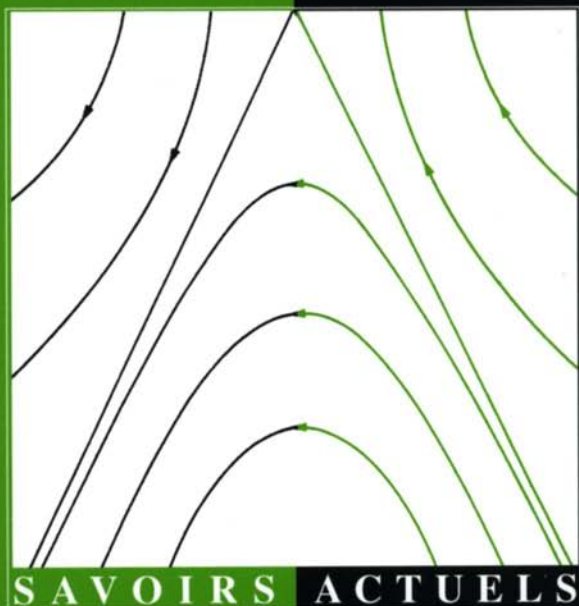


PHYSIQUE

Michel LE BELLAC

# Des phénomènes critiques • aux champs de jauge •

*Une introduction aux méthodes et aux applications  
de la théorie quantique des champs*



SAVOIRS ACTUELS

 CNRS EDITIONS

  
EDP  
SCIENCES

# Des phénomènes critiques aux champs de jauge



# Des phénomènes critiques aux champs de jauge

---

Michel Le Bellac

*Université de Nice*

S A V O I R S    A C T U E L S

---

EDP Sciences / CNRS ÉDITIONS

Troisième tirage corrigé, janvier 2002

© 2002, **EDP Sciences**, 7 avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,  
91944 les Ulis Cedex A.

**CNRS ÉDITIONS**, 15, rue Malebranche, 75005, Paris.

1<sup>re</sup> édition :

© 1988, **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

ISBN : 2-86883-359-4

ISBN : 2-271-06023-0

# Table des matières

<i>Avant-propos</i> .....	15
<i>Références générales</i> .....	19
<i>Notations et conventions</i> .....	21

## PREMIÈRE PARTIE. PHÉNOMÈNES CRITIQUES

### CHAPITRE I. INTRODUCTION AUX PHÉNOMÈNES CRITIQUES

<b>A. Transition ferromagnétique</b> .....	25
<b>B. Modèle d'Ising</b> .....	28
B.1. Description du modèle .....	28
B.2. Modèle d'Ising à une dimension .....	30
B.3. Fonction de corrélation du modèle d'Ising à une dimension .....	32
B.4. Modèle d'Ising à deux dimensions .....	34
<b>C. Champ moyen</b> .....	34
C.1. Equation du champ moyen .....	34
C.2. Transition ferromagnétique en champ moyen .....	36
C.3. Comportement au voisinage de la transition .....	38
C.4. Exposants critiques $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\delta$ .....	41
<b>D. Fonctions de corrélation</b> .....	43
D.1. Définition, fonction génératrice .....	43
D.2. Théorème fluctuation-dissipation .....	45
D.3. Mesure de la fonction de corrélation .....	46
D.4. Exposants critiques $\eta$ et $\nu$ .....	47
D.5. Transformation de Legendre .....	49
<b>E. Description qualitative des phénomènes critiques</b> .....	51
<i>Exercices</i> .....	55
<i>Notes et références</i> .....	59

## CHAPITRE II. THÉORIE DE LANDAU

<b>A. Hamiltonien de Ginzburg-Landau. Approximation de Landau</b> .....	62
A.1. Cas d'un seul site .....	62
A.2. Généralisation à $N$ sites .....	65
A.3. Formulation continue .....	68
<b>B. Théorie de Landau des transitions de phase</b> .....	71
B.1. Transitions du deuxième ordre .....	71
B.2. Transitions du premier ordre .....	71
<b>C. Fonctions de corrélation</b> .....	73
<b>D. Critique de l'approximation de Landau et critère de Ginzburg</b> .....	75
D.1. Critère de Ginzburg : première démonstration .....	75
D.2. Correction à la théorie de Landau .....	76
D.3. Critère de Ginzburg : deuxième démonstration .....	80
<i>Exercices</i> .....	82
<i>Notes et références</i> .....	88

## CHAPITRE III. GROUPE DE RENORMALISATION

<b>A. Notions fondamentales : blocs de spins, surface critique, points fixes</b> .....	91
A.1. Blocs de spins et transformations non linéaires .....	92
A.2. Transformations linéaires .....	95
A.3. Surface critique et points fixes .....	97
<b>B. Comportement au voisinage d'un point fixe. Exposants critiques</b> .....	100
B.1. Discussion élémentaire .....	101
B.2. Linéarisation au voisinage du point fixe .....	102
B.3. Fonction de corrélation en champ nul .....	105
B.4. Fonction de corrélation $B \neq 0$ .....	107
B.5. Energie libre .....	108
B.6. Lois d'échelle et remarques .....	110
<b>C. Modèle d'Ising sur réseau triangulaire et approximation des cumulants</b> .....	110

<b>D. Modèle gaussien</b> .....	114
D.1. Transformation dans l'espace de Fourier .....	115
D.2. Modèle gaussien .....	118
D.3. Point fixe gaussien .....	121
<b>E. Calcul des exposants critiques à l'ordre <math>\epsilon</math></b> .....	125
E.1. Point fixe non gaussien .....	125
E.2. Equations différentielles de renormalisation .....	126
E.3. Méthode de « raccordement » .....	128
<b>F. Champs marginaux et fonction <math>\beta(g)</math></b> .....	132
F.1. Equation différentielle pour un champ marginal .....	132
F.2. Fonction de corrélation .....	139
<i>Exercices</i> .....	142
<i>Notes et références</i> .....	149

## CHAPITRE IV. MODÈLES BIDIMENSIONNELS

<b>A. Modèle XY : étude qualitative</b> .....	153
A.1. Développement haute température .....	153
A.2. Développement basse température .....	155
A.3. Rôle des vortex .....	157
<b>B. Analyse par le groupe de renormalisation</b> .....	159
B.1. Modèle de Villain .....	159
B.2. Groupe de renormalisation pour le modèle XY .....	164
<b>C. Modèles-<math>\sigma</math> non linéaires</b> .....	167
<i>Exercices</i> .....	171
<i>Notes et références</i> .....	173

## DEUXIÈME PARTIE. THÉORIE DES PERTURBATIONS ET RENORMALISATION : CHAMP SCALAIRE EUCLIDIEN

### CHAPITRE V. DÉVELOPPEMENT PERTURBATIF. DIAGRAMMES DE FEYNMAN

<b>A. Théorème de Wick et fonctionnelle génératrice</b> .....	178
A.1. Fonction génératrice pour une seule variable .....	178
A.2. Théorème de Wick .....	180
A.3. Fonctionnelle génératrice .....	181

<b>B. Développement perturbatif de <math>G^{(2)}</math> et <math>G^{(4)}</math>. Diagrammes de Feynman</b>	184
B.1. Développement perturbatif pour une variable	184
B.2. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g$	185
B.3. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g^2$	190
B.4. Fonction de corrélation à quatre points $G^{(4)}$	194
B.5. Règles de Feynman dans l'espace des $k$	197
<b>C. Fonctions de corrélation connexes. Vertex propres</b>	201
C.1. Cumulants d'une distribution de probabilité	202
C.2. Fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes	202
C.3. Vertex propres et fonctionnelle génératrice	205
<b>D. Potentiel effectif. Développement en nombre de boucles</b>	211
D.1. Symétrie brisée et potentiel effectif	211
D.2. Développement en nombre de boucles	213
<b>E. Evaluation des intégrales de Feynman</b>	214
E.1. Un cas élémentaire	214
E.2. Méthode de l'identité de Feynman	215
E.3. Représentation paramétrique générale	217
E.4. Calcul de $\eta$ à l'ordre $\varepsilon^2$	221
<b>F. Comptage de puissances. Divergences ultraviolettes et infrarouges</b>	223
F.1. Argument topologique	224
F.2. Argument dimensionnel	225
F.3. Divergences infrarouges	226
<i>Exercices</i>	229
<i>Notes et références</i>	234

## CHAPITRE VI. RENORMALISATION

<b>A. Introduction</b>	237
A.1. Classification des théories	237
A.2. Diagrammes divergents d'une théorie renormalisable	238
A.3. Régularisation	239
<b>B. Renormalisation de la masse et de la constante de couplage</b>	240
B.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la masse	241
B.2. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la constante de couplage	242

<b>C. Renormalisation du champ. Contre-termes</b> .....	243
C.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre de deux boucles : renormalisation du champ .....	243
C.2. Contre-termes .....	247
<b>D. Cas général</b> .....	249
D.1. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre de deux boucles .....	249
D.2. Relation entre fonctions de corrélation nues et renormalisées .....	253
D.3. Cas de la masse nulle .....	254
<b>E. Opérateurs composés et leur renormalisation</b> .....	255
E.1. Fonctionnelle génératrice .....	256
E.2. Exemple : $\Gamma^{(2,1)}$ à l'ordre d'une boucle .....	258
E.3. Comptage de puissances et contre-termes .....	259
<b>F. Schéma de soustraction minimal</b> .....	261
<i>Exercices</i> .....	265
<i>Notes et références</i> .....	270

## CHAPITRE VII. ÉQUATIONS DE CALLAN-SYMANZIK

<b>A. Renormalisation et groupe de renormalisation</b> .....	273
A.1. Analyse dimensionnelle .....	273
A.2. Identification de la constante de couplage renormalisée .....	275
A.3. Classification des théories .....	278
A.4. Identification de $Z_3$ .....	279
A.5. Schémas de renormalisation et définition de $\beta(g_0)$ ..	280
<b>B. Equations de Callan-Symanzik pour la théorie nue (<math>T = T_c</math>)</b> .....	283
B.1. Divergences infrarouges .....	283
B.2. Démonstration de l'équation de Callan-Symanzik .....	284
B.3. Calcul de $\beta(g_0, \epsilon)$ à l'ordre d'une boucle .....	286
B.4. Solution de l'équation de Callan-Symanzik .....	287
B.5. Application aux phénomènes critiques .....	289
<b>C. Equations de Callan-Symanzik pour la théorie renormalisée</b> ....	290
C.1. Equation de Callan-Symanzik pour $T = T_c$ .....	291
C.2. Points fixes .....	292
C.3. Equation de Callan-Symanzik pour $T > T_c$ .....	296

<b>D. Le groupe de renormalisation en dimension <math>D = 4</math></b>	302
D.1. Calcul de $\beta(g)$	302
D.2. Théorie des perturbations améliorée par le groupe de renormalisation	304
<b>E. Le groupe de renormalisation en dimension <math>D &lt; 4</math></b>	305
E.1. Une équation pour $\beta(g, \varepsilon)$	306
E.2. Calcul de $\beta(g, \varepsilon)$ et $\gamma(g, \varepsilon)$ dans le schéma minimal	307
E.3. Calcul de $\beta$ , $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ à l'ordre de deux boucles	308
E.4. Calcul des exposants critiques à l'ordre $\varepsilon^2$	310
<i>Exercices</i>	311
<i>Notes et références</i>	315

### TROISIÈME PARTIE. THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS SCALAIRES

#### CHAPITRE VIII. INTÉGRALES DE CHEMIN EN MÉCANIQUE QUANTIQUE ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

<b>A. Spin quantique et modèle d'Ising</b>	323
A.1. Intégrale de chemin pour un spin 1/2	323
A.2. Correspondances	325
<b>B. Particule dans un potentiel</b>	328
B.1. Représentation d'une amplitude de probabilité par une intégrale de chemin	329
B.2. Fonctionnelle génératrice des produits- $T$ . Expression du produit- $T$	333
B.3. Oscillateur harmonique et condition aux limites de Feynman	336
<b>C. Prolongement euclidien et commentaires</b>	340
C.1. Fonction de partition quantique	340
C.2. Analogie classique	343
C.3. Oscillateur harmonique euclidien	344
<i>Exercices</i>	345
<i>Notes et références</i>	349

## CHAPITRE IX. QUANTIFICATION DU CHAMP DE KLEIN-GORDON

<b>A. Quantification des vibrations élastiques</b> .....	354
A.1. Système à $N$ degrés de liberté : lagrangien, hamiltonien, quantification .....	354
A.2. Quantification de la ligne continue .....	356
A.3. Modes normaux .....	358
A.4. Phonons, espace de Fock .....	360
<b>B. Quantification du champ de Klein-Gordon</b> .....	363
B.1. Equation d'onde, lagrangien .....	363
B.2. Décomposition de Fourier .....	364
B.3. Quantification canonique .....	366
B.4. Commutateur à $t \neq t'$ .....	367
B.5. Propagateur .....	368
B.6. Singularités sur le cône de lumière .....	370
<b>C. Couplage à une source classique. Théorème de Wick</b> .....	372
C.1. Opérateur d'évolution. Equation de Dyson .....	372
C.2. Oscillateur harmonique couplé à une source classique .....	374
C.3. Champ de Klein-Gordon couplé à une source classique .....	377
C.4. Théorème de Wick .....	379
<i>Exercices</i> .....	382
<i>Notes et références</i> .....	385

## CHAPITRE X. FONCTIONS DE GREEN ET MATRICE $S$

<b>A. Développement perturbatif des fonctions de Green</b> .....	389
A.1. Représentation interaction et matrice $S$ .....	389
A.2. Formule de Gell-Mann et Low .....	395
A.3. Développement perturbatif .....	397
A.4. Renormalisation et conditions de normalisation .....	400
<b>B. Intégrale de chemin et théorie euclidienne</b> .....	401
B.1. Intégrale de chemin pour $Z(j)$ .....	401
B.2. $\Gamma^{(4)}$ au deuxième ordre en $g$ . Rotation de Wick .....	403
B.3. Relation avec la théorie euclidienne .....	405
B.4. Equations du mouvement .....	408
<b>C. Sections efficaces et matrice <math>S</math></b> .....	409
C.1. Sections efficaces .....	410

C.2. Application : 2 particules $\rightarrow$ 2 particules .....	413
C.3. Calcul d'un élément de matrice $S$ .....	414
C.4. Formules de réduction .....	417
C.5. Matrice $S$ et fonctions de Green renormalisées .....	420
C.6. Unitarité et renormalisation .....	422
<b>D. Unitarité de la matrice <math>S</math></b> .....	423
D.1. Unitarité et relation de dispersion .....	423
D.2. Règles de coupure .....	428
<b>E. Généralisations</b> .....	434
E.1. Champ scalaire chargé .....	434
E.2. Champ vectoriel massif .....	437
E.3. Couplages dérivatifs .....	440
<i>Exercices</i> .....	441
<i>Notes et références</i> .....	443

## QUATRIÈME PARTIE. THÉORIES DE JAUGE

### CHAPITRE XI. QUANTIFICATION DU CHAMP DE DIRAC ET DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

<b>A. Quantification du champ de Dirac</b> .....	449
A.1. Espace de Fock pour les fermions .....	449
A.2. Equation de Dirac .....	452
A.3. Solutions de l'équation de Dirac .....	455
A.4. Quantification du champ de Dirac .....	458
A.5. Propagateur du champ de Dirac .....	462
<b>B. Théorème de Wick pour les fermions</b> .....	463
B.1. « Oscillateur fermionique » couplé à une source externe .....	463
B.2. Formulation fonctionnelle : intégration sur des variables de Grassmann .....	466
<b>C. Formalisme lagrangien pour le champ électromagnétique classique</b> .....	468
C.1. Equations de Maxwell et potentiel électromagnétique .....	468
C.2. Formulation covariante .....	469
C.3. Invariance de jauge et conservation du courant .....	471

<b>D. Quantification du champ électromagnétique .....</b>	<b>473</b>
D.1. Problèmes dans la quantification du champ électromagnétique .....	473
D.2. Quantification dans la jauge de Lorentz : fonctionnelle génératrice .....	477
<i>Exercices .....</i>	<i>481</i>
<i>Notes et références .....</i>	<i>484</i>

## CHAPITRE XII. ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

<b>A. Règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique .....</b>	<b>487</b>
A.1. Fonctions de Green dans l'espace de configuration ..	487
A.2. Eléments de matrice $S$ .....	492
<b>B. Applications .....</b>	<b>495</b>
B.1. Diffusion d'un électron par un champ coulombien ...	495
B.2. Calcul de $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .....	497
B.3. Application : calcul du rapport $R$ .....	499
<b>C. Diagrammes à une boucle en électrodynamique .....</b>	<b>501</b>
C.1. Comptage de puissances pour l'électrodynamique .....	501
C.2. Propagateur du photon et polarisation du vide .....	504
C.3. Propagateur de l'électron .....	511
C.4. Vertex électron-photon .....	515
C.5. Moment magnétique anormal de l'électron .....	519
<b>D. Identités de Ward, unitarité, renormalisation .....</b>	<b>521</b>
D.1. Identités de Ward .....	521
D.2. Unitarité .....	527
D.3. Renormalisation .....	529
D.4. Groupe de renormalisation de l'électrodynamique ....	532
<i>Exercices .....</i>	<i>535</i>
<i>Notes et références .....</i>	<i>542</i>

## CHAPITRE XIII. THÉORIES DE JAUGE NON ABÉLIENNES

<b>A. Champs de jauge non abéliens : théorie classique .....</b>	<b>546</b>
A.1. Le groupe $SU(2)$ .....	546
A.2. Transport parallèle et dérivation covariante .....	551
A.3. Tenseur $F^{\mu\nu}$ et lagrangien .....	556

<b>B. Quantification des théories de jauge non abéliennes</b> .....	559
B.1. Fonctionnelle génératrice .....	559
B.2. Règles de Feynman .....	562
B.3. Renormalisation et identités de Ward .....	566
<b>C. Modèle des interactions électro-faibles</b> .....	568
C.1. Bosons de Goldstone et phénomène de Higgs .....	569
C.2. Théorie de Fermi des interactions faibles .....	573
C.3. Modèle de Glashow-Salam-Weinberg .....	575
<b>D. Chromodynamique quantique</b> .....	583
D.1. Liberté asymptotique .....	584
D.2. Annihilation $e^+ e^-$ : cinématique .....	590
D.3. Equation d'Altarelli-Parisi .....	592
D.4. Correction d'ordre $\alpha_s$ au rapport $R$ .....	598
<b>E. Théories de jauge sur réseau</b> .....	599
E.1. Modèle de Wegner .....	600
E.2. Action de Wilson et couplage fort .....	602
E.3. Couplage faible et invariance d'échelle asymptotique ...	606
<i>Exercices</i> .....	609
<i>Notes et références</i> .....	616
<b>Appendice A : Transformées de Fourier. Intégration gaussienne</b> ...	619
A.1. Transformées de Fourier .....	619
A.2. Intégrales gaussiennes .....	621
A.3. Intégrales en dimension $D$ .....	623
<b>Appendice B : Intégrales de Feynman en régularisation dimension-</b> <b>nelle (cas euclidien)</b> .....	625
<b>Appendice C : Formulaire</b> .....	627
C.1. Groupe de Lorentz .....	627
C.2. Matrices de Dirac .....	628
C.3. Sections efficaces .....	630
C.4. Règles de Feynman .....	631
<i>Index</i> .....	635

# Avant-propos

En 1965, J. Bjorken et S. Drell concluait leur ouvrage classique (\*), qui fut la bible d'une génération de physiciens des particules, par ces considérations pessimistes : « Par conséquent toutes les conclusions reposant sur le groupe de renormalisation... sont hasardeuses et doivent être prises avec la plus grande prudence. Ainsi en est-il de tous les résultats des théories des champs relativistes. » La même année, F. Dyson, l'un des pères fondateurs de l'électrodynamique quantique, écrivait (\*\*): « On imagine aisément que d'ici quelques années les concepts de la théorie des champs auront totalement disparu du vocabulaire quotidien des physiciens des hautes énergies. » On sait que le développement de la physique n'a pas confirmé ces prévisions : la physique moderne des particules élémentaires est devenue indissociable des théories de jauge non abéliennes, généralisation de l'électrodynamique quantique élaborée au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale par Schwinger, Feynman, Dyson et Tomonaga.

Après tout, la théorie quantique des champs avait été inventée pour décrire la création et l'annihilation de particules, et son retour en force dans ce domaine, après une période de disgrâce d'une dizaine d'années, n'était pas une surprise totale. Plus étonnant fut l'impact de la théorie des champs sur la compréhension des phénomènes critiques, au début des années soixante-dix. Certes les méthodes de la théorie des champs (fonctions de Green, diagrammes de Feynman...) avaient déjà été empruntées par les physiciens du solide et les physiciens nucléaires, dans le cadre du « problème à  $N$ -corps », mais il s'agissait avant tout d'outils de travail, qui n'introduisaient pas d'idées fondamentalement nouvelles (sauf en supraconductivité et superfluidité, mais c'étaient là les prémisses d'une approche très générale et très féconde, celle des symétries brisées). Au contraire l'irruption du concept de renormalisation en physique statistique était révolutionnaire, car rien ne laissait prévoir que l'élimination des infinis, qui furent la plaie initiale de la théorie des champs, pouvait jouer un rôle dans un domaine où ils étaient a priori absents. Le mérite de Wilson fut de réaliser que les

(\*) Bjorken-Drell, chapitre 19.

(\*\*) *Physics Today* (juin 1965).

fonctions de corrélation d'un système au voisinage d'un point critique étaient, à longue distance, décrites par une théorie renormalisée. Cette observation fondamentale devait d'ailleurs donner un éclairage nouveau sur la renormalisation.

Il m'a semblé utile d'écrire un ouvrage d'introduction, qui mette les développements de ces vingt dernières années à la portée d'étudiants de troisième cycle, ainsi que de physiciens non spécialistes qui souhaitent s'initier aux méthodes de la théorie des champs. J'ai suivi un plan d'ensemble assez différent des exposés traditionnels, qui sont, en règle générale, orientés uniquement soit vers la physique statistique, soit vers la physique des hautes énergies. La démarche choisie permet d'arriver rapidement au cœur de la théorie des champs, à savoir la renormalisation et le groupe de renormalisation, dans le cadre du modèle le plus simple possible : le modèle en  $\varphi^4$ , ou modèle de Ginzburg-Landau, tout en conduisant à des applications fondamentales à la physique des phénomènes critiques.

Le livre est divisé en quatre parties. La première est une introduction aux phénomènes critiques et au groupe de renormalisation, dans la version de Wilson. Des applications comme le « développement  $\varepsilon$  » et le modèle XY sont traitées en détail. La deuxième partie traite du développement perturbatif, toujours dans le cadre de la physique statistique. Le chapitre V introduit les techniques de base (fonctionnelles génératrices, diagrammes de Feynman). C'est un chapitre un peu technique et quelque peu fastidieux, mais nécessaire pour l'étude des deux chapitres suivants qui abordent les concepts fondamentaux de la théorie : renormalisation et groupe de renormalisation, cette fois dans la version des équations de Callan-Symanzik.

Avec la troisième partie, on quitte l'espace euclidien de la physique statistique pour l'espace de Minkowski de la théorie quantique relativiste. L'essentiel du formalisme est déjà en place, car les fonctions de Green de la théorie quantique ne sont qu'un prolongement analytique des fonctions de corrélation de la théorie euclidienne. Ceci est expliqué au chapitre VIII, dans le cas de la mécanique quantique ordinaire. Alors que les intégrales fonctionnelles avaient été jusqu'à ce point utilisées de façon systématique, le chapitre IX ouvre une brève parenthèse pour exposer la quantification canonique, tandis que dans le chapitre suivant est rassemblé l'essentiel des résultats indispensables pour les applications à la physique des particules... s'il n'existait que des particules de spin zéro ! Enfin la quatrième partie introduit les théories de jauge : on y décrit la quantification du champ de Dirac et du champ électromagnétique (chapitre XI). L'électrodynamique quantique est étudiée de façon assez détaillée au chapitre XII, tandis que le chapitre XIII contient une introduction aux champs de jauge non abéliens. Le livre se conclut par un bref aperçu des théories de jauge sur réseau,

ce qui permet de faire une synthèse de l'essentiel des concepts introduits dans l'ensemble de l'exposé. Le lecteur intéressé uniquement par l'aspect « théorie quantique des champs » pourra commencer au chapitre V et sauter dans le chapitre VII le paragraphe A et les passages plus spécifiquement consacrés aux phénomènes critiques.

Comme j'ai voulu écrire un livre d'introduction, et non de référence, j'ai été amené dans certains cas à renoncer à des démonstrations générales trop complexes pour les remplacer par des exemples illustratifs. J'ai également choisi d'exposer la plupart des calculs de façon très détaillée ; j'espère que cela ne masquera pas la physique sous-jacente. Enfin un certain nombre de sujets importants ont été omis, afin de garder une dimension raisonnable à ce livre ; c'est le cas par exemple de la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions, des lois d'échelle pour l'équation d'état, des invariances (Lorentz, symétries discrètes), des développements en produits d'opérateurs, des anomalies, de l'approche géométrique aux théories de jauge, etc. Le lecteur trouvera ces sujets exposés de façon excellente dans les livres ou articles cités en référence. De façon générale, j'ai plutôt insisté sur les *méthodes*, et donné assez peu de détails sur les *systèmes* physiques utilisés pour illustrer ces méthodes.

Quelques notions de mécanique statistique suffisent pour aborder la première partie. En dehors de certains passages où le volume des calculs devient assez important, l'essentiel des trois premiers chapitres peut d'ailleurs être enseigné en fin de maîtrise, comme complément à un cours de mécanique statistique. La seconde partie ne fait appel à aucune notion avancée ; cependant les calculs sont parfois un peu longs. Enfin des connaissances de mécanique quantique, au niveau d'un cours de maîtrise, sont indispensables pour les deux dernières parties. Quelques notions élémentaires sur les fonctions de variables complexes, sur la théorie des groupes et sur la physique des particules élémentaires faciliteront également la compréhension de ces deux parties.

L'exposé est accompagné de 120 exercices de difficulté très variée. Certains sont de simples applications du cours, d'autres peuvent être de petits problèmes ouvrant la voie à des développements nouveaux. J'ai essayé (sans toujours y parvenir), d'éviter le style « Démontrer l'équation (36) » en donnant des énoncés détaillés, des indications de solutions ou des réponses partielles ; dans certains cas le renvoi à une référence permettra au lecteur de vérifier ou de compléter sa solution.

Un certain nombre de livres et d'articles de revue ont été rassemblés dans les références générales. Ce sont ceux qui m'ont été les plus utiles dans la préparation de cet ouvrage, et aussi ceux qui, à mon avis, seront les plus facilement accessibles au lecteur. Il était évidemment hors de question de donner une bibliographie complète et, selon la formule

consacrée, j'adresse mes excuses anticipées à ceux de mes collègues dont le travail n'a pas été convenablement cité.

Ce livre est issu de cours de troisième cycle, enseignés sous des formes diverses dans le DEA de Physique Théorique (Marseille-Nice), dans le DEA de Physique de la Matière Condensée (Nice) et dans le Magistère de Constantine. Je suis très reconnaissant aux étudiants dont les remarques ont été précieuses dans la mise au point de ce livre. Victor Alessandrini a lu l'intégralité du manuscrit et m'a fait bénéficier de remarques très pertinentes, en particulier sur l'organisation générale de l'ouvrage. J'ai également bénéficié des critiques et suggestions de E. Brezin, J. P. Provost, J. L. Meunier et F. Guérin. P. de Giovanni m'a fait part de remarques très utiles sur le texte et les exercices. Je suis très reconnaissant à Michèle Leduc, qui a beaucoup fait pour que ce livre paraisse. J'ai mis à rude épreuve la patience de Chantal Djankoff, qui a dactylographié de multiples versions du manuscrit avec sa compétence et son efficacité habituelles, et je l'en remercie très vivement. Enfin, Joanna a partagé avec moi doutes et incertitudes pendant la rédaction ; sans son soutien de tous les jours, ce livre n'aurait pas pu être écrit.

Nice, décembre 1986

## Références générales

- E. ABERS et B. LEE : « Gauge Theories », *Physics Reports*, **9**, 141 (1973).
- D. AMIT : *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific (1984) (2<sup>e</sup> édition).
- J. BJORKEN et S. DRELL : Vol. I. *Relativistic Quantum Mechanics* et Vol. II. *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1965).
- N. BOGOLIUBOV et D. CHIRKOV : *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod (1960).
- E. BREZIN, J. C. LE GUILLOU et J. ZINN-JUSTIN : « Field Theoretical Approach to Critical Phenomena » in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. VI, Academic Press (1976).
- J. C. COLLINS : *Renormalization*, Cambridge University Press (1983).
- S. GASIOROWICZ : *Elementary Particle Physics*, Wiley (1966).
- G. 'HOOFT et M. VELTMAN : « Diagrammar » in *Particle Interactions at Very High Energies*, Plenum Press, New York (1974).
- C. KITTEL : *Introduction à la physique de l'état solide*, Dunod (1970).
- C. ITZYKSON et J. B. ZUBER : *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).
- J. KOGUT : « An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems », *Reviews of Modern Physics*, **51**, 659 (1979).
- L. LANDAU et E. LIFSHITZ : *Physique statistique*, Editions MIR (1967).
- S. K. MA : *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin (1976).
- A. MESSIAH : *Mécanique quantique*, Dunod (1961).
- V. POPOV : *Functional Integration in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Reidel (1983).
- P. RAMOND : *Field Theory : a Modern Primer*, Benjamin (1980).
- S. SHENKER : « Field Theories and Phase Transitions » in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, Ecole des Houches (1982).
- R. STREATER et A. WIGHTMAN : *PCT, Spin, Statistics and All That*, Benjamin (1964).
- G. TOULOUSE et P. PFEUTY : *Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications*, Presses Universitaires de Grenoble (1975).
- K. WILSON : « The Renormalization Group : Critical Phenomena and the Koudo Problem », *Reviews of Modern Physics*, **47**, 774 (1975).



# Notations et conventions

En règle générale, j'ai choisi de respecter les notations consacrées par l'usage, ce qui a conduit inévitablement à quelques collisions : ainsi  $S$  désigne l'action et la matrice  $S$ ,  $\beta$  l'inverse de la température, un exposant critique et la fonction de Callan-Symanzik... J'espère que le contexte permettra d'éviter toute confusion. Les passages en petits caractères sont soit des digressions, soit des développements un peu techniques, qui peuvent être sautés en première lecture.

En ce qui concerne la terminologie, j'ai utilisé la traduction littérale de l'anglais « momentum » et utilisé « moment » au lieu de la correcte (mais longue) « quantité de mouvement » (« impulsion » ayant une autre signification). Je me suis permis quelques anglicismes (volontaires... on en trouvera sûrement d'involontaires) quand la version française n'avait absolument pas cours : n'ayant jamais entendu prononcer « paramètre de coupure » ou C.D.Q., j'ai utilisé « cut-off » et « QCD ». La traduction de « relevant » et « irrelevant » par « essentiel » et « inessentiel » a été empruntée à Cl. Itzykson.

La sommation sur les indices répétés est de règle dans l'ensemble du livre :

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i .$$

Les notations des deux dernières parties sont en règle générale celles du livre d'Itzykson et Zuber. En particulier la métrique de Minkowski est :

$$x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 \quad \text{ou} \quad g^{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -1, -1) .$$

(Etant donné les passages fréquents entre espaces euclidien et de Minkowski, le choix  $x^2 = \mathbf{x}^2 - x_0^2$  eût sans doute été préférable, mais on ne change pas aussi facilement des habitudes de vingt ans !) Les matrices de Dirac sont définies par :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} .$$

Les quelques différences par rapport aux notations d'Itzykson-Zuber sont les suivantes :

- les propagateurs  $(\Delta_F, S_F, \dots)$  diffèrent par un facteur  $i$ ,
- la normalisation des spineurs de Dirac est  $\bar{u}u = 2m$ ,
- les générateurs des algèbres de Lie sont choisis hermitiques.

Les nombres décimaux ont été représentés dans cet ouvrage avec un point décimal et non avec une virgule décimale.

