifier, nous négligerons l'indice  $m_i$  que nous réintroduirons uniquement lorsqu'il interviendra. La fonction d'onde est décrite de façon approximative par une combinaison linéaire des fonctions  $|i\rangle$  :

$$|\Psi(E)\rangle = \sum_i a_i |i\rangle \quad (8.29)$$

avec :

$$\left( \hat{E}_c + \hat{V}_i \right) |i\rangle = E_0 |i\rangle \quad (8.30)$$

où  $\hat{E}_c$  et  $\hat{V}_i$  sont les opérateurs énergie cinétique et potentielle, respectivement.

Dans cette approximation, on considère que les intégrales de recouvrement entre orbitales atomiques sont nulles  $\langle i|j\rangle = 0$ , et que de tous les éléments de matrice, on ne garde que les intégrales à deux centres premiers et quelquefois seconds voisins. Les coefficients  $a_i$  satisfont à une infinité d'équations linéaires du type

$$(E_0 + \alpha_i - E) a_i + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} a_j = 0 \quad (8.31)$$

avec

$$\alpha_i = \langle i | \sum_{j \neq i} V_j | i \rangle \quad (8.32)$$

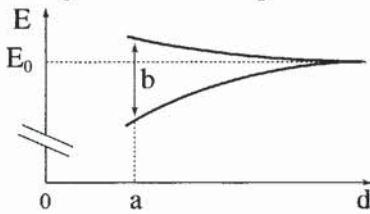
$$\beta_{ij} = \langle i | V_j | j \rangle \quad (8.33)$$

Les intégrales  $\alpha$  déplacent simplement l'énergie  $E_0$  des niveaux atomiques  $|i\rangle$  tandis que les intégrales  $\beta$  les mélangent en *états moléculaires s'étendant dans tout le solide*. La solution de ce système d'équations linéaires donne les états et les énergies possibles pour les électrons. On peut classer les états avec le vecteur  $\mathbf{k}$  comme pour des ondes planes (théorème de Bloch). Pour un système cubique simple avec un paramètre cristallin  $a$ , où toutes les intégrales  $\beta$  seraient égales (c'est-à-dire que les états  $|i\rangle$  seraient alors des états  $s$  de l'atome isolé), les énergies  $\epsilon_k$  de ces états sont :

$$\epsilon_k = 2\beta (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \quad (8.34)$$

Cette relation de dispersion remplace celle des électrons libres (équation 8.1). On obtient donc dans un cubique simple une bande d'énergie permise de largeur  $12\beta$  (c'est-à-dire  $2z\beta$  où  $z$  est le nombre de premiers voisins).

La largeur de bande dépend donc du nombre de premiers voisins d'un atome et de la



**Figure 8.5 - Largeur  $b$  de la bande en fonction de la distance interatomique**

valeur de l'intégrale  $\beta$  qui dépend très fortement de la distance entre atomes (figure 8.5). Les conditions aux limites quantifient les valeurs de  $k$  et l'on peut définir le nombre d'états entre  $\epsilon$  et  $\epsilon + d\epsilon$  de c'est-à-dire la densité d'états. Il est intéressant de définir la densité des états  $n(\epsilon)$  par atome et non pas par unité de volume comme nous l'avons fait pour les électrons libres :  $N(\epsilon) = N_a n(\epsilon)$ , où

$N_a$  est le nombre d'atomes par unité de volume. Nous pouvons en avoir une estimation très simplement. Pour une bande d'énergie relative aux électrons  $s$ , nous devons avoir un état par atome et par direction de spin. Si la largeur de bande est  $b$ , la densité d'états est donc de l'ordre de  $1/b$ . Pour des électrons  $d$ , le nombre d'états par atome est 5, donc la densité d'états sera de l'ordre de  $5/b$ .

Les calculs numériques réalisés sur les métaux de transition montrent que les largeurs de bande sont de l'ordre de  $b = 5$  à  $10$  eV. Le déplacement de la bande par rapport au niveau atomique est beaucoup plus petit de l'ordre de  $1$  à  $2$  eV. Les densités d'états au niveau de Fermi vont donc être beaucoup plus grandes que pour des électrons libres.

Elles sont d'autant plus grandes que  $\beta$  est plus petit.  $\beta$  sera petit si les fonctions atomiques sont très concentrées vers le noyau. Dans une série de métaux de transition, l'extension des orbitales d diminue avec le remplissage. Les plus grandes densités d'états se trouveront en fin de série.

D'autre part, les orbitales sont plus étendues pour la deuxième et la troisième série d. Donc les densités seront plus faibles dans ces séries. Les plus grandes densités d'états seront obtenues a priori à la fin de la première série, précisément là où l'on trouve les matériaux magnétiques. Ceci est en parfait accord avec le critère de Stoner. La figure 8.6 montre un exemple de densité d'états, celui du nickel pur.

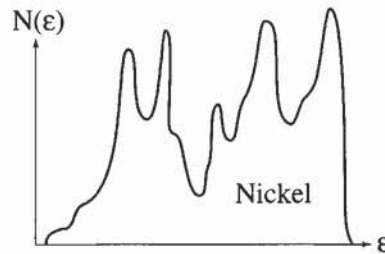


Figure 8.6 - Densité d'états (calculée) du nickel

## 6.2. ORIGINE DU MAGNÉTISME

Nous allons approfondir l'origine de l'énergie  $I$  que nous avons introduite dans le modèle de Stoner. Dans l'approximation de Hartree, la fonction d'onde des électrons  $\Psi(1, 2, \dots, i, \dots, N)$  est le produit des fonctions d'onde  $\Psi_i$  de chacun des électrons :

$$\Psi = \prod_i \Psi_i(i) \quad (8.35)$$

$\Psi$  n'obéit pas au principe de Pauli, il faut l'antisymétriser en construisant un déterminant à partir des fonctions d'onde de tous les électrons. Prenons l'exemple de deux électrons. Si leurs spins sont parallèles, la fonction d'onde d'espace doit être antisymétrique soit :

$$\Phi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{im}(1)\Psi_{jm'}(2) - \Psi_{im}(2)\Psi_{jm'}(1)] \quad (8.36)$$

où nous avons rétabli la dégénérescence de l'état d en introduisant le nombre quantique orbital  $m$  variable de  $1$  à  $5$ . Si nous introduisons la répulsion coulombienne entre les deux électrons, nous rajoutons dans l'énergie un terme de la forme :

$$\langle \Phi_A | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} | \Phi_A \rangle = U_{ij}^{mm'} - J_{ij}^{mm'} \quad (8.37)$$

$$\text{avec : } U_{ij}^{mm'} = \langle \Psi_{im}(1)\Psi_{jm'}(2) | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} | \Psi_{im}(1)\Psi_{jm'}(2) \rangle \quad (8.38)$$

$$J_{ij}^{mm'} = \langle \Psi_{im}(1)\Psi_{jm'}(2) | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} | \Psi_{im}(2)\Psi_{jm'}(1) \rangle \quad (8.39)$$

Si les spins des électrons sont antiparallèles, la fonction d'onde d'espace doit être symétrique. Ceci revient à remplacer le signe  $-$  par le signe  $+$  dans l'équation et nous obtenons pour l'énergie le résultat :

$$\langle \Phi_S | \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} | \Phi_S \rangle = U_{ij}^{mm'} + J_{ij}^{mm'} \quad (8.40)$$

On obtient donc une différence d'énergie entre les deux configurations de spins.

Les intégrales  $U$  sont appelées les termes de Coulomb et les  $J$ , les termes d'échange. Il est évident que les termes interatomiques ( $i \neq j$ ) sont plus petits que les termes intra-atomiques ( $i = j$ ) à cause de la décroissance exponentielle des fonctions atomiques  $d$ . Nous les négligerons et ne garderons que les termes intra-atomiques. Le terme d'échange le plus grand est  $J_{ii}^{mm} = U_{ii}^{mm} = U^m$ .

Deux électrons dans une même orbitale ont forcément des spins opposés et l'énergie est accrue de la quantité  $U^m$ . Pour deux électrons sur des orbitales différentes, la configuration de spin parallèle a une énergie diminuée de  $2 J_{ii}^{mm'}$ .

Les termes intra-atomiques favorisent donc le cas où les deux électrons sont dans des orbitales différentes et ont des spins parallèles. C'est simplement ce que traduit la règle de Hund. Les calculs numériques donnent  $U^m \sim 20$  eV et  $J_{ii}^{mm'} \sim 1$  eV. On peut alors définir une valeur moyenne  $U$  par paire d'électrons et par atome, qui est l'énergie moyenne gagnée en passant d'une paire de spins antiparallèles à une paire de spins parallèles. Les 5 valeurs de  $m$  étant approximativement également représentées à chaque énergie, cette estimation donne :  $U = (U^m + 4J_{ii}^{mm'})/5 = 5$  eV.

La valeur de  $U$  est d'autant plus grande que l'extension de l'orbite  $d$  est plus faible. C'est donc la même condition que celle qui donne une grande densité d'états. Si nous considérons les quantités par atome et non par unité de volume, la densité d'états par atome  $n(\epsilon)$  et la susceptibilité par atome, nous devons remplacer dans le calcul de Stoner  $N(\epsilon)$  par  $n(\epsilon)$  et  $I$  par  $U$ . La condition pour l'instabilité en faveur du ferromagnétisme devient :

$$U n(\epsilon_F) > 1 \quad (8.41)$$

Cette autre écriture du critère de Stoner remplace la quantité  $I$  par une quantité plus physique qui est la répulsion entre deux électrons sur le même site. Celle-ci est tout aussi difficile à calculer dans la pratique car les électrons  $s$  des métaux de transition peuvent écranter cette répulsion entre électrons  $d$ . Aussi reste-t-elle le plus souvent un paramètre que l'on ajuste à l'expérience. Mais elle montre que le magnétisme provient d'une répulsion locale, sur un site, ce qui nous servira dans la suite.

Cette analyse est à l'origine du modèle théorique de l'hamiltonien de Hubbard [5], pour étudier les effets de la répulsion coulombienne qui n'est pas prise en compte par les théories simples d'électrons indépendants. Ce modèle introduit une répulsion seulement si les deux électrons sont sur le même site. Ils doivent alors avoir des spins opposés. Les effets ne se limitent pas au magnétisme. Ils peuvent rendre isolant un composé qui serait métallique dans la théorie des bandes. On parle alors d'isolant de Mott [6].

### 6.3. CHAMP CRISTALLIN

Dans les métaux et les composés métalliques à base de métaux de transition, les éléments perdent leurs électrons de valence qui forment la bande de conduction. On obtient un réseau de charges positives dans une mer d'électrons de conduction. On a vu au § 6.1 que ces électrons ne sont donc pas totalement libres : ils ressentent le potentiel périodique des ions métalliques du réseau, et sa symétrie. Comme dans le modèle localisé, les électrons 3d – sur un atome donné – se trouvent dans le champ électrique produit par les charges des ions l'entourant, charges qui sont écrantées par les autres électrons. La symétrie sphérique de l'ion isolé est perdue et est remplacée par la symétrie locale du réseau. Les orbitales à considérer ne seront plus celles qui sont fonctions propres d'une composante du moment cinétique, mais des combinaisons linéaires de celles-ci.

Par exemple dans un environnement cubique, les orbitales d qui étaient données par les équations (7.29) seront maintenant décomposées en orbitales que l'on a coutume d'appeler  $e_g$   $\{x^2 - y^2$  et  $3z^2 - r^2\}$  et  $t_{2g}$   $\{xy, yz, \text{ et } zx\}$ . Ces orbitales qui avaient la même énergie dans un système à symétrie sphérique n'ont plus la même énergie dans un système à symétrie cubique comme le montre la figure 8.7 : en effet, supposons que les premiers voisins de l'atome représenté sur la figure soient des charges positives situées sur les axes Ox, Oy et Oz ; les orbitales  $e_g$  voient alors leurs nuages électroniques chargés négativement pointer en direction des charges positives, ce qui est favorable énergétiquement, tandis que les orbitales  $t_{2g}$  ne pointent pas vers les charges positives : cette dernière situation correspond donc à un état d'énergie supérieure.

Il y a alors couplage entre les orbites et le réseau : on parle d'effet de champ cristallin.

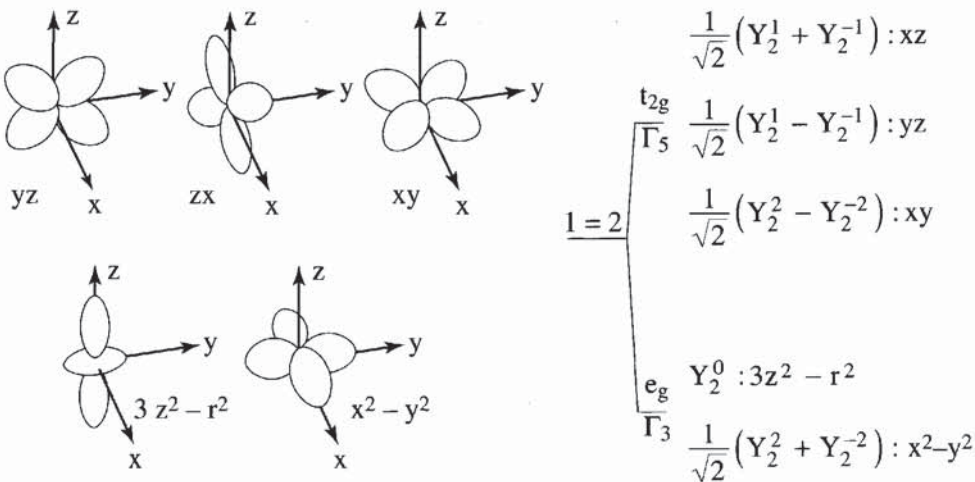


Figure 8.7 - Forme des orbitales d (à gauche) et levée de dégénérescence de ces mêmes orbitales (à droite)

Dans la description en liaisons fortes, cet effet est donné par les intégrales  $\alpha$  (voir § 5.1). Dans les métaux de transition, cet effet est très petit. Dans les composés tels que les pérovskites, le champ cristallin peut lever complètement la dégénérescence.

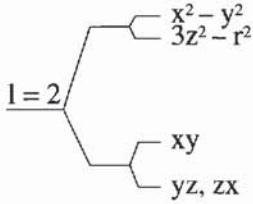


Figure 8.8  
Pérovskites à base de cuivre

Nous donnons sur la figure 8.8 le cas des pérovskites à base de cuivre qui sont les nouveaux matériaux supraconducteurs. La symétrie de la pérovskite parfaite est cubique. Dans ces supraconducteurs, une distorsion cristalline rend le composé quadratique et la dégénérescence  $e_g$  est aussi levée. Le niveau de Fermi de ces matériaux est situé dans une bande formée à partir des états  $x^2 - y^2$ .

#### 6.4. ANISOTROPIE MAGNÉTOCRISTALLINE

L'anisotropie magnétocristalline dépend à la fois du caractère des orbitales au niveau de Fermi et du couplage spin-orbite. Dans les métaux, composés et alliages de métaux de transition, le coefficient de couplage spin-orbite  $\lambda$  est toujours petit devant les paramètres de champ cristallin.

Pour les métaux de la fin de la première série, le champ cristallin est de l'ordre de l'électron-volt, tandis que le couplage spin-orbite exprimé par l'équation (7.20), est de l'ordre du centième d'électron-volt. On peut donc le traiter en perturbation et calculer les constantes d'anisotropie  $K_1$ ,  $K_2$ , etc. des équations (3.3) et (3.4). Ce calcul montre que  $K_n$  décroît avec  $n$  comme une puissance de  $\lambda/b$ . Comme  $b$ , largeur de la bande, est de l'ordre de 5 à 10 eV, la valeur des constantes d'anisotropie décroît très rapidement avec  $n$ .

En symétrie cubique, l'énergie d'anisotropie magnétique est donnée principalement par  $K_1$  qui est en  $\lambda^4/b^3$ . Un ordre de grandeur de  $K_1$  est donc  $10^3 \text{ J/m}^3$ . Cette valeur est en accord avec les valeurs mesurées pour le fer et le nickel.

Toutefois, dans le cas du nickel, tous les coefficients d'anisotropie, même à un ordre très élevé, restent encore mesurables à température ambiante et d'autre part varient très rapidement avec la température : c'est là un résultat lié à une particularité de la surface de Fermi du nickel [7]. Ceci montre combien il est plus difficile de prédire les propriétés magnétiques des métaux que celles des isolants.

Pour un composé à symétrie hexagonale,  $K_1$  est en  $\lambda^2/b$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $10^7 \text{ J/m}^3$ . L'anisotropie est beaucoup plus grande que dans un système cubique. C'est par exemple l'ordre de grandeur de l'énergie d'anisotropie du cobalt métallique.

## 7. MOMENT MAGNÉTIQUE LOCALISÉ EN MAGNÉTISME ITINÉRANT

Nous avons vu qu'un moment magnétique localisé existait sur les terres rares, en raison de la très faible extension des orbitales f qui restent localisées dans le solide. Dans les métaux de transition, la théorie de Stoner ne fait pas appel à la notion de moment magnétique localisé sur un atome et l'aimantation à saturation et à basse température n'est pas reliée aux règles que nous avons données au chapitre 4. Pourtant au-dessus de la température de Curie, la susceptibilité obéit pratiquement à une loi de Curie qui est caractéristique d'un moment localisé.

Nous allons montrer comment ceci est possible en étudiant les cas où l'atome de transition peut être considéré comme portant un moment magnétique, bien que les électrons d soient mobiles.

### 7.1. LE MAGNÉTISME DES IMPURETÉS

Nous commençons par considérer le problème d'un seul atome d'un métal de transition à l'intérieur d'une matrice métallique non magnétique comme par exemple du cuivre ou de l'aluminium. Ces métaux sont bien décrits par la théorie des électrons libres développée au § 3. Un électron dans une orbitale d de l'atome de transition ne restera pas lié à cet atome, car il a une certaine probabilité de passer dans un état inoccupé de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , de la matrice métallique.

Réciproquement, un électron dans l'état  $\mathbf{k}$  de la matrice peut passer dans un état d vide. Cet effet donne un temps de vie à un électron d localisé sur l'atome de transition et en mécanique quantique, ceci se traduit par un élargissement du niveau d. Au lieu d'avoir un état lié, on observe ce que l'on appelle un état lié virtuel.

#### 7.1.1. Notion de densité d'états locale

La notion de densité d'états peut alors être généralisée et on définit la densité d'états, sur un site donné  $i$ , par :

$$n_i(\epsilon) = \sum_{\mathbf{k}} |\Psi_{\mathbf{k}}(i)|^2 \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}}) \quad (8.42)$$

La densité d'états dans le cas d'un état lié virtuel est représentée sur la figure 8.9. Si  $\Delta$  est la largeur en énergie de l'état lié virtuel, la densité d'états sur l'atome de transition sera en  $1/\Delta$ .  $\Delta$  est donné par la règle d'or de Fermi, c'est-à-dire le produit du carré de la probabilité  $V_{\mathbf{k}d}$  de sauter d'un état d à un état  $\mathbf{k}$  par la densité d'états au niveau de Fermi de la matrice :

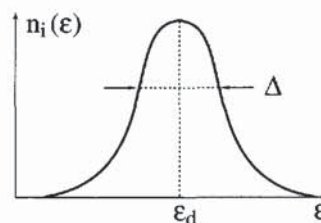


Figure 8.9 - Densité d'états d'un état lié virtuel

$$\Delta = \pi n(\epsilon_F) |V_{kd}|^2 \quad (8.43)$$

Dans la limite où  $\Delta$  est négligeable et où l'on peut considérer qu'il est nul, on retrouve le cas d'un état qui peut être considéré comme lié. C'est le cas des électrons  $f$  des terres rares où  $\Delta$  est de l'ordre du centième d'électron-volt. Pour un atome de métal de transition dissous dans du cuivre,  $\Delta$  est de l'ordre de l'électron-volt.

### 7.1.2. Magnétisme d'une impureté

Si maintenant on introduit la répulsion coulombienne entre deux électrons sur le site de l'impureté, deux électrons de spins opposés se repousseront plus que deux électrons de mêmes spins et l'on peut définir une quantité  $U$  analogue à celle définie au § 5.2. Le modèle utilise ce que l'on appelle l'hamiltonien d'Anderson.

En suivant J. Friedel, nous pouvons reprendre le même raisonnement que celui fait par Stoner avec la densité d'états sur le site de l'impureté  $n_i(\epsilon)$ . Nous obtenons un critère pour la formation d'un moment magnétique sur le site de l'impureté.

$$U n_i(\epsilon_F) > 1 \quad (8.44)$$

L'impureté pourra être magnétique ou non suivant que le critère est satisfait ou non.  $n_i(\epsilon_F)$  est inversement proportionnelle à  $\Delta$ . On voit tout de suite que le critère sera plus difficile à satisfaire si la densité d'états au niveau de Fermi de la matrice est plus grande. L'aluminium a plus d'électrons que le cuivre et la densité d'états sera plus grande. Il sera donc plus difficile de trouver un moment magnétique sur un atome de transition dissous dans l'aluminium, ce que montre bien l'expérience car aucun métal de transition n'est magnétique dans l'aluminium. En revanche, les métaux du milieu de la première série sont magnétiques dans des matrices de cuivre, d'argent ou d'or.

## 7.2. L'EFFET KONDO

Si l'impureté (4f, 5f) possède un moment magnétique ou un spin, elle polarise la matrice c'est-à-dire que l'on peut définir une interaction d'échange  $J_K$  qui couple antiferromagnétiquement le spin de l'impureté au spin d'un électron de conduction. Elle est donnée dans la limite où  $U$  est très grand devant  $\Delta$  par :

$$J_K = 2|V_{kd}|^2 / (\epsilon_d - \epsilon_F) \quad (8.45)$$

Cette interaction peut être plus grande que l'interaction d'échange direct qui est ferromagnétique. Elle est de l'ordre de l'électron-volt. Quel est alors l'effet de cette interaction antiferromagnétique ? Elle peut renverser le moment magnétique de l'impureté lors du couplage avec un électron de conduction. Le moment magnétique va donc fluctuer avec un temps caractéristique que nous appellerons  $\tau$ . A température nulle, il va se créer une sorte de singulet entre le spin de l'impureté et les spins des électrons de conduction. L'impureté apparaîtra comme non magnétique dans des mesures de susceptibilité, par exemple. Cet effet a reçu le nom d'*effet Kondo*.

A température finie, les fluctuations thermiques provoquent normalement des changements d'orientation d'un moment magnétique avec un temps caractéristique  $\hbar/k_B T$ . Si ce temps est plus grand que  $\tau$ , l'impureté apparaîtra comme non magnétique et s'il est plus petit, comme magnétique. Il existe donc une température dite de Kondo à laquelle se produit cette inversion. A haute température, l'impureté est magnétique alors qu'elle ne l'est pas à basse température. La température de Kondo est donnée par :

$$T_K = \frac{1}{n(\epsilon_F)} \exp\left[\frac{1}{J_K n(\epsilon_F)}\right] \quad (8.46)$$

### 7.3. LES VERRES DE SPIN ET LA FRUSTRATION

Si au lieu de considérer une seule impureté, nous considérons une collection d'impuretés, elles interagissent entre elles par une interaction similaire à celle que l'on observe pour les terres rares (que nous décrirons au chapitre 9) et qui oscille avec la distance entre les impuretés.

Il y aura donc coexistence d'interactions antiferromagnétiques et ferromagnétiques. Dans ce cas, on peut observer ce que l'on appelle de la frustration : il s'agit du comportement schématisé sur la figure 8.10. Dans un triangle constitué par trois atomes d'impuretés, si les trois interactions sont antiferromagnétiques, elles ne peuvent jamais être satisfaites toutes les trois en même temps. Avec une collection d'impuretés, une telle situation va se présenter un grand nombre de fois.

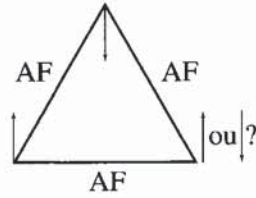


Figure 8.10 - Frustration des interactions d'échange dans un réseau triangulaire

Comment le système va-t-il alors s'ordonner à basse température ? Il ne peut pas y avoir d'ordre à grande distance. L'expérience montre qu'en dessous d'une certaine température, les moments magnétiques vont se geler dans des directions variées. L'échantillon ne possède alors pas de moment global. On dit qu'il se comporte en *verre de spin*.

Il existe des composés cristallins avec un ordre atomique à grande distance qui présentent dans leur structure des triangles : la frustration peut aussi exister dans ce cas. En magnétisme itinérant, il existe encore une autre possibilité que celle que nous avons considérée pour les systèmes désordonnés : le moment magnétique peut tout simplement disparaître sur un site qui devrait être frustré. Un même atome, le manganèse par exemple, peut en effet porter un moment magnétique sur un site favorable, et n'en porter aucun sur un autre site où il serait frustré.

#### 7.4. MOMENTS MAGNÉTIQUES ET MÉTAUX DE TRANSITION

Nous avons vu que certains métaux de transition, au dessus de la température de Curie, présentaient un comportement qui ressemblait fortement à celui d'un matériau où le magnétisme est localisé. Nous pouvons maintenant en donner une explication. Comme nous l'avons vu sur le problème de l'impureté, un moment localisé sur un atome n'est pas contradictoire avec des électrons itinérants. Ce qui est vrai pour un atome dissous dans une matrice métallique reste vrai pour une collection d'atomes. Le métal de transition pourrait être considéré ainsi.

Pour étudier la possibilité de définir des moments magnétiques au-dessus de  $T_C$ , nous allons écrire la variation d'énergie libre du système en présence de petites fluctuations magnétiques qui créent une distribution de petits moments magnétiques sur chacun des sites. Nous considérons une composante de Fourier de cette aimantation.

S'il existe dans le système une petite aimantation  $m(q)$  de vecteur d'onde  $q$ , la variation de la densité d'énergie libre est donnée par :

$$\Delta F(q) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{[m(q)]^2}{\chi(q)} \quad (8.47)$$

Pour une fluctuation quelconque, nous devons sommer sur toutes les valeurs de  $q$ . En prenant la transformée de Fourier inverse, la variation de l'énergie libre peut s'écrire :

$$\Delta F = \frac{\mu_0}{2N} \Phi(0) \sum_i m_i^2 + \frac{\mu_0}{2N} \sum_{i \neq j} \Phi(R_{ij}) m_i m_j \quad (8.48)$$

avec :

$$\Phi(R_{ij}) = \frac{1}{N} \sum_k \frac{\exp(ikR_{ij})}{\chi_k} \quad (8.49)$$

Elle comprend deux termes. Le premier ne dépend que d'un site et peut être considéré comme la variation d'énergie correspondant à la création d'un moment magnétique de valeur  $m_i$ , sur le site  $i$ . Le deuxième terme dépend de deux sites et peut être considéré comme l'énergie d'interaction entre les moments magnétiques sur les deux sites. Plusieurs cas sont alors possibles :

- ◆ Cette variation d'énergie est toujours négative, le système est instable. Pour minimiser son énergie, il créera des moments magnétiques même dans sa phase désordonnée.
- ◆ Cette variation est négative seulement si les moments magnétiques sont ordonnés, c'est-à-dire que le premier terme qui correspond à la création d'un moment est positif. L'expression ne devient négative qu'à cause de l'ordre magnétique de ces moments. Alors le système ne possède pas de moment magnétique dans sa phase désordonnée mais en possède un dans la phase ordonnée.
- ◆ Cette variation est toujours positive. Alors le système n'est pas magnétique. Mais la phase paramagnétique peut être métastable.

La stabilité des phases magnétiques provient donc à la fois de la stabilité des moments magnétiques  $m_i$  et de leur couplage magnétique.

Ces trois possibilités correspondent à celles que l'on observe dans les métaux de transition. La grandeur du moment magnétique au-dessus de la transition n'est pas reliée à celle que l'on observe à basse température et peut même être nulle. Elle peut aussi varier avec la température. La fonction  $\phi(R_{ij})$  est une fonction oscillante avec la distance. Rendre ces considérations quantitatives est très difficile et la théorie de ces effets est complexe. Il n'existe pas actuellement le consensus qui règne dans la théorie du magnétisme localisé.

## 8. MAGNÉTISME ET ENVIRONNEMENT

Nous avons noté que le magnétisme d'une impureté dépendait de la densité d'états locale sur le site qu'elle occupait. Cette densité d'états dépend fortement de l'environnement de l'atome : selon la nature de celui-ci et la distance aux premiers voisins, un atome sera ou ne sera pas magnétique. Nous en donnerons quelques exemples.

Le fer est magnétique dans sa structure habituelle, cubique centrée. Mais on peut le préparer, sous forme de couches très minces, dans une structure inhabituelle, la structure cubique à faces centrées : dans ce cas, et en l'absence de contrainte, il n'est plus magnétique.

Si nous considérons une couche de fer magnétique, l'environnement d'un atome de surface n'est pas le même que celui d'un atome à l'intérieur de la couche. Le moment magnétique porté par les atomes de fer dépendra donc de leur position dans la couche. La figure 8.11 montre, pour une couche de Fe (110) déposée sur argent, l'évolution du champ hyperfin  $B_{hf}$  (voir chapitre 23) en fonction du numéro de la couche de fer.

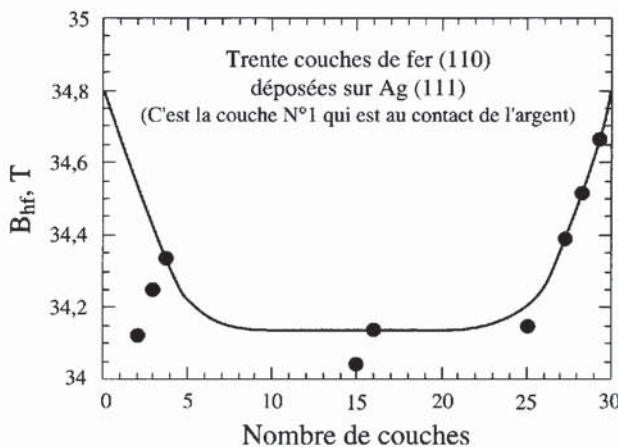


Figure 8.11 - Variations du champ hyperfin en fonction de la position de la sonde  $Fe^{57}$  dans des films de 30 couches de Fe (110) déposées sur Ag (111) à 4.2 K [8].

$B_{hf}$  varie comme le moment magnétique et constitue donc une sonde locale qui permet de suivre qualitativement l'évolution du moment, couche après couche. Par rapport au fer massif, Gradmann estime que le moment en surface augmente de 32-38% à la surface d'un film (100) et de 19-26% à la surface d'un film (110) [9].

Un métal non magnétique comme le vanadium peut devenir magnétique en surface, car la densité d'états  $y$  est plus grande. En effet, qualitativement, nous avons vu que la largeur de la densité d'états était proportionnelle au nombre de voisins ; or, en surface, celui-ci est plus petit et donc la densité d'états  $y$  est plus grande. Le critère de Stoner peut n'être vérifié que pour les atomes de surface.

## 9. MAGNÉTISME DES ALLIAGES DE MÉTAUX DE TRANSITION

Le problème des alliages est beaucoup plus difficile que celui de l'impureté. Il dépasse le cadre de cet ouvrage. En effet, on ne peut plus calculer les états électroniques qui ne sont plus indicés par le vecteur d'onde  $k$  comme dans le cas des électrons libres ou des solides parfaitement périodiques (onde de Bloch). On calcule par des méthodes approchées des densités d'états, soit totales, soit locales sur un atome donné. Une prédiction théorique est donc très difficile. Mais l'évolution du moment magnétique en fonction du nombre d'électrons  $s$  de valence par atome se décrit par une courbe universelle dite *de Slater-Pauling* (figure 8.12). J. Friedel a proposé une interprétation très simple de cette courbe.

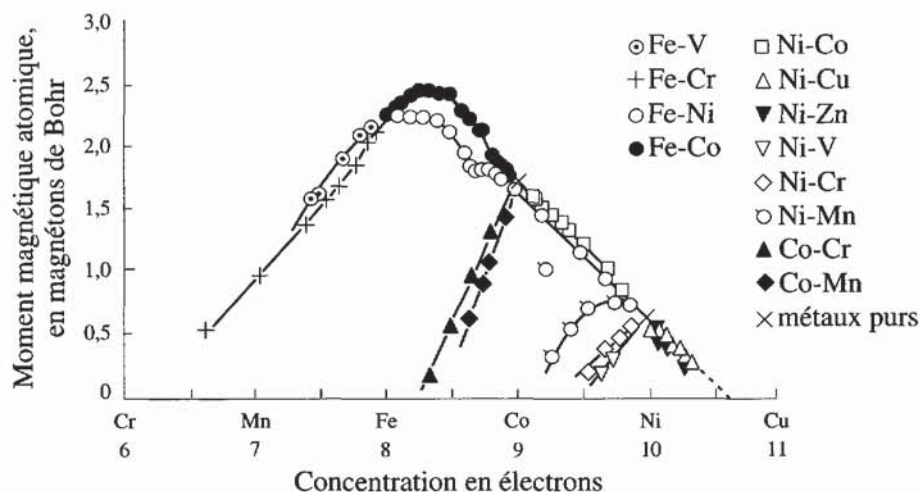


Figure 8.12 - Moment atomique moyen d'alliages binaires des éléments du groupe du fer

Dans le nickel et le cobalt, la bande  $d$  avec un état de spin  $\uparrow$  est pleine. Lorsque l'on forme un alliage, seul change le nombre d'électrons dans la bande partiellement remplie d'état de spin  $\downarrow$ . En première approximation, on peut négliger le changement du nombre d'électrons dans la bande  $sp$  car la densité d'états est beaucoup plus

faible au niveau de Fermi que dans la bande d. Dans ces conditions l'accroissement du moment magnétique moyen (en magnétons de Bohr) sera égal au nombre moyen d'électrons retirés par atome. Ceci explique la droite de pente négative à 45° observée pour les alliages du nickel et du cobalt avec des éléments voisins.

Pour le fer, où les deux bandes d'états de spin différents sont partiellement remplies, la formation de l'alliage doit faire varier la population des deux bandes. Cependant, si l'on admet que la bande de spin  $\downarrow$  a une densité d'états faible, la plupart des électrons seront ajoutés ou retranchés à la bande de spin  $\uparrow$ . Ceci explique la droite de pente positive approximativement à 45° observée pour les alliages avec des éléments voisins du fer.

Pour les alliages entre un métal du début de la série avec le nickel ou le cobalt, Friedel suppose que le potentiel répulsif dû aux atomes du début de la série extrait cinq états d sous le niveau de Fermi pour créer cinq états au-dessus du niveau de Fermi. Les cinq états de spin  $\uparrow$  qui étaient pleins se vident dans des états de spin  $\downarrow$  produisant une décroissance soudaine du moment magnétique et expliquant le comportement différent montré par la courbe de Slater-Pauling.

Certains auteurs utilisent la notion de valence magnétique qui peut se définir ainsi : soient  $N_{\uparrow}$  et  $N_{\downarrow}$  le nombre d'électrons de chaque état de spin occupant les bandes sp et d dans un métal de transition (Fe, Co, Ni). La valence chimique s'écrit :  $Z = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ , et le moment magnétique en unités de magnéton de Bohr est :  $m = N_{\uparrow} - N_{\downarrow} = 2N_{\uparrow} - Z$ .

Dans le cobalt et le nickel, le nombre d'états  $N_d^{\uparrow}$  dans la bande de spin  $\uparrow$  est de 5 par atome. Elle est complètement pleine. On définit la valence magnétique par :  $Z_m = 2N_d^{\uparrow} - Z$ , et le moment magnétique s'écrit alors :  $m = Z_m + 2N_{sp}^{\uparrow}$ , où  $N_{sp}^{\uparrow} = N_{\uparrow} - N_d^{\uparrow}$  est le nombre d'électrons de spin  $\uparrow$  appartenant aux bandes sp. Ce nombre dans les métaux de transition sera considéré comme indépendant de l'alliage considéré.

Avec un alliage composé d'un métal ferromagnétique fort, chaque atome du début de série induit la suppression de cinq états d qui se retrouvent au-dessus du niveau de Fermi. Soit  $x$  la concentration d'atomes de transition du début, la valence magnétique moyenne devient :  $\overline{Z}_m = 2N_d^{\uparrow}(1-x) - Z_M(1-x) - xZ_A$ ,  $Z_M$  ( $Z_A$ ) étant la valence de l'atome de transition magnétique (non magnétique). La variation calculée est représentée sur la figure 8.13.

### **Remarque**

Ces considérations peuvent être étendues pour discuter le moment magnétique de caractère d dans les alliages terres rares - métaux de transition. La terre rare ayant une configuration  $5d^26s^1$  peut être considérée pour cette discussion comme un élément de transition (de la série 4d pour Y, de la série 5d pour les autres terres rares) du début de série.

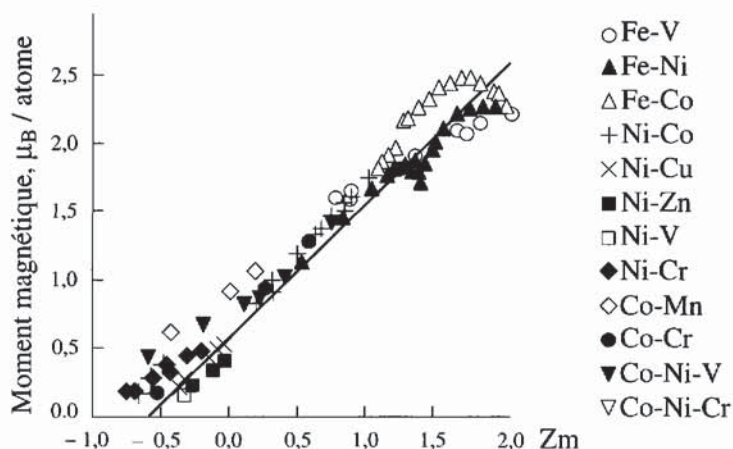


Figure 8.13 - Variation du moment magnétique par atome en fonction de la valence magnétique moyenne dans quelques séries d'alliages de métaux de transition 3d [10]

Ce moment  $d$  s'obtient selon le même raisonnement que celui décrit ci-dessus, en attribuant à la terre rare la valence  $Z_m = 3$ . Dans les composés R-M, le moment  $4f$  localisé de la terre rare se rajoute au moment  $d$  ainsi calculé. Cependant, lorsque la couche  $4f$  est pleine (Lu) ou vide (La), seul le magnétisme  $d$  est présent. On peut directement comparer les moments expérimentaux à ceux déduits du modèle de valence magnétique, comme le montre la figure 8.14. Il est évident que ces considérations sont au mieux semi-quantitatives puisqu'il n'est pas tenu compte de ce que nous avons appelé les effets d'environnement local (voir § 8).

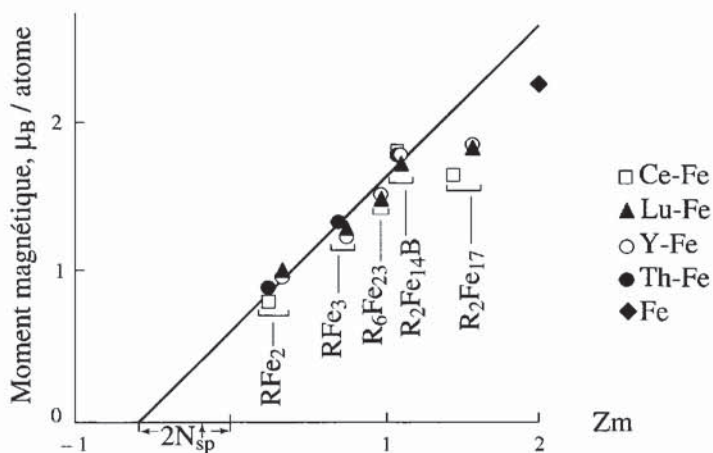


Figure 8.14 - Variation du moment magnétique par atome en fonction de la valence magnétique moyenne dans les composés R-Fe

## 10. CONCLUSION

Le magnétisme des métaux provient de la répulsion coulombienne entre deux électrons présents sur un même site. Cette répulsion tend à éloigner les électrons de spins antiparallèles. Un atome porte un moment magnétique si le critère de Stoner est localement satisfait, c'est-à-dire si la densité d'états locale est plus grande qu'une certaine valeur critique.

La densité d'états locale est très fortement dépendante de l'environnement de l'atome, le magnétisme est donc très sensible à cet environnement. Le lecteur pourra approfondir le sujet en consultant les ouvrages qui font autorité sur ce sujet [11, 12, 13, 14].

## RÉFÉRENCES

- [1] D.P. YOUNG, D. HALL, M.E. TORELLI, Z. FISK, J.L. SARRAO, J.D. THOMPSON, H.R. OTT, S.B. OSEROFF, R.G. GOODRICH, R. ZYSLER, *Nature* (1999) **397**, 412.
- [2] N.F. MOTT, H. JONES, *The theory of the properties of metals and alloys* (1936) Dover Publications, New York.
- [3] M. CYROT éditeur, *Magnetism of metals and alloys* (1982) North Holland, Amsterdam.
- [4] T. MORIYA, *Spin fluctuations in itinerant electron magnetism* (1985) Springer-Verlag, Berlin.
- [5] A. MONTORSI éditeur, *The Hubbard model* (1992) World Scientific, Singapour.
- [6] N.F. MOTT, *Metal-Insulator Transition* (1974) Taylor & Francis, G.B.
- [7] R. GERSDORF, *Phys. Rev. Lett.* (1978) **40**, 344.
- [8] J. TYSON, A.H. OWENS, J.C. WALKER, G. BAYREUTHER, *J. Appl. Phys.* (1981) **52**, 2487.
- [9] U. GRADMANN, *Magnetism in ultrathin transition metal films*, in volume 7 du *Handbook of Magnetic Materials*, K.H.J. Buschow éditeur (1993) North Holland, Amsterdam.
- [10] A.R. WILLIAMS, V.L. MORUZZI, A.P. MALOZEMOFF, K. TERAKURA, *J. E. E. Trans. Magn.* (1983) **MAG 19**, 1983.
- [11] B. BARBARA, D. GIGNOUX, C. VETTIER, *Lectures on modern magnetism* (1988) Science Press, Springer-Verlag, Berlin.
- [12] B. COQBLIN, *The electronic structure of rare earth metals and alloys* (1977) Academic Press, New York.
- [13] J. FRIEDEL, *The Physics of Metals* (1969) Cambridge University Press, G.B.
- [14] E.P. WOLFARTH, K.H.J. BUSCHOW, *Ferromagnetic Materials* (depuis 1980) Vol. 1 à 6, North Holland, Amsterdam.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

## CHAPITRE 9

### LES INTERACTIONS D'ÉCHANGE

(de caractère fondamental, ce chapitre peut être survolé lors d'une première lecture)

*Dans les chapitres précédents, nous avons montré que l'interaction d'échange entre les spins de deux atomes magnétiques est responsable de l'ordre magnétique. Ces interactions jouent un rôle fondamental : le type d'ordre magnétique obtenu est lié au signe et à la portée de ces interactions d'échange ; la température d'ordre est d'autant plus grande que ces interactions sont grandes. Le but de ce chapitre est de montrer les différents mécanismes microscopiques qui sont à l'origine de ces interactions d'échange.*

#### 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS D'ONDE À PLUSIEURS ÉLECTRONS

L'existence d'états ordonnés à des températures élevées indique que l'ordre magnétique ne peut être expliqué de façon classique en invoquant l'interaction dipolaire magnétique : cette interaction est au moins 100 fois trop faible. Il faut faire appel à la mécanique quantique pour comprendre l'origine des interactions d'échange.

L'interaction d'échange dans un solide a la même origine quantique que celle qui a lieu entre les électrons au sein d'un atome (chapitre 7) : les corrélations entre deux électrons conduisent à une différence d'énergie entre les configurations parallèles et antiparallèles de leurs spins. Ceci provient du principe de Pauli qui stipule que deux électrons ne peuvent occuper le même état quantique. Une des conséquences de ce principe est que les fonctions d'onde à plusieurs électrons doivent être antisymétriques lorsque l'on échange deux électrons. Nous traiterons ici le cas d'une fonction d'onde à deux électrons  $\Psi(1, 2)$  pour laquelle le principe de Pauli conduit à la relation (1 et 2 désignent l'ensemble des coordonnées, d'espace et de spin des électrons) :

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1) \quad (9.1)$$

La fonction d'onde  $\Psi(1, 2)$  peut s'écrire comme le produit d'une fonction d'espace  $\varphi(1, 2)$  par une fonction de spin  $\chi(1, 2)$ .

On obtient ainsi deux types de fonctions d'onde selon la symétrie des fonctions  $\varphi(1,2)$  et  $\chi(1,2)$  :

$$\begin{aligned}\Psi_I(1,2) &= \varphi_A(1,2)\chi_S(1,2) \\ \Psi_{II}(1,2) &= \varphi_S(1,2)\chi_A(1,2)\end{aligned}\quad (9.2)$$

où les indices S et A désignent respectivement des fonctions symétriques et antisymétriques. Dans le cas de deux électrons, la fonction d'onde antisymétrique  $\chi_A(1,2)$  décrit l'état singulet de spin :  $\chi_A(1,2) = 1/\sqrt{2}(|1\uparrow, 2\downarrow\rangle - |1\downarrow, 2\uparrow\rangle)$  alors qu'il existe 3 fonctions symétriques  $\chi_S^m(1,2)$  ( $m = 0, \pm 1$ ) correspondant à un état de spin total  $S = 1$  (état triplet) :  $\chi_S^1(1,2) = |1\uparrow, 2\uparrow\rangle$ ,  $\chi_S^{-1}(1,2) = |1\downarrow, 2\downarrow\rangle$  et  $\chi_S^0(1,2) = 1/\sqrt{2}(|1\uparrow, 2\downarrow\rangle + |1\downarrow, 2\uparrow\rangle)$ . L'énergie correspondant aux deux états peut se calculer à partir du hamiltonien  $\mathcal{H}$  des deux électrons :

$$E_{III} = \iint \varphi_{A(S)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi_{A(S)}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (9.3)$$

Les fonctions d'onde d'espace  $\varphi_A(1,2)$  et  $\varphi_S(1,2)$  étant différentes, ceci conduit à des énergies  $E_I$  et  $E_{II}$  différentes si le hamiltonien  $\mathcal{H}$  contient des interactions entre électrons (telles que la répulsion coulombienne entre électrons). Cette différence d'énergie est à l'origine des interactions d'échange entre les spins des électrons 1 et 2, car on peut définir l'énergie d'échange entre les spins des deux électrons :

$$J_{12} = (E_I - E_{II})/2 \quad (9.4)$$

L'énergie d'un état de spin quelconque peut s'écrire alors :

$$E(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = E_0 - 2J_{12}\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \quad (9.5)$$

En effet,  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}[(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2]$  peut prendre les valeurs 1/4 pour un état triplet de spin total égal à 1 ou -3/4 pour un état singulet de spin total égal à 0.

La méthode décrite ici a été appliquée avec succès pour décrire des molécules diatomiques telles que la molécule d'hydrogène [1]. Dans ce cas, l'interaction d'échange  $J_{12}$  s'écrit en fonction de l'intégrale de Coulomb  $U$ , de l'intégrale d'échange  $V$  et du recouvrement entre les deux orbitales  $L$ . Si  $\phi_1(\mathbf{r})$  et  $\phi_2(\mathbf{r})$  sont les fonctions à un électron centrées sur chacun des atomes d'hydrogène, on a :

$$J_{12} = \frac{V - UL^2}{1 - L^4}$$

$$U = \int d^3r d^3r' H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi_1(\mathbf{r}) \phi_2^*(\mathbf{r}')|^2$$

$$\text{où : } V = \int d^3r d^3r' H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}) \phi_1^*(\mathbf{r}') \phi_2(\mathbf{r}') \phi_2^*(\mathbf{r}) \quad (9.6)$$

$$L = \int d^3r \phi_1(\mathbf{r}) \phi_2^*(\mathbf{r})$$

On voit que l'interaction d'échange est une conséquence directe de l'antisymétrie des fonctions d'onde et correspond à la différence d'énergie entre les fonctions d'onde symétriques et antisymétriques d'espace ; dans le cas simple présenté ici, sa valeur

dépend de l'interaction coulombienne ( $U$  et  $V$ ) entre les électrons situés sur des atomes voisins. Cependant l'application de cette méthode aux solides conduit à une valeur de l'interaction d'échange due à la répulsion coulombienne interatomique, appelée interaction d'échange direct, extrêmement faible et souvent négative : dans les solides l'interaction d'échange est généralement liée à l'existence d'interactions indirectes entre électrons situés sur des atomes voisins. Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons les mécanismes d'interaction les plus fréquemment observés.

Au chapitre 4, l'interaction d'échange a été introduite de façon phénoménologique pour décrire les interactions entre moments magnétiques  $\mathbf{m}_i$  (équation 4.34). Dans le cas d'un moment magnétique de spin tel que celui décrit ci-dessus, l'interaction phénoménologique  $n_{ij}$  est reliée au paramètre microscopique  $J_{ij}$  par la relation :  $J_{ij} = 8\mu_0\mu_B^2 n_{ij}$ . De façon générale, l'interaction d'échange  $J_{ij}$  est une interaction entre spins, et il est toujours possible d'en déduire l'interaction  $n_{ij}$  entre moments magnétiques telle qu'elle a été définie au chapitre 4.

## 2. INTERACTIONS D'ÉCHANGE DANS LES ISOLANTS

### 2.1. LE SUPERÉCHANGE [2]

Dans les composés magnétiques isolants, les ions magnétiques sont séparés par des ions non magnétiques : c'est le cas de la plupart des oxydes, sulfures et halogénures de métaux de transition. Les ions magnétiques sont alors situés à une distance telle que les fonctions d'onde 3d des électrons appartenant à des ions voisins ne se recouvrent pas. L'interaction d'échange a lieu dans ce cas par l'intermédiaire de l'ion non magnétique ( $O^{2-}$ ,  $S^{2-}$ ,  $Br^-$ ,  $Cl^-$ ,  $F^-...$ ), le recouvrement entre les fonctions d'onde 3d et p (2p, 3p ou 4p) étant important.

Le cas le plus simple est celui où un seul électron d du métal de transition ( $M$ ) s'hybride avec les orbitales p, comme sur la figure 9.1.

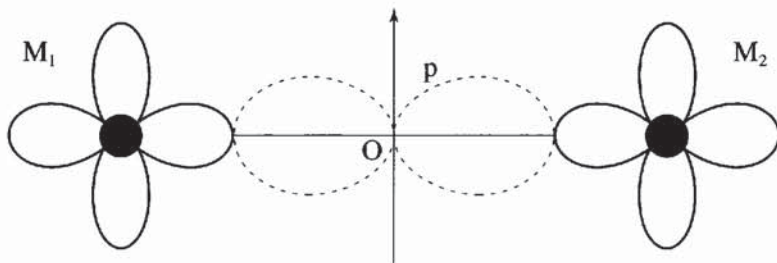


Figure 9.1 -  $M_1$  et  $M_2$  : ions de transition,  $O$  : ion  $O^{2-}$

L'orbitale p orientée le long de l'axe  $M_1$ - $M_2$  s'hybride avec les orbitales d des ions  $M_1$  et  $M_2$ .

La description de la bande d (voir chapitre 8) doit être modifiée car les intégrales de recouvrement direct entre orbitales d,  $\beta_{ij}$  sont très faibles et il faut alors

tenir compte des intégrales de recouvrement entre fonctions d'onde p et d :  $V_{pd}^{ij} = \langle \varphi_d^j | V | \varphi_p^i \rangle$ . Dans le cas où cette hybridation  $V_{pd}^{ij}$  est faible, tout se passe comme si la bande était formée, non pas à partir des fonctions d'onde d centrées sur chacun des atomes, mais à partir de fonctions d'onde hybridées correspondant à une combinaison de fonctions d'onde d et p :

$$\psi_{\sigma}(r) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \varphi_{d,\sigma}(r - R_1) + \varepsilon \varphi_{p,\sigma}(r - R_0).$$

Ces fonctions d'onde traduisent le fait que les électrons d ou p ne sont plus rigoureusement localisés sur un ion, même si le système est isolant. L'énergie liée à la délocalisation des électrons p sur les ions  $M_1$  et  $M_2$  dépend fortement de l'orientation respective des spins des deux électrons d. La figure 9.2 montre les deux configurations possibles dans le cas où une seule orbitale d est accessible. (b) est alors la configuration d'énergie minimale car le gain d'énergie cinétique, lié à la délocalisation des électrons p, est plus grand. Dans ce cas, l'interaction d'échange est donc négative.



**Figure 9.2 - Dans la configuration (a), seul un des électrons p de l'ion  $O^{2-}$  (dont le spin est  $\downarrow$ ) peut se délocaliser, alors que dans la configuration (b) les deux électrons de l'ion  $O^{2-}$  peuvent se délocaliser, l'un sur  $M_1$ , l'autre sur  $M_2$**

Cependant la valeur et le signe de cette interaction de superéchange dépendent fortement des types d'orbitales d ( $e_g$  ou  $t_{2g}$ ) en jeu, du nombre d'électrons ainsi que de l'angle  $M_1$ -O- $M_2$ . Le superéchange peut conduire à des températures d'ordre élevées, jusqu'à près de 900 K dans les ferrites ( $T_C = 863$  K pour  $NiFe_2O_4$ ). Des règles semi-empiriques permettent de prévoir le signe de l'interaction de superéchange [3, 4] : celle-ci est souvent négative, mais il existe quelques isolants ferromagnétiques tels que  $EuO$  ( $T_C = 69$  K) ou  $CrBr_3$  ( $T_C = 37$  K). Enfin, cette interaction est toujours à courte portée, car elle fait intervenir le recouvrement entre orbitales centrées sur des ions voisins.

## 2.2. L'ÉCHANGE ANTISYMMÉTRIQUE

Dans un certain nombre de composés qui s'ordonnent antiferromagnétiquement, il subsiste un faible moment permanent à basse température : le cas le plus connu est celui de l'hématite  $\alpha$ - $Fe_2O_3$ . Ce faible moment est attribué à l'existence d'interactions d'échange antisymétriques de la forme [5] :

$$E_{12} = \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \quad (9.7)$$

Il est clair d'après l'équation (9.7) que cette énergie d'échange antisymétrique n'est non nulle que si les sites 1 et 2 ne sont pas équivalents, par exemple lorsque l'environnement des deux sites est différent. En effet pour deux sites équivalents, on doit

avoir  $E_{12} = E_{21}$  ce qui donne  $\mathbf{D}_{12} = 0$ . Le mécanisme qui conduit à ces interactions antisymétriques est analogue au superéchange, mais il faut inclure l'effet du couplage spin-orbite sur les électrons d [5].

Cette interaction favorise des alignements non colinéaires des moments. Si l'on considère deux sous-réseaux de spin interagissant à la fois par une interaction d'échange  $J_{12}$  négative et une interaction antisymétrique  $\mathbf{D}_{12}$ , les deux sous-réseaux ne sont plus rigoureusement antiparallèles, mais ils forment un angle de l'ordre de  $\pi - |D/J|$  (figure 9.3). On parle alors de ferromagnétisme faible, le moment résultant étant alors très faible ( $\sim 10^{-2} \mu_B$  par ion  $\text{Fe}^{3+}$  dans  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ).

Figure 9.3 - Configuration des moments des deux sous-réseaux en présence d'interactions antisymétriques



### 3. INTERACTIONS D'ÉCHANGE DANS LES MÉTAUX

Dans un métal, ce sont les électrons de conduction qui sont responsables des interactions d'échange ; cependant, les cas des métaux 3d et 4f sont différents : dans les métaux de transition, les électrons 3d sont à l'origine à la fois du moment magnétique et des interactions d'échange (chapitre 8, § 5), alors que dans les terres rares le moment magnétique est celui des électrons 4f et l'interaction d'échange est due aux électrons de conduction (s, p et d) : (chapitre 8, § 6).

#### 3.1. INTERACTION INDIRECTE ENTRE MOMENTS 4f (INTERACTION RKKY) [6]

Les quatorze éléments de terres rares correspondent au remplissage de la couche 4f. Dans la plupart des composés, leurs électrons s et d se comportent comme des électrons délocalisés et les ions de terres rares sont trivalents. Les électrons 4f sont très fortement liés et les orbitales 4f ont une extension spatiale très faible, bien inférieure aux distances interatomiques. Il ne peut donc y avoir d'interaction directe entre les électrons 4f situés sur des atomes différents. Ce sont les électrons de conduction qui couplent les moments magnétiques : en effet, lorsqu'un électron de conduction passe au voisinage d'un ion de terre rare, il interagit localement avec les électrons 4f de cet ion : comme précédemment (§ 1), cette interaction peut s'écrire, en désignant par  $\mathbf{S}_i$  les spins 4f localisés sur les ions et par  $\sigma(\mathbf{r})$  les électrons de conduction :

$$E = - \sum_{\mathbf{R}_i, \mathbf{r}} J(\mathbf{R}_i - \mathbf{r}) \mathbf{S}_i \cdot \sigma(\mathbf{r}) \quad (9.8)$$

Cette interaction est positive et très localisée de sorte que l'on admet en général que  $J(\mathbf{R}_i - \mathbf{r}) = J \delta(\mathbf{R}_i - \mathbf{r})$  (échange intra-atomique). L'ordre de grandeur de  $J$  est  $10^{-1}$  à  $10^{-2}$  eV. L'équation (9.8) traduit le fait qu'un électron de conduction voit sur un site  $i$  de terre rare un champ créé par le spin de cette terre rare :  $\mathbf{h}_i = J\mathbf{S}_i / g\mu_B\mu_0$ . Ce

champ polarise les électrons de conduction et cette polarisation se propage dans le réseau créant ainsi en tout point  $j$  une aimantation des électrons de conduction donnée par la susceptibilité généralisée  $\chi_{ij}$  déjà introduite au § 7 du chapitre 8. L'aimantation des électrons de conduction due à ce champ local  $\mathbf{h}_i$  sur un autre site  $j$  s'écrit alors :  $\mathbf{m}_j = \chi_{ij}\mathbf{h}_i = J\chi_{ij}\mathbf{S}_i/g\mu_B\mu_0$ . Il y aura donc une interaction indirecte entre les spins (ou les moments magnétiques) des deux sites  $i$  et  $j$ . En utilisant à nouveau l'équation (9.8), cette énergie d'interaction s'écrit alors :

$$E_{ij} = -J\mathbf{m}_j\mathbf{S}_i/g\mu_B = -J^2\chi_{ij}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j/\mu_0(g\mu_B)^2 \quad (9.9)$$

L'équation (9.9) indique que la polarisation des électrons de conduction par les spins localisés est responsable de l'interaction d'échange entre ces mêmes spins. Le signe de l'interaction magnétique dépend uniquement de la structure de la bande de conduction par l'intermédiaire de la susceptibilité généralisée  $\chi_{ij}$ . Cette dernière peut être calculée facilement pour des électrons libres : on trouve alors qu'elle est oscillante et à longue portée. A grande distance ( $k_F R_{ij} \gg 1$ ), l'interaction varie comme :

$$- \{2k_F R_{ij} \cos(2k_F R_{ij}) - \sin(2k_F R_{ij})\} / (2k_F R_{ij})^4.$$

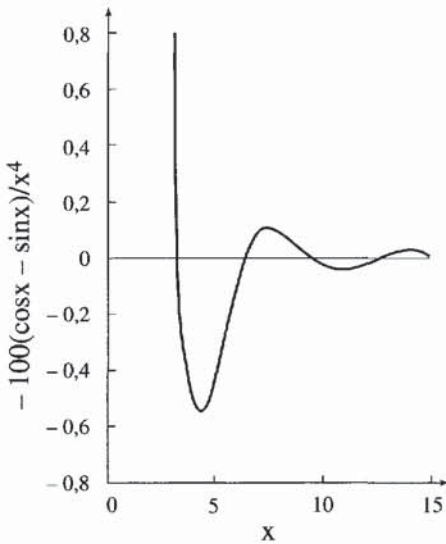


Figure 9.4 - Oscillations de l'interaction entre deux moments magnétiques

Ces interactions sont du même ordre de grandeur dans presque toutes les terres rares, mais elles conduisent à des températures d'ordre qui peuvent varier considérablement (19 K pour Nd, 289 K pour Gd) en raison des valeurs différentes du moment magnétique de la terre rare (loi de de Gennes).

D'autre part, ces mêmes interactions à longue portée sont généralement à l'origine du couplage entre couches magnétiques dans les multicouches (chap. 20, § 4). Dans ce cas, il est possible d'observer les oscillations du couplage RKKY en faisant varier l'épaisseur de la couche non magnétique qui sépare les deux couches magnétiques.

Le couplage oscille donc entre des valeurs positives et négatives en fonction de la distance entre les ions,  $R_{ij}$  (fig. 9.4). Le vecteur d'onde au niveau de Fermi,  $k_F$ , détermine la longueur d'onde de cette oscillation. En général, l'interaction RKKY (Ruderman, Kittel, Kasuya, Yosida) conduit au ferromagnétisme si  $k_F$  est petit (bande peu remplie) et à l'antiferromagnétisme lorsque  $k_F \sim \pi/a$  (bande à moitié pleine). On peut également observer des structures magnétiques à longue période (héliomagnétiques, etc.), éventuellement incommensurables avec la période du réseau.

Ces interactions sont du même ordre de grandeur dans presque toutes les terres rares, mais elles conduisent à des

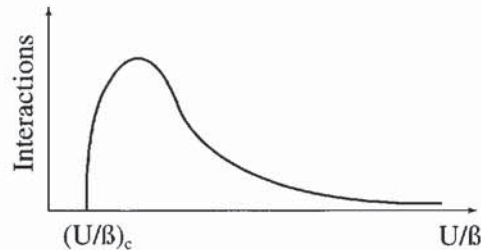
### 3.2. INTERACTION D'ÉCHANGE DANS LES MÉTAUX 3d

Au chapitre 8, nous avons vu que dans les métaux de transition le moment magnétique provient d'une différence d'occupation des bandes de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  et peut donc prendre des valeurs non entières de  $\mu_B$ . Ce moment magnétique de bande apparaît lorsque l'interaction coulombienne intrasite, qui tend à localiser les électrons, est suffisamment grande par rapport à l'énergie cinétique des électrons d. Les interactions  $U_{mm}$  et  $J_{mm}$  définies précédemment (chapitre 8) permettent de stabiliser un moment magnétique sur chaque site. L'interaction entre ces moments a lieu grâce au recouvrement entre les fonctions d'onde 3d des sites voisins (intégrales de transfert  $\beta_{ij}$  définies au chapitre 8) ; les électrons s, présents également au niveau de Fermi, jouent un rôle négligeable autant dans la stabilisation des moments magnétiques (la polarisation de la bande s est négligeable) que dans l'interaction entre les moments.

Le recouvrement entre les fonctions d'onde a deux effets contradictoires : si  $\beta \gg U$  et  $J$ , la bande ne sera pas magnétique car le critère de Stoner ne sera pas satisfait, et si  $\beta \ll U$  et  $J$ , les interactions d'échange intersite seront faibles. La figure 9.5 montre comment les interactions varient en fonction du rapport  $U/\beta$ . Les interactions les plus fortes sont obtenues pour des valeurs de  $U/\beta$  légèrement supérieures au seuil d'apparition du magnétisme.

**Figure 9.5 - Variation qualitative des interactions entre moments en fonction de  $U/\beta$**

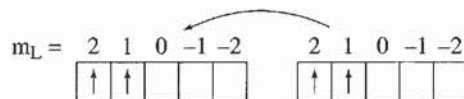
La valeur critique  $(U/\beta)_c$  correspond au critère de Stoner



Le signe de l'interaction entre moments 3d dépend, comme dans le cas des terres rares du remplissage de la bande : elle est ferromagnétique pour une bande presque vide (ou presque pleine) et antiferromagnétique pour une bande à moitié pleine.

Il est possible de donner une discussion très simplifiée du signe de l'interaction pour les métaux de transition. Si l'on considère deux atomes premiers voisins avec un petit nombre d'électrons (ou de trous), la configuration ferromagnétique sera privilégiée car elle minimise l'énergie cinétique en permettant aux électrons de se déplacer d'un atome à l'autre (figure 9.6) tout en respectant la règle de Hund. C'est la situation du nickel et du cobalt, pour lesquels la bande 3d est presque pleine, et, dans une moindre mesure, du fer.

**Figure 9.6 - Ferromagnétisme d'une bande presque vide**



Si la bande est à moitié remplie, la configuration ferromagnétique ne permet pas aux électrons de se déplacer, comme le montre la figure 9.7-a : en revanche, la

configuration antiferromagnétique le permet, comme le montre la figure 9.7-b : celle-ci sera donc privilégiée. C'est le cas du chrome et du manganèse. La structure antiferromagnétique du premier est sinusoïdale et celle du second, colinéaire.

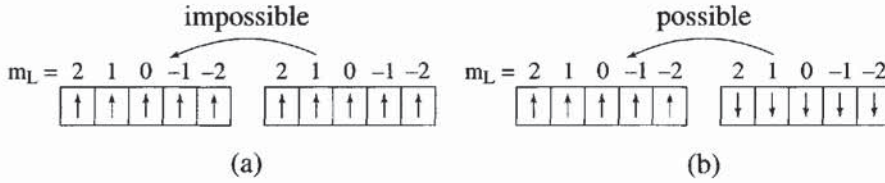


Figure 9.7 - Antiferromagnétisme d'une bande à moitié pleine

La valeur des interactions entre les moments magnétiques 3d dépend beaucoup de la structure électronique. Les températures de Curie du fer et du cobalt sont très élevées (respectivement 1043 et 1388 K) mais dans des composés proches de l'instabilité de Stoner elles sont beaucoup plus faibles : 6 K pour Sc<sub>3</sub>In par exemple.

### 3.3. DOUBLE ÉCHANGE [7]

Dans les oxydes de métaux de transition, nous avons vu que l'interaction d'échange est du type superéchange, mais alors elle n'agit qu'entre des ions qui sont dans un état de valence fixé.

Dans certains oxydes, l'ion de transition peut présenter deux états de valence selon le dopage : c'est le cas par exemple des alliages La<sub>1-x</sub>Ca<sub>x</sub>MnO<sub>3</sub> ou La<sub>1-x</sub>Sr<sub>x</sub>MnO<sub>3</sub>, dans lesquels une fraction 1 - x d'ions Mn est dans l'état Mn<sup>3+</sup> avec un spin total S = 2, les autres ion Mn étant dans la configuration Mn<sup>4+</sup> (S = 3/2). Une interaction ferromagnétique entre les ions Mn<sup>3+</sup> et Mn<sup>4+</sup>, appelée double échange, se produit (toujours par l'intermédiaire de l'hybridation avec les orbitales p de l'ion O<sup>2-</sup>) comme le montre la figure 9.8. La configuration ferromagnétique (a) est alors stabilisée par le gain d'énergie cinétique de l'électron supplémentaire.



Figure 9.8 - En raison de la règle de Hund, l'électron supplémentaire de l'ion Mn<sup>3+</sup> ne peut se déplacer sur un site voisin Mn<sup>4+</sup> que si les spins sont parallèles (configuration a). Dans la configuration b, l'électron supplémentaire reste localisé sur Mn<sup>3+</sup>.

Dans l'alliage La<sub>1-x</sub>Sr<sub>x</sub>MnO<sub>3</sub>, coexistent des interactions de superéchange antiferromagnétiques entre ions de même valence et des interactions de double échange ferromagnétiques entre ions de valence différente.

En fonction de x, on stabilise des états ferromagnétiques, antiferromagnétiques ou "cantés", ce dernier état étant caractérisé par deux sous-réseaux dont les moments font un angle α compris entre 0 et π (figure 9.9).

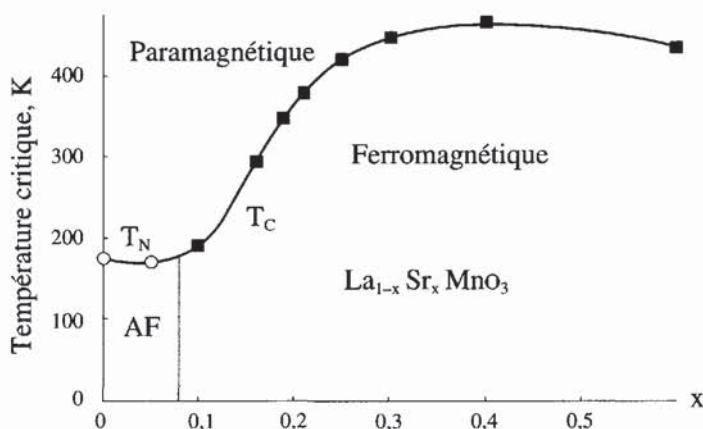


Figure 9.9 - Diagramme de phases magnétiques des alliages  $La_{1-x}Sr_xMnO_3$

AF : phase antiferromagnétique, F : phase ferromagnétique ou "cantée".

Pour davantage d'information sur les manganites, le lecteur est invité à se reporter à la référence [8].

## 4. RÉSUMÉ

Le terme "interaction d'échange" regroupe un grand nombre de mécanismes différents selon qu'il s'agit d'isolants ou de métaux et selon les ions magnétiques considérés (terres rares ou métaux de transition). Ce sont les mécanismes microscopiques qui déterminent le signe, l'ordre de grandeur et la portée des interactions. De façon phénoménologique, on peut toujours écrire l'énergie d'interaction sous la forme d'une énergie d'échange entre moments magnétiques :

$$E = -\frac{1}{2} \mu_0 \sum_{ij} n_{ij} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \quad (9.10)$$

## RÉFÉRENCES

- [1] L.P. LÉVY, Magnétisme et Supraconductivité (1997) CNRS Editions, Paris.
- [2] P.W. ANDERSON, Magnetism, vol IIB, Rado et Suhl ed. (1962) Wiley, New York.
- [3] J.B. GOODENOUGH, Magnetism and the chemical bond (1963) Wiley, New York.
- [4] H.J. ZEIGER, G.W. Pratt, Magnetic interactions in solids (1973) Clarendon Press, Oxford, U.K.
- [5] T. MORIYA, *Phys. Rev.* (1960) **120**, 91.
- [6] B. COQBLIN, The electronic structure of metals and alloys (1964) Academic Press, New York.
- [7] P.G. DE GENNES, *Phys. Rev.* (1960) **118**, 141.
- [8] A.P. RAMIREZ, *J. Phys. Condens. Matter* (1997) **9**, 8171 ; J. M. D. Coey, M. Viret, S. von MOLNAR, *Advances in Physics* (1999) **48**, 167.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# CHAPITRE 10

## APPROCHE THERMODYNAMIQUE DU MAGNÉTISME

(de caractère fondamental, ce chapitre peut être survolé lors d'une première lecture)

*Ce chapitre applique les méthodes de la thermodynamique à l'analyse du magnétisme des solides. Il s'achève sur une brève présentation des phénomènes critiques.*

### 1. RAPPELS DE THERMODYNAMIQUE

Nous rappellerons d'abord quelques résultats de la thermodynamique d'équilibre de systèmes simples, en particulier non soumis à des champs magnétiques, sur la base de la présentation de Callen [1], à laquelle le lecteur est invité à se reporter pour rafraîchir ses souvenirs, et trouver les démonstrations que nous ne donnerons pas ici.

La Thermodynamique classique s'intéresse aux *états d'équilibre* de systèmes physiques macroscopiques, et étudie les bilans lors de passages entre états d'équilibre. La situation la plus simple est celle d'un système isolé de  $N$  particules : son énergie interne  $U$ , somme des énergies cinétiques et potentielles des particules qui le composent, est alors constante, et sa situation d'équilibre est décrite par la condition de maximum de son entropie  $S$ . Une évolution infinitésimale autour de cet état d'équilibre conduirait, pour un fluide pur, à une variation de l'énergie interne :

$$dU = T dS - p dV + \mu dN \quad (10.1)$$

En présence d'un mélange, il faut faire intervenir une somme sur les  $\mu_j dN_j$  correspondant aux différentes espèces chimiques. L'étude d'un solide ferait intervenir les contraintes et les déformations, intégrées sur le volume de l'échantillon, au lieu des scalaires  $p$  et  $V$ .

On voit ici apparaître un petit nombre de grandeurs physiques macroscopiques, les *variables d'état*, qui caractérisent quantitativement l'état d'équilibre. La pression  $p$ , la température (absolue)  $T$  et les potentiels chimiques  $\mu_j$  sont des variables d'état *intensives*. Leur uniformité caractérise l'équilibre mécanique, thermique et diffusif

respectivement. Elles sont dites conjuguées, parce qu'elles apparaissent ensemble dans presque toutes les expressions, des variables *extensives* que sont le volume  $V$ , l'entropie  $S$  et le nombre de particules ou de moles  $N$  (suivant la définition choisie pour le potentiel chimique).

Le fait que la différentielle de  $U$  fasse apparaître les différentielles de  $S$ ,  $V$  et  $N_j$  indique que ce sont là ses *variables naturelles*. On peut aussi considérer formellement la condition d'équilibre d'un système isolé comme le minimum de  $U$ , à entropie, volume et nombre de particules imposés.  $U$  joue donc le rôle d'un *potentiel thermodynamique*, tout comme la condition d'équilibre d'un système mécanique se traduit par le minimum de son énergie potentielle.

Un système dont la température  $T$  est imposée n'est plus isolé. Son état d'équilibre se traduit par le minimum, compatible avec les contraintes imposées, de l'*énergie libre*  $F = U - TS$ , dont la différentielle s'écrit :

$$dF = -SdT - pdV + \sum_j \mu_j dN_j \quad (10.2)$$

et dont les variables naturelles sont  $T$ ,  $V$  et les  $N_j$ . De même, température et pression imposées amènent à utiliser l'*enthalpie libre*, ou potentiel de Gibbs  $G = U - TS + pV$ , de différentielle :

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_j \mu_j dN_j \quad (10.3)$$

dont les variables naturelles sont donc  $T$ ,  $p$  et les  $N_j$ .

On voit apparaître dans ce bref rappel le caractère systématique des passages d'un potentiel thermodynamique à un autre, qu'on appelle *transformations de Legendre*, et qui sont associées physiquement à la nature des variables que l'on contrôle expérimentalement.

Le fait que  $U(S, V, N_j)$ ,  $F(T, V, N_j)$ ,  $G(T, p, N_j)$  sont des fonctions d'état entraîne que leurs dérivées secondes croisées sont égales. Ainsi :

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right|_{N_j} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \right|_{N_j} \quad (10.4)$$

$$\text{d'où : } \left. \frac{\partial(\partial F / \partial T)}{\partial V} \right|_{T, N_j} = \left. \frac{\partial(\partial F / \partial V)}{\partial T} \right|_{V, N_j} \quad \text{Or } \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, N_j} = -S \text{ et } \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T, N_j} = -p,$$

$$\text{ce qui entraîne que : } \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T, N_j} = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{V, N_j} \quad (10.5)$$

Ces identités thermodynamiques sont appelées *relations de Maxwell*. On remarque que les variables mises en jeu ( $T$ ,  $V$ ,  $N_j$  dans cet exemple) apparaissent explicitement dans ces expressions. Elles indiquent immédiatement quelle est la fonction thermodynamique qui pourra conduire à des relations utiles : ce sera celle dont les variables naturelles sont celles du problème, donc ici  $F(T, V, N_j)$ .