PREMIÈRE PARTIE

**Phénomènes critiques**



## CHAPITRE I

# Introduction aux phénomènes critiques

Ce premier chapitre est une introduction élémentaire aux modèles et méthodes qui seront utilisés par la suite. La transition ferromagnétique, décrite sommairement au paragraphe A, servira de prototype à toutes les transitions de phase du second ordre et permettra d'introduire les notions de symétrie brisée et de paramètre d'ordre. Le modèle fondamental du ferromagnétisme, ou modèle d'Ising, est exposé au paragraphe B et résolu dans un cas élémentaire. L'importance de ce modèle est due à l'existence d'une solution exacte à deux dimensions, présentant une aimantation spontanée. Le paragraphe C est consacré à une première approche aux méthodes du champ moyen, qui reste encore à l'heure actuelle une des méthodes d'approximation les plus utilisées. Cette approximation nous conduira à définir une première série d'exposants critiques ; la liste sera complétée au paragraphe D lorsque auront été définies les fonctions de corrélation. Enfin une description qualitative des phénomènes critiques au paragraphe E permettra de définir, en première approximation, la notion d'invariance d'échelle et son rapport avec le comportement de la théorie dans une dilatation.

### A. TRANSITION FERROMAGNÉTIQUE

L'objet de la première partie de ce livre est l'étude des transitions de phase du deuxième ordre (ou de deuxième espèce) qui sont aussi appelées phénomènes critiques pour des raisons expliquées au para-

phe E. Pour fixer les idées, je me limiterai au cas de la transition ferromagnétique-paramagnétique, qui est l'exemple le plus familier de transition de phase du deuxième ordre. Les traits généraux de cette transition peuvent en effet se transposer à toutes celles du deuxième ordre. Le ferromagnétisme est un phénomène très complexe, et je me contenterai d'une description schématique, en renvoyant par exemple au livre de Kittel pour l'aspect « physique du solide » de ce phénomène. Certains corps (fer, nickel, cobalt...) peuvent être aimantés à la température ordinaire. D'un point de vue microscopique, cela veut dire que des électrons d'une couche interne incomplète ont leurs spins quasiment alignés dans la même direction. Comme à chaque spin est associé un moment magnétique, cet alignement implique que tous ces moments magnétiques s'ajoutent et construisent un aimant macroscopique.

Lorsque l'on chauffe un ferromagnétique au-dessus d'une température  $T_c$  de l'ordre de  $10^3$  K, appelée « température de Curie », l'aimantation disparaît, et le corps devient paramagnétique. Il est facile d'imaginer intuitivement que la tendance à l'alignement est due à une interaction entre spins qui le favorise. Cependant, à haute température, l'agitation thermique tend à le détruire, provoquant ainsi la disparition de l'aimantation. Cette explication, qui contient une partie de la vérité, est cependant très loin d'épuiser le sujet, et l'un des problèmes fondamentaux de la physique statistique a été précisément de montrer qu'une transition de phase se produit effectivement.

En toute rigueur, la discussion qui va suivre s'applique non pas à un échantillon ferromagnétique, mais à un « domaine » (de taille  $\sim 10^{-2}$  mm) dans un tel échantillon (je renvoie à nouveau au livre de Kittel pour l'explication de ce qu'est un domaine). A une température supérieure à  $T_c$ , le domaine n'est pas aimanté (de même que l'échantillon) ; si l'on redescend au-dessous de  $T_c$ , le domaine est aimanté (tandis que l'échantillon, qui est formé de nombreux domaines, peut très bien avoir une aimantation totale nulle). L'aimantation  $\mathcal{M}$  du domaine croît quand la température décroît, et est donc maximale à  $T = 0$ . Dans ce cas tous les spins sont alignés dans la même direction. Lorsque  $0 < T < T_c$ , il y a une tendance des spins à s'orienter dans la même direction, mais l'agitation thermique n'autorise qu'un alignement partiel (figure 1) :

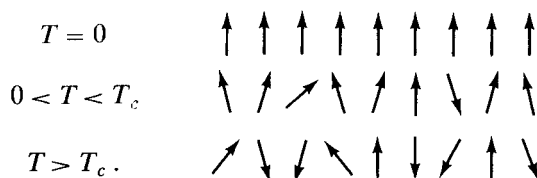


Figure 1.

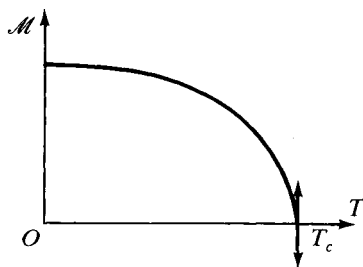


Figure 2. Comportement qualitatif de l'aimantation.

La courbe de la figure 2 donne l'allure de  $\mathcal{M}$  en fonction de la température, en l'absence de champ magnétique extérieur :  $\mathcal{M}$  est appelée *aimantation spontanée*, puisqu'elle n'est induite par aucun champ magnétique extérieur. On notera la tangente verticale à  $T = T_c$ .

L'existence d'une aimantation spontanée est a priori un phénomène remarquable : en effet le hamiltonien d'interaction des spins est invariant par rotation : aucune direction d'espace n'est privilégiée. Pour  $T > T_c$ , aucune direction d'espace ne peut être distinguée dans l'échantillon ferromagnétique. Au contraire, pour  $T < T_c$ , une direction d'espace, celle de l'aimantation, se trouve privilégiée. L'état du domaine n'est plus invariant par toute rotation, mais seulement par des rotations d'axe parallèle à la direction de l'aimantation. Autrement dit le groupe de symétrie de la phase basse température est un sous-groupe de celui de la phase haute température. On appelle ce phénomène *brisure (spontanée) de symétrie*. L'aimantation  $\mathcal{M}$ , qui est nulle dans la phase haute température et différente de zéro dans la phase basse température, est appelée *paramètre d'ordre* de la transition. Le phénomène de brisure de symétrie et la notion de paramètre d'ordre se retrouvent dans toutes les transitions du deuxième ordre.

On peut s'étonner de l'existence d'une direction privilégiée alors que rien ne permet a priori de la choisir : en fait la plus petite inhomogénéité ou le plus petit champ magnétique résiduel permettent de définir une direction (pensez à un bâton cylindrique vertical sur lequel on appuie avec une force  $F$  verticale dirigée suivant l'axe (figure 3) : lorsqu'on appuie assez fort, le bâton finit par fléchir, ce qui privilégie une certaine direction, alors que la situation est a priori parfaitement invariante par rotation autour de l'axe : on a affaire à une symétrie brisée).

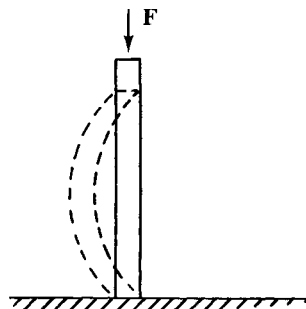


Figure 3. Symétrie brisée.

## B. MODÈLE D'ISING

### B.1. Description du modèle

Suivant une stratégie familière aux physiciens, nous allons essayer d'établir un *modèle* pour le ferromagnétisme, en simplifiant la situation réelle, tout en essayant de conserver les traits qui paraissent fondamentaux dans le ferromagnétisme. Etablir un modèle revient à chercher le meilleur compromis entre deux exigences contradictoires :

- obtenir des équations suffisamment simples pour pouvoir être résolues si possible analytiquement, ou à défaut numériquement sur un ordinateur ;
- ne perdre en cours de route (c'est-à-dire dans le processus de simplification) aucune des propriétés essentielles de la physique du phénomène que l'on veut étudier.

Ce qui paraît essentiel dans le ferromagnétisme est l'interaction entre spins qui tend à les aligner. On peut raisonnablement espérer qu'il est légitime de remplacer chaque atome de ferromagnétique par un électron responsable du ferromagnétisme. La première étape de la modélisation consiste donc à décrire un ferromagnétique par des électrons placés aux nœuds d'un réseau, le réseau cristallin initial. Pour simplifier la discussion (mais ce n'est pas essentiel), je prendrai en général le cas d'un réseau cubique.

L'interaction entre spins est à courte portée : deux spins séparés de dix fois le pas du réseau ont une interaction négligeable. La deuxième approximation va consister à écrire pour les spins une interaction entre plus proches voisins : sur un réseau à deux dimensions (plan,  $D = 2$ ) un spin a quatre plus proches voisins, et six sur un réseau à trois dimensions ( $D = 3$ ) (figure 4 ; dans toute la suite du livre  $D$  désignera

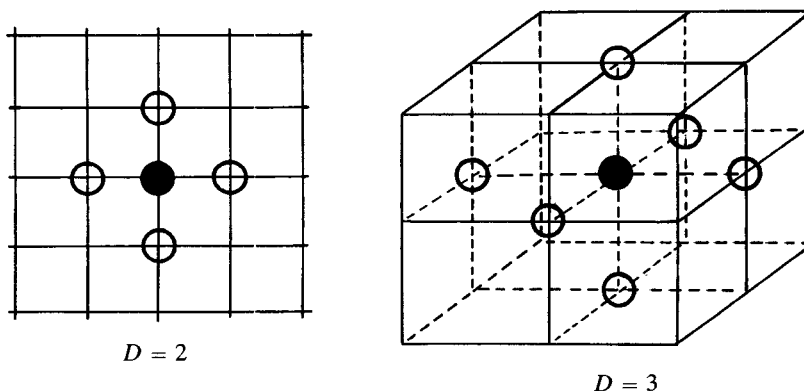


Figure 4.  $\circ$  = plus proches voisins du spin  $\bullet$

la dimension de l'espace. Un plan a pour dimension  $D = 2$ , l'espace ordinaire  $D = 3$ ). A nouveau on peut espérer ne rien perdre d'essentiel dans cette approximation.

Le hamiltonien d'interaction le plus simple qui tend à aligner les spins est :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \quad (1)$$

où  $J$ , la *constante de couplage*, est une constante positive et les  $\boldsymbol{\sigma}_i$  sont des matrices de Pauli ; la notation  $\sum_{\langle i,j \rangle}$  indique la sommation sur les plus proches voisins. Le hamiltonien (1) est celui du *modèle de Heisenberg quantique*. Cependant on peut montrer que les effets quantiques sont sans importance au voisinage immédiat de  $T_c$ , sauf si  $T_c = 0$ . On pourra donc remplacer les matrices de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}_i$  par des vecteurs classiques  $S_i$  de longueur 1 ; ceci donne le *modèle de Heisenberg classique*.

Ce modèle est encore trop complexe : on n'en connaît pas de solution analytique (il sera étudié au chapitre IV par la méthode du groupe de renormalisation dans le cas  $D = 2$ ) et son étude sur ordinateur est délicate. C'est pourquoi on effectue une approximation supplémentaire (la dernière !) : on remplace les vecteurs  $S_i$  par des nombres  $S_i$  pouvant prendre deux valeurs :

$$S_i = +1 \quad \text{ou} \quad S_i = -1.$$

Les spins sont donc toujours parallèles à un axe fixe, et deux orientations (spin en haut :  $S_i = +1$ , spin en bas :  $S_i = -1$ ) sont possibles le long de cet axe.

A l'époque (1920) où Lenz a proposé ce modèle comme sujet de thèse à son étudiant Ising, il n'existait strictement aucun moyen de contrôler cette approximation. On sait aujourd'hui que le modèle d'Ising est *qualitativement* un bon modèle du ferromagnétisme, mais que certaines prédictions sont *quantitativement* inexactes. En effet, dans le modèle de Heisenberg, l'aimantation est un vecteur, et il faut trois nombres (par exemple son module et deux angles) pour la définir : on dira que la *dimension du paramètre d'ordre*  $n$  vaut 3 :  $n = 3$ . Dans le cas du modèle d'Ising, la direction de l'aimantation est fixée, et il suffit d'un nombre (algébrique) pour la définir : la dimension du paramètre d'ordre est  $n = 1$  (\*). Or les exposants critiques (définis au paragra-

(\*) Par souci de simplicité, je me limite aux paramètres d'ordre de type vectoriel. Pour une définition plus générale on pourra consulter N. Mermin, « The Topological Theory of Defects in Ordered Media », *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).

phe C) dépendent de  $n$ , ce qui introduit une différence quantitative entre les deux modèles. A deux dimensions ( $D = 2$ ), la différence est même qualitative : le modèle d'Ising exhibe une aimantation spontanée, mais non celui de Heisenberg (chapitre IV).

La discussion qui précède permet d'écrire le hamiltonien  $H$  du modèle d'Ising :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j ; \quad S_i = \pm 1 \quad (2)$$

et donc la fonction de partition  $Z$  ( $T$  = température absolue,  $k$  = constante de Boltzmann)

$$Z = \sum_{[S_i]} e^{\frac{J}{kT} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j} \quad (3)$$

où la première somme porte sur toutes les configurations, c'est-à-dire :

$$\sum_{[S_i]} = \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \cdots \sum_{S_N = \pm 1} \quad (4)$$

s'il y a  $N$  sites sur le réseau. Le nombre de termes de la fonction de partition est  $2^N$ .

## B.2. Modèle d'Ising à une dimension

Pour se familiariser avec le modèle, il est intéressant d'examiner un cas très simple, celui d'un réseau linéaire :  $N$  spins sur une droite. On est donc dans le cas  $D = 1$  (figure 5). Calculons la fonction de partition à partir du hamiltonien

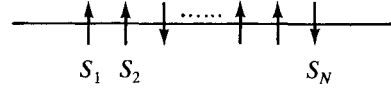


Figure 5.

$$H = -J \sum_{l=1}^{N-1} S_l S_{l+1}$$

$$Z = \sum_{[S_l]} e^{-H/kT} = \sum_{[S_l]} e^{\frac{J}{kT} \sum_{l=1}^{N-1} S_l S_{l+1}} = \sum_{[S_l]} \prod_{l=1}^{N-1} e^{KS_l S_{l+1}}$$

où l'on a posé  $K = J/kT$ .

L'identité :

$$e^{KS_l S_{l+1}} = \text{ch } K + S_l S_{l+1} \text{ sh } K$$

permet de récrire  $Z$  :

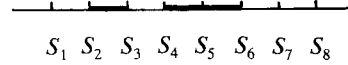
$$Z = (\text{ch } K)^{N-1} \sum_{[S_l]} \prod_{l=1}^{N-1} (1 + S_l S_{l+1} \text{th } K). \quad (5)$$

Une méthode fréquemment utilisée en mécanique statistique est celle du *développement haute température* : lorsque  $T \rightarrow \infty$ , on cherche à développer la fonction de partition sous forme d'une série de puissances d'un paramètre  $\kappa(T)$ , où  $\kappa(T) \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow \infty$ . Dans le cas présent,  $\text{th } K$  est un tel paramètre :  $\text{th } K = \text{th } (J/kT) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ . Essayons donc un développement en puissances de  $\text{th } K$  :

$$\prod_l (1 + S_l S_{l+1} \text{th } K) = 1 + \text{th } K \sum (SS) + (\text{th } K)^2 \sum (SSSS) + \dots \quad (6)$$

On peut associer à chaque terme du développement un graphe ; par exemple au terme :

$$(\text{th } K)^6 (S_2 S_3)(S_4 S_5)(S_5 S_6)$$



correspondra le graphe de la figure 6, où un trait épais (liaison) joint les spins plus proches voisins

apparaissant dans le développement. Dans la somme sur les configurations, isolons par exemple celle sur  $S_4$  :

Figure 6.

$$\sum_{[S_l]} = \sum_{S_4 = \pm 1} \left[ \sum \dots \sum (\text{th } K)^6 ( \quad ) ( \quad ) ( \quad ) \right].$$

Lorsque  $S_4$  change de signe, le terme entre crochets change également de signe, et tous les termes de la somme sur les configurations s'annulent deux à deux. Pour que cette somme donne un résultat non nul, il est nécessaire que de chaque spin parte un nombre pair (0 ou 2) de liaisons. Seul le premier terme de (6) donne un résultat non nul (le développement haute température se réduit à un seul terme) et :

$$Z = 2^N (\text{ch } K)^{N-1}. \quad (7)$$

La fonction de partition donne accès à toutes les fonctions thermodynamiques, et permet en particulier de décider de l'existence éventuelle d'une transition de phase. Il faut cependant faire la remarque suivante : pour un système *fini*, la fonction de partition est une somme finie de fonctions analytiques de la température (pour  $T \neq 0$ ) ; l'énergie libre  $F = -kT \ln Z$  est aussi une fonction analytique de  $T$ ,  $Z$  étant une somme de termes positifs. Une transition de phase correspond à une

singularité des fonctions thermodynamiques, et avant de se prononcer sur l'existence d'une transition, il faut passer à la *limite thermodynamique*  $N \rightarrow \infty$  ; en effet, d'après l'argument précédent, il est impossible de voir *mathématiquement* une transition dans un système fini.

On calculera par exemple l'énergie libre par spin  $\hat{F}$  à la limite thermodynamique :

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\frac{kT}{N} \ln Z \right) \\ \hat{F} &= -kT \ln \left( 2 \operatorname{ch} \frac{J}{kT} \right).\end{aligned}\tag{8}$$

$\hat{F}$  est une fonction analytique de  $T$  (sauf pour  $T = 0$ ) et le *modèle d'Ising ne présente pas de transition de phase en dimension 1*. Ce résultat a été généralisé par Peierls : *en l'absence d'interactions à longue portée*, un système unidimensionnel ne peut pas présenter de transition de phase.

### B.3. Fonction de corrélation du modèle d'Ising à une dimension

Passons maintenant au calcul de la *fonction de corrélation* de deux spins  $S_i$  et  $S_j$ , qui est par définition la valeur moyenne du produit  $\langle S_i S_j \rangle$  (\*). La fonction de corrélation permet de mesurer l'influence de l'orientation fixée d'un spin particulier, disons  $S_i$ . Comme l'interaction tend à aligner les spins, un spin  $S_j$  voisin de  $S_i$  aura tendance à prendre la même orientation que  $S_i$  ; cependant cette tendance est combattue par l'agitation thermique, qui a pour effet de décorréler les spins. Qualitativement, on s'attend à trouver une corrélation qui décroît avec la distance entre  $S_i$  et  $S_j$  ; à distance fixée, elle sera d'autant plus importante que la température est basse (l'argument n'est correct à toute température qu'en l'absence de transition de phase. Pourquoi ?).

La valeur moyenne  $\langle S_i S_j \rangle$  se calcule à l'aide d'une moyenne statistique standard :

$$\begin{aligned}\langle S_i S_j \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_l\}} S_i S_j e^{-H/kT} \\ &= \frac{1}{Z} (\operatorname{ch} K)^{N-1} \sum_{\{S_l\}} S_i S_j \prod_{l=1}^{N-1} (1 + S_l S_{l+1} \operatorname{th} K).\end{aligned}$$

(\*) Dans le cas général, il faut retrancher  $\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$  : cf. paragraphe D.

Aux facteurs  $S_i$  et  $S_j$  à l'extérieur du produit on associe une liaison supplémentaire, et à nouveau le seul terme non nul sera tel que de chaque spin parte un nombre pair de liaisons (figure 7). Le résultat pour  $\langle S_i S_j \rangle$  est :

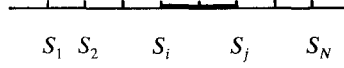
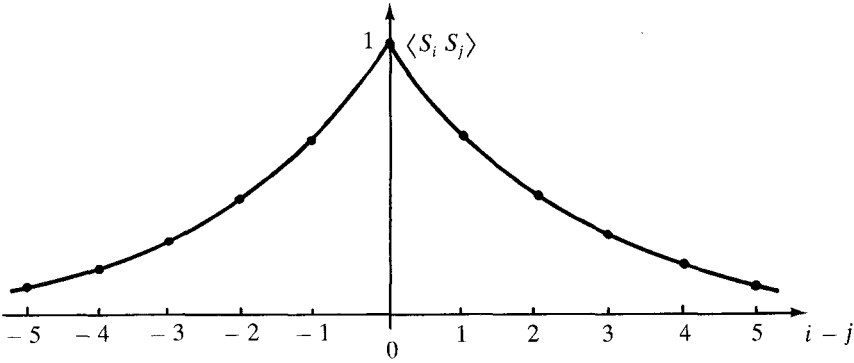


Figure 7.

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle &= \frac{1}{Z} (\text{ch } K)^{N-1} 2^N (\text{th } K)^{|i-j|} = (\text{th } K)^{|i-j|} \\ \langle S_i S_j \rangle &= e^{-|i-j| |\ln \text{th } K|} = e^{-|i-j| \ln \text{th } (J/kT)}. \end{aligned} \quad (9)$$

La fonction de corrélation décroît exponentiellement avec la distance  $|i-j|$  (figure 8) :

Figure 8.  $\langle S_i S_j \rangle$  en fonction de  $(i-j)$ .

Si  $a$  est le pas du réseau, la distance en cm entre les spins  $S_i$  et  $S_j$  est  $a|i-j| = r_{ij}$  ; la *longueur de corrélation*  $\xi$  sera définie par

$$\langle S_i S_j \rangle = e^{-r_{ij}/\xi} \quad (10)$$

et dans le cas du modèle d'Ising à une dimension, l'équation (9) donne :

$$\xi = \frac{a}{|\ln \text{th } J/kT|}. \quad (11)$$

L'expression (11) montre que la longueur de corrélation décroît quand  $T$  augmente ; elle tend vers zéro quand  $T \rightarrow \infty$ , et vers l'infini quand  $T \rightarrow 0$ , ce qui confirme l'argument intuitif précédent. On note aussi que l'expression (9) confirme l'absence d'aimantation spontanée :

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \langle S \rangle^2 = 0.$$

#### B.4. Modèle d'Ising à deux dimensions

La fonction de partition et sa limite thermodynamique ont été calculées exactement à deux dimensions ( $D = 2$ ) par Onsager en 1944. Cette « résolution du modèle d'Ising » constitue un véritable tour de force mathématique, et même après des simplifications obtenues ultérieurement, le calcul est trop long pour pouvoir être exposé ici. Il n'existe pas à l'heure actuelle de solution exacte pour le modèle d'Ising à deux dimensions en présence d'un champ magnétique extérieur, et pas de solution non plus à trois dimensions, même sans champ magnétique extérieur.

La solution d'Onsager prouve l'existence d'une transition ferromagnétique à deux dimensions. La température de transition  $T_c$  est donnée par :

$$\text{sh } 2 K_c = \text{sh } (2 J / k T_c) = 1$$

ou :

$$k T_c = \frac{2 J}{\ln (1 + \sqrt{2})} \simeq 2.27 J . \quad (12)$$

La chaleur spécifique diverge comme  $\ln |T - T_c|$  au voisinage de la température de transition et la valeur moyenne  $M_0 = \langle S \rangle$  d'un spin définie par :

$$M_0 = \lim_{B \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle \right]$$

a pour expression :

$$M_0 = [1 - \text{sh } (2 J / k T)^{-4}]^{1/8} .$$

Le point important est qu'au voisinage de  $T_c$ ,  $M_0$  (et donc  $\mathcal{M}$ ) se comporte comme  $(T_c - T)^{1/8}$  :

$$M_0 \sim (T_c - T)^{1/8} . \quad (13)$$

### C. CHAMP MOYEN

#### C.1. Equation du champ moyen

La solution du modèle d'Ising étant complexe ou inaccessible, il est utile de trouver des méthodes d'approximation. La méthode de base, proposée par Weiss en 1907, est celle du champ moyen (ou champ

moléculaire). Cette méthode n'est pas du tout réservée au modèle d'Ising, et elle continue à être appliquée dans des travaux récents : dans l'étude d'un modèle de transition de phase, la première réaction est bien souvent d'essayer l'approximation du champ moyen.

L'approximation repose sur l'idée suivante : considérons un spin particulier  $S_i$  et admettons que pour calculer son énergie  $E_i$  on puisse remplacer tous les autres spins par leur valeur moyenne  $\langle S_j \rangle$  : on est alors ramené à un problème classique de paramagnétisme. Il sera commode de placer le système de spins dans un champ magnétique extérieur. Un spin classique est un vecteur  $\mathbf{S}$ , auquel est associé un moment magnétique  $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{S}$ . L'énergie d'un tel spin dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  vaut  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ . Dans le cas du modèle d'Ising, le champ  $\mathbf{B}$  a une direction fixe (celle des spins), et l'énergie s'écrit simplement  $-\mu S B$ . Le hamiltonien dans un champ magnétique devient :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i$$

et l'énergie du spin  $S_i$  à l'approximation du champ moyen est donnée par :

$$E_i = -J S_i \sum_j \langle S_j \rangle - \mu B S_i .$$

Selon que le spin est dirigé vers le haut (+) ou vers le bas (−) nous aurons des niveaux d'énergie  $E_{i+}$  et  $E_{i-}$  :

$$E_{i+} = -J \sum_j \langle S_j \rangle - \mu B = -qJM - \mu B$$

$$E_{i-} = J \sum_j \langle S_j \rangle + \mu B = qJM + \mu B$$

où  $M$  est la valeur moyenne de  $S_j$  :  $M = \langle S_j \rangle$  et  $q$  le nombre de plus proches voisins. Le calcul classique du paramagnétisme donne pour la valeur moyenne de  $S_i$  :

$$\langle S_i \rangle = \text{th} \left( \frac{qJM + \mu B}{kT} \right) .$$

Tous les spins étant équivalents,  $\langle S_i \rangle$  doit aussi être égal à  $M$  : c'est la condition d'autocohérence de l'approximation ; on obtient donc l'équation :

$$M = \text{th} \left( \frac{qJM + \mu B}{kT} \right)$$

qu'il est commode de récrire :

$$\boxed{\operatorname{th}^{-1} M \left( = \frac{1}{2} \ln \frac{1+M}{1-M} \right) = \frac{qJ}{kT} M + \frac{\mu B}{kT}} \quad (14)$$

Cette équation est l'équation fondamentale de l'approximation du champ moyen, et la suite du paragraphe consiste à en déduire les conséquences.

## C.2. Transition ferromagnétique en champ moyen

L'équation (14) est une équation transcendante et doit être résolue numériquement. Une idée qualitative des solutions peut être obtenue par une résolution graphique ; la, ou les solutions, sont données par l'intersection de la droite  $\frac{qJ}{kT} M + \frac{\mu B}{kT}$  avec la courbe  $\operatorname{th}^{-1} M$  (figure 9).

Il est utile de rappeler que la courbe  $\operatorname{th}^{-1} M$  a deux asymptotes verticales à  $M = \pm 1$  et que la tangente à l'origine a une pente égale à 1.

Le graphique de la figure 9 montre que pour  $B > 0$ , il peut y avoir trois solutions, mais les solutions telles que  $M < 0$  sont métastables ou instables (exercice II.2). La solution physiquement acceptable correspond à une aimantation ayant même orientation que le champ.

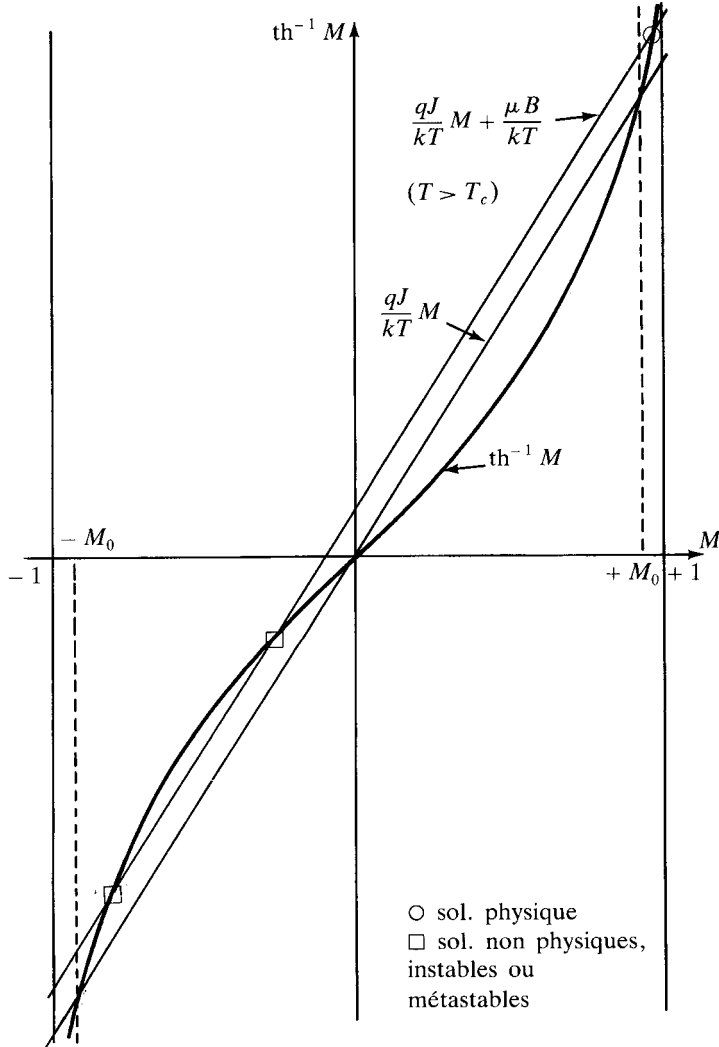
Lorsque  $B \rightarrow 0^+$ , comme la pente de la tangente à l'origine de  $\operatorname{th}^{-1} M$  est égale à 1, la solution tend vers une valeur finie positive  $M_0 \neq 0$  lorsque  $\frac{qJ}{kT}$  est supérieur à 1, et vers  $M_0 = 0$  lorsque  $\frac{qJ}{kT}$  est inférieur à 1. (En partant d'un champ magnétique  $B < 0$ , on aurait obtenu  $-M_0$  pour  $\frac{qJ}{kT} > 1$ .) L'approximation du champ moyen prédit donc une aimantation spontanée  $\pm M_0$  ; on remarque en passant le phénomène de brisure de symétrie : les deux orientations des spins sont équivalentes mais à basse température l'aimantation spontanée privilégie l'une de ces orientations. Il suffit d'une modification infinitésimale du champ magnétique pour obtenir  $-M_0$  plutôt que  $+M_0$ . La solution  $M_0 = 0$  est instable si  $\frac{qJ}{kT} > 1$ .

En résumé, l'approximation du champ moyen prédit en champ magnétique nul

- une aimantation spontanée  $\neq 0$  si  $T < T_c = \frac{qJ}{k}$  ;
- une aimantation spontanée  $= 0$  si  $T > T_c$ .

La température de transition est donc :

$$T_c = \frac{qJ}{k}. \quad (15)$$



**Figure 9.** Solution graphique de (14).

### C.3. Comportement au voisinage de la transition

Dans la suite du paragraphe, nous résoudrons approximativement l'équation (14) au voisinage de  $T_c$  pour  $B$  petit. Dans ces conditions l'aimantation est petite ( $M \ll 1$ ) et on peut utiliser le développement en série de  $\text{th}^{-1} M$  :

$$\text{th}^{-1} M = M + \frac{1}{3} M^3 + O(M^5) . \quad (16)$$

#### Aimantation en champ nul

Définissons la « température réduite »  $t$  :

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} ; \quad \frac{T}{qJ} = \frac{T}{T_c} = 1 + t .$$

L'équation du champ moyen devient :

$$M \simeq (1 + t) \left( M + \frac{1}{3} M^3 \right)$$

soit :

$$M_0 \simeq \sqrt{-3t} .$$

Au voisinage de  $T_c$ , l'aimantation spontanée se comporte donc en  $(T_c - T)^{1/2}$  :

$$M_0 \sim (T_c - T)^{1/2} . \quad (17)$$

La courbe donnant  $M_0$  pour toute valeur de  $T$  peut être obtenue par résolution numérique de l'équation (14) (figure 10).

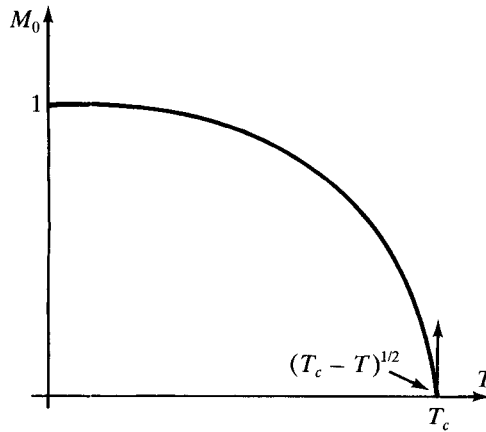


Figure 10. Aimantation en fonction de  $T$ .

**Susceptibilité magnétique en champ nul****(a)  $T > T_c$** 

Pour  $T$  voisin de  $T_c$ , mais  $T \neq T_c$ , et  $B \rightarrow 0$  le terme en  $M^3$  dans (16) peut être négligé :

$$M \simeq (1 + t) M - \frac{\mu B}{k T_c}$$

soit :

$$M \simeq \frac{\mu B}{k(T - T_c)}.$$

L'aimantation totale  $\mathcal{M}$  vaut  $N \mu M = \mu^2 N B / (T - T_c)$  et la susceptibilité magnétique  $\chi$  en champ nul :

$$\chi = \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} \right|_{B=0} = \frac{\mu^2 N}{k(T - T_c)}.$$

La susceptibilité se comporte donc en  $(T - T_c)^{-1}$  :

$$\chi \sim (T - T_c)^{-1} \quad (18.a)$$

**(b)  $T < T_c$** 

Dans ce cas il faut tenir compte de l'aimantation spontanée  $M_0$ , avec  $M_0^2 = -3t$ . On écrit :

$$M = M_0 + \varepsilon.$$

Négligeant des termes d'ordre supérieur l'équation (14) devient :

$$M_0 + \varepsilon = (1 + t)(M_0 + \varepsilon) + \frac{1}{3}(M_0 + \varepsilon)^3 - \frac{\mu B}{k T_c}$$

$\varepsilon$  étant d'ordre  $B$  ( $B \rightarrow 0$ ), les termes en  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^3$  sont négligeables et on trouve :

$$\varepsilon = \frac{-\mu B}{2k(T - T_c)}; \quad \chi = \frac{N\mu^2}{2k(T_c - T)}$$

et à nouveau :

$$\chi \sim (T_c - T)^{-1}. \quad (18.b)$$

La loi de puissance est la même dans (18.a) et (18.b), mais le coefficient numérique diffère d'un facteur 2.

**Isotherme critique**

On se place à  $T = T_c$  et on calcule  $B$  en fonction de  $\mathcal{M}$  :

$$M = M + \frac{1}{3} M^3 - \mu B / kT_c \Rightarrow B = \frac{kT_c}{3\mu} M^3$$

d'où :

$$B = \frac{kT_c}{3\mu} (\mathcal{M} / N\mu)^3.$$

On obtient cette fois la loi de puissance :

$$B \sim \mathcal{M}^3. \quad (19)$$

**Chaleur spécifique en champ nul**

A l'approximation du champ moyen, l'énergie interne  $E$  (valeur moyenne du hamiltonien) se calcule immédiatement en champ magnétique nul :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} qJNM_0^2 & T < T_c \\ E &= 0 & T > T_c. \end{aligned}$$

En effet chaque spin est remplacé par sa valeur moyenne  $M_0$  et il y a  $\frac{1}{2} qN$  paires de spins. Pour  $T < T_c$ , mais proche de  $T_c$ , on utilise l'expression déterminée précédemment pour  $M_0$  :

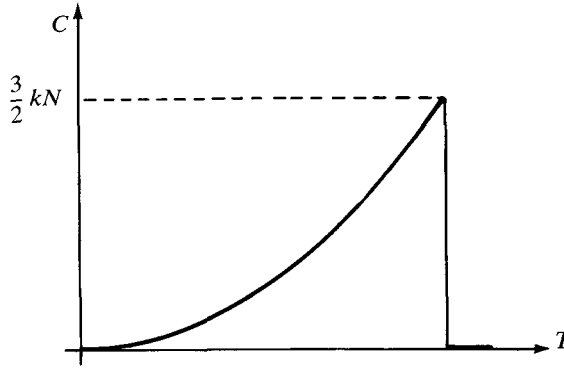
$$E = -\frac{1}{2} qJN \frac{3(T_c - T)}{T_c} = \frac{3}{2} kN (T - T_c).$$

La chaleur spécifique  $C$  en champ nul est donnée par la dérivée de  $E$  par rapport à  $T$  :

$$C = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{B=0} = \frac{3}{2} kN. \quad (20)$$

Comme  $C$  est évidemment nulle pour  $T > T_c$ , la *chaleur spécifique est discontinue*, avec une discontinuité  $\frac{3}{2} kN$  à  $T = T_c$ .

A nouveau on peut calculer  $C$  pour toute valeur de  $T$  par résolution numérique de l'équation (14) (figure 11) :

Figure 11. Chaleur spécifique en fonction de  $T$ .

#### C.4. Exposants critiques $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\delta$

On constate expérimentalement que l'aimantation spontanée, la susceptibilité, l'isotherme critique et la chaleur spécifique obéissent à des lois de puissance au voisinage de  $T = T_c$  et on définit des *exposants critiques* (\*)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  (également appelés *indices critiques*)

$$C \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (21.a)$$

$$M_0 \sim (T_c - T)^\beta \quad (T < T_c) \quad (21.b)$$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (21.c)$$

$$B \sim \mathcal{M}^\delta \quad (T = T_c) . \quad (21.d)$$

Les valeurs prédites par l'approximation du champ moyen sont :  $\alpha = 0$  (discontinuité de  $C$ ) ;  $\beta = 1/2$  ;  $\gamma = 1$  ;  $\delta = 3$ .

Examinons maintenant d'un peu plus près l'approximation du champ moyen. A cette approximation on néglige toute fluctuation des spins, puisque l'on remplace chaque spin par sa valeur moyenne. Avec la formulation qui vient d'être exposée, cette approximation est pour le moment incontrôlable, et on peut simplement évaluer sa validité en comparant aux résultats exacts ( $D = 1$  et  $D = 2$ ), ou numériques ( $D = 3$ ).

(\*) On définit parfois des exposants  $\alpha'$ ,  $\gamma'$ , pour  $T < T_c$  ; par exemple :

$$\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma} : T > T_c ; \quad \chi \sim (T_c - T)^{-\gamma'} : T < T_c .$$

Il semble (et la théorie le confirme) que l'on ait toujours  $\alpha = \alpha'$ ,  $\gamma = \gamma'$  et ces exposants primés ont été abandonnés.

Pour  $D = 1$ , l'approximation du champ moyen est tout simplement catastrophique : elle prédit une transition là où nous venons de prouver qu'il n'en existe pas ! (Il vaut la peine de remarquer que *les exposants critiques sont indépendants de  $D$  à l'approximation du champ moyen.*)

La situation est un peu meilleure pour  $D = 2$  où nous savons qu'il existe une transition. Toutefois à l'approximation du champ moyen la température de transition  $T_c$  est :

$$kT_c = 4J \quad (q = 4)$$

tandis que la solution d'Onsager donne :

$$kT_c = 2.27J.$$

De façon générale l'approximation du champ moyen tend à favoriser l'apparition d'une transition de phase : à  $D = 1$ , elle prédit une transition là où il n'y en a pas ; à  $D = 2$  elle la prédit à une température plus élevée que la température réelle. En effet les fluctuations, négligées à l'approximation du champ moyen, s'opposent à l'apparition d'une transition.

Il est intéressant de comparer les exposants critiques ; pour  $D = 2$  on compare aux résultats exacts (Onsager) et pour  $D = 3$  aux résultats numériques.

Exposant	Champ moyen	$D = 2$	$D = 3$
$\alpha$	discont.	$\ln  T - T_c $	$0.01 \pm 0.01$
$\beta$	0.5	0.125	$0.312 \pm 0.003$
$\gamma$	1	1.75	$1.250 \pm 0.002$
$\delta$	3	15 (*)	$5.0 \pm 0.05$

On constate sur ce tableau que les résultats du champ moyen sont d'autant meilleurs que la dimension de l'espace est grande. Intuitivement on peut comprendre que négliger les fluctuations est une meilleure approximation quand le nombre de plus proches voisins est grand ( $q = 6$  pour  $D = 3$  et  $q = 2$  pour  $D = 1$ ). Cependant, ce raisonnement n'est pas entièrement correct, car c'est la dimension d'espace qui compte : augmenter le nombre d'interactions ne change pas les exposants critiques, ainsi qu'on le verra par la suite.

En fait l'approximation du champ moyen devient exacte lorsque  $D \rightarrow \infty$  (les exposants critiques sont corrects dès  $D > 4$  ; cf. chapitre III), ou dans le cas d'interactions à très longue portée : par exemple si chaque spin interagit avec tous les autres spins du réseau, avec une

(\*) En fait le résultat  $\delta = 15$  est très plausible (loi d'échelle) mais n'a pas été prouvé analytiquement. Les calculs numériques donnent  $\delta = 15.04 \pm 0.07$ .

constante de couplage  $J/N$  (cf. exercice 3), on montre que la solution exacte est identique à celle du champ moyen. Le nombre de spins qui interagissent avec un spin donné est si grand qu'il est légitime de remplacer  $S_i$  par sa valeur moyenne  $M$ .

## D. FONCTIONS DE CORRÉLATION

### D.1. Définition, fonction génératrice

Nous avons déjà introduit la fonction de corrélation de deux spins au paragraphe B. Comme cet objet va jouer un rôle crucial dans toute la suite, nous allons maintenant énoncer un certain nombre de définitions et de propriétés utiles. Ce paragraphe est une introduction, sur un exemple élémentaire, à des techniques qui seront développées de façon plus systématique au chapitre V.

Au paragraphe B, la fonction de corrélation  $G_{ij}$  de deux spins a été définie comme étant la valeur moyenne  $\langle S_i S_j \rangle$ . Cette définition est satisfaisante lorsque  $\langle S_i \rangle = 0$ , c'est-à-dire pour  $T > T_c$  et  $B = 0$ . Lorsque  $\langle S_i \rangle \neq 0$ , dire que deux spins sont décorrélés implique que  $\langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = M^2$ . Il est donc logique de définir  $G_{ij}$  de façon générale par :

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle . \quad (22)$$

Si l'on suppose que  $G_{ij}$  décroît exponentiellement ( $G_{ij} \sim \exp(-r_{ij}/\xi)$ ), on trouve qualitativement le comportement de la figure 12 pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$  ( $\langle S_i^2 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$ ).

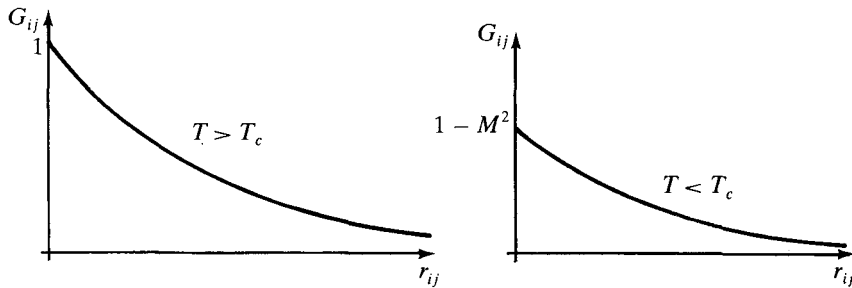


Figure 12.

Il est utile de relier  $G_{ij}$  à une dérivée seconde de la fonction de partition  $Z[B_i]$ , calculée en présence d'un champ magnétique non uniforme  $B_i$  :

$$Z[B_i] = \sum_{\{s_k\}} \exp \left( -\beta \left( H_0 - \mu \sum_k B_k S_k \right) \right) \quad (23)$$

où  $\beta = 1/kT$  (\*) et  $H_0$  est le hamiltonien (2). La valeur moyenne  $\langle S_i \rangle$  est donnée par :

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_k\}} S_i \exp \left( -\beta \left( H_0 - \mu \sum_k B_k S_k \right) \right)$$

soit :

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{\beta \mu Z} \frac{\partial Z}{\partial B_i} = \frac{1}{\beta \mu} \frac{\partial \ln Z}{\partial B_i}. \quad (24)$$

Continuons le processus en dérivant une seconde fois par rapport à  $B_j$  :

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_k\}} S_i S_j \exp \left( -\beta \left[ H_0 - \mu \sum_k B_k S_k \right] \right)$$

soit :

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{(\beta \mu)^2} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial B_i \partial B_j}$$

d'où l'on déduit :

$$G_{ij} = \frac{1}{(\beta \mu)^2 Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial B_i \partial B_j} - \left( \frac{1}{\beta \mu Z} \frac{\partial Z}{\partial B_i} \right) \left( \frac{1}{\beta \mu Z} \frac{\partial Z}{\partial B_j} \right)$$

soit :

$$G_{ij} = \frac{1}{(\beta \mu)^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B_i \partial B_j}. \quad (25)$$

La valeur moyenne  $\langle S_i \rangle$  et la corrélation  $G_{ij}$  s'obtiennent par dérivation de la fonction de partition ; on pourrait généraliser le processus à des fonctions de corrélation de plusieurs spins (ce qui sera fait au chapitre V). Pour cette raison  $Z[B_i]$  est appelée *fonction génératrice des fonctions de corrélation*. On remarquera aussi que dériver  $Z$  donne  $\langle S_i S_j \rangle$ , alors que dériver  $\ln Z$  donne directement  $G_{ij}$ , qui est appelée *fonction de corrélation connexe*. De façon générale

(\*) Ne pas confondre avec l'exposant critique  $\beta$ . Il est impossible de respecter les notations traditionnelles sans introduire un (petit) risque de confusion. J'ai jugé préférable de prendre ce risque, plutôt que d'introduire de nouvelles notations.

(cf. chapitre V), le logarithme de  $Z$ ,  $\ln Z$ , est la fonction génératrice des fonctions de corrélation connexes. On notera également que même si le champ magnétique physique est nul, il peut être utile d'introduire un champ magnétique fictif pour calculer les fonctions de corrélation à l'aide de (25) ; il suffit de poser  $B = 0$  dans le résultat final :

$$G_{ij}|_{B=0} = \frac{1}{(\beta\mu)^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B_i \partial B_j} \Big|_{B=0}.$$

La fonction de corrélation possède une propriété très importante : c'est aussi (à un facteur  $\beta\mu$  près) la réponse du spin  $S_i$  à une variation du champ magnétique au site  $j$ . Pour le montrer, il suffit de calculer  $\partial \langle S_i \rangle / \partial B_j$  à partir de (24) :

$$\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j} = \frac{1}{\beta\mu} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B_i \partial B_j} = \beta\mu G_{ij}. \quad (26)$$

On remarquera que c'est bien la fonction de corrélation *connexe*  $G_{ij}$  qui intervient dans (26).

## D.2. Théorème fluctuation-dissipation

Soit  $\mathcal{M}$  l'aimantation (ou moment magnétique total) :

$$\mathcal{M} = \mu \sum_i \langle S_i \rangle = \mu \langle \mathcal{S} \rangle$$

où  $\mathcal{S} = \sum_i S_i$  est le spin total. La dérivée  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B_j}$  est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B_j} = \mu \sum_i \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j} = \beta\mu^2 \sum_i G_{ij}.$$

Pour un système macroscopique ( $N \rightarrow \infty$ ), ou bien avec des conditions aux limites périodiques,  $G_{ij}$  est invariant par translation dans un champ magnétique uniforme (figure 13). Tous les  $B_j$  étant égaux à  $B$ ,  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B}$  est donné par :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B_j} \frac{\partial B_j}{\partial B} = \beta\mu^2 \sum_{i,j} G_{ij}.$$

On obtient un « théorème fluctuation-dissipation » reliant la susceptibilité  $\chi$  à la fonction de corrélation :

$$\chi = \beta\mu^2 \sum_{ij} G_{ij} = \beta\mu^2 (\langle \mathcal{S}^2 \rangle - \langle \mathcal{S} \rangle^2)$$

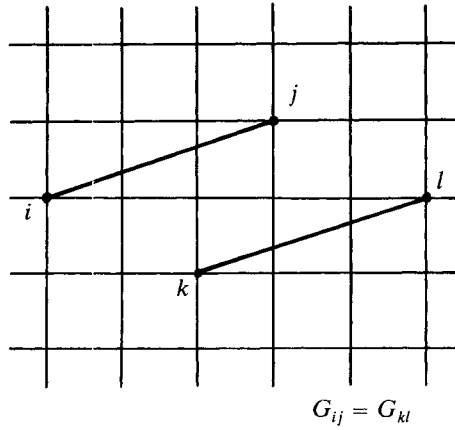


Figure 13.

la deuxième égalité montrant que  $\chi$  est toujours positive pour un système de spins (\*). Lorsque la longueur de corrélation est petite par rapport à la taille du système, l'invariance par translation permet d'écrire :

$$\chi \simeq N \beta \mu^2 \sum_j G_{ij} \quad (27)$$

la somme sur  $j$  étant en fait indépendante de  $i$ .

### D.3. Mesure de la fonction de corrélation

La fonction de corrélation est un outil théorique intéressant, mais son importance principale vient de ce que l'on peut la mesurer expérimentalement. L'expérience consiste à diffuser des neutrons lents sur un ferromagnétique. Le moment magnétique des neutrons interagit avec celui des électrons, et l'amplitude de diffusion d'un neutron par un électron au site  $i$  est proportionnelle au spin  $S_i$ . Soit  $A$  l'amplitude de diffusion par un spin situé à l'origine des coordonnées ; d'après les règles de la mécanique quantique <sup>(1)</sup>, l'amplitude de diffusion  $A_i$  par un spin de même orientation situé en  $\mathbf{r}_i$  au site  $i$  vaut :

$$A_i = A e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_i} = A e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i}$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde incident et  $\mathbf{k}'$  le vecteur d'onde diffusé.

(\*) Naturellement il existe des corps à susceptibilité négative (corps diamagnétiques), mais le mécanisme d'aimantation est totalement différent.

Comme de plus l'amplitude de diffusion est proportionnelle au spin

$$A_i \sim S_i e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i}$$

on trouve, après avoir effectué une moyenne statistique, que la section efficace est proportionnelle à :

$$\sigma = \left\langle \left| \sum_i S_i e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \right|^2 \right\rangle = \sum_{i,j} \langle S_i S_j \rangle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}.$$

En remarquant que le terme  $\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$  de  $G_{ij}$  ne contribue que pour  $\mathbf{q} = 0$ , et en utilisant l'invariance par translation, on trouve que la section efficace est proportionnelle à la transformée de Fourier  $\tilde{G}(\mathbf{q})$  de la fonction de corrélation ( $\mathbf{q} \neq 0$ ) :

$$\sigma \sim N \sum_j G_{ij} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} = N \tilde{G}(\mathbf{q}) \quad (28)$$

(la somme sur  $j$  dans (28) est indépendante du site  $i$ ). Notez que le théorème fluctuation-dissipation peut aussi s'écrire :

$$\chi \sim N \tilde{G}(\mathbf{q} = 0). \quad (29)$$

#### D.4. Exposants critiques $\eta$ et $\nu$

Au voisinage de  $T = T_c$ , l'expérience montre que pour  $q \ll 1/a$  ( $a$  = pas du réseau) la fonction de corrélation est bien représentée par une expression du type :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^{2-\eta}} f(q\xi) \quad (q \ll 1/a), \quad (30)$$

la longueur de corrélation  $\xi$  tendant vers l'infini suivant une loi de puissance si  $T \rightarrow T_c$  :

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}. \quad (31)$$

La forme (30) de la fonction de corrélation sera rendue plausible au paragraphe E, et justifiée au chapitre III.

Les équations (30) et (31) définissent les exposants critiques  $\eta$  et  $\nu$ . La fonction  $f(x)$  possède une limite finie pour  $x \rightarrow \infty$ , de sorte que pour  $T = T_c$  :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) \sim q^{-2+\eta} \quad (T = T_c). \quad (32)$$

On peut maintenant repasser dans l'espace ordinaire par transformation de Fourier inverse (cf. appendice A) :

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{f(q\xi)}{q^{2-\eta}}.$$

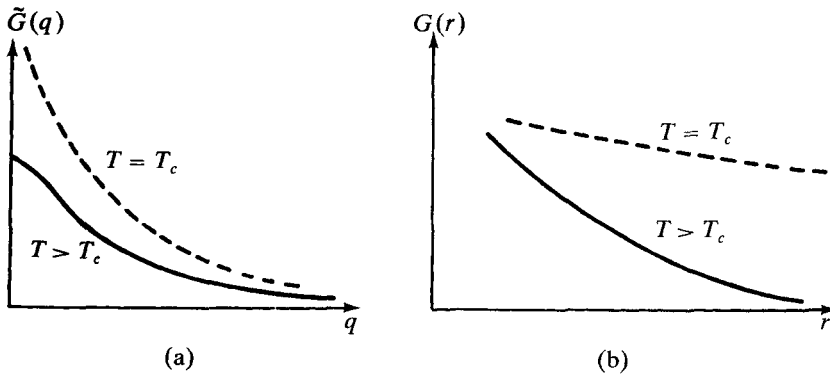
Effectuons le changement de variables  $\mathbf{q} = \mathbf{u}/\xi$  :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \xi^{-D} \int \frac{d^D u}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}/\xi)} f(u)}{(q\xi)^{2-\eta} \xi^{\eta-2}} \\ &= \frac{h(r/\xi)}{\xi^{D+\eta-2}} = \frac{h(r/\xi)}{r^{D+\eta-2} (\xi/r)^{D+\eta-2}} = \frac{g(r/\xi)}{r^{D+\eta-2}}. \end{aligned}$$

Comme la forme de  $\tilde{G}(\mathbf{q})$  est supposée valable pour  $q \ll 1/a$ , celle obtenue pour  $G(\mathbf{r})$  le sera si  $r \gg a$  :

$$G(\mathbf{r}) = \frac{g(r/\xi)}{r^{D+\eta-2}} \quad (r \gg a). \quad (33)$$

Lorsque  $r \rightarrow \infty$ , la fonction  $g(r/\xi)$  se comporte exponentiellement :  $g(r/\xi) \sim \exp(-r/\xi)$ . Pour  $T = T_c$ , la fonction de corrélation décroît comme une puissance de  $r$ . Pour  $\eta < 2$  (ce qui est le cas en pratique car on trouve toujours  $\eta$  voisin de zéro), l'intégrale sur  $\mathbf{r}$  de  $G(\mathbf{r})$  (ou bien sa transformée de Fourier pour  $\mathbf{q} = 0$ ) diverge à  $T = T_c$ . D'après (27), ceci implique aussi la divergence de la susceptibilité à  $T = T_c$ . Le comportement qualitatif des fonctions  $G(r)$  et  $\tilde{G}(q)$  est donné sur la figure 14.



**Figure 14.** Comportement qualitatif de la fonction de corrélation dans l'espace ordinaire (b) et dans l'espace de Fourier (a).

**Loi d'échelle**

Lorsque  $T \neq T_c$ ,  $\tilde{G}(0)$  est fini. Il est donc nécessaire que  $f(q\xi) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} (q\xi)^{2-\eta}$  pour compenser le facteur divergent  $q^{-2+\eta}$ . Ceci

implique que  $\tilde{G}(0) \sim \xi^{2-\eta} \sim |T - T_c|^{-\nu(2-\eta)}$ .

Mais  $\tilde{G}(0) \sim \chi$  (équation (29)), et l'exposant  $\gamma$  est défini par (cf. équation (21.c)) :

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}.$$

Par identification on obtient la relation entre exposants critiques, aussi appelée *loi d'échelle* :

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (34)$$

**Résumé des exposants critiques**

Les équations (21), (30) et (31) définissent six exposants critiques  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$  et  $\nu$  qu'il est utile de résumer :

Chaleur spécifique :	$C \sim  T - T_c ^{-\alpha}$	
Paramètre d'ordre :	$M \sim (T_c - T)^\beta$	$(T < T_c)$
Susceptibilité :	$\chi \sim  T - T_c ^{-\gamma}$	
Isotherme critique :	$B \sim \mathcal{M}^\delta$	$(T = T_c)$
Fonction de corrélation $T = T_c$ :	$\tilde{G}(\mathbf{q}) \sim q^{-2+\eta}$	$(T = T_c)$
Longueur de corrélation :	$\xi \sim  T - T_c ^{-\nu}$	

**D.5. Transformation de Legendre**

Introduisons un dernier outil, qui sera utilisé au chapitre suivant pour l'étude des fonctions de corrélation, en généralisant une notion familière en thermodynamique, celle de transformation de Legendre. En thermodynamique classique, la différentielle  $dF$  de l'énergie libre est donnée par :

$$dF = -S dT - \mathcal{M} dB; \quad \mathcal{M} = - \left. \frac{\partial F}{\partial B} \right|_T.$$

On définit le potentiel thermodynamique (ou potentiel de Gibbs)  $\Gamma$ , transformé de Legendre de  $F$ , par :

$$\Gamma = F + \mathcal{M}B$$

d'où :

$$d\Gamma = -S dT + B d\mathcal{M} ; \quad B = \partial\Gamma / \partial\mathcal{M} \Big|_T.$$

Nous allons généraliser cette transformation au cas d'un champ magnétique non uniforme  $B_i$  ; pour simplifier les notations, posons  $\beta = \mu = 1$  et ignorons la dépendance par rapport à  $T$  qui ne joue aucun rôle dans l'argument qui va suivre ; la relation (25) devient alors :

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B_i \partial B_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial B_i \partial B_j}$$

tandis que le potentiel  $\Gamma$  sera défini par :

$$\Gamma = \sum_i M_i B_i - W \quad \text{avec} \quad M_i = \langle S_i \rangle = \frac{\partial W}{\partial B_i} \Big|_T.$$

Dans ces conditions :

$$d\Gamma = \sum_i B_i dM_i$$

ce qui implique :

$$B_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} \Big|_T.$$

Examinons maintenant :

$$\frac{\partial B_i}{\partial M_j} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j}.$$

Cette quantité n'est autre que l'inverse (au sens des matrices) de  $G_{ij}$  ; en effet :

$$\sum_j \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j} G_{jk} = \sum_j \frac{\partial B_i}{\partial M_j} \frac{\partial M_j}{\partial B_k} = \delta_{ik}$$

d'où le résultat :

$$G_{ij}^{-1} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j}. \quad (35)$$

## E. DESCRIPTION QUALITATIVE DES PHÉNOMÈNES CRITIQUES

Considérons un ferromagnétique à une température  $T > T_c$ . On observe des amas de spins en haut et des amas de spins en bas, la taille de ces amas étant de l'ordre de la longueur de corrélation  $\xi$  (en moyenne : le système de spins fluctue, on trouve évidemment des amas de spins de taille  $> \xi$  et d'autres de taille  $< \xi$  ; par ailleurs à l'intérieur d'amas de spins en haut on peut trouver des îlots de spins en bas, etc.). (On trouvera des simulations numériques très instructives dans l'article de Wilson dans *Pour la Science*.)

Diminuons la température en nous approchant de  $T_c$ . La taille moyenne des amas augmente (la longueur de corrélation augmente). Lorsque  $T = T_c$ , on trouve des amas de toutes les tailles possibles. A l'intérieur de mers de spin en haut, on trouve des îles de spin en bas, à l'intérieur desquelles on peut observer des lacs de spin en haut, etc. A la température de transition, *les fluctuations ont toutes les tailles possibles : il n'y a plus d'échelle de longueur*, ce que l'on exprime aussi en disant que la physique est *invariante d'échelle* au point critique.

La transition de phase présente un aspect remarquable : nous sommes partis d'une interaction à courte portée (entre plus proches voisins), et nous découvrons des corrélations à longue portée ( $\sim \xi$ ) et même de portée infinie à  $T = T_c$ . Ces corrélations rendent inopérants tous les développements perturbatifs classiques, qui s'appliquent uniquement lorsque les corrélations ont une courte portée (quelques Å). Il peut par exemple arriver que la théorie des perturbations se traduise par l'apparition d'intégrales du type (cf. chapitre V) :

$$\int_a^\xi \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (36)$$

Dans cette intégrale,  $\lambda$  est la longueur d'onde d'une fluctuation, limitée évidemment par le pas  $a$  du réseau (condition de Brillouin). Ce résultat montre que dans l'étude des phénomènes critiques toutes les longueurs d'onde comprises entre  $a$  et  $\xi$  ont une égale importance : les fluctuations de longueur d'onde comprise entre  $\lambda = a$  et  $\lambda = 2a$  donnent une contribution  $\ln 2$  à l'intégrale, celles dont la longueur d'onde est comprise entre  $\lambda = 10^3 a$  et  $\lambda = 2 \cdot 10^3 a$  donnent aussi une contribution  $\ln 2$  à l'intégrale. Comme  $\xi/a \rightarrow \infty$  quand  $T \rightarrow T_c$ , la théorie des perturbations est inapplicable, car l'intégrale (36) diverge logarithmiquement pour les grandes longueurs d'onde.

Cette complexité possède en revanche un côté positif : comme la transition de phase est un phénomène coopératif à grande échelle, on peut imaginer que certaines caractéristiques de la transition ne dépen-

dent que de propriétés très générales (dimension  $D$  de l'espace, dimension  $n$  du paramètre d'ordre, symétries du couplage des variables locales) et non du détail des interactions. Cette propriété est appelée *universalité* (\*). Par exemple les modèles d'Ising sur réseau carré et sur réseau triangulaire possèdent les mêmes exposants critiques, qui sont des quantités universelles. Au contraire une quantité comme la température de transition dépend des détails de l'interaction : elle n'est pas universelle.

Une autre propriété du point de transition vaut d'être mentionnée : le modèle d'Ising en dimension 2 et sur un réseau carré n'est évidemment pas invariant par rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du réseau. De fait si on mesure la longueur de corrélation suivant une direction  $\hat{n}$ , repérée par un angle  $\alpha$  (figure 15), la longueur de corrélation dépend de  $\alpha$  ; par exemple :

$$\frac{\xi(\alpha = 0)}{\xi(\alpha = \pi/4)} = \sqrt{2} \frac{\ln \left( \frac{2v}{1-v^2} \right)}{\ln \left( v \frac{1+v}{1-v} \right)}$$

où  $v = \tanh(J/kT)$ . A haute température ce rapport est très différent de 1. Mais quand on se rapproche de  $T_c$ , ce rapport tend vers 1 : la longueur de corrélation est la même dans toutes les directions et le système devient invariant par rotation.

$v$	$\xi(\alpha = 0)/\xi(\alpha = \pi/4)$	$\xi$ le long des axes (en unité de $a$ )
0.05	1.12	0.35
0.1	1.08	0.48
0.2	1.03	0.83
0.3	1.01	1.71
$\sqrt{2} - 1 = 0.414$	1.00	$\infty$

Dès que la longueur de corrélation atteint  $2a$ , la violation de l'invariance par rotation est inférieure à 1 %. Ceci suggère que le réseau ne joue pas de rôle fondamental au voisinage de  $T_c$ , ce qui permettra d'utiliser un modèle continu par la suite.

(\*) Une exception est le « modèle à 8 vertex » de Baxter, où les exposants critiques varient continûment.

Les remarques qui précèdent permettent d'essayer de deviner la forme de la fonction de corrélation. L'isotropie au voisinage du point critique permet d'écrire :

$$G(\mathbf{r}) = h(r, a)$$

où  $a$  représente l'ensemble des paramètres microscopiques de l'interaction (pas du réseau, constantes de couplages), écrits sous une forme telle qu'ils aient la dimension d'une longueur (\*). Ecrivons le rapport de deux fonctions de corrélation aux points  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1, r_2 \gg a$ ) :

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \varphi \left( \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_1}{a} \right) \quad (37)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\varphi$  est une quantité sans dimension. L'invariance d'échelle au point critique implique que  $\varphi$  ne peut pas dépendre de  $a$  à  $T = T_c$  (les chapitres suivants s'attacheront d'ailleurs à définir la limite  $a \rightarrow 0$  du rapport (37)) :

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \varphi \left( \frac{r_1}{r_2} \right).$$

Cette équation exprime l'invariance d'échelle au point critique et peut s'écrire :

$$G(r/s) = \varphi(s) G(r). \quad (38)$$

Elle donne le comportement de la fonction de corrélation dans une dilatation ;  $s$  est le *facteur de dilatation*. D'autre part on a la loi de groupe :

$$G \left( \frac{r}{s_1 s_2} \right) = \varphi(s_1 s_2) G(r) = \varphi(s_1) \varphi(s_2) G(r)$$

ce qui implique que  $\varphi(s)$  est une puissance :  $\varphi(s) = s^\lambda$ , d'où  $G(r) = cr^{-\lambda}$ . Ecrivant  $\lambda = D - 2 + \eta$ , on justifie le comportement en loi de puissance au point critique :

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{D-2+\eta}}.$$

Lorsque  $T$  est voisin mais différent de  $T_c$ , on suppose qu'il existe une longueur caractéristique, et une seule, la longueur de corrélation  $\xi$ .

(\*) Si un paramètre  $b$  a pour dimension  $L^\alpha$ , il suffit de prendre pour paramètre  $b^{1/\alpha}$ .

Dans ce cas, la forme de  $G(r)$  est fixée à (cf. équation (33)) :

$$G(r) = \frac{g(r/\xi)}{r^{D-2+\eta}} \quad (39)$$

et  $g(x) \rightarrow c$  quand  $x \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Ainsi, lorsque  $a \ll r \ll \xi$ , on retrouve le comportement critique, ce qui est souhaitable car dans cette région tout se passe comme si la longueur de corrélation était infinie.