L'analyse des conditions de stabilité d'une phase à l'équilibre permettent par ailleurs de démontrer des inégalités concernant les coefficients de réponse tels que :

$$(\partial S / \partial T)_{p, N_j} = \frac{C_p}{T} \quad \text{ou} \quad (\partial S / \partial T)_{V, N_j} = \frac{C_v}{T}$$

$C_p$  et  $C_v$  sont respectivement les chaleurs spécifiques à volume et à pression constants. On remarque que ces coefficients concernent des paires de variables conjuguées. On montre que  $C_p$  et  $C_v$  sont toujours positifs, et que  $C_p > C_v$ .

## 2. POTENTIELS THERMODYNAMIQUES POUR UN SYSTÈME MAGNÉTIQUE INDÉFORMABLE [1,2]

En présence de champs magnétiques,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}$ , et d'aimantation  $\mathbf{M}$ , on conçoit que la situation se complique. C'est vrai, d'autant plus qu'on s'intéresse souvent à des solides :  $p$  et  $V$  ne suffisent plus alors à décrire les effets élastiques, et nous introduirons donc, au § 4, des tenseurs de contrainte et de déformation, dont chacun comporte *a priori* 6 composantes indépendantes.

Pour le moment, nous allons nous limiter (cas du solide indéformable) au seul effet des variables thermiques ( $S$ ,  $T$ ) et magnétiques ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ). Il suffit alors d'obtenir l'expression du travail associé à une transformation élémentaire pour engendrer, par des transformations de Legendre, toute une gamme de potentiels thermodynamiques. L'expression du travail magnétique que nous utiliserons pour commencer est :

$$dW_{\text{mag}} = d\left(\frac{1}{2} \mu_0 \int \mathbf{H}_0^2 dV\right) + \mu_0 \int \mathbf{H}_0 d\mathbf{M}dV \quad (10.6)$$

$\mu_0$  étant ici la perméabilité magnétique du vide et non un potentiel chimique.

Le premier terme correspond à l'énergie magnétostatique du champ appliqué, emmagasinée dans tout l'espace ; on peut souvent l'omettre, ce qui revient à choisir un état de référence où le champ appliqué existerait, mais l'échantillon serait initialement dans l'état qui correspondrait à un champ nul.

Le deuxième décrit l'effet du champ magnétique sur l'échantillon portant l'aimantation  $\mathbf{M}$ , et l'intégration est automatiquement limitée à son volume. Cette expression se simplifie si le champ appliqué est uniforme. Le deuxième terme devient alors :  $\mu_0 \mathbf{H}_0 d\mathbf{m}$ , où  $\mathbf{m}$  est le moment magnétique total de l'échantillon :  $\mathbf{m} = \int \mathbf{M}dV$ , ou encore :  $\delta W_{\text{mag}} = \mu_0 H_0 d\mathbf{m}_{//}$  en notant  $\mathbf{m}_{//}$  la composante parallèle au champ appliqué du moment magnétique total.

Introduit dans l'expression de l'énergie interne, cela conduit à des fonctions thermodynamiques dont les variables naturelles sont :

♦ soit  $S$  et  $\mathbf{m}_{//}$ , donc un potentiel thermodynamique  $U(S, \mathbf{m}_{//})$  tel que :

$$dU(S, \mathbf{m}_{//}) = T dS + \mu_0 H_0 d\mathbf{m}_{//} \quad (10.7)$$

- ◆ soit  $T$  et  $m_{//}$ , donc un potentiel thermodynamique  $F(T, m_{//})$  tel que :

$$dF(T, m_{//}) = -S dT + \mu_0 H_0 dm_{//} \quad (10.8)$$

Une transformation de Legendre peut nous conduire alors à des fonctions :

- ◆ de  $S$  et  $H_0$ , donc un potentiel thermodynamique  $U(S, H_0)$  tel que :

$$dU(S, H_0) = T dS - \mu_0 m_{//} dH_0 \quad (10.9)$$

- ◆ et de  $T$  et  $H_0$ , donc un potentiel thermodynamique  $F(T, H_0)$  tel que :

$$dF(T, H_0) = -S dT - \mu_0 m_{//} dH_0 \quad (10.10)$$

La relation  $F(T, H_0) = F(T, \mathbf{M}) - \mu_0 \int \mathbf{H}_0 \mathbf{M} dV$  décrit le passage de  $F(T, \mathbf{M})$  à  $F(T, H_0)$ . On retrouve ainsi exactement le processus utilisé au § 5.1.1 du chapitre 5 pour analyser la situation la plus favorable en termes de domaines magnétiques : l'énergie libre  $F(T, \mathbf{M})$  contient les termes d'anisotropie, d'échange et de champ démagnétisant ; le terme  $-\mu_0 \int \mathbf{H}_0 \mathbf{M} dV$  est le terme Zeeman d'interaction avec le champ appliqué (noté  $E_H$  au chapitre 5, § 7.1.2).

C'est bien  $F(T, H_0)$  qui doit être minimisé à l'équilibre, par rapport à la variable interne libre de varier qu'est la répartition dans l'échantillon de  $\mathbf{M}$ , c'est-à-dire en pratique de son orientation.

Nous avons pris le parti de ne pas tenter de nommer les trop nombreuses fonctions thermodynamiques existantes. L'information importante est désormais l'indication des variables naturelles qui suit la lettre  $U$  ou  $F$ .

Pour importantes qu'elles soient, en particulier parce que le champ appliqué est bien une variable qu'on contrôle expérimentalement, ces fonctions ne sont pas les seules intéressantes.

La grandeur la plus significative physiquement est le champ macroscopique moyen  $\mathbf{B}$  ou induction. On peut montrer qu'on peut aussi exprimer le travail élémentaire sous une forme mettant en jeu  $\mathbf{B}$ , avec comme variable conjuguée le champ total :  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{dém}}$ , où  $\mathbf{H}_{\text{dém}}$  désigne le champ créé par la répartition d'aimantation de l'échantillon, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur de cet échantillon (on parle alors parfois de champ de dispersion) :

$$dW_{\text{mag}} = \int \mathbf{H} d\mathbf{B} dV = \int \mathbf{H} d\mathbf{B}_{//} dV \quad (10.11)$$

Ni  $\mathbf{B}$ , ni  $\mathbf{H}$  ne sont des variables extensives, et une intégration sur tout l'espace est indispensable parce qu'elles ne sont pas limitées à l'intérieur de l'échantillon.

Les mêmes processus que précédemment conduisent à quatre fonctions d'état :  $U(S, B_{//})$ ,  $F(T, B_{//})$ ,  $U(S, H)$  et  $F(T, H)$ , dont les différentielles s'écrivent respectivement :

$$dU(S, B_{//}) = T dS + \int \mathbf{H} d\mathbf{B}_{//} dV \quad (10.12)$$

$$dF(T, B_{//}) = -SdT + \int HdB_{//}dV \quad (10.13)$$

$$dU(S, H) = TdS - \int B_{//}dHdV \quad (10.14)$$

$$dF(T, H) = -SdT - \int B_{//}dHdV \quad (10.15)$$

### 3. RELATIONS DE MAXWELL ET INÉGALITÉS

Les huit fonctions ainsi définies ci-dessus permettent d'obtenir des expressions physiquement utiles de la chaleur mise en jeu, ou de la variation de température, associées à un processus d'application du champ, grâce à des relations de Maxwell qui généralisent l'équation (10.4). Ainsi, la variation isentropique de température sera décrite par un coefficient magnétothermique, que l'on peut déduire de l'expression (10.9) associée à  $U(S, H_0)$  :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial H_0} \right|_S = -\mu_0 \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial S} \right|_{H_0} = -\mu_0 \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial T} \right|_{H_0} \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_{H_0} = -\frac{\mu_0 T}{C_{H_0}} \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial T} \right|_{H_0} \quad (10.16)$$

puisque  $(\partial T/\partial S)_{H_0} = T/C_{H_0}$ , où  $C_{H_0} = T(\partial S/\partial T)_{H_0}$  est la chaleur spécifique à champ magnétique appliqué constant\*. La détermination de la variation finie  $\Delta T$  due à une excursion finie en champ magnétique appliqué impose une intégration ; dans le régime de basses températures, il faut tenir compte de ce que  $C_{H_0}$  varie notablement avec le champ dans le domaine balayé. C'est en particulier le cas pour l'utilisation la plus fameuse de cette relation : la technique de refroidissement par suppression adiabatique du champ appliqué, un peu improprement appelée *désaimantation adiabatique*, qui sera traitée en exercice à la fin du chapitre 11.

Ces relations procurent une économie à la fois conceptuelle et expérimentale. Par exemple, la relation (10.16) permet de remplacer des mesures calorimétriques par des mesures d'aimantation isothermes (voir exercices).

De la même façon que nous avons trouvé, en thermodynamique des systèmes simples, des inégalités entre chaleurs spécifiques ( $C_p > C_v$ ), nous obtenons aussi des inégalités entre coefficients de réponse magnétiques : en particulier,  $(\partial B/\partial H)_T$  et  $(\partial B/\partial H)_S$ , les perméabilités magnétiques isotherme  $\mu_0\mu_{rT}$  et isentropique  $\mu_0\mu_{rS}$ , sont toutes deux positives, avec  $\mu_{rT} > \mu_{rS}$ .

On peut remarquer que l'utilisation de cette approche pour l'autre paire de variables utilisées,  $H_0$  et  $M$  ou  $m$ , semblerait conduire à  $(\partial M/\partial H_0)_{S \text{ ou } T} > 0$ . Le fait que cette relation soit manifestement fautive (puisque  $\{\partial M/\partial H_0\}_{S \text{ ou } T}$  est négative pour les diamagnétiques, voir chapitre 3) n'est pas le signe d'une insuffisance de la thermodynamique : il est simplement associé au fait que l'expression du travail conduisant à cette paire de variables a été, on l'a vu, artificiellement tronquée.

\* à ne pas confondre avec des coefficients de champ de bobines (voir équation 2.16).

La thermodynamique est un cadre formel magnifique, mais n'exclut pas, bien évidemment, un essai d'analyse physique des résultats. Reprenons par exemple le processus de refroidissement par suppression adiabatique du champ ; on comprend que, lors de la suppression du champ, la perte d'information sur l'orientation des moments magnétiques, ou, si l'on préfère, l'augmentation de leur désordre, correspond à une augmentation de leur entropie. Comme, par ailleurs, l'entropie de l'ensemble que constituent les moments magnétiques couplés aux vibrations des atomes qui les portent est constante dans un processus adiabatique réversible (isentropique), il faut bien que le réseau perde de l'entropie, donc que l'échantillon se refroidisse.

#### 4. CAS DU SOLIDE MAGNÉTIQUE DÉFORMABLE

L'introduction des grandeurs élastiques, les contraintes  $\sigma_{ij}$  et les déformations  $\eta_{ij}$ , tenseurs de rang 2 symétriques, ne simplifie certes pas les écritures, car nous devons maintenant tenir compte du travail élastique élémentaire. L'expression de ce travail est  $\int \sigma_{ij} d\eta_{ij} dV$ , en adoptant la *convention d'Einstein* de sommation sur les indices répétés que nous utiliserons dans tout ce chapitre ; les indices  $i, j, \dots$  désignant les composantes par rapport à un repère cartésien, cette expression signifie donc en fait :

$$\int \sigma_{ij} d\eta_{ij} dV = \int \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} d\eta_{ij} dV.$$

On se trouve ainsi en présence d'un grand choix de fonctions thermodynamiques. Nous les appellerons  $G$ , par analogie avec le cas d'un fluide, lorsque les variables naturelles thermique et élastique seront la température et la contrainte, mais il en existe une grande variété :  $G(T, M_{//}, \sigma)$ ,  $G(T, B_{//}, \sigma)$ ,  $G(T, H, \sigma)$ ,  $G(T, H_0, \sigma)$ , la dernière étant un peu privilégiée parce qu'elle décrit la situation expérimentale la plus courante. De même, lorsque la variable élastique naturelle sera  $\eta$ , nous aurons quatre fonctions  $U$  et quatre fonctions  $F$ , par exemple  $U(S, M_{//}, \eta)$  ou  $F(T, M_{//}, \eta)$ . Le point essentiel est à nouveau que les différentielles s'écrivent immédiatement, et que les relations de Maxwell en découlent aisément. Ainsi, par exemple :

$$dU(S, m_{//}, \eta) = T dS + \mu_0 H_0 dm_{//} + \int \sigma_{ij} d\eta_{ij} dV \quad (10.17)$$

$$dG(T, H_0, \sigma) = -S dT - \mu_0 m_{//} dH_0 - \int \eta_{ij} d\sigma_{ij} dV \quad (10.18)$$

On pourra naturellement aussi se doter, si c'est nécessaire, d'un jeu supplémentaire de fonctions, de variables naturelles ( $S, \sigma$ , et l'une des variables magnétiques), analogues à l'enthalpie de la thermodynamique des fluides. On évitera simplement de les désigner par  $H$  pour ne pas les confondre avec le champ magnétique !

L'utilisation des relations précédentes nécessite une connaissance des relations constitutives du matériau auquel on veut les appliquer. Les relations entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$

sont largement discutées dans ce livre, de même que celles entre  $\mathbf{m}_//$  et  $\mathbf{H}_0$ . On se rappelle que ces dernières font intervenir de façon centrale, sauf pour les matériaux à faible susceptibilité, les effets de champ démagnétisant. Ceci constitue l'une des difficultés de la thermodynamique des milieux ferromagnétiques : le champ créé à l'extérieur du matériau par l'aimantation (on l'appelle parfois champ de dispersion, ou encore on garde la désignation de champ démagnétisant, comme pour ce qui concerne l'intérieur de l'échantillon) s'exerce sur une grande distance, et dépend de la forme de l'échantillon.

## 5. LES PHÉNOMÈNES DE COUPLAGE

Outre les effets purement magnétiques, il faut également pouvoir décrire les couplages entre propriétés magnétiques et d'autres effets, en particulier élastiques. On introduit pour cela les termes appropriés dans l'expression d'un potentiel thermodynamique. Ainsi, nous pouvons décrire le potentiel thermodynamique ramené à l'unité de volume d'un échantillon *déformable* par l'expression :

$$g(\mathbf{T}, \mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = g_0(\mathbf{T}, \mathbf{M}) + S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + d_{ijk} \sigma_{ij} M_k + \lambda_{ijkl} \sigma_{ij} M_k M_l \quad (10.19)$$

où l'on utilise toujours la convention d'Einstein, sous-entendant la sommation sur les indices répétés. Ici,  $g_0(\mathbf{T}, \mathbf{M})$  désigne le potentiel thermodynamique ramené à l'unité de volume d'échantillon du solide supposé *indéformable*.

Cette relation introduit, outre l'énergie élastique habituelle, deux couplages très différents entre la contrainte et l'aimantation. Le premier, linéaire en aimantation, est appelé couplage *piézomagnétique* : on l'a longtemps passé sous silence, mais il existe dans quelques matériaux de symétrie particulière, en particulier les fluorures antiferromagnétiques  $\text{MnF}_2$  et  $\text{CoF}_2$  [3]. Le deuxième, bilinéaire en aimantation, est omniprésent : il correspond à la *magnétostriction*, dont l'analyse est développée au chapitre 12. En effet, la relation  $\eta_{ij} = (\partial g / \partial \sigma_{ij})_{\mathbf{T}, \mathbf{M}}$ , qui découle de l'expression de la différentielle de  $F(\mathbf{T}, \mathbf{M})$ , implique que :

$$\eta_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + d_{ijk} M_k + \lambda_{ijkl} M_k M_l \quad (10.20)$$

Le premier terme correspond à la loi de Hooke habituelle, les deux autres termes, piézomagnétique et magnétostrictif, représentent des déformations associées à l'aimantation. Une telle formulation met en évidence la nature tensorielle des différents couplages.

Ainsi, en ne considérant que les seules variables thermiques, magnétiques et élastiques, la description la plus générale d'un système magnétique fait déjà appel aux 10 variables :  $\mathcal{S} = S/V$ ,  $M_i$  ( $i = 1$  à 3) et  $\eta_{ij}$  ( $i, j = 1$  à 3) que l'on peut relier aux 10 variables associées  $T$ ,  $H_i$  et  $\sigma_{ij}$  par une matrice  $10 \times 10$ , ce qui définit 100 coefficients phénoménologiques, dont seulement 55 sont linéairement indépendants en raison des relations de Maxwell. Nous montrerons en exercice ce que représentent physiquement chacun de ces coefficients et comment il convient de les traiter.

Cette formulation souligne certains aspects intrinsèques de la symétrie des tenseurs mis en jeu. Le fait de supposer que  $\sigma_{ij}$  et  $\eta_{ij}$  soient symétriques ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ ) entraîne que :  $S_{ijkl} = S_{ijlk} = S_{jikl} = S_{jilk}$ , et que  $d_{ijk} = d_{jik}$  ; la présence du produit  $M_k M_l$  entraîne aussi que  $\lambda_{ijkl}$  a les mêmes symétries intrinsèques que  $S_{ijkl}$ . Cette formulation permet aussi de prédire, en supposant connue la symétrie du matériau cristallin, quels sont les effets impossibles, et quels coefficients du tenseur doivent nécessairement être nuls, ou égaux entre eux. Il faut remarquer que cette réduction des tenseurs est ici basée sur la *symétrie magnétique* du cristal, plus compliquée que sa symétrie ponctuelle parce qu'elle fait intervenir l'opération *renversement du temps* [4]. Ainsi, une substance isotrope ou de symétrie cubique ne présente plus qu'un seul coefficient de dilatation thermique et une seule susceptibilité magnétique, tandis qu'en symétrie hexagonale on doit considérer deux coefficients de dilatation thermique,  $\alpha_{//}$  et  $\alpha_{\perp}$ , et deux perméabilités magnétiques  $\mu_{//}$  selon l'axe  $c$  et  $\mu_{\perp}$  dans le plan de base\*.

Tous les «coefficients» thermodynamiques ainsi définis vont dépendre très fortement du point de fonctionnement choisi, voire même de l'histoire antérieure du matériau en raison des phénomènes d'hystérésis que nous avons introduits au chapitre 5 : il est donc essentiel de bien se rappeler que ce ne sont pas des constantes.

D'autres couplages, plus inhabituels, se laissent également décrire de façon commode dans un tel formalisme, à condition d'introduire encore d'autres variables. Ainsi l'effet magnétoélectrique linéaire correspond à des termes  $\alpha_{ij} E_i H_j$  dans une densité d'enthalpie libre  $g(T, \mathbf{E}, \mathbf{H})$  [5].

## 6. ÉNERGIE LIBRE «À LA LANDAU»

L'approche des potentiels thermodynamiques «à la Landau» est différente [2, 6]. Dans un traitement des transitions de phase qui a profondément marqué la physique et reste un repère après le développement de l'approche plus correcte – mais plus compliquée – des exposants critiques par le groupe de renormalisation, Landau a introduit le concept de *paramètre d'ordre*, et de développement d'un potentiel thermodynamique en puissances de ce paramètre d'ordre. Le paramètre d'ordre, fonction de la température, est défini comme nul dans la phase de haute symétrie, et non nul dans une phase ordonnée de symétrie plus basse.

L'aimantation spontanée en est un excellent exemple. Il est cependant préférable de la normaliser et de prendre pour paramètre d'ordre l'aimantation réduite  $m = M_s / M_{s0}$  où  $M_{s0}$  serait la valeur maximum de  $M_s$  à 0 K. Au voisinage immédiat de la transition,  $m$  sera petit devant l'unité, s'il s'agit d'une transition continue (transition

---

\* Lorsqu'il existe une densité volumique de couple,  $\sigma_{ij}$  et  $\eta_{ij}$  ne sont plus symétriques et des effets rotationnels interviennent (voir la fin du § 2.2.1 du chapitre 12).

de deuxième espèce, ou bien point critique), et un développement de l'énergie en puissances croissantes de  $m$  semble alors justifié. Le développement «à la Landau» s'écrit ainsi :

$$f(T, m) = f_0(T) + a(T) m + b(T) m^2 + c(T) m^3 + d(T) m^4 + \dots \quad (10.21)$$

Par rapport à un potentiel thermodynamique habituel, la différence essentielle est que l'on recherche, dans un premier temps, la ou les valeurs de  $m$  qui rendent  $f$  minimum à température  $T$  donnée (voir figure 10.1) ; si  $m_0$  est une telle valeur, alors c'est l'expression de  $f$  pour *cette* valeur du paramètre d'ordre qui joue le rôle habituel du potentiel thermodynamique.

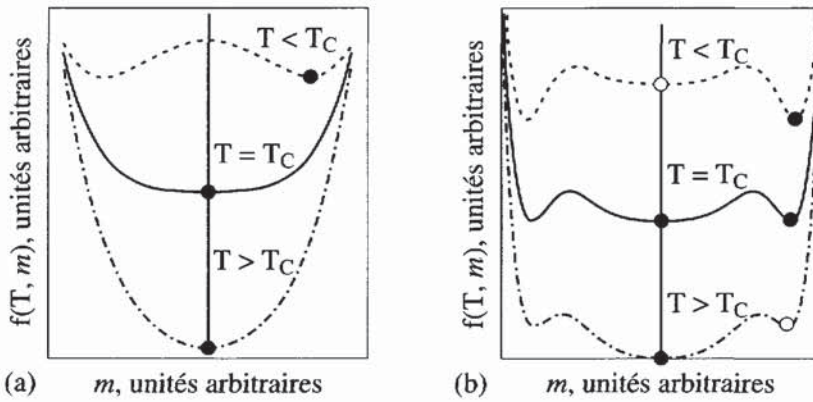


Figure 10.1 - Allure des courbes isothermes  $f(T, m)$  :

(a) cas d'une transition du second ordre - (b) cas d'une transition du premier ordre

L'argument de symétrie le plus simple impose que  $a(T)$  et  $c(T)$  soient nuls, car on s'attend à ce que le sens de l'aimantation, et donc le signe de  $m$ , n'affecte pas l'énergie libre. On choisit ensuite  $b(T)$  de telle façon que le minimum de la fonction  $f(T)$  corresponde à  $m = 0$  pour  $T > T_C$  où  $T_C$  est la température de transition : la forme la plus simple est  $b(T) = b'(T - T_C)$  avec  $b' > 0$ . Selon les valeurs relatives et le signe des termes d'ordre supérieur, on pourra observer une transition du second ordre (figures 10.1-a et 10.2-a) ou du premier ordre (figures 10.1-b et 10.2-b) : dans ce cas, on observe à  $T = T_C$  un minimum pour  $m = 0$  et deux autres pour  $m = \pm m_0$ .

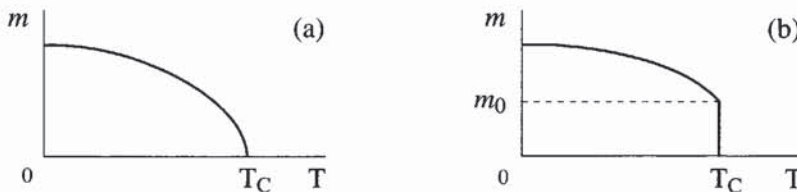


Figure 10.2 - Allure des courbes d'aimantation en fonction de la température pour les cas (a) d'une transition du second ordre et (b) d'une transition du premier ordre

Sur la figure 10.1-b, on constate que, pour  $T = T_C$ , des minima correspondant à la même valeur d'énergie apparaissent pour  $m = 0$  et  $m = \pm m_0$ . Deux phases coexistent alors, l'une non magnétique et l'autre porteuse d'une aimantation finie : c'est là l'origine de la discontinuité de l'aimantation observée sur la figure 10.2-b.

Le développement de ce modèle conduit à décrire quantitativement le comportement des grandeurs physiques importantes au voisinage de la transition, par exemple la susceptibilité magnétique. On peut d'ailleurs l'enrichir en incorporant des termes d'énergie correspondant à des inhomogénéités spatiales du paramètre d'ordre, ce qui permet de décrire les parois entre domaines (régions où le paramètre d'ordre est différent, en orientation au moins).

C'est le désaccord quantitatif de ce modèle avec l'expérience, et spécifiquement sur les exposants critiques comme nous allons le voir, qui a conduit à aller plus loin, en mettant en évidence le rôle essentiel des fluctuations, ignorées dans cette approche.

## 7. EXPOSANTS CRITIQUES ET LOIS D'ÉCHELLE

Nous venons de voir que l'expression la plus simple de l'énergie d'une substance magnétique présentant une transition du second ordre pouvait s'écrire dans le modèle de Landau :

$$f(T, m) = f_0(T) + b'(T - T_C) m^2 + d(T) m^4 \quad (10.22)$$

avec  $b'$  et  $d > 0$  (figure 10.1). La valeur de  $m$  qui minimise  $f$  s'obtient en écrivant :

$$2b'(T - T_C) m + 4dm^3 = 0 \quad (10.23)$$

dont les solutions sont :  $m = 0$ , solution valable au dessus de  $T_C$  et :

$$m = \{(b'/2d)(T_C - T)\}^{1/2} \quad (10.24)$$

qui définit l'aimantation spontanée en phase ordonnée. Or l'expérience montre que l'aimantation réduite varie bien, *près de*  $T_C$ , comme une puissance de  $T_C - T$  :

$$m \sim (T_C - T)^\beta \quad (10.25)$$

mais l'exposant  $\beta$  est généralement inférieur à la valeur 0,5 prévue par ce modèle. De façon plus générale, toutes les grandeurs physiques d'une substance magnétique présentent un *comportement critique* au voisinage de la température critique  $T_C$  qui peut s'exprimer au moyen de la variable réduite :

$$t = (T - T_C)/T_C \quad (10.26)$$

Ainsi, par exemple :  $C_V \sim |t|^{-\alpha}$ ,  $M \sim |t|^{-\beta}$ ,  $\chi \sim |t|^{-\gamma}$ ,  $\xi \sim |t|^{-\nu}$ , où  $C_V$  est la chaleur spécifique,  $M$  l'aimantation,  $\chi$  la susceptibilité et  $\xi$  la longueur de corrélation.

Vers  $T_C$ , l'aimantation varie aussi comme une puissance du champ, ce que l'on écrit :  $M \sim |H|^{1/\delta}$  et la fonction de corrélation de paire  $G \sim \langle S_i S_j \rangle$  varie avec la distance  $r_{ij}$  comme :  $G \sim |r_{ij}|^{-(d-2+\eta)}$  où  $d$  représente la dimensionnalité (dimension de l'espace considéré). On désigne par *lois d'échelle* ces lois en puissances de  $t$ , de  $H$  ou de  $r$ , et l'usage a consacré le choix de l'alphabet grec pour désigner ces exposants que l'on a coutume d'appeler *exposants critiques*. Longtemps, on a cru que les exposants critiques n'étaient pas les mêmes lorsque l'on approchait  $T_C$  par les valeurs de température inférieures ( $\alpha'$ ,  $\gamma'$ ,  $\nu'$ ) et supérieures ( $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ ) à  $T_C$ . Or il ne

s'agissait que d'artefacts expérimentaux, et la théorie des transitions de phase a non seulement montré que  $\alpha = \alpha'$ , ... mais qu'il existait aussi des relations entre les différents exposants critiques. Il s'agit en fait d'inégalités thermodynamiques valables à toute température, en particulier loin de  $T_C$ . Ainsi, l'inégalité :  $C_M = C_H - T\{(\partial M/\partial T)_H\}^2/(\partial M/\partial H)_T \geq 0$  entraîne la relation dite de Rushbrooke :

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2 \quad (10.27)$$

De même, on montre :  $\alpha + \beta(1 + \delta) \geq 2$  (10.28)

$$\gamma \geq \beta(\delta - 1) \quad (10.29)$$

et bien d'autres relations encore.

Or, en même temps que ces exposants tendent vers des valeurs constantes, ces inégalités deviennent des égalités au voisinage immédiat de la température d'ordre. De façon tout à fait générale, la connaissance de deux exposants critiques suffit alors pour connaître tous les autres qui s'en déduisent par les égalités suivantes [7, 8] :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (10.30)$$

$$\delta = 1 + \gamma/\beta \quad (10.31)$$

$$dv = 2 - \alpha \quad (10.32)$$

$$v = \gamma/(2 - \eta) \quad (10.33)$$

A la température d'ordre, les fluctuations prennent une telle ampleur que le système devient instable :  $\xi$  diverge alors en  $1/(T - T_C)^v$ , et par voie de conséquence, un certain nombre de grandeurs physiques divergent aussi, comme par exemple la susceptibilité magnétique  $\chi$  en  $1/(T - T_C)^\gamma$ .

Ainsi, pour une substance qui présente les valeurs  $\alpha = 0,125$  et  $\beta = 0,3125$ , l'égalité (10.30) donnera  $\gamma = 1,25$ , de l'égalité (10.31) l'on tirera  $\delta = 5$ , et de (10.32)  $\eta = 0$  pour un espace de dimension  $d = 3$ . On en déduit  $v = 0,625$ .

Les exposants critiques varient d'une substance à l'autre, mais ils dépendent essentiellement de la *dimensionnalité* de l'espace. Le tableau 10.1 donne les valeurs de ces exposants, calculés dans divers modèles théoriques, et les valeurs expérimentales observées dans deux substances réelles, la magnétite [9] et le nickel [10].

Souletie *et al.* [8] ont suggéré qu'il était possible d'étendre les lois d'échelle à une gamme de température bien plus large que le voisinage immédiat de  $T_C$  à condition de prendre pour variable réduite non plus  $t$  définie par l'équation (10.26), mais

$$t' = t \times T_C / T \quad (10.34)$$

La susceptibilité magnétique s'exprime alors simplement en fonction de la température par une relation où intervient l'exposant critique  $\gamma$  :

$$\chi = \frac{C}{T} \left( \frac{T - T_C}{T} \right)^{-\gamma} \quad (10.35)$$

Tableau 10.1 - Quelques valeurs d'exposants critiques

Modèle	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\eta$	$\nu$
Landau *	0	1/2	1	3	0	1/2
Ising (2 D)	0	1/8	7/4	15	1/4	1
Ising (3 D)	$\sim 1/8$	$\sim 5/16$	$\sim 5/4$	$\sim 5$	$\sim 0$	$\sim 5/8$
Heisenberg	$\sim 0$	$\sim 0,313$	1,36 - 1,39	$\sim 5,25$	$\sim 0$	$\sim 0,64$
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	-0,16	0,405	1,35	4,33	1/8	0,72
Nickel	$-0,1 \pm 0,03$	$0,42 \pm 0,04$	1,316	$4,2 \pm 0,3$	0,12	0,7

\* Ce sont aussi les exposants que prévoient tous les modèles de champ moyen, comme le modèle du champ moléculaire. Le lecteur sera surpris de trouver pour les modèles de champ moyen (Landau) une dimension  $d = 4$ . La raison en est que le modèle de champ moléculaire n'est soluble exactement que pour  $d > 3$ . On pourra trouver une analyse détaillée des transitions de phase et des phénomènes critiques dans les ouvrages classiques déjà cités [7] et [8].

Cette expression *diverge* (devient infinie) à  $T = T_C$  comme il se doit, et redonne bien à haute température ( $T \gg T_C$ ) la loi de Curie-Weiss :  $\chi = \mathcal{C}/(T - \theta_p)$ , avec :

$$\theta_p = \gamma T_C \quad (10.36)$$

Le modèle de champ moléculaire – comme tout modèle de champ moyen – prévoyait l'identité de  $\theta_p$  avec  $T_C$  (figure 4.11), c'est-à-dire la valeur  $\gamma = 1$  prévue par le modèle de Landau. Le fait que  $\gamma$  soit supérieur à l'unité traduit simplement la présence, à haute température, de fluctuations qui ne sont pas totalement aléatoires, mais qui sont corrélées sur un petit volume de matière en raison des interactions d'échange : un ordre à courte distance commence à s'établir bien au-dessus de  $T_C$ , avec une longueur de corrélation qui augmente lorsque  $T$  diminue jusqu'à diverger pour  $T = T_C$ .

## 8. ANOMALIES MAGNÉTIQUES VERS $T_C$

Une conclusion importante de cette analyse thermodynamique est que toute propriété physique d'une substance magnétique présente une anomalie au voisinage de  $T_C$ . Selon que l'exposant critique associé à cette propriété est positif ou négatif, nous avons un comportement de type  $m(T)$  présentant une valeur notable à basse température et s'annulant à  $T_C$  ou dans son voisinage (voir par exemple les figures 3.19 et 3.20), ou de type  $\chi(T)$  présentant une divergence "en lambda" vers  $T_C$  (voir par exemple les figures 3.17 et 3.18).

## 9. LE MODÈLE DU CHAMP MOLÉCULAIRE À L'ÉPREUVE DE L'EXPÉRIENCE

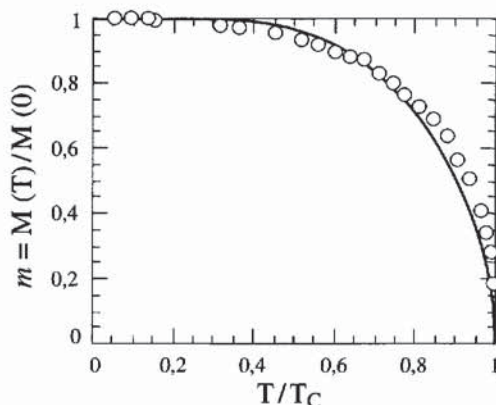
L'expérience montre que le coefficient  $\beta$  est toujours inférieur à la valeur 0,5 prédite par le modèle de champ moléculaire. Cela signifie que l'aimantation spontanée tombe toujours plus vite vers  $T_C$  que ne le prévoit le modèle de champ moléculaire, autrement dit l'aimantation vers  $T_C$  est toujours supérieure à la valeur prédite par le modèle de champ moléculaire.

A basse température, la situation est exactement similaire : l'aimantation expérimentale mesurée sur des substances réelles décroît plus vite que ne le prévoit le modèle de champ moléculaire vers 0 K ; mais cette fois, les points expérimentaux sont situés en-dessous de la courbe prédite par le champ moléculaire, comme le montre la figure 10.3 relative au nickel métallique pur.

**Figure 10.3**

**Aimantation spontanée du nickel tracée en fonction de la température**

Les données sont reportées en unités réduites. La courbe prédite par le modèle de champ moléculaire pour  $S = 1/2$  (trait plein) est comparée aux points expérimentaux (cercles).



Les variations thermiques à très basse température de l'aimantation réduite s'expliquent par le fait suivant : l'agitation thermique ne désoriente pas les moments magnétiques de façon totalement aléatoire comme le suppose le modèle de champ moléculaire, mais excite plutôt des *ondes de spin*. La figure 10.4 illustre la différence de comportement entre des excitations aléatoires (a) et des excitations corrélées par les interactions d'échange (b), dans le cas simplifié d'une chaîne linéaire d'atomes magnétiques. Dans les deux cas, l'énergie mise en jeu est la même, mais la variation d'aimantation est bien plus grande dans le cas (b), comme le montrent aussi bien un calcul classique qu'une analyse quantique.

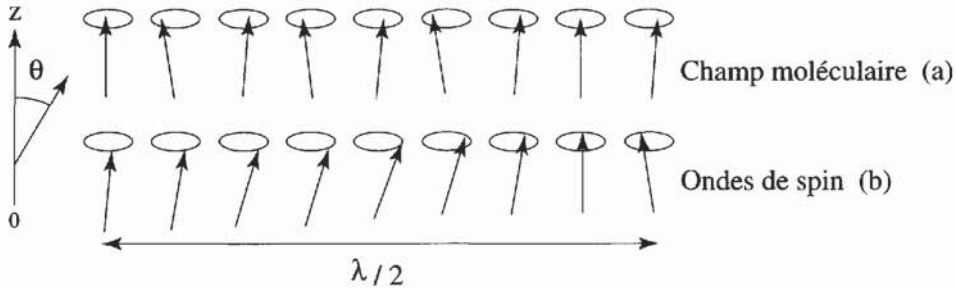
Alors que le modèle du champ moléculaire prévoit une variation exponentielle de  $m$  qui démarre très lentement, l'excitation d'*ondes de spin* conduit à une loi en  $T^{3/2}$  :

$$m(T) = 1 - C T^{3/2} \quad (10.37)$$

où  $C$  est appelée coefficient des ondes de spin, et vaut pour un réseau cubique à faces centrées :

$$C = \frac{0,0587}{2S} \left\{ \frac{k_B}{2JS} \right\}^{3/2} \quad (10.38)$$

Une démonstration simple en est donnée par Kittel dans son Introduction à la Physique du Solide [11]. A plus haute température, des variations en  $T^2$  interviennent dans les métaux, qui dominent rapidement le terme en  $T^{3/2}$ .



**Figure 10.4 - Comparaison entre les excitations aléatoires prévues par le modèle de champ moléculaire (a) et les ondes de spin (b)**

L'énergie d'échange mise en jeu ( $\langle J_{ij} S_i S_j \rangle \sim \langle \cos \phi_{ij} \rangle$ , où  $\phi_{ij}$  est l'angle que font deux moments magnétiques voisins entre eux) est la même dans les deux cas, mais l'aimantation résultante ( $M_s \langle \cos \theta \rangle$ ) est inférieure dans le cas des ondes de spin.

## EXERCICES

**E.1** Partant du potentiel thermodynamique ramené à l'unité de volume d'un échantillon *déformable*  $g(T, \mathbf{H}, \sigma)$ , montrer qu'il existe 100 dérivées secondes de  $g$ . Montrer que les relations de Maxwell permettent de réduire de 100 à 55 le nombre de ces dérivées secondes qui sont distinctes.

**E.2** Pour des variations virtuelles de la température, du champ et des contraintes, exprimer les variations associées de  $\mathcal{S}$  (entropie/unité de volume), des composantes de l'induction et de celles du tenseur des déformations en fonction de 55 coefficients que l'on identifiera aux 55 dérivées secondes de  $g$ . Préciser quel est leur sens physique. Montrer que l'on peut définir des effets de couplage directs et inverses.

**E.3** Dans le cas d'un cristal de symétrie cubique, que deviennent ces 55 coefficients ?

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1**  $T$  est un scalaire, et ne comporte donc qu'une seule composante,  $\mathbf{H}$  est un vecteur et comporte 3 composantes, et  $\sigma$  est un tenseur à 6 composantes symétriques.  $G$  se développe donc sur 10 composantes indépendantes, et comporte ainsi 100 dérivées secondes telles que  $\partial^2 g / \partial T^2$ ,  $\partial^2 g / \partial T \partial H_i$ ,  $\partial^2 g / \partial H_i \partial \sigma_{jk}$ , etc. Les relations de Maxwell nous disent que les dérivées secondes de  $g$  sont indépendantes

de l'ordre de dérivation et donc par exemple :  $\partial^2 g / \partial T \partial H_i = \partial^2 g / \partial H_i \partial T$ . Les 10 dérivées secondes à une seule variable  $\partial^2 g / \partial T^2$ ,  $\partial^2 g / \partial H_i^2$ ,  $\partial^2 g / \partial \sigma_{jk}^2$  n'étant pas concernées par ces relations, seules les 90 dérivées secondes croisées verront leur nombre divisé par deux et donc passer à 45. Avec 10 dérivées secondes à une seule variable et 45 dérivées secondes croisées, on arrive bien à 55 dérivées secondes distinctes.

**S.2** Comme  $\partial g = -\mathcal{S}dT - B_i dH_i - \eta_{jk} d\sigma_{jk}$ , on a :  $\mathcal{S} = -\partial g / \partial T$ ,  $B_i = -\partial g / \partial H_i$  et  $\eta_{jk} = -\partial g / \partial \sigma_{jk}$ . Or on peut écrire, pour une variation virtuelle  $dT$  de la température,  $dH_i$  des composantes du champ et  $d\sigma_{jk}$  des composantes de la contrainte :

$$d\mathcal{S} = (\partial \mathcal{S} / \partial T) dT + (\partial \mathcal{S} / \partial H_j) dH_j + (\partial \mathcal{S} / \partial \sigma_{lm}) d\sigma_{lm},$$

soit encore :  $d\mathcal{S} = (-\partial^2 g / \partial T^2) dT + (-\partial^2 g / \partial T \partial H_j) dH_j + (-\partial^2 g / \partial T \partial \sigma_{lm}) d\sigma_{lm}$ .

De même :  $dB_i = (-\partial^2 g / \partial T \partial H_i) dT + (-\partial^2 g / \partial H_i \partial H_j) dH_j + (-\partial^2 g / \partial H_i \partial \sigma_{jk}) d\sigma_{jk}$

$$d\eta_{jk} = (-\partial^2 g / \partial T \partial \sigma_{jk}) dT + (-\partial^2 g / \partial H_i \partial \sigma_{jk}) dH_i + (-\partial^2 g / \partial \sigma_{jk} \partial \sigma_{lm}) d\sigma_{lm}$$

Ce sont là dix équations linéaires à dix inconnues, avec  $i, j = 1, 2, 3$ . Nous allons maintenant donner la signification physique des coefficients de ces équations.

$C_{\sigma,H} = T(\partial \mathcal{S} / \partial T)_{\sigma,H} = -T(\partial^2 g / \partial T^2)_{\sigma,H}$  est la chaleur spécifique, qui caractérise les propriétés thermiques de l'échantillon,

$(\chi_{ij})_{T,\sigma} = (\partial M_i / \partial H_j)_{T,\sigma} = (-\partial^2 g / \partial H_i \partial H_j)_{T,\sigma}$  le tenseur de susceptibilité, avec 3 composantes diagonales et 3 hors diagonale dans le cas le plus général, qui caractérise ses propriétés magnétiques,

et enfin  $(s_{ijkl})_{T,H} = (\partial \eta_{ij} / \partial \sigma_{kl})_{T,H} = -(\partial^2 g / \partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl})_{T,H}$  le tenseur des complaisances élastiques qui compte, dans le cas général, 21 coefficients, 6 diagonaux et 15 hors diagonale. Il caractérise ses propriétés élastiques.

Les 27 coefficients restants décrivent les *effets de couplage* entre les propriétés thermiques, magnétiques et élastiques : on trouve dans le cas général trois coefficients pour le couplage pyromagnétique,  $(i_j)_\sigma = \mu_0 (\partial M_j / \partial T)_{\sigma,H} = (\partial \mathcal{S} / \partial H_j)_{T,\sigma}$ , qui décrivent les effets de la température sur les propriétés magnétiques et inversement du champ magnétique sur l'entropie (effet magnétocalorique), six pour le couplage thermoélastique,  $(\alpha_{ij})_H = (\partial \eta_{ij} / \partial T)_{\sigma,H} = (\partial \mathcal{S} / \partial \sigma_{ij})_{T,H}$  qui décrivent la dilatation thermique et inversement l'effet des contraintes sur l'entropie, et dix huit pour le couplage piézomagnétique,  $(d_{ijk})_T = \mu_0 (\partial M_k / \partial \sigma_{ij})_{T,H} = (\partial \eta_{ij} / \partial H_k)_{T,\sigma}$  qui décrivent les effets des contraintes mécaniques sur les propriétés magnétiques et inversement les effets du champ magnétique sur les dimensions.

Ainsi, à chacun des *effets de couplage direct* correspond un *effet de couplage inverse*.

**S.3** Les propriétés de symétrie du cube nous permettent d'affirmer que tout coefficient  $\mu_{xx}$  devra être égal à  $\mu_{yy}$  et à  $\mu_{zz}$ , tout  $\mu_{xy}$  devra être égal à  $\mu_{yx}$ , etc. car l'échange de  $x$  et de  $y$  ne doit pas changer la valeur de l'énergie.  $\mu_{xy}$  devra être nul

car changer  $x$  en  $-x$  ne doit pas changer l'expression de l'énergie, or cette opération change  $\mu_{xy}$  en  $-\mu_{xy}$ . D'une façon générale, tout coefficient  $A_{ijklmnop\dots}$  devra être pair vis-à-vis de  $x$ , de  $y$  et de  $z$  sous peine d'être nul, et se conservera par toute permutation de ces trois variables. Ainsi, il ne restera plus qu'une chaleur spécifique, une seule perméabilité magnétique, trois coefficients d'élasticité ( $c_{11}$ ,  $c_{12}$  et  $c_{44}$ ), un coefficient de couplage pyromagnétique, un seul coefficient de dilatation thermique et aucun coefficient de couplage piézomagnétique (mais trois coefficients de couplage magnétoélastique responsables de la magnétostriction).

## RÉFÉRENCES

- [1] H.B. CALLEN, *Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics* (1985) Wiley, New York. (Il s'agit de la seconde édition de cet ouvrage : ne pas utiliser d'impression antérieure à la sixième).
- [2] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITS, *Electrodynamique des Milieux Continus* (1969) Mir, Moscou.
- [3] A.S. BOROVIK-ROMANOV, *J. Exp. Theor. Phys.* (1959) **36**, 1954 ; *J. Exp. Theor. Phys.* (1960) **38**, 1088 ; *Ferroelectrics* (1994) **162**, 153.
- [4] R.R. BIRSS, *Symmetry and Magnetism*, dans *Selected topics in Solid State Physics*, Vol. III, Wohlfarth, E.P. Ed., North Holland, Amsterdam, 1964.
- [5] H. SCHMID, *Ferroelectrics* (1994) **161**, 1.
- [6] J.C. TOLEDANO, P. TOLEDANO, *The Landau theory of phase transitions. Applications to structural, incommensurate, magnetic, and liquid crystals systems* (1987) World Scientific, Singapore.
- [7] N. BOCCARA, *Symétries brisées, théorie des transitions avec paramètre d'ordre* (1976) Hermann, Paris, 247 pages.
- [8] H.E. STANLEY, *Introduction to phase transitions and critical phenomena* (1971) Oxford University Press, New York, 308 pages.
- [9] M. HAUG, M. FÄHNLE, H. KRONMÜLLER, *J. Magn. Magn. Mater.* (1987) **69**, 163.
- [10] E. CARRÉ, J. SOULETTE, *J. Magn. Magn. Mater.* (1988) **72**, 29.
- [11] C. KITTEL, *Physique de l'état solide* (1956) Bordas, Paris, 593 pages.

# CHAPITRE 11

## COUPLAGE MAGNÉTOCALORIQUE ET EFFETS ASSOCIÉS

*Nous abordons maintenant les phénomènes qui mettent en jeu le couplage des grandeurs magnétiques avec d'autres grandeurs physiques. Dans ce chapitre, nous décrivons le plus simple des couplages, car son analyse ne fait intervenir, outre les grandeurs magnétiques, que deux scalaires, la température et l'entropie : il s'agit du couplage magnétocalorique.*

### 1. VARIATIONS THERMIQUES DE L'AIMANTATION ET CHALEUR SPÉCIFIQUE

La présentation thermodynamique du magnétisme qui a été donnée au chapitre 10 nous a permis d'introduire la notion de couplage entre les propriétés magnétiques et les autres propriétés physiques d'une substance. Nous allons décrire ici quelques effets illustrant le couplage que l'on peut observer entre l'induction magnétique (ou l'aimantation) et les grandeurs thermodynamiques que sont l'entropie, et la température. Dans les deux premières parties de ce chapitre, nous considérons les effets à l'équilibre, et n'abordons qu'en troisième partie les dissipations associées aux effets de domaines.

L'expérience nous a montré, au chapitre 3 (§ 2.1), que l'aimantation spontanée d'une substance ferromagnétique diminue en raison du désordre croissant de ses moments magnétiques, lorsque l'on élève sa température. C'est au voisinage de sa température de Curie que cette variation d'aimantation spontanée est la plus accentuée (fig. 3.8). C'est là aussi que l'aimantation est la plus sensible au champ magnétique appliqué.

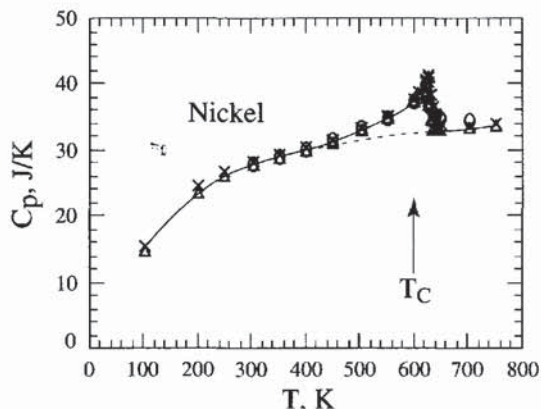
La densité d'énergie d'échange s'écrit, dans le modèle du champ moléculaire (équation 4.41) :

$$E_{\text{éch}} = -(1/2)\mu_0 w M^2 \quad (11.1)$$

et sa variation pour un échauffement  $\Delta T$  est alors :

$$\Delta E_{\text{éch}} = -\mu_0 w M \Delta M \quad (11.2)$$

où  $\Delta M$  est la variation d'aimantation spontanée associée à l'échauffement  $\Delta T$ .



**Figure 11.1 - Variations thermiques de la capacité calorifique molaire du nickel, d'après Ahrens ( $\Delta$ ), Grew (o) et Lapp ( $\times$ ) [1]**

Pour élever de  $\Delta T$  la température de l'échantillon, il a ainsi fallu lui fournir la quantité de chaleur  $\Delta Q$  normale (qu'il aurait fallu lui fournir si l'échantillon n'avait pas été magnétique) augmentée de la quantité  $(\partial E_{\text{éch}}/\partial T) \Delta T$  qui est positive, car  $\partial M/\partial T$  est négative, et qui est maximum à la température de Curie et nulle au-dessus. Ainsi, la chaleur spécifique d'un échantillon ferromagnétique est d'autant plus élevée que l'on s'approche de  $T_C$ .

C'est ce que l'on observe sur la figure 11.1, où sont portées les variations thermiques de la chaleur spécifique du nickel sous faible champ magnétique ( $< 100 \text{ Am}^{-1}$ ) [1].

Toutefois, contrairement aux prédictions théoriques du modèle de champ moléculaire, cette *anomalie de chaleur spécifique* s'étend quelque peu au-dessus de la température de Curie, en raison de l'ordre à courte distance qui persiste entre les moments magnétiques. En effet, un traitement statistique plus rigoureux tenant compte des interactions entre moments magnétiques donnerait pour expression de la contribution magnétique à la chaleur spécifique, dans le modèle d'Heisenberg :

$$C_v^{\text{magn}} = -NzJ_{AB} \frac{\partial}{\partial T} \langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle \quad (11.3)$$

où  $N$  représente le nombre d'atomes magnétiques par unité de volume,  $z$  le nombre de plus proches voisins et  $J_{AB}$  l'intégrale d'échange entre les atomes  $A$  et  $B$ .  $C_v^{\text{magn}}$  apparaît ainsi comme proportionnelle à la dérivée par rapport à la température de la *fonction de corrélation de spins*,  $\langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle$  et est bien maximale à  $T_C$ , puis décroît assez rapidement au-delà.

Bien évidemment, de semblables effets peuvent aussi se produire dans les substances ferri- et antiferromagnétiques, mais il faut noter qu'alors, c'est l'aimantation de chacun des sous-réseaux qui apporte sa contribution à l'énergie d'échange et non pas l'aimantation résultante. Ainsi, pour un ferrimagnétique de type «M» ou «P» (voir le paragraphe 6 du chapitre 4) l'aimantation résultante augmente, à basse température, quand on chauffe la substance, mais ce n'est pas pour cela que nous aurons une contribution négative à la chaleur spécifique. Dans tous les cas, cette contribution présente une allure caractéristique «en lambda», ainsi que l'a montré la figure 3.17 pour la substance antiferromagnétique  $\text{ErGa}_2$ .

## 2. L'EFFET MAGNÉTOCALORIQUE

On désigne ainsi l'échauffement réversible accompagnant le processus de mise en ordre des moments magnétiques d'une substance para- ou ferromagnétique. C'est l'effet inverse de celui que nous venons d'évoquer : contrairement à une augmentation de température, l'augmentation du champ magnétique va réduire le désordre des moments magnétiques. Si le processus est mené de façon adiabatique, donc sans échange de chaleur, l'entropie totale de la substance doit rester constante : la mise en ordre des moments magnétiques sera compensée par un plus grand désordre de l'arrangement atomique, qui se traduira par une augmentation de température, c'est l'*échauffement par aimantation adiabatique*.

Inversement, si une substance a été aimantée à une température donnée puis isolée de son thermostat, la désaimantation adiabatique de cette substance aura pour effet d'abaisser sa température : c'est la technique de *refroidissement par désaimantation adiabatique*, qui permet d'atteindre en théorie des températures très basses.

La description de cet effet peut se faire de façon très simple dans le cadre du champ moléculaire. En effet, la variation d'énergie  $\Delta E_{\text{éch}}$  qui accompagne l'application d'un champ magnétique  $H$  est encore donnée par l'équation (11.2), mais cette fois,  $\Delta M$  est la variation d'aimantation engendrée par  $H$ , et le travail du champ magnétique  $H$  nécessaire pour engendrer cette variation d'aimantation est :

$$\Delta W = \mu_0 H \Delta M \quad (11.4)$$

La chaleur qui résulte de ce processus sera égale à la différence entre le travail fourni par le champ et la variation de l'énergie d'échange :

$$\Delta Q = \mu_0 (H + w M) \Delta M \quad (11.5)$$

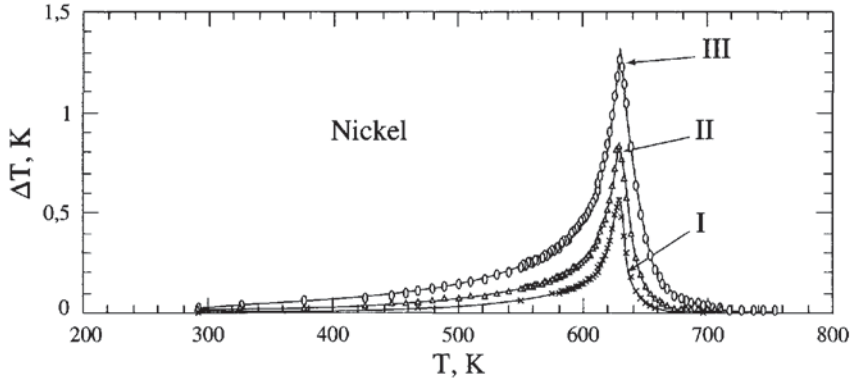
où  $w M$  est le champ moléculaire. Les équations (4.45) et (4.46) nous permettent d'écrire le champ moléculaire *au-dessus de la température de Curie* sous la forme :

$$wM = H T_C / (T - T_C) \quad (11.6)$$

ce qui nous donne finalement pour la chaleur dégagée par le processus d'aimantation dans le domaine paramagnétique :

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{w} \frac{T T_C}{(T - T_C)^2} \Delta(H^2) \quad (11.7)$$

Cette chaleur dégagée élèvera donc la température de l'échantillon d'une quantité proportionnelle,  $\Delta T = \Delta Q / C_M$ . C'est là l'effet magnéto-calorique.  $C_M$  est la chaleur spécifique à aimantation constante, et  $T$  la température initiale de l'échantillon, sous champ magnétique nul. Effectivement, P. Weiss et R. Forrer ont observé et mesuré avec précision cet échauffement dans le cas du nickel ; quelques-uns de leurs résultats sont reportés sur la figure 11.2, et montrent bien qu'au-dessus de  $T_C$ , l'échauffement varie comme le carré du champ magnétique et décroît rapidement avec la température.



**Figure 11.2 - Effet magnétocalorique du nickel, en fonction de la température et du champ**

Le champ magnétique varie de la valeur 0 jusqu'à  $\mu_0 H = 0,6$  T (I), 1 T (II) et 1,78 T (III), d'après [2].

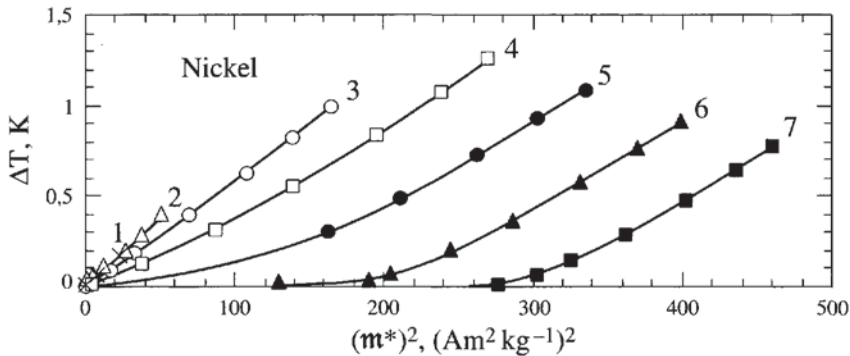
A plus basse température aussi, l'effet diminue quand on s'écarte de  $T_C$ , car l'influence du champ appliqué devient vite négligeable devant le champ moléculaire. Ainsi, l'effet présente un pic en lambda à  $T_C$ .

L'équation (11.7) peut encore s'exprimer en fonction de l'aimantation, à l'aide de l'équation (11.6). On trouve alors *au-dessus de la température de Curie* :

$$\Delta T = (1/2C_M) \mu_0 w \Delta(M^2) (T/T_C) \quad (11.8)$$

*En dessous de la température de Curie*, où le champ magnétique appliqué  $H$  devient négligeable devant le champ moléculaire, l'équation (11.5) donne simplement :

$$\Delta T = (1/2C_M) \mu_0 w \Delta(M^2) \quad (11.9)$$



**Figure 11.3 - Effet magnétocalorique du nickel, en fonction du carré du moment magnétique spécifique  $m^*$  à différentes températures, d'après [2]**

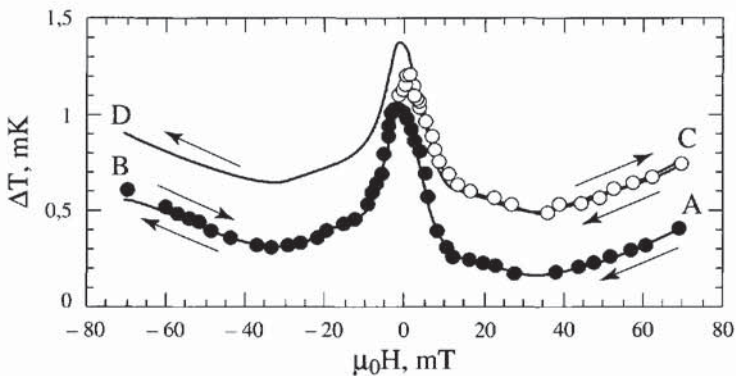
$T = 660,65$  K (1),  $653,3$  K (2),  $638,51$  K (3),  $629,42$  K (4),  $625,68$  K (5),  $621,93$  K (6),  $618,17$  K (7). Le nickel est un matériau très doux : dans le domaine d'ordre, et à l'échelle considérée, il n'y a pas d'échauffement notable lors des processus d'aimantation technique (déplacement de parois et rotation). On constate que  $\Delta T$  reste pratiquement nul jusqu'à ce que l'aimantation atteigne  $M_S$  (aimantation spontanée) et ne commence à croître que lorsque le champ interne devient non nul.

Weiss et Forrer ont aussi reporté l'effet magnétocalorique en fonction du carré de l'aimantation, et trouvé au-delà de la saturation un réseau de droites parallèles à basse température (courbes 7 à 4), puis de plus en plus relevées (courbes 3 à 1) lorsque l'on élève la température au-dessus de  $T_C$ , comme on le voit sur la figure 11.3.

### 3. EFFETS THERMIQUES IRRÉVERSIBLES

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que les gros effets thermiques réversibles liés aux variations d'entropie qui accompagnent les modifications de l'aimantation spontanée dans des matériaux ferromagnétiques très doux au voisinage de  $T_C$ . Avec des matériaux plus durs, présentant une hystérésis notable, un cycle complet d'aimantation sera accompagné d'un effet magnétocalorique réversible auquel viendra se superposer l'échauffement lié aux pertes d'hystérésis.

La figure 11.4 montre le résultat obtenu avec un échantillon de fer : ici, l'échauffement est porté en fonction du champ magnétique appliqué ; il est bien plus faible que sur la figure 11.2 car d'une part les champs appliqués sont plus faibles et d'autre part, l'étude est menée loin en-dessous de la température de Curie.



**Figure 11.4 - Effets magnétothermiques accompagnant un cycle d'hystérésis sur un échantillon de fer polycristallin à 300 K**

On observe la superposition de l'effet magnétocalorique réversible et d'un échauffement irréversible lié aux pertes par hystérésis [3]. L'échauffement est environ 0,2 mK pour chaque demi-cycle (passage du point A à B, de B à C, et ainsi de suite).

L'effet magnétocalorique normal s'observe bien pour des champs magnétiques supérieurs à  $\mu_0 H = 30$  mT, mais on notera un refroidissement adiabatique lors du processus d'aimantation dans la zone 0-30 mT. Cet effet anormal s'explique par le fait qu'à champ faible commence à se produire une rotation réversible de l'aimantation spontanée qui s'écarte des directions de facile aimantation : la distribution angulaire des moments magnétiques qui en résulte est plus ouverte qu'en l'absence de champ magnétique, et correspond donc à une augmentation de l'entropie du

système qui nécessite l'absorption de chaleur que l'on observe à champ faible ; une analyse détaillée de cet effet peut se trouver par exemple dans l'ouvrage de S. Chikazumi [4]. Enfin, une dissipation de chaleur *irréversible* se produit à faible champ ( $\pm 5$  mT) dans la zone des déplacements irréversibles de parois. L'échauffement total de l'échantillon au cours d'un cycle d'hystérésis correspond à la distance AC ou BD sur la figure 11.4. Il est dû aux *pertes par hystérésis*.

On peut évaluer ces pertes en mesurant l'aire du cycle d'hystérésis  $\mu_0 \mathbf{m}(H)$ . En effet, considérons une particule ferromagnétique ellipsoïdale très allongée de moment magnétique  $\mathbf{m}$ , placée au centre d'un solénoïde parcouru par un courant suffisant pour saturer l'échantillon et orientée suivant son axe. Nous pouvons alors négliger son champ démagnétisant. Dans cette situation, l'aimantation de la particule correspond au point A du cycle d'hystérésis (figure 11.5).

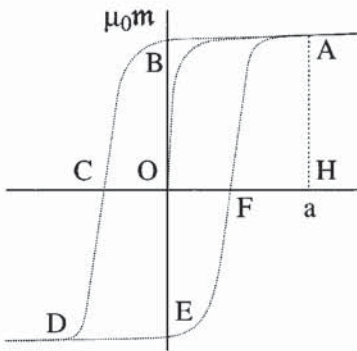


Figure 11.5  
Cycle d'hystérésis

Extrayons la particule du solénoïde et portons-la le long de son axe jusqu'en un point où le champ magnétique peut être considéré comme nul (point B du cycle). Nous retournons alors la particule de  $180^\circ$ , ce qui n'exige aucun travail (car  $H$  est nul), puis nous ramenons la particule au centre du solénoïde (point D du cycle). Au passage, l'aimantation se sera annulée en un point C du cycle. Une deuxième extraction loin du solénoïde nous mène au point E du cycle, et après un second retournement, l'échantillon revient à la situation initiale (point A) après avoir vu son aimantation inversée une seconde fois en F.

La force magnétique exercée sur la particule ferromagnétique est nulle au centre et à grande distance du solénoïde, mais durant son trajet entre ces deux positions d'équilibre, la particule est sollicitée par une force  $F_x = \mathbf{m}_x \partial B / \partial x$ , en prenant pour axe des  $x$  l'axe du solénoïde. Le travail fourni à la particule pour la déplacer de  $dx$  s'écrit :  $dW = F_x dx$ , soit  $dW = \mu_0 \mathbf{m} dH$ . Ainsi, le travail fourni pour déplacer la particule du centre du solénoïde vers l'infini c'est-à-dire le travail magnétique fourni pour passer de A en B, est égal à :

$$W = \int_H^0 \mu_0 \mathbf{m} dH = - \int_0^H \mu_0 \mathbf{m} dH = - (\text{Aire OaAB}).$$

On voit aisément que lorsque l'on a parcouru un cycle complet, le travail fourni total est nul si la substance ne présente aucune hystérésis, et est égal à l'aire du cycle dans le cas d'une substance réelle. Ce travail fourni est entièrement transformé en chaleur, puisque le système est revenu à son état initial. C'est là l'origine de l'échauffement observé sur la figure 11.4.

## 4. EFFETS DIMENSIONNELS ASSOCIÉS À L'EFFET MAGNÉTOCALORIQUE

Un corps solide se dilate généralement lorsqu'il s'échauffe. L'effet magnéto-calorique peut donc s'observer aussi par des techniques dilatométriques. La figure 11.6 montre par exemple l'allongement relatif observé près de  $T_C$  sur une sphère ferromagnétique. Cet allongement, donné en fonction du temps, est la réponse à un échelon de champ magnétique. On observe un allongement important au moment de l'application du champ, suivi d'un raccourcissement qui est fonction exponentielle du temps.

La sphère reste déformée après avoir atteint son état d'équilibre thermique : cette déformation permanente s'appelle la *magnétostriction* et sera traitée au chapitre suivant. Au moment où le champ magnétique est supprimé, on observe à nouveau une forte contraction, puis une plus faible dilatation qui ramène exponentiellement la sphère à sa dimension initiale. Les dérivées thermiques exponentielles consécutives à l'application puis à la suppression du champ correspondent en fait à la thermalisation progressive de l'échantillon, qui est solidaire d'un porte-échantillon massif jouant le rôle d'un thermostat. OA'BC' représente le signal isotherme (effet de magnétostriction), tandis que OA et BC représentent les signaux obtenus en conditions adiabatiques. Les longueurs A'A et CC' qui sont données par  $(\partial l/l)_A - (\partial l/l)_B$  représentent la contribution de l'effet magnéto-calorique à l'allongement.

Connaissant le coefficient de dilatation thermique linéaire  $\alpha_T$  de la substance, il est alors possible d'en déduire l'effet magnéto-calorique :

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha_T} \left[ \left( \frac{\delta l}{l} \right)_A - \left( \frac{\delta l}{l} \right)_B \right] \quad (11.10)$$

La figure 11.7 [5] montre les variations de l'effet magnéto-calorique de GdZn mesurées par cette technique indirecte en fonction de  $T - T_C$ , pour un champ appliqué  $\mu_0 H = 0,2$  T. On constate toujours la même allure avec un pic en lambda situé au voisinage de la température de Curie.

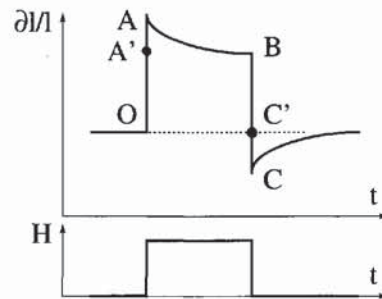


Figure 11.6 - Allongement consécutif à l'application d'un créneau de champ magnétique

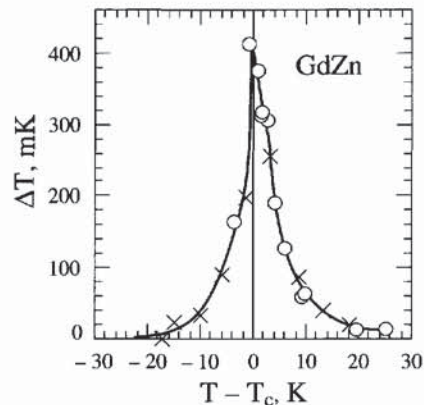


Figure 11.7 - Variations thermiques de l'effet magnéto-calorique d'un monocristal de GdZn déduites de mesures dilatométriques. Mesures effectuées selon [111] : × et selon [001] : o [5]

Cet effet est isotrope, à la précision des mesures près : les échauffements sont les mêmes qu'ils aient été mesurés selon la direction [100] ou selon la direction [111].

## 5. APPLICATION DES EFFETS MAGNÉTOETHERMIQUES

L'application technique la plus évidente de la thermodynamique des milieux magnétiques est le refroidissement. Nous avons déjà mentionné, et développons dans l'exercice 2, l'utilisation de la suppression adiabatique de champ comme moyen d'obtenir un refroidissement de matériaux paramagnétiques dans la gamme des basses températures ( $< 1$  K) en utilisant du nitrate de cérium et de magnésium.

Il est fortement question, depuis quelques années, d'utiliser des cycles magnétiques basés sur des matériaux tels que le gadolinium au voisinage de la température ambiante ou, pour le refroidissement dans une gamme plus large de températures ( $30 \text{ K} < T < 290 \text{ K}$ ), les composés du type  $\text{Gd}_5(\text{Si-Ge})_4$  [6]. Les nanomatériaux, mettant à profit le superparamagnétisme de petits agrégats, semblent de bons candidats pour ce genre d'application [7].

## EXERCICES

### E.1 Effet magnétocalorique : relations générales

On considère un échantillon de matériau magnétique, dans lequel la susceptibilité est suffisamment faible, ou la forme suffisamment bien choisie, pour que l'on puisse négliger le champ démagnétisant.

On se désintéressera des effets de volume, et il sera donc commode de travailler sur l'unité de volume. On appellera  $s$  l'entropie volumique du matériau,  $c_H$  sa chaleur spécifique volumique à champ  $H$  constant.

**E.1.1** - Préciser quelle(s) forme(s) d'échantillon pourrai(en)t permettre de négliger le champ démagnétisant même si l'échantillon avait une grande susceptibilité. On précisera éventuellement dans quelle direction il faudrait alors appliquer le champ magnétique.

**E.1.2** - En utilisant le principe de Nernst, qui dit que l'entropie tend vers 0 lorsque la température tend vers 0 K, déterminer :

- ◆ la limite, pour  $T \rightarrow 0$ , de  $(\partial s / \partial H)_T$
- ◆  $\lim (\partial M / \partial T)_H$  pour  $T \rightarrow 0$ .
- ◆ Cette relation est-elle satisfaite dans le cas particulier d'un paramagnétique parfait, défini comme un matériau obéissant à la loi de Curie  $M = \mathcal{C}H/T$  ?  
Qu'en concluez-vous sur la validité de la loi de Curie (équation 4.23) ?

**E.1.3** ♦ Pour une variation infinitésimale de champ, pratiquée de façon quasi-statique sur un échantillon thermiquement isolé, déterminer l'expression de la variation de température résultante.

- ♦ On voudrait déterminer la variation isotherme d'entropie due à l'application d'un champ magnétique  $\Delta s = s(H, T) - s(0, T)$  sans faire appel à la calorimétrie, et en utilisant uniquement des mesures magnétiques. Indiquer clairement comment  $\Delta s$  peut être déterminé graphiquement à partir des courbes d'aimantation isothermes mesurées à deux températures  $T_1$  et  $T_2$  proches de  $T$ .

## **E.2 Refroidissement aux très basses températures par «désaimantation adiabatique»**

Dans le domaine des très basses températures (typiquement entre quelques mK et 1 K), le nitrate de cérium et de magnésium (CMN pour abrégé) se comporte comme un paramagnétique parfait, de constante de Curie  $\mathcal{C} = 1,08 \cdot 10^{-2}$  K.

Sa chaleur spécifique de réseau est négligeable dans cette gamme de température, et la chaleur spécifique est presque uniquement associée à la contribution magnétique.

En champ nul, la chaleur spécifique à champ magnétique constant a alors la forme  $c(T, 0) = A/T^2$ , avec  $A = 0,137$  J.K m<sup>-3</sup>.

**E.2.1** - Calculer numériquement le rapport  $c(T, H)/c(0, 0)$  pour  $T = 1,0$  K et un champ  $B = \mu_0 H = 0,45$  T. On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  MKSA.

**E.2.2** ♦ Déterminer l'expression différentielle de la variation de la température d'un échantillon de CMN lorsqu'on le soumet à une désaimantation adiabatique quasi-statique. Cette opération consiste à réduire (pas trop vite) le champ appliqué, l'échantillon étant thermiquement isolé.

- ♦ Déterminer numériquement la température finale  $T_f$  pour un champ initial  $B_i = \mu_0 H_i = 0,45$  T et une température initiale  $T_i = 1,0$  K, le champ final étant nul.

**E.2.3** - On ne supprime pas complètement le champ magnétique, mais on arrête l'opération à une valeur  $H_f$  telle que l'on puisse négliger la contribution  $A/T_f^2$  à la chaleur spécifique.

Déterminer le rapport  $M_i/M_f$  de l'aimantation initiale, dans un champ  $H_i$ , et de l'aimantation finale, dans le champ  $H_f$ , que l'on obtient dans ces conditions (de processus quasi-statique et d'échantillon isolé thermiquement).

Avez-vous une remarque à faire sur la terminologie de «désaimantation adiabatique» utilisée ?

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1 S.1.1** Long cylindre, parallèle à l'axe ; ou plaque mince, parallèle à la surface. On assimile dès lors dans la suite  $H_0$  et  $H$ . On suppose par ailleurs qu'ils sont colinéaires, et on travaille donc sur des scalaires.

**S.1.2** ♦ Le principe de Nernst indique que  $s \rightarrow 0$  pour  $T \rightarrow 0$  indépendamment de  $H$ . Donc  $\lim(\partial s / \partial H)_{T \rightarrow 0} = 0$ . Ceci entraîne qu'on ne peut pas atteindre 0 K par désaimantation adiabatique (pas plus que par d'autres moyens).

♦ Les variables naturelles étant  $T$  et  $H$ , on essaie :

$$df(T, H) = -s dT - \mu_0 M dH.$$

La relation de Maxwell donne  $(\partial M / \partial T)_H = (1 / \mu_0) (\partial s / \partial H)_T$ . La limite est donc également 0 pour  $T \rightarrow 0$ .

♦ Non. La loi de Curie ne peut pas rester valable jusqu'aux températures très basses. Elle implique en effet que les interactions entre moments sont négligeables, ce qui veut dire négligeables par rapport à  $k_B T$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

$$\text{S.1.3} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_S = -\mu_0 \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial S} \right|_H = -\mu_0 \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial T} \right|_H \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_H = -\frac{\mu_0 T}{C_H} \left. \frac{\partial m_{//}}{\partial T} \right|_H$$

d'après (10.16).

♦ La relation  $(\partial s / \partial H)_T = \mu_0 (\partial M / \partial T)_H$  entraîne que :

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(H, T) - s(0, T) = \mu_0 \int_0^H (\partial M / \partial T)_H dH = \mu_0 \int_0^H (\Delta M / \Delta T)_H dH \\ &= \frac{\mu_0}{T_2 - T_1} \int_0^H [M(T_2, H) - M(T_1, H)] dH = \frac{\mu_0}{T_2 - T_1} \left\{ \int_0^H [M(T_2, H)] dH - \int_0^H [M(T_1, H)] dH \right\} \end{aligned}$$

Le terme entre accolades est l'aire, en diagramme  $(M, H)$ , entre les courbes d'aimantation isotherme  $M(H)$  mesurées aux températures  $T_1$  et  $T_2$ .

**S.2 S.2.1**  $c(T, H) = T (\partial s / \partial T)_H$ , d'où :

$$(\partial c / \partial H)_T = T (\partial^2 s / \partial H \partial T) = \mu_0 T (\partial^2 M / \partial T^2)_H.$$

On en déduit :  $c(T, H) / c(T, 0) = 1 + \mathcal{C} B^2 / A \mu_0 = 1,27 \cdot 10^{-4}$  (énorme).

$$\text{S.2.2} \quad \delta T = T \mathcal{C} B \delta B / \{A \mu_0 + \mathcal{C} B^2\}$$

$$\diamond T_f = T_i / \sqrt{1 + \mathcal{C} B^2 / A \mu_0} = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

$$\text{S.2.3} \quad T_f / T_i = B_f / B_i = H_f / H_i, \text{ d'où : } M_i / M_f = 1.$$

On ne désaimante pas vraiment !