Quelques explications, pour terminer, sur la dénomination « phénomènes critiques ». Le diagramme de phase d'un corps standard (par exemple l'argon) a la forme classique de la figure 16. Au point critique ( $C$ ), la distinction entre gaz et liquide disparaît (la différence entre un liquide et un gaz est seulement *quantitative* ; celle entre un solide et un liquide (ou un gaz) est *qualitative* ; un solide possède un ordre à longue distance ; aussi n'existe-t-il pas de point critique sur la courbe séparant le solide du liquide).

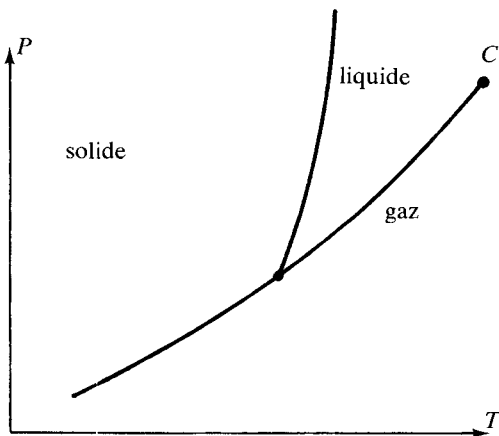


Figure 16. Diagramme de phase.

A l'approche du point critique, les fluctuations de densité sont de plus en plus grandes. La longueur de corrélation de ces fluctuations tend vers l'infini. La diffusion de la lumière par les fluctuations de densité devient très importante lorsque la taille de ces fluctuations atteint la longueur d'onde utilisée. Le fluide prend alors un aspect laiteux (opalescence critique). Le phénomène est très analogue à celui de la transition ferromagnétique avec les correspondances :

fluctuation d'aimantation	→	fluctuation de densité
paramètre d'ordre $M$	→	$\rho_L - \rho_G$ ( $\rho_L$ ( $\rho_G$ ) = densité du liquide (gaz) )
diffusion de neutrons	→	diffusion de la lumière

A cause de cette analogie (profonde), on donne souvent aux transitions de phase de deuxième espèce le nom de phénomènes critiques ; la température de transition  $T_c$  est souvent appelée *température critique*.

Il existe même une approximation de champ moyen pour les propriétés du point critique : celle-ci n'est autre que l'équation de Van der Waals <sup>(2)</sup>.

## EXERCICES

### 1) Symétrie brisée en mécanique

On considère un cerceau vertical de rayon  $a$  sur lequel peut coulisser sans frottement un anneau de masse  $m$ . L'anneau est relié au sommet  $A$  du cerceau par un ressort de longueur au repos  $l_e = a$  et de raideur  $C$  (figure 17).

(a) Montrer que la position d'équilibre stable est  $\theta = 0$  quand la raideur du ressort  $C$  est telle que  $Ca < 2mg$  ( $g$  = accélération de la pesanteur).

(b) Montrer que si  $Ca > 2mg$  il y a deux positions d'équilibre stable.

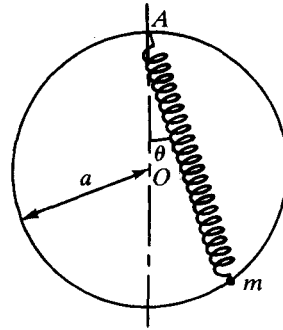


Figure 17.

(c) Tracer l'énergie potentielle  $U(\theta)$  de la masse  $m$  pour  $Ca = mg$  et  $Ca = 4mg$ , et discuter la forme des deux courbes.

### 2) Autre méthode pour le modèle d'Ising $D = 1$

Pour cette méthode, il est plus simple d'utiliser des conditions aux limites cycliques : le spin  $N + 1$  est identique au spin 1.

(a) Montrer que la fonction de partition peut s'écrire :

$$Z_N = \sum_{\{s_i\}} \mathbb{V}_{s_1 s_2} \mathbb{V}_{s_2 s_3} \cdots \mathbb{V}_{s_N s_1} = \text{Tr} (\mathbb{V})^N$$

où  $\mathbb{V}$  est la matrice :

$$\mathbb{V} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S = 1 & S = -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S = 1 \\ S = -1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

En déduire que si  $N \rightarrow \infty$ ,  $\lim Z_N^{1/N} = \lambda_1 = 2 \cosh K$  où  $\lambda_1$  est la plus grande valeur propre de  $\mathbb{V}$ .

(b) Montrer qu'en présence d'un champ magnétique uniforme :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_N^{1/N} = e^K \operatorname{ch} L + [e^{2K} (\operatorname{sh} L)^2 + e^{-2K}]^{1/2}; \quad L = \frac{\mu B}{kT}.$$

(c) Calculer l'énergie interne et la chaleur spécifique en champ nul.

(d) Toujours en champ nul, calculer la fonction de corrélation  $\langle S_i S_j \rangle$  en utilisant la méthode de la question (a). On supposera que  $N \rightarrow \infty$ .

### 3) Théorie du champ moyen et interactions à longue portée

On se propose de montrer que la théorie du champ moyen devient exacte pour le modèle d'Ising, lorsque *tous les spins interagissent deux à deux de manière identique*. Soit  $N$  le nombre de spins ( $N \gg 1$ ). Il y a donc  $N^2/2$  paires de spins, et l'interaction doit être proportionnelle à  $1/N$  de telle sorte que l'énergie soit proportionnelle à  $N$ .

(a) Le hamiltonien du modèle est donné par :

$$H = -\frac{J}{N} \sum_{i,j} S_i S_j; \quad S_i = \pm 1; \quad S_i^2 = 1$$

où la somme porte sur *toutes* les paires  $(i, j)$  (et non pas sur les plus proches voisins), et  $J$  est une constante. Montrer que l'on peut aussi écrire

$$H = -\frac{J}{2N} \left[ \left( \sum_{i=1}^N S_i \right)^2 - N \right].$$

(b) Soit  $M = \langle S \rangle$  l'aimantation par spin :  $-1 \leq M \leq +1$ . Montrer que la dégénérescence d'un état d'aimantation  $M$  est :

$$W(M) = \frac{N!}{\left( \frac{N}{2} (1+M) \right)! \left( \frac{N}{2} (1-M) \right)!}.$$

(c) Montrer que la fonction de partition  $Z$  peut s'écrire

$$Z = \sum_M W(M) e^{-H(M)/kT} \quad (1)$$

où  $H(M)$  est la valeur du hamiltonien quand l'aimantation est  $M$ . Evaluer  $Z$  en utilisant la formule de Stirling :  $n! \approx n^n e^{-n}$  et en montrant que la somme sur  $M$  peut être approchée par le plus grand terme de la somme dans (1). Montrer que ce terme est donné par le maximum de la fonction

$$-2F = JM^2 - kT [(1+M) \ln(1+M) + (1-M) \ln(1-M)]. \quad (2)$$

Quelle est l'interprétation physique de  $F$  ?

(d) En cherchant le maximum de  $-F$ , montrer l'existence d'une transition de phase et calculer la température critique  $T_c$ . On pourra remarquer que

$\text{th}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  pour retrouver l'équation caractéristique de la théorie du champ moyen. Quel est le signe de  $F''(M_0)$ , où  $M_0$  est l'aimantation ?

(e) Montrer que pour  $M \rightarrow 0$ ,  $F$  a la forme prévue par la théorie de Landau (cf. chapitre II) :

$$F(T) = F_0 + \frac{1}{2} B(T) M^2 + \frac{1}{4} C(T) M^4$$

avec  $B(T_c) = 0$ . Evaluer  $B(T)$  et  $C(T)$ .

#### 4) Chaleur spécifique à l'approximation du champ moyen

On se propose de déterminer non seulement la discontinuité de la chaleur spécifique, mais aussi la pente de la courbe à  $T = T_c$ .

(a) En allant jusqu'à l'ordre  $M^5$  dans le développement de  $\text{th}^{-1} M$ , montrer que l'aimantation  $M_0$  en champ nul vaut :

$$M_0 \simeq \sqrt{-3t}(1 + \alpha t)$$

et déterminer  $\alpha$ .

(b) En déduire la pente de la chaleur spécifique à  $T_c$  (figure 18) :

$$B = \lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{dC}{dT}.$$

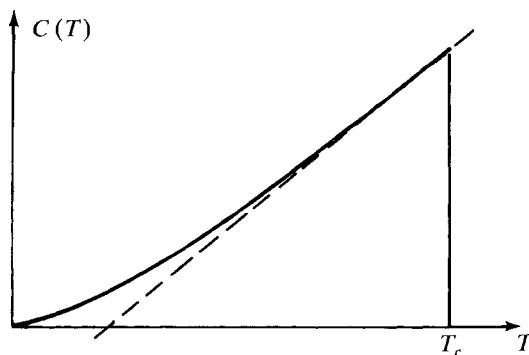


Figure 18.

(c) Quel est le comportement de la chaleur spécifique quand  $T \rightarrow 0$  ?

(d) Déduire de (b) et (c) une représentation graphique qualitative de  $C(T)$  à l'approximation du champ moyen.

### 5) Lois d'échelle

On suppose (ceci sera démontré au chapitre III) que la fonction de corrélation obéit à la « loi d'échelle » :

$$G(t, B, r) = s^{-(D+\eta-2)} G\left(s^{1/\nu} t, s^{y_B} B, \frac{r}{s}\right)$$

( $t = \frac{T - T_c}{T_c}$  et  $s$  est un nombre réel positif).

(a) Montrer que cette loi d'échelle peut être réécrite :

$$G(t, B, r) = r^{-(D+\eta-2)} f\left(\pm 1, \frac{B}{|t|^\Delta}, \frac{r}{|t|^{-\nu}}\right)$$

( $+1 : t > 0$  ;  $-1 : t < 0$  ;  $\Delta = \nu y_B$ ).

(b) En utilisant le théorème fluctuation-dissipation, montrer que la susceptibilité  $\chi$  obéit à la loi :

$$\chi = |t|^{-\nu(2-\eta)} g\left(\pm 1, \frac{B}{|t|^\Delta}\right).$$

Retrouver la loi d'échelle :  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ .

(c) Obtenir le comportement de l'énergie libre  $F$  en remarquant que  $\chi = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial B^2}\right)_T$  :

$$F \sim |t|^{2\Delta-\gamma} h\left(\pm 1, \frac{B}{|t|^\Delta}\right).$$

(d) En éliminant  $\Delta$ , en déduire :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 ; \quad \gamma = \beta(\delta - 1).$$

(e) Montrer que l'équation d'état peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{M}{B^{1/\delta}} = f\left(\frac{t}{B^{1/\beta\delta}}\right).$$

(f) On verra au chapitre III que  $y_B = \frac{1}{2}(D + 2 - \eta)$ . En déduire la loi d'échelle :  $2 - \alpha = \nu D$

(g) Les quatre lois : (1)  $\gamma = \nu(2 - \eta)$  ; (2)  $2 - \alpha = \nu D$  ; (3)  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$  ; (4)  $\gamma = \beta(\delta - 1)$  sont-elles satisfaites dans le cas du modèle d'Ising  $D = 2$  ?

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Pour une introduction générale à la physique du ferromagnétisme, on pourra consulter Kittel, chapitre 15. La solution du modèle d'Ising en dimension 2 est exposée par exemple dans Landau-Lifschitz, chapitre 14. Un exposé très clair de la théorie du champ moyen se trouve dans le livre de F. Reif *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill (1965), chapitre 10, et une introduction aux corrélations dans Ma, chapitre 1. La lecture de l'article de Wilson dans *Pour la Science* (octobre 1979) est particulièrement recommandée, ainsi que celle de l'article de S. Brusch « History of the Lenz-Ising Model », *Reviews of Modern Physics*, **39**, 883 (1967).

<sup>(1)</sup> Cf. par exemple Messiah, chapitre XIX.

<sup>(2)</sup> Cf. Reif, chapitre 10.



## CHAPITRE II

# Théorie de Landau

L'approximation du champ moyen étudiée au chapitre précédent n'est pas toujours très fiable, et on aimerait pouvoir évaluer l'effet des fluctuations qui ont été négligées à cette approximation. La formulation exposée au chapitre I a le mérite de la simplicité, mais l'inconvénient de mal se prêter au calcul des fluctuations. L'objectif de ce chapitre sera d'établir une nouvelle formulation, qui rende possible un tel calcul, ce qui nous conduira à la théorie de Ginzburg-Landau. Dans cette théorie, on se donne un « hamiltonien »  $H_{GL}[\varphi_i]$  dépendant de variables aléatoires  $\varphi_i$  définies sur les sites  $i$  d'un réseau, la probabilité d'une configuration  $[\varphi_i]$  étant proportionnelle à  $\exp(-H_{GL}[\varphi_i])$ . La variable aléatoire  $\varphi_i$ , appelée *variable de champ*, ou simplement *champ*, varie de façon continue dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  ; elle joue le rôle du spin d'Ising du chapitre I qui, lui, ne pouvait prendre que deux valeurs :  $S_i = \pm 1$ . Le paramètre d'ordre reste de dimension 1 ; la généralisation à un paramètre d'ordre de dimension  $n$  sera étudiée ultérieurement (III-E.3).

Il n'est pas évident a priori que la théorie de Ginzburg-Landau ait une relation quelconque avec le modèle d'Ising ; contentons-nous d'affirmer pour le moment que les deux théories appartiennent à la même classe d'universalité, en renvoyant la justification de cette affirmation au chapitre suivant. En réalité, la probabilité  $\exp(-H_{GL}[\varphi_i])$  ne décrit un système de spins qu'au voisinage d'une transition de phase. On peut d'ailleurs s'interroger sur la relation entre les paramètres du hamiltonien  $H_{GL}$  et les paramètres (microscopiques) du modèle de spins initial. Cette relation est assez obscure, bien qu'un élément de réponse soit apporté à l'exercice (1). Cependant la « démonstration » dans cet exercice présente un point faible, et c'est

pourquoi nous éviterons de l'utiliser dans l'exposé. Nous parviendrons à l'expression de  $H_{GL}$  en procédant de façon heuristique, en essayant de deviner les propriétés nécessaires et en exigeant qu'à une certaine approximation, *l'approximation de Landau*, on retrouve les équations du champ moyen. Les corrections à cette approximation permettront d'évaluer l'effet des fluctuations et de décider de sa validité (critère de Ginzburg).

Le paragraphe A est consacré à la déduction heuristique du hamiltonien de Ginzburg-Landau, et la théorie du champ moyen est retrouvée au paragraphe B. On obtiendra en outre une comparaison instructive entre transitions du premier et du second ordre. La fonction de corrélation sera calculée au paragraphe C, ce qui permettra de déterminer les exposants critiques  $\eta$  et  $\nu$ . Enfin le critère de Ginzburg, énoncé au paragraphe D, permettra d'évaluer la validité de l'approximation de Landau, et donc du champ moyen.

## A. HAMILTONIEN DE GINZBURG-LANDAU. APPROXIMATION DE LANDAU

### A.1. Cas d'un seul site

L'approximation du champ moyen consiste à admettre qu'un spin  $S_i$  au site  $i$  est sensible uniquement à une influence moyenne exercée par les autres spins, et l'on peut, dans un premier temps, considérer ce spin isolément. La valeur moyenne  $M$  de  $S_i$  est donnée par l'équation (I.14) ; pour le calcul des exposants critiques, il suffit de développer  $\text{th}^{-1} M$  à l'ordre  $M^2$ , et si l'on se souvient que la température critique  $T_c$  est donnée par  $T_c = qJ/k$ , l'équation (I.14) peut s'écrire :

$$\frac{\mu B}{kT} = M \left( \frac{T - T_c}{T} \right) + \frac{1}{3} M^3. \quad (1)$$

Le résultat pour les exposants critiques dépend uniquement de deux propriétés de l'équation (1) :

- (i) le coefficient de  $M$  s'annule linéairement à  $T = T_c$  ; il est  $> 0$  pour  $T > T_c$  et  $< 0$  pour  $T < T_c$  ;
- (ii) le coefficient de  $M^3$  est positif.

Essayons de reproduire l'équation (1) à l'aide d'un hamiltonien  $H(\varphi)$  dépendant d'une variable aléatoire continue  $\varphi$  ( $-\infty < \varphi < +\infty$ ) telle que  $\langle \varphi \rangle = M$ . A la propriété d'invariance du modèle d'Ising en l'absence de champ extérieur dans la transformation

$S_i \rightarrow -S_i$  correspondra la propriété de parité de  $H(\varphi)$  :  $H(\varphi) = H(-\varphi)$  : nous cherchons évidemment à conserver les symétries du modèle d'Ising. D'autre part le membre de droite de (1) est un polynôme en  $M$  dépendant de deux coefficients, et on peut essayer pour  $H$  un polynôme dépendant aussi de deux coefficients :

$$H(\varphi) = \frac{1}{2!} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 ; \quad u_0 > 0 . \quad (2)$$

Les notations  $r_0$  et  $u_0$  sont conventionnelles en physique statistique, et l'utilité des facteurs  $1/2!$  et  $1/4!$  apparaîtra au chapitre V. La forme de  $H$  dans (2) n'est pas choisie au hasard. En effet pour  $r_0 < 0$ ,  $H$  possède deux minima, suggérant la possibilité d'une brisure de symétrie (figure 1).

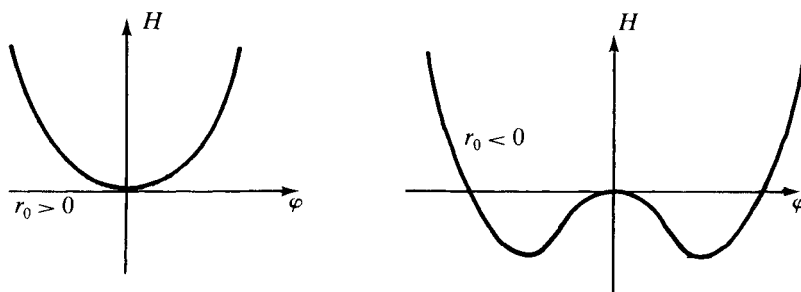


Figure 1.

Par analogie avec le modèle d'Ising, on rajoute un couplage  $-B\varphi$  à un champ magnétique extérieur (en posant  $\mu = 1$  afin d'alléger les notations) et on écrit la fonction de partition :

$$Z = \int d\varphi e^{-H(\varphi) + B\varphi} . \quad (3)$$

On remarquera l'absence du facteur  $1/kT$  dans la définition de  $Z$  : rappelons que nous cherchons à décrire un système physique au voisinage d'un point critique, et que le facteur  $1/kT$ , lentement variable, peut être absorbé dans la définition de  $H$  (de même que l'on peut remplacer les facteurs  $1/T$  dans (1) par  $1/T_c$ ). Le coefficient  $u_0$  dans (2) doit être positif si l'on veut que l'intégrale dans (3) converge :  $\lim_{\varphi \rightarrow \pm \infty} H(\varphi) = +\infty$  ; le signe de  $r_0$  est arbitraire.

La quantité  $H_1(\varphi) = H(\varphi) - B\varphi$  présente un minimum absolu en

un point  $\varphi = \varphi_0$  vérifiant la condition :

$$H'(\varphi_0) = B \quad (4)$$

et l'exponentielle dans (3) possède un maximum à  $\varphi = \varphi_0$  (cf. figure 2).

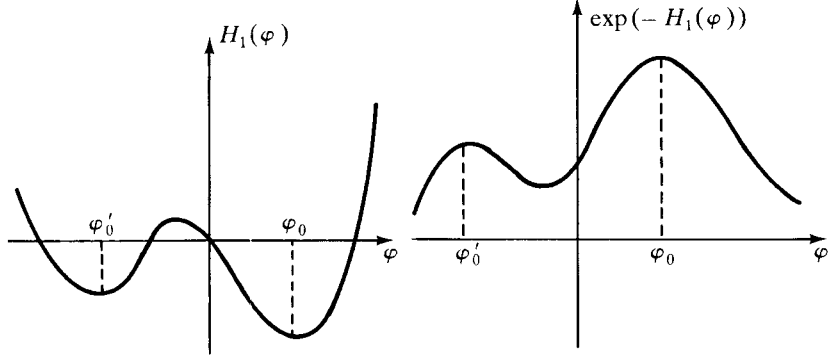


Figure 2. ( $r_0 < 0$ ).

*L'approximation de Landau* consiste à remplacer l'intégrale (3) par la valeur de l'intégrand à  $\varphi = \varphi_0$  :

$$Z \simeq e^{-H_1(\varphi_0)} = e^{-H(\varphi_0) + B\varphi_0}. \quad (5)$$

Cette approximation peut paraître grossière (et l'est effectivement dans le cas d'un seul site) : en particulier si  $B$  est petit et  $r_0 < 0$ , la contribution du deuxième minimum à  $\varphi = \varphi'_0$  est presque aussi importante. Cette objection sera levée un peu plus loin ; continuons le calcul sans trop de scrupules (ce calcul sert aussi d'introduction pédagogique à celui que nous allons effectuer un peu plus loin). Nous obtenons à partir de (5) l'énergie libre (à un facteur près)  $W$  :

$$W = \ln Z = -H(\varphi_0) + B\varphi_0. \quad (6)$$

Comme  $\varphi_0$  est déterminé par la condition de stationnarité (4), l'aimantation  $M = \langle \varphi \rangle$  est égale à  $\varphi_0$  :

$$M = \frac{\partial W}{\partial B} = -H'(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} + \varphi_0 + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} = \varphi_0. \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) permettent d'obtenir le potentiel de Gibbs :

$$\Gamma = MB - W = \varphi_0 B + H(\varphi_0) - B\varphi_0 = H(\varphi_0) = H(M) \quad (8)$$

soit en se reportant à (2) :

$$\Gamma(M) = \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4. \quad (9)$$

Si nous calculons maintenant le champ magnétique :

$$B = \frac{\partial \Gamma}{\partial M} = r_0 M + \frac{1}{3!} u_0 M^3 \quad (10)$$

nous constatons que (10) a exactement les propriétés voulues si  $r_0$  s'annule linéairement à une température  $T_0$  :

$$r_0 = \bar{r}_0 (T - T_0). \quad (11)$$

L'équation (10) est alors une équation de champ moyen décrivant une transition de phase du second ordre dont la température de transition est  $T_c = T_0$ . On notera l'analogie entre l'approximation (5) et celle du champ moyen : dans (5) les fluctuations de  $\varphi$  autour de sa valeur moyenne  $\varphi_0 = \langle \varphi \rangle$  ont été négligées : la variable aléatoire  $\varphi$  a été remplacée purement et simplement par sa valeur moyenne. Notons toutefois que  $\langle \varphi \rangle$  et  $\varphi_0$  ne coïncident qu'à l'approximation de Landau : cf. paragraphe D.

## A.2. Généralisation à $N$ sites

Il faut tout de même se rappeler que l'on souhaite traiter un problème à  $N$  sites, et non à un seul site. La généralisation à  $N$  sites sera non triviale, car elle permettra d'introduire une interaction (ou couplage) entre sites. Une variable aléatoire  $\varphi(\mathbf{x}_i)$  (ou simplement  $\varphi_i$ ) est attachée à chaque site  $\mathbf{x}_i$  (ou  $i$ ). Son domaine de variation est :

$$-\infty < \varphi_i < +\infty.$$

Il est commode d'imposer des conditions aux limites périodiques ; par exemple à une dimension on aura :

$$\varphi(x_i + aN) = \varphi(x_i).$$

Par analogie avec le modèle d'Ising, on introduit une interaction entre plus proches voisins, par exemple entre  $\varphi(\mathbf{x}_i)$  et  $\varphi(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\mu})$ , où  $\boldsymbol{\mu}$  est un vecteur reliant le site  $\mathbf{x}_i$  à l'un de ses plus proches voisins. Plus précisément, à partir d'un site  $\mathbf{x}_i$  on construit un système de  $D$  vecteurs

$$\{\boldsymbol{\mu}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D\}$$

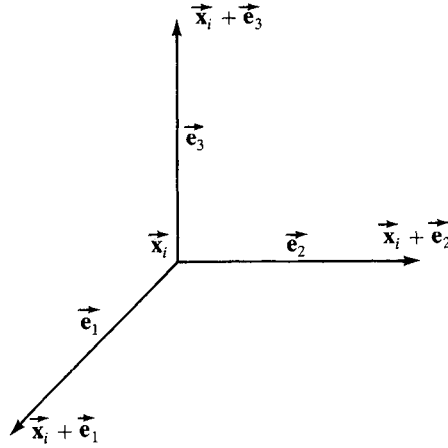


Figure 3.

reliant  $\mathbf{x}_i$  à la moitié de ses plus proches voisins (cf. figure 3), et on définit le « gradient discret » de  $\varphi(\mathbf{x}_i)$ , de composantes :

$$\partial_{\mu} \varphi(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{a} [\varphi(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\mu}) - \varphi(\mathbf{x}_i)] \quad (12)$$

où  $a$  est le pas du réseau. L'interaction entre plus proches voisins peut s'exprimer à l'aide de ce gradient :

$$\sum_{i, \mu} \frac{1}{a^2} [\varphi(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\mu}) - \varphi(\mathbf{x}_i)]^2 = \sum_i (\nabla \varphi(\mathbf{x}_i))^2 \quad (13)$$

et je postulerais la forme suivante du hamiltonien de Ginzburg-Landau :

$$H_{GL}[\varphi_i] = a^D \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi_i^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi_i^4 \right]. \quad (14)$$

L'interaction (13) paraît différente d'une interaction entre plus proches voisins  $\sum_{\mu, i} \varphi(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\mu}) \varphi(\mathbf{x}_i)$ , mais les termes en  $\sum_i (\varphi(\mathbf{x}_i))^2$  conduisent simplement à une redéfinition de  $r_0(T)$  dans (14) (exercice 5 (a)). Le facteur  $a^D$  servira ultérieurement à passer à la limite continue. Insistons sur le fait que  $H_{GL}$  n'est supposé décrire un système physique *qu'au voisinage d'un point critique*. L'expression de la fonction de partition :

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp \left( -a^D \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi_i^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi_i^4 \right] \right) \quad (15)$$

montre bien que la relation entre  $H_{GL}$  et  $Z$  n'est pas la relation classique :  $H_{GL}$  dépend de la température par l'intermédiaire de  $r_0(T)$ , qui est le seul facteur variant rapidement avec  $T$  au voisinage de la transition. En toute rigueur la dénomination « hamiltonien » est abusive, et on peut simplement affirmer que  $\exp(-H_{GL}[\varphi_i])$  est proportionnel à la probabilité d'observer une configuration  $[\varphi_i]$ .

Il est immédiat de généraliser le calcul du paragraphe A.1 au cas de  $N$  variables ; on ajoute à  $H_{GL}$  l'effet d'un champ magnétique extérieur (en écrivant  $H$  au lieu de  $H_{GL}$  afin d'alléger les notations) :

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp \left( -H[\varphi_i] + \sum_i B_i \varphi_i \right) \quad (16)$$

et on cherche le maximum de l'intégrand :

$$B_i = \left. \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_i = \varphi_{i0}} \quad (17)$$

ce qui définit un ensemble de valeurs  $\{\varphi_{i0}\} = \{\varphi_{10}, \dots, \varphi_{N0}\}$  des variables aléatoires  $\varphi_i$ . L'approximation de Landau permet d'obtenir l'énergie libre  $W$  sous la forme :

$$W = \ln Z \simeq -H[\varphi_{i0}] + \sum_i B_i \varphi_{i0}$$

ainsi que l'aimantation  $M_i$  :

$$M_i = \frac{\partial W}{\partial B_i} = - \sum_j \left. \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \right|_{\varphi_{j0}} \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial B_i} + \varphi_{i0} + \sum_j B_j \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial B_i} = \varphi_{i0}$$

et l'on trouve comme précédemment le résultat très simple :

$$\boxed{\Gamma(M_i) = H(M_i)} \quad (18)$$

Cette relation n'est évidemment valable qu'à l'approximation de Landau (cf. paragraphe D), et il ne faut pas confondre l'aimantation  $M_i$ , qui est une valeur moyenne, avec  $\varphi_i$ , qui est une variable aléatoire.

Le passage à  $N$  sites permet de résoudre le problème du minimum secondaire soulevé précédemment : en champ magnétique *uniforme* ( $B_i = B$ ),  $\varphi_{i0} = \varphi_0$ , où  $\varphi_0$  est la valeur trouvée dans le problème à un site, et par conséquent :

$$W \simeq -N [H(\varphi_0) - B\varphi_0] .$$

Lorsque  $N \rightarrow \infty$ , la contribution éventuelle à  $W$  d'un maximum secondaire de  $\exp(-H)$  est supprimée par un facteur  $\exp(-cN)$ , et

quel que soit  $B \neq 0$  la valeur de  $\varphi_0$ , et donc de  $M$ , est non ambiguë. Evidemment si l'on change le signe de  $B$ , le signe de  $\varphi_0$  change également. On voit clairement à l'œuvre le mécanisme de brisure de symétrie, où l'aimantation  $M_0$  ( $M_0 > 0$ ) en champ nul doit être définie par :

$$M_0 = \lim_{B \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \varphi_i \rangle$$

l'ordre des deux limites étant essentiel.

### A.3. Formulation continue

En général on ne conserve pas la forme (14) du hamiltonien de Ginzburg-Landau sur réseau, qui conduit parfois à des calculs un peu pénibles, et on préfère passer à une formulation continue ;  $\mathbf{x}_i$  varie alors dans tout l'espace occupé par le système physique au lieu d'être restreint aux sites d'un réseau :

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}$$

et la variable de champ  $\varphi(\mathbf{x}_i)$  devient une fonction du point  $\mathbf{x}$  :

$$\varphi(\mathbf{x}_i) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) .$$

Comme on s'intéresse à la région critique, où les fluctuations importantes ont une longueur d'onde  $\gg a$ , la formulation continue devrait être équivalente à celle sur réseau. Dans ces conditions, le « gradient discret » (12) peut être remplacé par le gradient ordinaire, qui en est une bonne approximation pour les fluctuations de longueur d'onde  $\gg a$ . Le hamiltonien de Ginzburg-Landau (14) devient à la limite continue :

$$H_{GL} = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 \right] \quad (19)$$

le facteur  $a^D$  dans (14) permettant de passer immédiatement d'une somme de Riemann à une intégrale. Toutefois on garde un souvenir de la définition initiale sur réseau, où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  était limité par la condition de Brillouin, avec par exemple :

$$-\frac{\pi}{a} \leq k_x \leq \frac{\pi}{a} . \quad (20)$$

Il faut donc ajouter à (19) la précision suivante : si  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier de  $\varphi(\mathbf{x})$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est limité en norme par un cut-off (paramètre de coupure)  $\Lambda$  :

$$\boxed{\|\mathbf{k}\| \leq \Lambda \sim \frac{\pi}{a}}. \quad (21)$$

Dans un problème de théorie quantique des champs, où l'espace est continu, il n'y a pas de limitation sur  $\|\mathbf{k}\| : \Lambda \rightarrow \infty$  (cf. 3<sup>e</sup> partie).