## RÉFÉRENCES

- [1] P. PASCAL, *Nouveau traité de chimie minérale* (1963) Masson Ed., Paris, tome XVII, 588.
- [2] P. WEISS et R. FORRER, *Ann. de Phys.* (1926) **V**, 153.
- [3] T. OKAMURA, *Sci. Rept. Tohoku Univ.* (1935) **24**, 745.
- [4] S. CHIKAZUMI, *Physics of Magnetism*, (1964) Wiley & sons, New York.
- [5] J. ROUCHY, P. MORIN, E. du TRÉMOLET de LACHEISSERIE, *J. Magn. Magn. Mater.* (1981) **23**, 59.
- [6] V.K. PECHARSKY, A. GSCHNEIDNER, JR. *Appl. Phys. Lett.* (1997) **70**, 3299.
- [7] R.D. MCMICHAEL, R.D. SHULL, L.J. SWARTZENDRUBER, L.H. BENNETT, R.E. WATSON, *J. Magn. Magn. Mater.* (1992) **111**, 29.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# CHAPITRE 12

## LES EFFETS MAGNÉTOÉLASTIQUES

Dans une substance magnétique, les distances interatomiques peuvent varier avec l'intensité et l'orientation de l'aimantation : c'est le phénomène de magnétostriction, ou effet magnétoélastique direct. Inversement, l'état magnétique de cette substance est sensible à toute sollicitation mécanique : un cycle d'hystérésis, par exemple, se déforme sous l'effet d'une contrainte mécanique, on parle alors d'effet magnétoélastique inverse. Ce chapitre est consacré à la présentation du couplage magnétoélastique et des effets associés ; les matériaux et leurs applications industrielles seront décrits au chapitre 18.

### 1. LES PRINCIPAUX EFFETS MAGNÉTOÉLASTIQUES

#### 1.1. ANOMALIE DE DILATATION

##### MAGNÉTOSTRICITION SPONTANÉE ET FORCÉE D'ÉCHANGE

Les interactions d'échange sont sensibles à la distance interatomique, ce qui engendre un couplage entre le paramètre d'ordre  $\langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \rangle$  et les dimensions d'une substance magnétique. Ce couplage magnétoélastique engendre une magnétostriction d'échange, déformation spontanée qui s'observe en-dessous de la température d'ordre.

Ainsi, la figure 12.1 montre les variations thermiques du paramètre de maille du nickel. Au-dessus de  $T_C = 631$  K, le comportement est normal et permet, par extrapolation, de définir la valeur du paramètre de maille  $a^*$  que présenterait le nickel à 0 K s'il n'était pas magnétique. On observe une anomalie de dilatation thermique vers  $T_C$ , et une diminution relative de la maille qui atteint à basse température  $(a_0 - a^*)/a^* = -4 \times 10^{-4}$ , comme nous l'avons déjà noté avec le composé  $\text{GdAl}_2$  (figure 3.19). Cette déformation n'abaisse pas la symétrie du matériau et se traduit donc, dans le cas des substances isotropes ou de symétrie cubique, par une simple variation de volume.

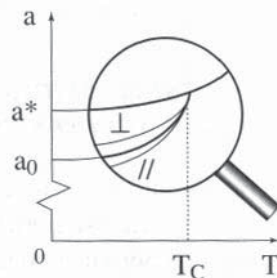


Figure 12.1  
La magnétostriction  
du nickel (§ 1.1 et 1.4)

Dans les matériaux de plus basse symétrie, des déformations anisotropes peuvent également se produire (par exemple une variation du rapport  $c/a$  dans les matériaux de symétrie hexagonale ou quadratique).

Une magnétostriction d'échange positive peut parfois présenter une variation thermique exactement opposée à la dilatation thermique normale de la substance : le matériau présente alors une dilatation thermique nulle par compensation, c'est l'*effet INVAR* découvert par C.E. Guillaume en 1896 sur des alliages de fer et de nickel.

La magnétostriction d'échange présente, dans le domaine d'ordre, une faible dépendance linéaire vis-à-vis du champ magnétique, qui s'appelle *magnétostriction forcée isotrope*.

### **1.2. INFLUENCE DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES**

Si les interactions d'échange sont à l'origine de la magnétostriction en volume, une pression hydrostatique aura inversement pour effet de modifier ces interactions d'échange et par conséquent la température de Curie et le moment magnétique (dans certains cas). Toutefois, ces variations sont généralement très faibles.

### **1.3. ANOMALIES SUR LES CONSTANTES ÉLASTIQUES : EFFET MORPHIQUE**

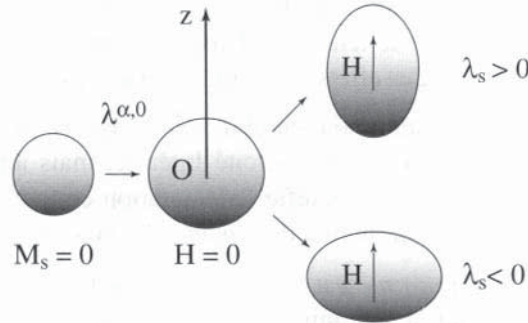
Le couplage magnétoélastique d'échange est encore responsable de certaines anomalies dans les variations thermiques des coefficients d'élasticité (figure 3.20). En dessous de la température d'ordre, il apparaît une contribution magnétique à chacune des constantes élastiques (*effet morphique*). Quand cette contribution est négative, ses variations thermiques peuvent contrebalancer les variations thermiques normales du coefficient d'élasticité, et la résultante est alors indépendante de la température sur une certaine gamme de température : c'est l'effet ELINVAR, mis à profit vers 1920 par C.E. Guillaume pour l'horlogerie de précision. L'étude détaillée de cet effet dépasse le cadre de cet ouvrage.

### **1.4. MAGNÉTOSTRICION ANISOTROPE FORTEMENT SENSIBLE AU CHAMP MAGNÉTIQUE**

Si l'on examine à la loupe la courbe de dilatation du nickel pur (figure 12.1), on constate qu'elle est *sensible à l'application d'un champ magnétique extérieur* : ce dernier engendre une contraction supplémentaire ( $-36 \times 10^{-6}$  à 300 K après saturation) selon la direction d'application du champ ( $//$ ) et une dilatation deux fois plus faible ( $+18 \times 10^{-6}$  à 300 K) dans le plan perpendiculaire au champ ( $\perp$ ), d'où le nom de *magnétostriction anisotrope* donné à cet effet, qui fut découvert en 1842 par *Joule* sur une tige de fer.

Les deux effets de magnétostriction que nous venons d'introduire peuvent être illustrés par la figure 12.2 : par rapport à l'état fictif qui serait le sien s'il n'était pas magnétique ( $M_s = 0$ ), un échantillon sphérique et isotrope subit une variation relative de volume  $\delta V/V = \lambda^{\alpha,0}$  dès qu'il est magnétique ; cet effet existe même si l'échantillon est désaimanté, et donc divisé en domaines de Weiss ( $H = 0$ ).  $\lambda^{\alpha,0}$  est le *coefficient de magnétostriction en volume*.

**Figure 12.2**  
Les deux modes principaux  
de magnétostriction observables  
avec une substance isotrope



A cette variation de volume s'ajoute, quand on applique un champ magnétique  $\mathbf{H} // Oz$ , une déformation anisotrope qui transforme la sphère en ellipsoïde de révolution autour de  $Oz$  et se produit à *volume constant* : la variation relative de longueur mesurée selon la direction du champ est désignée par  $\lambda_{//}$  et celle que l'on observe selon toute direction perpendiculaire à  $Oz$  est notée  $\lambda_{\perp}$ . Si l'état désaimanté de départ est isotrope, on observe que  $\lambda_{//} = -2\lambda_{\perp} = \lambda_s$  après saturation technique, ce qui définit la constante de magnétostriction à saturation  $\lambda_s$  de la substance isotrope. On vérifie que la variation de volume est nulle, car  $\lambda_{//} + 2\lambda_{\perp} = 0$ . Selon que la constante  $\lambda_s$  est positive ou négative, la sphère devient un ellipsoïde allongé ou aplati. Avant la saturation technique, la magnétostriction anisotrope est très sensible au champ magnétique ; après saturation, on observe parfois une faible variation sous champ de  $\lambda_s$ , c'est la *magnétostriction forcée anisotrope*  $\partial\lambda_s/\partial H$ , souvent bien inférieure à la magnétostriction forcée isotrope,  $\partial\lambda^{\alpha,0}/\partial H$ , déjà mentionnée au § 1.1.

### 1.5. INFLUENCE D'UNE CONTRAINTE UNIAXIALE SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES

Une contrainte uniaxiale exercée sur une substance magnétique va engendrer une anisotropie selon la direction  $Oz$  d'application de la contrainte, et la perméabilité initiale s'en trouvera affectée : c'est là l'effet inverse de la magnétostriction anisotrope de Joule. Selon les signes respectifs de la contrainte (tension ou compression) et de  $\lambda_s$ , les moments magnétiques tendront à s'orienter parallèlement ou bien perpendiculairement à  $Oz$ . Cet effet joue un rôle primordial sur les performances des matériaux magnétiques : dans la plupart des cas, il s'agit d'un effet néfaste car il réduit généralement la perméabilité magnétique, ce qui est très fâcheux dans le cas des matériaux doux, mais il est parfois mis à profit pour réaliser des capteurs de contraintes comme nous le verrons au chapitre 18.

## 1.6. AUTRES EFFETS MAGNÉTOÉLASTIQUES

- ◆ Citons d'abord une variante de la magnétostriction de Joule, que l'on observe quand on applique à un barreau ou un fil ferromagnétique un champ magnétique hélicoïdal. Il en résulte une torsion de l'échantillon, c'est l'*effet Wiedemann*.
- ◆ Inversement, si l'on exerce un couple de torsion sur une tige aimantée uniformément selon son axe, l'aimantation dévie de cet axe, c'est l'*effet Wiedemann inverse*, et une tension électrique apparaît aux extrémités de la tige, c'est l'*effet Matteuci*. Ces effets sont mis à profit dans de nombreux capteurs.
- ◆ En appliquant une contrainte sur un barreau ferromagnétique, on le déforme en vertu des lois de l'élasticité linéaire, mais aussi – par effet magnétoélastique inverse – on en modifie l'aimantation ce qui induit une magnétostriction : il y aura alors diminution du module d'Young apparent ; c'est là l'*effet  $\Delta E$* .
- ◆ L'*effet de forme* est une magnétostriction  $\lambda^F(M^2)$ , inhomogène même lorsque l'aimantation est uniforme, qui vient se superposer aux deux modes principaux déjà introduits ( $\lambda^{\alpha,0}$  et  $\lambda_s$ ). Cet effet existe dans tout matériau magnétique, même si ses coefficients de magnétostriction sont tous nuls : il traduit simplement la tendance à minimiser la somme des énergies magnétostatique et élastique.
- ◆ Enfin, le *piézomagnétisme* est un effet linéaire en champ, donc impair contrairement à la magnétostriction de Joule qui est un effet pair (fonction paire des cosinus directeurs de l'aimantation). Il s'agit là d'un effet que l'on rencontre parfois dans certaines substances antiferromagnétiques.

## 2. ORIGINE MICROSCOPIQUE DU COUPLAGE MAGNÉTOÉLASTIQUE

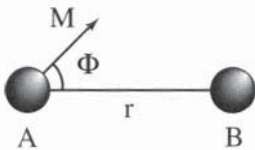


Figure 12.3 - Paire d'atomes et aimantation M

Les effets que nous venons de présenter peuvent s'expliquer par le modèle très simple développé par Néel [1] dans le cadre du ferromagnétisme des électrons localisés : les interactions (isotropes et anisotropes) responsables du magnétisme sont supposées ne dépendre que de la direction de l'aimantation et de la distance  $r$  entre deux atomes en interaction. En

raison de la symétrie du problème (figure 12.3), l'énergie d'interaction d'une paire d'atomes A et B peut se développer en série de polynômes de Legendre :

$$\mathcal{E}_{AB}(r, \phi) = f(r) + g(r) \left( \cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right) + h(r) \left( \cos^4 \phi - \frac{6}{7} \cos^2 \phi + \frac{3}{35} \right) + \dots \quad (12.1)$$

où  $\phi$  est l'angle que fait l'aimantation avec la paire AB.

La première contribution, isotrope, n'est autre que l'*interaction d'échange d'Heisenberg*. Les autres contributions décrivent des *interactions d'échange anisotropes et*

de champ cristallin. Les fonctions  $f(r)$ ,  $g(r)$ ,  $h(r)$  ... sont rapidement décroissantes avec la distance ; le cas particulier de l'interaction dipolaire qui ne décroît qu'en  $1/r^3$  sera traité à part au § 4.7. En sommant (12.1) sur tous les proches voisins de chaque atome, dans un solide magnétique déformé, on obtient l'expression de l'énergie de couplage magnéto-élastique. Nous allons commencer par le terme isotrope qui est le plus simple à traiter.

### 2.1. COUPLAGE MAGNÉTOÉLASTIQUE D'ÉCHANGE ISOTROPE

L'énergie de couplage magnétoélastique d'échange se calcule en sommant sur tous les proches voisins l'interaction d'échange isotrope qui correspond au premier terme du développement (12.1) :

$$\mathcal{E}_{\text{éch}} = f(r) = -J_{AB}(r) \langle \mathbf{S}_A \mathbf{S}_B \rangle \quad (12.2)$$

On admet que la contribution des voisins plus éloignés est négligeable, ce qui est réaliste car il s'agit d'une interaction à courte portée.  $J_{AB}$  est l'intégrale d'échange d'Heisenberg relative à une paire d'atomes premiers proches voisins distants de  $r$ . Pour les substances ferromagnétiques,  $J_{AB}$  est positive. L'expression (12.2) est scalaire et n'est fonction que de  $r$ . Dans un cristal de symétrie cubique déformé, on trouve alors pour la densité d'énergie magnétique :

$$\begin{aligned} E_{\text{magn}} &= -NzJ_{AB}(r) \langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle \\ &= -Nz \left[ (J_{AB})_0 + r_0 \left( \frac{\partial J_{AB}}{\partial r} \right)_0 \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V_0} + \frac{1}{2} r_0^2 \left( \frac{\partial^2 J_{AB}}{\partial r^2} \right)_0 \left( \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V_0} \right)^2 \right] \langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle \end{aligned} \quad (12.3)$$

où  $N$  représente le nombre d'atomes par unité de volume,  $z$  le nombre de proches voisins, et  $r_0$  la distance interatomique que l'on aurait observée en l'absence de magnétisme. On sait que la densité d'énergie élastique est une fonction quadratique de  $(\delta V/V_0)$  et s'écrit en introduisant la compressibilité du matériau  $\kappa = 3/c^\alpha$  :

$$E_{\text{él}} = \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\delta V}{V_0} \right)^2 = \frac{c^\alpha}{6} \left( \frac{\delta V}{V_0} \right)^2 = \frac{c_{11} + 2c_{12}}{6} \left( \frac{\delta V}{V_0} \right)^2 \quad (12.4)$$

où les  $c_{ij}$  ( $c^\alpha$ ) sont des constantes élastiques (voir annexe en fin de chapitre).

Le troisième terme de (12.3), en  $(\delta V/V_0)^2$ , représente donc une contribution magnétique aux constantes élastiques : c'est l'une des composantes de l'effet morphique que nous ne détaillerons pas ici. Il s'agit en effet d'un problème délicat qui fait appel à la théorie des déformations finies et des tenseurs d'élasticité de Lagrange ; pour plus de détails sur cet effet, le lecteur pourra se reporter à la référence [2]. En négligeant la faible contribution magnétique aux  $c_{ij}$ , et en minimisant la somme  $E_{\text{él}} + E_{\text{magn}}$  vis-à-vis de  $\delta V/V_0$ , on calculera aisément la magnétostriction en volume qui sera traitée au paragraphe 3.

## 2.2. COUPLAGE MAGNÉTOÉLASTIQUE ANISOTROPE

Ce couplage provient d'interactions anisotropes et à courte portée, d'origine magnétique et électrostatique : échange anisotrope (couplage pseudo-dipolaire et multipolaire), effets de champ cristallin électrique qui, tous, sont des fonctions rapidement variables de la distance entre les porteurs de moments magnétiques. Ces énergies d'interaction seront sensibles à l'orientation des moments vis-à-vis des axes cristallins, à la différence de l'énergie d'échange.

### 2.2.1. Principe du calcul de l'énergie de couplage

L'expression de la densité d'énergie de couplage magnétoélastique anisotrope s'obtient, au premier ordre, en sommant le second terme de l'équation (12.1) :

$$E_{\text{anis}} = [g(r_0) + (\partial g / \partial r)_{r_0} \delta r + \dots] \{(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)^2 - 1/3\} + \dots \quad (12.5)$$

sur les proches voisins de chaque atome dans un matériau déformé. Ici, la déformation est anisotrope et ne se résume plus à une simple variation de la distance interatomique, donc du volume, mais doit être décrite par le tenseur des déformations élastiques  $\epsilon_{ij}$ , défini en appendice à la fin de ce chapitre.

**Attention :** on trouve encore trop souvent dans la littérature la déformation décrite par les composantes de Voigt ( $e_{ii} = \epsilon_{ii}$ ,  $e_{ij} = 2 \epsilon_{ij}$ ). Les  $e_{ij}$  ne forment pas un tenseur, comme l'ont déjà souligné avec force dès 1963 Callen *et al.* [3].

Dans l'équation (12.5), les  $\alpha_i$  représentent les cosinus directeurs de l'aimantation et les  $u$ ,  $v$ , et  $w$ , ceux de la liaison AB (figure 12.3), repérés *après* déformation par rapport à un référentiel défini sur le matériau non déformé.  $\delta r$ ,  $u$ ,  $v$ , et  $w$  s'expriment au premier ordre en fonction des déformations  $\epsilon_{ij}$  et des  $\beta_i$ , cosinus directeurs de la liaison AB repérés *avant* déformation par rapport au même référentiel :

$$\delta r = r_0 \{ \epsilon_{xx} \beta_1^2 + 2\epsilon_{yz} \beta_2 \beta_3 + \text{permut. circ.} \} \quad (12.6)$$

$$u = \beta_1 [1 + \epsilon_{xx} (1 - \beta_1^2) - \epsilon_{yy} \beta_2^2 - \epsilon_{zz} \beta_3^2 - 2\epsilon_{yz} \beta_2 \beta_3] \\ + \epsilon_{zx} \beta_3 (1 - 2\beta_1^2) + \epsilon_{xy} \beta_2 (1 - 2\beta_1^2) - \omega_{zx} \beta_3 + \omega_{xy} \beta_2 \quad (12.7)$$

$v$  et  $w$  se déduisent de  $u$  par permutation circulaire. Les  $\omega_{ij}$  sont les composantes de la rotation infinitésimale, que nous ignorerons dans ce qui suit. Les effets rotationnels n'interviennent qu'au second ordre, pour calculer le couple d'anisotropie [4] ou décrire les effets magnétoélastiques d'ordre supérieur [2] qui proviennent des termes (...) que nous avons ignorés dans l'équation (12.5).

### 2.2.2. Application au cas de la symétrie cubique

En sommant l'équation (12.5), compte tenu de (12.6) et de (12.7), sur des cristaux de symétrie cubique simple, centrée et à faces centrées, l'énergie de couplage magnétoélastique anisotrope, limitée au second degré en  $\alpha_i$ , s'écrit dans tous les cas, par unité de volume :

$$E_{\text{mél}} = B_1 \epsilon_{xx} (\alpha_1^2 - 1/3) + 2 B_2 \epsilon_{yz} \alpha_2 \alpha_3 + \text{permut. circ.} \quad (12.8)$$

$B_1$  et  $B_1$  sont appelés coefficients de couplage magnétoélastique anisotrope. Le tableau 12.1 montre le résultat de ce calcul, pour ces trois symétries ;  $N$  représente le nombre d'atomes magnétiques par unité de volume,  $g = g(r_0)$ ,  $g' = r_0(\partial g / \partial r)_0$  [1].

**Tableau 12.1 - Coefficients de couplage magnétoélastique pour les trois symétries cubiques, calculés dans le modèle des paires**

	c.s.	c.c.	c.f.c.
$B_1 = B^{\gamma,2}$	$N.g'$	$(8/3) N.g$	$3 N.g + (1/2) N.g'$
$B_2 = B^{\varepsilon,2}$	$2 N.g$	$(8/9) \{N.g + N.g'\}$	$2 N.g + N.g'$

Ici encore, en minimisant la somme des densités d'énergie élastique et magnétoélastique, on trouvera l'expression de la magnétostriction. Toutefois, l'expression de l'énergie élastique en fonction des  $\varepsilon_{ij}$  n'est pas diagonale, et il est plus simple d'adopter la notation symétrisée de Callen qui diagonalise l'énergie élastique, en introduisant des *modes propres* de déformation (voir l'appendice en fin de chapitre).

### 3. NOTATION SYMÉTRISÉE DE CALLEN [3]

Utilisant l'identité remarquable :

$$ax + by + cz \equiv \frac{2}{3} \left( c - \frac{a+b}{2} \right) \left( z - \frac{x+y}{2} \right) + \frac{1}{2} (a-b)(x-y) + \frac{1}{3} (a+b+c)(x+y+z) \quad (12.9)$$

on peut transformer le premier terme de l'équation (12.8) et écrire ainsi l'expression de la densité d'énergie de couplage magnétoélastique, au premier ordre et pour un cristal de symétrie cubique :

$$E_{mél} = (B^\alpha/3) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + B^{\gamma,2} \left[ \frac{2}{3} \left( \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \right) \left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] + 2 B^{\varepsilon,2} (\varepsilon_{yz} \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_{zx} \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon_{xy} \alpha_1 \alpha_2) \quad (12.10)$$

Nous avons rajouté le premier terme qui décrit le couplage magnétoélastique isotrope : il s'agit du couplage magnétoélastique d'échange (12.3) présenté au § 2.1. En identifiant les deux autres termes de l'expression (12.10) avec l'équation (12.8), on voit aisément que  $B^{\gamma,2} = B_1$  et  $B^{\varepsilon,2} = B_2$  : il s'agit là du couplage magnétoélastique d'origine pseudo-dipolaire et de champ cristallin d'ordre 2. De telles interactions *anisotropes* ne peuvent évidemment pas contribuer au couplage *isotrope* en  $B^\alpha$

Le chiffre <sup>2</sup> qui apparaît derrière  $\gamma$  et  $\varepsilon$  signifie qu'il s'agit de termes de couplage du second degré en cosinus directeurs de l'aimantation. Des termes d'ordre <sup>4</sup>, <sup>6</sup> ...

apparaîtraient si l'on poussait le développement de (12.1) aux polynômes de Legendre du 4ème ordre  $\{h(r)\}$  ou du 6ème ordre : outre une contribution à l'énergie de couplage magnétoélastique (coefficients  $B^{\alpha,4}$ ,  $B^{\gamma,4}$ ,  $B^{\varepsilon,4}$ ,  $B^{\alpha,6}$ ,  $B^{\gamma,6}$ ,  $B^{\varepsilon,6}$ ,  $B^{\varepsilon,6'}$ ), on trouverait également une expression de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline en  $k^4(\alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 - 1/5)$  pour le quatrième ordre, et, pour le sixième ordre, en  $k^6[\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 - 1/11(\alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2 - 1/5) - 1/105]$ .

Ainsi, anisotropie et couplage magnétoélastique sont deux manifestations différentes des mêmes couplages anisotropes à l'échelle microscopique.

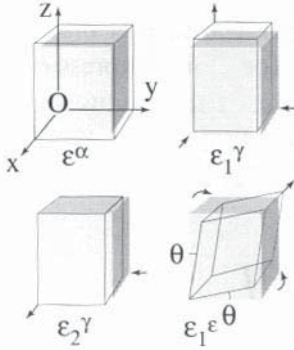


Figure 12.4 - Les modes normaux de déformation

La notation symétrisée permet de séparer les modes de déformation en symétrie cubique, le mode isotrope  $\varepsilon^\alpha \sim (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$  n'abaisse pas la symétrie, les modes anisotropes :

$$\varepsilon_1^\gamma \sim [\varepsilon_{zz} - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})/2] \text{ et } \varepsilon_2^\gamma \sim (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})$$

abaissent la symétrie par variation du paramètre de maille sans modification ni du volume ni des angles, et les modes  $\varepsilon_1^\varepsilon \sim \varepsilon_{yz}$ ,  $\varepsilon_2^\varepsilon \sim \varepsilon_{zx}$  et  $\varepsilon_3^\varepsilon \sim \varepsilon_{xy}$  abaissent la symétrie par cisaillement, sans variation ni du volume ni des paramètres de maille (voir fig. 12.4).

La notation  $\alpha, \gamma, \varepsilon$ , est basée sur des considérations de groupes de symétrie et désigne les représentations irréductibles de ces groupes [2, 3]. L'intérêt de cette

notation est qu'elle conduit à des coefficients d'anisotropie  $k_\ell$  et de couplage magnétoélastique  $B^{\mu,\ell}$  dont les variations thermiques, dans un modèle de magnétisme localisé, s'expriment de façon simple en fonction de l'aimantation réduite  $m$  de la substance (cf. Annexe 6).

Le formalisme qui vient d'être esquissé, basé sur la théorie des groupes de symétrie développée par Bethe, présente l'avantage de diagonaliser l'expression de la loi de Hooke. L'expression de la densité d'énergie élastique s'écrit alors, pour un cristal de symétrie cubique :

$$E_{el} = \frac{1}{2} c^\alpha \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + \dots \quad (12.11)$$

$$+ \frac{1}{2} c^\gamma \left\{ \frac{2}{3} \left( \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 \right\} + c^\varepsilon \left\{ \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \right\}$$

où  $c^\alpha = c_{11} + 2c_{12}$ ,  $c^\gamma = c_{11} - c_{12}$  et  $c^\varepsilon = 2c_{44}$  sont des coefficients d'élasticité.

Ce formalisme a été étendu aux symétries plus basses [2, 3], mais il faut remarquer qu'alors il n'est plus jamais possible de diagonaliser totalement l'expression de l'énergie élastique. Il a été également étendu au cas des substances isotropes [2], pour lesquelles on peut simplement poser :  $c^\gamma = c^\varepsilon$  et  $B^{\gamma,2} = B^{\varepsilon,2}$ .

## 4. MAGNÉTOSTRICTION

### 4.1. LA MAGNÉTOSTRICTION D'ÉCHANGE EN SYMÉTRIE CUBIQUE

En minimisant la somme  $E_{el} + E_{magn}$  (équations 12.3 et 12.4) vis-à-vis de  $\delta V/V_0$ , on trouve la *magnétostriction en volume*

$$\delta V/V_0 = \lambda^{\alpha,0} = \frac{r_0 Nz}{c^\alpha} \frac{\partial J_{AB}}{\partial r} \langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle \quad (12.12)$$

On note que  $\lambda^{\alpha,0}$  est proportionnelle et de même signe que la dérivée  $\partial J_{AB}/\partial r$ , pour une substance ferromagnétique. En l'absence de toute corrélation entre les spins localisés sur les différents sites, la fonction  $\langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle$  est nulle et l'on n'observe aucune magnétostriction d'échange ni aucune anomalie dans les propriétés élastiques de la substance, c'est le cas du paramagnétisme à très haute température.

En refroidissant la substance, la fonction de corrélation  $\langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle$  croît en même temps qu'apparaît généralement, au-dessus de  $T_C$ , un ordre à courte distance ce qui explique pourquoi l'anomalie de volume donnée en figure 12.5 [5] pour le nickel apparaît dès 800 K, environ 170 degrés au-dessus de la température de Curie  $T_C = 631$  K. Enfin, à basse température, tous les spins sont alignés ferromagnétiquement et la fonction de corrélation atteint sa valeur à saturation,  $S_A S_B$ , entraînant la saturation de la magnétostriction d'échange et des effets morphiques.

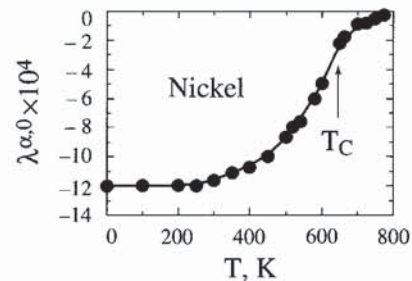


Figure 12.5 - Magnétostriction d'échange du nickel métallique [5]

La formule (12.12) est valable aussi pour les substances antiferromagnétiques mais alors, à basse température,  $\langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle = -S_A S_B$ . Cela engendre une magnétostriction en volume négative si  $\partial J_{AB}/\partial r$  est positive, contrairement au cas des substances ferromagnétiques. La figure 12.6 [6] montre les variations thermiques du coefficient de dilatation thermique pour une série d'oxydes  $U_x Th_{1-x} O_2$  ( $ThO_2$  est diamagnétique et  $UO_2$  est antiferromagnétique). L'anomalie positive observable à la température de Néel de  $UO_2$  montre que c'est là que la variation thermique de  $\lambda^{\alpha,0}$  est la plus forte.

Ainsi, le modèle proposé explique qualitativement les variations thermiques de la magnétostriction en volume, et par conséquent permet de prédire l'ordre de grandeur et le signe des anomalies magnétiques de dilatation, dans la mesure où l'on connaît par ailleurs les variations de l'intégrale d'échange avec la distance interatomique.

Néel [7] a discuté en détail la variation de l'énergie d'interaction avec la distance (voir figure 4.9), qui laisse prévoir une magnétostriction en volume légèrement négative pour le nickel, comme on l'a vu sur la figure 12.5, et positive pour les

alliages fer-nickel en accord avec l'expérience ; pour le fer, on attendrait une magnétostriction en volume négative. Or si  $\lambda^{\alpha,0}(T)$  est fortement négative en dessous de 800 K, elle devient légèrement positive vers  $T_C$ , ce qui montre bien les limites du modèle localisé dans le cas des métaux de la série 3d.

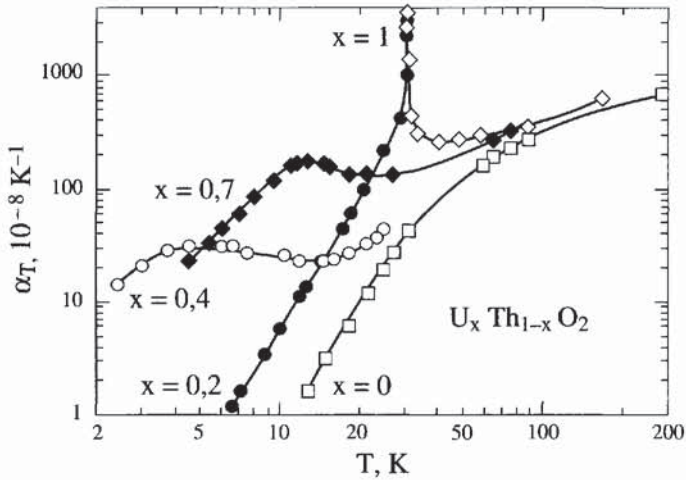
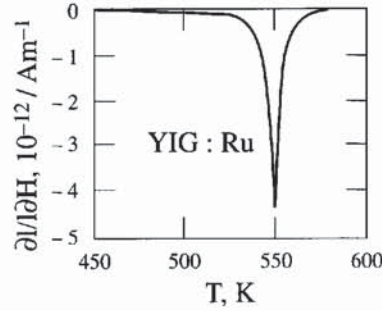


Figure 12.6 - Variations thermiques du coefficient de dilatation thermique linéaire dans les oxydes  $U_xTh_{1-x}O_2$  [6]

La variation sous fort champ magnétique de  $\lambda^{\alpha,0}$  définit la *magnétostriction forcée en volume*. C'est une variation de volume engendrée par l'application d'un champ magnétique extérieur. Dans le domaine d'ordre, l'application d'un champ magnétique sur une substance ferromagnétique va d'abord orienter tous les spins dans la même direction, sans modification de  $\langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle$ , mais au-delà de la saturation technique, le champ appliqué,  $H$ , vient renforcer le parallélisme de  $\mathbf{S}_A$  et  $\mathbf{S}_B$ , et donc augmenter la magnétostriction d'échange. Comme il ne s'agit là que d'une faible perturbation, la déformation liée à cette magnétostriction forcée varie linéairement avec  $|H|$  : alors, la magnétostriction forcée est définie par  $\partial \lambda^{\alpha,0} / \partial |H|$ , qui varie avec la température comme  $\partial \langle \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B \rangle / \partial |H|$  ; elle présente donc une intensité maximum (pic en lambda) au voisinage de la température d'ordre pour laquelle le champ moléculaire s'effondre tandis que l'ordre à courte distance reste encore notable. En revanche, dans le domaine paramagnétique, la déformation liée à la magnétostriction forcée est une fonction quadratique de  $H$ , tout comme la densité d'énergie magnétique  $\chi H^2 / 2$  dont elle dérive.

La figure 12.7 [8] illustre cet effet pour un grenat ferrimagnétique. La magnétostriction forcée reste très faible même à  $T_C$  (quelques  $10^{-12} / \text{Am}^{-1}$ ), comme pour la plupart des substances magnétiques "normales", oxydes et métaux. La comparaison des figures 3.17, 12.6 (pour  $x = 1$ ) et 12.7 montre la grande similitude des comportements de la chaleur spécifique, de la contribution magnétique au coefficient de dilatation thermique et de la magnétostriction forcée au voisinage des températures de transition magnétique.

**Figure 12.7 - Magnétostriction forcée de  $Y_3Fe_{4,976}Ru_{0,024}O_{12}$ , mesurée sous 0,8 tesla [8]**



Cette analyse des effets magnétoélastiques d'échange a été présentée sur le cas le plus simple des substances de symétrie cubique, mais peut se généraliser aux autres symétries : simplement, il y a plus de paramètres à considérer si la symétrie est plus basse, par exemple il existe deux intégrales d'échange  $J_{//}$  et  $J_{\perp}$  dans le cas des substances de symétrie hexagonale ou quadratique, en raison de la distance différente entre plus proches voisins selon l'axe  $c$  et dans le plan de base. Au contraire, pour les substances isotropes (verres), on s'attendrait à une description très simple en raison de la symétrie élevée, mais en fait l'analyse est alourdie par le fait que les sommes sur premiers voisins doivent être remplacées par des intégrales en raison du caractère aléatoire de la position géométrique des proches voisins.

Enfin, pour conclure, les seules applications techniques des effets d'échange concernent une famille bien particulière de matériaux : les alliages de la famille des invars et des elinvars qui se distinguent par une très forte magnétostriction d'échange tant spontanée que forcée (cent fois supérieure à la normale) et seront traités en détail au chapitre 18.

#### 4.2. LA MAGNÉTOSTRICION ANISOTROPE EN SYMÉTRIE CUBIQUE

Dans le formalisme de Callen, le calcul de la magnétostriction s'obtient très aisément [3] en minimisant la somme des énergies magnétoélastique (12.10) et élastique (12.11). La magnétostriction est décrite par les 6 composantes de la déformation :

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) &= -B^{\alpha}/c^{\alpha} \\
 \epsilon_{zz} - \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} &= -\frac{B\gamma,2}{c\gamma} \left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \right) \\
 \epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} &= -\frac{B\gamma,2}{c\gamma} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \\
 \epsilon_{yz} &= -(B^{\epsilon,2}/c^{\epsilon})\alpha_2\alpha_3 \\
 \epsilon_{zx} &= -(B^{\epsilon,2}/c^{\epsilon})\alpha_3\alpha_1 \\
 \epsilon_{xy} &= -(B^{\epsilon,2}/c^{\epsilon})\alpha_1\alpha_2
 \end{aligned} \tag{12.13}$$

Utilisant l'identité remarquable (12.9), l'allongement relatif mesuré selon une direction repérée par ses cosinus directeurs  $\beta_i$ , et dont l'expression classique se déduit de l'équation (12.6), devient :

$$\lambda = \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{2}{3}\left(\varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}\right)\left(\beta_3^2 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(\beta_1^2 - \beta_2^2) + 2(\varepsilon_{yz}\beta_2\beta_3 + \varepsilon_{zx}\beta_3\beta_1 + \varepsilon_{xy}\beta_1\beta_2) \quad (12.14)$$

Compte tenu des équations (12.13) et (12.14), l'expression générale de la magnétostriction en symétrie cubique devient :

$$\lambda = \frac{1}{3}\lambda^{\alpha,0} + \lambda^{\gamma,2}\left\{\frac{2}{3}\left(\alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}\right)\left(\beta_3^2 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)\right\} + 2\lambda^{\varepsilon,2}(\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 + \alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2) + \dots \quad (12.15)$$

$$\text{où :} \quad \lambda^{\alpha,0} = -B^\alpha/c^\alpha, \quad \lambda^{\gamma,2} = -B^{\gamma,2}/c^\gamma, \quad \lambda^{\varepsilon,2} = -B^{\varepsilon,2}/c^\varepsilon \quad (12.16)$$

sont les premiers *coefficients de magnétostriction* d'une substance cubique. Des termes d'ordre supérieur (associés aux coefficients  $\lambda^{\alpha,4}$ ,  $\lambda^{\gamma,4}$ ,  $\lambda^{\varepsilon,4}$ ,  $\lambda^{\alpha,6}$ ,  $\lambda^{\gamma,6}$ ,  $\lambda^{\varepsilon,6}$ ,  $\lambda^{\varepsilon,6}$ ) existent aussi [2], mais ils sont généralement assez faibles pour que l'on puisse les négliger, surtout à température ambiante : bien souvent, ils décroissent en effet beaucoup plus vite avec la température que les coefficients d'ordre 2. Dans ce qui suit, nous ignorerons la magnétostriction isotrope d'échange  $\lambda^{\alpha,0}$  et les coefficients d'ordre supérieur. *La magnétostriction anisotrope de Joule sera donc essentiellement décrite par les deux coefficients  $\lambda^{\gamma,2}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2}$  pour les cristaux de symétrie cubique.*

Ainsi, l'équation (12.15) décrit l'allongement relatif ( $\lambda = \delta l/l$ ) que subit un cristal de symétrie cubique selon une direction repérée par ses cosinus directeurs  $\beta_i$  lorsque son aimantation est dirigée selon une direction repérée par ses cosinus directeurs  $\alpha_i$ . Si  $\alpha_3^2 = \beta_3^2 = 1$ , la magnétostriction mesurée en champ parallèle selon [001] s'écrit :  $\lambda_{//} = (2/3)\lambda^{\gamma,2} = \lambda_{100}$ , tandis que la magnétostriction  $\lambda_{\perp}$  mesurée pour  $\beta_3 = 0$  sera  $\lambda_{\perp} = -(1/3)\lambda^{\gamma,2}$ , soit deux fois plus faible et de signe contraire. C'est le mode  $\varepsilon_1^{\gamma}$  de la figure 12.4.  $\lambda_{100}$  représente l'allongement relatif observé selon [100] si la substance passe de l'état désaimanté à l'état saturé selon cette direction.

Si l'aimantation est alignée selon une direction de symétrie ternaire [111],  $\alpha_i^2 = 1/3$ , la mesure de la déformation selon cette même direction ( $\beta_i = \alpha_i$ ) donne :  $\lambda_{//} = (2/3)\lambda^{\varepsilon,2} = \lambda_{111}$ , et selon une direction perpendiculaire ( $\sum \alpha_i \beta_i = 0$ ) on trouve :  $\lambda_{\perp} = -(1/3)\lambda^{\varepsilon,2}$ . L'échantillon a alors subi la somme de trois cisaillements ( $\varepsilon_1^{\varepsilon} + \varepsilon_2^{\varepsilon} + \varepsilon_3^{\varepsilon}$ ), c'est-à-dire une déformation rhomboédrique.  $\lambda_{111}$  représente donc l'allongement relatif observé selon une direction [111] quand la substance passe d'un état désaimanté isotrope à l'état saturé selon cette direction. Les coefficients  $\lambda_{100}$  et  $\lambda_{111}$  décrivaient classiquement la magnétostriction avant les travaux de Callen [3].

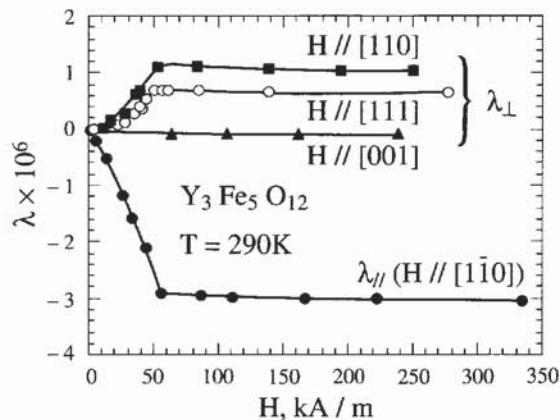
A l'état désaimanté, les moments sont répartis selon toutes les directions quaternaires dans le cas où  $K_1 > 0$ , et selon toutes les directions ternaires si  $K_1 < 0$ . En cas d'équipartition des moments entre les différentes directions faciles, la déformation moyenne est nulle, comme le montre l'équation (12.15). On parle alors d'*état désaimanté isotrope*. Les expressions que nous venons de calculer pour  $\lambda_{//}$  et  $\lambda_{\perp}$  ne seront donc effectivement fournies par l'expérience que si l'on part d'un tel état désaimanté isotrope, donc sans déformation initiale de l'échantillon.

#### 4.2.1. Mesure des coefficients de magnétostriction en symétrie cubique

Elle s'effectue en imposant au champ magnétique de rester dans des plans de symétrie (001), (110) ou (111) ou selon les directions principales perpendiculaires à ces plans. On fait tourner le champ magnétique dans ces plans de symétrie et on analyse en séries de Fourier les déformations obtenues afin de déterminer les coefficients de magnétostriction par identification avec l'équation (12.15). Les déformations relatives peuvent se mesurer par dilatométrie optique ou capacitive (sensibilité quelques  $10^{-9}$ ), ou par extensométrie à jauges de contraintes (sensibilité environ  $10^{-7}$ ).

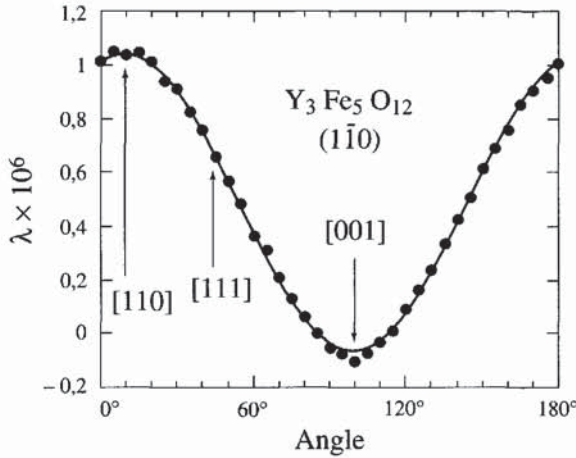
La figure 12.8 présente la magnétostriction mesurée selon la direction  $[\bar{1}\bar{1}0]$  sur une sphère monocristalline de grenat d'yttrium-fer ( $Y_3Fe_5O_{12}$  ou YIG). Sous champ magnétique parallèle à  $[\bar{1}\bar{1}0]$ ,  $\lambda_{//}$  est négative. Sous champ perpendiculaire,  $\lambda_{\perp}$  dépend de l'orientation du champ dans le plan  $(1\bar{1}0)$ .

Figure 12.8  
Magnétostriction  
d'un cristal de YIG  
mesurée selon  $[\bar{1}\bar{1}0]$



Si l'on relève les variations azimutales de  $\lambda_{\perp}$  au-delà de la saturation, on obtient une sinusoïde (figure 12.9) qui illustre le caractère anisotrope de la magnétostriction. La saturation est atteinte pour 50 kA/m, soit exactement la valeur du champ démagnétisant de la sphère,  $M_s/3$ , car l'anisotropie magnétocristalline de cet oxyde est très faible.

*N.B.* - Quand l'anisotropie est élevée, l'aimantation peut se trouver désorientée par rapport au champ appliqué : les variations de la magnétostriction sont alors à analyser en fonction de l'orientation de  $\mathbf{M}$ , non de  $\mathbf{H}$ .

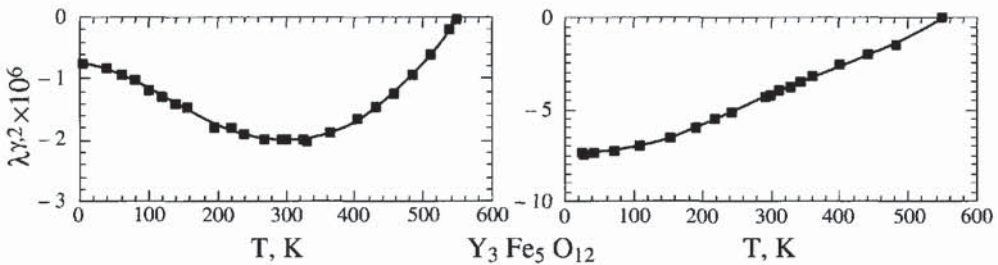


**Figure 12.9**  
**Variations azimutales**  
**de la magnétostriction**  
**d'un cristal de YIG**  
**mesurée selon [1-10]**  
**lorsque le champ magnétique**  
**tourne dans le plan perpen-**  
**diculaire à cette direction**

La magnétostriction d'ordre 4 du YIG ( $\lambda^{\alpha,4}$ ,  $\lambda^{\gamma,4}$  et  $\lambda^{\varepsilon,4}$ ), sa magnétostriction dipolaire (effet de forme : § 4.7) et sa magnétostriction forcée (définie aux § 1.1 et 1.4) sont toutes trois négligeables. Ces résultats sont assez classiques, et il est généralement possible de limiter aux seuls coefficients d'ordre deux ( $\lambda^{\gamma,2}$ ,  $\lambda^{\varepsilon,2}$ ) l'expression de la magnétostriction.

**4.2.2. Variation thermique de la magnétostriction**

La magnétostriction de Joule varie avec la température et s'annule à  $T_C$ . Le modèle développé par Callen *et al.* dans l'hypothèse d'un magnétisme localisé [3] prévoit que  $B^{\gamma,2}(T)$  et  $B^{\varepsilon,2}(T)$  varient comme  $a m^2 + b \hat{I}_{5/2} \{ \mathcal{L}^{-1}(m) \}$ , où  $m$  est l'aimantation réduite du matériau,  $\mathcal{L}(x)$  la fonction de Langevin, et  $\hat{I}_{5/2}(x)$  une fonction de Bessel modifiée qui varie en  $m^3$  à basse température et  $3/5 m^2$  vers  $T_C$  (voir l'annexe 6). Cela donne une variation en  $a m^2 + b m^3$  à basse température qui tend vers une variation purement en  $m^2$  à haute température ( $T \geq T_C$ ) [2,3].



**Figure 12.10 - Variations thermiques des coefficients de magnétostriction du YIG :**  
**à gauche, mesure selon [100] ; à droite, mesure selon [111], d'après [9]**

Le terme en «a» traduit le couplage dit à deux ions, ou couplage d'échange anisotrope, et le terme en «b» le couplage à un ion ou effet de champ cristallin électrique. Quand les coefficients a et b sont de signes opposés et du même ordre de grandeur, les variations thermiques peuvent présenter des extrema ou des changements de

signe. En général, le coefficient de couplage à un ion domine largement l'autre, et comme les coefficients d'élasticité ( $c^\gamma$ ,  $c^\epsilon$ ) varient en général fort peu avec la température, on attend des variations thermiques modérées pour la magnétostriction d'ordre 2 des corps ferromagnétiques, avec une approche à la température de Curie linéaire en  $(T - T_C)$ , puisque l'aimantation varie en  $(T - T_C)^\beta$  vers  $T_C$ , que  $\beta \sim 0,5$  et que la magnétostriction varie comme le carré de l'aimantation dans cette zone de température.

Pour les substances ferrimagnétiques, le modèle de Callen s'applique encore, mais des anomalies peuvent se produire à cause de la compétition entre les sous-réseaux, avec parfois annulation et changement de signe de la magnétostriction. Ainsi, pour la magnétostriction du YIG dont les variations thermiques sont données sur la figure 12.10, on notera un minimum vers 300 K sur la courbe  $\lambda^{\gamma,2}(T)$ , qui s'explique aisément car les variations thermiques de l'aimantation des deux sous-réseaux sont très différentes, et leurs contributions au coefficient  $B^{\gamma,2}$  sont de signe contraire [9].

En revanche, dans le modèle du magnétisme itinérant, la moindre anomalie de la structure de bande au niveau de Fermi peut bouleverser totalement le comportement thermique de la magnétostriction, et aucune prédiction n'est donc possible. Ainsi, comme le montre la figure 12.11 pour le fer,  $\lambda^{\gamma,2}(T)$  présente un maximum à 800 K et  $\lambda^{\epsilon,2}$  varie comme  $m^{14}$ , comportement qui n'était *a priori* pas prévisible.

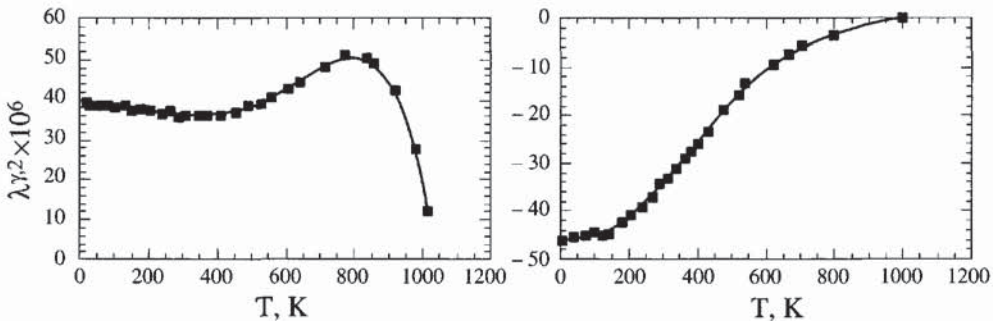


Figure 12.11 - Variations thermiques des coefficients de magnétostriction d'un monocristal de fer : à gauche, mesure selon la direction [100] ; à droite, mesure selon la direction [111], d'après [10]

#### 4.2.3. Variations sous champ magnétique de la magnétostriction anisotrope en symétrie cubique

Les variations de la magnétostriction sous champ magnétique sont étroitement liées à la structure en domaines de Weiss de la substance. Prenons l'exemple d'un cristal de fer, et partons d'un état désaimanté isotrope pour progressivement saturer le cristal selon la direction [001] : quelle sera la déformation mesurée selon cette direction ?

L'aimantation s'écrit :  $M_z = M_s \langle \alpha_3 \rangle$ , et puisque  $\beta_3 = 1$ , la magnétostriction devient :  $\lambda_{//} = \lambda^{\gamma,2} (\langle \alpha_3^2 \rangle - 1/3)$ . Comme  $\langle \alpha_3^2 \rangle \neq \langle \alpha_3 \rangle^2$ , il n'existe pas *a priori* de relation entre les variations sous champ de ces deux quantités, contrairement à ce

qui est parfois affirmé à tort dans la littérature. Il ne peut y avoir corrélation que dans le cas particulier où  $\langle \alpha_3 \rangle = \alpha_3$  ; dans le cas présent, cette situation est possible, si le processus d'aimantation par déplacement des parois à  $180^\circ$  s'achève avant que ne débute le processus de rotation.

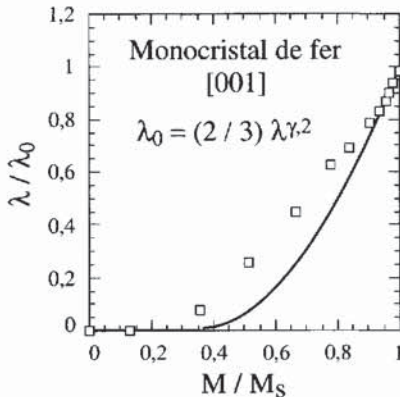
Examinons en effet cette situation théorique :

- ◆ Au départ, nous avons équipartition des moments entre six familles de domaines (les phases de Néel) ; alors,  $\langle \alpha_3 \rangle = 0$ ,  $\langle \alpha_3^2 \rangle = 1/3$ ,  $M_z = 0$ ,  $\lambda_{//} = 0$ .
- ◆ Sous faible champ, les moments orientés selon  $[00\bar{1}]$  basculent vers  $[001]$ ,  $1/6$  des moments bascule de  $-M_s$  à  $+M_s$ , alors  $M_z = M_s/3$  et  $\lambda_{//} = 0$  car  $\lambda$  est une fonction paire des  $\alpha_i$ . Il n'y a alors aucune corrélation entre  $\lambda(H)$  et  $M(H)$ .
- ◆ En augmentant le champ, les deux tiers des moments qui reposaient dans le plan  $(001)$  tournent *tous en phase* vers la direction  $[001]$ . Durant ce processus, l'aimantation et la magnétostriction valent alors :

$$M_z = M_s \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} x \right) \quad ; \quad \lambda_{//} = \frac{2}{3} \lambda \gamma^2 x^2 \quad (12.17)$$

où  $x$  représente le  $\alpha_3$  relatif aux quatre familles de moments en mouvement et varie de 0 à 1 au cours de ce processus. Les variations de  $M_z$  et de  $\lambda_{//}$  sont alors corrélées, comme le montre le trait continu de la figure 12.12.

- ◆ A saturation, tous les moments sont parallèles à  $[001]$ ,  $M_z = M_s$  et  $\lambda_{//} = 2/3 \lambda \gamma^2$ .



**Figure 12.12 - Variations de la magnétostriction mesurée selon  $[001]$  en fonction de l'aimantation réduite pour un monocristal de fer**

Les points expérimentaux sont ceux de Webster [11] et la courbe théorique est donnée par les équations (12.17) entre lesquelles on élimine  $x$ .

Loin de la saturation, les points expérimentaux sont situés bien au-dessus de la courbe théorique, parce que le processus de rotation des moments n'attend pas que tous les déplacements de parois à  $180^\circ$  soient achevés pour se produire. En revanche, pour  $M \geq 0,9 M_s$  on peut voir que tous les déplacements de parois à  $180^\circ$  possibles ont eu lieu, car les points expérimentaux sont bien situés sur la courbe théorique. Cet exemple, pourtant bien simple, montre qu'il est vain de vouloir relier à tout prix les variations sous champ de la magnétostriction d'un matériau de symétrie cubique à celles de l'aimantation. Une telle corrélation ne se produira que dans les cristaux uniaxes, et seulement lorsque le processus d'aimantation consiste en une rotation cohérente des moments (par exemple si le champ est appliqué selon l'axe  $c$ , le plan de base étant de facile aimantation).

### 4.3. LA MAGNÉTOSTRICION DES CRISTAUX HEXAGONAUX

La symétrie hexagonale étant plus basse que la symétrie cubique, un nombre plus important de coefficients sera nécessaire pour décrire correctement les effets magnétoélastiques (voir le chapitre 10). Ainsi, l'expression de la magnétostriction pour les cristaux de symétrie hexagonale peut s'écrire à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1}{3}\lambda_1^{\alpha,0} + \lambda_2^{\alpha,0} \left( \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) + \left\{ \frac{1}{3}\lambda_1^{\alpha,2} + \lambda_2^{\alpha,2} \left( \beta_3^2 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} \right) \right\} \left( \alpha_3^2 - \frac{1}{3} \right) \\ & + \lambda^{\varepsilon,2} \times \left\{ \frac{1}{2}(\beta_1^2 - \beta_2^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 2\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2 \right\} \\ & + 2\lambda^{\zeta,2} \times (\beta_2\beta_3\alpha_2\alpha_3 + \beta_3\beta_1\alpha_3\alpha_1) \end{aligned} \quad (12.18)$$

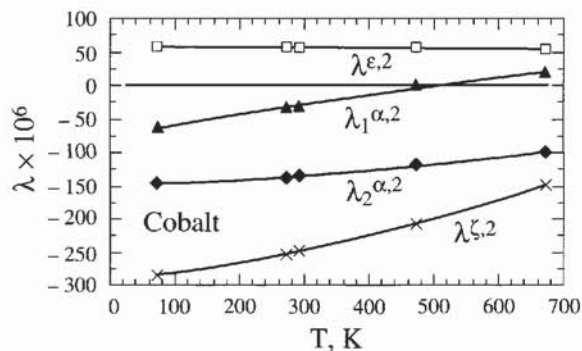
*N.B.* - On notera que dans la littérature, les modes  $\varepsilon$  et  $\zeta$  sont parfois improprement désignés par  $\gamma$  et  $\varepsilon$ , ce qui est en contradiction avec la notation des groupes de symétrie établie par Bethe.

Par ailleurs, il faudrait pousser jusqu'aux termes de sixième degré en  $\alpha_i$  pour décrire la variation azimutale de  $\lambda$  dans le plan de base. Cet effet est en général négligeable.

L'expression de la magnétostriction a été développée dans l'équation (12.18), avec la même définition des  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  que pour la symétrie cubique.  $\lambda_1^{\alpha,0}$  représente la magnétostriction en volume, mais un second mode de magnétostriction d'échange apparaît ici, c'est  $\lambda_2^{\alpha,0}$  qui décrit une variation du rapport  $c/a$  de la structure hexagonale : en effet, ce mode de déformation n'abaisse pas la symétrie, c'est pourquoi on le note  $\alpha$ . Tous les autres termes représentent des contributions à la magnétostriction anisotrope de Joule. Nous avons ignoré les termes d'ordre supérieur car, ici aussi, ce sont les coefficients d'ordre 2 qui sont prépondérants.

La figure 12.13 présente les variations thermiques des coefficients d'ordre 2 relatifs à la magnétostriction du cobalt métallique. On voit que ces coefficients sont supérieurs par un ordre de grandeur à ceux du fer, et que leurs variations thermiques sont assez régulières, sauf pour  $\lambda_1^{\alpha,2}$  qui change de signe vers 500 K.

Figure 12.13 - Variations thermiques des coefficients de magnétostriction du cobalt [12]



#### 4.4. LA MAGNÉTOSTRICITION DES SUBSTANCES ISOTROPES

La symétrie de ces substances est très élevée et deux coefficients,  $\lambda^{\alpha,0}$  pour la magnétostriction d'échange et  $\lambda_s$  pour la magnétostriction de Joule, suffisent à décrire l'ensemble des effets magnétoélastiques *pour une substance intrinsèquement isotrope*. Nous entendons par là un alliage amorphe dépourvu de toute anisotropie de croissance (verre métallique isotrope). La figure 12.2 montre l'allure des déformations magnétostrictives que l'on observe dans le cas d'une sphère isotrope.

Le calcul de la magnétostriction à partir du modèle des paires, tel que nous l'avons mené dans le cas de la symétrie cubique, serait très lourd ici, car les sommes sur proches voisins devraient être remplacées par des intégrales [2], ainsi que nous l'avons déjà noté à propos du couplage magnétoélastique d'échange en fin de § 4.1. Une façon élégante et plus simple d'introduire l'expression analytique de la magnétostriction des substances isotropes consiste à écrire la ou les conditions d'isotropie de la magnétostriction pour une substance cristallisée. Dans le cas de la symétrie cubique, par exemple, l'équation (12.15) peut encore s'écrire, grâce à l'identité (12.10) :

$$\lambda = \frac{1}{3} \lambda^{\alpha,0} + \lambda^{\gamma,2} \left( \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) + 2\lambda^{\varepsilon,2} (\alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) \quad (12.19)$$

Si  $\lambda^{\gamma,2} = \lambda^{\varepsilon,2} = (3/2)\lambda_s$ , cette magnétostriction devient isotrope, c'est-à-dire que la déformation est alors *indépendante de la direction de mesure* choisie, ce qui donne :

$$\lambda = \frac{1}{3} \lambda^{\alpha,0} + \frac{3}{2} \lambda_s \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad (12.20)$$

où  $\theta$  représente l'angle que fait l'aimantation avec la direction de mesure.

Partant d'un cristal hexagonal, les conditions d'isotropie s'écriraient :  $\lambda_1^{\alpha,0} = \lambda^{\alpha,0}$  et  $\lambda_2^{\alpha,2} = \lambda^{\varepsilon,2} = \lambda^{\zeta,2} = (3/2)\lambda_s$ , tous les autres coefficients étant nuls.

**N.B.** - *Le cas des substances isotropes par compensation, c'est-à-dire constituées d'un grand nombre de cristallites orientés au hasard – ou substances polycristallines sans texture – est bien différent. L'équation (12.20) ne fournit pas une bonne description de leur magnétostriction. La façon correcte d'appréhender la magnétostriction des matériaux polycristallins est de la traiter comme une moyenne sur les différents cristallites. Nous traiterons ce cas au § 4.5.*

##### 4.4.1. Courbes de magnétostriction pour une substance intrinsèquement isotrope

L'aimantation est une fonction impaire du champ magnétique appliqué, H, mais la magnétostriction est une fonction paire de H. Le cycle d'hystérésis  $\lambda(H)$  présente donc une allure en papillon, comme indiqué sur la figure 12.14.

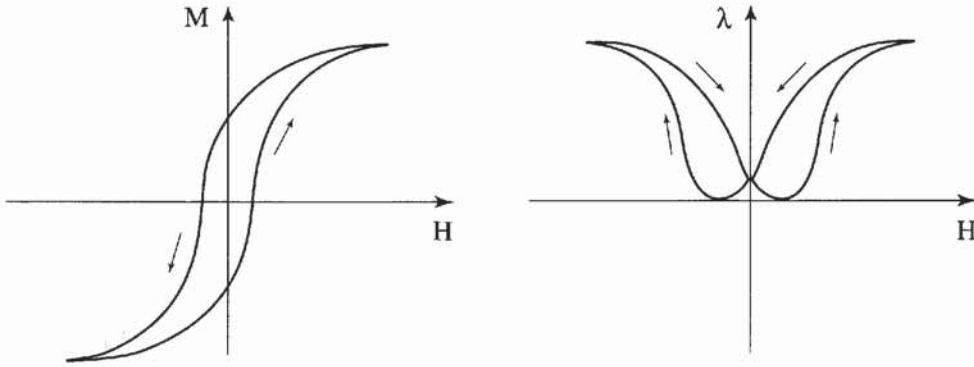


Figure 12.14 - Comparaison entre un cycle d'hystérésis d'aimantation et un cycle de magnétostriction. Le premier est impair et le second est pair vis-à-vis du champ appliqué

Les deux cycles d'hystérésis ont des points communs : cycles étroits et rapidement saturés pour les matériaux doux, cycles larges et saturation difficile pour les matériaux durs. Il serait toutefois erroné de croire que  $\lambda$  est une fonction quadratique de  $M$  : il n'y a corrélation entre ces deux grandeurs que dans un mécanisme de déplacement de parois à  $90^\circ$  ou pour l'effet de forme.

Les figures 12.15 et 12.16 présentent les variations sous champ magnétique de la magnétostriction pour deux alliages amorphes, de composition  $\text{Fe}_{78}\text{Si}_9\text{B}_{13}$  et  $\text{Fe}_4\text{Co}_{71}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$ .

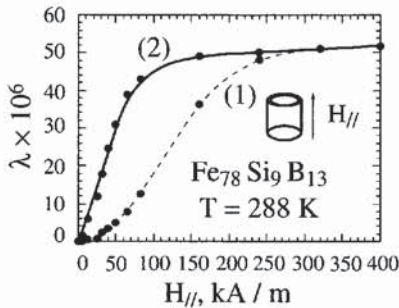


Figure 12.15 - Magnétostriction d'un alliage amorphe de fer :  
(1) brut de trempe, (2) recuit à 670 K

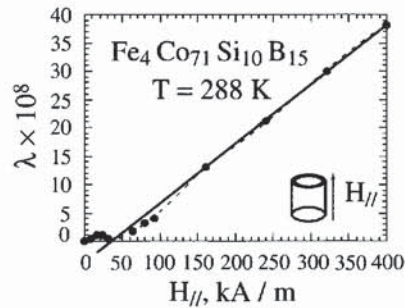


Figure 12.16 - Courbe de magnétostriction pour un alliage amorphe de fer-cobalt brut de trempe

Dans les deux cas, les échantillons, en forme de rubans, ont été enroulés et collés ;  $\lambda$  est mesurée parallèlement au champ, selon l'axe du cylindre ainsi formé.

Un recuit modifie notablement l'allure de la courbe relative au premier alliage, ce qui montre l'influence de l'histoire thermomagnétique sur les performances d'un matériau donné. Le second est réputé pour sa «magnétostriction nulle». Effectivement, sa magnétostriction de Joule est deux ordres de grandeur plus faible que pour le premier, ce qui permet de détecter les effets de l'interaction dipolaire (ou effet de forme, responsable de la petite bosse vers 25 kA/m), et de la magnétostriction en volume ( $\lambda^{\alpha,0}$ ) qui augmente linéairement avec le champ appliqué

au-delà du champ magnétique de saturation ( $\approx 80 \text{ kA/m}$ ) : c'est là l'effet de *magnétostriction forcée* ( $\partial\lambda^{\alpha,0}/\partial H$ ) que nous avons évoqué auparavant. La valeur de la *magnétostriction à saturation* doit donc, lorsqu'elle est aussi faible, impérativement se mesurer par extrapolation à champ interne nul de la partie linéaire de la courbe  $\lambda(H_0)$ , pour s'affranchir de l'effet de la magnétostriction forcée.

La magnétostriction que l'on aurait mesurée perpendiculairement à la direction du champ aurait présenté, dans le cas du  $\text{Fe}_{78}\text{Si}_9\text{B}_{13}$ , la même allure avec le signe opposé et une déformation deux fois plus faible car ici la contribution anisotrope de Joule est dominante et se développe à volume constant. Dans le cas du  $\text{Fe}_4\text{Co}_{71}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$  c'est le contraire : la magnétostriction en volume domine et comme elle est isotrope, les deux courbes ( $\lambda_{//}$  et  $\lambda_{\perp}$ ) auraient été pratiquement superposables. Toutefois, en supposant négligeables les effets dipolaire et de volume,  $\lambda_{\perp}$  n'est égal à  $-\lambda_{//}/2$  que si la déformation initiale est nulle, c'est-à-dire si l'orientation spatiale des moments magnétiques est distribuée de façon isotrope à l'état désaimanté.

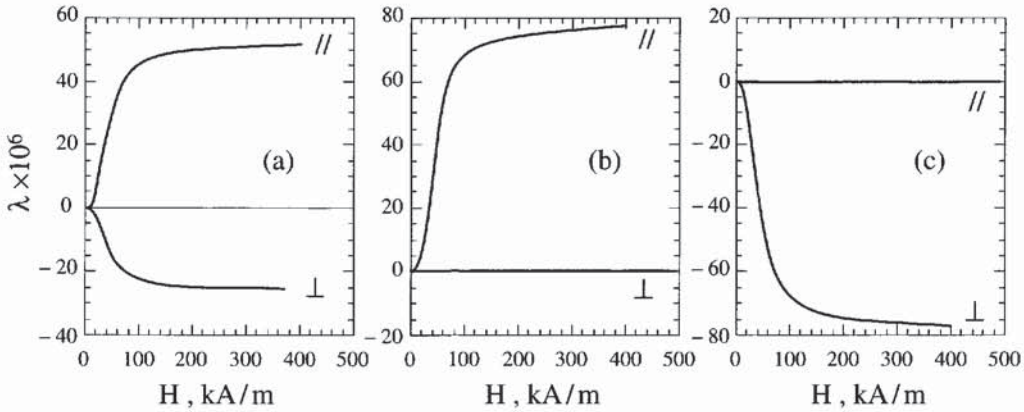
#### 4.4.2. Influence de l'état désaimanté sur la courbe de magnétostriction

Un recuit sous champ magnétique ou l'application d'une contrainte uniaxiale peuvent induire une anisotropie magnétique telle qu'à l'état désaimanté, les moments s'orientent préférentiellement selon une direction ou dans un plan donnés : lors de l'application d'un champ, les déformations magnétostrictives anisotropes sont généralement modifiées, et le rapport  $\lambda_{//}/(-2\lambda_{\perp})$  peut différer notablement de l'unité, valeur attendue pour un état désaimanté isotrope.

La figure 12.17 montre l'évolution des courbes de magnétostriction en fonction de la nature de l'état désaimanté pour un alliage  $\text{Fe}_{78}\text{Si}_9\text{B}_{13}$  ; la direction de mesure étant définie (Oz), on applique le champ d'abord selon Oz ( $\lambda_{//}$ ) puis perpendiculairement à Oz ( $\lambda_{\perp}$ ) :

- ◆ dans le cas (a), on observe que  $\lambda_{//} = -2\lambda_{\perp}$ , car l'état désaimanté est isotrope ;
- ◆ dans le cas (b), la direction de facile aimantation se trouve être perpendiculaire à la direction de mesure de la déformation. Ainsi, tous les moments tournent de  $90^\circ$  sous champ magnétique longitudinal ( $\theta$  passe de  $\pi/2$  à 0 dans l'équation 12.20) ce qui donne  $\lambda_{//} = (3/2)\lambda_s$ , tandis que  $\lambda_{\perp}$  est nulle, car  $\theta$  reste égal à  $\pi/2$  sous champ transversal ;
- ◆ enfin, dans le cas c, la direction de facile aimantation est parallèle à la direction de mesure de la déformation, et la situation est symétrique de la précédente : ainsi,  $\lambda_{//}$  est nulle tandis que  $\lambda_{\perp} = -(3/2)\lambda_s$ .

La nature de l'état désaimanté joue donc un rôle capital sur l'allure des courbes de magnétostriction, et la détermination de  $\lambda_s$  doit donc se faire en appliquant le champ magnétique successivement selon la direction de mesure puis selon une direction orthogonale :  $\lambda_{//} - \lambda_{\perp} = (3/2)\lambda_s$ , afin de s'affranchir d'un état initial incertain.

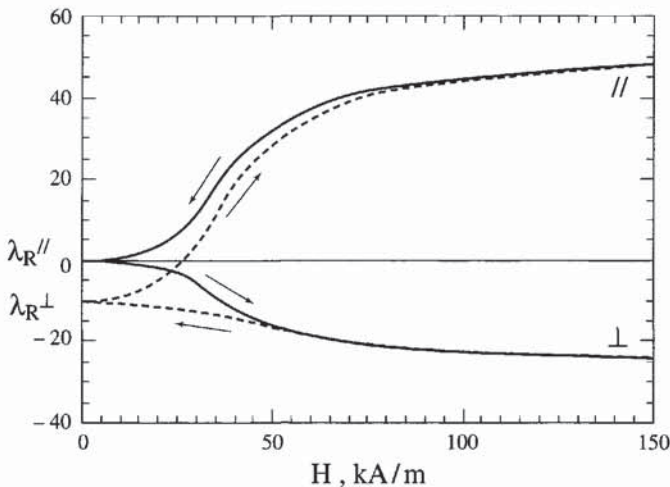


**Figure 12.17 - Influence de l'anisotropie de l'état désaimanté sur les courbes de magnétostriction d'un ruban amorphe**

(a) Isotropie - (b) Facile aimantation (FA) perpendiculaire à la direction de mesure  
(c) (FA) parallèle à la direction de mesure de la déformation. Dans les trois cas,  $\lambda_{//} - \lambda_{\perp} = (3/2)\lambda_s$ .

Nous avons vu sur la figure 12.14 le « cycle d'hystérésis en papillon » que l'on observe en balayant le champ magnétique alternativement des valeurs négatives aux valeurs positives. Mais il est un autre cycle de magnétostriction tout aussi fondamental, c'est le cycle décrit en appliquant un champ magnétique parallèle à la direction de mesure des allongements, puis en ramenant ce champ à une valeur nulle *sans changement de signe*, et en appliquant ensuite, dans les mêmes conditions, un champ perpendiculaire à la direction de mesure.

La figure 12.18 montre le résultat obtenu : la déformation rémanente ne sera pas la même selon que l'on revient d'un état saturé en champ perpendiculaire ( $\lambda_{R\perp}$ ) ou en champ parallèle ( $\lambda_{R//}$ ). Notons que  $\lambda_{R//} - \lambda_{R\perp}$  ne vaudra  $(3/2)\lambda_s$  que si l'on est bien parti du même état désaimanté.



**Figure 12.18 - Effets d'hystérésis sur les courbes de magnétostriction d'un alliage amorphe**

#### 4.4.3. Effet de la température sur la magnétostriction

Comme pour les matériaux cristallisés, les performances magnétostrictives des substances amorphes varient avec la température et s'écroulent vers  $T_C$  en suivant les mêmes règles. Mais on observe en outre, dans ces matériaux, une évolution progressive et irréversible de l'allure des courbes  $\lambda(H)$  induite par relâchement des contraintes, et une modification de  $\lambda_s$  induite par relaxation structurale ou recristallisation.

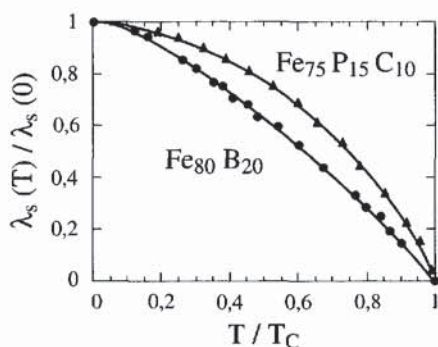


Figure 12.19 - Variations thermiques de la magnétostriction réduite de deux alliages de fer amorphes, d'après [13]

La figure 12.19 [13] montre la variation thermique du coefficient de magnétostriction pour deux alliages amorphes. Cette variation est parfaitement réversible, puisqu'elle est liée à la variation thermique de l'aimantation spontanée.

Les alliages amorphes se trouvent dans un état métastable et des variations irréversibles de la magnétostriction viennent, nous l'avons vu, se superposer aux variations thermiques d'origine purement magnétique. Une sage précaution, lorsque l'on désire étudier seulement les effets thermiques d'origine magnétique,

consiste à recuire préalablement les échantillons à une température  $T_R$  légèrement inférieure à la température de recristallisation  $T_X$  pour activer la relaxation structurale, et ensuite à ne jamais dépasser cette température  $T_R$ .

#### 4.5. LA MAGNÉTOSTRICION DES MATÉRIAUX POLYCRISTALLINS

La plupart des matériaux à usage industriel se présentent à l'état polycristallin, c'est-à-dire comme un agrégat de cristallites (ou grains) orientés aléatoirement. Pour une telle substance, *isotrope par compensation*, c'est-à-dire polycristalline sans texture, les variations de la magnétostriction avec le champ magnétique ou la température peuvent présenter des anomalies, en raison du *caractère anisotrope local* de chaque cristallite : contrairement à ce que l'on peut lire parfois, il est donc *illégitime* de l'assimiler à une substance intrinsèquement isotrope et de *décrire son comportement magnétoélastique au moyen d'une seule constante*  $\lambda_s$  de magnétostriction de Joule. Il convient au contraire d'analyser correctement le comportement de chaque cristallite, puis de faire la moyenne sur tous les grains : la magnétostriction doit alors se calculer comme la moyenne de la déformation de chaque grain.

Dans le cas simple où l'on veut connaître la magnétostriction parallèle ( $\lambda_{//}$ ), c'est-à-dire la déformation relative d'un matériau dans la direction selon laquelle est orientée l'aimantation, il est équivalent de considérer un seul grain, et de calculer la

valeur moyenne de la magnétostriction observée sur toutes les directions de l'espace. Pour des grains présentant la symétrie cubique et en ignorant la magnétostriction en volume, on trouve à la saturation (en posant  $\alpha_i = \beta_i$ ) :

$$\lambda_{//}^{\text{sat}} = \lambda\gamma^2 \left\{ \langle \beta_1^4 \rangle + \langle \beta_2^4 \rangle + \langle \beta_3^4 \rangle - \frac{1}{3} \right\} + 2\lambda\varepsilon^2 \left\{ \langle (\beta_2\beta_3)^2 \rangle + \langle (\beta_3\beta_1)^2 \rangle + \langle (\beta_1\beta_2)^2 \rangle - \frac{1}{3} \right\} = \frac{4}{15}\lambda\gamma^2 + \frac{2}{5}\lambda\varepsilon^2 \quad (12.21)$$

La comparaison avec l'équation (12.20) lorsqu'on impose  $\cos^2\theta = 1$  tendrait à faire croire que la magnétostriction de Joule dans le cas présent est décrite par un seul coefficient, comme pour un matériau vraiment isotrope :

$$\lambda_s = (4/15)\lambda\gamma^2 + (2/5)\lambda\varepsilon^2 \quad (12.22)$$

Or l'approximation de la magnétostriction isotrope n'est légitime que lorsque :

- ◆ les deux coefficients  $\lambda\gamma^2$  et  $\lambda\varepsilon^2$  sont de même signe et de même ordre de grandeur,
- ◆ les constantes d'élasticité sont également proches de la condition d'isotropie ( $c_{\gamma} \approx c^{\varepsilon}$ )
- ◆ et le matériau polycristallin ne présente bien sûr aucune texture cristallographique.

Si ces trois conditions ne sont pas remplies, il est *très dangereux* d'identifier une substance polycristalline avec une substance intrinsèquement isotrope (de nature vitreuse), ainsi que nous allons le montrer maintenant.

La figure 12.20 [14] présente les variations sous champ magnétique de  $\lambda_{//}$  pour un disque polycristallin et non texturé de fer pur. Sous très faible contrainte, cette magnétostriction est positive à champ faible (comme Joule l'a observé en 1842) puis décroît et change de signe à 50 kA/m pour atteindre une valeur à saturation négative.

Sous plus forte contrainte compressive, la courbe se déplace vers le haut, car l'état initial n'est plus isotrope. Très

différent de la variation monotone sous champ que l'on pourrait attendre d'un matériau isotrope, ce comportement s'explique car les coefficients de magnétostriction du fer sont de signe contraire ( $\lambda\gamma^2 = +36 \times 10^{-6}$  et  $\lambda\varepsilon^2 = -34 \times 10^{-6}$  à la température ambiante). Quand le champ magnétique croît, mais reste encore faible, les moments basculent d'une direction facile à une autre plus proche de la direction du champ, il y a déplacement de parois à  $90^\circ$  et c'est la constante  $\lambda\gamma^2$  qui entre en jeu d'après l'équation (12.15), d'où une magnétostriction positive. En approchant de

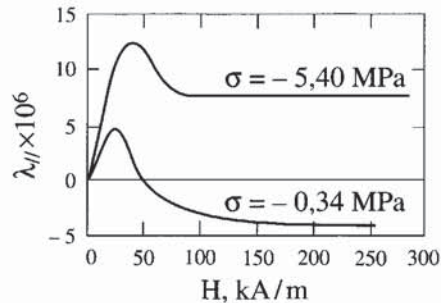


Figure 12.20 - Variations sous champ magnétique de la magnétostriction d'un disque de fer [14]

la saturation, les moments sont forcés de s'aligner selon la direction du champ : certains d'entre eux vont devoir s'éloigner des directions quaternaires et donc se rapprocher des directions ternaires de difficile aimantation, c'est alors que la constante négative  $\lambda^{\varepsilon,2}$  entre en jeu, ce qui explique le changement de signe de  $\lambda_{//}$ . La valeur à saturation de la magnétostriction du fer polycristallin est alors voisine de celle que prévoit l'équation (12.22) :  $\lambda_s = (4/15)\lambda^{\gamma,2} + (2/5)\lambda^{\varepsilon,2} = -4 \times 10^{-6}$ .

Au contraire, dans le cas du nickel dont les coefficients  $\lambda^{\gamma,2}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2}$  sont tous deux négatifs (à température ambiante  $\lambda^{\gamma,2} = -93 \times 10^{-6}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2} = -36 \times 10^{-6}$ ), les variations en fonction du champ magnétique appliqué se rapprochent beaucoup de celles d'un matériau isotrope sans texture comme le montrent les figures 12.21 (sphère polycristalline) et 12.22 (long fil polycristallin) ; le modèle de magnétostriction isotrope peut alors s'appliquer sans trop de risque. Le fil (N~0) s'aimante sous un champ externe mille fois plus faible que la sphère (N = 1/3).

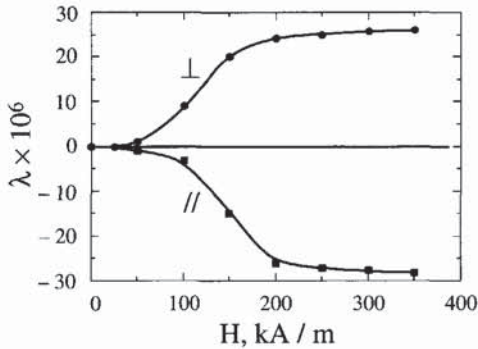


Figure 12.21 - Magnétostriction d'une sphère en nickel

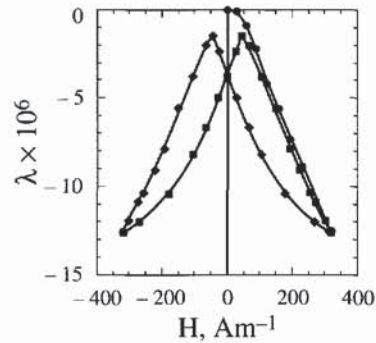


Figure 12.22 - Magnétostriction d'un fil fin en nickel [15]

#### 4.6. EFFETS MAGNÉTOÉLASTIQUES OBSERVÉS

##### SUR LES SURFACES ET DANS LES COUCHES MINCES

La magnétostriction est sensible à la symétrie de la substance. Or, à la surface d'un solide, il y a *brisure de symétrie*. Par exemple, pour un cristal de symétrie cubique, la symétrie devient quadratique à proximité d'une surface (001) et hexagonale à proximité d'une surface (111). Il en résulte qu'à la magnétostriction engendrée dans le matériau massif vient s'ajouter une contribution différente des surfaces.

Cette dernière est négligeable, sauf si le nombre d'atomes situés en surface devient notable devant le nombre total des atomes constituant l'échantillon : c'est le cas des couches minces. La mesure de la magnétostriction pour des couches de différentes épaisseurs permet alors de séparer les contributions du volume et de la surface, à condition que la densité reste la même pour tous les échantillons.

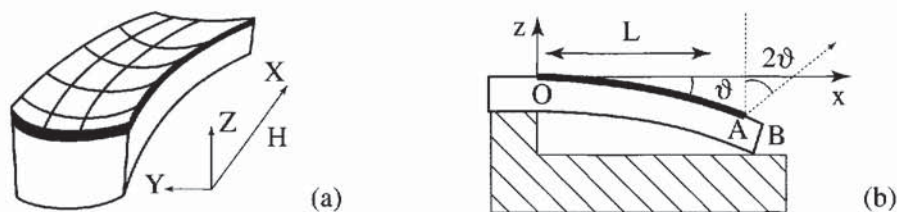
Dans le cas des couches minces vient se greffer le problème des contraintes d'épitaixie. En effet, un film mince comportant seulement quelques couches atomiques

est nécessairement déposé sur un substrat rigide. Après dépôt, on observe généralement une courbure du substrat qui traduit l'existence de contraintes énormes (pouvant atteindre la dizaine de GPa) dans la couche mince : une modification des coefficients de magnétostriction résulte des effets anharmoniques associés à ces contraintes. De plus, ces contraintes engendrent une forte anisotropie magnétoélastique (§ 6.2) qui peut dominer l'anisotropie magnétocristalline et ainsi modifier les directions de facile aimantation.

L'intérêt des couches ultraminces est de pouvoir étudier le couplage magnétoélastique dans de nouvelles structures qui n'existent pas à l'état massif, par exemple le fer cubique à faces centrées ou bien des structures artificielles où alternent des couches de métaux différents, voire non miscibles. Ces études sont en plein essor.

En raison de leur très faible épaisseur, les couches sont nécessairement solidaires d'un substrat beaucoup plus épais qu'elles, il ne leur est pas possible de se déformer librement sous l'action d'un champ magnétique : c'est alors l'ensemble *bilame* constitué d'une couche et de son substrat qui va se déformer sous champ. Initialement plane, la surface de la couche va subir une déformation anticlastique (c'est-à-dire en forme de selle de cheval), car il y aura par exemple allongement dans la direction d'application du champ, et raccourcissement dans la direction perpendiculaire (voir la figure 12.23-a).

La figure 12.23-b montre que, contrairement aux matériaux magnétostrictifs massifs avec lesquels on utilise généralement la composante du déplacement parallèle au champ appliqué, le déplacement utile (ici selon Oz) est perpendiculaire au plan du bilame et donc à la direction du champ appliqué (Ox).



**Figure 12.23 - Déflexion sous champ magnétique d'un bilame constitué d'un substrat non magnétique et d'une couche ferromagnétique :**

(a) déformation en "selle de cheval" du bilame - (b) coupe médiane longitudinale du bilame

La déformation, subie par un bilame constitué d'un substrat non magnétique d'épaisseur  $t_s$  sur lequel est déposée une couche ferromagnétique très mince ( $t_f \ll t_s$ ) de longueur  $L$ , peut s'exprimer en fonction du module de cisaillement  $G_s$  du substrat, des coefficients de Poisson ( $\nu_f$  et  $\nu_s$ ) du film et du substrat et des  $\alpha_i$  qui sont les cosinus directeurs de l'aimantation. L'angle  $\vartheta$  qui mesure la déflexion de l'extrémité du bilame s'écrit alors :

$$\vartheta = 3 \frac{t_f}{t_s^2} \frac{L}{G_s} b(H) \quad (12.23)$$

$$\text{avec : } \quad b(H) = \frac{1}{2} B\gamma,2 \left[ (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - \frac{(1 - \nu_s)(1 + \nu_f)}{(1 + \nu_s)(1 - \nu_f)} \left( \alpha_3^2 - \frac{1}{3} \right) \right]$$

Pour mesurer cette déformation, on peut envoyer sur l'extrémité du bilame un rayon laser. La déflexion du rayon réfléchi ( $2\theta$ ) peut être détectée au moyen d'une double diode photosensible [16].

On notera que le coefficient de magnétostriction  $\lambda\gamma,2 \sim -B\gamma,2/c\gamma$  qui était le paramètre adéquat pour décrire les effets magnétoélastiques à l'état massif ne l'est plus pour les couches minces : la déflexion du bilame s'exprime en effet par une expression comportant  $-B\gamma,2/G_s$ . C'est donc  $B\gamma,2$  qui est ici le paramètre pertinent.

#### 4.7. MAGNÉTOSTRICION DIPOLAIRE, OU EFFET DE FORME

Quand un échantillon est aimanté, il acquiert une énergie dipolaire. Il tend alors à se déformer pour minimiser cette énergie, sous l'influence des *forces magnétiques*. La solution analytique de ce problème n'a pu être donnée exactement que pour un *échantillon sphérique* plongé dans un champ magnétique uniforme. Gersdorf a montré qu'un tel corps subissait des tractions superficielles qui s'expriment en tout point de la surface par [17] :

$$\mathbf{F}_v = (1/2) \mu_0 \mathbf{M}^2 (\cos^2 \psi) \mathbf{n} \quad (12.24)$$

où  $\psi$  est l'angle que fait l'aimantation avec la normale  $\mathbf{n}$  à la surface.

De telles contraintes créent des déformations non uniformes dans la sphère. Au centre, il est possible de représenter ces déformations par une équation similaire à celle qui décrit la magnétostriction de Joule.

Ainsi, pour un cristal de *symétrie cubique*, et *seulement en son centre*, la déformation associée à l'effet de forme est décrite par l'équation (12.15) avec trois coefficients :

$$\lambda^{\alpha,0} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M}^2 s^\alpha \quad \lambda\gamma,2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M}^2 s^\gamma (1 + 3A) \quad \lambda^{\varepsilon,2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M}^2 s^\varepsilon (1 + 3B) \quad (12.25)$$

$$\text{où : } \quad A = \frac{s^\alpha - s^\gamma}{2s^\alpha + 13s^\gamma + 6s^\varepsilon} \quad B = \frac{s^\alpha - s^\varepsilon}{2s^\alpha + 4s^\gamma + 15s^\varepsilon} \quad (12.26)$$

Ici,  $s^\alpha = s_{11} + 2s_{12} = 1/c^\alpha$ ,  $s^\gamma = s_{11} - s_{12} = 1/c^\gamma$  et  $s^\varepsilon = (1/2) s_{44} = 1/c^\varepsilon$ .

Hors du centre de l'échantillon, une telle description n'est plus possible, la déformation varie en tout point de l'échantillon. La solution consiste alors à intégrer ces déformations pour calculer la déformation moyenne de la sphère sur un diamètre. Nous donnons ici le résultat de la déformation totale calculée, toujours avec un cristal sphérique de symétrie cubique, quand le champ magnétique tourne depuis la direction de mesure jusqu'à une direction perpendiculaire et ceci pour les trois directions de symétrie principales. Avec les notations précédentes, on trouve [2] :

$$(\lambda_{//} - \lambda_{\perp})_{[001]}^F = \frac{1}{6} \mu_0 \mathbf{M}^2 s^\alpha (1 - 2A) + \frac{1}{3} \mu_0 \mathbf{M}^2 s^\gamma (1 + 4A) \quad (12.27)$$

$$(\lambda_{//} - \lambda_{\perp})_{[111]}^F = \frac{1}{6}\mu_0 M^2 s^\alpha (1 - 2B) + \frac{1}{3}\mu_0 M^2 s^\varepsilon (1 + 4B) \quad (12.28)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_{//} - \lambda_{\perp})_{[110]}^F &= \frac{1}{6}\mu_0 M^2 s^\alpha \left\{ 1 - \frac{1}{2}(A + 3B) + \frac{1}{2}(A + B) \cos 2\vartheta \right\} \\ &+ \frac{1}{12}\mu_0 M^2 s^\gamma \left\{ 1 + A + 3B + (1 + A - B) \cos 2\vartheta \right\} \\ &+ \frac{1}{4}\mu_0 M^2 s^\varepsilon \left\{ 1 + A + 3B - (1 - 3A + 3B) \cos 2\vartheta \right\} \end{aligned} \quad (12.29)$$

Dans les trois cas, on trouve la même expression pour la magnétostriction en volume, à savoir celle que l'on avait trouvée au centre de la sphère :

$$(\lambda_{//} + 2\lambda_{\perp})^F = \frac{1}{2}\mu_0 M^2 s^\alpha \quad (12.30)$$

On notera que la déformation devient isotrope (mais toujours pas uniforme) lorsque la condition d'isotropie élastique  $s^\gamma = s^\varepsilon$  est vérifiée.

L'effet de forme peut être négligé dans bon nombre de substances dont l'aimantation est faible : ainsi pour le nickel, avec  $M_s = 480$  kA/m,  $(\lambda_{//} + 2\lambda_{\perp})^F = 0,26 \times 10^{-6}$ , tandis que  $(\lambda_{//} - \lambda_{\perp})^F$  s'élève, en unités de  $10^{-6}$ , à 0,8 selon [001], 0,45 selon [111] et à  $(0,4 + 0,12 \cos 2\vartheta)$  selon [110], quantités négligeables devant les coefficients de magnétostriction de Joule,  $\lambda^{\gamma,2} = -95 \times 10^{-6}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2} = -42 \times 10^{-6}$ .

Pour le fer, la situation est différente, car les coefficients de magnétostriction de Joule sont plus faibles et l'aimantation plus forte. Avec  $M_s = 1710$  kA/m, on obtient  $(\lambda_{//} + 2\lambda_{\perp})^F = 3,64 \times 10^{-6}$  tandis que  $(\lambda_{//} - \lambda_{\perp})^F$  s'élève, en unités de  $10^{-6}$ , à 5,3 selon [001] et 2,8 selon [111], à comparer à  $\lambda^{\gamma,2} = 36 \times 10^{-6}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2} = -34 \times 10^{-6}$ . L'effet de forme atteint 15% de la valeur de  $\lambda^{\gamma,2}$ , ce n'est plus négligeable.

Enfin, dans le cas du composé  $GdAl_2$ , le coefficient  $\lambda^{\gamma,2}$  est extrêmement faible ( $0,5 \times 10^{-6}$ ) tandis que la différence  $(\lambda_{//} - \lambda_{\perp})^F$  est à peu près isotrope et atteint  $3,6 \times 10^{-6}$  soit 7 fois le coefficient  $\lambda^{\gamma,2}$ . Il est alors essentiel de ne pas l'oublier.

Le lecteur trouvera le détail des calculs de cet effet dans la référence [2]. Pour d'autres formes d'échantillon et d'autres symétries, les calculs sont encore plus compliqués [18].

*Cet effet joue un rôle néfaste dans les transformateurs puisqu'il contribue, avec la magnétostriction de Joule, à la vibration sous induction variable du circuit magnétique. Notons que lors des déplacements de parois à 180°, alors que la magnétostriction de Joule n'induit aucune déformation, l'effet de forme, lui, contribue encore à l'émission acoustique puisqu'il est proportionnel au carré de l'aimantation. Même pour un matériau «à magnétostriction nulle», dont tous les coefficients de magnétostriction sont nuls, cet effet reste une source de pertes : il résulte en effet des forces exercées par les masses magnétiques sur la matière en raison du fait même qu'elle est aimantée.*

## 4.8. REMARQUES SUR LA MESURE DE LA MAGNÉTOSTRICION

### 4.8.1. Contraintes internes liées à la magnétostriction

La présence de parois à  $90^\circ$  (ou  $71^\circ$  et  $109^\circ$ ) dans un cristal ferromagnétique peut engendrer des contraintes internes comme le suggère la figure 12.24.

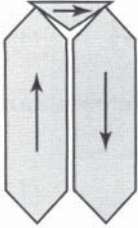


Figure 12.24  
Incompatibilité de  
domaines adjacents  
aimantés à  $90^\circ$

En effet, en supposant une magnétostriction positive, on voit que, dans un monocristal, chaque domaine s'allonge dans la direction du champ et se raccourcit selon la direction perpendiculaire. Il peut alors y avoir incompatibilité entre les déformations des domaines présentant des aimantations orthogonales, ce qui provoquerait de violentes contraintes au niveau des parois pour assurer la cohésion de la matière en tout point. Dans la majorité des cas, cette situation ne se présente pas : moyennant une toute petite rotation relative, dans un sens et dans l'autre, les réseaux se raccordent parfaitement et la magnétostriction spontanée

peut se développer dans les domaines sans faire intervenir de contraintes. Une seconde source de contraintes peut aussi se rencontrer dans un matériau polycristallin tel que le fer, dont les coefficients de magnétostriction  $\lambda_{\nu^2}$  et  $\lambda_{\varepsilon^2}$  sont de signe contraires : à la saturation, tous les moments sont parallèles à l'axe Oz selon lequel le champ a été appliqué, et si l'on a deux grains voisins orientés selon respectivement  $[001]$  et  $[111]$ , l'un tendra à s'allonger et l'autre à se raccourcir. Les contraintes engendrées par une telle situation vont modifier quelque peu la valeur de la "magnétostriction à saturation"  $\lambda_s$  et cette modification sera fonction de l'anisotropie élastique du matériau [2] : on ne mesurera pas exactement la déformation prévue par l'équation (12.22).

### 4.8.2. Détermination précise de la magnétostriction de Joule

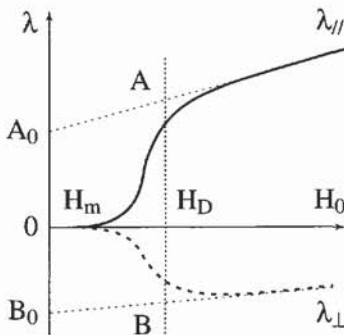


Figure 12.25 - Courbes de  
magnétostriction d'une sphère isotrope  
en fonction du champ magnétique  
appliqué  $H//Oz$

Nous allons analyser maintenant les composantes de la courbe  $\lambda(H)$  pour un échantillon sphérique, dont l'aimantation est donc homogène (figure 12.25).

A champ faible ( $H < H_m$ ), il y a un déplacement de parois à  $180^\circ$  donc pas de magnétostriction de Joule, seulement l'effet de forme  $\lambda^F$  (en général faible). Puis la magnétostriction de Joule se développe avec le déplacement des parois à  $90^\circ$  ( $71^\circ$  et  $109^\circ$ ) et la rotation des moments, quand  $H$  croît de  $H_m$  à  $H_D$ , mais le champ interne reste nul. La magnétostriction de Joule se sature pour  $H > H_D$ , quand le champ

domine l'anisotropie magnétique. Le champ interne, n'étant plus nul, commence à lutter contre le désordre thermique des spins et cela induit une magnétostriction forcée qui s'écrit :  $(1/3)\partial\lambda^{\alpha,0}/\partial H + \partial\lambda_s/\partial H$  pour  $\lambda_{//}$  et  $(1/3)\partial\lambda^{\alpha,0}/\partial H - (1/2)\partial\lambda_s/\partial H$  pour  $\lambda_{\perp}$ . Les droites représentatives de la magnétostriction forcée coupent la droite verticale passant par  $H_D$  aux points A et B. C'est la distance AB qui vaut exactement  $(3/2)\lambda_s + (\lambda_{//} - \lambda_{\perp})^F$ , tandis que  $A_0B_0$  donnerait ici une valeur par défaut. La détermination de la magnétostriction de Joule passe donc par l'extrapolation des courbes expérimentales jusqu'à la valeur  $H_D$  du champ appliqué, puis par la soustraction de l'effet de forme que l'on sait calculer pour un échantillon sphérique. Cette détermination ne sera naturellement correcte que si les deux courbes  $\lambda_{//}(H)$  et  $\lambda_{\perp}(H)$  partent du même état désaimanté (cf. § 4.4.2).

## 5. TORSION D'UN FIL AIMANTÉ PARCOURU PAR UN COURANT : EFFET WIEDEMANN

Nous avons traité jusqu'ici la magnétostriction pour un matériau aimanté uniformément, car c'était le cas le plus simple. Or il est une autre géométrie qui mérite attention, c'est celle du fil ou du barreau ferromagnétique de section circulaire dont l'aimantation présente la symétrie hélicoïdale : cette situation peut être réalisée en superposant à un champ magnétique uniforme longitudinal (créé par un solénoïde entourant l'échantillon) le champ circulaire (nul au centre du fil et maximum à sa périphérie) créé par un courant électrique circulant dans l'échantillon. Le champ magnétique résultant est alors hélicoïdal. Sous l'action de ce champ, l'échantillon va se tordre : la torsion est nulle au centre du fil et croît avec la distance au centre, il s'agit donc d'un effet essentiellement non uniforme.

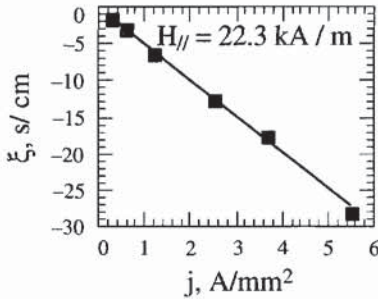
Cet effet de torsion, appelé "Effet Wiedemann" du nom du physicien qui décrit ce phénomène en 1862, est souvent utilisé en régime dynamique pour engendrer des ondes de cisaillement dans des barres, des tubes ou des fils ferromagnétiques. Pour un fil isotrope, l'amplitude de l'effet sera décrite par la quantité  $\xi = \phi/\ell$ , rotation par unité de longueur de fil. On montre [2] que :

$$\xi = 3 \lambda_s j / 2 H_{//} \quad (12.31)$$

où  $j$  est la densité de courant qui circule dans le fil et  $H_{//}$  est le champ magnétique appliqué selon l'axe de l'échantillon, *pourvu que le champ magnétique créé par  $j$  reste faible devant le champ  $H_{//}$ .*

La figure 12.26 montre la belle expérience réalisée par Pidgeon en 1919 sur un fil en nickel recuit, de diamètre 1 mm, soumis à un champ magnétique  $H_{//} = 22,3$  kA/m. La torsion est décrite par l'équation  $\xi = -6,74 \times 10^{-5} - 2,40 \times 10^{-9} j$  (rad/m) si la densité de courant  $j$  est exprimée en A/m<sup>2</sup>, ce qui donne un coefficient de magnétostriction  $\lambda_s$  de  $-35,7 \times 10^{-6}$  en excellent accord avec les plus récentes déterminations ( $\lambda_s = -36 \times 10^{-6}$ ). Cet effet a aussi été utilisé pour déterminer le coefficient

de magnétostriction de rubans métalliques amorphes : la formule (12.31) s'applique également à ce cas.



**Figure 12.26 - Effet Wiedemann pour un fil en nickel [19]**

La torsion  $\xi$ , exprimée en secondes d'arc par centimètre, varie linéairement avec la densité de courant.

## 6. EFFETS MAGNÉTOÉLASTIQUES INVERSES ET EFFET $\Delta E$

Après avoir décrit les effets magnétoélastiques directs, nous allons maintenant montrer comment l'application de contraintes mécaniques sur une substance peut en modifier les propriétés magnétiques.

### 6.1. EFFET D'UNE PRESSION HYDROSTATIQUE SUR UNE SUBSTANCE MAGNÉTIQUE

La pression hydrostatique (isotrope) ne peut pas abaisser la symétrie d'une substance. Elle ne modifiera donc que la valeur de la température de Curie et du moment magnétique. Ce dernier, pouvant être anisotrope dans une substance présentant une symétrie uniaxiale, la variation de moment sous pression hydrostatique pourra être différente selon l'axe  $c$  et dans le plan de base dans le cas de telles substances.

Les variations de température de Curie sous pression sont généralement faibles, sauf pour les substances qui présentent l'effet Invar ( $\partial T_C / \partial P = -35$  K/GPa pour  $Fe_{64}Ni_{36}$  et  $-24$  K/GPa pour l'alliage amorphe  $Fe_{80}B_{20}$ ) [20]. Il existe moins de données concernant les variations sous pression du moment magnétique, car ces mesures sont délicates.

Des relations thermodynamiques ont été établies entre la magnétostriction forcée, la variation du moment magnétique sous pression et la variation sous pression de  $T_C$  exprimée par la dérivée logarithmique  $\Gamma = \partial \ln(T_C) / \partial \ln(V)$ . Par exemple [17] :

$$\mu_0 (\partial m / \partial p) = -(\partial V / \partial H) = -V (\partial \lambda^{\alpha,0} / \partial H) \quad (12.32)$$

$$\frac{\partial \lambda^{\alpha,0}}{\partial H}(T) = \frac{m \frac{\partial \lambda^{\alpha,0}}{\partial H}(0) - 3 \frac{\mu_0 T}{c^\alpha V} \left( \frac{\partial m}{\partial T} \right)_p \Gamma}{1 - 3\alpha_T T \Gamma} \quad (12.33)$$

où  $m = M(T)/M(0)$  représente l'aimantation réduite à la température  $T$  et  $\mathbf{m}$  le moment magnétique associé au volume  $V$  de matière aimantée ;  $c^\alpha$  vaut  $c_{11} + 2 c_{12}$ , et  $\alpha_T$  est le coefficient de dilatation thermique linéaire. La première relation montre que la magnétostriction forcée en volume est proportionnelle à la variation sous pression du moment magnétique, et la seconde, qu'elle présente un maximum vers  $T_C$  (où  $\partial m / \partial T$  devient très fortement négatif) d'autant plus accentué que  $\Gamma$  est élevé :  $\Gamma$  est inférieur à l'unité dans la plupart des matériaux, vaut 5 pour l'alliage amorphe  $Fe_{80}B_{20}$  et 17 pour l'alliage cristallisé  $Fe_{64}Ni_{36}$  (Invar<sup>®</sup>).

## 6.2. EFFET D'UNE CONTRAINTE UNIAXIALE SUR LA COURBE D'AIMANTATION

Nous abordons ici un effet essentiel car il marque profondément les performances des matériaux magnétiques et a été souvent mis à profit pour la réalisation de capteurs : une contrainte uniaxiale déforme le matériau, ce qui engendre une anisotropie magnétique proportionnelle à la déformation, et modifie la perméabilité magnétique. Une bonne connaissance des mécanismes de cette anisotropie induite par les contraintes est donc essentielle à qui veut en maîtriser les effets.

### 6.2.1. Cas d'une substance de symétrie cubique

La partie anisotrope de l'énergie de couplage magnétoélastique (12.10) peut se récrire en tenant compte de (12.16) sous la forme :

$E_{mél} =$

$$- \lambda_{\gamma,2} c^\gamma \left[ \frac{2}{3} \left( \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \right) \left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] - 2 \lambda_{\varepsilon,2} c^\varepsilon (\varepsilon_{yz} \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon_{zx} \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon_{xy} \alpha_1 \alpha_2) \quad (12.34)$$

Nous avons vu au § 3 que le formalisme adopté ici diagonalisait la loi de Hooke, ce qui se traduit par une relation linéaire entre contraintes ( $\sigma$ ) et déformations ( $\varepsilon$ ) :

$$c^\gamma \left( \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \right) = \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \\ c^\gamma (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (12.35)$$

$$c^\varepsilon \varepsilon_{yz} = \sigma_{yz} \quad c^\varepsilon \varepsilon_{zx} = \sigma_{zx} \quad c^\varepsilon \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}$$

Comme une contrainte uniaxiale  $\sigma$  appliquée selon une direction  $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$  se décrit par le tenseur  $\sigma_{ij} = \sigma \gamma_i \gamma_j$ , l'équation (12.34) peut encore s'écrire :

$$E_{mél} = - \lambda_{\gamma,2} \sigma \left\{ \frac{2}{3} \left( \alpha_3^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \right) \left( \gamma_3^2 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \right\} - 2 \lambda_{\varepsilon,2} \sigma (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3 \alpha_1 \gamma_3 \gamma_1) \quad (12.36)$$

C'est là l'expression analytique de l'anisotropie magnétique induite par une contrainte uniaxiale dans un cristal de symétrie cubique.

Lorsque  $\sigma$  est appliquée selon un axe quaternaire, par exemple [001], cette anisotropie est uniaxiale et peut s'écrire simplement :

$$E_{\text{mél}} = -\lambda\gamma^2 \sigma (\alpha_3^2 - 1/3) = K_u \sin^2\varphi + \text{Cte} \quad (12.37)$$

où  $\varphi$  est l'angle entre l'aimantation et la direction d'application de la contrainte, et en posant  $K_u = \lambda\gamma^2 \sigma$ .

De même, quand  $\sigma$  est appliquée selon un axe ternaire [111], cette anisotropie est uniaxiale ; en posant  $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = \cos \varphi$ , et  $K_u = \lambda\epsilon^2 \sigma$ , on voit que :

$$E_{\text{mél}} = -\lambda\epsilon^2 \sigma (\alpha_3^2 - 1/3) = K_u \sin^2\varphi + \text{Cte} \quad (12.38)$$

En dehors de ces deux cas très particuliers, et en raison du caractère tensoriel de la magnétostriction, l'équation (12.36) en général ne se réduit plus à une anisotropie uniaxiale.

### 6.2.2. Cas d'une substance isotrope

Dans ce cas, la condition d'isotropie ( $\lambda\gamma^2 = \lambda\epsilon^2$ ) associée à l'identité (12.9) permet de récrire l'équation (12.36) en posant  $K_u = (3/2)\lambda_s \sigma$  :

$$E_{\text{mél}} = -\frac{3}{2} \lambda_s \sigma \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) = K_u \sin^2\varphi + \text{Cte} \quad (12.39)$$

Ici encore, nous avons une anisotropie uniaxiale induite par la contrainte. Nous allons maintenant discuter dans le détail les conséquences physiques d'une telle anisotropie.

Soumise à un champ magnétique, une substance isotrope, dont le coefficient de magnétostriction  $\lambda_s$  est positif, s'allonge selon la direction d'application du champ, c'est-à-dire la direction selon laquelle s'orientent les moments magnétiques. Et si l'on soumet cette substance à un effort mécanique de traction ( $\sigma > 0$ ), elle s'allonge encore, ce qui favorise un alignement des moments dans la direction selon laquelle s'exerce la traction ( $K_u > 0$ ).

Au contraire, si  $\lambda_s$  est négative, c'est un effort mécanique de compression ( $\sigma < 0$ ) qui donnera le même effet que l'application d'un champ : il y aura encore alignement des moments dans la direction selon laquelle s'exerce l'effort mais, cette fois-ci, l'effort sera de signe contraire au cas précédent.

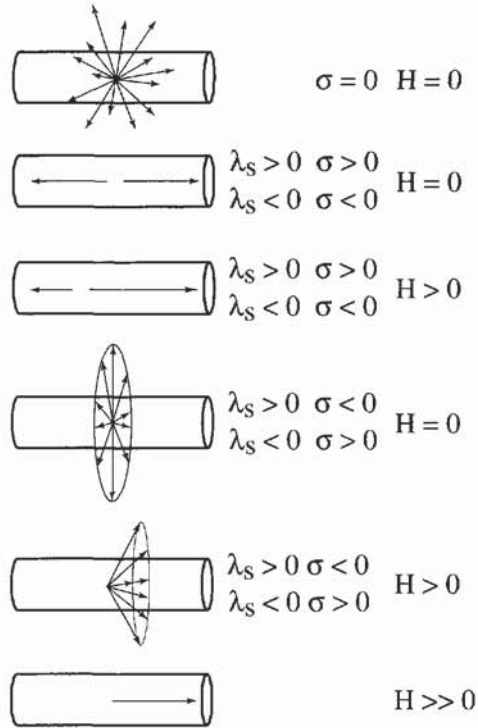
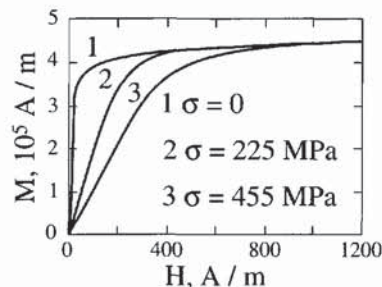
Revenant au cas d'une substance isotrope à  $\lambda_s$  positive, l'application d'une contrainte compressive ( $\sigma < 0$ ) tendra à s'opposer à l'alignement des moments magnétiques selon la direction selon laquelle s'exerce l'effort, et favorisera donc l'établissement des moments dans un plan perpendiculaire à cette direction. Enfin, un tel plan de facile aimantation sera favorisé par une contrainte de traction dans le cas où  $\lambda_s$  sera négative.

La figure 12.27 schématise ces différents comportements. Partant d'une distribution isotrope des moments magnétiques sans champ ni contrainte, on trouve une distribution anisotrope des moments par simple application d'une contrainte, mais l'aimantation reste nulle car il y a autant de moments selon une direction que dans la direction opposée. L'application du champ magnétique va faire basculer de  $180^\circ$  les moments dans la configuration "axe de facile aimantation" et les faire tourner progressivement de  $90^\circ$  dans la configuration "plan de facile aimantation".

Selon la configuration, la saturation sera donc plus facile ou plus difficile à atteindre car la contrainte aura créé soit une direction, soit un plan de facile aimantation : la perméabilité magnétique se trouvera donc soit renforcée soit réduite selon que le signe de  $\lambda_s \sigma$  sera  $> 0$  ou  $< 0$ . On dira que la contrainte a induit une anisotropie magnétique.

A titre d'illustration de ce qui vient d'être dit, la figure 12.28 montre l'influence des contraintes de traction sur la courbe d'aimantation d'un ruban amorphe, le verre métallique  $\text{Co}_{58}\text{Fe}_5\text{Ni}_{10}\text{Si}_{11}\text{B}_{16}$ . Bien que son coefficient de magnétostriction soit très faible,  $\lambda_s = -0,17 \times 10^{-6}$ , l'effet est notable car la perméabilité de ce verre métallique est très élevée sous contrainte nulle (en raison de l'absence de toute anisotropie). Un tel comportement est assez simple, car il s'agit là d'une substance intrinsèquement isotrope.

**Figure 12.28 - Courbes d'aimantation sous traction d'un verre métallique à magnétostriction négative**



**Figure 12.27 - Comportement sous contrainte uniaxiale des substances ferromagnétiques : apparition d'une anisotropie induite**

### 6.2.3. Cas d'un matériau polycristallin

Pour une substance polycristalline, même en l'absence de texture, le problème se complique car l'approximation de la magnétostriction isotrope n'est pas du tout justifiée, comme nous l'avons déjà fait remarquer au § 4.5. Ici encore, le cas du fer est très instructif, car sa magnétostriction est positive selon les directions quaternaires ( $\lambda^{\gamma,2} > 0$ ) et négative selon les directions ternaires ( $\lambda^{\varepsilon,2} < 0$ ). A l'état désaimanté, tous les moments sont équirépartis selon les différentes directions de facile aimantation. L'application d'une contrainte va – pour chaque cristallite – privilégier certaines directions parmi les six directions faciles : ce seront les directions quaternaires les plus voisines de la direction selon laquelle s'exerce l'effort ou du plan perpendiculaire à cette direction selon que  $\lambda^{\gamma,2}\sigma$  sera positif ou négatif. Comme précédemment, la perméabilité initiale sera donc augmentée ou réduite par application de la contrainte, selon le signe du produit  $\lambda^{\gamma,2}\sigma$ . Mais en augmentant le champ magnétique et/ou la contrainte, il va y avoir inversion de cet effet,  $\partial\mu/\partial\sigma$  va changer de signe car les moments vont s'écarter des directions quaternaires, et ce sera alors le signe d'une combinaison de  $\lambda^{\gamma,2}\sigma$  et de  $\lambda^{\varepsilon,2}\sigma$  qui entrera en jeu et non plus seulement celui de  $\lambda^{\gamma,2}\sigma$ .

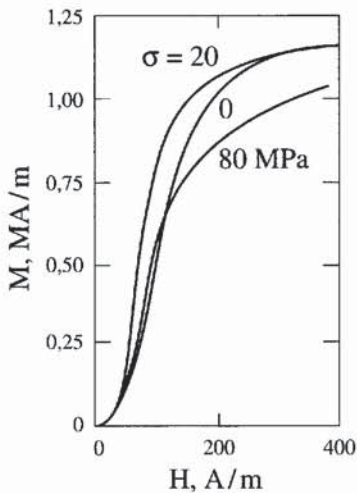


Figure 12.29 - Courbes d'aimantation du fer sous différentes contraintes de traction [21]

La figure 12.29 [21] présente la courbe d'aimantation du fer sous contrainte nulle, puis pour deux valeurs différentes de la contrainte : sous 200 A/m, on constate qu'une contrainte de traction de 20 MPa augmente l'aimantation, tandis qu'une contrainte de 80 MPa la réduit. Au-delà de 300 A/m, une contrainte de traction – aussi faible soit-elle – diminue toujours l'aimantation, tandis qu'à bas champ, une faible traction augmente l'aimantation. L'inversion de signe de  $\partial\mu/\partial\sigma$  est connue sous le nom d'inversion de Villari. Le fer est donc un candidat capricieux au titre de capteur linéaire de contrainte, ce qui n'interdit pas certaines applications industrielles, mais dans des conditions soigneusement déterminées !

Des phénomènes d'hystérésis viennent encore compliquer la situation : ainsi, on peut observer deux courbes d'aimantation sous contrainte très différentes selon que la contrainte est appliquée avant application du champ ( $\sigma, H$ ) ou bien après ( $H, \sigma$ ). Par exemple, l'aimantation d'un Permalloy (alliage à 68% de nickel dans le fer) peut varier, sous  $H = 3$  A/m et  $\sigma = 40$  MPa, de 150 kA/m (processus  $\sigma, H$ ) à 800 kA/m (processus  $H, \sigma$ ). Il est donc essentiel de préciser les conditions exactes d'une telle expérience ! Enfin, les effets que nous venons de

décrire supposent que le matériau est soumis à des contraintes mécaniques qui demeurent dans la limite élastique. Lorsque cette limite est dépassée, on observe des modifications considérables et irréversibles de la courbe d'aimantation.

*Les performances d'un matériau seront donc très sensibles à l'état des contraintes internes.* Si un matériau est le siège de contraintes internes d'orientation et d'amplitude aléatoires, l'anisotropie magnétique résultante sera elle aussi variable en tout point, et il en résultera une difficulté plus grande à saturer le matériau : c'est l'aspect négatif de cette anisotropie que l'on tente de combattre, dans les métaux et alliages, par des recuits destinés à relâcher les tensions internes et par la recherche de matériaux "à magnétostriction nulle". En revanche, il peut être avantageux dans certains cas de créer une anisotropie uniaxiale en exerçant par exemple une contrainte uniforme selon une direction donnée.

Enfin, au-delà de la limite élastique, l'introduction de déformations plastiques dans un matériau ferromagnétique en modifie aussi les propriétés magnétiques, mais de façon irréversible ; on observe alors une anisotropie induite par écrouissage.

### 6.3. EFFET DE LA TORSION SUR UN BARREAU AIMANTÉ (EFFETS WIEDEMANN INVERSE ET MATTEUCI)

Nous avons décrit au § 5 l'effet Wiedemann direct : un champ magnétique de symétrie hélicoïdale appliqué à un échantillon magnétique engendre une torsion de la substance.

Inversement, quand on applique un couple de torsion à un axe aimanté, on modifie son aimantation : c'est l'*effet Wiedemann inverse*. La figure 12.30 montre la répartition des contraintes dans un axe cylindrique en torsion : positives à  $+45^\circ$ , négatives à  $-45^\circ$ . Par effet magnétoélastique inverse, la perméabilité est réduite selon  $+45^\circ$  et augmentée selon  $-45^\circ$ , dans le cas où  $\lambda_s < 0$ .

La différence de perméabilité dynamique entre ces deux directions peut engendrer dans un capteur un signal proportionnel au couple exercé sur l'axe, qui peut même tourner durant la mesure. C'est là le principe des couplemètres sans contact à effet Wiedemann inverse. L'effet Wiedemann direct est obtenu en faisant circuler un courant électrique le long d'un axe aimanté. Un second effet inverse était alors à prévoir : l'apparition d'une tension électrique entre les deux extrémités de l'axe en torsion ; c'est l'*effet Matteuci*, découvert en 1852 par Wertheim, et popularisé en 1856 par Matteuci.

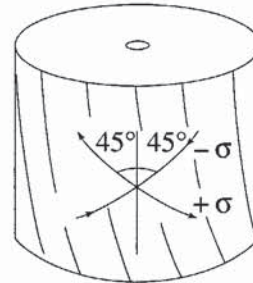


Figure 12.30 - Distribution des contraintes sur un axe en torsion

#### 6.4. ÉCART À LA LOI DE HOOKE POUR LES SOLIDES FERROMAGNÉTIQUES : L'EFFET $\Delta E$

Un barreau orienté selon une direction Oz et soumis à une contrainte  $\sigma_{zz}$  se déforme. Sa variation relative de longueur  $\varepsilon_{zz}$  selon la direction Oz sera proportionnelle à  $\sigma_{zz}$  c'est la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz}/Y \quad (12.40)$$

Cette équation définit le module d'Young Y de la substance. Or, si la substance est magnétique, l'application de la contrainte va *modifier l'aimantation* en raison de l'effet magnétoélastique inverse que nous venons de décrire. Et, en raison de l'effet magnétoélastique direct, une déformation magnétostrictive va accompagner cette variation d'aimantation induite par la contrainte. Cette dernière déformation s'ajoute à la déformation élastique que prévoit l'équation (12.40), ce qui se traduit finalement par une modification du module d'Young apparent : tel est l'effet présenté sur la figure 12.31. On l'appelle effet  $\Delta E$  car le module d'Young a été longtemps désigné par le symbole E (mais dans cet ouvrage, E exprime une densité d'énergie).

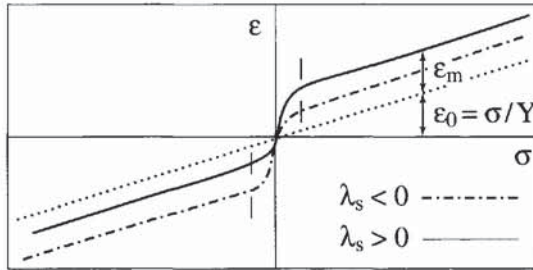


Figure 12.31 - Courbe déformation-contrainte pour un ferromagnétique

L'écart à la loi de Hooke traduit l'effet  $\Delta E$ .

Dans tous les cas, la déformation est supérieure à celle que prévoit la loi de variation linéaire.

A l'aide de la figure 12.27, on peut facilement vérifier qu'il s'agit toujours d'une diminution du module d'Young. En effet, partant d'une distribution isotrope des moments magnétiques ( $\sigma = 0$ ,  $H = 0$ ), l'application d'une contrainte de traction sur un matériau à magnétostriction positive aligne les spins selon Oz, ce qui crée un allongement qui s'ajoute bien à la déformation positive que prévoit la loi de Hooke. De même, l'application d'une contrainte compressive sur un matériau à  $\lambda_s < 0$  aligne aussi les spins selon Oz, ce qui crée un raccourcissement ( $\lambda_s < 0$ ) qui s'ajoute encore à la déformation négative que prévoit la loi de Hooke.

En revanche, l'application d'une contrainte telle que  $\lambda_s \sigma$  soit négatif place les spins dans le plan perpendiculaire à Oz : selon Oz, on ne mesurera donc plus  $\lambda_s$ , mais sa moitié *changée de signe*, et l'on vérifie encore que les deux déformations (élastique et magnétostrictive) sont de même signe.

C'est dans la zone des faibles contraintes (là où l'application de la contrainte peut modifier facilement la structure en domaines de Weiss) que l'effet « $\Delta E$ » est le plus marqué, tandis qu'à plus forte contrainte, on se rapproche de la valeur du module  $Y_0$  que présenterait la substance si elle n'était pas magnétique. On caractérise cet effet par le rapport  $\Delta Y/Y = (Y_0 - Y)/Y$ , rapport qui peut dépasser la dizaine dans certains matériaux. Il s'agit d'un effet magnétoélastique du premier ordre (lié au coefficient  $\lambda_s$ ) qui ne doit pas être confondu avec les effets du second ordre mentionnés au § 1.3 de ce chapitre. Evidemment, l'effet « $\Delta E$ » varie avec le champ magnétique, car il est très étroitement corrélé avec les processus d'aimantation : il n'est donc pas nécessairement maximum à champ nul (tout comme la perméabilité maximum) mais il tend sûrement vers zéro sous champ magnétique intense.

Les propriétés élastiques d'une substance isotrope sont caractérisées par deux constantes d'élasticité, le module d'Young défini par l'équation (12.40) et le coefficient de Poisson  $\nu$ , généralement de l'ordre de 0,3, qui permet d'évaluer la déformation transverse  $\epsilon_{\perp}$  associée à  $\epsilon_{zz}$  :  $\epsilon_{\perp} = -\nu\epsilon_{zz}$ . Comme  $\epsilon_{\perp} = -0,5\epsilon_{zz}$  pour les déformations magnétostrictives, l'effet  $\Delta E$  sera en général accompagné d'une variation du coefficient de Poisson.

Dans une substance cristalline, on observe de la même façon des variations sous champ des coefficients  $c_{ij}$ , surtout notables sous faible champ magnétique, quand les parois de Bloch sont libres de se déplacer. C'est donc sous champ magnétique intense qu'il convient de mesurer les constantes élastiques vraies d'un ferromagnétique doux.

## 7. MODÉLISATION DES TRANSDUCTEURS MAGNÉTOSTRICTIFS

Les deux principaux domaines d'application des matériaux magnétostrictifs sont les actionneurs et les capteurs. On optimise généralement leur fonctionnement en se situant dans la zone la plus linéaire possible de la courbe caractéristique du matériau  $\lambda(H)$  ou  $M(\sigma)$  (figure 12.32). A la précision des mesures, les caractéristiques  $\lambda(H)$  et  $M(\sigma)$  peuvent en effet être remplacées par une droite dans les zones hachurées.

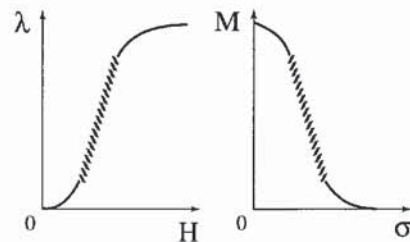


Figure 12.32 - Linéarisation des caractéristiques directe et inverse d'un matériau magnétostrictif

Dans les céramiques piézo-électriques, la déformation engendrée est une fonction essentiellement linéaire du champ électrique appliqué et un formalisme matriciel a été développé qui relie contraintes et déformations élastiques, champ et induction électrique [22].

La magnétostriction anisotrope de Joule, fonction paire de l'induction magnétique, ne se prête pas *a priori* à une représentation matricielle. Cependant, pour modéliser un matériau en vue d'applications techniques, il était souhaitable de pouvoir transposer ce formalisme matriciel simple aux matériaux magnétostrictifs. La solution technique consiste simplement à polariser le matériau par un champ magnétique statique  $H_0$ , pour la courbe  $\lambda(H)$ , et par une contrainte statique  $\Sigma_0$  pour la courbe  $M(\sigma)$ .  $H_0$  et  $\Sigma_0$  sont situés au point d'inflexion de chacune de ces courbes. Il est alors possible de linéariser les équations reliant les grandeurs dynamiques magnétiques ( $b$  et  $h$ ) et mécaniques ( $\varepsilon$  et  $\sigma$ ) :

$$\varepsilon = s^H \sigma + d^* h \quad b = d \sigma + \mu^\sigma h \quad (12.41)$$

Pour assurer la linéarité d'un tel système, l'excitation  $h$  (ou  $\sigma$ ) doit rester en principe assez faible en comparaison de  $H_0$  ( $\Sigma_0$ ) ; toutefois, Claeysen *et al.* [23] ont montré qu'il était possible, avec un sonar de puissance à la résonance, d'observer un déplacement de la charge pratiquement linéaire même pour un fort niveau d'excitation et de déformation (voir plus loin la figure 12.33). Le tenseur  $s^H$  est appelé *tenseur des complaisances élastiques* à champ constant,  $\mu^\sigma$  est le tenseur des perméabilités magnétiques à contrainte constante, et  $d$  est le *tenseur piézo-magnétique* avec la convention  $d_{ij}^* = d_{ji}$ .

### 7.1. COEFFICIENT DE COUPLAGE MAGNÉTOMÉCANIQUE

L'aptitude d'un matériau magnétostrictif à transformer de l'énergie magnétique en énergie élastique – ou *vice versa* – peut se caractériser par un facteur  $k$ , le “coefficient de couplage magnétomécanique” qui est défini comme le rapport de l'énergie magnétoélastique à la moyenne géométrique des énergies élastique et magnétique :

$$k = E_{m\acute{e}l} / \sqrt{E_{\acute{e}l} E_m} \quad (12.42)$$

Ce facteur s'exprime en fonction des coefficients de la matrice élastomagnétique. Nous allons le montrer dans le cas particulier d'un barreau cylindrique qui est souvent utilisé comme actionneur dans les émetteurs sonar (radars acoustiques sous-marins) et dans les actionneurs linéaires qui seront décrits au chapitre 18.

Il s'agit d'un barreau d'axe  $Oz$ , soumis simultanément à une contrainte compressive selon son axe,  $\sigma_{zz}$ , et à un champ magnétique également orienté selon son axe,  $H_z$ . Ce champ est souvent la superposition d'un champ statique  $H_0$  qui polarise le matériau et d'un champ dynamique  $h_z$ , qui constitue l'excitation.

La variation de la densité d'énergie interne  $E$  du matériau polarisé sous l'influence de l'excitation s'écrit, d'après les lois de la thermodynamique :

$$dE = TdS + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + h_z db_z \quad (12.43)$$

où  $S$  est l'entropie par unité de volume.

Le potentiel thermodynamique qu'il convient d'utiliser pour analyser une expérience menée à température constante, sous une contrainte donnée  $\sigma_{zz}$  et en présence d'un champ magnétique  $h_z$  est la fonction de Gibbs généralisée (voir § 4 du chapitre 10) :

$$G = E - TS - \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} - h_z b_z \quad (12.44)$$

La différentielle de  $G$  s'écrit à température constante :

$$dG = -\varepsilon_{zz}d\sigma_{zz} - b_z dh_z \quad (12.45)$$

et d'après l'équation (12.41), nous pouvons exprimer les composantes de la déformation et de l'induction en fonction de celles de la contrainte et du champ :

$$\varepsilon_{zz} = s_{33}^H \sigma_{zz} + d_{33} h_z \quad b_z = d_{33} \sigma_{zz} + \mu_{33}^\sigma h_z \quad (12.46)$$

ce qui permet de récrire (12.45) :

$$\begin{aligned} dG &= -d \left\{ \frac{1}{2} s_{33}^H \sigma_{zz}^2 + d_{33} h_z \sigma_{zz} + \frac{1}{2} \mu_{33}^\sigma h_z^2 \right\} \\ &= -d \{ E_{\acute{e}l} + 2 E_{m\acute{e}l} + E_m \} \end{aligned} \quad (12.47)$$

Il est alors possible de donner l'expression du facteur de couplage magnéto-mécanique dans cette situation expérimentale :

$$k_{33} = d_{33} / \sqrt{s_{33}^H \mu_{33}^\sigma} = d_{33} \sqrt{Y^H / \mu_{33}^\sigma} \quad (12.48)$$

où  $s_{33}^H$  a été remplacée par le module d'Young  $Y^H$ . On montrerait encore, au moyen des équations qui précèdent, que  $k_{33}$  peut encore s'exprimer au moyen des seuls modules d'Young ou des seules perméabilités :

$$(k_{33})^2 = (Y^B - Y^H) / Y^B = (\mu_{33}^\sigma - \mu_{33}^\varepsilon) / \mu_{33}^\sigma \quad (12.49)$$

La seconde égalité par exemple peut se démontrer de la façon suivante ; de la première équation (12.46), on tire l'expression de  $\sigma_{zz}$  que l'on reporte dans la seconde équation :

$$b_z = \mu_{33}^\sigma h_z - (d_{33}^2 / s_{33}^H) h_z + (d_{33} / s_{33}^H) \varepsilon_{zz} \quad (12.50)$$

Quand on impose à  $\varepsilon_{zz}$  de s'annuler, cette dernière équation définit la perméabilité  $\mu_{33}^\varepsilon$  et en utilisant l'équation (12.48), on retrouve bien la seconde équation (12.49) :

$$\mu_{33}^\varepsilon = \mu_{33}^\sigma (1 - k_{33}^2) \quad (12.51)$$

En présence d'un champ magnétique alternatif  $h$ , l'énergie magnétique maximale localisée par unité de volume est  $(1/2) \mu_{33}^\sigma h^2$  quand le barreau est libre de se déformer par magnétostriction, et elle n'est plus que de  $(1/2) \mu_{33}^\varepsilon h^2$  quand il est contraint de telle façon qu'il lui soit impossible de se déformer : dans ce dernier cas, en effet, aucune fraction de l'énergie magnétique n'est convertie en énergie mécanique. La différence  $(1/2) (\mu_{33}^\sigma - \mu_{33}^\varepsilon) h^2$  représente donc la quantité d'énergie magnétique qui est transformée en énergie élastique, en l'absence de toute perte.

Le carré du rapport  $k_{33}$  apparaît ainsi comme la fraction maximale de l'énergie magnétique qui peut être convertie en énergie mécanique et *vice versa*. Il exprime donc le bilan des énergies stockées, sans aucune considération de pertes possibles au cours du processus. Ce n'est pas le rendement, car ce dernier, rapport des énergies utilisées aux énergies fournies, implique la notion d'énergie dissipée. L'analogie du coefficient  $k_{33}$  en électrotechnique est le coefficient de couplage  $k$  d'un transformateur, tel que  $k^2 = M_{12}^2 / L_1 L_2 = (\text{énergie mutuelle})^2 / (\text{énergie primaire}) \cdot (\text{énergie secondaire})$ .

## 7.2. DENSITÉ D'ÉNERGIE ÉLASTIQUE DYNAMIQUE HORS RÉSONANCE

Les performances comparées d'un moteur traditionnel et d'un actionneur intéressent l'ingénieur qui doit choisir le meilleur dispositif du point de vue du rapport qualité/prix. Un point de comparaison essentiel est la densité d'énergie élastique dynamique maximale que peut délivrer un matériau polarisé par un champ magnétique  $H_0$ . Reprenant l'exemple du barreau cylindrique actionneur polarisé selon Oz, cette densité d'énergie s'écrira  $(1/2) Y^H \epsilon_{zz}^2$ . Sa valeur maximale sera donc celle qui correspond à la valeur maximale de la déformation  $\epsilon_{zz} = d_{33} H_0$ , qui suppose que la caractéristique  $\lambda(H)$  est linéaire jusqu'à champ nul.

La densité d'énergie élastique dynamique maximale hors résonance est alors :

$$E_{\max} = \frac{1}{2} Y^H d_{33}^2 H_0^2 \quad (12.52)$$

Nous allons voir maintenant que la résonance peut améliorer ces performances.

## 7.3. COUPLAGE MAGNÉTOÉLASTIQUE À LA RÉSONANCE

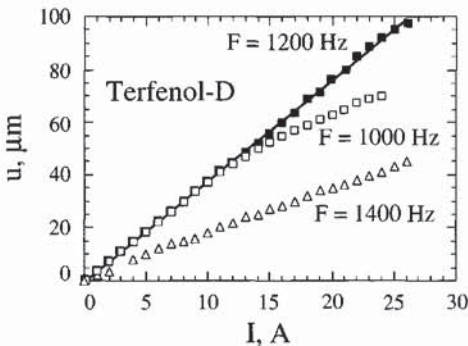


Figure 12.33 - Caractéristique déplacement-courant d'un sonar [23]

Dans sa thèse, F. Claeysen a montré qu'à la résonance mécanique, la déformation maximale observable sur un barreau actionneur pouvait être multipliée par le coefficient de qualité mécanique du matériau actif  $Q_m$ , et donc la densité d'énergie élastique dynamique maximale, par le carré de ce facteur [24]. Des déformations dynamiques de  $3500 \times 10^{-6}$  ont pu être observées sur des barreaux de Terfenol-D, qui présentent une déformation statique maximale de  $1600 \times 10^{-6}$ , tout en utilisant des champs inférieurs à ceux qui auraient été nécessaires pour atteindre la déformation statique maximale.

La figure 12.33 montre la relative linéarité des courbes déformation-courant d'excitation obtenues avec un sonar, le «Tripode», basé sur ce matériau au voisinage de la

La figure 12.33 montre la relative linéarité des courbes déformation-courant d'excitation obtenues avec un sonar, le «Tripode», basé sur ce matériau au voisinage de la

résonance mécanique ( $F_0 = 1200$  Hz). Une analyse détaillée de ces effets de résonance a été publiée dans un excellent article qui décrit les actionneurs et les transducteurs utilisant les matériaux à magnétostriction géante [23].

*Pour en savoir plus sur le couplage magnétoélastique, trois ouvrages de base pourront être consultés :*

- ◆ *un ouvrage théorique qui traite entre autres des phénomènes liés aux rotations locales d'éléments de matière et aux effets magnétoélastiques non uniformes [25]*
- ◆ *un ouvrage en russe qui fait le point principalement sur les recherches effectuées en Union Soviétique [26]*
- ◆ *un ouvrage de revue sur 150 années de recherche et d'applications de la magnétostriction dans le monde depuis sa découverte par Joule en 1842, et dans lequel sont abordés divers sujets qui dépassent le cadre de ce manuel de magnétisme (piézomagnétisme, frottement interne, parastriction, ...) [2].*

## APPENDICE : RAPPELS D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

L'énergie élastique traduit la difficulté à déformer un solide en l'écartant de sa configuration d'équilibre ; c'est donc une mesure de sa cohésion.

Un ressort est en première approximation un objet unidimensionnel et sa déformation est caractérisée par un seul paramètre, son allongement relatif  $\varepsilon = (x - x_0) / x_0$  où  $x$  est sa longueur quand il est déformé, et  $x_0$  sa longueur au repos. Quand on le déforme, son énergie potentielle varie d'une quantité :

$$\delta\mathcal{E} = (1/2)k(x - x_0)^2 = (1/2)(kx_0^2) \varepsilon^2 = (1/2) c \varepsilon^2.$$

Un solide est en général un objet tridimensionnel, et sa distorsion est définie par  $3^2$  paramètres qui sont les neuf dérivées partielles  $\partial u_i / \partial x_j$  du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point matériel attaché au solide repéré par rapport à un trièdre orthonormé. Les trois paramètres :

$$\varepsilon_{ii} = \partial u_i / \partial x_i \quad (12.53)$$

mesurent les allongements relatifs mesurés selon trois directions orthogonales, et les six autres paramètres, pour  $i \neq j$ , sont regroupés en trois composantes symétriques :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (12.54)$$

et trois composantes antisymétriques :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (12.55)$$

Les  $\omega_{ij}$  sont les composantes de la rotation, et les  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) représentent les trois composantes du cisaillement. Un cisaillement est la déformation que subit une plaque carrée lorsque l'on étire une de ses diagonales (voir la figure 12.4).

Dans cet ouvrage, nous ignorons les rotations et ne considérerons que les six composantes de la déformation, *supposées toutes très faibles devant l'unité*. Généralisant le cas du ressort, nous écrirons la densité d'énergie élastique comme une expression quadratique en déformations :

$$E_{el} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (12.56)$$

Les 36 *coefficients d'élasticité*  $c_{ijkl}$  sont donc les dérivées secondes de la densité d'énergie potentielle du solide par rapport aux six composantes de la déformation. En raison des relations de Maxwell  $\partial^2 E / \partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl} = \partial^2 E / \partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}$ , il n'existe que 21 coefficients d'élasticité indépendants,  $c_{ijkl} = c_{klij}$ . On a coutume, depuis Voigt, d'appliquer la règle de contraction des indices : 11  $\rightarrow$  1, 22  $\rightarrow$  2, 33  $\rightarrow$  3, 23  $\rightarrow$  4, 31  $\rightarrow$  5, 12  $\rightarrow$  6. Ainsi,  $c_{1112}$  s'écrira  $c_{16}$ .

La loi de Hooke exprime la proportionnalité des déformations aux contraintes qui les engendrent, dans le cadre de l'élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (12.57)$$

Cette loi peut encore s'écrire, en introduisant les *complaisances élastiques*  $s_{ijkl}$  :

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (12.58)$$

La symétrie du solide permet souvent de simplifier notablement l'expression de l'énergie élastique qui ne comporte plus que cinq coefficients indépendants pour la symétrie hexagonale, trois pour la symétrie cubique ( $c_{11}$ ,  $c_{12}$  et  $c_{44}$ ), et deux pour un solide isotrope car  $2c_{44} = c_{11} - c_{12}$ .

La loi de Hooke peut se diagonaliser dans le cas des substances *isotropes et de symétrie cubique* ; les modes propres de déformation alors obtenus sont :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \epsilon_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \epsilon_{zz} - \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \right) & \epsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \\ \epsilon_4 &= \sqrt{2} \epsilon_{yz} & \epsilon_5 &= \sqrt{2} \epsilon_{zx} & \epsilon_6 &= \sqrt{2} \epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (12.59)$$

Les modes propres de contraintes leur sont isomorphes (les  $\epsilon$  sont remplacés par les  $\sigma$ ), et les coefficients d'élasticité associés aux modes propres ainsi définis sont :

$$\begin{aligned} \text{pour le mode (1)} & \quad c_{11} + 2 c_{12} = \frac{1}{s_{11} + 2s_{12}} \\ \text{pour les modes (2) et (3)} & \quad c_{11} - c_{12} = \frac{1}{s_{11} - s_{12}} \\ \text{pour les modes (4), (5) et (6)} & \quad 2 c_{44} = \frac{2}{s_{44}} \end{aligned} \quad (12.60)$$

En symétrie cubique, ces trois coefficients sont appelés respectivement  $c^\alpha$ ,  $c^\gamma$  et  $c^\epsilon$ . Pour un solide isotrope,  $c^\gamma = c_{11} - c_{12} = 2 c_{44}$ . Les notations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... se rapportent aux représentations irréductibles  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  ... des groupes de symétrie définis par Bethe et introduits en magnétoélasticité par Callen et collaborateurs [3].

Une description aussi sommaire de l'élasticité n'est valable que lorsque les déformations sont très faibles et homogènes. Elle serait insuffisante par exemple pour traiter les effets dynamiques tels que la propagation d'ondes de spin couplées avec des ondes élastiques (ondes magnétoélastiques), qui mettent en jeu des rotations locales de matière, ou l'élasticité de substances soumises à une forte précontrainte. La théorie générale de l'élasticité basée sur les tenseurs d'élasticité de Lagrange et tenant compte des effets anharmoniques (constantes élastiques du troisième ordre) s'impose alors [2, 24]. Le lecteur désireux d'en savoir plus est invité à consulter des ouvrages spécialisés d'élasticité.

Pour les symétries plus basses il n'est plus possible de diagonaliser complètement la loi de Hooke, mais la description complète des effets magnétoélastiques se trouve déjà dans la littérature pour les symétries hexagonale, quadratique et orthorhombique. Pour les symétries encore plus basses (rhomboédrique, monoclinique et triclinique), la théorie reste à faire, et devra tenir compte de la *variance* des tenseurs.

*N.B.* - Si Voigt a introduit une règle de contraction des indices qui simplifie bien la description de l'élasticité, il a aussi, malheureusement, défini les déformations de façon erronée :  $e_{ii} = \varepsilon_{ii}$ ,  $e_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ), ce qui est inacceptable car avec sa définition, les composantes de la déformation ne constituent plus un tenseur ; son expression des cisaillements est fautive. Malheureusement, de nombreux travaux en magnétisme continuent même aujourd'hui à utiliser cette définition défectueuse !

## EXERCICES

**E.1** La densité d'énergie libre d'une substance ferromagnétique peut s'écrire sous la forme générale :

$$\begin{aligned}
 E = & \sum_{i,j} k_{ij} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i,j,k,l} k_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l + \dots \\
 & + \sum_{i,j} B_{ij} \varepsilon_{ij} + \sum_{i,j,k,l} B_{ijkl} \varepsilon_{ij} \alpha_k \alpha_l + \sum_{i,j,k,l,m,n} B_{ijklmn} \varepsilon_{ij} \alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n + \dots \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \left( C_{ijkl} + M_{ijkl} + \sum_{m,n} M_{ijklmn} \alpha_m \alpha_n + \dots \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \quad (12.61)
 \end{aligned}$$

où les coefficients  $k$ ,  $B$ ,  $C$  sont respectivement des coefficients d'anisotropie, de couplage magnétoélastique, et d'élasticité qui ne dépendent en première approximation que de la température, les  $\alpha_i$  sont les cosinus directeurs de l'aimantation et les  $\varepsilon_{ij}$  sont les composantes du tenseur des déformations, tandis que les coefficients  $M$  décrivent les contributions magnétiques intrinsèques aux constantes élastiques.

**E.1.1** - Partant de cette équation, montrer que la densité d'énergie élastique et magnétoélastique d'un cristal ferromagnétique de symétrie cubique s'écrit simplement, en se limitant aux termes de degré  $\leq 2$  en cosinus directeurs de l'aimantation :

$$E = \left\{ \frac{1}{2} c_{11} \epsilon_{xx}^2 + c_{12} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} + 2 c_{44} \epsilon_{yz}^2 \right\} + \text{permut. circ.} \\ + \left\{ B_0 \epsilon_{xx} + B_1 \epsilon_{xx} (\alpha_1^2 - \frac{1}{3}) + 2 B_2 \epsilon_{yz} \alpha_2 \alpha_3 \right\} + \text{permut. circ.} \quad (12.62)$$

**E.1.2** - Montrer que cette expression de la densité d'énergie peut se récrire sous la forme des équations (12.10) et (12.11).

**E.2** Déterminer la valeur des coefficients de magnétostriction du YIG en utilisant les résultats expérimentaux des figures 12.8 et 12.9.

**E.3** Démontrer que  $(k_{33})^2 = \frac{Y_B - Y_H}{Y_B}$  (premier terme de l'équation 12.49).

**E.4** Calculer comment se déforme un long tube fin en métal ferromagnétique aimanté selon son axe, et au centre duquel se trouve un fil parcouru par un courant électrique (variante de l'effet Wiedemann). Application au cas d'un tube en nickel :  $R = 5 \text{ mm}$ ,  $H = 1 \text{ kA/m}$  et  $i = 1 \text{ A}$ .

**E.5** Dans un modèle localisé, le couplage magnétoélastique de Joule provient d'interactions "de paires" c'est-à-dire d'interactions magnétiques entre atomes proches voisins, qui sont à très courte portée. Néel les a écrites de façon classique pour le terme de champ cristallin :

$$E = g(r) [\cos^2\phi - 1/3] \quad (12.63)$$

En se limitant aux interactions entre plus proches voisins :

**E.5.1** - Montrer que l'anisotropie magnétocristalline provenant de ces interactions est nulle pour un cristal cubique simple, et s'écrit  $K (\cos^2\phi - 1/3)$  pour un cristal hexagonal.

**E.5.2** - Ecrire l'expression de l'énergie magnétoélastique anisotrope d'un cristal cubique à faces centrées (termes  $B\gamma^2$  et  $B\epsilon^2$  de l'équation 12.10).

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**S.1 S.1.1** On utilisera les relations de Maxwell,  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , la règle de contraction des indices de Voigt, et on écrira que l'énergie doit être invariante vis-à-vis des opérations de symétrie permises par la symétrie cubique.

**S.1.2** On diagonalisera l'expression de la loi de Hooke ( $\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$ ), ce qui définira de nouvelles composantes de la déformation qui sont des combinaisons linéaires des  $\epsilon_{ij}$ .

**S.2** Dans l'équation (12.15), on pose  $\beta_1 = -\beta_2 = 1/\sqrt{2}$ , puis on calcule les valeurs de  $\lambda$  pour les directions de l'aimantation observées sur la figure 12.8, et l'on fait les différences  $\lambda_{//} - \lambda_{\perp}$  pour les trois directions perpendiculaires mesurées : cela

donne trois équations pour deux inconnues,  $\lambda^{\gamma,2}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2}$ . Après correction de l'effet de forme donné par les équations (12.27) à (12.29), on vérifie que ces 3 équations sont compatibles, et donnent :  $\lambda^{\gamma,2} = -1,9 \times 10^{-6}$  et  $\lambda^{\varepsilon,2} = -4,1 \times 10^{-6}$ .

**S.3** La démonstration suivra la même démarche que celle proposée pour le second terme de l'équation (12.49).

**S.4** On considère un petit élément carré du cylindre, que l'on suppose parallèle au plan  $yOz$ .

- ♦ On calcule le champ magnétique  $h_y$  créé par  $i$ . On en déduira les cosinus directeurs du champ magnétique résultant  $H + h_y$  en fonction de l'angle  $\phi = \text{Arctg}(h_y/H)$ . Ce seront aussi les cosinus directeurs  $\alpha_i$  de l'aimantation car la substance est isotrope :  $\mathbf{M} // \mathbf{H}$ . On admettra que  $\phi$  est très petit.

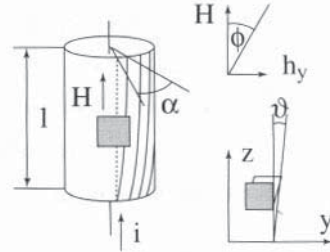


Figure - 12.34

- ♦ Puis on calcule  $\varepsilon_{yz} = (3/2)\lambda_s \alpha_2 \alpha_3$  en présence du courant  $i$ .
- ♦ On en déduit l'angle  $\vartheta$  dont a tourné une génératrice du cylindre ( $\vartheta = \varepsilon_{yz}$ ), et on calcule enfin la torsion du cylindre,  $\xi = \alpha/l = \vartheta/R$ .

**N.B.** - L'angle  $\vartheta$  n'est pas égal à  $\phi = \text{Arctg}(h_y/H)$  : il lui est bien inférieur.

**A.N.** - Pour le nickel,  $\lambda_s = -36 \times 10^{-6}$  d'où :  $\xi = -0,34 \times 10^{-3}$  rad/m.

**S.5 S.5.1** Cas du cristal cubique :  $E = 2 g(r) \Sigma\{\alpha_i^2 - (1/3)\} = 0$  ; cas du cristal hexagonal : si  $c/a < 1$ ,  $E = 2 g(r) \{\alpha_3^2 - (1/3)\}$ , et si  $c/a > 1$ , la somme doit être faite sur les 6 paires d'atomes du plan de base, situés en  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(\pm a\sqrt{3}/2, a/2, 0)$  et  $(\pm a\sqrt{3}/2, -a/2, 0)$ .

**S.5.2** Les déformations d'un cristal repérées dans un référentiel orthonormé se représentent par un tenseur ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yz}, \dots$ ) à six composantes ; l'allongement relatif selon une direction quelconque de l'espace  $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$  s'écrit :

$$\partial r/r = \{\varepsilon_{xx} \beta_1^2 + 2 \varepsilon_{yz} \beta_2 \beta_3\} + \text{permut. circ.}$$

et les cosinus directeurs  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  d'une fibre avant déformation deviennent après :  $u_1 = \beta_1 [1 + \varepsilon_{xx} (1 - \beta_1^2) - \varepsilon_{yy} \beta_2^2 - \varepsilon_{zz} \beta_3^2 - 2 \varepsilon_{yz} \beta_2 \beta_3] + \varepsilon_{zx} \beta_3 (1 - 2 \beta_1^2) + \varepsilon_{xy} \beta_2 (1 - 2 \beta_1^2) - \omega_{zx} \beta_3 + \omega_{xy} \beta_2$  ;  $u_2, u_3$  : permut. circ.

Dans un cristal cfc, les douze atomes premiers voisins de l'origine sont situés en  $(\pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, \pm a/\sqrt{2}, \pm a/\sqrt{2})$ ,  $(\pm a/\sqrt{2}, 0, \pm a/\sqrt{2})$  c'est-à-dire sur les diagonales de faces. L'expression (12.50) est à sommer sur les douze paires correspondantes.

On trouve :  $B\gamma^2 = (N/V_0)\{(3 g(r_0) + (1/2)r_0 \partial g/\partial r)\}$

et  $B\varepsilon^2 = (N/V_0)\{(2 g(r_0) + r_0 \partial g/\partial r)\}$

si l'on admet que la substance comporte  $N/V_0$  atomes magnétiques par unité de volume.