Le hamiltonien (19) est une *fonctionnelle* du champ  $\varphi(\mathbf{x})$ , et il nous faut généraliser les notions de dérivation et d'intégration ordinaires aux dérivations et intégrations fonctionnelles, afin de le manipuler commodément. Examinons d'abord la dérivation : soit une fonctionnelle  $I(\varphi)$  du champ  $\varphi$ , obtenue par passage à la limite continue d'une fonction de  $N$  variables  $\varphi_i$ . Afin de simplifier les notations, on supposera que l'espace a une seule dimension ( $D = 1$ ). La dérivée fonctionnelle  $\delta I / \delta \varphi(x)$  sera définie par :

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial \varphi_i}. \quad (22)$$

Exemples :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad I &= \int dy f(y) \varphi^p(y) = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k f_k \varphi_k^p \\ \frac{\partial I}{\partial \varphi_i} &= a p f_i \varphi_i^{p-1}; \quad \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = p f(x) \varphi^{p-1}(x) \\ \text{(b)} \quad I &= \int dy V(\varphi(y)); \quad \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = V'(\varphi(x)) \\ \text{(c)} \quad I &= \int dy \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k \frac{1}{a^2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 \\ \frac{\partial I}{\partial \varphi_i} &= \frac{2}{a} (2 \varphi_i - \varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}); \quad \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{(d)} \quad \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta(x-y) \quad \text{car} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k} = \delta_{ik} \quad (24)$$

$$\text{(e)} \quad \frac{\delta I}{\delta \psi(x)} = \int dy \frac{\delta I}{\delta \varphi(y)} \frac{\delta \varphi(y)}{\delta \psi(x)} \quad \text{car} \quad \frac{\partial I}{\partial \psi_i} = \sum_k \frac{\partial I}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi_i}. \quad (25)$$

La généralisation à une dimension  $D$  quelconque est triviale ; par exemple (c) devient :

$$(f) \quad I = \int d^D y (\nabla \varphi(y))^2 ; \quad \frac{\delta I}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = -2 \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) . \quad (26)$$

Afin d'écrire la fonction de partition, il faut intégrer sur toutes les configurations du champ  $\varphi(\mathbf{x})$ , c'est-à-dire effectuer une intégrale fonctionnelle. La mesure d'intégration  $\mathcal{D}\varphi(\mathbf{x})$  sera définie par :

$$\mathcal{D}\varphi(\mathbf{x}) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{N}(a) \prod_{i=1}^N d\varphi_i \quad (27)$$

où  $\mathcal{N}(a)$  est un facteur choisi de telle sorte que la limite  $N \rightarrow \infty$  existe (cf. VIII-B.1). En fait les constantes multiplicatives (indépendantes de  $B$ ) ne jouent aucun rôle dans le calcul des fonctions de corrélation, car elles s'éliminent entre le numérateur et le dénominateur d'équations comme (I.23) ou (I.25) : la constante  $\mathcal{N}(a)$  est sans importance et il n'est pas indispensable de la préciser. Il est clair cependant que l'équation (27) est à ce stade purement formelle et que l'existence d'une telle mesure d'intégration mériterait d'être étayée par une étude mathématique approfondie. Comme la théorie des intégrales fonctionnelles est complexe, nous nous contenterons de cette définition intuitive, en revenant au besoin à la formulation sur réseau en cas de difficulté. Dans ces conditions nous pouvons écrire la forme finale de la fonction de partition en présence d'un champ magnétique  $B(x)$  :

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi(\mathbf{x}) \exp \left( - \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 - B\varphi \right] \right) \quad (28)$$

Afin de se familiariser avec la formulation continue, le lecteur est invité à retrouver l'approximation de Landau à partir de (28), et à montrer qu'à cette approximation le potentiel de Gibbs est une fonctionnelle  $\Gamma(M)$  de l'aimantation  $M(\mathbf{x})$  donnée par :

$$\Gamma(M) = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla M)^2 + \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4 \right) . \quad (29)$$

Naturellement l'équation (29) s'obtient immédiatement en prenant la limite continue de l'équation  $\Gamma(M_i) = H(M_i)$ . L'approximation de Landau (29) sera exploitée dans les deux paragraphes suivants pour discuter le caractère des transitions de phase et les fonctions de corrélation.

## B. THÉORIE DE LANDAU DES TRANSITIONS DE PHASE

### B.1. Transition du deuxième ordre

Supposons le champ  $B$  uniforme. Dans ce cas l'aimantation  $M$  est également uniforme (dans la formulation continue, l'aimantation par site  $M_i$  devient l'aimantation par unité de volume) et  $\Gamma(M)$  s'écrit :

$$\Gamma(M) = V \left( \frac{1}{2} r_0(T) M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4 \right). \quad (30)$$

Le champ magnétique est donné par :

$$B = \frac{\partial \Gamma}{\partial M} = \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma}{\partial M} = r_0(T) M + \frac{1}{6} u_0 M^3 \quad (31)$$

équation qui redonne tous les résultats du champ moyen.

Il est facile de démontrer (cf. exercice 7) que la chaleur spécifique est discontinue à  $T = T_0$ , avec une discontinuité

$$\Delta C = 3\pi_0^2 T_0^2 / u_0.$$

Nous avons atteint l'objectif exposé en début de chapitre : construire une fonction de partition qui, évaluée à une certaine approximation équivalente à celle du champ moyen, redonne les équations de cette approximation. L'équation (28) permettra d'aller au-delà, c'est-à-dire d'évaluer l'effet des fluctuations qui ont été négligées pour obtenir (29).

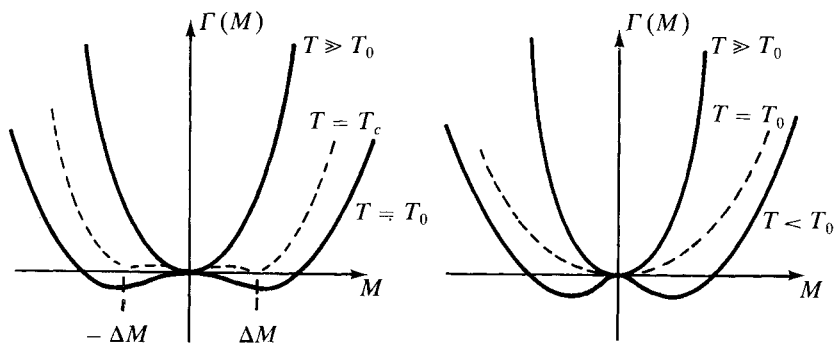
### B.2. Transition du premier ordre

Une modification simple permet de décrire les transitions du premier ordre. Supposons que  $\Gamma(M)$  soit donné par :

$$\frac{1}{V} \Gamma(M) = \frac{1}{2} r_0(T) M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4 + \frac{1}{6!} v_0 M^6 \quad (32)$$

avec cette fois  $u_0 < 0$  et  $v_0 > 0$ . Lorsque  $T = T_0$ , la concavité de  $\Gamma(M)$  à  $M = 0$  est dirigée vers le bas, ce qui entraîne que  $\Gamma(M)$  possède deux minima négatifs. Il est facile de se convaincre, en partant d'une température  $\gg T_0$ , que pour une certaine température  $T_c > T_0$ ,  $\Gamma(M)$  doit présenter trois minima tels que  $\Gamma(M) = 0$  ; un de ces minima est à  $M = 0$ , et les deux autres à  $\pm \Delta M$ . Ceci veut dire qu'à  $T = T_c$ , deux phases, l'une ayant  $M = 0$  et l'autre ayant  $M = \Delta M$  (ou

$-\Delta M$ ) se trouvent en équilibre (figure 4.a). La phase  $M = 0$  est stable pour



(a) Transition du premier ordre.

(b) Transition du deuxième ordre.

Figure 4.

$T > T_c$ , et métastable pour  $T_0 < T < T_c$  : en effet la dérivée seconde du potentiel de Gibbs est positive dans ce domaine de température pour  $M = 0$ . La phase  $M \neq 0$  est stable pour  $T < T_c$  et métastable pour  $T > T_c$ , jusqu'à disparition du minimum secondaire du potentiel de Gibbs. *L'aimantation spontanée, ou le paramètre d'ordre, sont discontinus à la transition* : il s'agit donc d'une transition du premier ordre, où la transition se passe avec coexistence entre deux phases, l'une d'aimantation nulle et l'autre d'aimantation  $\neq 0$ . *Il est possible d'observer des phénomènes de métastabilité* : par exemple pour  $T < T_c$ , le système peut rester un certain temps dans la phase  $M = 0$ . Des exemples de transition de ce type sont discutés dans le livre de Kittel. Remarquons qu'il existe des transitions du premier ordre pour lesquelles on ne peut pas définir de paramètre d'ordre, par exemple la transition solide-liquide.

Dans le cas d'une transition du deuxième ordre, le paramètre d'ordre s'annule de façon continue à  $T = T_c$  ( $= T_0$  à l'approximation de Landau). Il n'y a jamais ni coexistence de deux phases, ni phénomènes de métastabilité ; en effet la phase  $M = 0$  est instable :  $\Gamma''(0) < 0$  pour  $T < T_c$ , et non métastable (figure 4.b).

## C. FONCTIONS DE CORRÉLATION

Dans un champ magnétique  $B(\mathbf{x})$ , la relation entre  $\Gamma$  et  $B$  est donnée par :

$$B(\mathbf{x}) = \frac{\delta \Gamma}{\delta M(\mathbf{x})} = -\nabla^2 M(\mathbf{x}) + r_0(T) M(\mathbf{x}) + \frac{u_0}{6} M^3(\mathbf{x}) \quad (33)$$

si l'on utilise la formulation continue. Dérivant cette équation par rapport à  $B(\mathbf{y})$ , on obtient :

$$\left[ -\nabla_x^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2(\mathbf{x}) \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (34)$$

puisque la fonction de corrélation  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta M(\mathbf{x})}{\delta B(\mathbf{y})}$ .

Dans le cas d'un champ  $B$  uniforme,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  (invariance par translation) ; comme  $M$  est indépendant de  $\mathbf{x}$ , la transformée de Fourier de l'équation (34) a une forme très simple :

$$\left( \mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2 \right) \tilde{G}(\mathbf{q}) = 1$$

soit :

$$\boxed{\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2}} ; \quad (35)$$

ce qui donne dans l'espace des  $\mathbf{x}$  :

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{\mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2} . \quad (36)$$

Il est instructif de retrouver ces résultats en utilisant la formulation discrète (exercice 5).

Plaçons-nous en champ nul ( $B = 0$ ). Il faut distinguer deux cas :

(a)  $T > T_0$  : dans ce cas  $M = 0$  et

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + \bar{r}_0(T - T_0)} = \frac{1}{\mathbf{q}^2 \left( 1 + \frac{\bar{r}_0(T - T_0)}{\mathbf{q}^2} \right)} . \quad (37.a)$$

Si l'on se reporte aux définitions (I.30, 31), de  $\eta$ ,  $\nu$  et  $\xi$ , on voit que :

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = [\bar{r}_0(T - T_0)]^{-1/2} \\ \nu = 1/2. \end{cases}$$

(b)  $T < T_0$  : dans ce cas,  $M^2 = -6 r_0/u_0$ , et :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + 2 \bar{r}_0(T_0 - T)}. \quad (37.b)$$

Cette fois  $\xi = [2 \bar{r}_0(T_0 - T)]^{-1/2}$ , mais les exposants critiques sont inchangés :  $\eta = 0$  et  $\nu = 1/2$ .

Comme dans le cas des exposants  $\alpha \dots \delta$ , il est intéressant de comparer aux résultats exacts ( $D = 2$ ) ou numériques ( $D = 3$ ) :

Exposant	Landau	$D = 2$	$D = 3$
$\eta$	0	0.25	$0.04 \pm 0.01$
$\nu$	1/2	1	$0.638 \pm 0.002$ .

A nouveau on constate que l'approximation de Landau est d'autant meilleure que la dimension d'espace est élevée.

Les valeurs :  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 3$ ,  $\eta = 0$ ,  $\nu = 1/2$  sont appelées *valeurs classiques* des exposants critiques ; ce sont les valeurs obtenues à l'approximation du champ moyen, ou de sa généralisation : l'approximation de Landau.

Calculons pour terminer la fonction de corrélation (à l'approximation de Landau) dans l'espace des  $\mathbf{x}$ , pour  $D = 3$  (pour le cas général, cf. exercice 6). On supposera que l'intégration sur  $q$  va de zéro à l'infini, et non de zéro à  $\Lambda$  ; le résultat sera correct pour  $r = \|\mathbf{x}\| \geq 1/\Lambda$ .

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{q^2 + \xi^{-2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{q^2 + \xi^{-2}} \int_{-1}^1 e^{-iqr \cos \theta} d(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{(2\pi^2 r)} \int_0^\infty \frac{q dq \sin qr}{q^2 + \xi^{-2}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{q dq e^{iqr}}{q^2 + \xi^{-2}}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale se calcule facilement par la méthode des résidus en utilisant le contour de la figure 5. Il y a un pôle à  $q = i\xi^{-1}$  à

l'intérieur du contour et donc :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-r/\xi}. \quad (38)$$

La forme (38) de la fonction de corrélation correspond bien à (I.33) avec  $\eta = 0$  et  $g(r/\xi) = \exp(-r/\xi)$ .

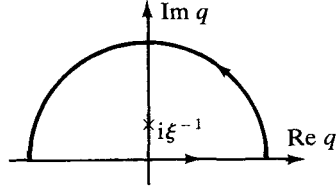


Figure 5. Contour pour le calcul de  $G(\mathbf{x})$ .

## D. CRITIQUE DE L'APPROXIMATION DE LANDAU ET CRITÈRE DE GINZBURG

L'approximation de Landau (comme celle du champ moyen) néglige les fluctuations de  $\varphi$ . Elle ne sera donc pas valable si les fluctuations de  $\varphi$  sont grandes par rapport à  $\langle \varphi \rangle$ . Donnons une première façon d'arriver à un critère de validité de la théorie de Landau, ou *critère de Ginzburg*.

### D.1. Critère de Ginzburg : première démonstration

Considérons l'aimantation moyenne  $\mathcal{M}$  sur un volume  $V$  dont les dimensions sont de l'ordre de  $\xi$ . Pour  $T < T_0$ , on aura :

$$\mathcal{M}^2 = \frac{6\bar{r}_0}{u_0} (T_0 - T) V^2.$$

Comparons  $\mathcal{M}^2$  à la fluctuation  $(\Delta\mathcal{M})^2$  sur le même volume :

$$(\Delta\mathcal{M})^2 = \int d^Dx d^Dy [\langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle \langle \varphi(\mathbf{y}) \rangle] = V \int d^Dx G(\mathbf{x}).$$

Comme les dimensions de  $V$  sont  $\sim \xi$ ,  $V \sim \xi^D$  et

$$\int_V d^Dx G(\mathbf{x}) \sim \int \frac{r^{D-1} dr}{r^{D-2}} e^{-r/\xi} \sim \xi^2 \sim \frac{1}{\bar{r}_0(T_0 - T)}$$

par simple analyse dimensionnelle. Le rapport  $(\Delta\mathcal{M})^2/\mathcal{M}^2$  est donné par :

$$\frac{(\Delta\mathcal{M})^2}{\mathcal{M}^2} = \frac{u_0/6}{\bar{r}_0^2 V (T_0 - T)^2} = \left( \frac{u_0}{6} \bar{r}_0^{\frac{D}{2}-2} \right) (T_0 - T)^{\frac{D}{2}-2}. \quad (39)$$

Lorsque  $D > 4$ ,  $(T_0 - T)^{D/2-2}$  s'annule pour  $T \rightarrow T_0^-$  et  $(\Delta\mathcal{M})^2/\mathcal{M}^2 \ll 1$ .

Dans ces conditions, la validité de la théorie de Landau paraît plausible ; du moins ne présente-t-elle pas d'incohérence interne.

Il n'en est pas de même pour  $D < 4$  : dans ce cas  $(T_0 - T)^{D/2-2}$  diverge lorsque  $T \rightarrow T_0^-$  et la théorie de Landau n'est certainement pas valable. Cependant il est possible qu'il existe autour de  $T_0$  une région de température  $\Delta T$  telle que pour  $T < T_0 - \Delta T$ ,  $(\Delta \mathcal{M})^2 / \mathcal{M}^2 \ll 1$  : la théorie de Landau reste applicable, même si  $D < 4$ . Il peut même arriver (cas de la supraconductivité) que l'intervalle  $\Delta T$  soit si petit que la région de non-validité de l'approximation de Landau ne soit pas visible en pratique. Au contraire, dans le cas de la transition superfluide de l'hélium 4 (qui est pourtant sous bien des aspects très analogue à la transition supraconductrice), l'intervalle  $\Delta T$  est  $\gg T_0$  et la région de validité de la théorie de Landau est inobservable. L'argument donné ci-dessus ne permet pas de conclure pour  $T > T_0$ . Toutefois un argument reposant sur l'étude de la chaleur spécifique (exercice 7) donne un résultat analogue à (39).

Nous allons maintenant donner une version plus élaborée du critère de Ginzburg, en calculant au préalable la première correction à la théorie de Landau.

## D.2. Correction à la théorie de Landau

Comme dans le cas de l'approximation de Landau, nous commencerons par une seule variable. Remarquons que l'approximation de Landau sera d'autant meilleure que le maximum de l'exponentielle sera aigu. Introduisons un paramètre  $\hbar$  (\*), telle que l'approximation soit d'autant meilleure que  $\hbar$  est petit :

$$Z = \int d\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} [H(\varphi) - B\varphi]}.$$

Nous allons montrer que l'on peut écrire  $Z$  sous forme d'un développement en puissances de  $\hbar$  (naturellement à la fin du calcul, on posera  $\hbar = 1$ ). Comme au paragraphe A,  $\varphi_0$  sera défini par :

$$B = H'(\varphi_0).$$

Développons  $H(\varphi) - B\varphi$  au voisinage de  $\varphi = \varphi_0$  en posant  $\psi = \varphi - \varphi_0$ . Comme la dérivée est nulle par construction à  $\varphi = \varphi_0$ , il

(\*) Bien entendu, dans ce problème  $\hbar$  n'a rien à voir avec la constante de Planck. Cependant la notation n'est pas introduite par hasard, car cette constante intervient dans un problème analogue de théorie quantique des champs (cf. chapitre VIII). L'approximation de Landau en physique statistique est l'analogue de l'approximation classique en théorie quantique des champs.

n'y a pas de termes linéaires en  $\psi$  dans ce développement :

$$H(\varphi) - B\varphi = H(\varphi_0) - B\varphi_0 + \frac{1}{2} D(\varphi_0) \psi^2 + \frac{1}{3!} u_0 \varphi_0 \psi^3 + \frac{1}{4!} u_0 \psi^4$$

où  $D(\varphi_0)$  est défini par :

$$D(\varphi_0) = H''(\varphi_0) = \frac{\partial B}{\partial \varphi_0} = r_0 + \frac{1}{2} u_0 \varphi_0^2. \quad (40)$$

Reportant dans l'expression de  $Z$  on obtient :

$$Z = e^{-\frac{1}{\hbar}(H(\varphi_0) - B\varphi_0)} \times \int d\psi \exp \left( -\frac{1}{2\hbar} D(\varphi_0) \psi^2 - \frac{1}{3!\hbar} u_0 \varphi_0 \psi^3 - \frac{1}{4!\hbar} u_0 \psi^4 \right)$$

et on effectue le changement de variables  $\psi = \sqrt{\hbar} \psi'$ . Le jacobien est une constante qui peut être omise (cf. la remarque suivant l'équation (27)) et l'expression de  $Z$  devient :

$$Z = e^{-\frac{1}{\hbar}(H(\varphi_0) - B\varphi_0)} \int d\psi' \exp \left( -\frac{1}{2} D(\varphi_0) \psi'^2 \right) \times \exp \left( - \left( \frac{u_0 \hbar^{1/2}}{3!} \varphi_0 \psi'^3 + \frac{u_0 \hbar}{4!} \psi'^4 \right) \right). \quad (41)$$

Lorsque  $\hbar \rightarrow 0$ , la deuxième exponentielle dans (41) peut être développée en série de puissances de  $\hbar$ , chaque terme du développement donnant une intégrale gaussienne. Le résultat pour  $W = \hbar \ln Z$  ( $W$  est défini avec un facteur multiplicatif  $\hbar$ , de sorte que  $M = \partial W / \partial B$ ) est :

$$W = \hbar \ln Z = -H(\varphi_0) + B\varphi_0 - \frac{\hbar}{2} \ln D(\varphi_0) + O(\hbar^2). \quad (42)$$

Calculons l'aimantation :

$$M = \frac{\partial W}{\partial B} = \varphi_0 - \frac{\hbar}{2} \frac{D'(\varphi_0)}{D(\varphi_0)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} = \varphi_0 - \frac{\hbar}{2} \frac{D'(\varphi_0)}{D^2(\varphi_0)}$$

et le potentiel de Gibbs  $\Gamma$  :

$$\Gamma = MB - W = MB + H \left( M + \frac{\hbar}{2} \frac{D'}{D^2} \right) - \left( M + \frac{\hbar}{2} \frac{D'}{D^2} \right) B + \frac{\hbar}{2} \ln \left[ D \left( M + \frac{\hbar}{2} \frac{D'}{D^2} \right) \right].$$

Mais :

$$H\left(M + \frac{\hbar D'}{2D^2}\right) \simeq H(M) + \frac{\hbar D'}{2D^2} H'(\varphi_0) = H(M) + \frac{\hbar D'}{2D^2} B$$

et on trouve à l'ordre  $\hbar$  :

$$\Gamma(M) = H(M) + \frac{\hbar}{2} \ln D(M) + O(\hbar^2). \quad (43)$$

Passons maintenant au cas général, en utilisant la formulation continue ; l'équation déterminant  $\varphi_0(\mathbf{x})$  est :

$$B(\mathbf{x}) = \left. \frac{\delta H}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right|_{\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})}$$

et le développement de Taylor autour de  $\varphi_0(\mathbf{x})$  :

$$H_1 \simeq H(\varphi_0(\mathbf{x})) - \int d^D x B(\mathbf{x}) \varphi_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \psi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y})$$

avec  $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})$  et :

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left. \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})} \right|_{\varphi = \varphi_0}.$$

L'intégration sur  $\psi(\mathbf{x})$  est une intégration gaussienne (cf. appendice A) :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^D x d^D y \psi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \right] &\sim \\ &\sim [\det D]^{-1/2} = \exp \left( -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln D \right) \end{aligned}$$

en négligeant les constantes multiplicatives. Reste à interpréter ce résultat, qui est évidemment un peu formel pour le moment. Calculons d'abord  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  :

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( -\nabla_x^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 \varphi_0^2 \right) \delta^{(D)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

et à l'approximation considérée  $\varphi_0 \simeq M$ .

$D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est la limite d'une matrice  $D_{ij}$  diagonalisable par transformation de Fourier, si  $\varphi_0$  est indépendant de  $\mathbf{x}$  (champ uniforme), ce que nous allons supposer à partir de maintenant. D'après l'équation (A.7) :

$$\text{Tr} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N a^D \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left( \mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2 \right)$$

et donc :

$$\text{Tr} \ln D = V \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \ln \left( \mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2 \right).$$

L'expression (43) est généralisée par :

$$\Gamma = H(M) + \int d^D x \left[ \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \times \right. \\ \left. \times \ln \left( \mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{u_0}{2} M^2 \right) + O(\hbar^2) \right]. \quad (44)$$

Le premier terme de l'équation (44) n'est autre que l'approximation de Landau (29). L'équation (44) donne les deux premiers termes du *développement en nombre de boucles*, qui sera examiné plus à fond au chapitre V, paragraphe D.

#### Remarque importante : le modèle gaussien

Lorsque  $u_0 = 0$  dans le hamiltonien (19) de Ginzburg-Landau, l'intégrale sur  $\varphi$  est une intégrale gaussienne et le résultat (44) est exact si l'on s'arrête à l'ordre  $\hbar$ , puisque le hamiltonien est alors quadratique en  $\varphi$ . Le cas  $u_0 = 0$  est appelé cas du *modèle gaussien* ; ce modèle n'est d'ailleurs défini que pour  $r_0(T) > 0$ . Le potentiel de Gibbs du modèle gaussien vaut *exactement* (dans (44)  $M$  est uniforme, mais dans le cas du modèle gaussien, cette hypothèse n'est pas nécessaire, car  $D(x, y)$  est indépendant de  $M$ ) :

$$\Gamma(M) = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla M)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) M^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \ln (r_0 + \mathbf{q}^2) \right]$$

et la fonction de corrélation, qui est l'inverse de  $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M(\mathbf{x}) \delta M(\mathbf{y})}$  est donnée par la transformée de Fourier inverse de  $(\mathbf{q}^2 + r_0(T))^{-1}$  :

$$\text{Modèle gaussien : } \tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0(T)}. \quad (45)$$

### D.3. Critère de Ginzburg : deuxième démonstration

En tenant compte de la correction obtenue dans l'équation (44) et en posant  $\hbar = 1$ , on obtient le champ magnétique (supposé uniforme) :

$$B = r_0 M + \frac{u_0}{6} M^3 + \frac{1}{2} u_0 M \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2}$$

et la susceptibilité à la limite  $B \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \chi^{-1} &= \left. \frac{\partial B}{\partial M} \right|_{B=0} = \\ &= r_0 + \frac{u_0}{2} M^2 + \frac{u_0}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0(T) + \frac{u_0}{2} M^2} + \dots \quad (46) \end{aligned}$$

Les termes que je n'ai pas écrits sont nuls pour  $T > T_c$  parce que  $M = 0$  dans ce domaine de température. Afin de simplifier la discussion, je me limiterai au cas  $T > T_c$ . La notation standard pour  $\chi^{-1}$  est  $r$  :  $\chi^{-1} = r$  (à ne pas confondre avec  $\|\mathbf{x}\|$ ) et à l'approximation de Landau :

$$\chi_0^{-1} = r_0 = \bar{r}_0(T - T_0).$$

L'équation (46) devient ( $M = 0$ ) :

$$r = r_0 + \frac{1}{2} u_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r_0}. \quad (47)$$

L'équation (47) montre que la température critique  $T_c$  n'est pas  $T_0$ , mais qu'en fait  $T_c < T_0$ . En effet la température critique est définie par  $r(T_c) = 0$  (susceptibilité infinie) alors que pour  $T = T_0$ , on a  $r > 0$ . Il faudrait donc passer dans la région  $r_0 < 0$ , ce qui pose un problème car l'intégrale dans (47) n'est plus définie. Pour tourner la difficulté, remarquons que l'équation (47) est en fait le début d'un développement de  $r$  en puissances de  $u_0$  :

$$r = r_0 + a_1 u_0 + a_2 u_0^2 + \dots$$

Pour le montrer, donnons une dimension à  $\hbar$  (par exemple celle d'une action) ; comme  $H/\hbar$  doit être sans dimensions,  $\varphi$  a pour dimensions  $\hbar^{1/2} l^{1-D/2}$ , où  $l$  est une longueur : en effet  $d^D x$  a dimension  $l^D$  et  $\nabla$  dimension  $l^{-1}$ . On montre immédiatement que  $r_0$  a dimension  $l^{-2}$  et  $u_0$  dimension  $\hbar^{-1} l^{D-4}$ . L'analyse dimensionnelle de l'équation donnant  $r$  implique que le terme en  $\hbar^L$  est proportionnel à  $u_0^L$ . Ce

résultat entraîne qu'il est légitime de remplacer  $r_0$  par  $r$  dans l'intégrale de (47) : l'erreur commise est d'ordre  $u_0^2$ , et de toute façon on a déjà négligé des termes de cet ordre :

$$r = r_0 + \frac{1}{2} u_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + r}. \quad (48)$$

La température critique est donnée par :

$$0 = \bar{r}_0(T_c - T_0) + \frac{1}{2} u_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2} \quad (49)$$

soit :

$$\bar{r}_0(T_c - T_0) = - \frac{u_0}{2(2\pi)^D} S_D \int_0^\Lambda q^{D-3} dq = \frac{-u_0 S_D \Lambda^{D-2}}{2(2\pi)^D (D-2)}$$

où  $S_D$  est la surface de la sphère à  $D$ -dimensions (appendice A). Il faut donc que  $D > 2$  pour que la théorie ait un sens quelconque.

Retranchons maintenant l'équation (49) de (48) :

$$r = \bar{r}_0(T - T_c) - \frac{1}{2} r u_0 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^2 + r)}. \quad (50)$$

Il convient de distinguer les deux cas  $D > 4$  et  $D < 4$  :

$D > 4$  : L'intégrale dans (50) converge pour  $q^2 = 0$  même si  $r = 0$ . On obtient donc :

$$r = \bar{r}_0(T - T_c) - C r ; \quad r = \frac{\bar{r}_0(T - T_c)}{1 + C} \quad (51)$$

où  $C$  est une constante finie. On voit que la *correction d'ordre  $\hbar$  à la théorie de Landau ne change pas l'exposant critique  $\gamma$*  :  $\gamma = 1$  pour  $D > 4$ . Ceci reste vrai pour les corrections d'ordre  $\hbar^N$  (cf. III-E.1). L'approximation de Landau (ou du champ moyen) donne correctement les exposants critiques pour  $D > 4$  ; par contre température critique, coefficient de  $(T - T_c)^{-1}$ , etc., sont modifiés, mais il s'agit là de quantités qui ne sont pas universelles.

$D < 4$  : L'intégrale dans (50) présente une divergence lorsque  $q \rightarrow 0$ , c'est-à-dire une *divergence infrarouge* si l'on pose  $r = 0$ . Elle se comporte en effet comme  $\int dq/q^{5-D}$ . Ce sont les grandes longueurs d'onde qui sont importantes pour le comportement critique, car ce sont elles qui provoquent la divergence des intégrales. Posons  $\mathbf{q} = \mathbf{k} \sqrt{r}$  ;

l'intégrale s'écrit :

$$I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\sqrt{r})^D}{r^2 \mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + 1)} = (\sqrt{r})^{D-4} \frac{S_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{k^{D-1} dk}{k^2 (k^2 + 1)}.$$

Comme l'intégrale est convergente à l'infini, on a pris la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On peut donc récrire (50) :

$$r = \bar{r}_0(T - T_c) - u_0 C r(r^{-\varepsilon/2}) \quad (52)$$

en posant :

$$\boxed{\varepsilon = 4 - D} \quad (53)$$

et

$$C = \frac{S_D}{2(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{k^{D-1} dk}{k^2 (k^2 + 1)}.$$

L'équation (52) est incompatible avec  $r \sim (T - T_c)$  et les exposants critiques ne sont pas donnés correctement par la théorie de Landau pour  $D < 4$ .

A nouveau, on peut retrouver l'existence d'un intervalle de température où la théorie de Landau est valable, même si  $D < 4$  ; il faut pour cela que :

$$u_0 C r^{-\varepsilon/2} \ll 1$$

ou :

$$u_0 C [\bar{r}_0(T - T_c)]^{\frac{D}{2}-2} \ll 1$$

en accord avec l'équation (39). La deuxième démonstration est cependant un peu plus précise, dans la mesure où elle permet de déterminer le coefficient  $C$ .

## EXERCICES

### 1) « Dédution » du hamiltonien de Ginzburg-Landau <sup>(1)</sup>

On se propose de déduire le hamiltonien (19) du modèle d'Ising. On part de l'expression suivante pour  $Z(B)$  :

$$Z(B) = \int \prod_i dS_i \delta(S_i^2 - 1) \exp \left( \sum_{i,j} S_i V_{ij} S_j + \sum_i B_i S_i \right)$$

$$\begin{aligned} V_{ij} &= J/2 kT, \quad i \text{ et } j \text{ plus proches voisins} \\ &= 0 \quad \text{dans le cas contraire.} \end{aligned}$$

Généralisation :  $\delta(S_i^2 - 1) \rightarrow \rho(S_i)$  où  $\rho \geq 0$  et  $V_{ij}$  dépendant de  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ , décroissant avec  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ . Notez que le facteur  $\mu/kT$  a été pris égal à 1.

(a) En utilisant l'intégration gaussienne (appendice A) montrer que :

$$Z(B) = \int \prod_i d\varphi_i dS_i \rho(S_i) \exp\left(-\frac{1}{4}(\varphi - B)^T V^{-1}(\varphi - B) + \varphi^T S\right).$$

Les notations sont celles de l'appendice A. On pose :

$$\int dS \rho(S) e^{\varphi S} = e^{A(\varphi)}.$$

Montrer que  $A''(\varphi) \geq 0$  et que :

$$Z(B) = \int \prod_i d\varphi_i \exp\left(-\frac{1}{4}(\varphi - B)^T V^{-1}(\varphi - B) + \sum_i A(\varphi_i)\right). \quad (1)$$

(b) Approximation de Landau : calculer le maximum de l'exposant dans (1) et en déduire le potentiel de Gibbs :

$$\Gamma(M) = - \sum_{i,j} M_i V_{ij} M_j + \sum_i C(M_i)$$

où  $C(M)$  est la transformée de Legendre de  $A(\varphi)$  :

$$C(M) = \sum_i M_i \varphi_{i0} - \sum_i A(\varphi_{i0}).$$

(c) Montrer que dans le cas du modèle d'Ising  $A(\varphi) = \ln \cosh \varphi$  et retrouver en champ uniforme l'équation du champ moyen (I.14).

Montrer que dans le cas général  $C''(M) > 0$  et que l'on peut obtenir selon le signe du terme en  $M^4$  une transition du premier ou du deuxième ordre.

(d) Quelle est la relation entre la fonction de corrélation originale  $\langle S_i S_j \rangle$  et la fonction de corrélation  $\langle \varphi_i \varphi_j \rangle$  en champ magnétique nul ? Comparer les transformées de Fourier et montrer qu'elles sont proportionnelles quand  $q \rightarrow 0$ . On pourra introduire la transformée de Fourier de  $V$  :

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \sum_j V_{ij} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}.$$

(e) On introduit la transformée de Fourier de  $\varphi_i$  :

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \varphi_i.$$

Pour  $q \rightarrow 0$ , montrer que :

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \simeq V_0(1 - \rho \mathbf{q}^2) \quad \rho > 0$$

(on pourra se limiter au cas du modèle d'Ising). En déduire :

$$\sum_{i,j} \varphi_i V_{ij}^{-1} \varphi_j \approx \frac{1}{V_0} \sum_{\mathbf{q}} \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{q}) + \frac{\rho}{V_0} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^2 \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{q})$$

et montrer que dans l'espace des  $\mathbf{x}$  le deuxième terme se transforme en :

$$\frac{\rho}{V_0} \int d^D x (\nabla \varphi)^2.$$

Un changement d'échelle de  $\varphi : \varphi \rightarrow \lambda \varphi$  permet alors de se ramener à (19).