## RÉFÉRENCES

- [1] L. NÉEL, *J. Phys. Radium* (1954) **15**, 225.
- [2] E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, *Magnetostriction : Theory and Applications of Magnetoelasticity* (1993) C.R.C. Press, Boca Raton (USA).
- [3] E.R. CALLEN, H.B. CALLEN, *Phys. Rev.* (1963) **129**, 578; *ibid.* (1965) **139A**, 455.
- [4] G. AUBERT, E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, *J. Physique* (1987) **48**, 169.
- [5] T.G. KOLLIE, *Phys. Rev.* (1977) **B16** 4872.
- [6] G.K. WHITE, F.W. SHEARD, *J. Low Temp. Phys.* (1974) **14**, 445.
- [7] L. NÉEL, *Ann. de Phys.* (1937) **8**, 237.
- [8] E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, *J. Physique* (1976) **37**, 379.
- [9] E.R. CALLEN, A.E. CLARK, B. DE SAVAGE, W. COLEMAN, H.B. CALLEN, *Phys. Rev.* (1963) **130**, 1735.
- [10] E. TATSUMOTO, O. OKAMOTO, *J. Phys. Soc. Japan* (1959) **14**, 1588 ; E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, R. MENDIA MONTERROSO, *J. Magn. Magn. Mater.* (1983) **31-34**, 837.
- [11] W.L. WEBSTER, *Proc. Roy. Soc. London* (1925) **A109**, 570.
- [12] A. HUBERT, W. UNGER, J. KRANZ, *Z. Physik*, (1969) **224**, 148.
- [13] B.S. BERRY, W.C. PRITCHET, *Solid State Comm.* (1978) **26**, 827.
- [14] E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, *J. Magn. Magn. Mater.* (1979) **13**, 307.
- [15] L.W. MCKEEHAN, *J. of the Franklin Institute* (1926) **202**, 737.
- [16] J. BETZ, E. DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, L.T. BACZEWSKI, *Appl. Phys. Lett.* (1996) **68**, 132.
- [17] R. GERSDORF, Thèse, Amsterdam (1961).
- [18] H.D. BUTZAL, *Intern. J. Magnetism* (1973) **3**, 243.
- [19] H.A. PIDGEON, *Phys. Rev.* (1919) **XIII**, 209.
- [20] G. BÉRANGER, F. DUFFAUT, J. MORLET, J.F. TIERS, *Les Alliages de Fer et de Nickel* (1996) Lavoisier, Tec & Doc. Paris.
- [21] E. VILLARI, *Ann. Phys. Chem. (Ann. Poggendorf)* (1865) **126**, 87.
- [22] D.A. BERLINCOURT, D.R. CURRAN, H. JAFFE, *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and their Function in Transducers*, in *Physical Acoustics*, W.P. Mason editeur (1966) Acad. Press, New-York, Vol. IA.
- [23] F. CLAEYSSEN, N. LHERMET, R. LE LETTY, P. BOUCHILLOUX, *J. Alloys and Compounds* (1997) **258**, 61.
- [24] F. CLAEYSSEN, Thèse, INSA de Lyon (1989).
- [25] W.F. BROWN JR., *Magnetoelastic Interactions* (1966) Springer Verlag, Berlin.
- [26] K.P. BELOV, *Phénomènes Magnétostrictifs et leurs Applications Techniques*, (1987) Moskva Nauka, Glavnaïa Redactia Fiziko-Matematicheskoi Literatury, Moscou. (*en russe*)

# CHAPITRE 13

## LES EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES

*Découverts il y a plus d'un siècle et demi, les effets magnéto-optiques ont suscité ces dernières années une curiosité renouvelée, débouchant sur des progrès spectaculaires en physique et de multiples applications technologiques : après avoir conquis le domaine "grand public" de l'enregistrement magnéto-optique du son et de l'image, ils vont sans doute déferler sur l'informatique. Très utilisés au laboratoire, tant pour caractériser les matériaux magnétiques que pour étudier les semi-conducteurs, ils font aujourd'hui l'objet d'études de pointe dans un domaine spectral qui leur semblait totalement étranger au départ, celui des rayons X, en rayonnement synchrotron.*

*Nous nous limitons ici aux effets magnéto-optiques les plus utilisés dans le contexte de cet ouvrage, centré sur les matériaux magnétiques. Une approche qualitative décrit les phénomènes au § 1 ; elle est suivie d'une description phénoménologique plus formelle (§ 2), tandis que le § 3 donne quelques points de vue physiques simples. Le § 4 est consacré aux méthodes de mesure et aux ordres de grandeur des phénomènes magnéto-optiques. Le § 5 ébauche un panorama de leurs utilisations en physique et de leurs applications technologiques. Un appendice expose de façon concise quelques éléments d'optique des matériaux non magnétiques nécessaires en particulier à la compréhension du § 2.*

*Parmi les références de ce chapitre figurent plusieurs ouvrages ou articles de revue essentiels sur les effets magnéto-optiques : le livre de Sokolov [1] sur l'optique des métaux, qui traite abondamment de ces effets ; des articles de revue très clairs de Dillon [2] ; d'autres revues, classiques, de Pershan [3] et Freiser [4] seront utiles à condition de se méfier des fautes d'impression qui entachent souvent les expressions analytiques. Zvezdin & Kotov viennent d'écrire un livre entièrement consacré aux effets magnéto-optiques [5] qui constitue l'ouvrage de référence sur le sujet.*

### 1. PRÉSENTATION DES EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES

Nous appellerons effets magnéto-optiques les influences directes sur la lumière de l'état magnétique, le plus souvent caractérisé par l'aimantation, d'un matériau dans lequel elle se propage, ou sur lequel elle se réfléchit. Dans les milieux magnétiques

ordonnés à aimantation spontanée non nulle (ferro- et ferrimagnétiques), c'est alors l'aimantation mésoscopique  $\mathbf{M}$  (voir chapitre 3, § 2) qui joue le rôle essentiel.

*N.B. : Nous ne considérerons pas comme un effet magnéto-optique l'influence (indirecte) qu'exerce sur la lumière la déformation de la surface d'un ferrofluide ou d'un échantillon solide magnétostrictif, sous l'effet d'un champ magnétique.*

Ces effets magnéto-optiques peuvent se manifester par une modification de la direction de propagation, mais surtout de la polarisation et/ou de l'intensité de la lumière. Celle-ci est en général petite, et se superpose aux effets des autres caractéristiques optiques de l'échantillon. Sa détection impliquera donc la mise en évidence des *variations* des propriétés de la lumière qu'entraîne une modulation de l'état magnétique du système, par un champ magnétique appliqué le plus souvent. On la mettra en évidence, dans les matériaux ferro- et ferrimagnétiques, en inversant l'aimantation de l'échantillon ; dans les para- et diamagnétiques, on pourra comparer le comportement avec et sans champ magnétique appliqué.

Il est naturel d'étendre la définition des effets magnéto-optiques aux ondes électromagnétiques situées hors du domaine visible, y incluant l'ultraviolet, l'infrarouge et les ondes centimétriques. On peut également étendre le champ de ces effets aux rayons X : dans ce cas, la répartition à l'échelle microscopique des moments magnétiques pourra jouer un rôle, la longueur d'onde de la sonde étant alors de l'ordre de grandeur des distances interatomiques.

*La terminologie habituelle de la magnéto-optique est parfois ambiguë. Le terme "linéaire" (en anglais linear) est utilisé à la fois pour dire que l'effet diffère, en indice de réfraction (biréfringence) ou en absorption (dichroïsme), le comportement de modes propres de la lumière à polarisation rectiligne (ou linéaire), et pour indiquer que l'effet varie linéairement avec le champ ou l'aimantation (par opposition à une variation quadratique). Nous utiliserons "rectiligne" au lieu de "linéaire" pour nous référer à la polarisation. Ainsi, nous désignerons l'effet Voigt ou l'effet Cotton-Mouton comme de la biréfringence rectiligne quadratique. Par ailleurs, nous noterons que les effets désignés comme "non-linéaires" (§ 1.3) sont ceux où la fréquence, donc la longueur d'onde, de la lumière ne sont pas les mêmes à l'entrée et à la sortie.*

## 1.1. EFFETS EN TRANSMISSION

### 1.1.1. Effet Faraday

L'effet Faraday, découvert en 1845, reste le plus simple à décrire, et le plus facile à observer. Si un faisceau de lumière initialement polarisé rectilignement se propage le long d'une direction  $z$  dans un matériau dans lequel règne un champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  parallèle à  $z$ , la polarisation du faisceau va tourner d'un angle  $\theta_F$ , proportionnel à la distance  $d$  parcourue dans le matériau (figure 13.1). L'inversion du sens de  $\mathbf{B}$  conduirait à une rotation opposée. De plus, si le matériau est absorbant

(et il l'est toujours lorsque les effets magnéto-optiques existent), il apparaîtra une ellipticité, croissante avec  $d$ .

L'effet Faraday existe naturellement dans les milieux dits "non magnétiques", c'est-à-dire sans aimantation spontanée : dans ce cas, on peut écrire  $\theta_F = k_v B d$ , où la constante de proportionnalité  $k_v$  est appelée constante de Verdet. Mais nous nous intéressons surtout, dans ce chapitre, au cas de matériaux ferro- ou ferrimagnétiques. L'effet du champ magnétique est alors essentiellement de piloter la répartition, dans l'échantillon, de domaines caractérisés par des directions différentes de  $\mathbf{M}$ . En général, l'état de la lumière à la sortie de l'échantillon est inhomogène, ce qui permet d'observer les domaines directement (voir § 5.1.5 ci-dessous et chapitre 5, § 6.1.2). Plus généralement, c'est la composante de  $\mathbf{B}$  dans la direction de propagation qui joue : l'effet s'annule lorsque  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à la propagation.

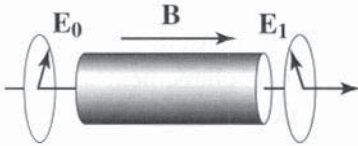


Figure 13.1  
Géométrie de l'effet Faraday

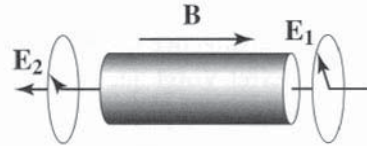


Figure 13.2  
Caractère non-réciproque de l'effet Faraday

Le parcours d'une distance  $d$  dans un échantillon où le champ d'induction magnétique est  $B$  entraîne une rotation de son plan de polarisation de  $\theta_F$ , proportionnelle à  $d$ . Il entraîne aussi une ellipticité, non représentée, de l'onde émergente. Sur la figure 13.2, le parcours de la région de champ magnétique en sens opposé entraîne une rotation  $\theta_F$  de même sens que sur la figure 13.1 par rapport à un repère fixe. En revanche, des observateurs recevant chaque fois le faisceau de face verraient des rotations en sens opposés pour les situations des figures 13.1 et 13.2.

Un caractère remarquable de l'effet Faraday, et des effets magnéto-optiques linéaires, est sa *non-réciprocité*. Si, sur la figure 13.1, on imaginait que le sens de  $\mathbf{B}$  soit inversé, mais non la direction de propagation de la lumière, on s'attendrait bien à ce que l'observateur qui recevrait le faisceau voit une rotation inversée. La figure 13.2 représente la situation complémentaire : le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est inchangé, mais la direction de propagation est inversée : pour l'observateur (cette fois placé à gauche et regardant vers la droite), la rotation, dans le sens des aiguilles d'une montre, est l'inverse de celle dessinée sur la figure 13.1. Mais ceci signifie que, par rapport au laboratoire, la rotation a lieu dans le même sens sur les figures 13.1 et 13.2. Par conséquent, si l'on fait passer successivement le faisceau en sens opposés dans le même échantillon de longueur  $d$ , la rotation sera  $2\theta_F$ .

Ceci distingue notamment cette rotation due à un champ magnétique (gyrotropie magnétique) de celle due à un pouvoir rotatoire ordinaire, par exemple celui du quartz, où deux passages en sens opposés annuleraient la rotation.

La rotation comme l'ellipticité produites par l'effet Faraday se décrivent commodément en traitant la propagation d'ondes polarisées circulairement, droite et gauche.

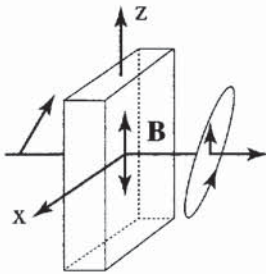
Nous verrons plus loin que ces modes constituent les modes propres, et qu'il leur correspond des indices de réfraction complexes et différents.

La rotation Faraday résulte du fait que l'une des polarisations circulaires se propage un peu plus vite que l'autre, ce qui se traduit par la différence des parties réelles de ces indices (biréfringence magnétique circulaire). Le dichroïsme circulaire associé aux parties imaginaires de l'indice rend compte de l'ellipticité parce que l'une des deux composantes circulaires est atténuée plus que l'autre.

### 1.1.2. Biréfringence magnétique rectiligne quadratique

Un effet de biréfringence affectant de façon différente les deux modes propres orthogonaux de polarisation rectiligne, mais quadratique par rapport au champ magnétique appliqué, ou à l'aimantation, s'ils sont perpendiculaires à la direction de propagation de la lumière, apparaît dans les liquides comme dans les solides.

Cet effet de biréfringence quadratique (figure 13.3), et donc insensible au sens de  $\mathbf{B}$ , englobe tant l'effet Voigt que l'effet Cotton-Mouton, dû à l'alignement de molécules anisotropes dans des liquides. Il lui est également associé un dichroïsme rectiligne. Il est malheureusement souvent appelé "biréfringence linéaire" parce qu'il affecte de façon différente les deux états propres orthogonaux de polarisation rectiligne (voir § 1 ci-dessus).



**Figure 13.3 - La biréfringence quadratique due à un champ ou une aimantation suivant z entraîne un déphasage entre les composantes de  $\mathbf{E}$  suivant x et suivant z**

Une lumière incidente polarisée suivant une direction ne coïncidant ni avec x ni avec z devient une lumière elliptique après passage dans le matériau. Ceci vient du fait qu'un matériau ne peut pas être isotrope quand il est doté d'une aimantation, et formellement ceci traduit la non-équivalence entre les directions x ou y d'une part et z d'autre part lorsque l'aimantation est suivant z.

### 1.1.3. Biréfringence magnétique rectiligne linéaire

Il s'agit ici encore de biréfringence associée à la différence d'indice de réfraction entre les deux polarisations rectilignes orthogonales (ce qui la distingue de l'effet Faraday, caractérisé par la différence des indices associés aux deux états de polarisation circulaires), mais linéaire (et non quadratique, ce qui la distingue de l'effet Voigt ou Cotton-Mouton) par rapport au champ magnétique, appliqué cette fois dans la direction de propagation. Cet effet n'est possible que dans certaines classes de symétrie magnétique [6], en particulier dans des matériaux magnétoélectriques et dans des fluorures de métaux de transition antiferromagnétiques ( $\text{FeF}_2$ ,  $\text{CoF}_2$ , ...).

## 1.2. EFFETS EN RÉFLEXION

On désigne ces phénomènes sous les noms d'effets magnéto-optiques de Kerr, et on distingue trois géométries fondamentales.

### 1.2.1. Effet Kerr polaire

Un faisceau de lumière polarisée rectilignement tombe en incidence normale sur une surface aimantée perpendiculairement à la surface (figure 13.4-a). Après réflexion, la polarisation a tourné d'un angle  $\theta_K$ , typiquement inférieur au degré, et une ellipticité est apparue. L'inversion de l'aimantation conduit à une rotation en sens opposé.

Ce cas correspond à une situation défavorable du point de vue magnétostatique (voir chapitre 2). Elle ne se présente que si l'aimantation est forcée à être perpendiculaire à la surface, sous l'effet soit d'un champ magnétique appliqué suffisamment fort, soit d'une anisotropie "perpendiculaire".

### 1.2.2. Effet Kerr longitudinal

Un faisceau arrive sur une surface aimantée dans son plan en incidence oblique (figure 13.4-b), l'aimantation étant dans le plan d'incidence de la lumière. Si la polarisation ( $\mathbf{E}$ ) du faisceau incident est perpendiculaire (s) ou parallèle (p) au plan d'incidence la polarisation émergente est légèrement elliptique avec un grand axe faisant avec la polarisation incidente un angle généralement inférieur au degré. Une polarisation incidente quelconque (différente de s ou p) ajouterait le déphasage de la réflexion ordinaire et rendrait l'effet magnéto-optique bien moins perceptible. Ici encore, la rotation s'inverse quand on inverse l'aimantation.

### 1.2.3. Effet Kerr transverse

La géométrie est la même que dans le cas longitudinal, à ceci près que l'aimantation, toujours contenue dans le plan de surface, est perpendiculaire au plan d'incidence (figure 13.4-c). Il n'y a alors pas de rotation pour les polarisations s ou p et, en fait, il n'y a pas du tout d'effet pour la polarisation s. En revanche, l'inversion de l'aimantation conduit, si la polarisation incidente est p, à une variation de l'intensité réfléchie.

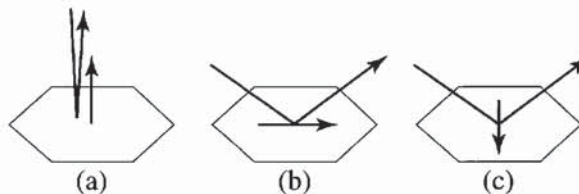


Figure 13.4 - Les trois configurations de base des effets Kerr magnéto-optiques :  
(a) polaire - (b) longitudinal - (c) transverse

### 1.3. EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES NON LINÉAIRES

Il s'agit de situations de génération de second harmonique, où une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$  engendre une onde de pulsation différente, en pratique  $2\omega$ . Les effets magnéto-optiques associés à cet effet, très faible en général, sont particulièrement intéressants précisément parce que l'effet est interdit par symétrie dans les matériaux centrosymétriques. Outre sa présence dans les matériaux magnétoélectriques, il se manifeste aux surfaces de couches constituées de matériaux centrosymétriques, et en particulier de métaux magnétiques, car la symétrie  $y$  est brisée [7]. Il constitue donc une façon élégante d'examiner sélectivement le magnétisme de surfaces et interfaces.

### 1.4. DIFFRACTION MAGNÉTIQUE ET DICHROÏSME MAGNÉTIQUE DES RAYONS X

Les rayons X interagissent surtout avec la densité électronique dans la matière (diffusion Thomson). Cependant, il existe aussi un petit terme d'interaction magnétique, dont la première mise en évidence expérimentale, à l'aide d'un tube à rayons X classique, fut un tour de force [8]. Le développement du rayonnement synchrotron a rendu ces expériences plus courantes, permettant de mesurer séparément les contributions orbitale et de spin au magnétisme. Une forme résonnante, où l'effet magnétique est accentué pour des longueurs d'onde bien choisies, a été découverte dès les premiers essais en rayonnement synchrotron. L'effet du magnétisme des atomes, lorsqu'ils sont arrangés périodiquement en un cristal, donne une contribution à la diffraction (de Bragg) associée à cet arrangement régulier. L'effet est très important [9] aux seuils L, qui correspondent, pour les métaux de transition, à des longueurs d'onde trop grandes pour qu'existe la diffraction de Bragg par les distances interatomiques. Cette situation est mise à profit pour l'étude de multicouches magnétiques, dans lesquelles la période de l'empilement de couches différentes peut être réglé à volonté. Comme pour la lumière visible, l'absorption des rayons X, forte au voisinage de valeurs particulières de l'énergie des photons (les seuils d'absorption), dépend aussi de l'orientation relative de la direction de polarisation ou de l'hélicité des rayons X (polarisation circulaire droite ou gauche) et de l'aimantation du matériau (parallèle ou antiparallèle à la propagation). Dans la géométrie de l'effet Kerr transverse, au seuil 3p, donc dans le domaine des rayons X très mous (60 eV), Hillebrecht *et al.* [10] ont mis en évidence le dichroïsme magnétique associé à la polarisation rectiligne, et réalisé une image de domaines sur la base de la différence locale du rendement de photoémission. Le dichroïsme circulaire magnétique des rayons X est, lui aussi, un outil important et en plein développement de recherche fondamentale. Dans son application en imagerie (voir § 5.1.5 ci-dessous), il permet d'obtenir des images de la structure de domaines dans des multicouches (voir chapitre 20), en visualisant sélectivement tel ou tel élément chimique suivant l'énergie du faisceau utilisé [11].

## 2. TRAITEMENT PHÉNOMÉNOLOGIQUE

### 2.1. EQUATION DE PROPAGATION. MODES PROPRES

Les différentes configurations magnéto-optiques rendent compte de l'interaction entre rayonnement incident et matériau magnétique. On s'intéresse dans un premier temps à la propagation dans le matériau d'une onde électromagnétique plane, qu'on convient de décrire par la forme :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp - j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . La signification des différentes grandeurs est rappelée dans l'appendice à ce chapitre. On établit le lien entre elles à partir des équations de Maxwell, où l'on suppose le matériau électriquement neutre :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (13.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}_{\text{cond}} \quad (13.2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (13.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (13.4)$$

avec  $\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$  et  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  (13.5)

où :  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \boldsymbol{\chi}_{\text{el}} \mathbf{E}$  (13.6)

est la polarisation électrique et  $\boldsymbol{\chi}_{\text{el}}$  la susceptibilité électrique.  $\boldsymbol{\epsilon}$  est le tenseur de permittivité relative électrique,  $\boldsymbol{\mu}$  le tenseur de perméabilité relative magnétique, à la pulsation  $\omega$ . Le champ électrique induit, par déplacement des charges, une densité de courant  $\mathbf{j}$ , dont la description fait appel dans le cas général aux tenseurs de conductivité  $\boldsymbol{\sigma}$  et de susceptibilité  $\boldsymbol{\chi}_{\text{el}}$  du matériau :

$$\mathbf{j}_{\text{total}} = \partial \mathbf{P} / \partial t + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} = \partial \mathbf{P} / \partial t + \mathbf{j}_{\text{cond}} \quad (13.7)$$

On préfère condenser l'écriture en notant

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}_{\text{el}} \text{ et } \boldsymbol{\epsilon}'' = \boldsymbol{\epsilon}' - \boldsymbol{\sigma} / j \omega \epsilon_0 \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (13.8)$$

L'aimantation est limitée, dans sa réponse au champ magnétique, à des fréquences de l'ordre des fréquences de relaxation paramagnétique. Ainsi, aux fréquences optiques, elle ne peut plus suivre, et la perméabilité magnétique relative  $\boldsymbol{\mu}$  est toujours prise égale à l'unité [12]. Les effets magnéto-optiques ne feront donc intervenir que l'effet d'un champ ou d'une aimantation continus, ou de très basse fréquence, sur la permittivité diélectrique. Cette approximation n'est plus valable aux grandes longueurs d'onde (domaine des micro-ondes).

Comme  $\boldsymbol{\epsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des tenseurs,  $\boldsymbol{\epsilon}''$  est aussi un tenseur, soit :

$$\boldsymbol{\epsilon}'' = \begin{bmatrix} \epsilon''_{11} & \epsilon''_{12} & \epsilon''_{13} \\ \epsilon''_{21} & \epsilon''_{22} & \epsilon''_{23} \\ \epsilon''_{31} & \epsilon''_{32} & \epsilon''_{33} \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

Le principe d'Onsager (1931) de la physique statistique indique que la symétrie  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$  ne se manifeste qu'en présence d'un système possédant la propriété de

symétrique par renversement du temps. Or, dans un corps soumis à un champ magnétique  $\mathbf{H}$  (ou doté d'une aimantation  $\mathbf{M}$ ), la propriété de symétrie par renversement du temps ne se manifeste qu'en inversant, en plus, la direction du champ  $\mathbf{H}$  (ou de l'aimantation  $\mathbf{M}$ ). On aura donc :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{H}) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{H}) \quad (13.10)$$

Considérons, pour simplifier, un milieu ferromagnétique qui serait optiquement isotrope, mais porterait une aimantation  $\mathbf{M}$ . L'anisotropie optique est due entièrement au magnétisme et engendre des termes non diagonaux dans le tenseur de permittivité tels que :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{M}) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{M}) \quad (13.11)$$

Ces termes étant nuls en l'absence d'aimantation, on peut les supposer linéaires en  $\mathbf{M}$ , ce qui conduit à :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{M}) = -\epsilon_{ji}(\mathbf{M}) \quad (i \neq j) \quad (13.12)$$

Le tenseur  $\epsilon'$  prend donc la forme :

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & \epsilon'_{13} \\ -\epsilon'_{12} & \epsilon'_{11} & \epsilon'_{23} \\ -\epsilon'_{13} & -\epsilon'_{23} & \epsilon'_{11} \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

où les  $\epsilon'_{ij}$  sont en général complexes.

Si la direction de  $\mathbf{M}$  coïncide avec l'un des axes du repère choisi, une rotation autour de cet axe est sans effet pour le tenseur qui ne présente donc que deux termes non diagonaux  $\epsilon'_{ij}$  et  $-\epsilon'_{ij}$  symétriques ; par exemple, pour  $\mathbf{M}$  selon  $z$  :

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & 0 \\ -\epsilon'_{12} & \epsilon'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_{11} \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

La proportionnalité à l'aimantation des termes non diagonaux  $\epsilon_{ij}$  s'exprime souvent au travers du coefficient magnéto-optique  $Q$ , comme le montre l'équation (13.15). Nous précisons par la suite la forme du tenseur  $\epsilon'$  pour les cas les plus couramment rencontrés en magnéto-optique.

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon'_1 & jQ\epsilon'_1 & 0 \\ -jQ\epsilon'_1 & \epsilon'_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_1 \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

On décompose parfois les tenseurs  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  en deux parties, un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique tels que, pour  $\epsilon'$  par exemple :

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon'_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & Q\epsilon'_1 & 0 \\ -Q\epsilon'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On introduit ainsi le vecteur giration  $\mathbf{g}$  (complexe) en exprimant  $\mathbf{D}$  sous la forme :  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j} (\mathbf{E} \times \mathbf{g})$ . Dans un milieu isotrope,  $\mathbf{g}$  est proportionnel à l'aimantation  $\mathbf{M}$  ( $\mathbf{g} = \alpha \mathbf{M}$ ) et le terme de polarisation d'origine magnétique devient :  $\mathbf{P} = \mathbf{j} \alpha (\mathbf{E} \times \mathbf{M})$ . Ce terme décrit les effets gyrotropes intervenant dans les configurations dont les modes propres sont circulaires (effet Faraday et dichroïsme circulaire). Les considérations précédentes s'étendent aux ferrimagnétiques dont l'état n'est pas décrit de manière suffisante par leur aimantation résultante  $\mathbf{M}$ . En particulier,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{g}$  s'expriment au premier ordre comme des combinaisons linéaires des aimantations des sous-réseaux. Dans l'analyse du comportement de l'onde plane dans le matériau magnétique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp - \mathbf{j} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (13.16)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp - \mathbf{j} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (13.17)$$

$\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde dans le milieu considéré tel que  $\mathbf{k} = N \mathbf{k}_0$  avec  $N = n + \mathbf{j} \kappa$  l'indice de réfraction complexe et  $\mathbf{k}_0$  le vecteur d'onde dans le vide.

Les équations de Maxwell conduisent à l'équation fondamentale (13.18) qui caractérise les propriétés optiques du matériau anisotrope, où  $\boldsymbol{\epsilon}'$  est le tenseur défini plus haut et  $\mathbf{u}_k$  le vecteur unitaire selon  $\mathbf{k}$  (de composantes  $x, y, z$ ) :

$$\boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{E} = N^2 [\mathbf{E} - \mathbf{u}_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_k)] \quad (13.18)$$

Cette équation s'écrit aussi, dans le cas le plus général d'un milieu anisotrope uniaxe selon Oz,  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$ , avec :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \epsilon'_1 - N^2(1 - x^2) & \mathbf{j} \epsilon'_1 Q + N^2 xy & N^2 xz \\ -\mathbf{j} \epsilon'_1 Q + N^2 yx & \epsilon'_1 - N^2(1 - y^2) & N^2 yz \\ N^2 zx & N^2 zy & \epsilon'_3 - N^2(1 - z^2) \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

Les solutions non triviales de cette équation matricielle n'existent que si le déterminant de  $\mathbf{S}$  est nul, soit :  $|\mathbf{S}| = 0$ .

En résolvant cette équation bicarrée on déduit les indices complexes et les modes propres de propagation qui leur sont associés et, par la suite, les caractéristiques de la lumière émergente à partir d'une onde incidente donnée.

## 2.2. EFFETS EN TRANSMISSION

### 2.2.1. Effet Faraday

La lumière se propage dans la direction  $z$  qui porte aussi le champ magnétique et l'aimantation de l'échantillon.

Avec  $\mathbf{u}_k = (0, 0, 1)$  l'équation bicarrée s'écrit :

$$N^4 - 2 \epsilon'_1 N^2 + \epsilon'_1{}^2 (1 - Q^2) = 0 \quad (13.20)$$

Le système d'équations défini par  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$  a donc comme solutions :

$$N_+ = n_+ + j\kappa_+ = \sqrt{\varepsilon'_1(1+Q)} \quad (13.21)$$

$$N_- = n_- + j\kappa_- = \sqrt{\varepsilon'_1(1-Q)} \quad (13.22)$$

Les champs électriques correspondants sont tels que :

$$\mathbf{E}_+ = (E_x, -jE_x, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_- = (E_x, jE_x, 0) \quad (13.23)$$

ce qui caractérise des lumières circulaires droite et gauche.

Une lumière rectiligne incidente peut être considérée comme la résultante de deux vibrations droite et gauche. A la traversée d'un échantillon en forme de lame à faces parallèles perpendiculaires à l'aimantation, d'épaisseur  $e$ , il se crée un déphasage  $\phi$  entre les lumières circulaires tel que  $\phi = 2\pi(n_+ - n_-)e/\lambda_0$  où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Il en résulte une rotation  $\theta_F$  du plan de polarisation de la lumière transmise :

$$\theta_F = \pi(n_+ - n_-)e/\lambda_0 = \phi/2 \quad (13.24)$$

Les parties imaginaires des indices complexes,  $\kappa_+$  et  $\kappa_-$ , correspondant à l'absorption par le milieu, induisent une elliptisation de la vibration transmise. L'ellipticité s'écrit :

$$\eta_F = -\text{th} [\pi(\kappa_+ - \kappa_-)e/\lambda_0] \quad (13.25)$$

Les termes non diagonaux du tenseur  $\boldsymbol{\epsilon}'$  sont petits devant les termes diagonaux, soit  $Q \ll 1$ . D'où :

$$N_+ - N_- \sim (\varepsilon'_1)^{1/2} Q \sim \varepsilon'_1 Q / N \quad (13.26)$$

où  $N$  est l'indice complexe moyen.

La biréfringence circulaire est proportionnelle à  $Q$ .

### 2.2.2. Effet Voigt

L'aimantation est parallèle à la surface selon  $Oz$  et le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_k$ , perpendiculaire à la surface, coïncide avec l'axe  $Oy$ , soit  $\mathbf{u}_k = (0, 1, 0)$ . L'équation bicarrée devient donc :

$$(\varepsilon'_3 - N^2)[\varepsilon'_1(\varepsilon'_1 - N^2) - \varepsilon'_1 Q^2] = 0 \quad (13.27)$$

Les indices correspondant aux directions de polarisation de l'onde parallèle et perpendiculaire à l'aimantation sont donc :

$$N_z = (\varepsilon'_3)^{1/2} \quad N_x = [(\varepsilon'_1(1 - Q^2))]^{1/2} \quad (13.28)$$

On déduit également les modes propres de propagation :

$$\mathbf{E}_{//}/E_0 = (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{\perp}/E_0 = (1, jQ, 0) \quad (13.29).$$

où  $E_0$  est une constante de normalisation.

On constate que les modes propres correspondent à des directions de champ électrique parallèle et perpendiculaire à l'aimantation, et que dans ce dernier cas, le mode est faiblement longitudinal car  $Q \ll 1$ .

Les deux composantes selon Ox et Oz du champ électrique d'une onde incidente sont déphasées à la traversée du matériau et engendrent donc une vibration elliptique émergente. De plus, en tenant compte du fait que  $\epsilon'_1$  et  $\epsilon'_3$  sont complexes, on met en évidence le dichroïsme magnétique rectiligne qui correspond à des valeurs différentes pour les facteurs de transmission selon Ox et Oz. Ainsi, pour une vibration rectiligne incidente de direction de polarisation quelconque, la rotation de polarisation due au dichroïsme se superpose à l'ellipticité découlant de la biréfringence. Il s'agit dans les deux cas d'effets pairs ( $\propto H^2$  ou  $\propto M^2$ ) vis-à-vis du champ ou de l'aimantation.

### 2.3. EFFETS KERR

Les amplitudes réfléchies correspondant aux polarisations parallèle (p) et perpendiculaire (s) au plan d'incidence sont reliées aux amplitudes incidentes p et s par les coefficients de Fresnel :

$$\begin{bmatrix} E_{p \text{ réfl}} \\ E_{s \text{ réfl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{ps} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{p \text{ inc}} \\ E_{s \text{ inc}} \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

Les coefficients  $r_{ij}$  correspondent donc à des rapports d'amplitudes particuliers ; par exemple,  $r_{ps}$  est égal au rapport  $E_{p \text{ réfl}} / E_{s \text{ inc}}$ . Dans la pratique, on considère une vibration incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (s) et on calcule la composante (p) réfléchie.

Le calcul des coefficients  $r_{ij}$  est assez lourd et comporte comme étapes majeures :

- ♦ la détermination des composantes du champ électrique dans chaque milieu et pour chaque mode de propagation, défini par un sens et par une polarisation (s ou p), à partir du système d'équations  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$ ,
- ♦ l'écriture des relations de continuité des composantes tangentes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  à chaque interface, le plus souvent sous forme matricielle [13].

Dans le cas général d'une incidence oblique dans le plan yOz, avec Oz perpendiculaire à la surface et en reprenant la notation :

$$\mathbf{k} = (N\omega/c)\mathbf{u}_k \quad (13.31)$$

où  $\mathbf{u}_k = (0, \beta, \gamma)$ , on trouve (en négligeant des termes en  $Q^2$ ) :

$$\begin{aligned} r_{ss} &= (\cos \theta - N\gamma) / (\cos \theta + N\gamma) \\ r_{ps} &= [jNQ(m_y \beta - m_z \gamma) \cos \theta] / [\gamma(N \cos \theta + \gamma)(\cos \theta + N\gamma)] \\ r_{sp} &= -j[NQ(m_y \beta + m_z \gamma) \cos \theta] / [\gamma(\cos \theta + N\gamma)(N \cos \theta + \gamma)] \\ r_{pp} &= [(N \cos \theta - \gamma) / (N \cos \theta + \gamma)] + [j2m_x N Q \beta \cos \theta / (N \cos \theta + \gamma)^2] \end{aligned} \quad (13.32)$$

où  $m_x$ ,  $m_y$  et  $m_z$  sont les cosinus directeurs de l'aimantation  $\mathbf{M}$ .  $\theta$  est l'angle d'incidence. Ces coefficients sont complexes dans le cas d'un milieu métallique.

On remarque que  $r_{ss}$  est indépendant de  $Q$ , donc de l'état magnétique du matériau, que  $r_{pp}$  ne dépend de  $Q$  que dans le cas de l'effet transverse et que  $r_{sp}$  et  $r_{ps}$  n'ont une valeur non nulle que dans le cas des effets Kerr polaire et longitudinal. Pour  $Q = 0$ , on retrouve les coefficients de Fresnel  $r_{pp}$  et  $r_{ss}$  classiques et  $r_{ps}$  et  $r_{sp}$  sont nuls. On retrouve ainsi les caractéristiques déjà citées des différentes configurations de l'effet Kerr.

### 2.3.1. La configuration fondamentale de l'effet Kerr transverse

Elle correspond à  $m_x = 1$ . Dans ce cas :

- ◆ il n'y a pas d'effet si la polarisation rectiligne incidente est s ou transverse électrique (TE),
- ◆ les termes non diagonaux  $r_{ps}$  et  $r_{sp}$  sont nuls,
- ◆ la polarisation p ou transverse magnétique (TM) est un mode propre,
- ◆ il se superpose un terme dépendant de  $Q$  au terme de Fresnel dans  $r_{pp}$ . Ce terme est petit en général, car  $Q$  est petit devant l'unité.

### 2.3.2. La configuration fondamentale de l'effet Kerr longitudinal

Elle correspond à  $m_y = 1$ . Dans ce cas :

- ◆ les coefficients  $r_{pp}$  et  $r_{ss}$  sont indépendants de  $Q$ ,
- ◆ les coefficients  $r_{ps}$  et  $r_{sp}$ , responsables de la rotation du plan de polarisation de la lumière réfléchi par rapport à celui de la lumière incidente rectiligne, sont de même signe,
- ◆ l'incidence normale correspond à  $\beta = 0$  ; les termes non diagonaux  $r_{ps}$  et  $r_{sp}$  s'annulent et il n'y a pas d'effet.

### 2.3.3. La configuration fondamentale de l'effet Kerr polaire

Elle correspond à  $m_z = 1$ . Dans ce cas :

- ◆ l'incidence normale correspond à  $\beta = 0$  et  $\cos \theta = \gamma = 1$  ; les termes  $r_{sp}$  et  $r_{ps}$  sont égaux et leur valeur est maximum,
- ◆ l'angle de rotation  $\theta_K$  est maximum et est indépendant de la direction de polarisation incidente.

Dans la pratique, on observe des intensités réfléchies. Par exemple, dans le cas de l'effet Kerr transverse, la valeur de l'intensité réfléchi mesurée  $I_p$  est proportionnelle à  $r_{pp}r_{pp}^*$  ( $= R_p$ ).

En notant  $Re$  et  $Im$  les parties réelle et imaginaire d'une variable, les rotations  $\theta_K$  et ellipticités  $\eta_K$  correspondantes, pour une incidence oblique, sont telles que :

$$\begin{aligned}
 \theta_{Ks} &= -Re(r_{ps}/r_{ss}) \\
 \theta_{Kp} &= Re(r_{sp}/r_{pp}) \\
 \eta_{Ks} &= Im(r_{ps}/r_{ss}) Re(r_{ps}/r_{ss}) \\
 \eta_{Kp} &= Im(r_{sp}/r_{pp}) Re(r_{sp}/r_{pp})
 \end{aligned} \tag{13.33}$$

## 2.4. SYSTÈMES DE COUCHES MINCES

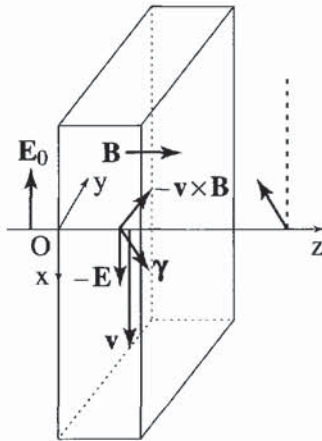
L'importance technologique des systèmes magnétiques en couches minces et en multicouches, par exemple pour l'enregistrement, explique que beaucoup de travaux leur soient consacrés, en magnéto-optique aussi [14]. L'analyse implique alors une combinaison des effets à une interface (effets Kerr) et de la transmission à travers les couches (effets Faraday). Elle se prête très bien à des calculs matriciels, utilisant les matrices de coefficients de Fresnel introduites ci-dessus.

## 3. PRÉSENTATION PHYSIQUE

P.P. Ewald [15] a été le premier à donner une théorie microscopique de l'indice de réfraction. Utilisée sous une forme très simplifiée, elle fournit une vue qualitative utile de phénomènes d'optique dans la matière. Elle consiste à traduire l'effet de la matière sur une onde par la combinaison avec l'onde incidente de celle rayonnée par la répartition de dipôles électriques oscillants produite dans le matériau. Dans une présentation en termes de milieu continu, la répartition des dipôles est représentée par la polarisation électrique  $\mathbf{P}$ , moment dipolaire par unité de volume.  $\mathbf{P}$  sera alors une grandeur oscillante, de pulsation  $\omega$  égale à celle de l'onde incidente. L'onde (transverse) qu'elle rayonne à grande distance  $r$  à l'instant  $t$  sera proportionnelle à la valeur de la composante transverse (perpendiculaire à la direction d'observation) de l'accélération de la charge, ou de la dérivée seconde par rapport au temps de  $\mathbf{P}$ , mais telle qu'elle était à l'instant antérieur ( $t - r/c$ ), car il faut tenir compte du délai de propagation  $r/c$ . Dans le domaine des fréquences optiques et au-delà, seuls les électrons peuvent contribuer au moment dipolaire parce que leur masse, donc leur inertie, est très inférieure à celle des noyaux.

Essayons d'imaginer simplement l'effet d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  continu, parallèle à  $z$ , sur une onde lumineuse dans un matériau qui, en l'absence de  $\mathbf{B}$ , serait aussi simple que possible, donc transparent et isotrope (une seule valeur de la constante diélectrique  $\epsilon$ , réelle).

Dans une approche classique, on pourra traduire l'effet de  $\mathbf{B}$  sur le mouvement d'électrons, de charge  $-e$ , soumis à l'effet du champ électrique alternatif de l'onde,  $\mathbf{E}$ , comme une force de Lorentz  $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (figure 13.5). Un champ électrique de pulsation  $\omega$ , dirigé suivant  $x$ , ne conduira donc plus exactement à l'oscillation des électrons suivant  $x$  que l'on observerait en l'absence de  $\mathbf{B}$  : la force de Lorentz, dirigée suivant  $y$ , induira une composante du déplacement des électrons, donc de la polarisation, dirigée suivant  $y$  et déphasée de  $\pi/2$  par rapport à la composante due à  $\mathbf{E}$ . Dans le tenseur diélectrique, il doit donc apparaître un terme non diagonal  $\epsilon_{yx}$ , et son pendant  $\epsilon_{xy}$ , correspondant à la situation où  $\mathbf{E}$  serait suivant  $y$  et la force de Lorentz suivant  $-x$ , avec  $\epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy}$ . Le déphasage de  $\pi/2$  entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  est traduit par le fait que ces termes sont imaginaires, comme indiqué dans l'équation (13.15).



**Figure 13.5 - Illustration schématique de l'effet Faraday dans une représentation classique**

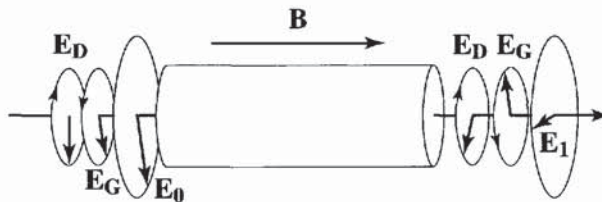
On figure l'effet d'une mince tranche de matériau magnétique. Les contributions  $-e\mathbf{E}$  et  $-e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$  à l'accélération des électrons conduiraient à une accélération résultante  $\gamma$  non colinéaire à  $\mathbf{E}$ . La contribution de cette tranche à l'onde rayonnée à grande distance le serait donc aussi. Cette figure ne tient pas compte de l'effet de la vitesse de propagation.

Mais l'accélération des électrons acquiert aussi une composante suivant  $y$ , elle aussi déphasée de  $\pi/2$  par rapport à  $\mathbf{E}$ .

L'onde rayonnée ne sera donc pas polarisée suivant la direction de  $x$ . Autrement dit, la polarisation rectiligne suivant  $x$ , ou suivant  $y$ , n'est pas un mode propre pour la propagation dans le matériau en présence de  $\mathbf{B}$ . Une analyse formelle montre que les modes propres qui se propagent sans altération dans le milieu soumis à  $\mathbf{B}$ , et auxquels sont associés des indices de réfraction bien définis  $n_G$  et  $n_D$ , sont les polarisations circulaires droite et gauche, D et G.

Lorsque l'on tient compte de l'absorption, l'indice de réfraction du matériau et  $\epsilon_r$  sont tous deux complexes, même en l'absence de champ magnétique. Il en est de même pour les termes non diagonaux du tenseur de permittivité électrique en présence de  $\mathbf{B}$ .

Nous avons là les deux ingrédients de l'effet Faraday. En effet, la différence entre les parties imaginaires des termes non diagonaux de  $\epsilon'$  conduit à ce que les composantes droite  $E_D$  et gauche  $E_G$  soient, après propagation sur une même distance  $d$ , déphasées (biréfringence circulaire) de  $2\pi d(n_G - n_D)/\lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Leur résultante  $\mathbf{E}'$  sera donc, en l'absence d'absorption, une vibration rectiligne tournée d'un angle  $\theta_F$  proportionnel à  $d$  (figure 13.6).



**Figure 13.6 - La rotation associée à l'effet Faraday est due à la différence des vitesses des vibrations circulaires droite  $E_D$  et gauche  $E_G$ , donc des indices  $n_D$  et  $n_G$**

Les vecteurs champ électrique sont figurés avant ( $\mathbf{E}_0$ ) et après ( $\mathbf{E}_1$ ) passage par l'échantillon magnétique. Les flèches  $\mathbf{E}_D$  et  $\mathbf{E}_G$  de chaque groupe correspondent au même point et au même temps, et les amplitudes de  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{E}_1$  correspondent à leur superposition, aux mêmes points. La rotation de la polarisation de la lumière est due à la plus grande vitesse de  $\mathbf{E}_G$ .

L'effet de l'absorption introduit en plus un dichroïsme (circulaire), et l'onde émergente sera en réalité elliptique.

L'*effet Kerr polaire* peut se comprendre, de façon qualitative, de deux façons au moins. Examinons la situation d'incidence normale, avec aimantation perpendiculaire à la surface. La première approche, la plus proche de l'analyse de l'effet Faraday, consiste à dire que la réflexion est associée à un petit parcours, dans un sens puis dans l'autre, dans le matériau : la non-réciprocité de l'effet Faraday indique alors qu'il y aura une rotation résultante de la polarisation,  $\theta_K$ , et aussi une ellipticité. Si l'on préfère considérer que la réflexion est vraiment due à la surface, et la décrire en termes des équations de Fresnel, les indices différents associés aux deux composantes droite et gauche, qui demeurent les modes propres pour le matériau aimanté, entraînent à la fois un déphasage différent, donc la rotation de Kerr, et une amplitude réfléchie différente, donc une ellipticité.

Nous avons vu plus haut que les effets magnéto-optiques pouvaient s'interpréter, au moins qualitativement, en termes de force de Lorentz. Il est intéressant de discuter l'approche d'Ewald sur cette même base. Ainsi, dans l'effet Kerr polaire, on comprend qu'il existe, pour la répartition de polarisation induite par le champ électrique de l'onde incidente dans le matériau, une composante perpendiculaire à la polarisation initiale par suite de la force de Lorentz, et que l'onde rayonnée correspondante devra comporter une rotation et une ellipticité.

Elle montre également de façon qualitative que dans la géométrie de l'*effet Kerr transverse*, il n'y a pas d'effet pour une onde incidente dont le vecteur champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (polarisation s). En effet la vibration est alors parallèle à l'aimantation, et il n'y a pas de force de Lorentz. De même, pour la composante p (champ électrique parallèle au plan d'incidence), dont la variation d'amplitude à la réflexion constitue l'effet Kerr transverse, on constate aisément que la force de Lorentz est maintenant dans le plan d'incidence, et ne saurait par conséquent induire de composante perpendiculaire : il n'y a donc pas de rotation.

Le couplage magnéto-optique s'explique par la force de Lorentz due au champ appliqué agissant sur le nuage électronique. L'accord quantitatif est relativement correct pour les dia- et paramagnétiques tandis que la valeur du champ appliqué est largement insuffisante dans le cas des ferromagnétiques. *On retrouve un accord satisfaisant en tenant compte du couplage spin-orbite* qui agit sur le nuage électronique comme un champ effectif, de l'ordre de  $10^2$ - $10^3$  Teslas [5, 16].

Qu'il se rapporte à un mode propre rectiligne ou circulaire, un indice de réfraction ne sera sensible au champ magnétique que dans la mesure où il sera affecté par une petite variation de la pulsation de l'onde, de l'ordre de la pulsation de Larmor  $eB/2m$  des électrons. Il faut donc que le matériau manifeste une dispersion non négligeable (variation notable des indices avec la longueur d'onde ou l'énergie des photons). Cela impose encore de travailler dans une région spectrale où des raies

d'absorption liées à des niveaux ou des bandes électroniques sensibles au magnétisme se manifestent. Ceci établit le lien étroit entre effets magnéto-optiques et absorption.

On comprend ainsi, de façon semi-qualitative, que les métaux 3d manifestent, dans le visible, des effets plus importants que les métaux de terres rares, dont le magnétisme est associé à des états plus éloignés du niveau de Fermi.

La description microscopique des effets passe par celle du magnétisme des solides qui peut être décrit selon le modèle des électrons localisés ou celui des électrons itinérants décrits plus haut aux chapitres 7 et 8.

Dans le modèle des électrons localisés, qui s'applique, par exemple, aux métaux de terres rares, les interactions dans le matériau lèvent la dégénérescence des niveaux d'énergie électroniques et conduisent à une représentation par décompositions successives selon les énergies mises en jeu (corrélacion entre électrons, couplage spin-orbite, champ cristallin, ...). Un rayonnement électromagnétique va induire des transitions dont la probabilité va dépendre de l'apport d'énergie, de sa polarisation, du remplissage des niveaux du multiplet initial ainsi que de celui des niveaux finaux après excitation. Les transitions permises interviennent dans les effets avec des pondérations différentes [17]. Les états pouvant être assez bien définis, il est possible de bâtir des modèles qui rendent compte des effets magnéto-optiques dans les matériaux dans lesquels les électrons sont localisés.

Le modèle des électrons itinérants, décrivant, par exemple, les métaux de transition à l'état d'atomes métalliques, représente les états d'énergie des électrons sur un diagramme de densités d'état. Les énergies permises sont distribuées sur une ou plusieurs bandes dont le diagramme des densités d'état représente le profil. Sous l'action d'un champ appliqué ou dans l'état ferromagnétique, il apparaît sur le diagramme un déséquilibre entre les états de spin de directions opposées et les niveaux sont occupés jusqu'au niveau de Fermi. Un rayonnement électromagnétique induit des transitions électroniques avec une probabilité qui dépend du nombre d'états vides sur les niveaux finaux ainsi que de la polarisation du rayonnement incident. Les transitions induites étant différentes entre les deux populations de spins, les effets apparaissent donc comme différentiels et, en général, de faible amplitude.

#### ***4. MESURE ET ORDRE DE GRANDEUR DES EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES***

La mesure des effets magnéto-optiques intervient lors de la phase d'étude et de caractérisation magnétique d'un matériau. Celui-ci peut alors se présenter sous différentes formes : massif, en couche mince ou ultra mince, ... Pour une longueur d'onde donnée, le résultat brut de la mesure prend la forme d'une courbe représentant la (ou les) quantité(s) caractéristique(s) de l'effet mesuré en fonction du champ appliqué  $H$  :  $\Theta_F(H)$  pour l'effet Faraday,  $\Theta_K(H)$  pour les effets Kerr polaire

et longitudinal,  $\Delta R/R(H)$  pour l'effet Kerr transverse, etc. Au-delà, on s'intéresse à l'évolution de la grandeur caractéristique avec les changements d'orientation de l'échantillon, de température, d'énergie des photons, etc.

La mesure s'effectue sur une région de l'échantillon que l'on peut qualifier de macroscopique. On obtient ainsi une valeur moyenne qui n'est vraiment significative que lorsque la région considérée a atteint la saturation magnétique. Les valeurs intermédiaires en champ sont toutefois riches en informations sur les processus d'aimantation. On se ramène à l'une des configurations fondamentales des effets magnéto-optiques pour avoir accès à l'évolution d'une composante donnée de l'aimantation. Selon l'effet considéré la mesure portera sur :

- ◆ la détermination de l'angle de rotation d'un plan de polarisation ; c'est le cas des *effets Faraday, Kerr polaire et longitudinal*,
- ◆ l'ellipticité de la vibration transmise ou réfléchié ; c'est le cas des *effets Faraday, Kerr polaire, longitudinal*,
- ◆ la variation de l'intensité transmise ou réfléchié ; c'est le cas de l'*effet Kerr transverse* et des *dichroïsmes circulaire et rectiligne*,
- ◆ la variation du déphasage entre composantes perpendiculaires du champ  $\mathbf{E}$  amenant à la mesure de l'ellipticité et à sa variation ; c'est le cas de l'*effet Voigt*.

Dans la pratique, les trois premiers points constituent, de loin, les cas les plus fréquents. La mesure des différents effets peut être réalisée au moyen d'un ellipso-mètre. Toutefois les effets à mesurer sont en général assez faibles car les angles excèdent rarement le degré, les variations relatives d'intensité quelques  $10^{-3}$ .

Aussi, pour atteindre la sensibilité souhaitable dans la détection, et dans un souci de simplification, différentes ellipsométries spécifiques ont été développées. Celles-ci font appel aux techniques de modulation du signal lumineux qui améliorent la détection et l'amplification par élimination des composantes fréquentielles indésirables et minimisation des dérives.

Nous nous proposons de rappeler brièvement les bases de ces techniques, puis nous ferons un inventaire non exhaustif des méthodes expérimentales de base utilisées lors de la mesure des différents effets, à savoir la rotation d'un plan de polarisation, l'ellipticité d'une vibration, la variation d'intensité ou de déphasage. Nous présenterons en particulier quelques méthodes différentielles dont l'intérêt est toujours d'augmenter la variation relative du signal résultant, de façon à bénéficier au maximum des possibilités d'amplification de la chaîne de mesure.

## 4.1. LES MÉTHODES DE MODULATION

### 4.1.1. La modulation d'amplitude (ou d'intensité)

Un modulateur d'amplitude découpe le faisceau à la fréquence  $f$  sous forme de créneaux ou de façon sinusoïdale. L'exemple le plus simple en est le hacheur (chopper en anglais). Soit  $S(t)$  la variation temporelle de l'intensité du faisceau non

modulé, fournie par un détecteur photoélectrique et due par exemple à l'action du champ appliqué. Après modulation sous forme de créneaux rectangulaires d'amplitude unité et de période  $T = 2\pi/\omega$ , le signal de sortie  $S'(t)$  peut être décomposé en :

$$S'(t) = S(t) \left\{ \frac{4}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right] + \frac{1}{2} \right\} \quad (13.34)$$

ou, pour une modulation sinusoïdale :

$$S'(t) = S(t) [\sin \omega t + 1] \quad (13.35)$$

Après filtrage à la fréquence  $f = \omega/2\pi$ , il reste :

$$S'(t) = S(t) \sin \omega t \quad (13.36)$$

Une détection synchrone calée sur la fréquence  $f$  donne autour du temps  $t$  un signal résultant proportionnel à  $\int_t^{t+\tau} S(t') \sin \omega t' dt'$ , c'est-à-dire une valeur moyenne glissante de  $S(t)$ .  $\tau$  dépend de la constante de temps de la détection synchrone.

#### 4.1.2. La modulation de phase (et de direction de polarisation)

Un modulateur de phase est un composant optique fonctionnant en transmission dont deux directions rectangulaires correspondent aux modes propres de propagation. Soit  $Ox$  et  $Oy$  ces directions,  $Oz$  étant la direction de propagation du faisceau. Pour une polarisation incidente rectiligne décomposable selon  $Ox$  et  $Oy$  le modulateur introduit un déphasage, en général sinusoïdal de fréquence  $f$ , entre les composantes émergentes tel que :

$$\phi_y - \phi_x = \phi_0 \sin \omega t \quad (13.37)$$

La polarisation correspondante est elliptique avec une ellipticité variable et, dans le cas général, des axes dont la direction est aussi modulée. Toutefois, si l'on dispose les axes du modulateur à  $45^\circ$  de la direction de l'azimut de la vibration incidente, on obtient une vibration émergente d'ellipticité variable mais de direction d'axes fixes (figure 13.7).

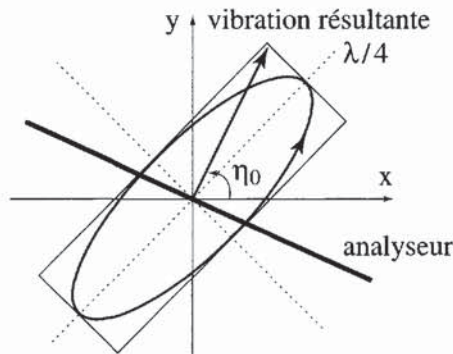


Figure 13.7 - Principe de la modulation de la direction de polarisation

Le détecteur final étant un détecteur photoélectrique d'éclairement, il s'agit de transformer la variation de phase en variation d'intensité lumineuse.

Cette opération sera réalisée au moyen de l'adjonction :

- ♦ d'une lame quart d'onde ( $\lambda/4$ ) dont les lignes neutres seront alignées sur les axes de l'ellipse de façon à rattraper le déphasage de  $\pi/2$  entre ces axes et rendre la vibration rectiligne. La direction de celle-ci sera alors modulée sinusoïdalement dans le plan  $xOy$  autour d'une direction moyenne faisant l'angle  $\eta_0$  avec  $Ox$  :

$$\eta = \eta_0 + (\phi_0/2) \sin \omega t \quad (13.38)$$

- ♦ d'un analyseur faisant l'angle  $\Psi$  avec  $Ox$ , chargé de convertir la variation de direction de polarisation rectiligne en variation d'intensité :

$$I = I_0 \cos^2 [\Psi - (\eta_0 + \phi_0/2) \sin \omega t] \quad (13.39)$$

On rappelle que :

$$\cos(\Phi_0 \sin \omega t) = J_0(\Phi_0) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\Phi_0) \cos 2p\omega t \quad (13.40)$$

$$\sin(\Phi_0 \sin \omega t) = 2 \sum_{p'=1}^{\infty} J_{2p'-1}(\Phi_0) \sin[(2p'-1)\omega t] \quad (13.41)$$

où les  $J_n$  sont des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .

L'expression (13.39) fait donc apparaître le développement en harmoniques de la fréquence de modulation  $\omega$ . Il apparaît deux solutions qui annulent la composante en  $\omega$  du signal photoélectrique : soit  $\Psi = 0$ , c'est-à-dire que l'analyseur est parallèle à la position moyenne de la vibration rectiligne, soit  $\Psi = \pi/2$  où l'analyseur est perpendiculaire à cette position moyenne. On peut montrer aisément que la configuration  $\Psi = \pi/2$  est préférable, car elle donne une meilleure sensibilité exprimée par  $\partial I / \partial \eta$  et une plus grande variation relative  $\Delta I / I$ .

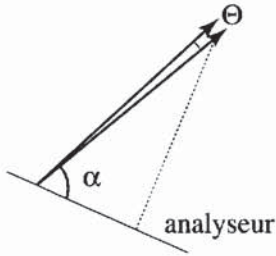
#### **4.2. DÉTERMINATION MAGNÉTO-OPTIQUE DE LA DIRECTION DES AXES DE FACILE AIMANTATION**

Les axes de facile aimantation correspondent à la (aux) direction(s) du vecteur aimantation sans champ appliqué. La connaissance de leur orientation est indispensable pour mesurer certains effets. Il y a trois façons de déterminer cette (ces) direction(s) :

- ♦ en recherchant la direction de l'échantillon qui correspond au cycle le plus rectangulaire possible.
- ♦ en observant les domaines directement et la direction préférentielle des parois.
- ♦ en mesurant sous champ appliqué nul les trois composantes du vecteur aimantation dans un repère orthonormé  $Oxyz$  [18], [19].

#### **4.3. MESURE DE L'ANGLE DE ROTATION $\Theta$ D'UNE DIRECTION DE POLARISATION RECTILIGNE (CAS DES EFFETS FARADAY, KERR POLAIRE ET LONGITUDINAL)**

La façon la plus élémentaire de repérer une vibration rectiligne par un pointé photoélectrique consiste à la projeter sur la direction d'un polariseur rectiligne



**Figure 13.8**  
**Rotation de la polarisation (E)**  
**en effet Kerr polaire**

(figure 13.8). Si  $\alpha + \Theta$  est l'angle entre la vibration et cet analyseur, l'intensité émergente est proportionnelle à  $\cos^2(\alpha \pm \Theta)$ , où  $\alpha$  est un angle ajustable à volonté par l'expérimentateur et  $\Theta$  la rotation à mesurer. Dans le cas général, l'angle de rotation  $\Theta$  dû à l'effet magnéto-optique est faible (Kerr polaire) et la variation d'intensité transmise ou réfléchi est donc proportionnelle à  $\Theta \sin 2\alpha + \Theta^2 \cos 2\alpha$ . Cette variation atteint sa valeur maximum  $\Theta$  pour  $\alpha \neq 45^\circ$ . La variation relative  $\Delta I/I$  a son maximum autour de  $\alpha = 90^\circ$  car l'intensité est alors voisine de

zéro tandis que la variation absolue  $\Delta I$  est proportionnelle à  $\Theta^2$ , c'est-à-dire très faible. Ainsi, le rapport signal/bruit n'est pas très favorable.

Dans un régime de modulation d'amplitude, le signal photoélectrique est proportionnel à l'intensité, c'est-à-dire à  $\cos^2 \alpha$ . Si  $G$  est le gain de l'amplificateur, le signal résultant est proportionnel à  $G \cos^2 \alpha$  et la variation due à l'effet magnéto-optique à  $G \sin 2\alpha$ . Or la réponse totale ne peut excéder un certain seuil de saturation de l'amplificateur. Il y donc lieu de trouver un compromis entre le gain  $G$  et l'angle  $\alpha$ . Celui-ci est atteint autour de  $\alpha = \pi/2$  où  $G$  et la variation relative  $\Delta I/I$  sont à leur valeur maximale cependant que la variation est égale à  $G \Theta^2$ . Un étalonnage préalable est nécessaire pour déterminer  $\Theta$ .

Pour bénéficier à la fois de la valeur maximale de la variation  $\Delta I$  et d'une grande variation relative qui autorise un gain élevé  $G$ , on préfère utiliser une méthode différentielle. On décompose physiquement la vibration rectiligne incidente en deux composantes rectangulaires selon  $Ox$  et  $Oy$  dont les intensités sont collectées par deux détecteurs distincts pour donner des signaux  $S_x$  et  $S_y$ . En ajustant  $\alpha$  autour de  $45^\circ$ , ces deux composantes ont la même amplitude. Ainsi, la différence  $\Delta S = S_y - S_x$  est voisine de zéro tandis que sa variation entre les deux états d'aimantation, caractérisée par la rotation  $\Theta$ , est proportionnelle à  $2\Theta \sin 2\alpha$ , soit à  $2\Theta$  pour  $\alpha = 45^\circ$ .  $\Theta$  peut être déterminé avec précision à partir de la mesure du rapport  $(S_y - S_x)/(S_y + S_x)$  pour chaque état d'aimantation (notés  $\uparrow$  et  $\downarrow$ ). En effet :

$$\Theta = \frac{1}{4} \left[ \arcsin \left( \frac{S_y - S_x}{S_y + S_x} \right)_{\uparrow} - \arcsin \left( \frac{S_y - S_x}{S_y + S_x} \right)_{\downarrow} \right] \quad (13.42)$$

Dans ce cas, aucun étalonnage préalable n'est nécessaire.

Dans un régime de modulation de la direction de polarisation de la forme  $\eta_1 \sin \omega t$  (voir le § 4.1.2 consacré à la modulation de phase), l'effet magnéto-optique introduit une rotation  $\Theta$  de la position moyenne de la vibration. Si l'analyseur fait un angle  $\zeta$  avec la position moyenne de la vibration, l'intensité transmise est proportionnelle à  $\cos^2(\zeta + \eta_1 \sin \omega t)$ , soit, après filtrage à la fréquence  $\omega$ , un signal  $S$  proportionnel à  $2J_1(2\eta_1) \sin 2\zeta$ , où  $J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

On remarque que  $S$  s'annule pour  $\sin 2\zeta = 0$ , c'est-à-dire quand la direction de l'analyseur est, soit confondue, soit croisée avec la position moyenne de la vibration. On préfère opérer avec l'analyseur croisé pour bénéficier d'une plus grande profondeur de modulation et d'une plus grande sensibilité. Dès lors, il apparaît deux méthodes de mesure de  $\Theta$  :

- ◆ on repère les positions de l'analyseur  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui annulent le signal  $S$  issu de l'amplificateur par rapport à une référence fixe, par exemple  $Ox$ . Elles sont telles que  $\alpha_2 - \alpha_1 = \Theta$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  correspondent aux deux états saturés de l'échantillon.
- ◆ un étalonnage préalable de la variation du signal  $S$  en fonction de la position moyenne de la vibration, soit  $\partial S / \partial \zeta$ , donnera la valeur de  $\Theta$ . L'angle  $\Theta$  étant faible, le problème de la linéarité ne se pose pas ( $\partial S / \partial \zeta = \text{constante}$ ).

La résolution angulaire est élevée et peut atteindre quelques microradians. Les angles considérés sont en général assez faibles et toute méthode susceptible de les augmenter ou de soustraire les rotations parasites est à prendre en considération : couche antiréfléchissante [1, 20], compensation automatique des composants diamagnétiques [21].

#### **4.4. MESURE DE L'ELLIPTICITÉ**

L'ellipticité peut être définie comme le rapport des axes de l'ellipse  $a$  et  $b$ , soit  $\text{tg } \varepsilon = b/a$  où  $\varepsilon$  est l'angle entre la diagonale du rectangle circonscrit à l'ellipse et le grand axe de celle-ci. La mesure de  $\text{tg } \varepsilon$  peut passer par les mesures de  $a$  et de  $b$ . Les mesures d'intensité ne donnent que  $a^2$  et  $b^2$ , c'est-à-dire  $|\text{tg } \varepsilon|$ . Le signe de  $\text{tg } \varepsilon$  donne le sens de rotation du point courant de l'ellipse. En fait, la détermination complète de  $\text{tg } \varepsilon$  constitue une vraie mesure ellipsométrique et nécessite l'utilisation d'un compensateur. Celui-ci peut être de type Babinet [22, 23], ses lignes neutres étant disposées parallèlement à la vibration rectiligne incidente, ou de type Sénarmont (lame quart d'onde + analyseur) avec les lignes neutres de la lame  $\lambda/4$  parallèles aux axes de l'ellipse, l'analyseur étant utilisé pour repérer par extinction la vibration rectiligne émergente. La connaissance des lignes neutres (axes lent et rapide) du compensateur (Babinet ou  $\lambda/4$ ) conduit à l'identification du sens de rotation sur l'ellipse.

#### **4.5. MESURE D'UNE VARIATION D'INTENSITÉ (CAS DE L'EFFET KERR TRANSVERSE, DES DICHROÏSMES CIRCULAIRE ET RECTILIGNE)**

Nous traiterons le cas de la mesure dans le domaine des longueurs d'onde visibles ou proches. Le cas des rayons X tel qu'il se pose aux utilisateurs du rayonnement synchrotron est spécifique et ne sera pas abordé ici.

On suppose que les directions de facile aimantation ont été déterminées et que l'expérimentateur s'est placé dans la géométrie des configurations fondamentales pour les effets mesurés. Dans tous les cas, la polarisation incidente correspond aux

modes propres de propagation, c'est-à-dire p (ou TM) pour l'effet Kerr transverse, circulaire droite puis gauche (ou l'inverse) pour le dichroïsme circulaire, rectiligne selon deux directions perpendiculaires successivement pour le dichroïsme rectiligne. En pratique, on dispose après l'échantillon un analyseur rectiligne, éventuellement associé à une lame quart d'onde, qui garantit que l'expérimentateur a bien mesuré la composante de polarisation qu'il souhaitait.

Une mesure d'intensité implique une mesure de référence. Comme pour les mesures de rotations, on procède de manière différentielle entre les deux états de saturation de l'aimantation, c'est-à-dire sur le plan pratique en effectuant un cycle de champ entre les saturations. En effet, l'état de référence qui correspondrait à l'aimantation locale nulle n'existe pas, du moins en-dessous du point de Curie.

Dans le cas d'une modulation d'amplitude, il n'y a aucune difficulté particulière si ce n'est la faiblesse de la variation d'amplitude due à l'effet magnéto-optique considéré.

La modulation de phase permet de passer, par ajustement de la phase modulée, alternativement d'une polarisation à la polarisation orthogonale (circulaire droite à gauche, rectiligne selon Ox à rectiligne selon Oy) et d'obtenir ainsi directement le signal de dichroïsme.

Ici encore, grâce à des méthode différentielles, on peut augmenter la variation relative et disposer d'un signal plus confortable. On peut, par exemple, dans un montage d'effet Kerr transverse compenser la partie constante du facteur de réflexion  $R_p$  (sensible au sens de l'aimantation) par une intensité proportionnelle à  $R_s$  insensible au sens de l'aimantation [24].

#### **4.6. MESURE DU DÉPHASAGE ET DE SA VARIATION**

Une fois repérée la direction de facile aimantation, on peut aligner le champ appliqué ainsi que les projections sur l'échantillon des axes d'un compensateur sur cette direction. La mesure du déphasage et son évolution avec l'aimantation est reliée à la direction de l'analyseur situé en aval : à une variation de phase de  $\phi$ , il correspond une rotation de  $\phi/2$  de la vibration rectiligne émergente, donc de l'analyseur croisé.

#### **4.7. QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS**

Les résultats de mesure sont exprimés de différentes façons selon les auteurs : les résultats bruts correspondent aux mesures dont nous avons décrit les techniques ci-dessus. Ce sont, par exemple, l'angle  $\Theta_F$  et l'ellipticité  $\epsilon_F$  pour l'effet Faraday,  $\Theta_K$  et  $\epsilon_K$  pour l'effet Kerr polaire ou longitudinal,  $\Delta R/R$  pour l'effet Kerr transverse. Une autre formulation plus élaborée exprime les termes réels et imaginaires du tenseur de permittivité [25]. On trouve aussi la valeur de la constante magnéto-optique Q, la constante de Verdet pour les diamagnétiques et les paramagnétiques. Pour un matériau sous une forme donnée (massif, couche mince, ...), ces grandeurs

sont représentées en fonction de l'énergie du rayonnement incident, de l'angle d'incidence, de la température, etc.

Nous nous bornerons à donner ici quelques ordres de grandeur des différents effets pour des matériaux dans des conditions bien définies.

### 4.7.1. Effet Faraday

#### Diamagnétiques

La constante de Verdet  $k_V$  pour des verres silicate, à  $\lambda = 632,8$  nm et à la température ambiante se situent entre 4 (verres d'optique courants type  $\text{SiO}_2$  et BK-7) et  $27 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  (verres à haut indice et forte dispersion). Les oxydes sous forme amorphe ou cristalline contenant des cations dont les couches électroniques externes sont facilement polarisables ( $\text{Te}^{4+}$ ,  $\text{Pb}^{2+}$ ,  $\text{Ta}^{5+}$ ,  $\text{Bi}^{3+}$ ,  $\text{La}^{3+}$ , ...) ont de grandes constantes de Verdet  $k_V$ , de même que les chalcogénures au soufre, au sélénium ou à l'arsenic, alors que les fluorures sans oxygène ont des constantes  $k_V$  faibles.  $k_V$  dépend peu de la température dans ce cas et décroît quand la longueur d'onde augmente.

#### Paramagnétiques

Les rotations Faraday sont induites par les transitions  $(4f_n) \rightarrow (4f_{n-1} 5d)$  des ions paramagnétiques de terres rares. Les ions, transparents dans le visible, de bande 5d d'énergie élevée ( $\text{Gd}^{3+}$ ,  $\text{Yb}^{3+}$ ) engendrent une faible rotation ( $V$  inférieur à  $10 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ) tandis que les ions de bande 5d de faible énergie ( $\text{Tb}^{3+}$ ,  $\text{Ce}^{3+}$ ) entraînent une rotation importante, depuis environ 20 jusqu'à plus de  $100 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Les ions divalents tels que  $\text{Eu}^{2+}$  ont des bandes 5d d'énergies encore plus faibles ; la constante de Verdet est encore plus importante,  $262 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .  $k_V$  décroît en  $1/\lambda^2$  quand  $\lambda$  augmente.

#### Ferrimagnétiques

Les grenats ferrimagnétiques  $\text{R}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  (où R est une terre rare ou l'yttrium) ont suscité une abondante littérature du fait, d'une part des perspectives qui leur étaient attribuées dans le domaine de l'enregistrement numérique, sous forme de mémoires à bulles en particulier, d'autre part de l'intérêt de leur utilisation dans les dispositifs hyperfréquences. Les valeurs élevées de l'angle de rotation Faraday pour une faible épaisseur traversée constituent en effet une des caractéristiques intéressantes de cette famille de matériaux.

A la température ambiante (300 K) et dans le visible et le proche infrarouge correspondant à leur domaine spectral de transparence, les valeurs de  $\Theta_F$  pour les grenats de terres rares vont de  $12 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $\text{Yb}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  à  $-840 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour  $\text{Nd}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  à  $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ . Le grenat d'yttrium donne une rotation  $\Theta_F$  de  $280 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour la même longueur d'onde alors qu'à  $\lambda = 0,3 \mu\text{m}$ ,  $\Theta_F$  est de l'ordre de  $10^5 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Les grenats substitués de type  $(\text{BiRGa})\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  donnent

aussi de très fortes rotations : entre 1 et  $7 \times 10^4 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  dans le visible, et jusqu'à plus de  $10^5$  dans le proche UV. D'autres substitutions avec du cobalt, du plomb ou du cérium donnent des rotations de plusieurs milliers de degrés par centimètres. On comprend dès lors l'intérêt des grenats qui, épitaxiés en couches relativement épaisses (plusieurs micromètres), donnent des angles de rotation de plusieurs degrés.

### Métaux et alliages ferromagnétiques

La notion d'effet Faraday, effet par transmission, n'a de sens pour ces matériaux que lorsque l'épaisseur est faible car l'absorption est en général élevée. En effet le coefficient d'absorption est le plus souvent compris pour les métaux entre  $10^5$  et  $10^6 \text{ cm}^{-1}$ . Pour les *métaux 3d* (fer, cobalt et nickel) à saturation, pour  $\lambda = 546 \text{ nm}$  et à 300 K les angles de rotation sont élevés et compris entre  $10^5$  et  $10^6 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  [26].

Les angles de rotation correspondant aux *métaux de terres rares 4f* sont bien plus faibles dans le domaine visible car les transitions électroniques n'interviennent que pour des longueurs d'onde du domaine UV. Mais l'absorption est alors très importante. On ne trouve pratiquement pas de données à température ambiante ; les températures de Curie sont situées plus bas.

Les *alliages R-M*, où R est une terre rare et M un métal de transition, sont intéressants sur le plan des applications dans la mesure où leur utilisation en couches minces ou multicouches fait intervenir des épaisseurs faibles, donc l'effet Faraday plutôt que l'effet Kerr polaire. Citons comme exemples le comportement des alliages R-M (avec R : Tb, Gd et M : Fe, Co) à 300 K et pour  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  ; les R-Fe ont un maximum de  $\Theta_F$  entre 1,8 et  $2 \times 10^5 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  pour 75 à 80% de fer tandis que les alliages R-Co ont des valeurs de  $\Theta_F$  croissantes tendant vers la valeur du cobalt pur, soit de l'ordre  $4 \times 10^5 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  [27].

Les composés *ferromagnétiques* peuvent être *isolants*, comme les trihalogénures de chrome,  $\text{CrCl}_3$ ,  $\text{CrBr}_3$  et  $\text{CrI}_3$ , et entraîner de fortes rotations Faraday (entre  $10^3$  et  $10^5 \text{ deg} \cdot \text{cm}^{-1}$  autour de 1,5 K). Ils peuvent aussi être *semi-conducteurs* comme les chalcogénures d'euporium tels que  $\text{EuO}$  ou  $\text{EuS}$ , avec une température de Curie largement inférieure à 300 K, et des rotations Faraday importantes avec une faible épaisseur traversée.

#### 4.7.2. Effet Kerr polaire

On trouve dans la littérature beaucoup de données relatives à l'effet Kerr polaire, voir en particulier Buschow [28]. Ceci est dû en bonne part aux potentialités existantes pour l'enregistrement magnéto-optique.