(Cette « déduction » due à Berlin-Kac, Hubbard et Stratonovitch possède un point faible : la matrice  $V_{ij}^{-1}$  (qui sert seulement d'intermédiaire dans les calculs) n'est pas définie positive. Il est facile de le montrer dans le cas du modèle d'Ising.)

## 2) Phénomènes de métastabilité pour $T < T_c$

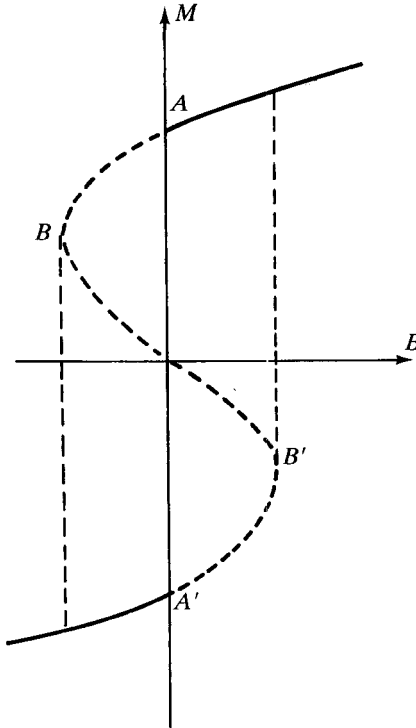


Figure 6.

(a) Montrer que pour  $T < T_c$  et dans un certain domaine de  $B$  (à déterminer)

$$-B_0 \leq B \leq B_0$$

trois valeurs de  $M$  sont solution de l'équation

$$B = r_0 M + (u_0/6) M^3 \quad (u_0 > 0).$$

En déduire l'allure de la courbe donnant  $M$  en fonction de  $B$  (cf. figure 6).

(b) Montrer que les solutions se trouvant sur les parties  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont métastables tandis que celles se trouvant sur  $(BB')$  sont instables.

(c) Montrer qu'à  $T$  fixé  $< T_c$ , on observe une transition de phase de première espèce quand on fait varier  $B$  d'une valeur négative à une valeur positive.

(d) Trouver une analogie mécanique (cf. par exemple l'exercice I.1).

### 3) Transition du premier ordre

On suppose qu'en champ nul :

$$\Gamma(M) = \frac{1}{2} r_0 (T - T_0) M^2 - \frac{1}{4} M^4 + \frac{1}{6} M^6.$$

Quelle est la température  $T_c$  de la transition de phase (du premier ordre) ?  
Quelle est la discontinuité de l'aimantation ?

Déterminer le comportement de la susceptibilité  $\chi$  en champ nul pour  $T > T_c$ . Quelle est la discontinuité de  $\chi$  à  $T = T_c$  ?

(Dans une transition du premier ordre, les fluctuations ne se développent pas complètement : le régime de fluctuations avorte avant d'avoir fait diverger la susceptibilité.)

### 4) Bosons de Goldstone

On suppose que la dimension du paramètre d'ordre est  $n = 2$  (la généralisation à  $n$  quelconque étant triviale).

A l'approximation de Landau le potentiel de Gibbs s'écrit :

$$\Gamma(M) = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\nabla M_i)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \vec{M}^2 + \frac{1}{4!} u_0 (\vec{M}^2)^2 \right]$$

$$\vec{M} = (M_1, M_2); \quad \vec{M}^2 = M_1^2 + M_2^2.$$

(a) On suppose que pour  $T < T_0$  et en champ nul l'aimantation  $\vec{M}$  a pour composantes  $M_1 = M$ ,  $M_2 = 0$ . Quelle est la valeur de  $M$  ?

(b) Soit  $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  la fonction de corrélation à l'approximation de Landau :

$$G_{ij}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta M_i(\mathbf{x}) \delta M_j(\mathbf{y})}.$$

Calculer les transformées de Fourier  $\tilde{G}_{11}(\mathbf{q})$ ,  $\tilde{G}_{12}(\mathbf{q})$  et  $\tilde{G}_{22}(\mathbf{q})$  dans la situation de la question (a). Montrer que  $\tilde{G}_{22}(\mathbf{q})$  diverge pour  $q \rightarrow 0$ . Quelles sont les conséquences physiques de cette propriété ?

### 5) Hamiltonien et fonction de corrélation sur réseau

(a) Considérons d'abord un hamiltonien gaussien écrit sous la forme ( $a = 1$ ) :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mu} [\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) - \varphi(\mathbf{x})]^2 + \frac{1}{2} r_0 \sum_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x})^2$$

ou bien :

$$H = - \sum_{\mathbf{x}, \mu} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}) \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (r_0 + 2D) \sum_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x})^2.$$

Effectuer un changement d'échelle  $\varphi' = (r_0 + 2D)^{1/2} \varphi$  sur les champs et calculer la fonction de corrélation par un développement en puissances de

$\kappa = (2D + r_0)^{-1}$  quand  $\kappa \rightarrow 0$ . Montrer que dans cette limite  $\xi \sim -1/\ln \kappa$ . Ce calcul est un exemple de développement haute température, car  $r_0 \gg 1$ .

(b) On reprend maintenant le hamiltonien de Ginzburg-Landau (14) et on définit les transformées de Fourier (cf. appendice A) par :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = a^D \sum_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Montrer qu'à l'approximation de Landau, la fonction de corrélation  $\tilde{G}(\mathbf{q})$  en champ uniforme est donnée par :

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2/a^2) \sum_1^D (1 - \cos(aq_\mu)) + r_0 + \frac{1}{2} u_0 M^2}$$

avec  $q_\mu = (\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\mu})/a$ . Suggestion : on pourra d'abord faire le calcul dans le cas  $D = 1$ .

Quelle est la fonction de corrélation du modèle gaussien sur réseau ? Montrer que si  $qa \ll 1$ , cette fonction de corrélation est approximativement invariante par rotation. Montrer que le terme en  $q^4$  brise cette invariance.

(c) Déterminer la matrice  $D_{ij}$ , équivalente sur réseau de  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , dans le calcul du paragraphe D.2. Montrer qu'à la limite  $a \rightarrow 0$  on retrouve bien le résultat (43).

#### 6) Fonctions de corrélation en dimension $D(T > T_0)$

(a) Pour  $T > T_0$  la fonction de corrélation à l'approximation de Landau (ou celle du modèle gaussien) vérifie :

$$(-\nabla^2 + r_0) G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}).$$

Comme  $G(\mathbf{x})$  ne dépend que de  $r = \|\mathbf{x}\|$ , montrer que  $G(r)$  vérifie :

$$-\frac{d^2 G}{dr^2} - \frac{D-1}{r} \frac{dG}{dr} + r_0 G = \delta(\mathbf{x}).$$

(b) Montrer que pour  $D = 2$  et  $r_0 = 0$  (c'est-à-dire juste au point critique) la solution de l'équation  $-\nabla^2 G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  est  $-\frac{\ln r}{2\pi}$ . (Suggestion : pensez au potentiel électrique d'un fil rectiligne infini chargé.)

(c) Montrer que dans un espace de dimension  $D$  :

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} r^{D/2-1}} \int_0^A \frac{q^{D/2} dq}{q^2 + r_0} J_{\frac{D}{2}-1}(qr)$$

où  $J_\nu$  est la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$ . La mesure d'intégration dans un espace de dimension  $D$  est :

$$d^D x = r^{D-1} dr \sin^{D-2} \theta_{D-1} d\theta_{D-1} \sin^{D-3} \theta_{D-2} d\theta_{D-2} \dots d\theta_1$$

$$0 \leq \theta_k \leq \pi \quad k \neq 1; \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi.$$

(d) En déduire pour  $D = 4$  et  $r_0 = 0$  :

$$G(r) = \frac{1}{4\pi^2 r^2} (1 - J_0(Ar)) .$$

### 7) Chaleur spécifique et critère de Ginzburg

(a) Montrer que la chaleur spécifique en champ nul par unité de volume vaut :

$$C = -\frac{1}{V} T \frac{d^2(\Gamma T)}{dT^2} .$$

Dans les questions (b) et (c) on se servira du fait (à démontrer) que la contribution singulière à la chaleur spécifique est :

$$C_s = -\frac{1}{V} T^2 \frac{d^2\Gamma}{dT^2} .$$

(b) Montrer qu'à l'approximation de Landau :

$$\begin{aligned} C &= 0 & T > T_0 \\ C &\simeq T^2 \frac{3\bar{r}_0^2}{u_0} & T < T_0 . \end{aligned}$$

La chaleur spécifique est donc discontinue avec une discontinuité

$$C = 3\bar{r}_0^2 T_0^2 / u_0 .$$

(c) Montrer que si l'on tient compte de la première correction à la théorie de Landau, la chaleur spécifique n'est pas nulle pour  $T > T_0$ . Quelle est l'expression de  $C$ ? On se limite par la suite au cas  $T > T_0$ .

(d) Montrer que pour  $D > 4$  la correction ajoute simplement un terme lentement variable (en  $T$ ) à la chaleur spécifique. Montrer au contraire que pour  $D < 4$  la chaleur spécifique se comporte en :

$$(T - T_0)^{-\alpha} .$$

Quelle est la valeur de  $\alpha$ ?

(e) Pour  $D < 4$ , on peut définir le domaine de validité de l'approximation de Landau en exigeant que la chaleur spécifique calculée en (c) soit plus petite que la discontinuité  $\Delta C$  calculée en (b) :

$$C \leq \Delta C .$$

Retrouver par cet argument le critère de Ginzburg.

(f) Montrer que l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  par unité de volume est proportionnelle à la fonction de corrélation  $G(\mathbf{x})$  prise à  $\mathbf{x} = 0$  :  $\langle E \rangle \sim G(\mathbf{x} = 0)$ . En utilisant la forme trouvée en (37(a)), retrouver le résultat de la question (c).

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Le hamiltonien de Ginzburg-Landau et l'approximation de Landau sont traités par Toulouse-Pfeuty, chapitre 2 et Ma, chapitre III. On pourra également consulter Shenker, section 2. La théorie de Landau des transitions de phase est exposée dans Landau-Lifschitz, paragraphe 138, et dans Kittel, chapitre XIII ; les fonctions de corrélation sont discutées par Ma, chapitre III. Toulouse-Pfeuty (chapitre 2) donnent une discussion très complète du critère de Ginzburg. A un niveau plus avancé, on pourra également consulter Amit, chapitres 2 et 6 ainsi que Brézin *et al.*, section IV.

(<sup>1</sup>) Brézin *et al.*, section IV ; Amit, chapitre 2.

## CHAPITRE III

# Groupe de renormalisation

Considérons un système physique au voisinage d'un point critique : le nombre de degrés de liberté interagissant effectivement entre eux est  $\sim \xi^D$ , où  $\xi$  est la longueur de corrélation, et ce nombre tend vers l'infini au point critique puisque  $\xi \rightarrow \infty$ . Les méthodes perturbatives traditionnelles échouent complètement dans ce genre de problème, car elles sont adaptées au cas de l'interaction d'un petit nombre de degrés de liberté. La méthode du groupe de renormalisation, inventée par Wilson, consiste à réduire systématiquement le nombre de degrés de liberté en intégrant sur les fluctuations de courte longueur d'onde. Supposons que nous partions d'un système de spins sur un réseau de pas  $a$  : la longueur d'onde minimale des fluctuations est alors  $\sim a$ . Intégrons sur les fluctuations de longueur d'onde  $a \leq \lambda \leq sa$ , où  $s > 1$  est appelé facteur de dilatation. Ceci ne change pas le comportement des fonctions de corrélation pour  $r \gtrsim sa$  : *l'intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde a fait correspondre au système physique initial un autre système physique (\*) qui possède le même comportement à longue distance*. On peut itérer cette transformation, appelée *transformation du groupe de renormalisation* (TGR), en intégrant sur les fluctuations de longueur d'onde  $sa \leq \lambda \leq s^2a$ , etc., et établir ainsi une suite de correspondances entre systèmes physiques possédant le même comportement à longue distance.

Cependant il s'agit de bien s'entendre sur la notion de « même comportement à longue distance » ; si nous utilisons la même unité de longueur pour décrire les deux systèmes physiques, l'expression est

(\*) Par système physique, j'entends « modèle pour une transition de phase ». Il n'est pas nécessaire que le modèle soit une description approchée d'un système physique réel.

évidemment correcte. Mais il existe une unité de longueur naturelle pour chaque système, qui est le pas de son réseau. Après une première TGR, le pas effectif du réseau du système transformé est  $sa$ , et si nous mesurons les longueurs de corrélation en unités naturelles, celle du système transformé est  $\xi/s$ . Il est donc logique d'associer à chaque TGR *une dilatation de l'unité de longueur d'un facteur  $s$* , qui permet de comparer les deux systèmes sur un même réseau. Au bout d'un nombre suffisant d'itérations, on pourra faire correspondre au système initial un système dont la longueur de corrélation est de l'ordre du pas du réseau, et dont on peut espérer déterminer le comportement par des méthodes perturbatives.

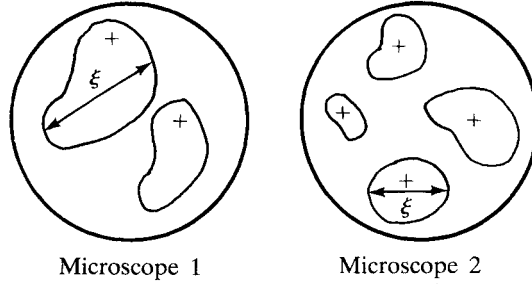
La dilatation de l'unité de longueur d'un facteur  $s$ , qui transforme une longueur  $r$  en  $r/s$ , fait évidemment penser à une transformation d'échelle. Une TGR relie effectivement deux fonctions de corrélation mesurées à des distances  $r$  et  $r/s$  ; cependant l'opération ne se réduit pas à une simple analyse dimensionnelle, car elle transforme *aussi* les paramètres du système physique. Une itération de TGR ne donnera pas d'information utilisable sans ingrédient supplémentaire. Cet ingrédient sera l'existence d'un *point fixe* : en effet autour de ce point fixe, on pourra se limiter à un nombre *fini* de paramètres (paramètres essentiels). Dans ce cas on pourra aboutir à un comportement simple des fonctions de corrélation dans une transformation d'échelle  $r \rightarrow r/s$ , et en déduire les exposants critiques.

On peut visualiser intuitivement une TGR en imaginant que l'on observe le système physique avec deux microscopes de résolution différente : le premier, qui utilise une longueur d'onde  $\lambda$ , permet de voir des détails de dimension  $\sim \lambda$  ; le second utilise une longueur d'onde  $s\lambda$ , et sa résolution est donc moins bonne ( $s > 1$ ). En passant du premier microscope au second, on intègre sur tous les détails ayant une dimension comprise entre  $\lambda$  et  $s\lambda$ . Pour réaliser la dilatation de l'unité de longueur, il suffit d'admettre que le grandissement du second microscope est inférieur à celui du premier par un facteur  $s$ .

Dans le champ du second microscope, les îlots d'aimantation positive (par exemple) seront vus avec une taille  $s$  fois plus petite que dans le champ du premier, tant que la longueur de corrélation est finie (rappelons que la taille de ces îlots est  $\sim \xi$ ) (figure 1).

Au point critique ( $T = T_c$ ), les fluctuations ont toutes les tailles possibles et on observe des images analogues dans les deux microscopes (si l'on fait une moyenne dans le temps : à un instant donné, un îlot d'aimantation d'une certaine taille occupe évidemment une place  $s$  fois plus petite dans le champ du second microscope que dans celui du premier).

Avant de commencer l'étude du groupe de renormalisation, il importe de faire une remarque préliminaire : le groupe de renormalisa-



**Figure 1.** Vue intuitive d'une TGR.

tion est d'invention récente, et, sauf dans certains cas particuliers, il n'est pas actuellement étayé par des théorèmes rigoureux. Il sera donc nécessaire d'introduire des hypothèses dont les conditions de validité ne sont pas bien précises, et qui, en fin de compte, seront justifiées par leurs succès pratiques.

Le paragraphe A introduit les notions fondamentales : formation de blocs de spin, surface critique, points fixes. Le paragraphe B montre comment obtenir les exposants critiques en étudiant le voisinage d'un point fixe. Ces deux premiers paragraphes donnent les résultats généraux, et les suivants sont consacrés à une illustration de ces résultats sur des exemples particuliers. Le paragraphe C donne un exemple de TGR sur réseau, avec résolution approchée des équations du groupe de renormalisation (GR). Le paragraphe D introduit le groupe de renormalisation dans l'espace de Fourier avec comme application le modèle gaussien. Les exposants critiques sont calculés à l'ordre  $\varepsilon = 4 - D$  au paragraphe E ; le paragraphe F traite des variables marginales, et permet de faire le lien avec les méthodes classiques de renormalisation en théorie des champs, qui seront exposées aux chapitres VI et VII.

### A. NOTIONS FONDAMENTALES : BLOCS DE SPIN, SURFACE CRITIQUE, POINTS FIXES

Une stratégie possible pour intégrer sur les fluctuations de courte longueur d'onde consiste à former des blocs de spin. Ce n'est pas la seule : nous en verrons une autre au paragraphe D. De plus il existe deux types de stratégies pour former les blocs : une linéaire, une autre non linéaire. Au départ la stratégie non linéaire paraît plus simple et je vais commencer par elle. Les difficultés ne tarderont pas à se manifester et la stratégie linéaire se révélera en fin de compte plus performante, du moins dans le cadre de calculs analytiques.

### A.1. Blocs de spin et transformations non linéaires

Pour fixer les idées, je prendrai comme exemple le modèle d'Ising en dimension  $D = 2$ , sur un réseau carré de pas  $a$ . Je vais grouper les spins par quatre (= blocs de spins) et attribuer à chaque bloc un spin déterminé par les règles suivantes :

- le spin du bloc vaut  $+1$  ( $-1$ ) si la somme des spins du bloc est positive (négative) ;
- si la somme des spins du bloc est nulle, on tire à pile ou face pour attribuer la valeur  $+1$  ou  $-1$  au spin du bloc, ou bien on attribue par convention un spin  $+1$  à trois configurations de spin total nul, et un spin  $-1$  aux trois autres configurations. Naturellement des blocs de neuf spins élimineraient ce problème, mais les figures seraient plus longues à dessiner.

La formation des blocs est la première étape de la transformation du groupe de renormalisation. La seconde étape consiste à revenir au réseau initial en multipliant par deux l'unité de longueur : le facteur de dilatation est égal à 2. Cette procédure permet de comparer deux systèmes physiques (celui des spins initiaux et celui des blocs) sur un même réseau (figure 2).

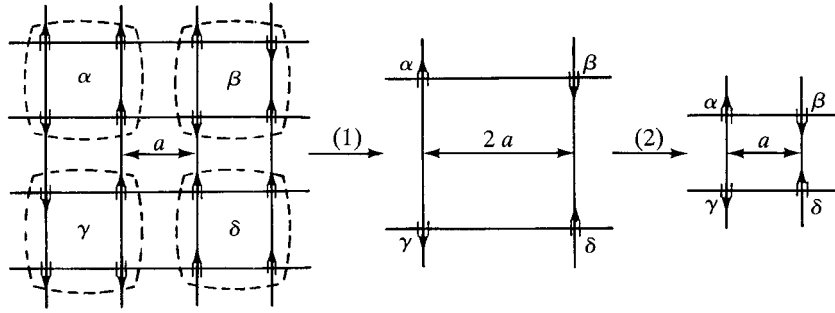


Figure 2. Formation de blocs de spins.

Appelons  $S_i$  les spins initiaux et  $S'_\alpha$  ceux des blocs,  $S'_\alpha$  étant donné par :

$$S'_\alpha = f(S_i) \quad i \in \text{bloc } \alpha. \quad (1)$$

Un exemple de fonction  $f(S_i)$  a été donné ci-dessus ; en général on pourra prendre une fonction  $f(S_i)$  qui reflète la tendance à l'orientation de l'ensemble des spins du bloc.

La probabilité d'observer une certaine configuration  $[S'_\alpha]$  des blocs est parfaitement déterminée si l'on connaît le hamiltonien d'interaction des spins. Il doit donc exister un hamiltonien  $H'[S'_\alpha]$  tel que la probabilité d'observer la configuration  $[S'_\alpha]$  soit proportionnelle à  $\exp(-H'[S'_\alpha])$ . Il n'est pas difficile d'écrire une expression formelle pour  $H'$  ( $H'[S'_\alpha]$  comprend une partie  $G$ , indépendante de  $S'_\alpha$ , que je n'ai pas séparée explicitement pour le moment : cf. paragraphe B, équation (25)) :

$$e^{-H'[S'_\alpha]} = \sum_{[S_i]} \prod_{\alpha} \delta(S'_\alpha - f(S_i)|_{i \in \alpha}) e^{-H[S_i]}. \quad (2)$$

Si la configuration  $[S_i]$  est fixée, il existe une seule configuration  $[S'_\alpha]$  pour laquelle le delta de Kronecker est non nul, et donc :

$$\sum_{[S'_\alpha]} \prod_{\alpha} \delta(S'_\alpha - f(S_i)|_{i \in \alpha}) = 1 \quad (3)$$

ce qui entraîne immédiatement :

$$Z = \sum_{[S_i]} e^{-H[S_i]} = \sum_{[S'_\alpha]} e^{-H'[S'_\alpha]} = Z'. \quad (4)$$

La fonction de partition du système transformé est égale à celle du système initial. Cependant le hamiltonien  $H'[S'_\alpha]$  n'a aucune raison d'être du type d'Ising (I.2). On est conduit à généraliser le hamiltonien (I.2) en écrivant (cf. exercice 1) :

$$-H = K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + K_2 \sum_{\ll i,j \gg} S_i S_j + K_3 \sum_{\langle i,j,k,l \rangle} S_i S_j S_k S_l + \dots \quad (5)$$

où la première somme porte sur les plus proches voisins, la seconde sur les seconds plus proches voisins, la troisième sur les « plaquettes », etc. (cf. la figure 3). Notez que le facteur  $1/kT$  a été inclus dans la définition des coefficients  $K_i$ . La seule restriction est la propriété de symétrie  $H(S_i) = H(-S_i)$ .

Les coefficients  $K_1, K_2, \dots, K_n \dots$ , également appelés *constantes de couplage* et notés collectivement  $\mu$  définissent un *espace de paramètres*. Un système physique à une température donnée correspond à un point dans l'espace des paramètres. La TGR, notée  $R_2$ , qui établit une correspondance entre le système de spins et le système de blocs, est donc une *transformation agissant dans l'espace des paramètres* : elle envoie un

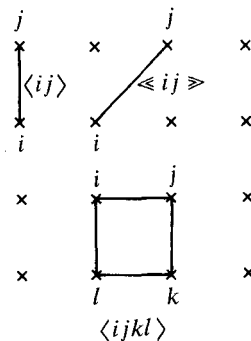


Figure 3.

point  $\mu$  de cet espace en un autre point  $\mu'$ . On pourra écrire :

$$\begin{aligned}\mu &= \{K_1, K_2, \dots, K_n, \dots\} \\ \mu' &= \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n, \dots\}\end{aligned}$$

et :

$$\mu' = R_2 \mu . \quad (6)$$

Il faut maintenant faire deux hypothèses nécessaires pour les développements ultérieurs :

**H1 :** Les coefficients  $(K_1, K_2, \dots)$  sont des fonctions analytiques de la température même à  $T = T_c$ , et les  $K'_\alpha$  sont des fonctions analytiques des  $K_\alpha$ .

**H2 :** Les TGR n'introduisent pas de couplages à longue distance, c'est-à-dire de coefficients couplant fortement des spins éloignés : le couplage entre deux spins éloignés doit décroître plus vite que toute puissance inverse de la distance entre ces spins.

Ces deux hypothèses sont raisonnables, car la transformation (6) est locale dans l'espace (elle fait intervenir pour chaque bloc un nombre fini de spins), mais on ne connaît pas les conditions générales de leur validité. Certaines transformations (cf. paragraphe D) introduisent des interactions à longue distance, qui sont en réalité des artefacts de la méthode particulière utilisée. Ces interactions ne doivent pas avoir de conséquences physiques, mais elles peuvent poser des problèmes techniques si l'on n'y fait pas attention.

On peut faire deux généralisations immédiates de ce qui précède :

- utiliser un espace à  $D$  dimensions : chaque bloc contient alors  $2^D$  spins,
- former des blocs comprenant  $s^D$  spins, au lieu de  $2^D$ , et multiplier par  $s$  l'unité de longueur. La TGR correspondante est notée  $R_s$  :

$$\mu' = R_s \mu . \quad (7)$$

Pour un système de spins,  $s = \sqrt{2}, 2, \sqrt{3}, \dots$  ; au paragraphe D nous verrons une technique permettant à  $s$  de prendre des valeurs continues.

Ainsi que je l'ai expliqué en début de chapitre, la stratégie du groupe de renormalisation consiste à itérer un grand nombre de fois la TGR  $R_s$  :  $R_s^n$  sera *défini* par  $n$  itérations de  $R_s$  :  $R_s^n = R_s \dots R_s (*)$ . Il convient

(\*) Remarquez que  $R_{s^2}$  n'est pas équivalent à la formation de blocs de  $s^{2D}$  spins, en raison des effets bien connus des élections au second degré : la majorité de 4 blocs n'est pas toujours celle de 16 spins !

à ce point de répondre à la question suivante : pourquoi doit-on itérer  $R_s$ , et non procéder en une seule fois pour obtenir  $R_{s^n}$  ? En fait on ne peut pas faire l'intégration pour  $s \gg 1$ , sauf dans le cas de modèles trivialement solubles (auquel cas le GR est inutile), alors que pour  $s \sim 1$  le calcul est possible, au moins de façon approximative, car seules interviennent les fluctuations de longueur d'onde  $\sim sa$  ( $s^n a$  après  $n$  itérations), correspondant à un nombre limité de degrés de liberté. Lorsque apparaîtra dans un raisonnement un facteur de dilatation  $s \gg 1$ , ce facteur devra toujours être interprété comme provenant de l'itération d'un grand nombre de TGR.

## A.2. Transformations linéaires

Dans la formation des blocs telle qu'elle a été décrite plus haut, la fonction  $f(S_i)$  n'est pas linéaire, d'où la dénomination « TGR non linéaire ». Une façon de définir le spin d'un bloc, qui possède la propriété de linéarité, consiste à construire  $S'_\alpha$  à partir de la moyenne des spins du bloc et à écrire :

$$S'_\alpha = \frac{\lambda(s)}{s^D} \sum_{i \in \alpha} S_i . \quad (8)$$

Dans l'équation (8),  $\lambda(s)$  est une fonction de  $s$  dont le rôle sera précisé ultérieurement. Naturellement les spins des blocs ne restent plus égaux à  $\pm 1$ , et après quelques itérations de la TGR, la variable de spin prend des valeurs pratiquement continues : elle devient analogue à la variable  $\varphi_i$  (ou  $\varphi(\mathbf{x})$ ) utilisée dans la théorie de Ginzburg-Landau.

La forme (5) du hamiltonien n'est plus adaptée pour définir l'espace des paramètres. Le hamiltonien auquel on arrive après quelques itérations est analogue à celui de Ginzburg-Landau, auquel on a rajouté une infinité de termes, du type :  $\varphi^6$ ,  $\varphi^8$ ,  $\varphi^2(\nabla\varphi)^2$ , etc., en plus des termes standard :  $(\nabla\varphi)^2$ ,  $\varphi^2$  et  $\varphi^4$ . *L'espace des paramètres sera l'espace des coefficients de ces différents termes*, c'est-à-dire à nouveau l'espace des constantes de couplages.

Bien que cette stratégie linéaire semble au premier abord plus complexe que la stratégie non linéaire, elle possède une propriété très remarquable : la longueur de corrélation  $\xi'$  du système transformé est celle du système initial divisée par  $s$  :

$$\xi' = \xi/s . \quad (9)$$

Considérons en effet deux blocs suffisamment éloignés et calculons

$\langle S'_\alpha S'_\beta \rangle :$

$$\begin{aligned} \langle S'_\alpha S'_\beta \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{[S']} S'_\alpha S'_\beta e^{-H'[S']} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{[S']} \sum_{[S]} S'_\alpha S'_\beta \prod_\gamma \delta \left( S'_\gamma - \frac{\lambda(s)}{s^D} \sum_{i \in \gamma} S_i \right) e^{-H[S]} \\ &= \frac{\lambda^2(s)}{s^{2D}} \frac{1}{Z} \sum_{[S]} \left( \sum_{i \in \alpha} S_i \right) \left( \sum_{j \in \beta} S_j \right) e^{-H[S]} \end{aligned}$$

(on a utilisé les équations (2) et (8) et échangé l'ordre des sommations sur  $[S]$  et  $[S']$ )

$$= \frac{\lambda^2(s)}{s^{2D}} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} G_{ij} \approx \lambda^2(s) G_{ij}.$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a supposé  $\xi \gg sa$  de telle sorte que  $G_{ij}$  varie peu quand  $i(j)$  parcourt le bloc  $\alpha(\beta)$ . Si  $G_{ij} \sim \exp(-r_{ij}/\xi)$  pour  $i$  et  $j$  suffisamment éloignés, et comme  $r_{\alpha\beta} \approx r_{ij}/s$  (il faut bien réaliser qu'en fait  $r_{\alpha\beta} = r_{ij}$ , mais que ces deux distances sont mesurées avec des unités de longueur différentes) :

$$G_{\alpha\beta} \sim \exp(-sr_{\alpha\beta}/\xi)$$

ce qui démontre (9). On peut écrire de façon générale la relation valable pour  $r \gg a$  :

$G\left(\frac{r}{s}, \mu'\right) \approx \lambda^2(s) G(r, \mu)$

(10)

La dilatation de l'unité de longueur ( $r \rightarrow r/s$ ) ainsi que la dilatation des spins ( $\lambda(s)$ ) ne doivent pas masquer le fait que les systèmes paramétrés par  $\mu$  et  $\mu'$ , examinés avec les mêmes unités, ont fondamentalement le même comportement à longue distance. On notera aussi que l'équation (10) peut être interprétée comme la loi de transformation de la fonction de corrélation dans une transformation d'échelle (cf. I-F). Cependant cette loi est complexe, car les paramètres du hamiltonien sont modifiés :  $\mu \rightarrow \mu'$ . Il nous reste encore quelques progrès à faire avant de pouvoir exploiter cette relation.

En toute rigueur les relations (9) et (10) ne sont démontrées que pour des TGR linéaires. Afin de simplifier les discussions, je supposerai qu'elles sont vraies, au moins approximativement, dans le cas non linéaire.

Dans le cas des TGR linéaires, la transformation obtenue en formant

des blocs de  $(s_1 s_2)^D$  spins est identique à celle obtenue en faisant le produit de deux TGR correspondant à des blocs de  $s_1^D$  et  $s_2^D$  spins, pourvu que  $\lambda(s)$  obéisse à :

$$\lambda(s_1 s_2) = \lambda(s_1) \lambda(s_2) .$$

Si cette équation est vérifiée,  $\lambda(s)$  est de la forme :

$$\lambda(s) = s^{d_\varphi} \quad (11)$$

où  $d_\varphi$  est une constante, appelée *dimension anormale* du champ. Cette dénomination sera expliquée ultérieurement (paragraphe D). En fait le raisonnement précédent n'est pas tout à fait correct car  $\lambda(s)$  peut être aussi une fonction des paramètres de  $H$  ; l'équation (11) est valable localement dans l'espace des paramètres, et en toute rigueur on devrait écrire  $d_\varphi(\mu)$  (cf. exercice 4.c).

### A.3. Surface critique et points fixes

Pour fixer les idées (mais le raisonnement est général), reprenons l'exemple du modèle d'Ising à deux dimensions et de la TGR non linéaire. Dans l'espace des paramètres, et à une certaine température, le modèle est représenté par un point :

$$K_1 \neq 0 ; \quad K_2 = K_3 = K_4 = \dots = 0 .$$

La dépendance par rapport à  $T$  est contenue dans  $K_1$ , et quand la température varie, le point représentatif du modèle d'Ising décrit dans l'espace des paramètres une ligne appelée *ligne physique du modèle d'Ising*.

Pour une certaine valeur :

$$K_1 = K_{1c} \simeq 0.44$$

correspondant à  $T_c = 2.27 \text{ J}$  (cf. I-B.4), le modèle d'Ising présente une transition de phase du second ordre, et sa longueur de corrélation  $\xi$  est infinie.

Partons du point  $(K_{1c}, 0, 0, \dots)$  dans l'espace des paramètres et appliquons une TGR. La longueur de corrélation  $\xi'$  est encore infinie ( $\xi' = \xi/s$ ), et le système transformé est encore critique. Le lieu des points qui, dans l'espace des paramètres, correspondent à des systèmes physiques au point critique ( $\xi = \infty$ ) est appelé *surface (ou variété) critique*  $S_\infty$ . Si l'on applique une TGR à un point  $\in S_\infty$ , le point transformé est encore sur  $S_\infty$ . Comme la longueur de corrélation est infinie à la transition, nous nous restreignons à des transitions du second ordre (ou éventuellement d'ordre plus élevé).

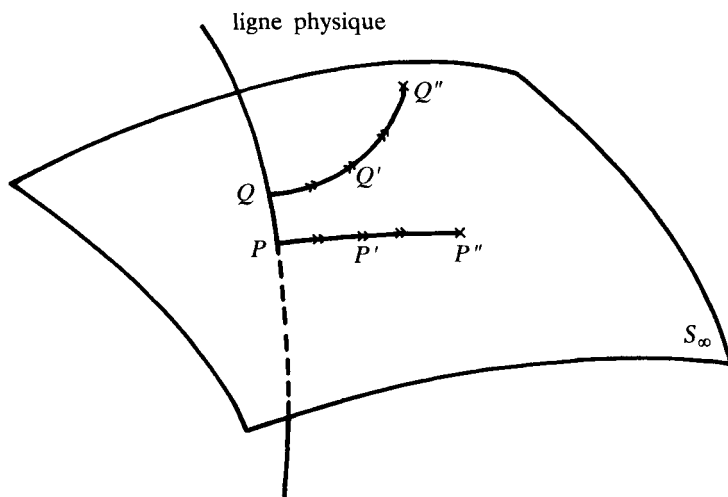


Figure 4. Evolution dans une TGR.

- (i)  $P \in S_\infty$  :  $P'$ , transformé de  $P$ , appartient aussi à  $S_\infty$ .
- (ii)  $Q \notin S_\infty$  :  $Q'$ ,  $Q''$ ... s'éloignent de  $S_\infty$ .

Si l'on part d'un point  $Q \notin S_\infty$ , les TGR  $Q \rightarrow Q' \rightarrow Q'' \dots$  vont progressivement éloigner le point représentatif de la surface critique, puisqu'à chaque opération la longueur de corrélation est divisée par  $s$ , ce qui correspond à des systèmes de plus en plus éloignés de la région critique. Le système de trajectoires décrites par les points représentatifs au cours d'itérations de TGR forme le *flot de renormalisation*. Si l'on fait abstraction de la dilatation de l'unité de longueur et du spin, *tous les points d'une trajectoire correspondent à un même comportement à longue distance* (figure 4).

A priori le comportement des points  $P'$ ,  $P''$ , ...,  $P^{(n)}$  ..., transformés de  $P \in S_\infty$  par itérations successives de la TGR, pourrait être complètement arbitraire : il pourrait y avoir des points doubles, des cycles limites, etc. Le cas physiquement intéressant est celui où la suite  $P \rightarrow P' \rightarrow \dots \rightarrow P^{(n)} \rightarrow \dots$  converge vers un point fixe  $P^*$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*$$

le point fixe étant caractérisé par un ensemble  $\mu^*$  de paramètres tels que :

$$R_s \mu^* = \mu^* . \quad (12)$$

Plus précisément, il existe sur la surface critique un domaine d'attraction  $\mathcal{D}(P^*)$  du point fixe tel que si  $P \in \mathcal{D}(P^*)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*$ . Je laisserai de côté le cas où la dimension de

$\mathcal{D}(P^*)$  est inférieure à celle de la surface critique. Ce cas conduit au comportement dit de « cross-over » (cf. Toulouse-Pfeuty (chapitre 8) et exercice 9).

Il peut y avoir plusieurs points fixes, avec chacun leur domaine d'attraction. Un point fixe peut aussi être rejeté à l'infini. On ne connaît pas à l'heure actuelle de conditions générales pour l'existence de points fixes et de leur domaine d'attraction. Il est nécessaire de procéder à des vérifications explicites dans chaque cas particulier. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

**H3 :** Si  $P \in S_\infty$  et que l'on effectue un grand nombre d'itérations de la TGR,  $P^{(n)}$  converge vers un point fixe  $P^* \in S_\infty$  qui vérifie  $R_s \mu^* = \mu^*$ . Il peut éventuellement exister plusieurs points fixes, et à chacun d'entre eux correspond un domaine d'attraction.

Concluons ce paragraphe par quatre remarques :

(i) La position du point fixe dépend en général de la forme particulière choisie pour les TGR. Les résultats physiques (exposants critiques) ne doivent pas dépendre de la forme particulière des TGR : cf. exercice 8.

(ii) Rôle de  $\lambda(s) = s^{d_\varphi}$ .

D'après (10) on trouve au point fixe :

$$G(r, \mu^*) = s^{-2d_\varphi} G\left(\frac{r}{s}, \mu^*\right).$$

(En toute rigueur, on devrait préciser que  $d_\varphi$  est évalué pour les paramètres du point fixe :  $d_\varphi = d_\varphi(\mu^*)$ .)

Le choix  $s = r/a$  dans l'équation précédente montre qu'au point fixe le comportement de la fonction de corrélation est :

$$G(r, \mu^*) = \left(\frac{a}{r}\right)^{2d_\varphi} G(a, \mu^*).$$

Comme  $P^* \in S_\infty$ , on sait, d'après la définition de l'exposant critique  $\eta$ , que  $G(r)$  doit se comporter en  $(r)^{-D+2-\eta}$ . On peut donc faire l'identification :

$$\boxed{d_\varphi = \frac{1}{2} (D - 2 + \eta)} \quad (13)$$

Le résultat (13) montre la nécessité d'introduire un facteur de dilatation  $\lambda(s) = s^{d_\phi}$  dans la définition des TGR : en effet si ce facteur de dilatation n'est pas convenablement choisi, en particulier s'il n'est pas relié à  $\eta$  par (13), il n'est pas possible d'aboutir à un point fixe. L'étude du modèle gaussien (paragraphe D.2) permettra d'illustrer la nécessité du facteur  $\lambda(s)$ .

(iii) Un point fixe isolé donne des exposants critiques uniques. On peut aussi avoir des lignes (ou des surfaces...) de points fixes : cf. chapitre IV. Dans ce cas les exposants critiques dépendent continûment de paramètres comme la température.

(iv) Pourquoi « groupe de renormalisation » ?

La notion de « groupe de renormalisation » a été introduite en 1953 par Stueckelberg et Petermann <sup>(1)</sup> et indépendamment par Gell-Mann et Low <sup>(2)</sup> dans le cadre des divergences de la théorie quantique des champs (cf. chapitre VI). La procédure pour éliminer ces divergences n'est pas unique et le « groupe de renormalisation » exprimait, au départ, l'invariance de la physique par rapport aux diverses procédures de renormalisation (renormalisation = procédure utilisée pour rendre la théorie quantique des champs finie). Cette version du groupe de renormalisation peut être considérée comme un cas particulier de celle introduite par Wilson en 1971, et que je viens de décrire. Le lien entre ces deux versions sera examiné au chapitre VII. Notons dès à présent que la dilatation du spin par un facteur  $\lambda(s)$  dans (8) est souvent appelée « renormalisation du spin », par analogie avec une opération similaire en théorie quantique des champs.

## B. COMPORTEMENT AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE. EXPOSANTS CRITIQUES

Le comportement des TGR au voisinage d'un point fixe va permettre le calcul des exposants critiques, grâce à la linéarisation des équations du GR au voisinage de ce point. Afin de donner une explication élémentaire, commençons par prétendre que l'espace des paramètres est à une seule dimension : il suffit d'un paramètre  $K$  pour décrire la suite des TGR. Cette hypothèse est évidemment trop simpliste et nous montrerons un peu plus loin comment on peut s'en passer.

### B.1. Discussion élémentaire

Grâce à l'hypothèse d'analyticité (H1), l'équation :

$$K' = R_s K$$

peut être linéarisée au voisinage du point fixe ; si  $K$  est voisin de  $K^*$  on obtient :

$$K' = K^* + (K - K^*) \left. \frac{dR_s}{dK} \right|_{K^*} + O(K - K^*)^2,$$

en écrivant un développement de Taylor au voisinage de  $K^*$ , où l'on néglige les termes en  $(K - K^*)^2$  ; comme  $R_{s_1} R_{s_2} = R_{s_1 s_2}$ , on peut écrire  $dR_s/dK|_{K^*} = s^y$  :

$$K' - K^* = s^y (K - K^*).$$

D'après l'hypothèse (H1),  $K$  est une fonction analytique de  $T$ , et sauf accident,  $K - K^*$  doit s'annuler linéairement à  $T_c$  en changeant de signe (rappelons que  $K^*$  appartient à la surface critique qui est ici réduite à un point) :

$$K - K^* \sim T - T_c$$

au voisinage de  $T_c$ .

On choisit  $|K - K^*| \rightarrow 0$ , et  $|K' - K^*|$  fini, mais tout de même suffisamment petit pour que l'approximation linéaire soit valable : le point  $K'$  dans l'espace des paramètres représente un système loin du point critique. Par la suite on notera symboliquement une telle condition :  $|K' - K^*| \sim 1$ . La longueur de corrélation  $\xi(K')$  est alors finie,  $\sim a$  : mesurant la longueur de corrélation en unités de  $a$ ,  $\xi(K') \sim 1$  (\*). On peut maintenant évaluer  $\xi(K)$  grâce à :

$$\xi(K) = s \xi(K') = \left( \frac{K' - K^*}{K - K^*} \right)^{1/y} \xi(K') \sim |T - T_c|^{-1/y}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\nu = \frac{1}{y}}. \quad (14)$$

(\*) Il est possible d'être un peu plus précis en prenant  $|K' - K^*| \sim k_0$ ,  $\xi(K') = \xi_0$ , où  $k_0$  et  $\xi_0^{-1}$  peuvent être petits ( $10^{-2}$  ?) mais *finis*, afin de justifier le développement de Taylor. On montrera aisément que cela ne change rien au résultat.

L'exposant critique  $\nu$  est donc lié à la dérivée de la TGR au point fixe. On remarquera que le résultat est valable pour  $T > T_c$  comme pour  $T < T_c$  : en d'autres termes  $\nu = \nu'$  (cf. note page 41). Ce résultat va être étendu au cas d'un espace de paramètres quelconque.

### B.2. Linéarisation au voisinage d'un point fixe

Soit  $\mu = \{K_\alpha\}$  un point dans l'espace des paramètres proche de  $\mu^* = \{K_\alpha^*\}$  :

$$K_\alpha = K_\alpha^* + \delta K_\alpha$$

et  $\mu' = \{K'_\alpha\}$  son transformé par une TGR :  $\mu' = R_s \mu$ .

La relation entre  $\delta K'_\alpha$  et  $\delta K_\alpha$  est approximativement linéaire si  $\mu$  et  $\mu^*$  sont suffisamment proches :

$$\delta K'_\alpha \approx \sum_\beta T_{\alpha\beta}(s) \delta K_\beta \quad (15)$$

avec :

$$T_{\alpha\beta}(s) = \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\mu^*}. \quad (16)$$

La relation  $T(s_1 s_2) = T(s_1) T(s_2)$  écrite pour  $s_1 = 1 + \delta$ ,  $s_2 = s$ ,  $\delta$  infinitésimal permet de montrer que :

$$T(s) = \exp(\mathcal{T} \ln s)$$

où  $\mathcal{T} = dT/d \ln s|_{s=1}$ . Soit  $e^{(i)}$  un vecteur propre de  $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$  correspondant à la valeur propre  $y_i$  :

$$\sum_\beta \mathcal{T}_{\alpha\beta} e_\beta^{(i)} = y_i e_\alpha^{(i)}.$$

Ce vecteur vérifie donc :

$$\sum_\beta T_{\alpha\beta}(s) e_\beta^{(i)} = s^{y_i} e_\alpha^{(i)}.$$

La matrice  $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$  n'est en général pas symétrique, et il n'y a aucune garantie pour que ses valeurs propres soient réelles et que ses vecteurs propres forment un ensemble complet. On va néanmoins faire l'hypothèse que tout se passe bien de ce côté (il est possible de faire une hypothèse un peu moins optimiste). On peut alors projeter tout point de l'espace des paramètres sur la base  $\{e^{(i)}\}$  :

$$\delta K_\beta = \sum_i t_i e_\beta^{(i)}$$

et à l'approximation linéaire :

$$\delta K'_\alpha = \sum_i t_i s^{y_i} e_\alpha^{(i)}. \quad (17)$$

Le coefficient  $t_i$  est appelé *champ (ou variable) d'échelle* (scaling field). Dans une TGR, le champ d'échelle est multiplié par  $s^{y_i}$ . L'équation (18) montre que l'on doit distinguer trois cas :

(i)  $y_i > 0$  : le champ d'échelle croît quand on itère les TGR :  $t_i$  est appelé *champ essentiel* (relevant).

(ii)  $y_i = 0$  : le champ d'échelle reste constant à l'approximation linéaire. Pour décider de son comportement, il faut aller au-delà de cette approximation. Un tel champ est appelé *marginal*.

(iii)  $y_i < 0$  : le champ d'échelle décroît avec les itérations des TGR. Le champ  $t_i$  est alors *inessentiel* (irrelevant). Il faut bien remarquer que les champs essentiels, inessentiels ou marginaux sont définis *par rapport à un point fixe particulier*.

Au voisinage du point fixe, le hamiltonien peut s'écrire :

$$H = H^* + \sum_i t_i O_i$$

où les coefficients  $O_i$  des champs d'échelle sont les *opérateurs d'échelle* conjugués de ces champs. Si  $t_i$  est un champ essentiel (resp. inessential, marginal), l'opérateur  $O_i$  sera aussi qualifié d'essentiel (resp. inessential, marginal).

Nous supposons pour le moment qu'il n'y a pas de champs marginaux : leur cas sera étudié au paragraphe F. Les vecteurs  $e^{(i)}$  sous-tendent un espace vectoriel dont l'origine est le point fixe ( $t_i = 0 \forall i$ ). S'il y a  $N$  champs essentiels, il faut fixer  $N$  paramètres  $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 0$  pour se trouver, à l'approximation linéaire, sur la surface critique. En effet si  $t_1$  par exemple est  $\neq 0$ , les itérations de la TGR vont éloigner le point représentatif du point fixe, et le point de départ ne peut donc pas appartenir à la surface critique. (On suppose implicitement qu'il n'y a pas de comportement du type « cross-over ».) Inversement si  $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 0$ , le point représentatif converge à l'approximation linéaire vers le point fixe, et le point de départ se trouve sur la surface critique. L'*hyperplan*  $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 0$  est donc le plan tangent à la surface critique au point fixe.

Le cas le plus important est celui où la variation d'un seul paramètre (la température) permet de se placer sur la surface critique. Ce cas correspond aux transitions du deuxième ordre, et ces transitions seront décrites par une situation où il existe un seul champ essentiel au point fixe considéré.

Les points tricritiques sont obtenus en fixant deux paramètres (par exemple température et pression) : ce cas correspondra à l'existence de deux champs essentiels. La généralisation aux points polycritiques d'ordre  $N$  est évidente : il faut  $N$  champs essentiels. Je me limiterai dans toute la suite aux transitions du second ordre, et donc au cas d'un seul champ essentiel  $t_1$ .

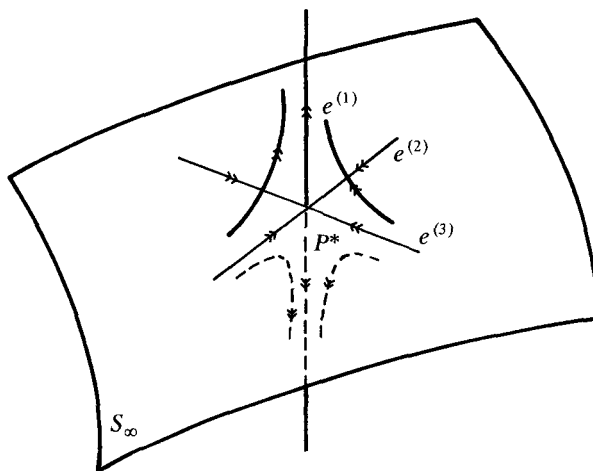


Figure 5. Evolution dans une TGR.  
Flot de renormalisation au voisinage d'un point fixe.

La figure 5 montre le schéma de l'espace vectoriel au voisinage du point fixe dans le cas de trois paramètres. Les doubles-flèches indiquent le sens de déplacement du point représentatif dans une TGR. On remarquera l'axe divergent ( $e^{(1)}$ ) et les deux axes convergents ( $e^{(2)}$  et  $e^{(3)}$ ) : le point fixe présente une *instabilité d'ordre 1*.

Si l'on part d'un point proche de la surface critique ( $t_1$  petit,  $t_2$  et  $t_3$  finis), l'itération des TGR va d'abord rapprocher le point représentatif du point fixe ; cependant le coefficient de  $e^{(1)}$  va finir par l'emporter, et le point s'éloignera de  $P^*$ . Ceci permet de tracer qualitativement le flot de renormalisation au voisinage de  $P^*$  (figure 5).

L'approximation linéaire n'est plus valable si les paramètres  $t_i$  sont grands ; cependant le schéma général du flot de renormalisation reste valable au-delà de cette approximation, même si la description devient techniquement plus complexe.

### B.3. Fonction de corrélation en champ nul

Avant de passer aux équations, il est utile de donner une justification heuristique du rôle du point fixe dans la détermination des exposants critiques. Nous supposons donc un point fixe auquel correspondent des champs d'échelle  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots$  avec :

$$y_1 > 0 ; \quad \dots < y_i < \dots < y_3 < y_2 < 0 .$$

Partons d'un système physique où  $t_1$  est très petit ( $10^{-6}$ ) tandis que  $t_2, t_3, \dots$  sont petits mais finis ( $10^{-1}$ ) (ces chiffres sont évidemment totalement arbitraires). Dans l'itération des TGR, le point représentatif convergera rapidement vers le point fixe et restera longtemps au voisinage de ce point, avant de diverger finalement le long de l'axe  $e^{(1)}$  (cf. figure 5). Un grand intervalle en  $s$  sera dominé par le voisinage du point fixe, et c'est cet intervalle qui construira le comportement critique.

Passons maintenant à la discussion quantitative : comme dans le cas de la discussion simplifiée, les exposants critiques seront reliés aux valeurs propres  $s^{y_i}$  de la matrice  $T_{\alpha\beta}(s)$ . La fonction de corrélation  $G(r)$  est une fonction des champs d'échelle  $t_1, t_2, t_3, \dots$  ; le champ  $t_1$  doit, sauf accident, s'annuler linéairement sur la surface critique :

$$t_1 \sim t = \frac{T - T_c}{T_c} .$$

Utilisons la relation (10) et la loi de transformation des champs d'échelle en convenant de mesurer toutes les longueurs ( $\xi, r$ ) avec pour unité le pas  $a$  du réseau :

$$G(r ; t_1, t_2, \dots) = s^{-2d_\phi} G\left(\frac{r}{s} ; t'_1, t'_2, \dots\right) . \quad (18)$$

Plaçons-nous d'abord sur la surface critique :  $t_1 = 0$ . Dans ce cas l'équation (18) devient :

$$G(r ; 0, t_2, \dots) = s^{-2d_\phi} G\left(\frac{r}{s} ; 0, s^{y_2} t_2, \dots\right) .$$

Faisons maintenant le choix  $s = r$  : ce choix correspond à l'intégration de toutes les fluctuations de longueur d'onde comprises entre  $a$  et  $r$  ; on obtient :

$$G(r ; 0, t_2, \dots) = r^{-2d_\phi} G(1 ; 0, r^{y_2} t_2, \dots) .$$

Si  $r^{y_2} t_2 \ll 1$ , l'équation précédente démontre que la fonction de corrélation obéit bien à une loi de puissance au point critique,

l'exposant critique  $\eta$  étant donné en fonction de  $d_\varphi$  par l'équation (13). On démontre ainsi pour  $r/a \gg 1$ , la propriété d'invariance d'échelle au point critique, examinée au chapitre I, paragraphe F. La *largeur de la région critique* c'est-à-dire la région où l'on observe cette propriété d'invariance d'échelle est donnée par :

$$(\text{Cte}) t_2 (r/a)^{y_2} \ll 1.$$

La constante dépend des détails microscopiques du modèle ; l'invariance d'échelle sera observée pour des valeurs de  $r$  d'autant plus petites que  $y_2$  sera plus négatif. On note que toute référence à l'échelle de longueur  $a$  a disparu, mais seulement pour  $r/a \gg 1$ . Ceci distingue l'invariance d'échelle au point critique de l'*invariance d'échelle naïve*, d'origine purement dimensionnelle (cf. D.2) : celle-ci serait valable pour toute valeur de  $r$ .

Plaçons-nous maintenant en dehors de la surface critique ( $t_1 \neq 0$ ), et supposons que nous ayons suffisamment itéré les TGR de telle sorte que la fonction de corrélation dans le membre de droite de (18) soit calculée loin de la région critique :

$$s^{y_1} t_1 \sim \pm 1.$$

Désignons par  $\xi$  la quantité  $|t_1|^{-1/y_1} \sim |t|^{-1/y_1}$  ( $\xi$  sera évidemment identifié avec la longueur de corrélation) ; l'équation (18) devient :

$$G(r) = s^{-2d_\varphi} G\left(\frac{r}{s}; \pm \left(\frac{s}{\xi}\right)^{y_1}, s^{y_2} t_2, \dots\right)$$

où le signe (+) correspond à  $t > 0$  ( $T > T_c$ ) et le signe (−) à  $t < 0$  ( $T < T_c$ ). Par construction,  $s \sim \xi$  et on obtient le résultat cherché :

$$G(r) = \xi^{-2d_\varphi} G\left(\frac{r}{\xi}; \pm 1, \xi^{y_2} t_2, \dots\right).$$

Le choix  $s = \xi$  correspond physiquement à l'intégration de toutes les fluctuations de longueur d'onde  $a \leq \lambda \leq \xi$  ; après itération des TGR la longueur de corrélation est  $\sim 1$ , et le comportement de la fonction de corrélation est régulier par rapport à  $(T - T_c)$ .

L'équation précédente donne un comportement simple pour  $G(r)$  si  $\xi^{y_2} t_2 \ll 1$  : à nouveau on définira la région critique comme la région où cette condition est réalisée, ce qui sera le cas si  $|T - T_c|$  est suffisamment petit. A l'intérieur de cette région critique, on démontre donc la forme (I.30) de la fonction de corrélation, ce qui permet d'identifier  $\xi$  avec la longueur de corrélation :

$$G(r) = r^{-2d_\varphi} f_{\pm}\left(\frac{r}{\xi}\right), \quad (19)$$

les fonctions  $f_+$  ( $T > T_c$ ) et  $f_-$  ( $T < T_c$ ) étant a priori différentes. L'équation (19) conduit à l'identification des exposants critiques  $\eta$  et  $\nu$  (remarquons au passage l'égalité des exposants  $\nu$  et  $\nu'$  : cf. note p. 41) :

$$d_\phi = \frac{1}{2} (D - 2 + \eta) ; \quad \nu = \frac{1}{y_1} . \quad (20)$$

La démonstration précédente suppose que le point de départ est voisin du point fixe, de telle sorte que l'approximation linéaire soit valable. Si le point de départ est éloigné de  $P^*$ , mais appartient au domaine d'attraction de  $P^*$ , on peut se placer tout près de la surface critique. Par continuité la trajectoire du point représentatif parviendra près du point fixe. Soit  $s_0$  le paramètre de la TGR (ou des TGR successives) qui ont amené le point représentatif dans la région linéaire :

$$G(r, \mu) = s_0^{-2d_\phi} G\left(\frac{r}{s_0}, \mu'\right) .$$

Il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à  $G(r/s_0, \mu')$  :

$$G\left(\frac{r}{s_0}, \mu'\right) = \left(\frac{r}{s_0}\right)^{-2d_\phi} f_\pm\left(\frac{r}{s_0 \xi}\right) .$$

Cette équation montre que  $G(r, \mu)$  a la forme (19) avec les exposants critiques (20). *Quel que soit le point de départ dans le domaine d'attraction du point fixe, on obtient les mêmes exposants.* Comme des points différents correspondent à des hamiltoniens différents, on arrive à la propriété d'*universalité des exposants critiques* : ceux-ci ne dépendent pas des détails du hamiltonien, mais seulement de propriétés très générales.

La largeur de la région critique est définie par la condition :

$$\xi^{y_2} t_2 \sim |T - T_c|^{-\nu y_2} t_2 \ll 1 .$$

Elle dépend des détails microscopiques par l'intermédiaire de  $t_2$ , et du point fixe par l'intermédiaire de  $y_2$ . Si  $t_2$  est grand, ou  $y_2$  petit (en valeur absolue), il peut être difficile d'observer le comportement critique. De plus lorsque  $y_2$  est petit, l'évolution se fait lentement le long de l'axe  $e^{(2)}$ , ce qui peut masquer le rôle du point fixe. L'exemple extrême où  $y_2 = 0$  (champ marginal) sera étudié au paragraphe F.

#### B.4. Fonction de corrélation $B \neq 0$

Introduisons maintenant un champ magnétique extérieur uniforme. Le terme rajouté au hamiltonien est :

$$B \sum_i S_i = B \frac{s^D}{\lambda(s)} \sum_\alpha S'_\alpha = B s^{D-d_\phi} \sum_\alpha S'_\alpha .$$

La loi de transformation du champ magnétique est donc :

$$B \rightarrow B' = s^{D-d_\varphi} B = s^{y_B} B ; \quad y_B = \frac{1}{2} (D + 2 - \eta) . \quad (21)$$

Si l'on suppose que  $\eta$  est petit (ce qui est le cas en pratique :  $\eta \simeq 0 - 0.1$ ),  $y_B$  est positif et  $B$  croît dans une TGR.

En reprenant la méthode précédente, on obtient (on identifie  $t_1$  et  $t$ , et on n'écrit plus les champs inessentiels  $t_2, t_3 \dots$ ) :

$$G(r, t, B) = s^{-2d_\varphi} G\left(\frac{r}{s}, s^{y_1} t, s^{y_B} B\right) .$$

Cette équation avait été écrite sans démonstration dans l'exercice (I.5). Elle permet d'obtenir les exposants  $\beta, \gamma, \delta$  en fonction de  $\eta$  et  $\nu$ , mais il est possible de procéder plus directement en examinant l'aimantation par spin  $M$ . L'aimantation  $M = \langle S \rangle$  se transforme suivant la loi :

$$\begin{aligned} M(t, B) &= s^{-d_\varphi} M(s^{y_1} t, s^{y_B} B) \\ &= s^{-d_\varphi} M\left(\pm \left(\frac{s}{\xi}\right)^{1/\nu}, s^{y_B} B\right) . \end{aligned} \quad (22)$$

Pour  $T = T_c$ ,  $B \neq 0$ , on prend  $s = B^{-1/y_B}$  :

$$M(0, B) = B^{d_\varphi/y_B} M(0, 1)$$

(en effet  $\xi \rightarrow \infty$ ). Cette équation donne l'exposant  $\delta$  :

$$\delta = \frac{y_B}{d_\varphi} = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} . \quad (23)$$

Pour  $T < T_c$  et  $B = 0$ , on pose  $s = \xi$  :

$$M(t, 0) = \xi^{-d_\varphi} M(-1, 0) \sim |t|^{-\nu d_\varphi} .$$

Cette équation donne l'exposant  $\beta$  :

$$\beta = \nu d_\varphi = \frac{1}{2} \nu (D - 2 + \eta) . \quad (24)$$

Reste à obtenir l'exposant critique  $\alpha$  ; pour ce faire, on a recours à l'énergie libre en champ nul.

### B.5. Energie libre

L'équation (2) reliant le hamiltonien  $H'[S'_\alpha]$  à  $H[S_i]$  doit d'abord être précisée. En effet dans l'intégration sur les courtes longueurs

d'onde, il apparaît un terme constant  $G$ , indépendant des spins  $S'_\alpha$ . L'équation (2) doit être corrigée en :

$$e^{-G-H'[S'_\alpha]} = \sum_{[S_i]} \prod_{\alpha} \delta(S'_\alpha - f(S_i)|_{i \in \alpha}) e^{-H[S_i]} . \quad (25)$$

La discussion qui suit s'applique aussi bien aux transformations non linéaires que linéaires, car nous n'allons pas utiliser l'équation (10). Le terme  $\exp(-G)$ , qui provient de l'intégration sur les courtes longueurs d'onde, n'intervient pas dans le calcul des fonctions de corrélation, car il s'élimine entre le numérateur et le dénominateur dans des expressions du type (I.25). Par contre, l'énergie libre dépend de ce terme, ce qui rend la discussion plus complexe. En posant :

$$Z' = \sum_{[S']} e^{-H'[S']} ; \quad F' = -\ln Z'$$

on obtient la relation :

$$F = F' + G .$$

Définissons l'énergie libre par unité de volume :  $f = F/L^D$ ,  $f' = F'/(L/s)^D = f(\mu')$  :

$$f(\mu) = g + s^{-D} f(\mu') . \quad (26)$$

Dans l'équation (26), la fonction  $f$  est la même dans les deux membres. En faisant appel aux champs d'échelle, l'équation (26) devient :

$$f(t_1, t_2, \dots) = g(t_1, t_2, \dots) + s^{-D} f(s^{y_1} t_1, s^{y_2} t_2, \dots) .$$

Si l'on admet (et ceci est carrément frauduleux : cf. Ma, chapitre VI pour une discussion correcte — mais longue — qui tient compte de ce terme) que l'on peut ignorer le terme « régulier »  $g$ , on obtient en posant  $s = |t|^{-1/y_1}$  :

$$f(t) = |t|^{D/y_1} f(\pm 1, |t|^{-y_2/y_1} t_2, \dots) . \quad (27)$$

$f(t)$  est l'énergie libre des fluctuations de longueur d'onde  $\lambda \geq \xi$  ; le terme négligé, qui est l'énergie libre des fluctuations de longueur d'onde  $\lambda \leq \xi$ , est aussi singulier que  $f$ .

Comme la chaleur spécifique est donnée par  $\sim d^2 f/dt^2$ , on voit que  $2 - \alpha = D/y_1 = D\nu$  d'où la relation :

$$\alpha = 2 - \nu D . \quad (28)$$

### B.6. Lois d'échelle et remarques

L'analyse au voisinage du point fixe a permis de démontrer les lois d'échelle (= relation entre exposants critiques) suivantes :

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (29.a)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \nu (D - 2 + \eta) \quad (29.b)$$

$$\delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (29.c)$$

$$\gamma = \nu (2 - \eta) . \quad (29.d)$$

Les six exposants critiques fondamentaux ne sont pas indépendants : il suffit de connaître  $\eta$  et  $\nu$  pour les calculer tous. Les lois d'échelle sont parfaitement vérifiées par le modèle d'Ising  $D = 2$  (en prenant  $\alpha = 0$  pour une divergence logarithmique), et semblent aussi vérifiées dans toutes les études numériques qui ont été faites sur des modèles.

Les lois d'échelle représentent donc un beau succès du groupe de renormalisation. Cependant, il ne faut pas accepter aveuglément tous ses résultats : le groupe de renormalisation ne permet pas de calculer explicitement un modèle : il ne permet pas d'affirmer que la fonction  $f_{\pm}$ , par exemple, dans l'équation (19) est différente de zéro. Si cette fonction était nulle, le comportement de la fonction de corrélation serait évidemment totalement différent. Un bon exemple où l'application aveugle des résultats du groupe de renormalisation conduit à des résultats incorrects est donné dans Ma, chapitre VII.