Les *métaux de transition* ont des angles de rotation Kerr à la température ambiante, dans le visible ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ), de  $-0,30^\circ$  pour le cobalt,  $-0,41^\circ$  pour le fer et  $-0,13^\circ$  pour le nickel. On trouvera chez Buschow les valeurs de  $\Theta_K$  pour un grand nombre d'*alliages intermétalliques* de ces métaux sous forme massive et cristalline avec des compositions variables. Pour les alliages du cobalt, les valeurs de  $\Theta_K$  varient de

+ 0,01 pour  $\text{Co}_7\text{Gd}_2$  à  $-0,40^\circ$  pour  $\text{Co}_{70}\text{Pt}_{30}$ . Pour les alliages du fer, elles varient de  $-0,14^\circ$  pour  $\text{Fe}_{50}\text{Pd}_{50}$  à  $-0,53^\circ$  pour  $\text{Fe}_{85}\text{Pt}_{15}$ . Les alliages pseudo-binaires et ternaires ont des valeurs de  $\Theta_K$  assez faibles sauf exception ( $-0,36^\circ$  pour  $\text{Fe}_{2,7}\text{V}_{0,3}\text{Ge}$ ).

Les *alliages de Heusler* sont des composés intermétalliques ternaires cubiques ferromagnétiques de composition  $\text{X}_2\text{YZ}$ . Les angles  $\Theta_K$  sont en général relativement faibles ( $< 0,2^\circ$ ) avec toutefois des valeurs élevées pour les alliages  $\text{FeCoGa}$  ( $-0,41^\circ$ ). Proches des alliages de Heusler, les alliages du type  $\text{XMnY}$  ( $\text{PtMnSb}$ ,  $\text{PdMnSb}$ ,  $\text{NiMnSb}$ ,  $\text{PtMnSn}$ ), appelés semi-métaux à cause d'un *gap* semi-conducteur dans la structure de bande des spins minoritaires, peuvent donner lieu à des rotations  $\Theta_K$  importantes ( $-1,2^\circ$  pour  $\text{PtMnSb}$  à  $\lambda = 750 \mu\text{m}$ ).

L'un des critères de choix des matériaux destinés à l'enregistrement magnéto-optique est l'importance de la rotation Kerr à la température ambiante et pour les longueurs d'onde disponibles avec des diodes laser (proche infrarouge et rouge). D'autre part, les matériaux sont déposés en couches minces ou multicouches amorphes. Ce sont des *couches de R-M*, où R est une terre rare (Tb, Gd, Dy) et M un métal de transition 3d.

$\Theta_K$  vaut à 300 K et pour le rouge environ  $0,4^\circ$  pour les  $\text{Gd}_{1-x}\text{Fe}_x$  et de  $-0,1^\circ$  à  $-0,3^\circ$  pour la famille  $\text{Gd}_{1-x}\text{Co}_x$  quand  $x$  croît entre 0,6 et 1. Une comparaison des rotations Kerr et Faraday entre ces alliages est présentée dans l'article de Hansen *et al.* [27] ; à 300 K, pour  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  et dans le cas de  $\text{Gd}_{0,15}\text{Fe}_{0,85}$ ,  $\Theta_F$  vaut  $2 \times 10^5 \text{ deg. cm}^{-1}$  quand  $|\Theta_K|$  vaut  $0,4^\circ$ . La rotation Kerr correspond donc à la rotation Faraday d'une épaisseur de 50 nm du même matériau.

Les alliages  $\text{TbFe}$  ont été très étudiés et donnent un angle  $\Theta_K$  d'environ  $0,2^\circ$  à 600 nm et à 300 K. Dans les mêmes conditions expérimentales, l'alliage  $\text{TbFeCo}$  utilisé dans les disques magnéto-optiques commercialisés fait tourner la polarisation de  $\Theta_K = -0,17^\circ$  tandis que l'angle  $\Theta_K$  est de  $-0,25^\circ$  pour l'alliage  $\text{GdFeCo}$  dans les mêmes conditions expérimentales.

Les  $\text{R-Fe}_2$  (où R = Gd, Er, Ho, Dy, Tb) ont été étudiés systématiquement en fonction de  $\lambda$  et à 300 K [29] ; les maxima de  $|\Theta_K|$  se situent autour de  $\lambda = 300 \text{ nm}$  et vont de  $-0,4^\circ$  pour  $\text{TbFe}_2$  à  $+0,2^\circ$  pour  $\text{GdFe}_2$ .

### 4.7.3. Effet Kerr longitudinal

Bien que la configuration de l'effet Kerr longitudinal ait été présentée comme fondamentale, elle ne donne pas accès sans ambiguïté à une composante bien définie de l'aimantation. En effet, la distinction entre effet longitudinal et polaire en incidence oblique est quasi impossible. Seule, une variation de l'angle d'incidence peut permettre de faire la part des choses. De plus, les composantes d'aimantation dans le plan sont accessibles au moyen de l'effet Kerr transverse qui est assez couramment utilisé, en particulier pour les couches minces et multicouches. Ceci nous explique pourquoi la littérature est assez pauvre en résultats de mesure d'effet

Kerr longitudinal alors que cet effet est utilisé couramment pour l'observation des domaines magnétiques lorsque le vecteur aimantation est à peu près parallèle à la surface ; cette situation est très fréquente car, en l'absence d'anisotropie *perpendiculaire*, c'est elle qui sera privilégiée par l'énergie magnétostatique (cf. chapitre 20).

Les valeurs de l'angle de rotation de même que celles de l'ellipticité dépendent non seulement de la longueur d'onde et de la température, comme pour l'effet Kerr polaire, mais aussi de l'angle d'incidence. Celui ci peut varier de 0 à 90°. La valeur de l'angle de rotation est nulle pour ces angles extrêmes et présente un maximum au voisinage de l'angle d'incidence principal [30], tel que le déphasage entre composantes p et s vaut  $\pi/2$ .

#### 4.7.4. Effet Kerr transverse

Les avantages liés à l'utilisation de l'effet Kerr transverse tiennent au fait qu'il fournit directement une quantité ( $\Delta R/R$ ), parfois notée  $\delta$ , proportionnelle à la valeur de l'aimantation moyenne sur la zone de mesure M, que sa mise en œuvre est très simple et ne nécessite pas de mesure d'angle car on ne s'intéresse qu'au mode propre de propagation (p ou TM). En revanche, la valeur de  $\Delta R/R$  dépend de l'angle d'incidence avec un maximum situé en général au voisinage de l'angle de réfraction principal pour le matériau considéré, soit de l'ordre de 65° à 80° pour les métaux.  $\Delta R/R$  dépend aussi de  $\lambda$  et, bien sûr, de T (donc M). La commodité d'emploi de cet effet en fait depuis longtemps un outil très pratique [25], [31], [32]. Son utilisation s'est fortement accrue avec l'intérêt croissant pour les couches minces magnétiques et, d'une façon générale, pour les surfaces. Les matériaux mesurés sont ferro- ou ferrimagnétiques.

Les métaux 3d ont fait l'objet des mesures les plus anciennes. Pour le cobalt en couche mince,  $\Delta R/R$  passe par un maximum de  $1,5 \times 10^{-2}$  pour  $\lambda = 700$  nm et un angle d'incidence de 71° [32]. Pour  $\lambda = 632,8$  nm, à température ambiante et pour un angle d'incidence de 60°, un  $\Delta R/R$  de l'ordre de  $1,1 \times 10^{-2}$  a pu être mesuré. Le cobalt massif présente un comportement identique ; des mesures dans l'infrarouge mettent en évidence un extremum de  $\Delta R/R$  vers  $\lambda = 3$   $\mu$ m de valeurs  $1,6 \times 10^{-2}$  et  $3,4 \times 10^{-2}$  pour des incidences de 75° et 85° respectivement [32].

Pour le nickel, dans le domaine de longueur d'onde compris entre 0,7 et 5,8  $\mu$ m,  $\Delta R/R$  passe par des extrema situés vers 1,5  $\mu$ m, où  $\Delta R/R$  vaut environ  $-7 \times 10^{-3}$ , et 5,5  $\mu$ m où  $\Delta R/R$  vaut de l'ordre de  $2 \times 10^{-3}$ , l'annulation de l'effet étant obtenue vers 3,8  $\mu$ m [32], [33]. Vers 700 nm,  $\Delta R/R$  est d'environ  $-4 \times 10^{-3}$ . Les conventions de signe sont celles définies dans la référence [32].

Le fer a des valeurs extrêmes de  $\Delta R/R$  autour de  $\lambda = 0,7$   $\mu$ m et 3  $\mu$ m avec respectivement des valeurs de l'ordre de  $5,5 \times 10^{-2}$  et  $1,5 \times 10^{-2}$  [32, 34]. On trouve par ailleurs dans la littérature de nombreux exemples de systèmes multicouches à base de métaux de transition et de terres rares qui donnent une idée de la sensibilité de la méthode (la monocouche atomique !) [35], [36].

## 5. UTILISATIONS ET APPLICATIONS DES EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES

Nous distinguons ici les utilisations des effets magnéto-optiques en physique, c'est-à-dire dans des expériences destinées à mieux comprendre les propriétés magnétiques des matériaux, de leurs applications dans des dispositifs.

### 5.1. UTILISATIONS EN PHYSIQUE

#### 5.1.1 Caractérisation magnétique - Hystérésigraphie

Dans des configurations géométriquement bien définies, à une seule composante de l'induction  $\mathbf{B}$  (c'est-à-dire pratiquement dans les milieux magnétiques ordonnés doués d'une aimantation spontanée, à une seule composante de l'aimantation  $\mathbf{M}$ ), la sensibilité des effets magnéto-optiques permet de mesurer l'évolution de l'aimantation moyenne en fonction du champ magnétique appliqué, et donc le cycle d'hystérésis.

En réflexion (effet Kerr), cette mesure renseigne sur le comportement d'une zone superficielle de faible épaisseur (de l'ordre de la profondeur de pénétration) du matériau, moyenné sur la région éclairée. Le cycle d'hystérésis superficiel ainsi obtenu peut être complètement différent du cycle correspondant à l'ensemble du volume, tel qu'on peut le mesurer par les méthodes classiques, et cette différence est intéressante en soi parce qu'elle révèle l'importance des domaines, situés à l'intérieur de l'échantillon, où l'aimantation prend une direction différente de celle des domaines de fermeture qui occupent la surface.

Dans l'étude de couches magnétiques suffisamment minces, le cycle mesuré par effet magnéto-optique est représentatif de l'ensemble. On apprécie alors particulièrement la rapidité de la mesure, et la possibilité de la pratiquer *in situ*, par exemple dans une enceinte à ultravide, juste après la croissance de l'échantillon, et en parallèle avec d'autres méthodes de caractérisation. En particulier, le cycle d'hystérésis a une allure complètement différente suivant que le champ est appliqué dans la direction de facile aimantation ou dans une direction de difficile aimantation (voir chapitre 20) : la comparaison des résultats obtenus permet donc aussi de déterminer l'anisotropie des couches, aussi bien que les valeurs du champ coercitif ou de l'aimantation rémanente.

Le développement de la physique des multicouches et des super-réseaux magnétiques, ces dernières années, a conduit à leur étude magnéto-optique, expérimentale et théorique. L'analyse des résultats, basée sur des formalismes matriciels tels que celui de Visnovsky [15], est particulièrement riche. Ainsi Penissard a montré dans sa thèse que l'on devrait pouvoir détecter sélectivement, dans une multicouche, le cycle d'hystérésis de l'une des couches par un choix approprié de l'énergie des photons utilisés. Hubert & Traeger [16] ont introduit des *fonctions de sensibilité* pour décrire de tels systèmes.

### **5.1.2. Évolution de l'aimantation dans les systèmes homogènes Transitions de phases**

La magnéto-optique a contribué de façon déterminante, dans les années 70, à l'étude des transitions de phases et des phénomènes critiques. La grande sensibilité des mesures optiques permet en effet de bien mesurer la variation des effets tels que la rotation Faraday [37], [38] ou la biréfringence rectiligne [39], [40]. Dans un domaine de température restreint (quelques Kelvin), la seule grandeur qui varie beaucoup est souvent l'aimantation, ou, dans le cas d'antiferromagnétiques, l'aimantation des sous-réseaux. Ces mesures ont permis de déterminer une série d'exposants critiques, et de les confronter aux prévisions de la théorie du groupe de renormalisation (voir chapitre 10).

### **5.1.3. Magnéto-optique en diffraction**

Les effets magnéto-optiques classiques concernent des milieux homogènes. Si l'on envoie un faisceau de lumière visible sur un objet spatialement périodique de période micrométrique, par exemple un réseau constitué d'un matériau magnétique, ou un arrangement périodique bidimensionnel d'îlots magnétiques, il est diffracté. Chacun des faisceaux diffractés subit alors un effet magnéto-optique, que l'on peut décrire, pour les ordres de diffraction autres que l'ordre zéro, comme non spéculaire [41].

### **5.1.4. Résonances**

La présence d'une composante de l'aimantation normale à la direction du champ magnétique continu appliqué, lors de la précession associée à une résonance d'ondes de spin, peut être observée par son effet sur la lumière transmise entre polariseurs croisés [2], ce qui peut permettre une analyse originale des modes de résonance dans un matériau transparent. On entre néanmoins là dans le domaine des effets magnéto-optiques inélastiques (diffusion de la lumière par des ondes de spin), que nous avons en principe écarté du champ de ce chapitre.

### **5.1.5. Imagerie de domaines magnétiques**

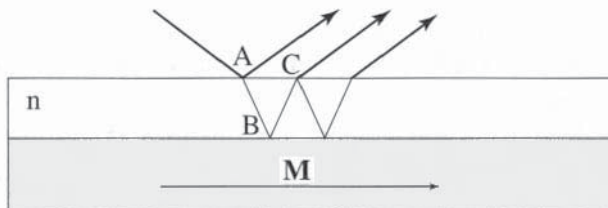
Après réflexion ou transmission par des régions dans lesquelles l'orientation ou l'arrangement des moments magnétiques sont différents, c'est-à-dire par des domaines magnétiques différents (voir chapitre 3), la lumière aura des caractéristiques différentes : sa polarisation pourra avoir tourné dans un sens ou l'autre, ou son intensité pourra être différente. Il sera donc possible, en détectant ces inhomogénéités du faisceau associées aux variations locales du comportement magnéto-optique, de faire des images des domaines magnétiques. On remarque que l'effet des domaines conduit à la mesure macroscopique (hystérésigraphie) lorsque l'on fait une intégration sur la surface éclairée au lieu de l'exploitation locale qui correspond à l'imagerie.

Les observations de domaines *ferro-* ou *ferrimagnétiques* reposent sur les effets Kerr ou, dans le cas de matériaux transparents ou de couches très minces, l'effet

Faraday. Ce dernier donne, pour des couches de quelques  $\mu\text{m}$  d'épaisseur déposées par exemple sur un substrat épais mais transparent de gallate grenat de gadolinium (GGG), une rotation confortable (quelques degrés) de la polarisation de la lumière, et un contraste, agrémenté de couleurs, très facile à mettre en évidence. L'observation des domaines, dans un microscope polarisant, est alors très agréable, et leurs mouvements sous l'effet d'un champ magnétique constitue une initiation spectaculaire à la physique des domaines magnétiques.

En revanche, les effets Kerr polaire et surtout longitudinal, ce dernier étant applicable lorsque l'aimantation est dans le plan de surface, conduisent à une rotation du plan de polarisation de la lumière très faible (quelques minutes d'arc). L'observation du contraste associé à des domaines différents amène donc à utiliser un analyseur presque croisé avec le polariseur, et la luminosité de l'image est faible. Par ailleurs, l'utilisation du mode longitudinal impose une incidence oblique, et tout relief de la surface donne alors, entre polariseurs croisés, un contraste violent. En pratique, ceci renforce les exigences sur le polissage de la surface. En effet, quelle que soit la méthode expérimentale utilisée, cette surface doit être exempte de couche écrouie, sinon les domaines eux-mêmes seraient perturbés par l'effet de la magnétostriction et les observations ne seraient plus significatives ; en pratique, la surface doit donc être polie électrolytiquement ou soumise à une attaque chimique bien contrôlée. L'exigence optique supplémentaire est que la surface soit très plane.

Deux techniques auxiliaires atténuent les difficultés. D'une part, un dispositif électronique de traitement d'images permet de soustraire l'image de l'échantillon dans l'état magnétiquement saturé, donc dépourvu de domaines, et, si besoin, est d'augmenter artificiellement le contraste [42]. D'autre part, le dépôt d'une couche interférentielle à fort indice de réfraction, telles que ZnS, Si ou  $\text{SiO}_2$ , d'épaisseur bien contrôlée, permet d'accroître la rotation pour l'effet Kerr longitudinal [43], [44]. Le principe est de diminuer, par interférence destructive (figure 13.9), la composante du vecteur champ électrique de l'onde lumineuse correspondant simplement à la réflexion, sans atténuer la petite composante perpendiculaire que l'on peut associer à l'effet magnéto-optique.



**Figure 13.9 - Augmentation de l'effet Kerr par une couche interférentielle diélectrique.**  
Les ondes réfléchies dans le vide issues de A, C etc. doivent être en opposition de phase

L'épaisseur optique (produit de l'épaisseur par l'indice de réfraction) de la couche doit donc être voisine de  $\lambda/4$ , de façon à ce que l'onde réfléchie sur sa surface soit en opposition de phase avec celle qui en émerge après avoir traversé la couche deux

fois, et acquis sa contribution *magnétique* sur la surface magnétique. Cette méthode est également applicable pour l'effet Kerr polaire [45] et pour l'effet Kerr transverse [46].

L'imagerie des domaines magnétiques a récemment amorcé un tournant prometteur avec le développement de la microscopie en champ proche [47] (voir Appendice, § A.5). Outre son intérêt en recherche fondamentale et son élégance, cette approche recèle des possibilités très excitantes pour l'enregistrement magnétique à très haute densité. Beaucoup reste à découvrir sur les effets magnéto-optiques en champ proche. Nous nous concentrerons dans la suite sur les observations en champ lointain.

Dans des supraconducteurs de type I, l'effet Faraday a permis de visualiser directement l'état intermédiaire (coexistence des phases normale et supraconductrice associée à la transition sous l'effet d'un champ magnétique appliqué) grâce à une couche de matériau paramagnétique à grande constante de Verdet [48]. Dans des supraconducteurs de type II, la magnéto-optique permet, de la même façon, de déterminer le cycle d'hystérésis bien qu'il s'agisse alors de modifications de la configuration des lignes de vortex, c'est-à-dire des régions dans lesquelles  $\mathbf{B}$  n'est pas nul, dans l'état mixte. De telles études se sont largement développées ces dernières années, pour les supraconducteurs à haute température critique [49]. Le détecteur de champ ferrimagnétique de Dorosinskii *et al.* [50] mentionné aux § 5.1.6 et 5.2.2 rend également de grands services dans ces études, pour lesquelles il a initialement été développé.

Nous n'avons jusqu'à présent discuté que l'imagerie en lumière visible. Rien n'est changé dans le principe si l'on veut utiliser l'infrarouge, par exemple pour étudier par transmission les domaines dans des matériaux qui y sont plus transparents que dans le visible. Il faut cependant, bien entendu, disposer d'une optique qui puisse fonctionner dans le domaine sélectionné, de polariseurs adéquats, et d'un convertisseur qui permette de voir l'image.

Le développement de sources de rayonnement synchrotron fournissant des flux extrêmement intenses de rayons X dans une gamme d'énergies très étendue a permis récemment le développement d'études des effets magnéto-optiques dans cette gamme spectrale. La faisabilité de l'observation de domaines par diffraction magnétique des rayons X a été démontrée [51] dans le cas de la magnétite  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ . Dans ce cas, la technique est identique à la méthode d'imagerie par diffraction de Bragg qu'on appelle souvent topographie aux rayons X [52]. Cependant, dans sa forme habituelle, où la diffraction est due à la charge électronique (diffusion Thomson), les parois ou les domaines ne participent au contraste que par la variation de distorsion qui leur est associée par l'intermédiaire de la magnétostriction (chapitre 5, § 6.1.3) ; les parois et domaines à  $180^\circ$  sont donc pratiquement invisibles. En imagerie par diffusion magnétique, l'intensité diffractée varie d'un domaine à l'autre, de la même façon qu'en topographie aux neutrons [51], mais le contraste est faible.

Une autre famille d'approches apparaît très prometteuse : celle associée au dichroïsme magnétique circulaire des rayons X. La variation, suivant le sens de l'aimantation du matériau, de l'absorption de rayons X polarisés circulairement, lorsque leur énergie est proche d'un seuil d'absorption bien choisi, pourrait être utilisée directement, en particulier par une technique d'imagerie par balayage. Une élégante variante a été mise en œuvre récemment : elle utilise les variations, liées à celles de l'absorption, du nombre de photoélectrons éjectés [53], en recueillant ces électrons par un système de lentilles qui produit une image. Le fait que le processus soit intimement lié à l'énergie des seuils, et donc caractéristique de l'élément étudié, permet alors d'observer sélectivement et successivement, en changeant la longueur d'onde des rayons X utilisés, les domaines dans l'une ou l'autre des couches d'un super-réseau ou d'une multicouche, et d'obtenir une information très directe sur les couplages entre elles. Avec la mise au point de techniques de manipulation de la polarisation des rayons X [54], il est vraisemblable que ces méthodes connaîtront un beau développement au cours des prochaines années.

### **5.1.6. Cartes de champ magnétique**

Le détecteur magnéto-optique développé par Dorosinskii *et al.* [50], constitué d'une couche de grenat ferrimagnétique magnétiquement très douce, et bien transparente, déposée sur un substrat de grenat non magnétique, donne une sensibilité meilleure que des couches paramagnétiques. La répartition de l'aimantation dans la couche magnétique suit dans une large mesure la répartition du champ magnétique auquel elle est soumise. Placée sur un dispositif ou un échantillon, et observée dans un microscope polarisant, elle permet ainsi, grâce à l'effet Faraday utilisé en réflexion, de visualiser la répartition du champ créé par l'échantillon.

## **5.2. APPLICATIONS**

### **5.2.1. Isolateurs optiques**

Dans un laser, l'émission stimulée est engendrée grâce à une excitation extérieure qui met en œuvre le pompage optique dans un milieu actif, appelé amplificateur, et caractérisé par son gain. Afin d'assurer à la fois la stabilité de la lumière émise et un régime thermique supportable par le matériau, l'intensité lumineuse dans le milieu actif doit rester en deçà de la saturation. Mais si, du fait d'une réflexion mal contrôlée, une partie de la lumière émise retourne dans le milieu actif, elle peut engendrer des instabilités de l'émission, voire des dégâts irréversibles du matériau. Le rôle d'un isolateur optique est celui d'une valve à photons qui bloque tout retour de lumière vers la source.

La propriété de non-réciprocité de l'effet Faraday, mentionnée plus haut, fournit le principe d'un isolateur optique. Il suffit de disposer sur le faisceau, préalablement polarisé rectilignement ( $\text{Pol}_1$  à  $0^\circ$ ) à la sortie du laser, un composant G dont l'effet Faraday fait tourner la direction de polarisation de  $45^\circ$ , suivi d'un polariseur

rectiligne ( $\text{Pol}_2$  à  $45^\circ$ ) laissant passer cette polarisation avec le minimum d'atténuation. Toute lumière réfléchiée ou rétrodiffusée par un composant situé au delà de l'isolateur subit à son retour vers la source une rotation supplémentaire de son plan de polarisation de  $45^\circ$  qui l'amène à être bloquée par le polariseur situé côté source.

Le composant G doit induire une rotation Faraday  $\Theta_F$  de  $45^\circ$  ; il doit donc être constitué d'un matériau transparent à la longueur d'onde utilisée (dans le domaine visible ou proche infrarouge) et l'épaisseur produisant une telle rotation doit être compatible avec le mode de production du champ magnétique H.

Les performances d'un isolateur fonctionnant à une longueur d'onde donnée (par exemple 1,3 ou 1,55  $\mu\text{m}$  pour les télécommunications par fibres optiques) sont exprimées en termes de :

- ◆ rapport d'extinction ou isolation en décibels (dB), soit  $-10 \log P_2/P_0$ , où  $P_0$  est le flux lumineux incident provenant directement de la source et  $P_2$  est le flux retournant vers la source après traversée de l'isolateur et réflexion par un miroir idéal. L'isolation peut atteindre 60 dB.
- ◆ pertes d'insertion, également en décibels, c'est-à-dire  $-10 \log P_1/P_0$  où  $P_1$  est le flux transmis et donc utilisable. Avec un grenat de bonne qualité, les pertes peuvent être inférieures à 0,1 dB.

Les matériaux de la famille des grenats d'yttrium-fer ( $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ ) présentent, grâce à des substitutions, les propriétés magnétiques, magnéto-optiques [55], thermiques et économiques les mieux adaptées. Les grenats dopés au bismuth fournissent les rotations les plus importantes. On remédie à la forte dépendance thermique de  $\Theta_F$  due au bismuth en incorporant des ions de terres rares telles que terbium, gadolinium, holmium, lanthane ou samarium qui permettent d'amener la température de compensation, pour laquelle  $d\Theta_F/dT$  devient très faible, dans la région de la température d'utilisation, typiquement  $22^\circ\text{C}$  [56].

La configuration de l'isolateur correspond à un vecteur aimantation perpendiculaire au grenat, d'une épaisseur typique pouvant aller de quelques centaines de micromètres à quelques millimètres [57].

Les champs nécessaires pour saturer les grenats vont de 0,05 à 0,2 T. Toutefois, un dopage avec du gallium ou de l'aluminium conduit à un matériau de type faible aimant permanent ne nécessitant aucun champ appliqué, après saturation sous quelques centaines de mT, donc à un encombrement et un coût nettement moins élevé [56]. Dans ce cas la dépendance thermique est moins bien compensée.

Dans le cas d'isolateurs inclus dans des configurations d'optique guidée [58], on recherche plutôt des grenats épitaxiés ; dans ce cas l'aimantation doit être dans le plan de la couche. La réalisation de l'isolateur nécessite une moindre épaisseur de grenat et un champ appliqué plus faible que pour la configuration décrite ci-dessus. Toutefois, il est impératif de minimiser la biréfringence rectiligne en effectuant des recuits destinés à relâcher les contraintes.

### 5.2.2. Capteurs de champ magnétique

Un capteur de champ magnétique peut être utilisé comme outil de mesure du champ (norme, ou valeur d'une composante) ou, dans une configuration différente, pour obtenir une image de sa distribution, c'est-à-dire de la répartition spatiale des lignes de champ. Cette dernière application est décrite dans le paragraphe consacré au contrôle non destructif. La mesure d'un courant électrique peut être déduite de la valeur du champ magnétique engendré par le conducteur.

Le champ magnétique tend à aligner les moments dans un matériau magnétique. Certains effets magnéto-optiques de base (Faraday, Kerr transverse et polaire) ne sont sensibles qu'à une seule composante de ce vecteur aimantation. En alignant le dispositif de mesure par rapport au champ magnétique  $\mathbf{H}$  à mesurer de telle manière que la composante d'aimantation détectée varie de façon linéaire avec l'amplitude du champ, au moins dans un certain domaine de valeurs, on peut déduire la valeur locale de  $H$ .

Dans le cas d'un matériau diamagnétique dont l'épaisseur et le coefficient de transmission assurent un bon passage de la lumière, l'angle de rotation Faraday  $\Theta_F$  est proportionnel au champ appliqué et tel que  $\Theta_F = k_V l B$ , où  $k_V$  est la constante de Verdet,  $B$  l'amplitude de la composante du champ appliqué selon la direction de propagation de la lumière et  $l$  l'épaisseur de matériau traversée. Une bonne sensibilité sera donc atteinte par le choix d'un matériau diamagnétique qui associe une forte constante de Verdet et une faible absorption à la longueur d'onde utilisée [59]. Citons l'application à la mesure d'un courant électrique par la rotation Faraday engendrée par le champ créé par le conducteur dans une fibre optique monomode enroulée autour de celui-ci. La faible constante de Verdet est alors compensée par la grande longueur  $l$  de la fibre.

Dans le cas d'un matériau ferromagnétique présentant une anisotropie uniaxiale avec un axe de facile aimantation  $Oz$ , la composante  $M_x$  de l'aimantation perpendiculaire à l'axe  $Oz$  a, en dehors des régions où le champ est proche de la saturation, une amplitude proportionnelle au champ appliqué si celui-ci est suivant  $Ox$ . Un effet magnéto-optique impair (Faraday, Kerr) donnera une réponse proportionnelle au champ.

Les grenats d'yttrium-fer ferrimagnétiques (YIG) dopés sont ici encore très utilisés [60] car  $S'$ , la sensibilité normalisée par rapport à la longueur, peut atteindre des valeurs importantes, en particulier au voisinage du point de compensation [61]. Indépendante de la géométrie, cette sensibilité normalisée s'écrit  $S' = N_{\text{eff}} S / l$ , où  $N_{\text{eff}}$ , le facteur effectif de champ démagnétisant, représente une moyenne en volume du facteur géométrique  $N$  (exprimé habituellement sous forme tensorielle),  $l$  est la longueur traversée et  $S = d\Theta_F / dH = \Theta_{F,\text{sat}} / H_{\text{sat}}$  est la sensibilité. Les sensibilités  $S$  et  $S'$ , la rotation spécifique Faraday (angle de rotation par unité de longueur), le domaine des champs mesurables et la stabilité en température dépendent des substitutions dans le grenat. Dans un grenat YIG, la substitution par du bismuth augmente la rotation spécifique, le gallium réduit l'aimantation à saturation tandis

que la stabilité thermique est améliorée par l'incorporation, dans le grenat, de terres rares (voir paragraphe précédent) telles que le gadolinium [62] ou le lanthane dans un grenat de terbium fer (TbIG). Pour ces matériaux, l'angle de rotation par unité de longueur peut dépasser  $100^\circ/\text{mm}$  tandis que  $S'$  peut être supérieur à  $10^\circ/\text{A}$ . De plus, la réponse en fréquence se fait sans atténuation jusqu'au MHz et peut même être correcte jusqu'au GHz pour certains matériaux (YBiG).

### ***5.2.3. Contrôle non destructif***

La sensibilité des méthodes optiques est souvent mise à profit comme moyen de contrôle local ou global de matériaux ou de dispositifs susceptibles d'affecter l'intensité, la phase ou la polarisation de la lumière. On admet en général que l'énergie apportée par le faisceau-sonde ne modifie pas les propriétés de la surface ou du volume sondé. Les effets magnéto-optiques constituent un outil supplémentaire de contrôle non destructif. Ils permettent de visualiser directement un état magnétique pouvant être affecté par les conditions de température ou de contrainte lorsqu'ils sont utilisés dans les configurations décrites plus haut.

Ils sont également utilisés pour tester la continuité des surfaces de matériaux magnétiques [63] ou dans les propriétés de transport de matériaux non magnétiques. En effet, toute singularité ou discontinuité de celles-ci se traduit par une anomalie du champ magnétique engendré par le courant électrique. Un matériau présentant à la fois une forte susceptibilité et un fort couplage magnéto-optique sert de capteur de champs de fuite et en fournit directement la distribution spatiale. Les grenats ferrimagnétiques sont encore une fois utilisés [64]. De tels systèmes d'imagerie susceptibles de détecter des microfissures dans des tôles sont ainsi disponibles commercialement. Les applications sont nombreuses et peuvent aller du contrôle de carlingues d'avions à celui des enveloppes métalliques dans des réacteurs nucléaires. Un tel contrôle vient s'insérer dans un ensemble destiné à inspecter les surfaces et les volumes métalliques.

### ***5.2.4. Enregistrement magnéto-optique***

L'enregistrement magnétique est l'une des technologies les plus importantes, tant pour l'informatique que pour les arts du son et de l'image [65]. Parmi les voies explorées depuis une quinzaine d'années figure l'enregistrement magnéto-optique. Il a maintenant débouché au niveau industriel, et le disque compact magnéto-optique est même présent depuis plusieurs années sur le marché de l'enregistrement pour amateurs (le Minidisc® Sony). Cette application sera traitée au chapitre 21.

## APPENDICE :

### OPTIQUE DES MATÉRIAUX NON MAGNÉTIQUES

Nous reprenons ici brièvement quelques notions de base de l'optique. Des ouvrages spécialisés, par exemple ceux qui ont été cités en référence, devront naturellement être consultés pour plus de détails.

#### AI - PULSATION, VECTEUR D'ONDE, POLARISATION

Une onde lumineuse se caractérise par sa pulsation  $\omega$ , proportionnelle à l'énergie  $\hbar\omega$  des photons associés,  $\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$  J.s étant la constante de Planck divisée par  $2\pi$  ; par sa direction de propagation représentée, du moins dans les cas simples, par son vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  ; par son intensité, proportionnelle au module carré de l'amplitude du champ électrique  $\mathbf{E}$  ; et par sa polarisation. Dans la situation la plus simple, celle de la propagation dans le vide, l'onde est transverse, c'est-à-dire que  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Lorsque la direction de  $\mathbf{E}$  est constante, on dit qu'on a affaire à une lumière *polarisée rectilignement*. Lors de la propagation libre, dans le vide, deux directions quelconques du plan perpendiculaire à la direction de propagation peuvent servir de repère pour  $\mathbf{E}$ . Il est commode, dès lors qu'on envisage une réfraction ou une réflexion à une interface entre deux milieux, en incidence oblique, de repérer les directions par rapport au plan d'incidence, défini comme celui contenant la normale à l'interface et la direction de propagation incidente. Une lumière dont le vecteur  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire au plan d'incidence sera dite de polarisation s ou  $\sigma$  ; la polarisation sera p ou  $\pi$  si  $\mathbf{E}$  est dans le plan d'incidence. On désigne encore ces situations par les termes TE (le vecteur  $\mathbf{E}$  est transversal par rapport au plan d'incidence) et TM (vecteur champ magnétique transversal par rapport au plan d'incidence, donc  $\mathbf{E}$  dans le plan d'incidence).

Mais  $\mathbf{E}$  peut aussi tourner, à la vitesse angulaire  $\omega$ , au cours de la propagation : s'il conserve la même norme, on parle de polarisation *circulaire*, droite ou gauche suivant le sens de rotation. Ces désignations évoquent les courbes que décrirait l'extrémité de  $\mathbf{E}$  au cours du temps. On désigne conventionnellement [66, p. 272] par circulaire *droite* une onde telle que le vecteur  $\mathbf{E}$  semble tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur qui reçoit l'onde, et donc qui regarde vers la source (figure 13.10).

Si  $\mathbf{E}$  change périodiquement de norme, on parle de polarisation *elliptique*, droite ou gauche également. On remarquera qu'une lumière à polarisation elliptique peut s'envisager comme la superposition cohérente de deux ondes polarisées circulairement en sens opposés, d'amplitudes inégales, mais aussi comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions perpendiculaires, d'amplitudes différentes et déphasées. La superposition *cohérente* implique l'addition des amplitudes en tenant compte des phases.

Un faisceau de lumière n'est polarisé que s'il a préalablement subi une préparation, ou s'il est émis par un laser. La lumière "naturelle" est non polarisée : la direction de  $\mathbf{E}$  y varie de façon aléatoire. On peut considérer cette situation comme résultant de la superposition *incohérente* de deux faisceaux d'égale intensité, polarisés, soit rectilignement, soit circulairement, suivant les deux modes principaux. La superposition *incohérente* consiste à ajouter simplement les intensités.

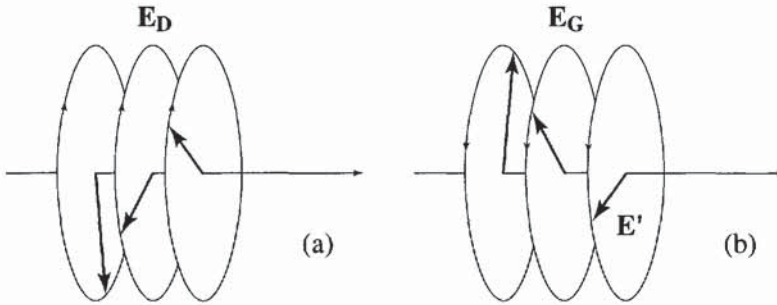


Figure 13.10 - Vibrations circulaires droite (a) et gauche (b)

Au cours de la propagation, la direction du vecteur électrique tourne, son extrémité décrivant un cercle. Les vecteurs figurés représentent le champ  $\mathbf{E}$  à des instants successifs, et donc en des positions décalées.

On désigne sous le nom de *mode propre* un régime de polarisation qui se conserve, c'est-à-dire n'est pas altéré, au cours de la propagation. Ce n'est que pour un mode propre que l'attribution d'un indice de réfraction est une description pertinente.

## A2 - INDICE DE RÉFRACTION, PERMITTIVITÉ DIÉLECTRIQUE

Deux notions, liées, dominent la description de l'optique des matériaux : l'indice de réfraction, et le tenseur de permittivité diélectrique. Dans le domaine du visible, et *a fortiori* aux fréquences encore plus hautes (rayons X), la perméabilité magnétique relative  $\mu$  ne joue aucune rôle, même dans les effets magnéto-optiques : en effet les moments magnétiques ne peuvent pas suivre les variations extrêmement rapides correspondant à ces fréquences, et on peut donc prendre  $\mu = 1$ . Tous les effets sont donc associés à la permittivité électrique  $\epsilon$ . Il n'en est pas de même à des fréquences plus basses.

L'expression la plus simple d'une onde électromagnétique dans un matériau concerne une onde plane et monochromatique, polarisée rectilignement ; son champ électrique s'écrit :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , ce que l'on peut aussi mettre sous la forme :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[j(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  à condition de se rappeler que, par convention, on ne prend que la partie réelle de cette expression complexe.

La norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  s'écrit  $k = nk_0$ , où  $k_0$  est la norme du vecteur d'onde dans le vide. Ceci définit l'indice de réfraction  $n$  du matériau, et l'on peut dire que le vide est associé à un indice de réfraction égal à 1.

Dans un premier temps, sachant que la vitesse de phase de l'onde est  $v_p = \omega/k$ , on voit immédiatement que, dans un milieu où l'indice de réfraction est supérieur à 1, la vitesse de phase est divisée par  $n$  par rapport à sa valeur dans le vide,  $c$ . Lorsque l'indice de réfraction est fonction de la pulsation  $\omega$ , donc lorsqu'il y a dispersion, la vitesse de groupe est donnée par  $v_g = d\omega/dk$ . Il faut noter qu'il n'est pas choquant de rencontrer un indice  $n < 1$ , qui implique une vitesse de phase supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide,  $c$ . Celle-ci ne constitue une limite supérieure rigide qu'à la vitesse de propagation, et c'est donc la vitesse de groupe qui doit impérativement satisfaire  $v_g < c$ . C'est toujours le cas.

L'expérience montre que, magnétiques ou pas, beaucoup de matériaux sont *biréfringents*. Ceci signifie que les indices de réfraction associés aux deux états propres de polarisation sont différents. On parle ici

- ◆ de biréfringence *rectiligne* (la littérature utilise souvent le terme *linéaire* : nous avons discuté de cette ambiguïté au début du chapitre) si la différence concerne les deux états propres de polarisation rectiligne,
- ◆ de biréfringence *circulaire* si elle concerne les polarisations circulaires (droite et gauche).

L'indice de réfraction n'est alors plus une caractéristique du matériau, fonction seulement de la longueur d'onde (ou de la fréquence, ou de la pulsation, ou de l'énergie, tout cela revenant au même), et l'on est contraint à une description plus lourde.

L'une des descriptions commodes est celle basée sur le tenseur de permittivité diélectrique  $\epsilon_{ij}$ , parfois appelé tenseur de constante diélectrique. Il est défini par la relation entre le déplacement diélectrique  $\mathbf{D}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  :

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

$\epsilon_0$  étant la permittivité du vide définie au chapitre 2,  $i$  et  $j$  désignant les trois composantes (par exemple  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Il est habituel d'écrire cette relation sans expliciter la sommation sur les indices répétés (convention d'Einstein). La signification géométrique est claire :  $\epsilon_{21}$  ou  $\epsilon_{yx}$  par exemple décrit la composante suivant  $y$  de  $\mathbf{D}$  due à la composante suivant  $x$  de  $\mathbf{E}$ .

Le cas le plus simple, celui d'un matériau non biréfringent (optiquement isotrope) se décrit alors par un tenseur diagonal dans lequel tous les éléments non nuls sont égaux, soit :

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} = \epsilon \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  ;  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). Autrement dit, ceci signifie simplement que  $D_i = \epsilon_0 \epsilon E_i$ , donc que, dans ce cas particulier,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  sont colinéaires. Cette situation est celle des matériaux amorphes (en particulier les verres), et des matériaux cristallisés de structure cubique.

Dans le cas général, des arguments thermodynamiques (voir § 5 du chapitre 10) indiquent que ce tenseur est nécessairement symétrique :  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , ce qui réduit à 6 au maximum, au lieu de 9, le nombre de valeurs à connaître. Des symétries cristallines peuvent abaisser ce nombre de valeurs indépendantes, jusqu'à un dans le cas cubique que nous venons de mentionner.

Il faut remarquer que la forme de la relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  est la même en régime statique et en régime alternatif, et en particulier pour le cas de la lumière (pulsation  $\omega$  très grande) ; en revanche, les valeurs des  $\varepsilon_{ij}$  sont souvent très différentes. Un cas frappant est celui de l'eau, pour laquelle  $\varepsilon \approx 80$  en régime statique, mais  $\varepsilon \approx 1,7$  ( $n = 1,33$ ) seulement aux fréquences optiques.

Dans le cas particulier d'un matériau optiquement isotrope, il est facile de retrouver la relation entre  $\varepsilon$  et l'indice de réfraction  $n$  : on a simplement (dans le cas optique, donc avec  $\mu = 1$ )  $\varepsilon = n^2$ , et ce quelle que soit la direction de propagation (c'est bien ce qu'implique l'isotropie). Toutes les ondes planes sont des modes propres, et on peut donc, à son gré, choisir une description en terme de polarisations rectilignes, avec de plus une liberté complète dans le choix des deux directions de référence perpendiculaires à la direction de propagation du faisceau, ou circulaires.

Dans le cas général, anisotrope, l'indice de réfraction dépend de la direction de propagation. Pour des milieux anisotropes à biréfringence rectiligne, les directions des polarisations associées aux modes propres sont fixées (onde ordinaire et onde extraordinaire). Pour les milieux gyrotropes, et en particulier magnéto-optiques, ce sont les modes de polarisation circulaires qui, du moins pour la propagation le long de la direction d'aimantation, constituent les modes propres.

### A3 - ABSORPTION. INDICE ET PERMITTIVITÉ COMPLEXES

La description précédente omet une caractéristique majeure de la plupart des matériaux : ils ne sont pas parfaitement transparents, et les métaux sont même très opaques. Il faut donc enrichir le formalisme introduit, de façon à pouvoir décrire l'absorption de la lumière.

Dans un milieu isotrope, l'intensité transmise après traversée d'une épaisseur  $z$  est  $I = I_0 \exp(-\alpha z)$ , où  $\alpha$  est le coefficient linéaire d'absorption. Pour traduire ceci en termes d'indices de réfraction, il faut inclure dans l'expression de l'amplitude un terme en  $\exp(-\alpha z/2)$ , ce qui, dans l'expression en exponentielle complexe du champ, revient à remplacer  $\exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  par  $\exp[j(kz + j\alpha z/2) - \omega t]$  en ayant pris un axe  $z$  suivant la direction de propagation. Le vecteur d'onde devient donc complexe, ce qu'on peut rendre, dans cette présentation simplifiée, par un indice de réfraction complexe lui aussi :  $N = n + j\kappa$  (voir équation 13.21),  $n$  et  $\kappa$  étant réels, avec  $\kappa = \alpha/2k_0 = \alpha\lambda_0/4\pi$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. A titre d'exemple [30, p. 198], les valeurs pour l'aluminium (massif) sont, à la longueur d'onde de 589,3 nm :  $n = 1,44$  ;  $\kappa = 5,23$ . Pour le fer (évaaporé), à la même longueur d'onde,  $n = 1,5$  ;  $\kappa = 1,63$ .

#### A4 - TRANSMISSION ET RÉFLEXION À UNE INTERFACE ONDES INHOMOGÈNES

Pour toute onde, l'une des conditions de continuité à une interface est la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde. Cette condition permet, dans le cas d'un matériau transparent, de retrouver aisément la loi de réfraction de Descartes  $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ . Les conditions de continuité à une interface entre deux milieux transparents permettent d'exprimer les rapport des amplitudes des ondes réfléchi et transmise à l'amplitude de l'onde incidente (figure 13.11).

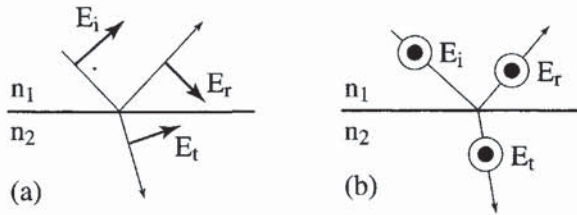


Figure 13.11 - Réfraction et réflexion à un dioptre plan :  
(a) Polarisation p ou TM - (b) Polarisation s ou TE

Ce sont les coefficients de Fresnel, dont l'une des formes est :

$$r_p = \frac{N_2 \cos \theta_i - N_1 \cos \theta_t}{N_2 \cos \theta_i + N_1 \cos \theta_t} \quad ; \quad r_s = \frac{N_1 \cos \theta_i - N_2 \cos \theta_t}{N_1 \cos \theta_i + N_2 \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2N_1 \cos \theta_i}{N_2 \cos \theta_i + N_1 \cos \theta_t} \quad ; \quad t_s = \frac{2N_1 \cos \theta_i}{N_1 \cos \theta_i + N_2 \cos \theta_t}$$

Dans ces formules,  $n_1$  et  $n_2$  désignent les indices de réfraction des deux milieux, le (1) étant celui de l'onde incidente (angle d'incidence  $\theta_i$ ) et le (2) celui de l'onde transmise (angle de réfraction  $\theta_t$ ).  $r$  et  $t$  sont respectivement les rapports des amplitudes réfléchi et transmise à l'amplitude de l'onde incidente, et les indices  $p$  et  $s$  désignent la polarisation. On remarque qu'ici, c'est-à-dire en l'absence d'effet magnéto-optique, il n'y a pas de terme non diagonal (du type  $r_{ps}$ ) dans la matrice de coefficients de Fresnel, et les coefficients exprimés pourraient s'écrire  $r_{pp}$ , etc. : une onde incidente polarisée  $p$  ne donne pas d'onde réfléchi ou transmise de polarisation  $s$ .

Lorsque l'un des milieux (par exemple le milieu 2) est absorbant, mais isotrope, il suffit d'introduire dans les relations de Fresnel son indice de réfraction complexe pour en tirer encore les rapports d'amplitudes ; cette fois ces rapports sont complexes, donc enrichis au passage d'une information sur le déphasage qui n'est plus nécessairement 0 ou  $\pi$  (signe positif ou négatif du coefficient de Fresnel) comme dans le cas de l'indice réel. La réflexion sur un milieu absorbant entraîne donc des coefficients de réflexion différents en amplitude et en phase pour les polarisations  $s$  et  $p$ . Si l'on fait se réfléchir sur un milieu absorbant (en particulier un métal), en incidence oblique, une onde polarisée rectilignement dans une direction qui a des composantes suivant  $s$  et  $p$ , l'onde réfléchi sera donc polarisée elliptiquement.

On se heurte à une complication lorsque l'on s'intéresse au passage d'une onde d'un milieu transparent (par exemple le vide) à un milieu absorbant, en incidence oblique. Dans le milieu transparent, l'indice de réfraction est réel, et le vecteur d'onde aussi. Il n'y a pas de difficulté pour trouver la partie réelle du vecteur d'onde dans le milieu absorbant ; il définira la variation de la phase de l'onde. Mais la même condition de continuité impose que, puisque la partie imaginaire du vecteur d'onde est nulle dans le milieu transparent, elle le reste dans le milieu absorbant. Ceci signifie que la partie imaginaire du vecteur d'onde, qui décrit la variation spatiale de la norme de l'amplitude de l'onde, est nécessairement perpendiculaire à l'interface. Les lieux d'égale phase (perpendiculaires à la partie réelle de  $\mathbf{k}$ ) et les lieux d'égale amplitude (parallèles à l'interface) sont donc tout à fait différents (figure 13.12). Cette situation correspond à une onde *inhomogène*. La réfraction devient donc compliquée.

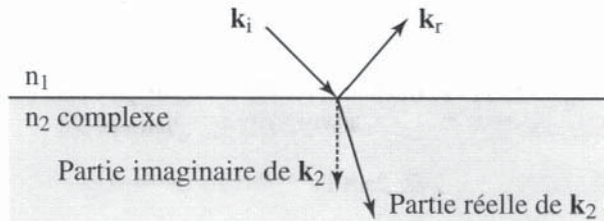


Figure 13.12 - Réfraction dans le cas d'un matériau absorbant

Le vecteur d'onde dans le matériau est complexe. Sa partie réelle a la même composante tangentielle sur le plan d'interface que le vecteur d'onde incident dans le milieu non absorbant, et est donc oblique. La partie imaginaire du vecteur d'onde est perpendiculaire à l'interface. L'onde dans le milieu absorbant est inhomogène.

## A5 - MICROSCOPIE EN CHAMP PROCHE

La microscopie habituelle implique la propagation de la lumière sur des distances grandes par rapport à la longueur d'onde (en champ lointain). Elle utilise donc des ondes propagatives. Sa limite de résolution est voisine de la moitié de la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière utilisée (critère de Rayleigh).

La microscopie en champ proche permet d'atteindre en pratique au moins dix fois mieux [47, 67]. L'idée de base est que l'information sur les petits détails (c'est-à-dire les grandes fréquences spatiales) est contenue dans les composantes diffractées avec un grand transfert de moment  $k_x$ . Celles-ci ne peuvent plus se propager dès lors que  $k_x > \omega/c$  puisqu'alors la composante perpendiculaire à la surface de son vecteur d'onde,  $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2}$ , est imaginaire : il s'agit de modes évanescents, localisés au voisinage de la surface. La microscopie en champ proche impose de capter ces modes, donc de déplacer un récepteur à des distances de la surface très petites devant  $\lambda$ , et de les transformer en modes propagatifs pour pouvoir les utiliser dans

un dispositif, donc d'avoir une sonde de dimensions elles aussi très petites devant  $\lambda$ . Il est amusant de remarquer que la médecine utilise depuis longtemps le champ proche sans le dire : le stéthoscope permet en effet une résolution spatiale très inférieure à la longueur d'onde des ondes sonores émises par exemple par le cœur [68]. La technique actuellement mise en œuvre utilise, pour les déplacements, les dispositifs piézo-électriques mis au point pour la microscopie à effet tunnel électronique (STM), et la sonde est une fibre optique effilée.

## A6 - RAYONS X

Les rayons X sont des ondes électromagnétiques tout comme la lumière visible, mais de longueur d'onde de l'ordre de l'Ångström ( $10^{-10}$  m), et d'énergie  $\sim 10^4$  eV. Ils sont produits d'une part par des générateurs de laboratoire, d'autre part par les sources de rayonnement synchrotron, grands instruments basés sur des anneaux de stockage dans lesquels circulent des électrons ultra-relativistes. Ces sources, d'accès plus difficile mais ouvertes aux groupes de recherche de leur pays ou du groupe de pays coopérant pour leur construction, donnent des faisceaux très remarquables tant par leur intensité que par leur spectre continu (de l'infrarouge aux rayons X durs), leur polarisation et leur cohérence. C'est particulièrement vrai pour les sources récentes, dites de troisième génération, telles que ESRF (European Synchrotron Radiation Facility) à Grenoble, France, ou APS (Advanced Photon Source) d'Argonne, IL (USA).

## A7 - VALEURS NUMÉRIQUES

Tableau 13.1 - Rotation Faraday dans quelques matériaux à 300 K

	Matériaux	$\Theta_F$	$\lambda$ (nm)
<i>Diamagnétiques</i>	verres; oxydes; chalcogénures	4-27 rad.T <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	546
<i>Grenats</i>	Yb <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	12 deg.cm <sup>-1</sup>	1060
<i>ferrimagnétiques</i>	Nd <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	-840 deg.cm <sup>-1</sup>	1060
“ “	(BiRGa)Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	1-7.10 <sup>4</sup> deg.cm <sup>-1</sup>	“
<i>Ferromagnétiques</i>	Fe	10 <sup>5</sup> - 10 <sup>6</sup> deg.cm <sup>-1</sup>	546
“	Co	“	546
“	Ni	“	546
“	R-Fe	1,8-2.10 <sup>5</sup> deg.cm <sup>-1</sup>	632,8
“	R-Co	4,5.10 <sup>6</sup> deg.cm <sup>-1</sup>	632,8

Tableau 13.2 - Rotation Kerr  $\Theta_K$  pour quelques matériaux à 300 K, essentiellement d'après [69]

	Matériaux	$\Theta_K$ (degré)	$\lambda$ (nm)
<i>Métaux 3d</i>	Co	-0,35 (-0,39)	633 (830)
“ “	Fe	-0,41 (-0,58 max.)	633 (1100)
“ “	Ni	-0,13	633
<i>Composés binaires</i>	CoGd	0,28	800
“ “	FeCo	-0,55	830
“ “	Co <sub>0,7</sub> Pt <sub>0,3</sub>	-0,4	633
“ “	Fe <sub>0,65</sub> Pt <sub>0,35</sub>	-0,68	830
“ “	Gd <sub>1-x</sub> Fe <sub>x</sub>	-0,1 à -0,3	750
“ “	Gd <sub>1-x</sub> Co <sub>x</sub>	0,6 à 1	750
“ “	TbFe	0,2	720
“ “	TbFe <sub>2</sub>	0,17 (-0,41 max.)	800 (270)
“ “	GdFe <sub>2</sub>	0,2	720
<i>Composés ternaires</i>	Fe <sub>2,7</sub> V <sub>0,3</sub> Ge	0,36	633
“ “	Co <sub>2</sub> FeGa	-0,48	830
“ “	Co <sub>2</sub> FeGe	-0,43	633
“ “	TbFeCo	-0,23	670
“ “	GdTbFe	-0,26	800
<i>Alliages Heusler</i>	PtMnSb	-0,93	633
“ “	NiMnSb	-0,30	830

## RÉFÉRENCES

- [1] A.V. SOKOLOV, Propriétés optiques des métaux (en russe) ; (Editions d'Etat de littérature physico-mathématique, Moscou, 1961).
- [2] J.F. DILLON JR., *J. Appl. Phys.* (1968) **39**, 922.
- [3] P.S. PERSHAN, *J. Appl. Phys.* (1967) **38**, 1482.
- [4] M.J. FREISER, *IEEE Trans. Mag.* (1968) **MAG-4**, 152.
- [5] A.K. ZVEZDIN, V.A. KOTOV, Modern magneto-optics and magneto-optical materials (1997) Institute of Physics, Bristol.
- [6] N.F. KHARCHENKO, *Ferroelectrics* (1994) **162**, 173.
- [7] RU-PIN PAN, H.D. WEI, Y.R. SHEN, *Phys. Rev.* (1989) **B 39**, 1229 ; W. HÜBNER, K.H. BENNEMANN, *Phys. Rev.* (1989) **B 40**, 5973 ; J. REIF, J.C. ZINK, C.M. SCHNEIDER, J. KIRSCHNER, *Phys. Rev. Lett.* (1991) **67**, 2878 ; Th. Rasing, *J. Magn. Magn. Mater.* (1997) **175**, 35.
- [8] F. DE BERGEVIN, M. BRUNEL, *Phys. Lett.* (1972) **A39**, 141 ; *Acta Cryst.* (1981) **A37**, 324.

- [9] K. NAMIKAWA, M. ANDO, T. NAKAJIMA, H. KAWATA, *J. Phys. Soc. Jap.* (1985) **54**, 4099 ; D. GIBBS, D.R. HARSHMAN, E.D. ISAACS, D.B. MCWHAN, D. MILLS, C. VETTIER, *Phys. Rev. Lett.* (1988) **61**, 1241.
- [10] F.U. HILLEBRECHT, T. KINOSHITA, D. SPANKE, J. DRESSSELHAUS, CH. ROTH, H.B. ROSE, E. KISKER, *Phys. Rev. Lett.* (1995) **75**, 2224.
- [11] J. STÖHR, Y. WU, B.D. HERMSMEIER, M.G. SAMANT, G.R. HARP, S. KORANDA, D. DUNHAM, B.P. TONNER, *Science* (1993) **259**, 658.
- [12] L. LANDAU, E. LIFCHITS, *Électrodynamique des Milieux Continus* (1969) Editions Mir Moscou.
- [13] G. METZGER, P. PLUVINAGE, R. TORGUET, *Ann. Phys.* (1965) **10**, 5 ; H.T. MINDEN, *Appl. Opt.* (1990) **29**, 3955 ; Z.J. YANG, M.R. SCHEINFELD, *J. Appl. Phys.* (1993) **74**, 6810 ; M. MANSURIPUR, *J. Appl. Phys.* (1990) **67**, 6466.
- [14] S. VISNOVSKY, *Czech. J. Phys.* (1986) **B36**, 625 ; A. HUBERT, G. TRAEGER, *J. Magn. Magn. Mater.* (1993) **124**, 185 ; K.R. HEIM, M.R. SCHEINFELD, *J. Magn. Magn. Mater.* (1996) **154**, 141.
- [15] P.P. EWALD, *Ann. Physik* (1916) **49**, 117.
- [16] P.N. ARGYRES, *Phys. Rev.* (1955) **97**, 334.
- [17] J.L. ERSKINE, E.A. STERN, *Phys. Rev.* (1973) **B8**, 1239.
- [18] J.M. FLORZAK, E. DAN DAHLBERG, *J. Appl. Phys.* (1990) **67**, 7520.
- [19] Z.J. YANG, M.R. SCHEINFELD, *J. Appl. Phys.* (1993) **74**, 6810.
- [20] P.H. LISSBERGER, *J. Opt. Soc. Am.* (1961) **51**, 957 ; *ibid.* (1966) **56**, 192.
- [21] Y. SOUCHE, P. PELLAT-FINET, A. SAADAOU, *Optica Acta* (1986) **33**, 327.
- [22] S. HUARD, *Polarisation de la lumière* (1994) Masson, Paris.
- [23] G. BRUHAT, A. KASTLER, *Optique*, 6<sup>e</sup> édition (1965) Masson, Paris .
- [24] O. CUGAT, D. GIVORD, J.P. REBOUILLAT, Y. SOUCHE, *J. Magn. Magn. Mater.* (1992) **104-107**, 397.
- [25] G.S. KRINCHIK, V.A. ARTEMJEV, *J. Appl. Phys.* (1968) **39**, 1276.
- [26] W. BREUER, J. JAUMANN, DO. SMITH, *Z. Phys.* (1963) **173**, 117 ; T.R. MCGUIRE, M. HARTMANN, *IEEE Trans. on Magn.* (1985) **MAG-21**, 1644.
- [27] P. HANSEN, C. CLAUSEN, G. MUCH, M. ROSENKRANZ, K. WITTER, *J. Appl. Phys.* (1989) **66**, 756.
- [28] K.H.J. BUSCHOW, *Ferromagnetic materials*, vol. 4 (1988) éd. E.P. Wolfarth et K.H.J. Buschow, North-Holland, Amsterdam, p. 493.
- [29] T. KATAYAMA, K. HASEGAWA, *Proc. Int. Conf. Rapidly Quenched Metals IV*, (1981) éd. T. Matsumoto, K. Suzuki, Sendai.
- [30] M. BORN, E. WOLF, *Principles of Optics*, 6th edition (1993) Pergamon Press.
- [31] D.H. MARTIN, K.F. NEAL, T.J. DEAN, *Proc. Phys. Soc.* (1965) **86**, 605.
- [32] R. CAREY, E.D. ISAAC, B.W.J. THOMAS, *Brit. J. Appl. Phys. (J. Phys. D)* (1968) **1**, 945.
- [33] G.S. KRINCHIK, G.M. NURMUKHAMEDOV, *Sov. Phys. JETP* (1965) **21**, 22.

- [34] P.E. FERGUSON, R.J. ROMAGNOLI, *J. Appl. Phys.* (1969) **40**, 1236.
- [35] D. KERKMANN, *Appl. Phys.* (1989) **A49**, 523.
- [36] S.D. BADER, *J. Magn. Magn. Mater.* (1991) **100**, 440.
- [37] J.T. HO, J.D. LITSTER, *Phys. Rev. Lett.* (1974) **33**, 1576.
- [38] J.A. GRIFFIN, S.E. SCHNATTERLY, *Phys. Rev.* (1970) **B2**, 4523.
- [39] A.S. BOROVIK-ROMANOV, N.M. KREINES, A.A. PANKOV, M.A. TALALAEV, *Sov. Phys. JETP* (1973) **37**, 890.
- [40] D.P. BELANGER, A.R. KING, V. JACCARINO, *Phys. Rev. B* (1984) **29**, 2636.
- [41] O. GEOFFROY, D. GIVORD, Y. OTANI, B. PANNETIER, A.D. SANTOS, M. SCHLENKER, Y. SOUCHE, *J. Magn. Magn. Mater.* (1993) **121**, 516 ; N. BARDOU, B. BARTENLIAN, C. CHAPPERT, R. MÉGY, B. VEILLET, J.P. RENARD, F. ROUSSEAUX, M.F. RAVET, J.P. JAMET, P. MEYER, *J. Appl. Phys.* (1996) **79**, 5848.
- [42] F. SCHMIDT, W. RAVE, A. HUBERT, *IEEE Trans. Mag.* (1985) **MAG-21**, 1596 ; A. HUBERT, R. SCHÄFER, *Magnetic domains* (1998) Springer, Berlin.
- [43] W. DRECHSEL, *Z. Physik* (1961) **164**, 308.
- [44] J. KRANZ, A. SCHAUER, *Optik* (1961) **18**, 186.
- [45] K. NAKAMURA, T. ASAKA, S. ASARI, Y. OTA, A. ITOH, *I.E.E.E. Trans. Magn.* (1985) **MAG-21**, 1654.
- [46] R.P. HUNT, *J. Appl. Phys.* (1967) **38**, 1215.
- [47] J.K. TRAUTMAN, E. BETZIG, J.S. WEINER, D.J. DIGIOVANNI, T.D. HARRIS, F. HELLMAN, E.M. GYORGY, *J. Appl. Phys.* (1992) **71**, 4659.
- [48] H. KIRCHNER, *Phys. Stat. Sol. a* (1971) **4**, 531.
- [49] A. FORKL, T. DRAGON, H. KRONMÜLLER, *J. Appl. Phys.* (1990) **67**, 3047.
- [50] L.A. DOROSINSKII, M.V. INDENBOM, V.I. NIKITENKO, YU.A. OSSIP'YAN, A.A. POLYANSKII, V.K. VLASKO-VLASOV, *Physica C* (1992) **203**, 149.
- [51] H. KAWATA, K. MORI, *Rev. Sci. Instr.* (1995) **66**, 1407.
- [52] M. SCHLENKER, J. BARUCHEL, X-ray diffraction topography, in *Handbook of Microscopy*, (1997) éd. S. Amelinckx, D. van Dyck, J. van Landuyt, G. van Tendeloo, vol. I. VCH, Weinheim.
- [53] C.M. SCHNEIDER, R. FRÖMTER, H.P. OEPEN, J. KIRSCHNER, *J. Electron Spectroscopy and Related Phenomena* (1997) **84**, 171.
- [54] C. GILES, C. VETTIER, F. DE BERGEVIN, C. MALGRANGE, G. GRÜBEL, F. GROSSI, *Rev. Sci. Instrum.* (1995) **66**, 1518.
- [55] P. HANSEN, J.P. KRUMME, *Thin Solid Films* (1984) **114**, 69.
- [56] V.J. FRATELLO, S.J. LICHT, C.D. BRANDLE, *IEEE Trans. Magn.* (1996) **32**, 4102.
- [57] T. TAMAKI, K. TSUSHIMA, *Fiz. Nizk. Temp* (1992) **18**, Suppl. S1, 415.
- [58] R. WOLFE, J. HEGARTY, J.F. DILLON, L.C. LUTHER, G.K. CELLER, L.E. TRIMBLE, *IEEE Trans. Magn.* (1985) **MAG-21**, 5, 1647.
- [59] H. TAKADA, S. MIYAMOTO, T. MITSUI, T. TOMIMASU, *Phys. E : Sci. Instrum.* (1988) **21**, 371.

- [60] K.B. ROCHFORD, A.H. ROSE, G.W. DAY, *IEEE Trans. Magn.* (1996) **32**, 5, 4113.
- [61] M.N. DEETER, S. MILIÀN BON, G.W. DAY, G. DIERCKS, S. SAMUELSON, *IEEE Trans. Magn.* (1994) **30**, 4464.
- [62] O. KAMADA, H. MINEMOTO, N. ITOH, *J. Appl. Phys.* (1994) **75**, 6801.
- [63] N.F. KUBRAKOV, *SPIE Proc.* (1989) **1126**, 85.
- [64] N.F. KUBRAKOV, A.Y. CHERVONENKIS, *Fiz. Nizk. Temp.* (1992) **18**, Suppl. S1, 361.
- [65] M. KRYDER, *MRS Bulletin* (1996) **21**, 17, et les autres articles de ce numéro.
- [66] E. HECHT, *Optics*, 2ème édition (1988) Addison-Wesley, Reading, MA, USA.
- [67] D. COURJON, C. BAINIER, *Rep. Progr. Phys.* (1994) **57**, 989.
- [68] D.W. POHL, W. DENK, M. LANZ, *Appl. Phys. Lett.* (1984) **44**, 651.
- [69] K.H.J. BUSCHOW, P.G. VAN ENGEN, R. JONGEBREUR, *J. Magn.Magn.Mater.* (1983) **38**, 1.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# CHAPITRE 14

## RÉSISTIVITÉ MAGNÉTIQUE, MAGNÉTORÉSISTANCE, EFFET HALL

*On regroupe sous le terme d'effets galvanomagnétiques les effets du champ magnétique (ou de l'aimantation) sur le transport électrique ou thermique. De même que la résistivité, les propriétés galvanomagnétiques ont un comportement très différent dans un semi-conducteur et dans un métal. Nous ne parlerons ici que du transport électrique. Pour les phénomènes thermiques, se reporter à Seeger [1], ou Gratz et Zuckermann [2].*

### 1. DÉFINITIONS

#### 1.1. RÉSISTIVITÉ ÉLECTRIQUE

La densité de courant  $\mathbf{j}$  dans un matériau est proportionnelle au champ électrique  $\mathbf{E}$  dans la limite des faibles champs :  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , où  $\sigma$  est la conductivité. La résistivité est le rapport inverse :  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ . La relation est en réalité tensorielle ; champ et courant ne sont pas toujours colinéaires, la conductivité est fonction de la direction considérée dans une structure de basse symétrie. Pour un matériau cubique, la conductivité est isotrope en l'absence de champ magnétique ; elle est liée à la densité de porteurs libres  $n$ , à leur masse effective  $m^*$ , leur charge  $q = \pm e$  et au temps moyen entre 2 collisions  $\tau$  par :

$$\sigma = ne^2\tau/m^* = nq\mu \quad (14.1)$$

$\mu$  est la mobilité des porteurs, quotient de leur vitesse moyenne par le champ électrique. Le libre parcours moyen est  $\lambda = v_F \tau$ , où  $v_F$  est la vitesse moyenne au niveau de Fermi. Une description des mécanismes de diffusion est donnée dans le chapitre 20.

#### 1.2. MAGNÉTORÉSISTANCE

Sous champ magnétique appliqué, ou dans un matériau magnétique où règne un champ d'induction  $\mathbf{B}$ , les porteurs de courant (électrons ou trous) sont soumis à la

force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (équation 2.57). Les trajectoires électroniques sont modifiées, mais aussi les énergies des bandes et les probabilités de diffusion qui dépendent de l'orientation des spins électroniques. La magnétorésistance (MR) est la modification de la résistivité par le champ magnétique dans le matériau  $\Delta\rho/\rho(B=0)$ , elle s'exprime par les variations des composantes diagonales du tenseur résistivité, par exemple  $\rho_{xx}(B)$ . C'est une fonction paire du champ. On distinguera, selon les directions respectives du champ appliqué et du courant, la magnétorésistance longitudinale ( $\mathbf{B} // \mathbf{j}$ ), et la magnétorésistance transverse ( $\mathbf{B} \perp \mathbf{j}$ ).

### 1.3. EFFET HALL

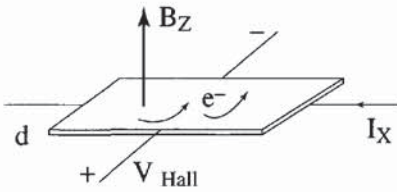


Figure 14.1 - Tension de Hall  $V_y$

Considérons une plaque rectangulaire de faible épaisseur  $d$ , parcourue dans sa longueur par un courant  $I_x$ , et soumise à un champ  $B_z$  perpendiculaire à la plaque (figure 14.1). Un porteur (électron ou trou) se déplaçant à une vitesse moyenne  $v_x$  est soumis à la force de Lorentz. Cette force dévie les porteurs dans la direction  $y$ ,

accumulant des charges sur les faces latérales entre lesquelles apparaît une tension de Hall  $V_y$ , jusqu'à ce que le champ électrique résultant  $E_y$  compense l'action de la force de Lorentz.

Si  $n$  est la concentration volumique d'électrons, la densité de courant  $j_x$  est  $j_x = nqv_x$ , le champ électrique à l'équilibre vaut  $E_y = B_z j_x / nq$ . L'effet Hall correspond donc à la composante du champ électrique perpendiculaire au plan champ-courant ; il provient de la partie non diagonale du tenseur ( $\rho_{xy} \dots$ ), c'est une fonction impaire du champ. La résistivité de Hall  $\rho_H = E_y / j_x$  étant souvent proportionnelle au champ, la pente définit le coefficient de Hall :

$$R_H = E_y / j_x B_z = V_y d / I_x B_z = 1 / nq \quad (14.2)$$

Ce coefficient est négatif pour des électrons ( $q = -e$ ), positif pour des trous. Il s'exprime en Ohm.m/T, ou de manière équivalente en  $m^3/C$ . Dans la mesure où il existe un seul type de porteurs, le quotient  $R_H/\rho$  fournit leur mobilité.

### 1.4. EFFET HALL PLANAIRE

Si la direction du champ magnétique est dans la plaque (figure 14.1), il peut exister une composante du champ électrique, située dans le plan champ-courant et perpendiculaire au courant. Cet effet Hall planaire [3] dû à la distorsion des lignes de courant par le champ est lié à l'anisotropie de la magnétorésistance :  $E_p = gIB^2 \sin(2\Psi)$ , où  $\Psi$  est l'angle entre  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{B}$ .

## 2. TRANSPORT DANS LES MATÉRIAUX MÉTALLIQUES MAGNÉTIQUES

### 2.1. RÉSISTIVITÉ MAGNÉTIQUE

Les problèmes généraux concernant la résistivité des métaux sont traités par Schroeder [4] ou Rossiter [5]. La résistivité comporte des contributions dues au désordre atomique  $\rho_i$ , aux phonons  $\rho_{ph}$  et, dans un métal contenant des atomes magnétiques, à la diffusion magnétique  $\rho_m$ . Lorsque les probabilités de diffusion sont faibles (libre parcours moyen grand devant la distance interatomique), la résistivité est la somme des trois contributions (loi de Matthiessen) :

$$\rho(T) = \rho_i + \rho_{ph}(T) + \rho_m(B, T) \quad (14.3)$$

La résistivité magnétique  $\rho_m$  dépend du désordre, donc de l'entropie magnétique. Elle est fonction de la température et du champ, sa dérivée  $d\rho_m/dT$  ressemble à la contribution magnétique à la chaleur spécifique (figures 3.17 et 3.18).

### 2.2. CAS D'UN MOMENT LOCALISÉ

De Gennes et Friedel [6] ont montré que la résistivité magnétique est principalement liée à la fonction de corrélation de spin  $\langle S_i \cdot S_j \rangle$  par :

$$\rho_m(B, T) = \rho_\infty [S(S+1) - \langle S_i \cdot S_j \rangle_{B,T}] \quad (14.4)$$

Si les corrélations entre moments sont nulles dans l'état paramagnétique, alors la résistivité magnétique y est constante. Pour un composé ferromagnétique, la résistivité varie dans le domaine d'ordre sensiblement comme  $M^2(T)$ , pourvu que la surface de Fermi soit peu perturbée par l'ordre (figure 14.2).

Dans le cas des composés de terres rares [7, 8], la résistivité à haute température tend vers la valeur  $\rho_\infty$  :

$$\rho_\infty \approx (g-1)^2 J(J+1).$$

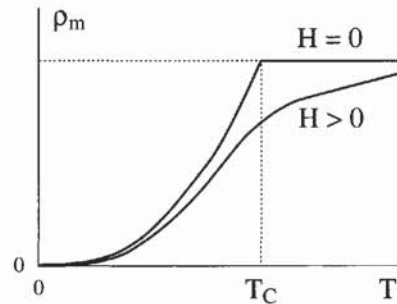


Figure 14.2 - Résistivité magnétique dans un matériau ferromagnétique et son évolution sous champ

Toutefois, le champ cristallin lève la dégénérescence des niveaux  $4f$  (voir chapitre 7). La résistivité dans l'état paramagnétique dépend du nombre de niveaux occupés et de la probabilité de diffusion d'un état à l'autre ; elle n'est plus constante, mais augmente en fonction de la population des niveaux [9].

Dans le cas d'un composé antiferromagnétique, deux termes contribuent à la résistivité : le terme de désordre de spin comme dans les cas précédents, mais aussi la modification du nombre de porteurs due à l'apparition de zones de Brillouin

magnétiques qui modifient la surface de Fermi. Ce dernier terme va généralement dans le sens d'une réduction du nombre de porteurs, donc d'une augmentation de résistivité. Un cas typique est celui des métaux de terres rares lourdes [10, 11, 12], où la structure est modulée et où la résistivité selon l'axe sénaire augmente en dessous de la température de Néel  $T_N$ .

## 2.3. MAGNÉTISME ITINÉRANT, ALLIAGES DE MÉTAUX DE TRANSITION

Dans les métaux de transition 3d, les électrons responsables du magnétisme sont plus ou moins localisés, et forment des bandes participant à la conduction (voir le chapitre 8). Les phénomènes de transport sont beaucoup moins simples que pour le magnétisme localisé.

### 2.3.1. Cas d'un métal magnétiquement ordonné

Les électrons sont séparés en deux demi-bandes de spin parallèle ou antiparallèle à l'aimantation ( $\uparrow$ , et  $\downarrow$  respectivement) de densités  $n_\uparrow$  et  $n_\downarrow$  au niveau de Fermi. On peut considérer que les deux bandes transportent le courant en parallèle, avec des résistivités  $\rho_\uparrow$  et  $\rho_\downarrow$  et une probabilité de diffusion avec retournement du spin donnant une contribution  $\rho_{\uparrow\downarrow}$ . La résistivité totale est alors [13] :

$$\rho = [\rho_\uparrow\rho_\downarrow + \rho_{\uparrow\downarrow}(\rho_\uparrow + \rho_\downarrow)] / (\rho_\uparrow + \rho_\downarrow + 4\rho_{\uparrow\downarrow}) \quad (14.5)$$

Il est possible d'évaluer la contribution d'impuretés diluées dans une matrice donnée pour chaque direction de spin, en mesurant la résistivité en fonction de la concentration.

La résistivité par atome d'impureté est fonction de la différence de charge  $\Delta Z$  entre matrice et impureté ; elle est plus importante pour les impuretés magnétiques qui présentent des états liés virtuels [14], c'est-à-dire des états (3d) localisés sur l'impureté et d'énergie correspondant à la bande de conduction (voir le § 7.1 du chapitre 8). Un exemple est celui d'impuretés de Cr dans Ni.

La dépendance angulaire de la résistivité vis-à-vis de l'aimantation donne lieu à une anisotropie de la magnétorésistance : la résistivité est différente selon que le courant est parallèle à l'aimantation ( $\rho_{//}$ ) ou lui est perpendiculaire ( $\rho_{\perp}$ ).

$$\Delta\rho / \rho_{\text{moy}} = (\rho_{//} - \rho_{\perp}) / \rho_{\text{moy}} \approx \gamma(\alpha - 1) \quad (14.6)$$

où  $\rho_{\text{moy}}$  est la résistivité de l'état désaimanté,  $\alpha$  est le rapport ( $\rho_\uparrow / \rho_\downarrow$ ) et  $\gamma$  dépend du couplage spin-orbite [13, 5]. Cette propriété a été utilisée dans les premiers capteurs magnétorésistifs (permalloy).

### 2.3.2. Fluctuations de spin et effet Kondo

Les fluctuations et l'instabilité des moments magnétiques, dues à l'hybridation entre porteurs de moments et électrons de conduction donnent lieu à une diffusion importante. Deux cas se présentent :

### Métaux 3d à fluctuations de spin

Dans ce cas, les électrons responsables du transport sont aussi les électrons porteurs de moment (métaux de transition avec des impuretés 3d magnétiques : Mn, Fe dans Pd ou Ni, composés presque magnétiques comme YCo<sub>2</sub>). Les orbitales électroniques et les moments tendent à s'aligner de manière cohérente à basse température. La résistivité résiduelle est alors seulement due à la diffusion par la différence de potentiel entre matrice et impuretés :  $\rho_m \approx |V|^2 \cdot n(E_F)$ , où  $V$  est le potentiel diffuseur. L'augmentation de température provoque les fluctuations des moments, et la résistivité augmente en  $(T/T_{sf})^2$ ,  $T_{sf}$  étant la température de fluctuation de spin. A haute température,  $\rho_m$  tend vers une constante caractéristique de la diffusion par un réseau magnétique désordonné.

### Effet Kondo

Les électrons  $s$  les plus mobiles sont hybridés avec les électrons "magnétiques" ( $d$  ou  $f$ ) et diffusés temporairement vers ces orbitales localisées, dont le temps de fluctuation de spin est assez long (atomes de cérium dans un composé de lanthane, fer dans le cuivre). Cette résonance entre deux états au niveau de Fermi donne lieu à l'effet Kondo [15, 16] : l'interaction antiferromagnétique entre le moment local et le spin des électrons de conduction provoque une diffusion d'autant plus grande que la température est plus basse. Pour des impuretés magnétiques diluées, la résistivité magnétique décroît linéairement avec le logarithme de la température :

$$\rho = A.[V_0^2 + f(\lambda).J_K^2 + g(\lambda).J_K^3 n(E_F). \ln(k_B T/\Delta)] \quad (14.7)$$

$\Delta$  est la largeur de la bande,  $n(E_F)$  la densité d'états et  $J_K$  l'interaction Kondo (négative)  $s$ - $f$  ou  $s$ - $d$  :  $J_K = |V_{sf}|^2 / (E_{4f} - E_F)$ .  $f$  et  $g$  sont fonctions de la dégénérescence  $\lambda$  des niveaux  $3d$  ou  $4f$ .  $V_0$  est le potentiel diffuseur indépendant du spin.

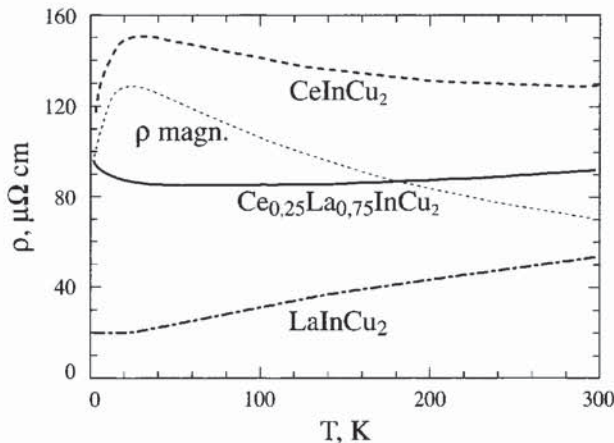


Figure 14.3 - Résistivité des composés  $\text{CeInCu}_2$  (Kondo),  $\text{LaInCu}_2$  (non magnétique) et d'une solution solide  $(\text{Ce},\text{La})\text{InCu}_2$

La différence entre Ce- et La-InCu<sub>2</sub> (pointillé fin) représente la résistivité magnétique du cérium.

Au-dessous de la température de Kondo (voir équation 8.46), le régime se modifie et la résistivité tend progressivement vers une constante. En tenant compte de la résistivité de phonons, la résistivité totale présente un minimum.

Dans le cas d'un réseau régulièrement ordonné de cérium, les corrélations entre sites abaissent la résistivité par ion magnétique, et on retrouve à basse température un comportement cohérent où la résistivité croît initialement comme  $T^2$ . La résistivité présente alors un maximum et un minimum en fonction de la température. Dans certains cas, l'augmentation de résistivité due aux phonons peut être compensée sur une large plage de température par une baisse de la contribution magnétique. Notons enfin que le pouvoir thermoélectrique atteint souvent une valeur élevée dans les systèmes Kondo ; ce phénomène est utilisé dans certains thermocouples.

**2.4. MAGNÉTORÉSISTANCE**

On distinguera plusieurs cas, ceux des métaux dépourvus de moments (effet cyclotron), ou comportant des atomes magnétiques (désordre de spin).

**2.4.1. Effet cyclotron**

Sous l'effet de la force de Lorentz, les électrons précèdent autour du champ à la fréquence cyclotron (ou de Larmor)  $\omega_c = eB/m^*c$ , ce qui allonge leur trajectoire totale relativement à celle parcourue parallèlement au champ électrique. Les électrons subissent alors plus de collisions avec les impuretés ou les phonons, d'où une augmentation de résistivité (magnétorésistance positive).

La vitesse moyenne parallèle au champ électrique est moins affectée si les champs électrique et magnétique sont parallèles. La MR longitudinale est donc, en général, plus faible que la MR transverse (figure 14.4).

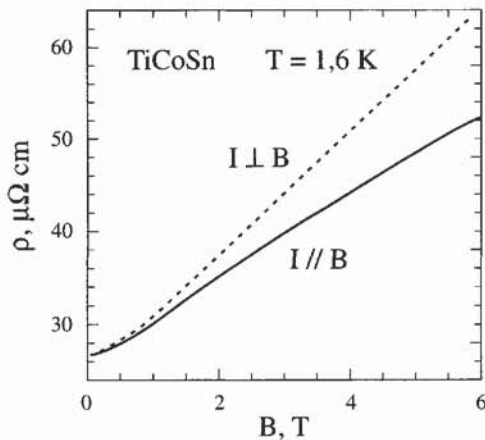


Figure 14.4 - Magnétorésistance de type cyclotron pour B/I et B⊥I

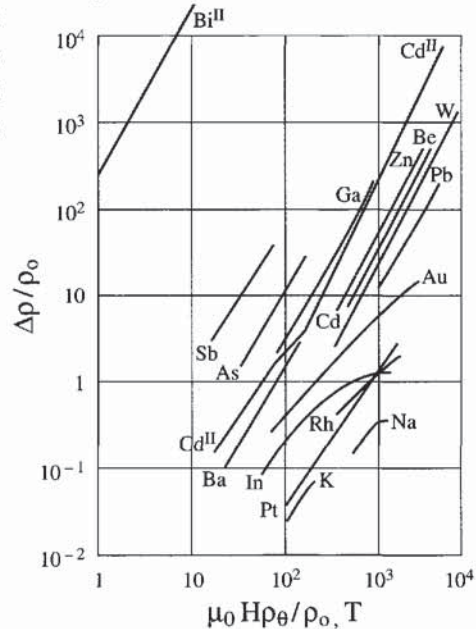


Figure 14.5 - Loi de Kohler dans quelques métaux [17]

L'augmentation relative  $\Delta\rho/\rho_0$  est d'autant plus grande que la résistivité initiale  $\rho_0$  est plus faible, c'est-à-dire la température plus basse. Pour un métal donné, elle est régie par la loi de Kohler :  $\Delta\rho/\rho_0 \approx f(B/\rho_0)$ , comme le montre la figure 14.5. Les variations d'amplitude sont d'autant plus grandes que le métal s'écarte d'un modèle d'électrons libres, le record étant détenu par le bismuth, un semi-métal.

$\Delta\rho$  varie comme  $B^2$  en champ faible, puis en champ plus élevé varie de manière linéaire ou se sature. Les trajectoires électroniques modifiées étant des courbes d'énergie constante proche de l'énergie de Fermi, la MR reflète la symétrie de la surface de Fermi et peut être fortement anisotrope.

#### 2.4.2. Termes dépendant de l'aimantation - Désordre de spin

Dans le domaine paramagnétique, la magnétorésistance, négative, varie sous champ comme la fonction de corrélation entre spins (équation 14.4), soit comme  $M^2$ . Sa variation initiale est quadratique avec le champ. Dans le domaine ferromagnétique, la magnétorésistance initiale varie linéairement avec le champ appliqué à cause du champ moléculaire  $H_{\text{éch}}$  (voir la figure 14.6).

Une étude plus rigoureuse [18] permet de décomposer la magnétorésistance en deux termes provenant des fluctuations longitudinales et transverses de l'aimantation : l'un est lié à la variation du module de l'aimantation, l'autre à la variation de l'angle moyen des moments par rapport au champ. Ainsi, pour un antiferromagnétique, la magnétorésistance dépend de l'angle entre les moments des sous-réseaux, et peut présenter différents régimes selon la direction d'application du champ par rapport à la direction d'antiferromagnétisme et le rapport entre anisotropie et échange.

Enfin la MR présente souvent une anisotropie due au couplage spin-orbite et à l'anisotropie de la couche magnétique. Pour les terres rares [19], elle est proportionnelle à la valeur du quadrupole électrique de la couche 4f :  $\rho_{//} - \rho_{\perp} \approx \alpha[3J_z - J(J+1)]$ , où  $J$  est le moment orbital.

### 2.5. EFFET HALL DANS UN MATÉRIAU MAGNÉTIQUE

L'effet Hall comporte alors deux contributions : la contribution normale (ou ordinaire) liée à l'action directe du champ  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M})$  sur les porteurs, un second terme (anormal ou extraordinaire) provenant du couplage entre les porteurs du courant et les porteurs de l'aimantation. On peut distinguer les effets de couplage

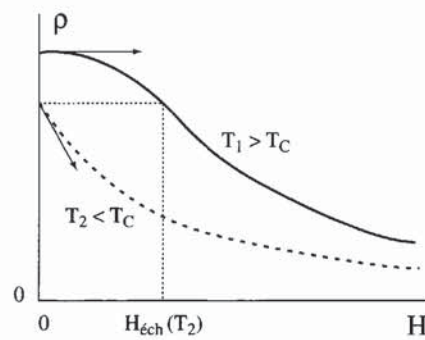


Figure 14.6 - Magnétorésistance en fonction du champ dans le domaine para- ou ferromagnétique

avec le spin et le moment orbital local, qui donnent lieu à une diffusion *gauche* et à un saut de côté [20].

Compte tenu des effets du champ démagnétisant  $\mathbf{H}_d = -N_d \mathbf{M}$ , la résistivité de Hall peut s'écrire, dans le cas d'une plaque fine, en fonction du champ appliqué  $H_0$  et de l'aimantation :

$$\rho_H = R_0 B + R_a \mu_0 M = R_0 \mu_0 H_0 + \mu_0 [R_0(1 - N_d) + R_a] M \quad (14.8)$$

Dans l'état paramagnétique, l'effet Hall anormal varie comme la susceptibilité  $\chi$  et peut présenter un comportement du type Curie-Weiss.

Dans l'état ferromagnétique apparaît un terme lié à l'aimantation spontanée. La courbe en fonction du champ ressemble alors à une courbe d'aimantation. La résistivité de Hall anormale est fonction de l'aimantation (figure 14.7), mais le coefficient  $R_a$  varie avec la température [20] et comporte des termes proportionnels à  $\rho_{xx}$  et  $\rho_{xx}^2$ .

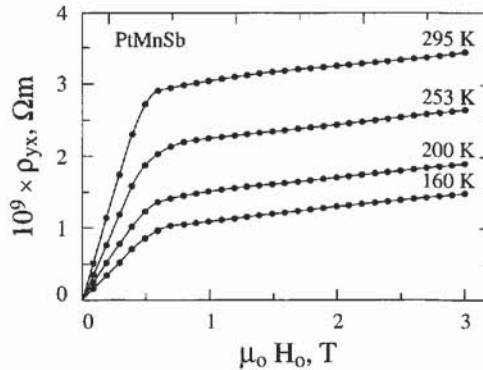


Figure 14.7 - Variation isotherme de la résistivité de Hall dans PtMnSb [21]

### 3. MAGNÉTOTRANSPORT DANS LES SEMI-CONDUCTEURS

#### 3.1. SEMI-CONDUCTEURS NON MAGNÉTIQUES

De nombreux ouvrages traitent de l'effet Hall et de la magnétorésistance des semi-conducteurs [1, 3, 4, 22, 23] ; il n'est pas possible ici de refléter la diversité des comportements observés. Dans le cas d'un semi-conducteur dopé ou à température finie, il peut exister simultanément des porteurs négatifs (électrons) et positifs (trous). En supposant les bandes indépendantes, la conductivité résulte de la somme des deux courants :

$$\sigma = e(n_e \mu_e + n_p \mu_p) \quad (14.9)$$

où  $n_e$ ,  $n_p$  sont les densités des porteurs et  $\mu_e$ ,  $\mu_p$  leurs mobilités, tandis que le coefficient de Hall est donné par :

$$R_H = (\mu_p^2 n_p - \mu_e^2 n_e) / e (\mu_p n_p + \mu_e n_e)^2 \quad (14.10)$$

De même que pour la résistivité, on distingue pour l'effet Hall un régime intrinsèque pour lequel le nombre de porteurs est régi par une loi d'activation thermique :

$$n_e = n_p = CT^{3/2} \exp(-E_g/2k_B T) \quad (14.11)$$

où  $E_g$  est la largeur de la bande interdite, d'un régime extrinsèque lié au nombre d'impuretés (donneurs, accepteurs), où la mobilité des porteurs joue un grand rôle.

### 3.2. SEMI-CONDUCTEURS MAGNÉTIQUES

Ces semi-conducteurs contiennent des ions magnétiques qui interagissent avec les porteurs par un couplage du type  $JS_s c$  et entre eux par des interactions de super-échange (voir le chapitre 9).

Le dopage modifie localement les interactions, un électron supplémentaire polarise les moments des ions voisins, ce qui peut donner lieu à un ordre local ferromagnétique dans un milieu globalement paramagnétique. Ce phénomène a reçu le nom de *polaron magnétique* ; les porteurs "habillés" par les spins des ions ont une grande masse effective, sont donc peu mobiles, et donnent une conduction par sauts ou diffusion.

Ces polarons précèdent un ordre ferromagnétique ou non colinéaire à plus basse température (EuO, EuS,  $Gd_{3-x}S_4$  [24], manganites). Les lois d'activation ne sont alors plus valides, et le système peut présenter une magnétorésistance géante (voir le § 4.2.5).

## 4. LES TRANSITIONS MÉTAL-ISOLANT DANS LES MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

Dans de nombreux composés de métaux de transition, les métaux peuvent avoir plusieurs états de valence. La plupart des oxydes par exemple sont isolants, mais quelques uns sont métalliques ( $LaNiO_3$ ,  $TiO$ , ...). La délocalisation ou la polarisation des électrons responsables du magnétisme peut entraîner une transition métal-isolant. Une revue générale concernant les transitions métal-isolant et leurs relations avec le magnétisme est donnée par Mott [25].

### 4.1. COMPOSÉS SEMI-CONDUCTEURS DE MÉTAUX DE TRANSITION

Quels sont les facteurs qui rendent un composé métallique ou isolant, et comment les états d'énergie des électrons magnétiques influencent-ils ces transitions ?

Dans un semi-conducteur, la largeur de la bande interdite (*gap*) entre bande de valence et bande de conduction est liée aux excitations possibles du système. L'état fondamental du métal est par exemple la configuration  $3d^n$ , l'anion (oxygène) ayant sa couche  $2p$  complétée par les électrons  $s$  du métal.

Deux types d'excitations sont importants [26] :

- ◆ un électron est transféré d'un métal de transition  $i$  au voisin  $j$  :  $d_i^n d_j^n \rightarrow d_i^{n+1} d_j^{n-1}$  et ceci coûte l'énergie d'interaction coulombienne intra-atomique  $U$ .
- ◆ Un oxygène cède un électron au métal voisin, ce qui laisse une lacune  $L$  :  $d_i^n \rightarrow d_i^{n+1} L$ , et ceci coûte l'énergie de transfert de charge  $\Delta$ .

Si les valeurs de  $U$  et  $\Delta$  sont grandes par rapport à la largeur de bande  $3d$  ( $W$ ), le composé est, soit un isolant à transfert de charge ( $\Delta < U$ ), soit un isolant de Mott-Hubbard ( $\Delta > U$ ). Pour  $U$  faible, les électrons se propagent d'un cation  $3d$  à l'autre (métal de type  $d$ ), et pour  $\Delta$  faible, les électrons sautent de l'oxygène au cation (métal type  $p-d$ ).

## 4.2. TYPES DE TRANSITIONS ISOLANT-MÉTAL

On distingue plusieurs cas, par exemple :

### 4.2.1. La transition de Mott "classique"

Lorsque les atomes se rapprochent dans un solide, les niveaux atomiques s'élargissent en bandes et s'hybrident. Pour une distance critique, les bandes empiètent et donnent un état métallique. On peut ainsi expliquer qualitativement certaines transitions isolant-métal en fonction de la pression (hydrogène sous très haute pression).

### 4.2.2. Les transitions par croisement de bandes (EuO au point de Curie)

EuO s'ordonne ferromagnétiquement à  $T_C = 69$  K. Il est semi-conducteur dans l'état paramagnétique. Du fait de la polarisation en dessous de  $T_C$ , les énergies des électrons de valence de l'euporium croisent des niveaux pièges dus à la présence de lacunes sur les sites d'oxygène. Le transfert d'électrons provoque une transition à l'état métallique.

### 4.2.3. Les transitions de Mott-Hubbard

Les électrons peuvent être excités vers une *bande de Hubbard supérieure* (voir chapitre 9) de largeur  $B_1$ , tandis que les trous apparaissent dans la *bande de Hubbard inférieure* de largeur  $B_2$ . La distance entre ces bandes est l'énergie coulombienne intra-atomique  $U$  ; une transition isolant-métal aura lieu lorsque  $U \approx (B_1 + B_2)/2$ . Par exemple  $V_2O_3$ , dopé par du titane ou sous pression, subit une transition d'un état isolant antiferromagnétique à un état métallique magnétiquement désordonné.

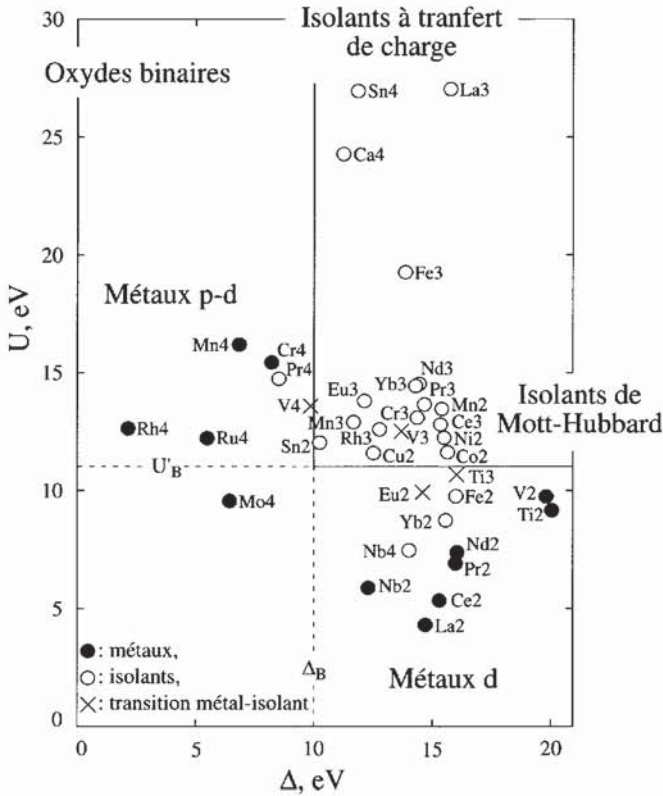


Figure 14.8 - Classification de 38 oxydes binaires, d'après [27]  
Nomenclature selon Zaanen, Sawatzky, Allen [26]

#### 4.2.4. Les transitions de type Anderson dans les systèmes désordonnés

Dans les semi-conducteurs dopés ou les liquides, les électrons sont piégés sur des sites distribués de manière aléatoire dans des puits de potentiel de profondeur variable. La conduction s'effectue par sauts (*hopping*) [28]. En dessous d'une certaine énergie  $E_m$ , ou seuil de mobilité, les électrons ne peuvent sortir de leur trou que pour sauter sur un site éloigné ayant la même énergie. En revanche, au-dessus de ce seuil, les porteurs sont mobiles. La conductivité ne suit plus exactement une loi d'activation, mais s'exprime par :

$$\rho = \rho_0 T^s \exp(T_0/T)^p \quad (14.12)$$

Selon les cas, on observe :  $s = 1/2$ ,  $p = 1/4$  ou  $s = 1$ ,  $p = 1/2$ .  $T_0$  est la température de Mott. La conduction sera donc fonction du désordre (qui peut être d'origine magnétique) et de la localisation. La position du niveau de Fermi par rapport à la limite de mobilité est régie par le taux de dopage, le champ magnétique, etc.

#### 4.2.5. Un exemple : la magnétorésistance géante des manganites

Connue depuis 1954, elle a été très étudiée récemment dans les systèmes en couches minces [29], car pouvant donner lieu à des capteurs magnétorésistifs. Les composés  $\text{LaMnO}_3$  d'une part, et  $\text{MMnO}_3$  ( $M = \text{Ca}, \text{Sr}, \text{Ba}$ ) d'autre part, sont des semi-conducteurs antiferromagnétiques ; les solutions solides avec 1/3 de métal alcalino-terreux sont ferromagnétiques et présentent une transition semi-conducteur-métal vers leur température de Curie. L'application d'un champ aligne les moments et provoque vers  $T_C$  une magnétorésistance négative *colossale* [30]. Plusieurs mécanismes sont probablement en jeu : dans le domaine paramagnétique semi-conducteur, une conduction par sauts tributaire de *polarons* magnétiques, une réduction du désordre de spin qui modifie la limite de mobilité et diminue la diffusion, enfin une transition à l'état métallique soit par croisement de bandes lorsque la polarisation des bandes en dessous du point de Curie devient supérieure à la valeur du *gap* du semi-conducteur, soit quand ce découplage amène l'énergie de Fermi au-delà du seuil de mobilité.

#### 4.3. LES DEMI-MÉTAUX

Un cas très particulier d'interaction entre le ferromagnétisme et les propriétés de conduction est celui des demi-métaux [31] :

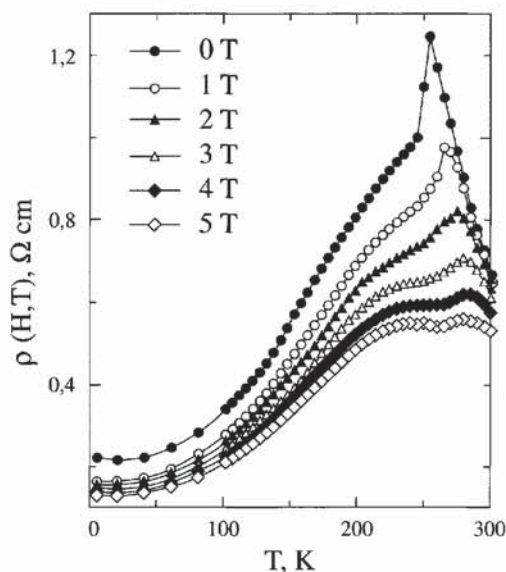


Figure 14.9 - Résistivité d'un échantillon fritté  $\text{La}_{0,67}\text{Ca}_{0,33}\text{MnO}_3$  en fonction de la température, sous champ variable d'après [32]

Par suite du découplage des deux demi-bandes de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ , le niveau de Fermi d'une bande,  $\uparrow$  par exemple, peut tomber dans un *gap* de la bande  $\downarrow$ . Il s'agit donc d'un métal pour les électrons  $\uparrow$ , mais d'un semi-conducteur pour la bande  $\downarrow$  (ne pas confondre avec un semi-métal paramagnétique tel que Bi). Une telle situation rencontrée dans NiMnSb, PtMnSb,  $\text{CrO}_2$  et des manganites ferromagnétiques peut trouver des applications intéressantes (grand effet magnéto-optique dans PtMnSb, injection de porteurs polarisés, vannes de spin, transistor sensible au champ...) [30].

## 5. EFFETS QUANTIQUES

### 5.1. EFFET SHUBNIKOV-DE HAAS

Classiquement, les électrons précessent autour du champ avec la fréquence cyclotron  $\omega_c$  (paragraphe 2.4.1). La quantification des états d'énergie des bandes [33, 34, 35] se manifeste lorsque les électrons peuvent effectuer plusieurs tours sans être diffusés par les phonons ou les impuretés, soit lorsque  $\omega_c \tau \gg 1$ , c'est-à-dire sous champ magnétique intense et à basse température. Pour des électrons presque libres, les valeurs propres de l'énergie dans un champ appliqué selon Oz sont données par :

$$E = (n + 1/2) \hbar \omega_c + (\hbar^2 k_z^2 / 2m^*) + (1/2) g \mu_B H_0 \quad (14.13)$$

où  $m^*$  est la masse effective des électrons et  $n$  est un entier. La bande parabolique est décomposée en sous-bandes séparées par l'énergie  $\hbar \omega_c$  (niveaux de Landau). La distribution des électrons dans l'espace  $k$  va se condenser sur des cylindres dont la section perpendiculaire au champ est quantifiée :  $A_n = (n + 1/2) (2\pi e H_0 / \hbar c)$ . La section des orbites se modifie lorsque le champ augmente, de sorte que celles qui sont proches de l'énergie de Fermi se dépeuplent périodiquement, les électrons se répartissant sur les niveaux les plus bas.

L'énergie libre et toutes les variables qui en dépendent ont un comportement pseudopériodique en  $1/H_0$ , l'amplitude des oscillations décroît fortement avec la température par suite de l'élargissement des niveaux de Landau. De même que la susceptibilité (effet de Haas-van Alphen), la résistivité présente un comportement oscillant (effet Shubnikov-de Haas) mis d'abord en évidence dans les semi-métaux (Bi) et les semi-conducteurs.

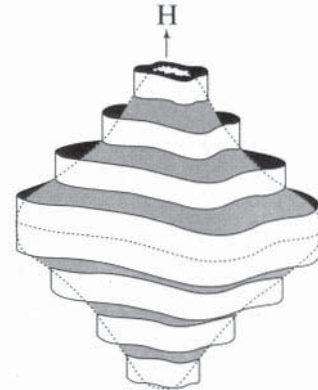


Figure 14.10 - Quantification des aires des orbites (Ziman)

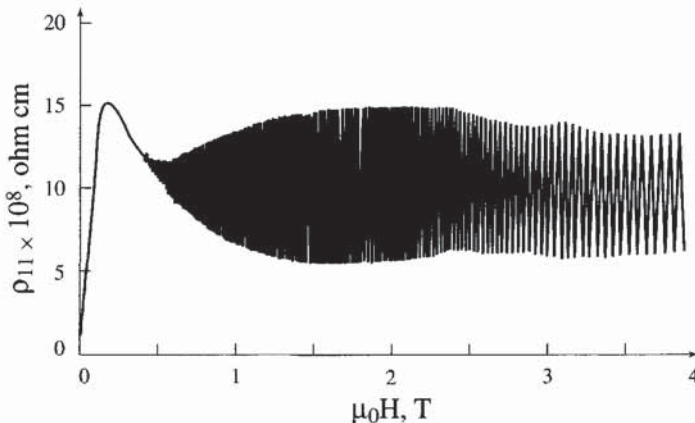


Figure 14.11 - Effet Shubnikov-De Haas dans Mg, d'après [36]

## 5.2. EFFET HALL QUANTIQUE

Découvert en 1980 par K. von Klitzing *et al.* [37], cet effet (EHQ) apparaît à très basse température pour une couche d'électrons confinés à deux dimensions (à la jonction entre deux semi-conducteurs). Contrairement au cas précédent, il n'y a pas de degré de liberté en  $z$  ( $k_z = 0$  dans l'équation 14.13). A la différence de l'effet Hall classique, la tension de Hall augmente par paliers en fonction du champ ; ces paliers correspondent à une diminution ou même à l'annulation de la résistivité longitudinale [35, 38]. Chaque plateau de la conductance de Hall correspond à un multiple (EHQ entier) ou sous-multiple (EHQ fractionnaire) du quantum de conductance  $e^2/h$ , indépendamment de la nature de l'échantillon considéré :  $\rho_H = h/ve^2$ . Les valeurs des plateaux de résistance sont égales, à mieux que  $10^{-7}$  près, aux valeurs théoriques calculées, ce qui a permis de redéfinir l'étalon de résistance : le rapport  $(h/e^2)$ , ou klitzing, vaut 25812,8 Ohms.

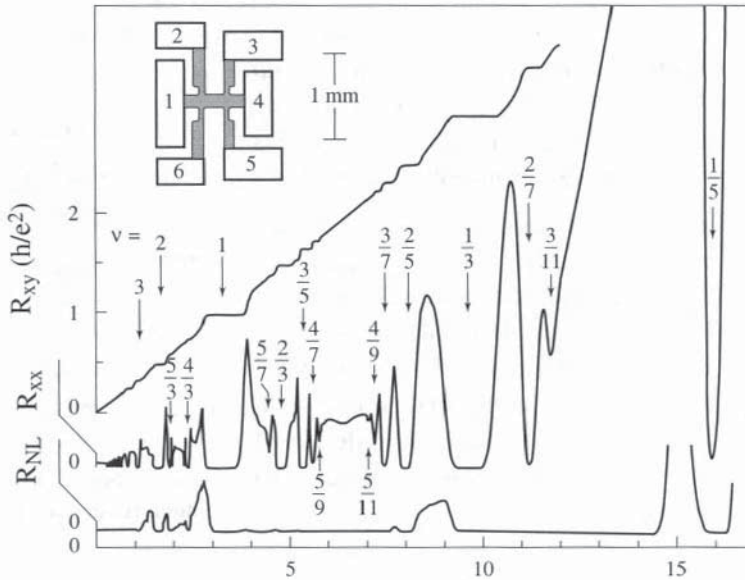


Figure 14.12 - Expérience d'effet Hall quantique

De haut en bas : résistance de Hall  $V_{26}/I_{14}$ , résistance longitudinale  $V_{23}/I_{14}$ , et résistance non locale  $V_{26}/I_{35}$ .  $T = 40$  mK (d'après V.J. Goldman, non publié, cité dans [39]).

A quoi correspondent ces paliers ? La résistivité de Hall représente le quotient du champ par la densité électronique :  $\rho_H = B/ne$ . Le flux dans l'échantillon étant un multiple du quantum de flux élémentaire  $\Phi_0$ , les paliers apparaissent pour des valeurs déterminées, entières ou fractionnaires, du *facteur de remplissage*, qui est le rapport entre le nombre d'électrons et le nombre de quanta de flux. L'EHQ entier correspond à l'occupation d'un nombre entier de niveaux de Landau. L'existence d'un *gap* dans le spectre d'excitations rend le gaz d'électrons incompressible. Plus

généralement, les interactions répulsives entre électrons stabilisent un nouveau type de fluide quantique, où les électrons sont liés à des quanta de flux. Le phénomène peut alors s'interpréter comme une condensation des fermions soumis au champ intense en bosons composés soumis à un champ réduit [39]. Cette condensation en bosons explique l'annulation de la résistance longitudinale, et présente beaucoup d'analogies avec le phénomène de supraconductivité.

## 6. APPLICATIONS

En dehors de l'utilisation de la résistance magnétique pour obtenir des résistances constantes en température (manganine, constantan) et des effets thermoélectriques (chromel, platine rhodié), les principales applications sont celles des capteurs magnétosensibles (magnétorésistance, effet Hall). Cependant certaines applications nouvelles peuvent émerger du fait du transport polarisé en spin, par exemple l'injection de porteurs polarisés à partir d'un demi-métal.

### 6.1. CAPTEURS DE CHAMP À EFFET HALL

Le matériau est choisi parmi des semi-conducteurs dopés (InAs, InSb) dont la résistivité de Hall évolue peu avec la température. Les sondes en couche mince fournissent un signal important du fait de leur faible épaisseur. La tension de Hall ne varie pas toujours linéairement avec le champ, le signal peut être linéarisé en shuntant le signal de Hall par une résistance d'adaptation.

### 6.2. CAPTEURS MAGNÉTORÉSISTIFS

Les capteurs les plus performants en champ faible sont les systèmes de multicouches de type vannes de spin (voir chapitre 20). Les premières têtes de lecture magnétorésistives (1994) utilisaient cependant l'anisotropie de la magnétorésistance du permalloy  $\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ , où l'anisotropie atteint 2 à 3% dans moins de 0.1 Tesla. La résistivité d'un barreau est fonction de l'angle  $\theta$  que fait le champ avec le courant :

$$\rho(\theta) = \rho_{\perp} + \Delta\rho \cos^2\theta \quad (14.14)$$

En adoptant un capteur où le courant est à  $45^\circ$  de l'axe de facile aimantation (géométrie de type *Barber's pole*), on peut linéariser la réponse en champ faible.

## REMARQUE FINALE

Nous avons présenté ici de façon succincte les différents effets liés au couplage galvanomagnétique ; certains aspects seront repris beaucoup plus en détail dans la

suite de cet ouvrage, en particulier la magnétorésistance géante qui fait l'objet de recherches très actives en raison de ses applications aux têtes de lecture (voir les chapitres 20, § 5 et 21 § 5.2).

## RÉFÉRENCES

- [1] K. SEEGER, *Semiconductor Physics*, 2nd Edition (1982) Springer Verlag, Berlin.
- [2] E. GRATZ, M.J. ZUCKERMANN, *in Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths*, K.A. Gschneidner, L. Eyring éd. (1982) Vol. 5, p. 117, North Holland, Amsterdam.
- [3] E.H. PUTLEY, *The Hall effect and related phenomena* (1960) Butterworths, Londres.
- [4] K. SCHROEDER, *Electronic, magnetic and thermal properties of solid materials* (1978) M. Dekker Inc., New York.
- [5] P.L. ROSSITER, *The electrical resistivity of metals and alloys* (1991) Cambridge University Press.
- [6] P.G. DE GENNES, J. FRIEDEL, *J.Phys.Chem.Solids* (1958) **4**, 71.
- [7] B. COQBLIN, *The electronic structure of metals and alloys* (1977) Academic Press, New York.
- [8] J.M. FOURNIER, E. GRATZ, *in Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths*, K.A. Gschneidner, L. Eyring éd. (1993) Elsevier Science Publ., vol. 17, p. 409.
- [9] T. VAN PESKI-TIMBERGEN, A.J. DEKKER, *Physica* (1963) **29**, 917.
- [10] H. MIWA, *Progr.Theor.Phys.* (1963) **29**, 477.
- [11] R.J. ELLIOTT, F.A. WEDGWOOD, *Proc.Phys.Soc.* (1963) **81**, 846.
- [12] K.A. MCEWEN, *in Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths* (1978) Vol. 1, K.A. Gschneidner, L.R. Eyring éd., North Holland, Amsterdam, p. 469.
- [13] A. FERT, I.A. CAMPBELL, *J. Phys. F. : Met.Phys.* (1976) **6**, 849 ; I.A. CAMPBELL, A. FERT, *in Ferromagnetic Materials* (1982) Vol. 3, North Holland Publ., p. 747.
- [14] J. FRIEDEL, *The theory of magnetism in transition metals* (1968) Academic Press, New York.
- [15] B. COQBLIN, *in Magnetism of metals and alloys*, M. Cyrot éd. (1982) North Holland Publ., Amsterdam, p. 295.
- [16] E. BAUER, *Adv.in Physics* (1991) **40**, 417.
- [17] M. KOHLER, *Ann.Phys.* (1949) **6**, 18 107.
- [18] H. YAMADA, S. TAKADA, *J. Phys. Soc. Japan* (1973) **34**, 51.
- [19] A. FERT, P.M. LÉVY, *Phys. Rev.B* (1977) **16**, 5052.
- [20] A. FERT, *Physica B* (1977) **86-88B**, p. 491 et références incluses.
- [21] M.J. OTTO, Thèse (1987) Université de Groningen.
- [22] *High magnetic fields in semiconductor physics III*, G. Landwehr éd. (1992) Springer Series in Solid State Sciences 101, Springer Verlag, Berlin.
- [23] T. DIETL, *in Handbook on semiconductors* (1994) vol. 3-b, Eds. Moss and Mahajan, North Holland, p. 1251.

- [24] S. VON MOLNAR, T. PENNEY, in *Physics of disordered materials*, Vol. 3, D. Alder *et al.* éd. (1985) Plenum Press, New York, p. 183.
- [25] N.F. MOTT, *Metal-insulator transitions*, 2ème edition (1990) Taylor and Francis, Londres.
- [26] J. ZAAENEN, G.A. SAWATSKY, J.W. ALLEN, *Phys.Rev.Lett.* (1985) **55**, 418.
- [27] J.B. TORRANCE, P. LACORRE, C. ASAVAROENGCHAI, R.M. METZGER, *Physica C* (1991) **182**, 351.
- [28] M. POLLAK, B. SHKLOVSKII, *Hopping transport in solids* (1991) North Holland, Amsterdam.
- [29] R. VON HELMOLT, J. WECKER, B. HOLZAPFEL, L. SCHULZ, K. SAMWER, *Phys. Rev. Lett.* (1993) **71**, 2331.
- [30] A. RAMIREZ, *J. Phys : Cond. Matter* (1997) **9**, 8171 et références incluses ; J.M.D. COEY, M. VIRET, S. VON MOLNAR, *Adv. in Physics* (1993) **48**, 167.
- [31] R.A. DE GROOT, F.M. MÜLLER, P.G. VAN ENGEN, K.H.J. BUSCHOW, *J. Appl. Phys.* (1995) **51**, 1077.
- [32] A. NOSSOV (1997), communication privée.
- [33] A.B. PIPPARD, D. SCHÖNBERG, R.G. CHAMBERS, in *The Physics of metals, Electrons* (1969) J.M. Ziman éd., Cambridge University Press.
- [34] G. LANDVEHR, in *Physics of solids under intense magnetic fields* (1969) Haidemenakis éd., Plenum Press, New York, p. 415.
- [35] L.P. LÉVY, *Magnétisme et supraconductivité* (1997) Editions du CNRS, Paris, chapitre 2.
- [36] L.M. FALICOV, R.W. STARK, *Progr. Low Temp. Phys.* (1967) **5**, 235.
- [37] K. VON KLITZING, G. DORDA, M. PEPPER, *Phys. Rev. Lett.* (1980) **45**, 494.
- [38] J.K. JAIN, *Adv. in Physics* (1992) **41**, 105.
- [39] S. KIVELSON, D-H. LEE, S-H. ZHANG, *Pour la Science* (1996) **223**, 64.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# ANNEXE I

## SYMBOLES UTILISÉS DANS LE TEXTE

- a** : Paramètre de réseau ;  $k_a$ ,  $Ma$  :  $10^3$ ,  $10^6$  années (chapitre 24). **A** : Aire d'une surface.
- A** : Nombre de nucléons ;  $A_{\text{éch}}$  : Constante d'échange ; **A** : Potentiel vecteur magnétique.
- B** : Induction magnétique ;  $B_1, B_2, \dots B^{\mu,\lambda}$  : Coefficients de couplage magnétoélastique.
- $\mathfrak{B}$  : Fonction de Brillouin.
- c** : Vitesse de la lumière ; paramètre de réseau ;  $c_{ij}$ ,  $c_{ij}^{\mu}$  : Modules d'élasticité.
- C** : Capacité d'un condensateur, chaleur spécifique ;  $\mathcal{C}$  : Constante de Curie.
- d** : Densité, distance.
- e** : Espacement, f.é.m ;  $-e$  : Charge de l'électron ;  $e$  : Potentiel électrique.
- E** : Densité d'énergie ;  $E_F$  : Énergie de Fermi. **E** : Champ électrique.
- $\mathcal{E}$  : Force magnétomotrice ; énergie.
- f** : Fonction, fréquence.
- F** : Densité d'énergie libre ; **F** : Force.
- $\mathcal{F}$  : Énergie libre.
- g** : Accélération de la pesanteur ;  $g$ ,  $g_J$  : Facteur de Landé.
- G** : Module de cisaillement, densité d'enthalpie libre ;  $\mathcal{G}$  : enthalpie libre (fonction de Gibbs).
- h** : Constante de Planck  $\{\eta = h/2\pi\}$ .
- H** : Champ magnétique ;  $H_C$  : Champ coercitif ;  $H_{\text{crit}}$  : Champ critique ;  
 $H_A$  : Champ d'anisotropie ;  $H_d$  : démagnétisant ;  $H_0$  : Champ appliqué (extérieur) ;  
 $H_{\text{mat}}$  : Champ créé par la matière ;  $H_{\text{mol}}$  : Champ moléculaire.
- $\mathcal{H}$  : Hamiltonien.
- i** : Courant électrique instantané ; **I** : Courant électrique efficace.
- j** : Densité de courant électrique ;  $j$  : Nombre imaginaire.
- J** : Opérateur moment angulaire total (en unités de  $\eta$ ) ; **J** ( $= \mathbf{B} - \mathfrak{m}_0 \mathbf{H}$ ) : Polarisation magnétique.
- $\mathcal{J}$  : Intégrale d'échange ;  $J, j_i$  : Nombre quantique de moment angulaire total.
- k** : Vecteur d'onde ;  $k_B$  : Constante de Boltzmann.

- $K_i$  : Constantes d'anisotropie magnétocristalline.
- $L$  : Auto-inductance ;  $L, l_i$  : Nombre quantique de moment angulaire orbital.
- $L, \lambda$  : Opérateur moment angulaire orbital (en unités de  $\eta$ ).
- $\mathbf{L}$  : Moment cinétique ( $= \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ).
- $\mathcal{L}$  : Fonction de Langevin.
- $m$  : Masse ;  $m$  : Aimantation réduite  $\{= M(T, H)/M(0, 0)\}$ .
- $\mathbf{m}$  : Moment magnétique élémentaire ;  $\mathbf{m}_{\text{eff}}, \mathbf{m}_o, \mathbf{m}_s$  : Moment magnétique effectif, orbital, de spin.  $m$  : Moment magnétique (module).
- $M$  : Inductance mutuelle ;  $M_J, M_L, M_S, m_i$  : Nombre quantique magnétique.
- $\mathbf{M}$  : Aimantation ( $M = d\mathbf{m}/dV$ ) ;  $M_s$  : Aimantation spontanée ;  $M_0 : M_s (T = 0 \text{ K})$ .
- $n, n_i$  : Nombre quantique principal ;  $n_{ij}$  : Coefficient de champ moléculaire.
- $N$  : Coefficient de champ démagnétisant ; Nombre d'Avogadro.
- $p$  : Pression.
- $\mathbf{p}$  : Quantité de mouvement ( $= m\mathbf{v}$ ).
- $P$  : Puissance.
- $q$  : Charge électrique ;  $q_m$  : masse magnétique.
- $Q$  : Quantité d'électricité, facteur de qualité, coefficient magnéto-optique.
- $R$  : Résistance électrique ;  $R_H$  : coefficient de Hall.
- $\mathcal{R}$  : Reluctance ;  $\mathfrak{R}_{ij}$  : Composantes de la rotation ( $i \neq j$ ).
- $[s_{ij}]$  : Tenseur des complaisances (*en anglais : compliance*) élastiques (notation contractée).
- $S$  : Entropie par unité de volume ; Surface.
- $S$  : Opérateur de spin (en unités de  $\eta$ ) ;  $S, s_i$  : Nombre quantique de spin.
- $t$  : Temps.
- $T$  : Période, température ;  $T_N$  : Température de Néel ;  $T_C$  : Température de Curie.
- $T_{\text{crit}}$  : Température critique (par exemple supraconductrice) ;  $T_{\text{comp}}$  : Température de compensation.
- $u$  : Différence de potentiel ;  $U$  : Différence de potentiel efficace.
- $\mathbf{u}$  : Vecteur déplacement ;  $u_{i,j}$  : Gradient de déplacement.
- $U$  : Densité d'énergie interne ;  $U$  : Différence de potentiel magnétique.
- ${}^0u$  : Energie interne.
- $\mathbf{v}$  : Vitesse.
- $\hat{\mathbf{v}}$  : Vecteur unitaire (exemple :  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{OM}/|\mathbf{OM}|$ ).
- $V$  : Volume, potentiel électrique.

- $\mathcal{V}$  : Potentiel magnétique.  
 $w$  : Coefficient de champ moléculaire.  
 $W$  : Travail.  
 $Y$  : Module d'Young.  
 $Z$  : Impédance électrique, numéro atomique.
- $\alpha$  : Coefficient d'amortissement ;  $\alpha_T$  : Coefficient de dilatation thermique linéaire.  
 $\alpha_i$  : Cosinus directeurs de l'aimantation.  
 $\beta_i$  : Cosinus directeurs de la direction d'observation.  
 $\gamma_i$  : Cosinus directeurs de la direction d'application d'une contrainte.  
 $\gamma$  : Rapport gyromagnétique ;  $\gamma_p$  : Densité d'énergie superficielle d'une paroi.  
 $[\gamma_{ij}]$  : Tenseur de conductivité électrique.  
 $\Gamma$  : Moment d'un couple de forces.  
 $\delta_p$  : Epaisseur de paroi.  $\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker.  
 $\epsilon$  : Permittivité ;  $\epsilon_0$  : Permittivité du vide ;  $\epsilon$ ,  $[\epsilon_{ij}]$  : Tenseur de permittivité.  
 $\eta_p$  : Coefficient de frottement visqueux.  $[\eta_{ij}]$  : Tenseur des déformations.  
 $\Theta_p$  : Température de Curie paramagnétique.  
 $\kappa$  : Compressibilité.  
 $\lambda$  : Longueur d'onde, paramètre de couplage spin-orbite ; élongation ;  $\lambda_s$ ,  $\lambda^\alpha$ ,  $\lambda^{\mu,\lambda}$  : Coefficient de magnétostriction ( $\mu = \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \dots$ ;  $\lambda = 2, 4, \dots$ ).  
 $\Lambda$  : Perméance  
 $\mu$  : Perméabilité magnétique ;  $\mu_0$  : Perméabilité du vide ;  $\mu_r$  : Perméabilité relative.  
 $\mu_B$  : Magnéton de Bohr.  
 $\nu$  : Coefficient de Poisson ; fréquence.  
 $\xi$  : Torsion ; longueur de cohérence.  
 $\rho$  : Masse volumique, résistivité ;  $\rho_e$  : Charge volumique ;  $\rho_m$  : Densité de masses magnétiques.  
 $[\rho_{ij}]$  : Tenseur de résistivité électrique.  
 $\sigma$  : Densité superficielle de charge électrique ; moment magnétique spécifique ( $\sigma = m/m$ ) ; nombre quantique de spin.  
 $\sigma_m$  : Densité superficielle de masse magnétique.  
 $[\sigma_{ij}]$  : Tenseur de contraintes mécaniques ;  $\sigma$  : Tenseur de conductivité.  
 $\tau$  : Temps de relaxation.

$\Phi$  : Flux magnétique.

$\chi$  : Susceptibilité magnétique ( $\chi_p, \chi_d$  : paramagnétique, diamagnétique).

$\psi(\mathbf{r})$  : Fonction d'onde électronique  $\{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  pour une onde de Bloch}.

$\omega$  : Pulsation, variation relative de volume ;  $\omega_L$  : Pulsation de Larmor.

$\omega$  : Vitesse angulaire.

Les vecteurs et les tenseurs sont représentés en gras. Par exemple :  $\mathbf{r}_{\mathbf{IJ}}$  = vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{IJ}}$ .

Le module d'un vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrit :  $|\mathbf{V}|$ .

Les vecteurs unitaires sont désignés par un accent circonflexe (exemple :  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{OM}/|\mathbf{OM}|$ ).

Le produit vectoriel est noté :  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

## ANNEXE 2

### UNITÉS ET CONSTANTES UNIVERSELLES

#### 1. CONVERSION DES UNITÉS MKSA EN SYSTÈME CGS ET AUTRES SYSTÈMES D'UNITÉS D'USAGE COURANT

Longueur (mètre) :  $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm} = 39,37 \text{ " (inch)} = 10^{10} \text{ angström (Å)}$ .

Force (newton) :  $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne} = 0,102 \text{ kgf}$ .

Energie (joule) :  $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0,7243 \times 10^{23} \text{ K} = 0,6241 \times 10^{19} \text{ eV}$ .

Densité d'énergie :  $1 \text{ J/m}^3 = 10 \text{ erg/cm}^3$ .

Puissance (watt) :  $1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s} = 1,359 \times 10^{-3} \text{ Ch} = 1,340 \times 10^{-3} \text{ hp}$ .

Pression (pascal) :  $1 \text{ Pa} = 10 \text{ barye} = 10^{-5} \text{ bar} = 1,02 \times 10^{-5} \text{ kg.cm}^{-2}$   
 $= 7,49 \times 10^{-3} \text{ torr} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ psi (pound per square inch)}$ .

Induction magnétique (tesla) :  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss (= 1 Wb/m}^2)$ .

La grandeur B peut s'appeler indifféremment induction magnétique, champ d'induction magnétique ou densité de flux magnétique.

Champ magnétique (ampère/mètre) :  $1 \text{ A/m} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ œrsted}$ .

Le champ magnétique H est souvent exprimé en unités de  $\mu_0 H$ , donc en tesla (T) ou en son sous-multiple, le gamma ( $\gamma$ ) qui vaut  $10^{-9} \text{ T}$ . Un champ de  $1 \text{ A/m}$  correspond à  $1,2566 \mu\text{T}$ .

Aimantation (ampère/mètre) :  $1 \text{ A/m} = 10^{-3} \text{ uem/cm}^3$ .

Moment magnétique (ampère-mètre carré) :  $1 \text{ A.m}^2 = 10^3 \text{ uem}$ .

Moment magnétique spécifique :  $1 \text{ A.m}^2/\text{kg} = 1 \text{ uem/g}$ .

On notera que, parfois, l'aimantation (M) le moment magnétique (m) et le moment magnétique spécifique ( $\sigma$ ) s'expriment respectivement en tesla, en Weber-mètre et en Weber-mètre par kilogramme : la raison en est que nous avons adopté pour définition de l'aimantation ( $d\mathbf{m}/dV$ ) :  $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ , alors que certains auteurs appellent "aimantation" la grandeur  $\mathbf{B}_i = \mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$  que la norme française (NF X 02-205 d'août 1985) désigne par le terme de "polarisation magnétique".

Température : il convient de retrancher 273,15 aux degrés Kelvin (K) pour connaître la température en degrés Celsius ou centigrades ( $^{\circ}\text{C}$ ).

## 2. QUELQUES VALEURS NUMÉRIQUES UTILES

Grandeur	Valeur numérique
Vitesse de la lumière, $c$	$2,9979 \times 10^8$ m/s
Perméabilité du vide, $\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Permittivité du vide, $\epsilon_0 = 1/c^2\mu_0$	$8,8542 \times 10^{-12}$ F/m
Constante de Planck, $h$	$6,6261 \times 10^{-34}$ J.s
$\eta = h/2\pi$	$1,0546 \times 10^{-34}$ J.s
Accélération de la pesanteur, $g$	$9,8066$ m/s <sup>2</sup>
Masse au repos de l'électron, $m$	$9,1094 \times 10^{-31}$ kg
Charge de l'électron, $e$	$1,6022 \times 10^{-19}$ C
Magnéton de Bohr, $\mu_B = e\eta/2m$	$9,2742 \times 10^{-24}$ A.m <sup>2</sup>
Quantum de flux, $h/2e$	$2,0678 \times 10^{-15}$ Wb
Nombre d'Avogadro, $N$	$6,0221 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
Constante de Boltzmann, $k_B$	$1,3807 \times 10^{-23}$ J/degré

# ANNEXE 3

## TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

Dans les cellules du tableau ci-dessous, pour chaque élément, la première ligne indique son symbole, avec en exposant son numéro atomique, la deuxième ligne sa masse atomique, la troisième ligne son état spectroscopique fondamental à l'état d'atome neutre, et enfin la quatrième ligne le degré d'occupation des couches électroniques les plus externes, toujours à l'état d'atome neutre.

H <sup>1</sup> 1,008 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 1s <sup>1</sup>																	He <sup>2</sup> 4,003 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 1s <sup>2</sup>	
Li <sup>3</sup> 6,940 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 2s <sup>1</sup>	Be <sup>4</sup> 9,012 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 2s <sup>2</sup>																	Ne <sup>10</sup> 20,180 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 2p <sup>6</sup>
Na <sup>11</sup> 22,990 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 3s <sup>1</sup>	Mg <sup>12</sup> 24,305 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 3s <sup>2</sup>																	Ar <sup>18</sup> 39,948 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 3p <sup>6</sup>
K <sup>19</sup> 39,100 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 3d <sup>4</sup> 4s <sup>1</sup>	Ca <sup>20</sup> 40,08 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 3d <sup>4</sup> 4s <sup>2</sup>	Sc <sup>21</sup> 44,95 <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub> 3d <sup>1</sup> 4s <sup>2</sup>	Ti <sup>22</sup> 47,90 <sup>3</sup> F <sub>2</sub> 3d <sup>2</sup> 4s <sup>2</sup>	V <sup>23</sup> 50,941 <sup>4</sup> F <sub>3/2</sub> 3d <sup>3</sup> 4s <sup>2</sup>	Cr <sup>24</sup> 51,996 <sup>7</sup> S <sub>3</sub> 3d <sup>5</sup> 4s <sup>1</sup>	Mn <sup>25</sup> 54,938 <sup>6</sup> S <sub>5/2</sub> 3d <sup>5</sup> 4s <sup>2</sup>	Fe <sup>26</sup> 55,847 <sup>5</sup> D <sub>4</sub> 3d <sup>6</sup> 4s <sup>2</sup>	Co <sup>27</sup> 58,933 <sup>7</sup> F <sub>9/2</sub> 3d <sup>7</sup> 4s <sup>2</sup>	Ni <sup>28</sup> 58,70 <sup>3</sup> F <sub>4</sub> 3d <sup>8</sup> 4s <sup>2</sup>	Cu <sup>29</sup> 63,546 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 3d <sup>10</sup> 4s <sup>1</sup>	Zn <sup>30</sup> 65,38 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup>	Ga <sup>31</sup> 69,72 <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> 4p <sup>1</sup>	Ge <sup>32</sup> 72,59 <sup>3</sup> P <sub>0</sub> 4p <sup>2</sup>	As <sup>33</sup> 74,922 <sup>4</sup> S <sub>3/2</sub> 4p <sup>3</sup>	Se <sup>34</sup> 78,96 <sup>3</sup> P <sub>2</sub> 4p <sup>4</sup>	Br <sup>35</sup> 79,904 <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub> 4p <sup>5</sup>	Kr <sup>36</sup> 83,80 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 4p <sup>6</sup>	
Rb <sup>37</sup> 85,47 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup>	Sr <sup>38</sup> 87,62 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 4d <sup>6</sup> 5s <sup>2</sup>	Y <sup>39</sup> 88,906 <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub> 4d <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup>	Zr <sup>40</sup> 91,22 <sup>3</sup> F <sub>2</sub> 4d <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup>	Nb <sup>41</sup> 92,906 <sup>6</sup> D <sub>1/2</sub> 4d <sup>4</sup> 5s <sup>1</sup>	Mo <sup>42</sup> 95,94 <sup>7</sup> S <sub>3</sub> 4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup>	Tc <sup>43</sup> ~ 98 <sup>5</sup> F <sub>5</sub> 4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup>	Ru <sup>44</sup> 101,07 <sup>4</sup> F <sub>9/2</sub> 4d <sup>7</sup> 5s <sup>1</sup>	Rh <sup>45</sup> 102,91 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 4d <sup>8</sup> 5s <sup>1</sup>	Pd <sup>46</sup> 106,4 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 4d <sup>10</sup> 5s <sup>0</sup>	Ag <sup>47</sup> 107,87 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 4d <sup>10</sup> 5s <sup>1</sup>	Cd <sup>48</sup> 112,40 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup>	In <sup>49</sup> 114,82 <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> 5p <sup>1</sup>	Sn <sup>50</sup> 118,69 <sup>3</sup> P <sub>0</sub> 5p <sup>2</sup>	Sb <sup>51</sup> 121,75 <sup>4</sup> S <sub>3/2</sub> 5p <sup>3</sup>	Te <sup>52</sup> 127,60 <sup>3</sup> P <sub>2</sub> 5p <sup>4</sup>	I <sup>53</sup> 126,90 <sup>2</sup> P <sub>3/2</sub> 5p <sup>5</sup>	Xe <sup>54</sup> 131,30 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 5p <sup>6</sup>	
Cs <sup>55</sup> 132,91 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>1</sup>	Ba <sup>56</sup> 137,34 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup>	La <sup>57</sup> 138,91 <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Hf <sup>72</sup> 178,49 <sup>3</sup> F <sub>2</sub> 5d <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup>	Ta <sup>73</sup> 180,95 <sup>4</sup> F <sub>3/2</sub> 5d <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup>	W <sup>74</sup> 183,85 <sup>5</sup> D <sub>0</sub> 5d <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup>	Re <sup>75</sup> 186,21 <sup>6</sup> S <sub>3/2</sub> 5d <sup>5</sup> 6s <sup>2</sup>	Os <sup>76</sup> 190,2 <sup>5</sup> D <sub>4</sub> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup>	Ir <sup>77</sup> 192,22 <sup>4</sup> F <sub>3/2</sub> 5d <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup>	Pt <sup>78</sup> 195,09 <sup>3</sup> D <sub>3</sub> 5d <sup>8</sup> 6s <sup>1</sup>	Au <sup>79</sup> 196,97 <sup>2</sup> S <sub>1/2</sub> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>1</sup>	Hg <sup>80</sup> 200,59 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup>	Tl <sup>81</sup> 204,37 <sup>2</sup> P <sub>1/2</sub> 6p <sup>1</sup>	Pb <sup>82</sup> 207,2 <sup>3</sup> P <sub>0</sub> 6p <sup>2</sup>	Bi <sup>83</sup> 208,98 <sup>4</sup> S <sub>3/2</sub> 6p <sup>3</sup>	Po <sup>84</sup> ~ 209 <sup>3</sup> P <sub>2</sub> 6p <sup>4</sup>	At <sup>85</sup> ~ 210 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 6p <sup>5</sup>	Rn <sup>86</sup> ~ 222 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 6p <sup>6</sup>	
Fr <sup>87</sup> ~ 223 6d <sup>10</sup> 7s <sup>1</sup>	Ra <sup>88</sup> 226,03 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 6d <sup>10</sup> 7s <sup>2</sup>	Ac <sup>89</sup> ~ 227 <sup>2</sup> D <sub>3/2</sub> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>																
Ce <sup>58</sup> 140,12 <sup>3</sup> H <sub>4</sub> 4f <sup>1</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Pr <sup>59</sup> 140,91 <sup>4</sup> I <sub>9/2</sub> 4f <sup>3</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Nd <sup>60</sup> 144,24 <sup>5</sup> I <sub>4</sub> 4f <sup>4</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Pm <sup>61</sup> - 145 <sup>7</sup> F <sub>0</sub> 4f <sup>5</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Sm <sup>62</sup> 150,35 <sup>6</sup> F <sub>5</sub> 4f <sup>6</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Eu <sup>63</sup> 151,96 <sup>8</sup> S <sub>7/2</sub> 4f <sup>7</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Gd <sup>64</sup> 157,25 <sup>9</sup> D <sub>2</sub> 4f <sup>7</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Tb <sup>65</sup> 158,92 <sup>8</sup> H <sub>17/2</sub> 4f <sup>8</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Dy <sup>66</sup> 162,50 <sup>7</sup> J <sub>10</sub> 4f <sup>9</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Ho <sup>67</sup> 164,93 <sup>6</sup> K <sub>10</sub> 4f <sup>10</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Er <sup>68</sup> 167,26 <sup>5</sup> K <sub>10</sub> 4f <sup>11</sup> 5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup>	Tm <sup>69</sup> 168,93 <sup>2</sup> F <sub>7/2</sub> 4f <sup>13</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Yb <sup>70</sup> 173,04 <sup>1</sup> S <sub>0</sub> 4f <sup>14</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>	Lu <sup>71</sup> 174,97 <sup>2</sup> D <sub>5/2</sub> 4f <sup>14</sup> 5d <sup>0</sup> 6s <sup>2</sup>					
Th <sup>90</sup> 232,04 <sup>3</sup> F <sub>2</sub> 5f <sup>0</sup> 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup>	Pa <sup>91</sup> 231,04 <sup>4</sup> F <sub>3/2</sub> 5f <sup>2</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	U <sup>92</sup> 238,03 <sup>3</sup> L <sub>6</sub> 5f <sup>3</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	Np <sup>93</sup> 237,05 <sup>5</sup> F <sup>4</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	Pu <sup>94</sup> ... <sup>5</sup> F <sup>4</sup> 6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup>	Am <sup>95</sup>    	Cm <sup>96</sup>    	Bk <sup>97</sup>    	Cf <sup>98</sup>    	Es <sup>99</sup>    	Fm <sup>100</sup>    	Md <sup>101</sup>    	No <sup>102</sup>    	Lw <sup>103</sup>    					

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

## ANNEXE 4

### SUSCEPTIBILITÉS MAGNÉTIQUES

Nous présentons ici les susceptibilités magnétiques (MKSA) de diverses substances dites "non-magnétiques" : éléments purs solides et liquides, et matériaux d'usage courant : alliages, matières plastiques, verres et céramiques. Les mesures ayant été le plus souvent publiées en unités cgs de susceptibilité spécifique ( $\chi_{cgs}$ ), nous précisons la valeur de la densité qui a été utilisée pour calculer la susceptibilité en unités MKSA ( $\chi$  est sans dimensions avec notre convention de définition de l'aimantation et s'exprime simplement par :  $\chi = 4\pi \cdot d \cdot \chi_{cgs}$  où  $d$  est la densité exprimée en  $g/cm^3$ ).

Nous commençons par les substances diamagnétiques et poursuivons par les substances paramagnétiques.

Tableau A 4.1 - Susceptibilité de quelques éléments purs diamagnétiques ( $\times 10^6$ )

Elément	d $gcm^{-3}$	$-\chi$	Elément	d $gcm^{-3}$	$-\chi$	Elément	d $gcm^{-3}$	$-\chi$
Ag	10,492	25	Au	18,88	34	B	2,535	20
Bi	9,78	165	C- diamant	3,52	22	Cd	8,65	19
Cu	8,933	11,8	Ga	5,93	23	Ge	5,46	7,25
H <sub>2</sub>	0,0763	2,6	Hg	14,2	29	I	4,94	22
In	7,28	51	P-rouge	2,20	20	Pb	11,342	16
S ( $\alpha$ )	2,07	12,6	S ( $\beta$ )	1,96	11,4	Sb	6,62	67
Se	4,82	19	Si	2,42	3,4	Sn-gris	7,30	29
Te	6,25	24	Tl ( $\alpha$ )	11,86	37	Zn	6,92	15

Tous les éléments ci-dessus ont été étudiés à l'état solide à l'exception de l'hydrogène et du mercure qui sont à l'état liquide (en grisé). Ces données ont été mesurées à température ambiante, à l'exception de l'hydrogène, mesuré à 13 K. Pour l'essentiel, ces données proviennent des Tables de Constantes et Données Numériques [1]. Sur l'exemple du cuivre, on peut vérifier [2] que les variations thermiques de  $\chi$  restent très faibles de 4.2 K à 300 K.

**Tableau A 4.2 - Susceptibilité à température ambiante de quelques matériaux diamagnétiques d'usage courant ( $\times 10^6$ )**

Matériau	d $\text{g cm}^{-3}$	$-\chi$	Matériau	d $\text{g cm}^{-3}$	$-\chi$	Matériau	d $\text{g cm}^{-3}$	$-\chi$
CuSn5	8,9	11	CuSn12	8,9	14	CuSn20	8,8	19
CuZn10	8,9	12	CuZn20	8,9	16	CuZn40	8,9	24
Corning7052	2,27	8	Zerodur	2,52	12	Plexiglas	1,19	9
Polyéthylène	0,923	10	Polyimide	1,43	9	PTFE	2,15	10
Alumine	3,87	12	Macor	2,52	11	Silice	2,21	12

Les bronzes (première ligne) et les laitons (seconde ligne) voient leur susceptibilité croître en valeur absolue quand diminue la teneur en cuivre [1]. La troisième ligne présente deux verres [3] et le Plexiglas [4], la quatrième ligne, trois matières plastiques (le PTFE est souvent appelé téflon) et la cinquième, deux céramiques et la silice fondue (amorphe) [2].

**Tableau A 4.3 - Susceptibilité paramagnétique à température ambiante de quelques éléments purs ( $\times 10^6$ )**

Élément	d $\text{g cm}^{-3}$	$\chi$	Élément	d $\text{g cm}^{-3}$	$\chi$	Élément	d $\text{g cm}^{-3}$	$\chi$
Al	2,70	21	Ba	3,5	6,6	Ca	1,55	20
Cs	1,873	5,2	Hf	13,3	70	Ir	22,42	38
K	0,87	5,8	La	6,174	66	Li	0,534	14
Lu	9,842	>0	Mg	1,74	5,5	Mo	9,01	105
Na	0,9712	8,5	Nb	8,4	232	Os	22,5	15
Pd	12,16	815	Pt	21,37	278	Rb	1,53	38
Re	20,53	97	Rh	12,44	170	Ru	12,1	65
Sc	2,992	263	Sn-blanc	7,30	2,4	Sr	2,60	34
Ta	14,6	177	Th	11,0	79	Ti	4,5	180
U- $\alpha$	18,7	404	V	5,87	370	W	19,3	78
Y	4,478	120	Yb	6,959	126	Zr	6,44	108

Tous les éléments donnés dans cette liste sont solides à la température ambiante. Le magnésium est donné pour diamagnétique par Pascal [5], et paramagnétique par Foëx [1], puis par Thomas et Mendoza [6], dont nous retenons la valeur de susceptibilité. On notera que les plus faibles susceptibilités sont observées avec les métaux alcalins.

**Tableau A 4.4 - Susceptibilité paramagnétique à différentes températures de quelques alliages d'usage courant ( $\chi \times 10^6$ ) [7]**

	304 (N)	304 L	316 (LN)	90Cu 10Ni
T = 300 K	3,1	2,9	3,2	210
T = 77 K	6,6	7,6	8,7	...
T = 4,2 K	9,0	11,3	14,2	280

On peut constater que les aciers inox (304 et 316) présentent des susceptibilités paramagnétiques comparables à celles des métaux alcalins, soit au moins 20 fois plus faibles que celles d'autres alliages pourtant faiblement magnétiques, même à basse température : c'est pourquoi ils sont abondamment utilisés en instrumentation magnétique, par exemple pour la confection des cryostats destinés à recevoir des bobines supraconductrices.

Il existe de nombreuses tables de valeurs numériques ou l'ingénieur pourra trouver quantité d'autres renseignements sur le paramagnétisme des solides, par exemple celles éditées par Landolt et Börnstein [8]. *Remarque importante : un certain nombre de tables de valeurs numériques sont encore données en diverses unités cgs, et le lecteur devra donc être attentif à ne pas les confondre avec des données en SI/m<sup>3</sup>, qui peuvent être parfois du même ordre de grandeur !*

On remarquera qu'une impureté ferromagnétique pourra perturber très notablement les propriétés magnétiques des substances présentant un très faible magnétisme, même pour des concentrations de l'ordre du ppm : la perturbation sera généralement fonction de la température et d'autant plus gênante que la température sera plus basse.

Par ailleurs, un soin particulier devra être apporté aux traitements subis par les matériaux devant présenter un très faible magnétisme : une brasure ou une soudure à l'argon est par exemple susceptible de précipiter une phase fortement magnétique dans un alliage faiblement paramagnétique. On a vu ainsi des aciers inoxydables réputés très faiblement magnétiques devenir légèrement ferromagnétiques ! La prudence s'impose donc, et il est judicieux de vérifier les propriétés magnétiques d'un alliage réputé non-magnétique avant tout usage, et après chaque traitement thermique et mécanique. Une méthode extrêmement simple pour tester le magnétisme d'une pièce métallique consiste à suspendre au bout d'un fin fil de nylon de 1 mètre de long un aimant puissant (Nd-Fe-B ou SmCo<sub>5</sub>) et à l'approcher de la pièce à tester : s'il y a la moindre attirance, c'est la preuve que la substance est déjà légèrement ferromagnétique ou du moins très fortement paramagnétique.

## RÉFÉRENCES

- [1] Tables de constantes et Données numériques : 7. Constantes sélectionnées : G. FOËX, Diamagnétisme et paramagnétisme ; C.-J. GORTER, L.-J. SMITS, Relaxation paramagnétique (1957) Masson & Cie, Paris, 317 p.
- [2] C.M. HURD, *Cryogenics* (1966) **6**, 264.
- [3] P.T. KEYSER, S.R. KEFFERTS, *Rev. Sci. Instr.* (1989) **60**, 2711.
- [4] PH. LETHUILLIER, communication privée.
- [5] P. PASCAL, Nouveau traité de chimie minérale (1958), tome IV, Masson, Paris, p. 143.
- [6] J.G. THOMAS, E. MENDOZA, *Phil. Mag.* (1952) **43**, 900.
- [7] Handbook on materials for superconducting machinery, metals and ceramics ; Information Center Batelle, Columbus (Ohio) 1974.
- [8] LANDÖLT, BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus physik. Chemie. Astronomie. Geophysik. Technik II - 9 - Magnetische Eigenschaften 1 (1962) Springer, Berlin, § 29.1111.

## ANNEXE 5

### MATÉRIAUX FERROMAGNÉTIQUES

*Nous résumons ici les propriétés physiques structurales, la dilatation thermique et les propriétés élastiques (tableau A 5.1) puis magnétiques intrinsèques (tableau A 5.2) de quelques substances courantes fortement magnétiques.*

**Tableau A5.1 - Propriétés physiques de quelques substances fortement magnétiques, mesurées à température ambiante**

Substance	Masse molaire g	Structure	a nm	c/a	densité g cm <sup>-3</sup>	$\alpha_T$ 10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>	c <sub>11</sub> GPa	c <sub>12</sub> GPa	c <sub>44</sub> GPa
fer	55,847	cc	0,287	1	7,85	12,1	237	140	116
cobalt	58,933	hc	0,251	1,622	8,84	12,4	307*	165*	75,5*
nickel	58,70	cfc	0,352	1	8,90	12,8	250	160	118,5
gadolinium	157,25	hc	0,363	1,591	7,90	-	67,8*	25,6*	20,8*
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	231,54	spinelle	0,839	1	5,19	-	273	106	97
CoFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	234,63	spinelle	0,838	1	5,29	-	-	-	-
NiFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	234,39	spinelle	0,834	1	5,38	7,5	220	109,4	81,2
Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	737,95	grenat	1,238	1	5,17	-	269	107,7	76,4
Fe-80%Ni	(58,10)	cfc	0,354	1	8,65	12,0	-	-	-
Cu <sub>2</sub> MnAl	209,01	cc	0,596	1	6,55	-	135,3	97,3	94
BaFe <sub>12</sub> O <sub>19</sub>	1111,5	h	0,589	3,937	4,5	-	-	-	-
SmCo <sub>5</sub>	445,01	h	0,500	0,794	8,58	-	-	-	-
Sm <sub>2</sub> Co <sub>17</sub>	1302,7	h	0,838	0,973	?	-	-	-	-
Nd <sub>2</sub> Fe <sub>14</sub> B	1081,1	quad.	0,879	1,389	7,60	-	-	-	-

\* Pour les substances de symétrie hexagonale, trois autres constantes élastiques doivent être considérées : pour le cobalt, ce sont c<sub>13</sub> = 103 GPa, c<sub>33</sub> = 358 GPa et c<sub>66</sub> ; pour le gadolinium, c<sub>13</sub> = 20,7 GPa, c<sub>33</sub> = 71,2 GPa et c<sub>66</sub> = 21,1 GPa.

Tableau A 5.2 - Propriétés magnétiques de quelques substances fortement magnétiques

Substance	T <sub>C</sub> K	M <sub>s</sub> <sup>0</sup> kA/m	μ <sub>0</sub> M <sub>s</sub> <sup>0</sup> T	M <sub>s</sub> <sup>300</sup> kA/m	μ <sub>0</sub> M <sub>s</sub> <sup>300</sup> T	σ <sub>s</sub> <sup>300</sup> A.m <sup>2</sup> /kg	A <sub>éch</sub> 10 <sup>-12</sup> J/m	K <sub>1</sub> kJ/m <sup>3</sup>
fer	1043	1735	2,180	1720	2,16	218		48
cobalt	1394	1445	1,816	1370	1,72	162		530
nickel	631	509	0,640	485	0,61	56		-4,5
gadolinium	289	2117	2,660	0	0	0		0
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	858	510	0,641	477	0,60	91,0		-13
CoFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	793	496	0,623	398	0,50	75,2		180
NiFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	858	300	0,377	271	0,34	50,4		-6,9
Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub>	553	196	0,247	139	0,17	26,1		-2,5
Fe-80%Ni	595	890	1,12	828	1,04	95,7		-2*
Cu <sub>2</sub> MnAl	610	632	0,794	560	0,70	85,5		-0,47
BaFe <sub>12</sub> O <sub>19</sub>	723	450	0,565	382	0,48	84,9	6	250
SmCo <sub>5</sub>	995	873	1,097	836	1,05	97,4	24	17 000
Sm <sub>2</sub> Co <sub>17</sub> **	1190	?	?	1030 ?	1,29 ?	101 ?	25	3 300
Nd <sub>2</sub> Fe <sub>14</sub> B	585	1480	1,86	1280	1,61	168	9	4 900

Ces propriétés sont relatives à la température ambiante, sauf M<sub>s</sub><sup>0</sup> (μ<sub>0</sub> M<sub>s</sub><sup>0</sup>) qui représente l'aimantation à 0 K, et T<sub>C</sub> la température de Curie (colonnes sur fonds grisé).

\* K<sub>1</sub> est très sensible aux traitements thermiques pour l'alliage Permalloy (Fe-80%Ni), et passe ainsi de -2 kJ/m<sup>3</sup> à une valeur dix fois plus petite après trempé.

\*\* Les valeurs de l'aimantation spontanée de l'alliage Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub> sont très difficiles à déterminer avec précision : comme pour toute substance très fortement anisotrope, la saturation n'est jamais atteinte, même avec des champs magnétiques intenses, et l'on est amené à extrapoler les données expérimentales vers les "champs infinis" avec toute l'ambiguïté que cela représente. Par ailleurs, en raison du ferrimagnétisme de cette substance, son aimantation présente une valeur à 300 K supérieure à celle que l'on observe à 0 K.

**N.B.** - L'aimantation M d'une substance dont on connaît le moment magnétique exprimé en μ<sub>B</sub> par molécule σ(μ<sub>B</sub>) s'exprime (en A/m) par la relation :

$$M = 5,585 \times \frac{\sigma(\mu_B) \times d(\text{kg} / \text{m}^3)}{M_{\text{mol}}(\text{kg})}$$

## ANNEXE 6

### FONCTIONS SPÉCIALES

Nous rappelons ici la définition de quelques fonctions mathématiques particulières (harmoniques sphériques, polynômes de Legendre, fonctions de Langevin, de Brillouin et dérivées) qui sont utilisées à plusieurs reprises dans cet ouvrage. L'exposé rigoureux de leurs propriétés peut se trouver dans de nombreux cours de mathématiques ; aussi nous contenterons-nous ici de donner l'expression analytique de ces fonctions, de les illustrer par quelques figures et de rappeler leurs utilisations les plus courantes en magnétisme.

#### 1. HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Toute fonction définie dans l'espace réel peut s'exprimer à l'aide des trois variables :  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  en coordonnées sphériques. Une fonction indépendante de  $r$  peut être développée sur les seules variables angulaires  $\theta$  et  $\phi$  en série de fonctions orthogonales qui sont solutions de l'équation de Laplace, et que l'on appelle pour cette raison les *harmoniques sphériques*,  $Y_l^m(\theta, \phi)$ , où  $l$  désigne le degré en  $\theta$ , et  $m$  le degré en  $\phi$ .

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta & Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \\ Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) & Y_2^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi} & Y_2^{\pm 2} &= \mp \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} \\ Y_3^0 &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (2\cos^3\theta - 3\sin^2\theta \cos\theta) & Y_3^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\phi} \\ Y_3^{\pm 2} &= \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta \cos\theta e^{\pm 2i\phi} & Y_3^{\pm 3} &= \mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta e^{\pm 3i\phi} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont normalisées à l'unité par la relation :  $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi Y_l^m \sin\theta d\theta = 1$ .

Elles sont utilisées pour décrire la contribution orbitale aux fonctions d'ondes électroniques  $s$  ( $Y_0^0$ ),  $p$  ( $Y_1^m$ ),  $d$  ( $Y_2^m$ ),  $f$  ( $Y_3^m$ ) ... des électrons libres [1].

En l'absence de champ cristallin électrique et de champ magnétique, la probabilité d'occupation des  $2m+1$  orbitales décrivant les états du niveau  $m$  est la même : ainsi, on montre facilement que la distribution spatiale de l'électron est sphérique, car :  $|\sum_m Y_l^m|^2 = \text{Cte}$ . En revanche, lorsque l'électron est soumis au potentiel périodique d'un réseau cristallin, les  $2m+1$  orbitales ne sont plus équivalentes énergétiquement. La contribution orbitale aux fonctions d'ondes électroniques est alors décrite par des combinaisons linéaires d'harmoniques sphériques.

Ainsi, en symétrie cubique, les cinq orbitales  $d$  vont se répartir sur deux niveaux d'énergie différents que l'on a pris l'habitude de désigner, l'un par  $e_g$  (ou  $\Gamma_3$ ) qui est deux fois dégénéré et est associé aux deux fonctions orbitales  $Y_2^0$  et  $(Y_2^2 + Y_2^{-2})$ , et l'autre par  $t_{2g}$  (ou  $\Gamma_5$ ) qui est trois fois dégénéré et est associé aux trois fonctions orbitales  $(Y_2^1 + Y_2^{-1})$ ,  $(Y_2^1 - Y_2^{-1})$  et  $(Y_2^2 - Y_2^{-2})$ .

Comme les coordonnées cartésiennes peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées sphériques :  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  et  $z = r \cos \theta$ , on vérifiera aisément que  $Y_2^0 \sim 3z^2 - r^2$ ,  $(Y_2^2 + Y_2^{-2}) \sim x^2 - y^2$ , tandis que les trois fonctions associées au niveau  $t_{2g}$  sont respectivement proportionnelles à  $yz$ ,  $zx$  et  $xy$ .

La probabilité de présence d'un électron  $d$  situé à une distance  $r$  donnée d'un noyau sera donc variable selon la direction de l'espace ; en définissant par  $Oxyz$  un trièdre trirectangle associé aux axes du cristal cubique, on peut représenter cette probabilité de présence par des lobes qui définissent d'une part les directions de plus forte probabilité, et d'autre part des familles de directions (plans, cônes, ...) selon lesquelles l'électron n'a aucune chance de se trouver. La figure ci-dessous représente de telles "orbitales" pour un électron  $3d$ .

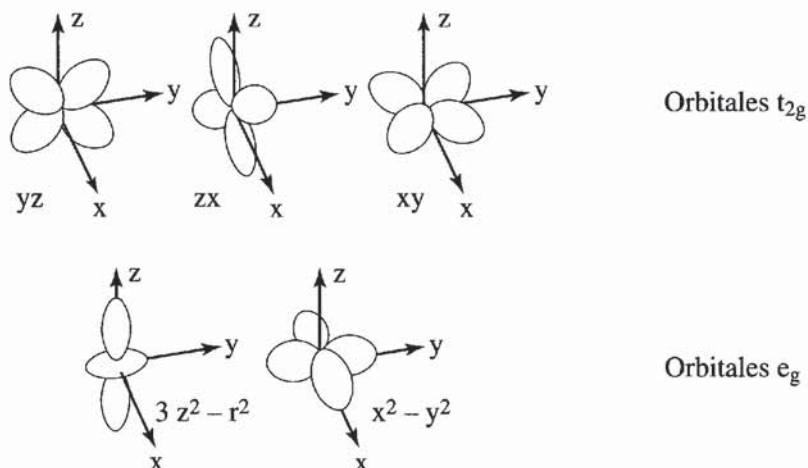


Figure A 6.1 - Orbitales électroniques 3d en symétrie cubique

## 2. POLYNÔMES DE LEGENDRE

Ces polynômes ont été introduits pour décrire les systèmes physiques présentant la symétrie cylindrique : on choisit pour axe Oz l'axe de symétrie, et la seule variable pertinente est alors  $\theta$  ; toute fonction peut être développée en série des  $Y_l^0$ , que l'on appelle *polynômes de Legendre*. Les polynômes de Legendre les plus utilisés en magnétisme sont les suivants :

$$P_0 = 1 \quad P_1 = \cos \theta \quad P_2 = (3/2)\{\cos^2 \theta - 1/3\}$$

$$P_3 = \cos^3 \theta - (3/2)\sin^2 \theta \cos \theta \quad P_4 = (1/8)\{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3\}$$

Ici, ces polynômes ont été normalisés en sorte que  $P_n(\theta = 0) = 1$ .

La figure A 6.2 présente les variations de ces polynômes  $P_n(\theta)$ .

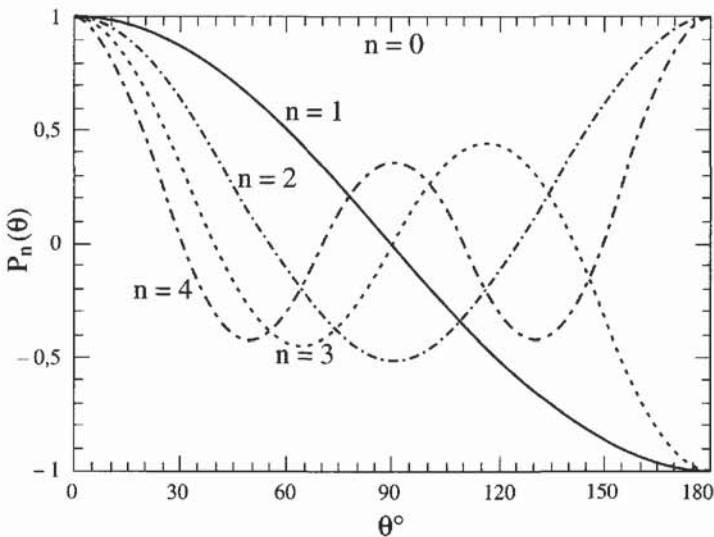


Figure A 6.2 - Variations avec  $\theta$  de quelques polynômes de Legendre

C'est en série de polynômes de Legendre pairs que L. Néel a développé l'expression de l'énergie d'interaction de paires (équation 12.1) qui lui a permis d'écrire les expressions de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline et de couplage magnéto-élastique. C'est aussi en série de polynômes de Legendre pairs et impairs que l'on développe le potentiel géomagnétique de la terre (équation 24.2).

## 3. FONCTION DE LANGEVIN

La fonction de Langevin  $\mathcal{L}(x) = \coth x - 1/x$  a été introduite avec le paramagnétisme de Curie (équation 4.21), mais sert surtout à décrire le superparamagnétisme où les unités porteuses du moment magnétique  $m$  comportent un nombre assez élevé de moments magnétiques élémentaires  $m$  pour que les effets quantiques ne jouent plus aucun rôle. La variable  $x$  est alors égale à :  $x = \mu_0 m H / k_B T$ .

A température élevée ( $x \ll 1$ ), on peut limiter le développement aux premiers termes :

$$\mathcal{L}(x) \sim \frac{x}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{315}x^4 - \frac{2}{1575}x^6 + 0(x^8) \right\}$$

tandis que lorsque  $x \gg 1$  (cas des champs très intenses), cette fonction diffère peu de :  $\mathcal{L}(x) \sim 1 - 1/x$ .

#### 4. FONCTIONS DE BRILLOUIN

Les fonctions de Brillouin généralisent la fonction  $\mathcal{L}(x)$  :

$$\mathfrak{B}_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J}x\right)$$

Elles ont été introduites pour affiner la description du paramagnétisme de Curie en présence d'effets quantiques (cas de faibles moments magnétiques,  $J = 1/2, 1, \dots$ ). La fonction de Langevin représente la limite vers laquelle tendent les fonctions de Brillouin, lorsque  $J$  tend vers l'infini.

Lorsque  $x$  est très inférieur à l'unité, c'est-à-dire pour les températures élevées, on a :

$$\mathfrak{B}_J(x) \sim \frac{x}{3} \frac{J+1}{J} \left\{ 1 - \frac{1}{15}x^2 \left( 1 + \frac{1}{J} + \frac{1}{2J^2} \right) + 0(x^4) \right\}$$

et lorsque  $x$  est très supérieur à l'unité (cas des champs très intenses), cette fonction tend vers l'unité beaucoup plus vite que la fonction de Langevin.

La figure A 6.3 présente les variations avec  $x$  de deux fonctions de Brillouin et, pour comparaison, de la fonction de Langevin.

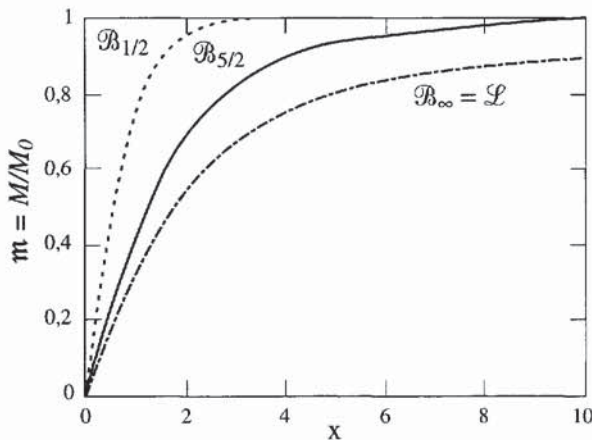


Figure A 6.3 - Allure des courbes  $\mathfrak{B}_{1/2}(x)$ ,  $\mathfrak{B}_{5/2}(x)$  et  $\mathcal{L}(x)$

## 5. FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES

Les trois premières fonctions de Bessel modifiées (ou hyperboliques) de première espèce à indices demi-entiers (réf. [2], page 384) s'écrivent :

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sh} z ; I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \operatorname{ch} z - \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right) ; I_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \left( \frac{3}{z^2} + 1 \right) \operatorname{sh} z - 3 \frac{\operatorname{ch} z}{z} \right]$$

On constate aisément que la fonction de Langevin n'est autre que le rapport :

$$\mathcal{L}(x) = \hat{I}_{3/2}(x) = \frac{I_{3/2}(x)}{I_{1/2}(x)} = \coth x - \frac{1}{x}.$$

Il est possible de définir des fonctions de Langevin généralisées  $\hat{I}_{\ell+1/2}(x)$  ; ce sont essentiellement les fonctions  $\hat{I}_{\ell+1/2}(x)$  de degré  $\ell$  pair qui sont utilisées en magnétisme :

$$\hat{I}_{5/2}(x) = 1 - (3/x) \mathcal{L}(x) = \frac{3}{x^2} + 1 - \frac{3}{x} \coth(x)$$

$$\hat{I}_{9/2}(x) = 1 + \frac{35}{x^2} - \left( \frac{105}{x^3} + \frac{10}{x} \right) \mathcal{L}(x) = \frac{105}{x^4} + \frac{45}{x^2} + 1 - \left( \frac{105}{x^3} + \frac{10}{x} \right) \coth(x)$$

Callen *et al.* ont montré [3, 4] que, dans un modèle de ferromagnétisme localisé, les coefficients d'anisotropie  $K_\ell(T, H)$  ou de couplage magnétoélastique  $B_\ell(T, H)$  associés à des polynômes harmoniques de degré  $\ell$  variaient avec le champ ou la température comme la fonction de Bessel modifiée  $\hat{I}_{\ell+1/2}(x)$ , et ils ont proposé de relier ces variations à celles de l'aimantation réduite  $m = M(T, H)/M(0, 0)$  qui est donnée par la fonction  $m = \mathcal{L}(x)$ , en écrivant :  $K_\ell(T, H)/K_\ell(0, 0) = \hat{I}_{\ell+1/2}[\mathcal{L}^{-1}(m)]$ . Ainsi, les variations avec la température et le champ magnétique des coefficients d'anisotropie (et de couplage magnétoélastique) peuvent s'exprimer de façon implicite, dans un tel modèle, en fonction de l'aimantation réduite de la substance au moyen de fonctions qui généralisent la fonction de Langevin.

C'est la fonction  $\hat{I}_{5/2}(x)$  qu'il convient d'utiliser pour traiter les coefficients d'ordre 2 (la constante  $K_1$  d'un cristal uniaxe ou les coefficients de couplage  $B^{y,2}$ ,  $B^{e,2}$  d'un cristal de symétrie cubique), la fonction  $\hat{I}_{9/2}(x)$  pour les coefficients d'ordre 4 (par exemple la constante  $K_1$  d'un cristal de symétrie cubique), et ainsi de suite.

On pourra noter que, à basse température seulement, les fonctions  $\hat{I}_{\ell+1/2}[\mathcal{L}^{-1}(m)]$  varient comme  $m^{\ell(\ell+1)/2}$ . On le vérifie aisément sur les équations de définition des fonctions relatives à  $\ell = 1, 2$  et  $4$  : à très basse température,  $x$  tend vers l'infini,  $\mathcal{L}(x)$  c'est-à-dire  $m$ , tend vers  $1 - 1/x$  et donc  $m^n$  vers  $1 - n/x$  ; or on voit que  $\hat{I}_{5/2}(x)$  tend vers  $1 - 3/x$  et  $\hat{I}_{9/2}(x)$  vers  $1 - 10/x$ , ce qui démontre notre propos.

En revanche, à haute température, les fonctions  $\hat{I}_{\ell+1/2}[\mathcal{L}^{-1}(m)]$  varient comme  $m^\ell$  : vers  $T_C$  et au-delà,  $\mathcal{L}(x) = m \sim x/3$ ,  $\hat{I}_{5/2}(x) \sim x^2/15$  et  $\hat{I}_{9/2}(x) \sim x^4/945$ , ce qui donne  $\hat{I}_{5/2}(x) \sim (3/5) m^2$  et  $\hat{I}_{9/2}(x) \sim (3/35) m^4$ .

La figure A 6.4 présente les variations des fonctions  $\hat{I}_{\ell+1/2}(x)$  pour  $\ell = 1, 2$  et 4, la courbe  $\mathcal{L}(x)$  correspondant à  $\ell = 1$ . Connaissant la valeur expérimentale de  $m(T, H)$ , par exemple 0,9 correspondant au point A sur la courbe  $\ell = 1$ , il est possible d'en déduire aussitôt les valeurs de  $K_\ell(T, H)/K_\ell(0, 0)$  ou de  $B_\ell(T, H)/B_\ell(0, 0)$  : il suffit de faire passer par A une droite verticale ; l'intersection de cette verticale avec les courbes relatives à  $\ell = 2$  (B) et  $\ell = 4$  (C) donne immédiatement le résultat.

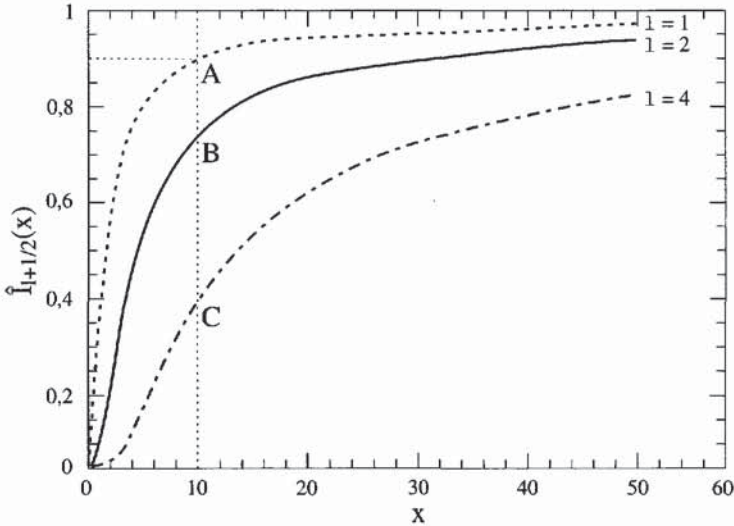


Figure A 6.4 - Variations des fonctions  $\mathcal{L}(x)$ ,  $\hat{I}_{5/2}(x)$  et  $\hat{I}_{9/2}(x)$

Ces figures expliquent très bien pourquoi l'approche à la saturation des courbes de magnétostriction est plus lente que pour les courbes d'aimantation : quand l'aimantation a atteint 90% de la valeur à saturation, la magnétostriction – qui est proportionnelle à  $B_2(T, H)$  – n'en est encore qu'à près de 70%.

Notons que le même traitement a pu être développé avec des fonctions généralisant les fonctions de Brillouin et non plus la fonction de Langevin ; les résultats [5, 6] sont certes plus précis, mais au prix d'une plus grande lourdeur analytique.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Lalöe, *Mécanique Quantique* (1977) Hermann éditeur, Paris, 2 tomes.
- [2] A. Angot, *Compléments de mathématiques* (1957) Editions de la revue d'Optique, Paris, 836 p.
- [3] E.R. Callen, H.B. Callen, *J. Phys. Chem. Solids* (1960) 16, 310-328.
- [4] E. Callen, *J. Appl. Phys.* (1968) 39, 519-527.
- [5] Y. Millev, M. Fähnle, *J. Magn. Magn. Mater.* (1994) 135, 284-292.
- [6] Y. Millev, M. Fähnle, *J. Phys. : Cond. Matter* (1995) 7, 6909-6923.

## ANNEXE 7

### EQUATIONS DE MAXWELL

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

$$\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_{T2} \text{ (fonctionnement stationnaire)}$$

$$D_{N2} - D_{N1} = \sigma$$

$$B_{N1} = B_{N2}$$

$$\mathbf{H}_{T2} - \mathbf{H}_{T1} = \mathbf{j}_S \times \mathbf{n} \text{ (fonctionnement stationnaire)}$$

*Dans le vide :*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

*Dans la matière :*

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

$$\text{si } \mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{avec : } \mu = (1 + \chi) \mu_0 = \mu_0 \mu_r$$

$$\text{si } \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{avec : } \epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon \mu v^2 = 1$$

*Equations régissant la densité de courant :*

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$j_{N1} - j_{N2} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

*Force agissant sur une charge électrique :*

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

*Potentiels scalaire V et vecteur A :*

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$* \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t$$

$$* V + \rho / \epsilon = 0$$

où le « d'Alembertien » \* s'exprime en fonction du Laplacien  $\Delta$  comme :

$$* = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Nous proposons en page suivante quelques formules utiles d'algèbre vectorielle.

**COORDONNÉES SPHÉRIQUES**

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

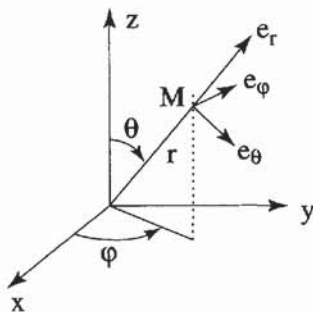
**COORDONNÉES CYLINDRIQUES**

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

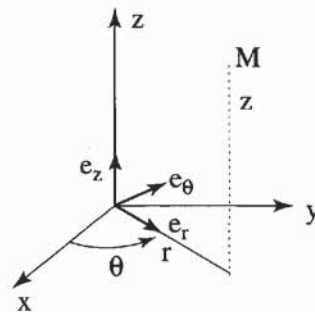
$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} = & \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$



Coordonnées sphériques



Coordonnées cylindriques

## BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

*Le magnétisme est un sujet qui a inspiré bien des auteurs scientifiques. Nous donnons ci-dessous la liste d'un certain nombre de livres traitant de ce sujet, pensant que le lecteur pourra tirer profit des approches variées et souvent complémentaires de ces différents ouvrages.*

Année	Titre	Editeur	pages
1939	Ferromagnetismus (en allemand) <i>R. Becker, W. Döring</i>	Springer	440
" "	Modern Magnetism <i>L.F. Bates</i>	Cambridge Press	340
1951	Ferromagnetism (réédité en 1993) <i>R.M. Bozorth</i>	Van Nostrand	968
1962	Ferromagnetismus <i>E. Kneller</i>	Springer	792
1963	Magnetism <i>G.T. Rado, H. Suhl</i>	Academic Press	5 vol
1964	Physics of magnetism <i>S. Chikazumi</i>	Wiley	554
1965	The theory of magnetism <i>D.C. Mattis</i>	Harper & Row	314
" "	The physical principles of magnetism <i>A.H. Morrish</i>	Wiley	680
1966	The magnetic properties of matter <i>D.E.G. Williams</i>	Longmans	232
" "	Physical principles of magnetism <i>F. Brailsford</i>	van Nostrand	274
" "	Ferromagnetism - Handbuch / Physik vol 18/2 <i>H.P.J. Wijn</i>	Springer	560
1967	Magnetism in Solids <i>D.W. Martin</i>	Iliffe books	452
" "	Experimental methods in magnetism (2 vol.) <i>H. Zijlstra</i>	North Holland	236+296
1968	Magnetism and magnetic materials <i>J.C. Anderson</i>	Chapman & Hall	248

<b>Année</b>	<b>Titre</b>	<b>Editeur</b>	<b>pages</b>
1968	Magnétostatique <i>E. Durand</i>	Masson	674
" "	Théorie du magnétisme <i>A. Herpin</i>	P.U.F.	882
1969	Magnetic materials <i>R.S. Tebble, D.J. Craik</i>	Wiley	726
1970	Quantum theory of magnetism <i>R.M. White</i>	McGraw Hill	232
1972	Introduction to magnetic materials <i>B.D. Cullity</i>	Addison-Wesley	666
1973	Magnetic interactions in solids <i>H.J. Zeiger, G.W. Pratt</i>	Clarendon Press	660
1974	Magnetic materials & their applications <i>C. Heck</i>	Buttersworths	770
1974	Magnetism <i>S.V. Vonsovski</i>	Wiley	1256
1975	Magnetism in crystalline materials <i>A.P. Cracknell</i>	Pergamon	276
1977	The magnetic properties of solids <i>J. Crangle</i>	E. Arnold	194
1979	Experimental magnetism <i>G.M. Kalvius, R.S. Tebble</i>	Wiley	346
1980	Handbook of magnetic materials <i>Wohlfarth &amp; Buschow</i>	North-Holland	7 vol
" "	Introduction to the magnetic properties of solids <i>A. S. Chakravarty</i>	Wiley	696
" "	Applications of magnetism <i>J.K. Watson</i>	Wiley	468
1982	Magnetism of metals and alloys <i>M. Cyrot</i>	North Holland	608
1986	Magneti permanenti & Fizica fenomenelor magnetice <i>E. Burzo</i>	Ed. roumaines	3 vol
1988	Lectures on modern magnetism <i>B. Barbara, D. Gignoux, C. Vettier</i>	Springer	232
1991	Introduction to magnetism and magnetic materials <i>D.C. Jiles</i>	Chapman & Hall	440
1992	Concise encyclopaedia of magnetic and superconducting materials <i>J. Evetts</i>	Pergamon	703
1994	Ferromagnetic materials <i>Mc Currie</i>	Acad. Press	297

<b>Année</b>	<b>Titre</b>	<b>Editeur</b>	<b>pages</b>
1995	Magnetism. Principles and Applications <i>D.J. Craik</i>	Wiley	459
1996	Introduction to the Theory of Ferromagnetism <i>A. Aharoni</i>	Oxford Univ. Press	326
" "	Driving force <i>J.D. Livingston</i>	Harward Univ. Press	311
" "	Rare-Earth Iron Permanent Magnets <i>J.M.D. Coey</i>	Oxford Sci. Publ.	522
1997	Physics of Ferromagnetism <i>S. Chikazumi</i>	Oxford Sci. Publ.	655
" "	Magnétisme & matériaux magnétiques pour l'électrotechnique <i>P. Brissonneau</i>	Hermès	318
1998	Hysteresis in Magnetism : for Physicists, Materials Scientists and Engineers (Electromagnetism) <i>G. Bertotti</i>	Academic press	558
" "	The Magnetic field of the Earth (International Geophysical Series) <i>R. T. Merrill</i>	Academic Press	531
" "	Magnetism and magnetic resonance in solids <i>A.P. Guinaraes</i>	J. Wiley & sons	352
" "	Magnetic Domains <i>A. Hubert, R. Schäfer</i>	Springer	696

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# INDEX

## INDEX MATÉRIAUX (VOIR AUSSI LES ANNEXES 4 ET 5)

R = terre rare, f = figure, t = tableau

CMN (nitrate de cérium et magnésium) .....	341	Grenat .....	171f, 266, 413
(Ce, La)InCu <sub>2</sub> .....	441f	Invar .....	346
Cobalt .....	262f, 361f	La(TR)MnO <sub>3</sub> .....	27
CoF <sub>2</sub> .....	265	LaMnO <sub>3</sub> .....	448
CoO .....	265	La <sub>0,67</sub> Ca <sub>0,33</sub> MnO <sub>3</sub> .....	448f
Co <sub>58</sub> Fe <sub>5</sub> Ni <sub>10</sub> Si <sub>11</sub> B <sub>16</sub> .....	377f	La <sub>1-x</sub> Sr <sub>x</sub> MnO <sub>3</sub> .....	315f
CrBr <sub>3</sub> .....	310	Lu <sub>3</sub> Co <sub>7,77</sub> Sn <sub>4</sub> .....	147f
Dy <sub>3</sub> Al <sub>2</sub> .....	192f	Magnétite .....	(voir Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> )
DyNi <sub>2</sub> Si <sub>2</sub> .....	145f	MnF <sub>2</sub> .....	186f
Elinvar .....	346	MnO .....	20, 264
ErGa <sub>2</sub> .....	110f	Nd <sub>2</sub> Fe <sub>14</sub> B .....	190f, 243f
EuO .....	310, 445, 446	Nickel .....	26, 218f, 293f, 328t, 334f, ..... 336f, 353f, 368, 374f
EuS .....	445	NiF <sub>2</sub> .....	265
Fer .....	13, 95t, 106f, 301f, ..... 337f, 359f, 367f, 378f	NiFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub> .....	310
FeF <sub>2</sub> .....	264	NiCl <sub>2</sub> .....	265
Fe-Ni .....	168f	NiO .....	185f
FeO .....	264	PtMnSb .....	444f
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> .....	14, 264, 328t	R-Al <sub>2</sub> .....	266
γ-Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	14, 95t, 264	R-Cu <sub>2</sub> .....	266
α-Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	264	R-Ni <sub>2</sub> .....	266
Fe-Si .....	109f, 172f, 181f	R-Fe .....	304f
Fe <sub>64</sub> Ni <sub>36</sub> .....	(voir Invar)	SmCo <sub>5</sub> .....	190f
Fe <sub>80</sub> B <sub>20</sub> .....	366f	SmCo <sub>3,5</sub> Cu <sub>1,5</sub> .....	244f
Fe <sub>75</sub> P <sub>15</sub> C <sub>10</sub> .....	366f	Tb <sub>75</sub> Gd <sub>25</sub> .....	110f
Fe <sub>78</sub> Si <sub>9</sub> B <sub>13</sub> .....	363f	Terfenol-D (Tb <sub>0,3</sub> Dy <sub>0,7</sub> Fe <sub>2</sub> ) .....	384f
Fe <sub>4</sub> Co <sub>71</sub> Si <sub>10</sub> B <sub>15</sub> .....	363f	TiCoSn .....	442f
Gadolinium .....	262f, 312	U <sub>x</sub> Th <sub>1-x</sub> O <sub>2</sub> .....	354f
GdAl <sub>2</sub> .....	111f	Y <sub>3</sub> Fe <sub>5</sub> O <sub>12</sub> (YIG) .....	264, 355f, 357f, 358f
Gd <sub>5</sub> (Si-Ge) <sub>4</sub> .....	340	YCo <sub>5</sub> .....	104f
GdZn .....	111f, 339f	ZrZn <sub>2</sub> .....	281

## INDEX SUJETS

### A

absorption ..... 180, 392, 396  
 accrochage de parois ..... 216  
 actionneur ..... 22, 381  
 activation thermique ..... 238  
*after effect* ..... (voir traînage)  
*aging* ..... (voir vieillissement)  
 aimant ..... 13, 21f, 24f, 277  
 aimantation  
   - induite ..... 90  
   - rémanente ..... 49, 108, 229  
   - à saturation ..... 123  
   - spontanée ..... 92, 93, 97  
 amorphe ..... 25, 142, 281, 362  
**Ampère** (théorème d') ..... 32  
**Ampère-Maxwell** (relation d') ..... 33  
 ampérien (ne) ..... 19, 29, 41  
**Anderson** (hamiltonien d') ..... 298  
 anhystérique (aimantation) ..... 109, 230  
 anisotropie  
   - de l'aimantation ..... 281  
   - de forme ..... 222  
   - magnétocristalline ..... 99, 154, 296  
   - magnétoélastique ..... 375  
 anomalie de dilatation ..... 111f, 345f, 354f  
 antiferromagnétisme ..... 20, 91, 132  
 approche à la saturation ..... 93, 196  
**Arrott** (tracés d') ..... 144  
 aspéromagnétisme ..... 142  
 auto-induction ..... 63

### B

bande de conduction ..... 261, 295, 440  
**Barkhausen** (bruit de) ..... 227, 229  
 barrière d'énergie ..... 191f, 203f  
 bas spin ..... 265  
 bilame ..... 369f  
 biomagnétisme ..... 25  
**Biot et Savart** (loi de) ..... 30  
 biréfringence magnétique ..... 394  
**Bitter** ..... 20  
   - (méthode de) ..... 166f, 176  
 blindage ..... 15

### Bloch

- (ligne de) ..... 167, 168f  
 - (paroi de) ..... 157, 166f  
 - (théorème et onde de) ..... 292, 302  
 bobine ..... 22, 34, 36, 63

### Bohr

- (magnéton de) ..... 250

### Boltzmann

- (constante de) ..... 121  
 boucle de courant ..... 18, 36

boussole ..... 15

**Brillouin** (fonction de) ..... 124

### Brown

- (inégalité de) ..... 206  
 - (paradoxe, théorème de) ..... 222

*buckling* ..... (voir flambage)

bulles ..... 413

### C

capteur ..... 22, 347, 348

chaleur spécifique ..... 110f, 319, 334

### champ

- d'anisotropie ..... 102

- coercitif ..... 22

- cristallin ..... 99, 262

- d'échange ..... (= moléculaire)

- démagnétisant ..... 45, 46, 50

- électrique cristallin ..... (= cristallin)

- magnétique ..... 16, 18, 22, 23f

- moléculaire ..... 20, 92, 126

circuit magnétique ..... 53, 54f

### coefficient

- de champ démagnétisant ..... 46

- de champ d'une bobine ..... 34

- de champ moléculaire ..... 127

- de couplage magnétomécanique ..... 382

- de Fresnel ..... 401

- magnéto-optique ..... 398

coercitivité ..... 22, 200, 229

configuration en domaines ..... 168

constante (ou coefficient) d'échange ..... 153

contraintes ..... 107, 218, 322, 374

**Cotton** ..... 23, 394

couche mince ..... 25, 166, 368, 451

coulombien (ne) ..... 19, 38  
 couplage ..... 20, 111, 323  
   - dipolaire ..... 65  
   - galvanomagnétique ..... 437  
   - magnéto-calorique ..... 110, 333  
   - magnéto-élastique ..... 111, 216, 345  
   - magnéto-optique ..... 111, 391  
   - spin-orbite ..... 253, 256, 296, 440, 443  
 couple ..... 19, 119  
 courant électrique ..... 18, 32  
 courbe de 1ère aimantation ..... 93, 213f, 226  
 critique ..... (voir exposant, température)  
*cross tie* ..... (voir échelle de perroquet)  
**Curie** ..... 20  
   - (constante de) ..... 97, 120  
   - (loi de) ..... 91, 120  
   - (température de) ..... 92, 97, 130, 139  
   - (" paramagnétique) ..... 97, 131  
**Curie-Weiss** (loi de) ..... 92, 97, 130  
*curling* ..... (voir enroulement)

## D

décrochage ..... 219  
 défauts (effets des) ..... 211  
 déformation ..... 172, 220, 322, 345  
**de Gennes** ..... 439  
 demi-métaux ..... 448  
 densité d'états ..... 283, 291f  
 désaccommodation ..... 246  
 désaimantation ..... 16, 22, 187, 230f  
 diamagnétisme ..... 20, 65, 89, 115  
 dichroïsme magnétique ..... 179, 396  
 diffraction  
   - des rayons X ..... 178, 396  
   - neutronique ..... 21, 97, 125, 180  
 diffusion ..... 107, 179, 180, 244  
 dipôle ..... 18, 37, 65  
 domaine  
   - antiferromagnétique ..... 183  
   - de chiralité ..... 186  
   - de fermeture ..... 171, 172f, 224f, 372f  
   - de Weiss ..... 92, 97, 155  
 double échange ..... 314  
 doux/dur (matériau) ..... 14, 98, 235  
 droite de champ démagnétisant ..... 51

## E

échange  
   - anisotrope ..... 268  
   - antisymétrique ..... 264, 310  
   - (interaction d') ..... 52, 91, 126, 152  
 échelle de perroquet ..... 167  
 écran ..... (voir blindage)  
 effet  
   - cyclotron ..... 442  
   -  $\Delta E$  ..... 380  
   - de forme ..... 370  
   - Invar ..... 346  
   - magnéto-calorique ..... 335  
   - morphique ..... 346  
 élasticité ..... 331, 385  
 électroaimant ..... 20, 54,  
 électromagnétisme ..... 19, 30  
 électron ..... 18, 20, 91, 115, 249, 279  
 électrostatique ..... 30, 267  
 ellipticité ..... 393, 411  
 énergie  
   - d'anisotropie ..... 99, 100f  
   - d'échange ..... 126, 128  
   - élastique ..... 352, 386, 388  
   - d'interaction dipolaire ..... 65, 67f  
   - magnétique ..... 60-63, 65  
   - magnéto-élastique ..... 172, 350, 351  
   - de paroi ..... 158, 216  
 enregistrement  
   - magnétique ..... 16, 22, 24, 25f,  
   - magnéto-optique ..... 391, 424  
 enroulement ..... 173f  
 état lié virtuel ..... 297  
 état désaimanté ..... 70, 226  
 exposant critique ..... 326

## F

facteur gyromagnétique ..... 120, 258  
**Faraday** ..... 19, 56, 58  
   - (effet) ..... 171, 177, 392  
   - (isolateur à effet) ..... 421  
**Fermi** (énergie de) ..... 282, 312  
 ferrimagnétisme ..... 20, 93, 137  
 ferrofluide ..... 25

ferromagnétisme .....	20, 92
- faible .....	281, 311
- itinérant .....	279
- localisé .....	129
- parasite .....	264
feuillelet magnétique .....	39
flambage .....	207
fluctuation .....	108, 239
flux magnétique .....	33
fonction d'onde .....	253, 284, 307
force magnétique .....	31, 35, 39, 56, 62, 68
<b>Foucault</b>	
- (courants de) .....	108, 237
- (microscopie de) .....	182
<b>Friedel</b> .....	298, 302, 439
frustration .....	143, 168, 299

## G

<b>Gauss</b> (théorème de) .....	43
géomancien .....	16
gyroscope .....	119f

## H

<b>Hall</b> (effet) .....	438
- (effet <b>H</b> . quantique) .....	450f
hamiltonien .....	252
harmoniques sphériques .....	252
hélimagntisme .....	140, 186
holographie .....	182
<i>hopping</i> .....	(voir saut électronique)
<b>Hubbard</b> (hamiltonien de) .....	294
<b>Hund</b> (règle de) .....	255, 294, 313, 314
hystérisographie .....	417
hystérésis .....	49, 93, 192, 206, 229, 338, 363f

## I

imagerie .....	21, 178 à 181, 418
implosion .....	23
impureté .....	297, 440
inclusion (effet d'une) .....	217-219, 244
induction magnétique .....	19, 30
intégrale d'échange .....	308
intégrale de recouvrement .....	292, 308

interaction .....	17
- dipolaire .....	20, 46, 65
- d'échange .....	(voir échange)
- RKKY .....	311
irréversibilité .....	201, 211
isolateur .....	421

## K

<b>Kerr</b> (effets) .....	177, 178f, 395
<b>Kersten</b> (modèle de) .....	218
<b>Kohler</b> (loi de) .....	442f
<b>Kondo</b> (effet) .....	298

## L

lacune .....	217
<b>Landau</b>	
- (développement de) .....	145
- (diamagnétisme de) .....	284
- (modèle de) .....	324
<b>Landé</b> (facteur de) .....	123, 258
<b>Langevin</b> .....	20
- (fonction de) .....	122
<b>Laplace</b> .....	19, 31, 43
<b>Larmor</b> (précession de) .....	120
lois d'échelle .....	326
longueur d'échange .....	154
longueur de corrélation .....	326
<b>Lorentz</b>	
- (champ de) .....	56
- (force de) .....	56
- (microscopie de) .....	40, 182

## M

magnétisme	
- itinérant .....	259, 279, 311
- localisé .....	115, 259, 309
magnétoélastique .....	(voir couplage, effet)
magnétoencéphalographie .....	23
magnéto-optique .....	23, 27, 177, 391
magnétorésistance .....	442
- géante .....	27, 183, 448
magnétostatique .....	29
magnétostriction ...	111, 172, 245, 323, 339, 353

masse magnétique ..... 18, 37, 42, 68  
**Matteuci** (effet) ..... 348  
**Maxwell**  
 - (équations de) ..... 19, 60  
 - (relations de) ..... 321  
 mémoire ..... (voir enregistrement)  
 métamagnétisme ..... 136  
 métaux de transition ..... 281, 313  
 microbobine ..... 23  
 micromagnétisme ..... 52, 173  
 microscopie en champ proche ..... 430  
 microsquid ..... 26  
 modélisation ..... 231  
 modulation ..... 407  
 moment  
 - cinétique ..... 20, 118  
 - effectif ..... 124  
 - magnétique ..... 19, 37 à 40,  
 ..... 64, 121, 249, 251, 258, 264, 297  
 monodomaine ..... 103, 172  
**Mott**  
 - (isolant de) ..... 294, 446  
 - (transition de) ..... 446  
 multicouche ..... 26, 451  
 multiplet ..... 256  
 mutuelle induction ..... 63

## N

nanomatériaux ..... 23  
 nanostructure ..... 25  
 nanoparticule ..... 26  
 nappe de courant ..... 34, 35f  
**Néel** ..... 20, 138, 213, 233  
 - (paroi de) ..... 166f  
 - (température de) ..... 91, 132  
 notation spectroscopique ..... 257  
 nucléation ..... 223

## O

onde  
 - de spin ..... 120  
 orbitales ..... 260, 262, 291, 308  
 ordre magnétique ..... 20, 126, 325f

## P

paléomagnétisme ..... 25  
 paramagnétisme ..... 20, 120  
 paramètre d'ordre ..... 324  
 paroi ..... 156  
 - à 90° ..... 158  
 - à 180° ..... 157  
 - de Bloch ..... 97, 157  
 - de Néel ..... 166  
 - étroite ..... 163

### Pauli

- (paramagnétisme de) ..... 261, 283  
 - (principe d'exclusion de) ..... 280  
 perméabilité ..... 30, 49  
 perméance ..... 54  
 permittivité ..... 397  
 piégeage de paroi ..... 223f  
 piézomagnétisme ..... 323, 348  
*pinning* ..... (voir piégeage)  
**Planck** (constante de) ..... 250  
**Poisson** ..... 18  
 - (équation de) ..... 43  
 polarisation magnétique ..... 42  
 pôle magnétique ..... 16, 17  
 potentiel aléatoire ..... 234f  
 potentiel vecteur ..... 33  
 précession ..... 118, 120  
**Preisach** (modèle de) ..... 231

## Q

quadrupolaire (moment) ..... 275  
*quenching* ..... (voir trempe)

## R

**Rayleigh** ..... 430  
 - (cycle de) ..... 228f  
 - (lois de) ..... 227  
 rayonnement synchrotron ..... 179  
 rayons X ..... 178, 396, 420  
 refroidissement magnétique ..... 321, 341  
 règle des phases ..... 102, 188, 196  
 relaxation ..... 108, 239-241

réductance .....	53
rémanence .....	16, 22, 229
renversement du temps .....	324
résistivité .....	110f, 437
résonance .....	120
<b>Rydberg</b> .....	252

## S

saturation .....	93, 123, 189
saut électronique .....	447
<i>self-inductance</i> .....	63
semi-conducteurs magnétiques .....	445
<b>Shubnikov-de Haas</b> (effet) .....	449
<b>Slater-Néel</b> (courbe de) .....	128f
<b>Slater-Pauling</b> (courbe de) .....	302f
<b>Snoek</b> (modèle de) .....	245f
solénoïde .....	20, 36, 55f
sous-réseau .....	91, 93, 132
spectre magnétique .....	17f, 38f
spéromagnétisme .....	142
spérimagnétisme .....	142
<i>spin</i> .....	20, 91, 250
<i>spin-flop</i> .....	136
<i>spin-flip</i> .....	137
<b>Stevens</b>	
- (coefficients et opérateurs de) .....	273
<b>Stoner</b> (critère de) .....	285, 313
<b>Stoner-Wohlfarth</b> (modèle de) .....	201
structure magnétique modulée .....	141
superéchange .....	309
superparamagnétisme .....	125
supraconducteur .....	21, 23
supraconductivité .....	21
susceptibilité .....	48-50,
..... 117, 122, 131, 134, 138, 283	
- initiale .....	227
- réversible .....	227f
- superposée .....	189, 200
symétrie .....	155, 272, 295, 324, 351

## T

température	
- de compensation .....	94, 139
- critique .....	21
- d'ordre .....	(voir Curie, Néel)
terme (spectroscopique) .....	255
terme d'échange .....	153.
tête d'enregistrement .....	25
théorème de réciprocité .....	73
thermodynamique .....	317
topographie .....	178 à 186, 179f, 181f, 420
traînage magnétique .....	108, 237
transducteur .....	381
transition isolant-métal .....	446

## U

unités physiques .....	19
------------------------	----

## V

ventouse magnétique .....	82, 87
<b>Verdet</b> (constante de) .....	393
verre de spin .....	25, 299
vieillessement .....	237
viscosité magnétique .....	239
<b>Voigt</b> (effet) .....	394

## W - Z

<b>Weiss</b> .....	20, 127, 155, 231
- (domaine de) .....	92, 97
<b>Wiedemann</b>	
- (effet) .....	348, 373
- (effet inverse) .....	348, 379
<b>Zeeman</b> (effet) .....	72, 269

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 - Le magnétisme, des origines à nos jours</b> .....	13
1. La découverte des pierres d'aimant et l'observation du phénomène de magnétisme au cours des âges .....	13
1.1. Les objets en fer et en pierre d'aimant dans la haute antiquité .....	13
1.2. Les premiers écrits traitant de la pierre d'aimant - Origine du nom «magnétisme» .....	14
1.3. Premières observations des phénomènes magnétiques.....	15
1.3.1. L'attraction magnétique.....	15
1.3.2. Le phénomène d'écrantage magnétique.....	15
1.3.3. La boussole.....	15
1.3.4. L'état des connaissances en 1779.....	17
2. L'apport du XIX <sup>e</sup> siècle .....	18
3. Le magnétisme au XX <sup>e</sup> siècle.....	20
4. Le magnétisme technique.....	22
Champs magnétiques .....	22
Aimants.....	24
Nouvelles applications .....	24
5. Nouvelles voies de recherche.....	25
5.1. Nanostructures magnétiques.....	25
5.2. Multicouches magnétiques .....	26
5.3. Magnétisme moléculaire.....	27
5.4. Autres voies de recherche.....	27
Références.....	28
<b>Chapitre 2 - Magnétostatique</b> .....	29
1. Magnétostatique des courants et de la matière .....	29
1.1. Magnétostatique des courants dans le vide .....	29
1.1.1. Lois fondamentales de la magnétostatique : l'induction magnétique .....	30
1.1.2. Théorème d'Ampère - Champ magnétique .....	32
1.1.3. Conservation du flux - Potentiel vecteur .....	33
1.1.4. Conditions aux limites pour B et A à la traversée d'une nappe de courant .....	34
1.1.5. Induction et champ produits par un circuit filiforme Coefficient de champ d'une bobine .....	34
1.1.6. Etude de quelques distributions simples de courant .....	34
1.1.7. Induction et champ créés à grande distance par des courants confinés dans un volume fini : moment magnétique, dipôle magnétique, masse magnétique .....	37
1.1.8. Relations fondamentales dans l'approche coulombienne.....	39
1.2. Magnétostatique de la matière .....	40
1.2.1. Moment magnétique, aimantation et induction associée à la matière.....	40
1.2.2. Détermination de B (et A) à partir des courants liés : approche ampérienne.....	41
1.2.3. Le champ magnétique H dans la matière aimantée.....	42
1.2.4. Détermination de H à partir des masses magnétiques équivalentes : approche coulombienne .....	42
1.2.5. Application à deux cas simples.....	44
1.2.6. Le champ démagnétisant $H_d$ .....	45
1.2.7. Coefficient de champ démagnétisant.....	46

1.3.	Réponse de la matière à un champ magnétique .....	47
1.3.1.	Choix du champ magnétique $H$ comme variable indépendante .....	47
1.3.2.	Différents types de comportement magnétique d'une substance .....	48
1.3.3.	Cas de substances anisotropes .....	49
1.3.4.	Remarque.....	50
1.3.5.	Correction du champ démagnétisant - Notion de susceptibilité externe .....	50
1.4.	Problème général de la détermination de $B$ et $M$ .....	51
1.5.	Approximation des circuits magnétiques .....	53
2.	Energie, forces et couples au sein des systèmes magnétiques .....	55
2.1.	Le couplage électromagnétique dans le vide .....	55
2.1.1.	Force et champ de Lorentz.....	56
2.1.2.	Champ électrique créé dans un conducteur en mouvement par une induction magnétique $B$ .....	56
2.1.3.	Champ électrique créé par une induction variable.....	58
2.1.4.	Induction magnétique créée par un champ électrique variable .....	59
2.1.5.	Equations de Maxwell dans le vide .....	60
2.1.6.	Couplage électromagnétique dans la limite des phénomènes lents Energie magnétique.....	60
2.1.7.	Forces déduites de l'énergie - Nature de l'énergie magnétique.....	62
2.1.8.	Auto-induction.....	63
2.1.9.	Mutuelle induction .....	63
2.1.10.	Moments magnétiques spontané et induit .....	64
2.1.11.	Energie d'un moment rigide dans une induction donnée .....	65
2.1.12.	Energie d'interaction dipolaire .....	65
2.2.	Energie, forces et couples dans les systèmes magnétiques .....	67
2.2.1.	Calcul direct des couples et des forces dans un système magnétique .....	68
2.2.2.	L'énergie d'aimantation de la matière et l'énergie de champ démagnétisant.....	69
2.2.3.	Energie de Zeeman et énergie magnétostatique .....	72
2.2.4.	Couple magnétostatique agissant sur l'aimantation .....	72
2.2.5.	Energie d'un système magnétique complet.....	73
3.	Calculs annexes .....	74
3.1.	Calcul de $B_m$ hors de la matière .....	74
3.2.	Calcul de $B_m$ dans la matière.....	75
3.3.	Calcul de l'intégrale $\Sigma$ .....	76
	Exercices.....	77
	Solutions des exercices.....	83
	Références.....	88
	<b>Chapitre 3 - Phénoménologie du magnétisme à l'échelle macroscopique.....</b>	<b>89</b>
1.	Présentation de quelques types de comportements magnétiques.....	89
1.1.	Diamagnétisme.....	89
1.2.	Paramagnétisme .....	90
1.3.	Antiferromagnétisme .....	91
1.4.	Ferromagnétisme.....	92
1.5.	Ferrimagnétisme.....	93
1.6.	Propriétés magnétiques des éléments purs à l'état atomique.....	94
1.7.	Propriétés magnétiques des édifices polyatomiques.....	94
2.	Phénoménologie des matériaux fortement magnétiques.....	96
2.1.	Courbes d'aimantation isothermes.....	96
2.2.	Domaines de Weiss et parois de Bloch .....	97
2.3.	Anisotropie magnétique.....	99
2.3.1.	Cas de la Symétrie cubique.....	99
2.3.2.	Cas de la symétrie hexagonale.....	100
2.3.3.	Cas de la symétrie quadratique .....	100
2.3.4.	Cas de la symétrie uniaxiale .....	101
2.3.5.	Quelques remarques sur l'anisotropie magnétique.....	101

2.4. Effets liés à l'anisotropie - Notion de champ d'anisotropie - Règle des phases.....	102
2.4.1. Matériau uniaxial de symétrie quadratique ou hexagonale .....	102
2.4.2. Anisotropie magnétocristalline en symétrie cubique .....	106
2.4.3. Anisotropie magnétique en phase paramagnétique.....	107
2.5. Phénomènes dépendant du temps.....	107
2.5.1. Traînage de fluctuations thermiques.....	108
2.5.2. Traînage de diffusion .....	109
3. Phénomènes physiques associés au magnétisme.....	110
Exercices.....	112
Solutions des exercices.....	113
Références.....	113
<b>Chapitre 4 - Phénoménologie du magnétisme à l'échelle microscopique.....</b>	<b>115</b>
1. Le modèle classique du diamagnétisme : cas des électrons localisés.....	115
2. Systèmes comportant des moments magnétiques localisés sans interaction.....	118
2.1. Effet d'un champ uniforme sur un moment magnétique : la précession.....	118
2.2. Cas d'une assemblée de moments magnétiques localisés sans interaction : le paramagnétisme de Curie.....	120
2.3. Le superparamagnétisme .....	125
3. Interactions d'échange.....	126
3.1. Généralités.....	126
3.2. L'interaction d'échange et l'approximation du champ moléculaire .....	126
3.3. Aspects expérimentaux .....	128
4. Le ferromagnétisme dans le modèle de champ moléculaire.....	129
5. L'antiferromagnétisme dans le modèle de champ moléculaire.....	132
5.1. Température de Néel.....	133
5.2. Susceptibilité paramagnétique.....	134
5.3. Susceptibilité perpendiculaire.....	134
5.4. Susceptibilité parallèle.....	135
5.5. Le métamagnétisme .....	136
6. Le ferrimagnétisme dans le modèle de champ moléculaire.....	137
7. Autres types d'arrangements magnétiques (hélimagnétisme, structures modulées en amplitude ...) dans le modèle de champ moléculaire.....	139
7.1. Structure hélimagnétique .....	140
7.2. Structure modulée sinusoïdalement en amplitude .....	141
7.3. Structures magnétiques observées dans les substances amorphes .....	142
8. Les deux grandes familles de matériaux magnétiques.....	143
9. Les tracés d'Arrott.....	144
9.1. Matériau n'ayant pas d'aimantation spontanée.....	144
9.2. Matériau présentant une faible aimantation spontanée.....	145
10. Conclusions.....	147
Exercices.....	148
Solutions des exercices.....	148
Références.....	149
<b>Chapitre 5 - Ferromagnétisme d'un système idéal.....</b>	<b>151</b>
1. Introduction.....	151
2. Le principe des configurations ferromagnétiques ou l'art du compromis .....	152
2.1. L'interaction d'échange .....	152
2.2. L'interaction dipolaire magnétique.....	153
2.3. Compétition entre interactions d'échange et interactions dipolaires .....	154
2.4. Rôle de l'anisotropie magnétocristalline .....	154
2.5. Les solutions de compromis .....	155

3. Les parois entre domaines .....	156
3.1. Parois des milieux ordinaires (parois de Bloch) .....	157
3.1.1. Géométrie des parois de Bloch .....	157
3.1.2. Evaluation de l'énergie et de la largeur de paroi .....	158
3.1.3. Calcul exact de l'énergie et de la largeur de paroi .....	160
3.2. Les parois dans les milieux très anisotropes (parois étroites) .....	163
3.3. Les parois dans les matériaux en couches très minces .....	165
4. Les configurations en domaines .....	168
4.1. Configurations en domaines dans les cristaux uniaxes .....	168
4.2. Domaines de fermeture .....	171
5. Les configurations magnétiques dans les particules de petites dimensions	
Particules monodomaines .....	172
5.1. Configurations stables les plus probables .....	173
5.2. Particules ellipsoïdales et anisotropie de forme .....	175
6. Observation des domaines et des parois .....	176
6.1. Domaines ferro- et ferrimagnétiques .....	176
6.1.1. La méthode de Bitter .....	176
6.1.2. Observation de domaines magnétiques par les effets magnétooptiques .....	177
6.1.3. Observation de domaines magnétiques par les rayons X .....	178
6.1.4. Observation de domaines magnétiques par les neutrons .....	180
6.1.5. Observation de domaines magnétiques par les électrons .....	182
6.1.6. Observation des domaines magnétiques par l'anisotropie d'une précipitation .....	183
6.2. Observation de domaines antiferromagnétiques .....	183
6.2.1. Observation des domaines antiferromagnétiques par microscopie optique .....	183
6.2.2. Observation des domaines antiferromagnétiques par les rayons X et les électrons .....	184
6.2.3. Observation des domaines antiferromagnétiques par les neutrons .....	185
7. De l'état macroscopiquement désaimanté à l'état saturé :	
les processus d'aimantation sous l'effet d'un champ extérieur .....	186
7.1. Effet d'un champ appliqué parallèlement à l'axe facile dans un système uniaxe :	
aimantation par déplacement de parois .....	187
7.1.1. Résultat d'observations :	
grossissement des domaines parallèles au champ au détriment des autres .....	187
7.1.2. La loi de comportement : droite de champ démagnétisant .....	188
7.1.3. Le mécanisme de déplacement de parois dans les systèmes parfaits où l'échange est dominant .....	190
7.1.4. Le mécanisme de déplacement de parois dans les systèmes parfaits à très forte anisotropie intrinsèque .....	192
7.2. Effet du champ appliqué perpendiculairement à l'axe facile dans un système uniaxe : aimantation par rotation des moments .....	193
7.3. Champ appliqué obliquement par rapport à l'axe facile .....	194
7.4. Systèmes monocristallins cubiques (illustration de la règle des phases de Néel) .....	196
7.5. Processus d'aimantation dans les systèmes polycristallins .....	198
8. Retournement de l'aimantation à partir de l'état saturé et coercitivité .....	200
8.1. Réversibilité ou irréversibilité ? .....	201
8.2. Retournement par rotation collective uniforme des moments (rotation de l'aimantation à saturation) : modèle de Stoner-Wohlfarth .....	201
8.2.1. Présentation et mise en équation du système modèle .....	201
8.2.2. Champ appliqué antiparallèlement à $M_r$ .....	202
8.2.3. Champ inverse appliqué obliquement par rapport à la direction de $M_r$ .....	204
8.3. D'autres modes de retournement collectif sont-ils possibles ? .....	206
8.3.1. Systèmes possédant une forte anisotropie magnétocristalline : inégalité de Brown .....	206
8.3.2. Systèmes sans anisotropie magnétocristalline .....	207
Références .....	208

**Chapitre 6 - Irréversibilité des processus d'aimantation et hystérésis**

<b>Chapitre 6 - Irréversibilité des processus d'aimantation et hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques réels : le rôle des défauts</b> .....	211
1. Introduction : le modèle du matériau parfait n'est pas suffisant .....	211
2. Le rôle des défauts dans le phénomène d'irréversibilité du processus d'aimantation par déplacement de parois .....	213
2.1. Principe du modèle : mise en œuvre d'un potentiel oscillant irrégulier .....	214
2.2. Mécanismes d'accrochage des parois sur des défauts particuliers .....	216
2.2.1. Champ de contraintes inhomogène : mise en jeu d'une anisotropie uniaxiale induite modifiant localement l'énergie de paroi .....	216
2.2.2. Lacunes ou inclusions non magnétiques de grande taille : réductions locales de l'aire des parois et de l'énergie magnétostatique .....	217
2.3. Le champ critique de «décrochage» associé au processus de déplacement non libre des parois.....	219
2.3.1. Champ coercitif associé au modèle du potentiel oscillant .....	219
2.3.2. Le champ critique dans le cas d'une paroi déformable .....	220
3. Le rôle des défauts dans le phénomène de retournement de l'aimantation à partir de l'état saturé.....	222
3.1. Paradoxe de Brown .....	222
3.2. Défauts et nucléation.....	223
3.2.1. Les défauts donnant lieu à la nucléation de domaines inverses en champ nul .....	223
3.2.2. Les défauts ne donnant lieu à nucléation que dans un champ inverse notable .....	226
4. Hystérésis et irréversibilité : expérience et modèles simples.....	226
4.1. Comportements observés .....	226
4.1.1. La courbe de première aimantation, tracée à partir d'un état désaimanté .....	226
4.1.2. L'aimantation d'une substance donnée peut prendre toutes les valeurs contenues dans son cycle d'hystérésis majeur .....	229
4.1.3. La courbe d'aimantation anhystérotique.....	230
4.2. Modélisation du comportement observé dans le domaine de Rayleigh.....	231
4.2.1. Représentation de Preisach .....	231
4.2.2. Théorie de l'hystérésis dans le domaine de Rayleigh (potentiel aléatoire de Néel).....	233
4.3. Des matériaux doux aux matériaux durs .....	235
5. Les traînages magnétiques : des effets à la fois retardés et amplifiés.....	237
5.1. Des effets d'activation thermique à l'origine des deux sortes de traînage magnétique.....	238
5.2. Le traînage magnétique de fluctuations	
Exemple des matériaux durs au voisinage du champ coercitif.....	239
5.2.1. Fondements de l'analyse du comportement observé : application au retournement d'aimantation dans les aimants permanents.....	239
5.2.2. Variation de l'aimantation avec le temps comparée à la variation de l'aimantation avec le champ : notion de champ de fluctuations .....	242
5.3. Le traînage magnétique de diffusion .....	244
5.3.1. Une anisotropie uniaxe localisée, thermiquement activée.....	244
5.3.2. La désaccommodation.....	246
Références.....	247
<b>Chapitre 7 - Magnétisme dans le modèle des électrons localisés</b> .....	249
1. Magnétisme de l'atome ou de l'ion libre .....	249
1.1. Cas d'un seul électron.....	249
1.1.1. Moment magnétique orbital .....	249
1.1.2. Moment magnétique de spin .....	251
1.1.3. Les états électroniques individuels ou atomes hydrogénoïdes .....	252
1.2. Atome ayant un nombre quelconque d'électrons .....	253
1.2.1. Méthode de Hartree - Approximation du champ central : les configurations.....	253
1.2.2. Termes .....	255
1.2.3. Couplage spin-orbite .....	256
1.2.4. Multiplets.....	256

2. Le magnétisme des atomes liés .....	259
2.1. Magnétisme localisé et magnétisme itinérant .....	259
2.2. Substances non magnétiques .....	260
2.3. Quelles sont donc les substances qui peuvent présenter un magnétisme notable ? .....	261
2.4. Les deux séries fondamentales d'éléments magnétiques .....	261
2.4.1. Distribution spatiale des orbitales électroniques .....	262
2.4.2. Influence des atomes voisins : effets de champ cristallin .....	262
3. Quelques exemples de moments magnétiques localisés .....	264
3.1. Les oxydes de fer .....	264
3.2. Autres composés ioniques de métaux 3d .....	264
3.3. Composés ioniques à base d'éléments terres rares .....	265
3.4. Composés intermétalliques à base de terres rares .....	266
3.5. Métaux de terres rares .....	267
4. L'anisotropie magnétocristalline : le champ électrique cristallin .....	267
4.1. Cas d'un électron d soumis au potentiel électrostatique d'un environnement uniaxial .....	268
4.2. Ordres de grandeur du champ cristallin .....	270
4.3. Effets du champ cristallin sur l'anisotropie magnétique des éléments 3d .....	271
4.3.1. Extinction du moment orbital .....	271
4.3.2. Cas d'un état $L = 2$ .....	271
4.3.3. Cas des ions $Fe^{3+}$ et $Mn^{2+}$ dans des isolants (ferrites par exemple) .....	271
4.3.4. Etats de bas spin .....	271
4.3.5. Influence de la symétrie .....	272
4.4. Effets du champ cristallin sur les ions des éléments de terres rares .....	272
4.4.1. Cas d'un multiplet $J = 4$ et $B_2^0 < 0$ .....	273
4.4.2. Cas d'un multiplet $J = 4$ et $B_2^0 > 0$ .....	274
4.4.3. Cas d'un multiplet $J = 5/2$ et $B_2^0 > 0$ .....	274
4.5. L'anisotropie des composés 4f uniaxiaux de symétrie hexagonale ou quadratique .....	275
Exercices .....	277
Références .....	278
<b>Chapitre 8 - Magnétisme dans le modèle des électrons itinérants .....</b>	<b>279</b>
1. Généralités .....	279
2. Propriétés particulières des métaux magnétiques .....	280
2.1. Les très faibles ferromagnétiques .....	281
2.2. Les métaux de transition et leurs alliages .....	281
2.3. Les métaux de terres rares .....	281
2.4. Les composés de terres rares et de métaux de transition .....	282
3. Le magnétisme des électrons totalement libres .....	282
3.1. Description simple d'un métal .....	282
3.2. Notion de densité d'états .....	283
3.3. Paramagnétisme de Pauli .....	283
3.4. Diamagnétisme de Landau .....	284
4. Le modèle de Stoner du ferromagnétisme itinérant .....	284
4.1. Critère d'instabilité ferromagnétique .....	284
4.2. Susceptibilité magnétique d'un métal en présence d'interaction .....	285
4.3. Solution ferromagnétique .....	286
4.4. Applications .....	288
5. Généralisation du critère de Stoner .....	288
5.1. Théorie de Stoner et théorie du champ moléculaire .....	288
5.2. Susceptibilité généralisée .....	288
5.3. Le champ moléculaire local .....	289
5.4. Susceptibilité dynamique .....	289
5.5. Le champ moléculaire local instantané .....	290

6. Les métaux de transition.....	291
6.1. La bande d des métaux de transition .....	291
6.2. Origine du magnétisme .....	293
6.3. Champ cristallin .....	295
6.4. Anisotropie magnétocristalline.....	296
7. Moment magnétique localisé en magnétisme itinérant.....	297
7.1. Le magnétisme des impuretés.....	297
7.1.1. Notion de densité d'états locale.....	297
7.1.2. Magnétisme d'une impureté .....	298
7.2. L'effet Kondo.....	298
7.3. Les verres de spin et la frustration.....	299
7.4. Moments magnétiques et métaux de transition.....	300
8. Magnétisme et environnement .....	301
9. Magnétisme des alliages de métaux de transition .....	302
10. Conclusion .....	305
Références.....	305
<b>Chapitre 9 - Les interactions d'échange .....</b>	<b>307</b>
1. Généralités sur les fonctions d'onde à plusieurs électrons .....	307
2. Interactions d'échange dans les isolants.....	309
2.1. Le superéchange.....	309
2.2. L'échange antisymétrique .....	310
3. Interactions d'échange dans les métaux .....	311
3.1. Interaction indirecte entre moments 4f (Interaction RKKY) .....	311
3.2. Interaction d'échange dans les métaux 3d .....	313
3.3. Double échange .....	314
4. Résumé.....	315
Références.....	315
<b>Chapitre 10 - Approche thermodynamique du magnétisme .....</b>	<b>317</b>
1. Rappels de thermodynamique .....	317
2. Potentiels thermodynamiques pour un système magnétique indéformable.....	319
3. Relations de Maxwell et inégalités .....	321
4. Cas du solide magnétique déformable .....	322
5. Les phénomènes de couplage.....	323
6. Énergie libre «à la Landau» .....	324
7. Exposants critiques et lois d'échelle.....	326
8. Anomalies magnétiques vers $T_C$ .....	328
9. Le modèle du champ moléculaire à l'épreuve de l'expérience.....	329
Exercice.....	330
Solution de l'exercice.....	330
Références.....	332
<b>Chapitre 11 - Couplage magnétocalorique et effets associés .....</b>	<b>333</b>
1. Variations thermiques de l'aimantation et chaleur spécifique.....	333
2. L'effet magnétocalorique.....	335
3. Effets thermiques irréversibles.....	337
4. Effets dimensionnels associés à l'effet magnétocalorique .....	339
5. Application des effets magnétothermiques.....	340
Exercices.....	340
Solutions des exercices.....	342
Références.....	343

<b>Chapitre 12 - Les effets magnétoélastiques</b> .....	345
1. Les principaux effets magnétoélastiques.....	345
1.1. Anomalie de dilatation - Magnétostriction spontanée et forcée d'échange.....	345
1.2. Influence de la pression hydrostatique sur les propriétés magnétiques.....	346
1.3. Anomalies sur les constantes élastiques : effet morphique.....	346
1.4. Magnétostriction anisotrope fortement sensible au champ magnétique.....	346
1.5. Influence d'une contrainte uniaxiale sur les propriétés magnétiques.....	347
1.6. Autres effets magnétoélastiques.....	348
2. Origine microscopique du couplage magnétoélastique.....	348
2.1. Couplage magnétoélastique d'échange isotope.....	349
2.2. Couplage magnétoélastique anisotrope.....	350
2.2.1. Principe du calcul de l'énergie de couplage.....	350
2.2.2. Application au cas de la symétrie cubique.....	350
3. Notation symétrisée de Callen.....	351
4. Magnétostriction.....	353
4.1. La magnétostriction d'échange en symétrie cubique.....	353
4.2. La magnétostriction anisotrope en symétrie cubique.....	355
4.2.1. Mesure des coefficients de magnétostriction en symétrie cubique.....	357
4.2.2. Variation thermique de la magnétostriction.....	358
4.2.3. Variations sous champ magnétique de la magnétostriction anisotrope en symétrie cubique.....	359
4.3. La magnétostriction des cristaux hexagonaux.....	361
4.4. La magnétostriction des substances isotropes.....	362
4.4.1. Courbes de magnétostriction pour une substance intrinsèquement isotope.....	362
4.4.2. Influence de l'état désaimanté sur la courbe de magnétostriction.....	364
4.4.3. Effet de la température sur la magnétostriction.....	366
4.5. La magnétostriction des matériaux polycristallins.....	366
4.6. Effets magnétoélastiques observés sur les surfaces et dans les couches minces.....	368
4.7. Magnétostriction dipolaire, ou effet de forme.....	370
4.8. Remarques sur la mesure de la magnétostriction.....	372
4.8.1. Contraintes internes liées à la magnétostriction.....	372
4.8.2. Détermination précise de la magnétostriction de Joule.....	372
5. Torsion d'un fil aimanté parcouru par un courant : effet Wiedemann.....	373
6. Effets magnétoélastiques inverses et effet $\Delta E$ .....	374
6.1. Effet d'une pression hydrostatique sur une substance magnétique.....	374
6.2. Effet d'une contrainte uniaxiale sur la courbe d'aimantation.....	375
6.2.1. Cas d'une substance de symétrie cubique.....	375
6.2.2. Cas d'une substance isotope.....	376
6.2.3. Cas d'un matériau polycristallin.....	378
6.3. Effet de la torsion sur un barreau aimanté (effets Wiedemann inverse et Matteuci).....	379
6.4. Ecart à la loi de Hooke pour les solides ferromagnétiques : l'effet $\Delta E$ .....	380
7. Modélisation des transducteurs magnétostrictifs.....	381
7.1. Coefficient de couplage magnétomécanique.....	382
7.2. Densité d'énergie élastique dynamique hors résonance.....	384
7.3. Couplage magnétoélastique à la résonance.....	384
Appendice : rappels d'élasticité linéaire.....	385
Exercices.....	387
Solutions des exercices.....	388
Références.....	390
<b>Chapitre 13 - Les effets magnéto-optiques</b> .....	391
1. Présentation des effets magnéto-optiques.....	391
1.1. Effets en transmission.....	392
1.1.1. Effet Faraday.....	392
1.1.2. Biréfringence magnétique rectiligne quadratique.....	394
1.1.3. Biréfringence magnétique rectiligne linéaire.....	394

1.2.	Effets en réflexion .....	395
1.2.1.	Effet Kerr polaire.....	395
1.2.2.	Effet Kerr longitudinal .....	395
1.2.3.	Effet Kerr transverse .....	395
1.3.	Effets magnéto-optiques non linéaires .....	396
1.4.	Diffraction magnétique et dichroïsme magnétique des rayons X .....	396
2.	Traitement phénoménologique.....	397
2.1.	Equation de propagation - Modes propres .....	397
2.2.	Effets en transmission .....	399
2.2.1.	Effet Faraday .....	399
2.2.2.	Effet Voigt.....	400
2.3.	Effets Kerr .....	401
2.3.1.	La configuration fondamentale de l'effet Kerr transverse .....	402
2.3.2.	La configuration fondamentale de l'effet Kerr longitudinal.....	402
2.3.3.	La configuration fondamentale de l'effet Kerr polaire .....	402
2.4.	Systèmes de couches minces .....	403
3.	Présentation physique.....	403
4.	Mesure et ordre de grandeur des effets magnéto-optiques.....	406
4.1.	Les méthodes de modulation .....	407
4.1.1.	La modulation d'amplitude (ou d'intensité).....	407
4.1.2.	La modulation de phase (et de direction de polarisation).....	408
4.2.	Détermination magnéto-optique de la direction des axes de facile aimantation .....	409
4.3.	Mesure de l'angle de rotation $\Theta$ d'une direction de polarisation rectiligne (cas des effets Faraday, Kerr polaire et longitudinal).....	409
4.4.	Mesure de l'ellipticité .....	411
4.5.	Mesure d'une variation d'intensité (cas de l'effet Kerr transverse, des dichroïsmes circulaire et rectiligne).....	411
4.6.	Mesure du déphasage et de sa variation .....	412
4.7.	Quelques ordres de grandeurs.....	412
4.7.1.	Effet Faraday .....	413
4.7.2.	Effet Kerr polaire.....	414
4.7.3.	Effet Kerr longitudinal .....	415
4.7.4.	Effet Kerr transverse .....	416
5.	Utilisations et applications des effets magnéto-optiques .....	417
5.1.	Utilisations en physique .....	417
5.1.1.	Caractérisation magnétique - Hystérésigraphie.....	417
5.1.2.	Évolution de l'aimantation dans les systèmes homogènes Transitions de phases .....	418
5.1.3.	Magnéto-optique en diffraction .....	418
5.1.4.	Résonances .....	418
5.1.5.	Imagerie de domaines magnétiques.....	418
5.1.6.	Cartes de champ magnétique .....	421
5.2.	Applications.....	421
5.2.1.	Isolateurs optiques.....	421
5.2.2.	Capteurs de champ magnétique .....	423
5.2.3.	Contrôle non destructif.....	424
5.2.4.	Enregistrement magnéto-optique.....	424
	Appendice : Optique des matériaux non magnétiques.....	425
	Références.....	432
	<b>Chapitre 14 - Résistivité magnétique, magnétorésistance, effet Hall .....</b>	<b>437</b>
1.	Définitions.....	437
1.1.	Résistivité électrique .....	437
1.2.	Magnétorésistance.....	437
1.3.	Effet Hall .....	438
1.4.	Effet Hall planaire .....	438

2. Transport dans les matériaux métalliques magnétiques.....	439
2.1. Résistivité magnétique.....	439
2.2. Cas d'un moment localisé.....	439
2.3. Magnétisme itinérant, alliages de métaux de transition.....	440
2.3.1. Cas d'un métal magnétiquement ordonné.....	440
2.3.2. Fluctuations de spin et effet Kondo.....	440
2.4. Magnétorésistance.....	442
2.4.1. Effet cyclotron.....	442
2.4.2. Termes dépendant de l'aimantation - Désordre de spin.....	443
2.5. Effet Hall dans un matériau magnétique.....	443
3. Magnéto-transport dans les semiconducteurs.....	444
3.1. Semi-conducteurs non magnétiques.....	444
3.2. Semi-conducteurs magnétiques.....	445
4. Les transitions métal-isolant dans les matériaux magnétiques.....	445
4.1. Composés semi-conducteurs de métaux de transition.....	445
4.2. Types de transitions isolant-métal.....	446
4.2.1. La transition de Mott «classique».....	446
4.2.2. Les transitions par croisement de bandes (EuO au point de Curie).....	446
4.2.3. Les transitions de Mott-Hubbard.....	446
4.2.4. Les transitions de type Anderson dans les systèmes désordonnés.....	447
4.2.5. Un exemple : la magnétorésistance géante des manganites.....	448
4.3. Les demi-métaux.....	448
5. Effets quantiques.....	449
5.1. Effet Shubnikov-de Haas.....	449
5.2. Effet Hall quantique.....	450
6. Applications.....	451
6.1. Capteurs de champ à effet Hall.....	451
6.2. Capteurs magnétorésistifs.....	451
Remarque finale.....	451
Références.....	452
<b>Annexes</b> .....	455
1. Symboles utilisés dans le texte.....	455
2. Unités et constantes universelles.....	459
2.1. Conversion des unités MKSA en système CGS et autres systèmes d'unités d'usage courant.....	459
2.2. Quelques valeurs numériques utiles.....	460
3. Tableau périodique des éléments.....	461
4. Susceptibilités magnétiques.....	463
5. Matériaux ferromagnétiques.....	467
6. Fonctions spéciales.....	469
6.1. Harmoniques sphériques.....	469
6.2. Polynômes de Legendre.....	471
6.3. Fonction de Langevin.....	471
6.4. Fonctions de Brillouin.....	472
6.5. Fonctions de Bessel modifiées.....	473
7. Equations de Maxwell.....	475
<b>Bibliographie générale</b> .....	477
<b>Index des matériaux et des sujets</b> .....	481
<b>Table des matières</b> .....	487