## C. MODÈLE D'ISING SUR RÉSEAU TRIANGULAIRE ET APPROXIMATION DES CUMULANTS

Dans ce premier exemple d'application du groupe de renormalisation, j'utiliserai une TGR non linéaire. Ce type de transformation a été utilisé principalement dans des études sur ordinateur. Le principal problème est la nécessité de tronquer le hamiltonien (5) en conservant seulement un nombre fini de termes. Cette troncature introduit des approximations difficiles à contrôler, et dans l'ensemble les résultats ont été décevants. Une méthode prometteuse est celle du « Groupe de Renormalisation Monte Carlo » <sup>(3)</sup>.

J'exposerai une méthode d'approximation (méthode des cumulants) qui a le mérite d'une relative simplicité de calculs, et qui illustre de façon concrète les notions essentielles du groupe de renormalisation : transformation du hamiltonien, point fixe, et calcul des exposants critiques. Le cas le plus simple est celui du réseau triangulaire : les blocs

de spins sont formés en groupant 3 spins  $S_\alpha^{(i)}$  au sommet d'un triangle (figure 6). Le facteur de dilatation est  $s = \sqrt{3}$  et le spin  $S'_\alpha$  du bloc est :

$$S'_\alpha = \text{Signe} (S_\alpha^{(1)} + S_\alpha^{(2)} + S_\alpha^{(3)}) = f(S_\alpha^{(i)}) .$$

Le hamiltonien transformé sera donc donné par :

$$e^{-G - H'[S']} = \sum_{[S]} \prod_{\alpha} \delta(S'_\alpha - f(S_\alpha^{(i)})) e^{-H[S]} . \quad (30)$$

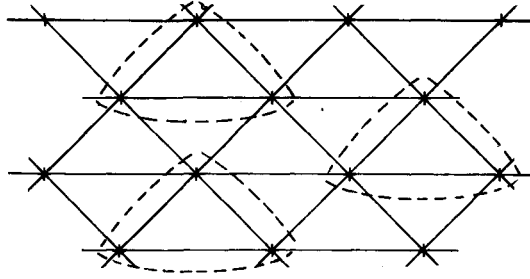


Figure 6. Réseau triangulaire et formation de blocs.

On peut toujours écrire :

$$H = H_0 + V$$

où  $H_0$  contient les interactions entre spins à l'intérieur d'un même bloc et  $V$  les interactions entre spins de blocs différents (figure 6). Récrivons (30) sous la forme :

$$e^{-G - H'[S']} = \frac{\sum_{[S]} e^{-H_0} \prod \delta(S' - f(S)) \sum_{[S]} e^{-H_0 - V} \prod \delta(S' - f(S))}{\sum_{[S]} e^{-H_0} \prod \delta(S' - f(S))} \quad (31)$$

et définissons la valeur moyenne  $\langle A \rangle_0$  d'une quantité  $A$  par :

$$\langle A \rangle_0 = \frac{\sum_{[S]} e^{-H_0} A[S] \prod \delta(S' - f(S))}{\sum_{[S]} e^{-H_0} \prod \delta(S' - f(S))} .$$

Il faut bien remarquer que  $\langle A \rangle_0$  est définie pour une configuration de

blocs  $[S']$  donnée ; une notation plus explicite serait  $\langle A[S'] \rangle_0$ . L'équation (31) devient :

$$e^{-G-H'[S']} = \langle e^{-V} \rangle_0 \sum_{[S]} e^{-H_0} \prod \delta(S' - f(S)). \quad (32)$$

L'équation (32) est exacte mais ne nous avance pas beaucoup pour le moment. Nous allons maintenant avoir recours à une approximation reposant sur l'identité suivante (développement en cumulants, cf. V.B.1) :

$$\begin{aligned} \ln \langle e^x \rangle &= \ln [e^{\langle x \rangle} \langle e^{x - \langle x \rangle} \rangle] \\ &= \langle x \rangle + \ln \langle e^{x - \langle x \rangle} \rangle \\ &= \langle x \rangle + \ln \left\langle 1 + (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2!} (x - \langle x \rangle)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} (x - \langle x \rangle)^3 + \dots \right\rangle \\ &= \langle x \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle + \dots \end{aligned}$$

Nous allons nous contenter de garder le premier terme du développement ; les calculs ont été menés jusqu'au troisième terme, mais ils deviennent rapidement très complexes ; nous ferons donc l'approximation :

$$\langle e^{-V} \rangle_0 \rightarrow e^{-\langle V \rangle_0}.$$

Calculons  $\sum_{[S]} e^{-H_0} \prod \delta(S' - f(S))$  : comme  $H_0$  ne contient que des interactions internes à chaque bloc, ce terme vaut  $[Z_0(K)]^{N'}$  où  $N' = N/3$  est le nombre de blocs et

$$Z_0(K) = e^{3K} + 3e^{-K}. \quad (33)$$

En effet pour  $S'$  fixé, une configuration a énergie  $-3K$  et trois ont une énergie  $K$ .

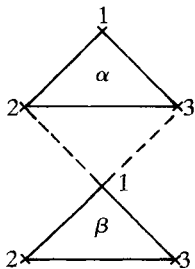


Figure 7.

Évaluons ensuite le terme  $\langle V \rangle_0$  en considérant l'interaction entre deux blocs  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$-V_{\alpha\beta} = KS_{\beta}^{(1)}[S_{\alpha}^{(2)} + S_{\alpha}^{(3)}].$$

Comme  $H_0$  ne connecte pas deux blocs différents (figure 7) :

$$\langle S_{\beta}^{(1)} S_{\alpha}^{(2)} \rangle_0 = \langle S_{\beta}^{(1)} \rangle_0 \langle S_{\alpha}^{(2)} \rangle_0.$$

Par exemple si  $S'_\alpha = 1$  :

$$\langle S_\alpha^{(2)} \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{[S_\alpha^{(i)}]} S_\alpha^{(2)} \exp(K(S_\alpha^{(1)} S_\alpha^{(2)} + S_\alpha^{(1)} S_\alpha^{(3)} + S_\alpha^{(2)} S_\alpha^{(3)})) .$$

Les configurations possibles avec  $S'_\alpha = 1$  sont :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ e^{3K} & & & + e^{-K} & & & - e^{-K} & & & + e^{-K} & & = e^{3K} + e^{-K} \end{array}$$

et celles avec  $S'_\alpha = -1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ -e^{-3K} & & & - e^{-K} & & & + e^{-K} & & & - e^{-K} & & = - (e^{3K} + e^{-K}) . \end{array}$$

On trouve donc :

$$\langle S_\alpha^{(2)} \rangle_0 = \frac{1}{Z_0(K)} (e^{3K} + e^{-K}) S'_\alpha$$

d'où :

$$\langle V_{\alpha\beta} \rangle_0 = 2K \left( \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 S'_\alpha S'_\beta = K' S'_\alpha S'_\beta .$$

La relation entre  $K'$  et  $K$  est très simple :

$$K' = 2K \left( \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 . \quad (34)$$

Combinant les équations (33) et (34) on trouve la loi de transformation :

$$\exp(-G - H' [S']) = \exp \left[ N' \ln (e^{3K} + 3e^{-K}) + K' \cdot \sum_{\langle \alpha\beta \rangle} S'_\alpha S'_\beta \right] , \quad (35)$$

ce qui permet l'identification immédiate de  $G$  et  $H'$ .

Il n'y a donc qu'un seul paramètre à cette approximation. Le point fixe  $K^*$  vérifie :

$$K^* = 2K^* \left( \frac{e^{4K^*} + 1}{e^{4K^*} + 3} \right)^2 \quad (36)$$

soit :

$$e^{4K^*} = x = 1 + 2\sqrt{2} ; \quad K^* \simeq 0.336 .$$

Reste à déterminer  $s^y$  en calculant  $(dK'/dK)_{K^*}$  :

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K^*} = 2 \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^2 + \frac{32 K^* x}{(x+3)^2} \left( \frac{x+1}{x+3} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne :

$$s^y \simeq 1.634$$

et donc :

$$y = \frac{\ln(1.634)}{\ln \sqrt{3}} \simeq 0.894 ; \quad \nu = \frac{1}{y} \simeq 1.118 .$$

Ces valeurs ( $K^* = 0.336$ ,  $\nu = 1.118$ ) sont à comparer aux valeurs exactes :

$$K^* = 0.275 ; \quad \nu = 1.000 .$$

Si l'on calcule les termes d'ordre supérieur de l'approximation des cumulants, les résultats se rapprochent des valeurs exactes, mais la convergence est lente. Dès le deuxième ordre il est nécessaire d'introduire trois paramètres au lieu d'un seul. L'amélioration par rapport au champ moyen est très sensible puisqu'à cette approximation ( $q = 6$ ) :

$$K_c = \frac{1}{6} = 0.167 ; \quad \nu = \frac{1}{2} .$$

## D. MODÈLE GAUSSIEN

Au lieu de définir une TGR en formant des blocs de spins, ce qui correspond à intégrer sur les fluctuations de longueur d'onde comprises entre  $a$  et  $sa$ , on peut intégrer directement dans l'espace de Fourier sur ces longueurs d'onde, c'est-à-dire sur les vecteurs d'onde compris entre  $\Lambda = \frac{1}{a}$  et  $\Lambda' = \frac{\Lambda}{s} = \frac{1}{sa}$ . Les deux opérations ne sont pas strictement équivalentes d'un point de vue mathématique, mais si les idées physiques sous-jacentes au GR sont correctes, elles devraient donner des résultats identiques car elles sont a priori physiquement équivalentes. Ceci nous amène à effectuer les opérations du groupe de renormalisation dans l'espace de Fourier.

### D.1. Transformation dans l'espace de Fourier

Nous allons traiter uniquement le cas de TGR *linéaires*, et prendre comme hamiltonien de départ un hamiltonien du type de Ginzburg-Landau généralisé. On peut considérer que ce hamiltonien a été obtenu à partir d'un modèle de spins, en itérant un certain nombre de TGR linéaires du type (8). Au cours de ces itérations la variable de spin est devenue une variable continue  $\varphi(\mathbf{x})$ , par intégration sur toutes les fluctuations de vecteur d'onde  $\geq \Lambda$  ; après ces intégrations,  $\|\mathbf{k}\|$  sera donc limité par :

$$\|\mathbf{k}\| \leq \Lambda . \quad (37)$$

En d'autres termes, on a pris des moyennes sur un domaine  $a \leq \lambda \leq \Lambda^{-1} \ll \xi$  ; on peut aussi considérer (38) comme un développement limité destiné à étudier les fluctuations autour du champ moyen (chapitre II). La localité de la théorie se traduit par l'existence d'un nombre limité de dérivées de  $\varphi$ . Le hamiltonien s'écrira :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} c (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6!} u_6 \varphi^6 + \frac{1}{8!} u_8 \varphi^8 + \frac{1}{4!} v_0 \varphi^2 (\nabla \varphi)^2 + \dots \right] . \quad (38)$$

On reconnaît le hamiltonien (II.19) de Ginzburg-Landau, avec un facteur  $c/2$  au lieu de  $1/2$  et des termes supplémentaires. L'espace des paramètres est celui des divers coefficients, ou constantes de couplage de (38) :

$$\mu = \{c, r_0, u_0, u_6, u_8, v_0, \dots\} . \quad (39)$$

Il est commode d'introduire la transformée de Fourier  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$  de  $\varphi(\mathbf{x})$  par :

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{a^D}{L^{D/2}} \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \simeq \int \frac{d^D x}{L^{D/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (40)$$

où  $L$  est la taille du système.

Remarquez que la normalisation de la transformée de Fourier dans (40) n'est pas la même que celle de l'appendice A (équation (A.8)), qui est valable pour les fonctions de corrélation. La normalisation (40) est choisie de telle façon que (cf. exercice 2) :

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) \rangle . \quad (41)$$

Les deux premiers termes du hamiltonien (38) correspondant à l'approximation gaussienne de ce hamiltonien prennent une forme très

simple dans l'espace des  $\mathbf{k}$ . En utilisant l'identité de Parseval, on trouve immédiatement :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k \leq \Lambda} (r_0 + ck^2) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) + \dots \quad (42)$$

Les termes écrits explicitement dans (42) donnent le hamiltonien du *modèle gaussien* dans l'espace de Fourier.

Au lieu d'écrire la mesure d'intégration de la fonction de partition dans l'espace des  $\varphi(\mathbf{x})$ , on peut aussi bien l'écrire dans l'espace des  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ , puisque la transformation  $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathbf{k})$  est unitaire à un facteur multiplicatif près, sans importance pour les fonctions de corrélation (cf. exercice 2) :

$$\prod_{\mathbf{x}} d\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \prod_{k \leq \Lambda} d\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$$

$$Z = \int \prod_{k \leq \Lambda} d\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (r_0 + ck^2) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) + \dots \right) \quad (43)$$

Les deux premières opérations de la TGR sont, comme précédemment, une intégration sur les vecteurs d'onde  $\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda$ , suivie d'une dilatation de l'unité de longueur d'un facteur  $s$  :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{s}; \quad \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = s\mathbf{k} \quad (44)$$

tandis que la troisième opération consiste à « renormaliser » la variable de champ  $\varphi(\mathbf{x})$  :

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi'(\mathbf{x}') = \lambda(s) \varphi(\mathbf{x}) = s^{d_\varphi} \varphi(\mathbf{x}) \quad (45.a)$$

ou dans l'espace des  $\mathbf{k}$  :

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \rightarrow \tilde{\varphi}'(\mathbf{k}) = \lambda(s) s^{-\frac{D}{2}} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = s^{d_\varphi - \frac{D}{2}} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}). \quad (45.b)$$

L'équation (45.b) se déduit aisément de (45.a) ( $L' = L/s$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(\mathbf{k}') &= \int \frac{d^D \mathbf{x}'}{L'^{D/2}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \varphi'(\mathbf{x}') \\ &= s^{-D/2} \int \frac{d^D \mathbf{x}}{L^{D/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \lambda(s) \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \lambda(s) s^{-D/2} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

En résumé, la TGR  $R_s$  se décompose en trois étapes :

1) Intégration sur  $\mathbf{k}$  :

$$\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda.$$

2) Dilatation de l'unité de longueur :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/s \\ \mathbf{k} &\rightarrow \mathbf{k}' = s\mathbf{k}. \end{aligned}$$

3) Renormalisation du champ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &\rightarrow \varphi'(\mathbf{x}') = s^{d_\varphi} \varphi(\mathbf{x}) \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) &\rightarrow \tilde{\varphi}'(\mathbf{k}') = s^{d_\varphi - D/2} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

On peut écrire immédiatement une relation formelle pour le hamiltonien transformé  $H' = R_s H$  (en omettant la constante  $G$  : cf. (25)) :

$$e^{-H'(\varphi')} = \left[ \int \prod_{\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda} d\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) e^{-H(\varphi)} \right]_{\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \rightarrow s^{\frac{D}{2} - d_\varphi} \tilde{\varphi}'(s\mathbf{k})}. \quad (46)$$

Etablissons maintenant l'analogie de (10) pour la fonction de corrélation dans l'espace des  $\mathbf{k}$  : cette relation est en fait triviale. En effet si  $k < \Lambda/s$ , la densité de probabilité  $e^{-H'}$  donne les mêmes fonctions de corrélation que la densité de probabilité  $e^{-H}$ , puisque ces vecteurs d'onde ne sont pas affectés par l'intégration. Les seuls facteurs à prendre en compte sont le changement d'échelle  $\mathbf{k} \rightarrow s\mathbf{k}$  et la renormalisation du champ ; compte tenu de l'équation (41), on obtient pour  $k < \Lambda/s$  (cf. aussi exercice 4.c) :

$$\tilde{G}(s\mathbf{k}, \mu') = s^{2d_\varphi - D} \tilde{G}(\mathbf{k}, \mu). \quad (47.a)$$

La relation (47.a) est *exacte* ; par transformation de Fourier, on obtient dans l'espace des  $\mathbf{x}$  une relation approchée, valable pour  $\|\mathbf{x}\| \gg 1/\Lambda$  :

$$G\left(\frac{\mathbf{x}}{s}, \mu'\right) \approx s^{2d_\varphi} G(\mathbf{x}, \mu) \quad (47.b)$$

qui est évidemment identique à (10).

### D.2. Modèle gaussien

Pour se familiariser avec la TGR (46), il est utile de traiter le cas du modèle gaussien (42) qui est extrêmement simple, mais un peu trop trivial pour représenter une situation physique réelle. L'espace des paramètres est à deux dimensions :  $\mu = \{c, r_0\}$ . L'intégration sur  $d\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$  donne une constante, étant donné que l'on a affaire à un produit d'intégrales gaussiennes découplées. Le nouveau hamiltonien est donc ( $\varphi(-\mathbf{k}) = \varphi^*(\mathbf{k})$ ; j'écris désormais  $\varphi(\mathbf{k})$  au lieu de  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$  quand il n'y a pas de confusion possible) :

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{\mathbf{k} \leq \Lambda/s} \frac{1}{2} (r_0 + c\mathbf{k}^2) |\varphi(\mathbf{k})|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}' \leq \Lambda} \frac{1}{2} s^{D-2d_\varphi} (r_0 + cs^{-2}\mathbf{k}'^2) |\varphi'(\mathbf{k}')|^2. \end{aligned}$$

Le hamiltonien  $H'$  a la même forme que  $H$  avec une loi de transformation des paramètres donnée par :

$$c' = s^{D-2-2d_\varphi} c ; \quad r'_0 = s^{D-2d_\varphi} r_0 .$$

Ces équations donnent deux possibilités de points fixes :

- (i)  $D - 2d_\varphi = 0$  ;  $r_0$  quelconque ;  $c = 0$
- (ii)  $D - 2 - 2d_\varphi = 0$  ;  $c$  quelconque ;  $r_0 = 0$  .

Dans le cas (i),  $c$  est un champ inessential et le point fixe correspond à un ensemble de sites découplés, ce qui n'est pas très passionnant. En fait ce cas correspond à la limite  $T \rightarrow \infty$  (cf. exercice II.5) et  $\xi = 0$  correspond aussi à un point fixe des TGR.

Le cas (ii) est plus intéressant ; le point fixe est défini par :

$$\mu^* = \{c, r_0 = 0\}$$

où  $c$  est arbitraire. L'équation (13) implique que  $\eta = 0$ . D'autre part :

$$r'_0 = s^2 r_0$$

ce qui montre que  $r_0$  est un champ essentiel avec  $y = 2$ , d'où  $\nu = 1/2$ . Le paramètre  $r_0$  s'annule à la transition qui a lieu à  $T = T_0$  :  $r_0 = \bar{r}_0(T - T_0)$  ; cependant la phase basse température ( $r_0 < 0$ ) n'est pas définie pour le modèle gaussien : lorsque  $r_0 < 0$ , certaines intégrales gaussiennes sur  $\varphi(\mathbf{k})$  ne sont pas convergentes. Les résultats  $\nu = 1/2$ ,  $\eta = 0$  avaient déjà été obtenus au chapitre II,

paragraphe D, par un calcul direct de la fonction de corrélation qui vaut, rappelons-le,  $(r_0 + ck^2)^{-1}$  dans ce cas.

Il est instructif de rajouter un terme en  $k^4$  à (42) :

$$H = \sum_{\mathbf{k} \leq \Lambda} \left( \frac{1}{2} r_0 + \frac{c}{2} k^2 + \frac{w_0}{4} k^4 \right) \varphi(\mathbf{k}) \varphi(-\mathbf{k}).$$

Dans la TGR, le champ  $w_0$  se transforme en :

$$w'_0 = s^{-2} w_0$$

et  $w_0$  est donc un champ inessential. Le flot de renormalisation est tracé sur la figure 8, en supposant que  $w_0$  n'est pas trop négatif, sinon on risque des divergences. Le résultat est intéressant, car il explique la « restauration de l'invariance par rotation » au point critique. En effet, en développant le hamiltonien du modèle correspondant sur réseau (cf. exercice II.5) on voit apparaître un terme violant l'invariance par rotation :

$$-\frac{1}{12} \sum_{i=1}^D k_i^4.$$

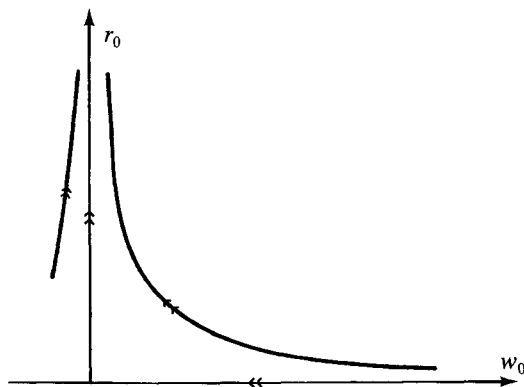


Figure 8. Flot de renormalisation en présence d'un terme en  $k^4$ .

Ce terme étant inessential n'affecte pas le comportement à longue distance des fonctions de corrélation, qui sont donc invariantes par rotation.

On remarque aussi que le paramètre  $c$  ne joue aucun rôle : on peut fixer sa valeur à  $c = 1$ , et c'est ce que je ferai par la suite. J'irai même

plus loin en exigeant que dans le cas du hamiltonien général (38), le coefficient de  $(\nabla\varphi)^2$  reste toujours fixé à 1/2 dans toutes les itérations des TGR. Cette condition est certainement compatible avec l'existence d'un point fixe : un des paramètres de  $H$  reste fixé et égal à 1/2. Dans le cadre des théories perturbatives du paragraphe E, elle conduit effectivement à un point fixe. D'autres choix pourraient conduire à d'autres points fixes, mais on ne sait rien à l'heure actuelle, ni de leur existence éventuelle, ni de leur utilité possible en physique.

Les résultats du modèle gaussien sont en réalité d'origine purement dimensionnelle. En effet, exiger  $\eta = 0$  (ou  $d_\varphi = \frac{D}{2} - 1$ ) est équivalent à demander que le coefficient du terme en  $k^2 |\varphi(\mathbf{k})|^2$ , ou celui de  $(\nabla\varphi)^2$ , reste inchangé et égal à 1/2 dans une TGR. Pour que ceci soit réalisé, il faut que le changement d'échelle de longueur soit compensé par le changement de normalisation du champ :

$$\begin{aligned} \int d^D x' (\nabla' \varphi')^2 &= \int d^D x s^{-D+2+2d_\varphi} (\nabla\varphi)^2 \\ &= \int d^D x (\nabla\varphi)^2 \end{aligned}$$

$$(\varphi'(\mathbf{x}') = s^{d_\varphi} \varphi(\mathbf{x}) \text{ et } \nabla' = s\nabla), \text{ soit } d_\varphi = \frac{D}{2} - 1.$$

Ceci revient à dire que si l'on attribue la dimension  $-1$  à une longueur ( $\mathbf{x}' = s^{-1} \mathbf{x}$ ), on doit attribuer une dimension  $d_\varphi = \frac{D}{2} - 1$  au champ  $\varphi$ .

Mais l'invariance de  $H$  peut être retrouvée par simple analyse dimensionnelle : en effet  $H$  ayant dimension zéro, est indépendant de l'unité de longueur. Si l'on veut que  $H$  ait dimension zéro, il est nécessaire d'attribuer au champ une dimension  $\frac{D}{2} - 1$ .

La dimension  $d_\varphi^0 = \frac{D}{2} - 1$  est appelée *dimension normale (ou canonique) du champ* : c'est celle que l'on obtient par analyse dimensionnelle. En général, pour un hamiltonien non gaussien,  $d_\varphi$  ne sera pas égal à  $d_\varphi^0$  (de façon équivalente  $\eta$  sera  $\neq 0$ ) ;  $d_\varphi$  est alors appelée *dimension anormale du champ*. Cette dimension anormale a une origine dynamique, et elle dépend du point fixe considéré.

L'invariance d'échelle naïve correspond à un comportement déterminé uniquement par l'analyse dimensionnelle : par exemple  $G(\mathbf{k})$  ayant dimension  $-2$  doit être proportionnel à  $k^{-2}$  ; c'est effectivement le résultat du modèle gaussien lorsque  $T = T_c (= T_0)$ .

Il sera intéressant pour la suite de déterminer les dimensions normales des constantes de couplage  $r_0, u_0, u_6, v_0$ , etc. dans (38), notées

$[r_0]$ ,  $[u_0]$ , etc. Ces dimensions normales sont obtenues très simplement en remarquant que  $[H] = 0$  et  $[\varphi] = d_\varphi^0 = \frac{D}{2} - 1$ . On trouve :

$$\begin{aligned} [r_0] &= 2 & [u_0] &= 4 - D \\ [u_6] &= 6 - 2D & [v_0] &= 2 - D. \end{aligned} \quad (48)$$

### D.3. Point fixe gaussien

Examinons maintenant le hamiltonien général (38). Ce hamiltonien comprend des termes en  $\varphi^2$ ,  $\varphi^4$ , etc. qui se réfèrent à un seul site. Ces termes sont simples dans l'espace des  $\mathbf{x}$ . Inversement le terme en  $(\nabla\varphi)^2$  couple des sites différents : ce terme au contraire est simple dans l'espace de Fourier : il est diagonalisé par une transformation de Fourier. Dans le cas du hamiltonien gaussien, les modes normaux sont découplés.

Au contraire le terme en  $\varphi^4$  est compliqué dans l'espace de Fourier, car il couple les modes normaux entre eux :

$$\int d^D x \varphi^4(x) = L^{-D} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \varphi(\mathbf{k}_1) \varphi(\mathbf{k}_2) \varphi(\mathbf{k}_3) \varphi(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Il n'est pas possible de trouver un espace où tous les termes sont simples, et c'est pourquoi on doit avoir recours à des méthodes approchées pour traiter le hamiltonien de Ginzburg-Landau. Je me limiterai dans un premier temps au hamiltonien II.19 ; la méthode standard est le *développement perturbatif en puissances de  $u_0$* . Le hamiltonien  $H$  est décomposé en un terme gaussien  $H_0$  et un terme « d'interaction »  $V$  :

$$H = H_0 + V ; \quad V = \frac{u_0}{4!} \int d^D x \varphi^4(\mathbf{x}). \quad (49)$$

De même pour appliquer l'équation (46), on devra avoir recours à cette séparation pour faire l'intégration sur les  $d\varphi(\mathbf{k})$ .

Ecrivons :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (50)$$

où  $\varphi_1(\mathbf{x})$  a des composantes de Fourier dans le domaine  $0 \leq k \leq \Lambda/s$  et  $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$  dans  $\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda$ . La mesure d'intégration dans (46) est donc  $\mathcal{D}\bar{\varphi}$  ; il convient également de remarquer que  $\varphi_1$  et  $\bar{\varphi}$  sont découplés

dans  $H_0$ . Négligeant la constante multiplicative ( $\exp - G$ ) et omettant pour le moment les dilatations, on obtient :

$$e^{-H'_1} = e^{-H_0(\varphi_1)} \frac{\int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp(-H_0(\bar{\varphi}) - V(\varphi_1, \bar{\varphi}))}{\int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp(-H_0(\bar{\varphi}))}.$$

Si l'on se limite au premier ordre en  $u_0$ , le nouveau hamiltonien  $H'_1$  sera :

$$H'_1 = H_0(\varphi_1) + \frac{\int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp(-H_0(\bar{\varphi})) V(\varphi_1, \bar{\varphi})}{\int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp(-H_0(\bar{\varphi}))} + O(u_0^2). \quad (51)$$

Le hamiltonien  $H_0(\bar{\varphi})$  est gaussien, et  $V(\varphi_1, \bar{\varphi})$  est un polynôme en  $\bar{\varphi}$ . Il s'agit donc dans (49) d'évaluer la valeur moyenne d'un polynôme avec une distribution de probabilité gaussienne. En fait, nous aurons seulement besoin de  $\langle \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{y}) \rangle_0$ , où l'indice 0 indique que la moyenne est prise en utilisant le hamiltonien gaussien  $H_0$ . Pour évaluer cette valeur moyenne, on remarque que l'on connaît déjà le résultat lorsque l'intégration sur  $k$  va de 0 à  $\Lambda$ ; dans ce cas  $\langle \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{y}) \rangle_0$  est la fonction de corrélation du modèle gaussien (équation (II.45)) :

$$\langle \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{y}) \rangle_0 = \int_{k \leq \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + r_0}.$$

Dans le cas présent, l'intégration sur  $\mathbf{k}$  est limitée par  $\Lambda/s \leq k \leq \Lambda$  et le résultat est simplement :

$$\langle \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{y}) \rangle_0 = \bar{G}_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + r_0}. \quad (52)$$

Revenons au calcul de  $\langle V(\varphi_1, \bar{\varphi}) \rangle_0$  :

$$\langle (\varphi_1(\mathbf{x}) + \bar{\varphi}(\mathbf{x}))^4 \rangle_0 = \varphi_1^4(\mathbf{x}) + 6 \varphi_1^2(\mathbf{x}) \langle \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \rangle_0 + \langle \bar{\varphi}^4(\mathbf{x}) \rangle_0.$$

Le dernier terme est une constante et peut être négligé. Le second vaut  $6 \varphi_1^2(\mathbf{x}) \bar{G}_0(0)$ . On trouve donc pour  $H'_1$  :

$$H'_1 = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi_1^2 + \frac{u_0}{4!} \varphi_1^4 + \frac{u_0}{4} \varphi_1^2(x) \bar{G}_0(0) \right].$$

Reste à faire les dilatations pour trouver  $H'$  :

$$H' = \int d^D x' s^{D-2d_\varphi-2} \left[ \frac{1}{2} (\nabla' \varphi')^2 + \frac{1}{2} s^2 \left( r_0 + \frac{u_0}{2} \bar{G}_0(0) \right) \times \right. \\ \left. \times \varphi'^2(\mathbf{x}) + s^{2-2d_\varphi} \frac{u_0}{4!} \varphi'(\mathbf{x})^4 \right]. \quad (53)$$

A cet ordre le coefficient du terme en gradient n'est pas modifié par l'intégration sur  $\bar{\varphi}$ . Si l'on veut maintenir ce coefficient égal à  $1/2$ , il faut donc prendre, comme dans le cas du modèle gaussien,  $d_\varphi = \frac{D}{2} - 1$  et  $\eta = 0$ . Les lois de transformation de  $r_0$  et  $u_0$  sont :

$$\begin{cases} r'_0 = s^2 \left( r_0 + \frac{u_0}{2} \bar{G}_0(0) \right) \\ u'_0 = s^{4-D} u_0 = s^\varepsilon u_0 \quad (\varepsilon = 4 - D). \end{cases} \quad (54)$$

Evaluons maintenant  $\bar{G}_0(0)$  ; comme  $r_0 \rightarrow 0$ , on peut prendre  $r_0 \ll \Lambda/s$  (il est un peu plus simple de prendre pour hamiltonien  $H_0 = \int d^D x (\nabla \varphi)^2$  : cf. Ma, chapitre VII) :

$$\bar{G}_0(0) = K_D \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{k^{D-1} dk}{k^2} + O(r_0) \\ = \frac{K_D \Lambda^{D-2}}{D-2} (1 - s^{2-D}) + O(r_0) = 2B(1 - s^{2-D}) + O(r_0). \quad (55)$$

Les équations (54) ont un point fixe à  $r_0 = u_0 = 0$ . Si l'on linéarise au voisinage de ce point fixe, les termes négligés dans (55), qui donnent des contributions en  $(u_0 r_0)$  etc. ne modifient pas la linéarisation. La matrice  $T(s)$  (cf. (16)) est dans ce cas :

$$T(s) = \begin{pmatrix} s^2 & B(s^2 - s^\varepsilon) \\ 0 & s^\varepsilon \end{pmatrix}; \quad B = \frac{K_D \Lambda^{D-2}}{2(D-2)}.$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont :

$$\rho_1 = s^2 \quad (y_1 = 2); \quad e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2 = s^\varepsilon \quad (y_2 = \varepsilon); \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $\varepsilon < 0$ , c'est-à-dire pour  $D > 4$ , on trouve une valeur  $y_1 = 2$  et une valeur  $y_2 = \varepsilon < 0$ . Ceci montre que le point fixe est du type étudié au

paragraphe B, avec un champ essentiel et un champ inessentiel. Les exposants critiques sont identiques à ceux du modèle gaussien :  $\nu = 1/2$ ,  $\eta = 0$ .

Examinons l'espace des paramètres ; un point  $\mu$  de cet espace s'écrit :

$$\mu = r_0 \hat{r}_0 + u_0 \hat{u}_0$$

où  $\hat{r}_0$  et  $\hat{u}_0$  sont les vecteurs unitaires des axes  $r_0$  et  $u_0$  respectivement ; comme  $e^{(1)} = \hat{r}_0$  et  $e^{(2)} = -B\hat{r}_0 + \hat{u}_0$  :

$$\mu = (r_0 + u_0 B) e^{(1)} + u_0 e^{(2)}.$$

Les champs d'échelle sont  $t_1 = r_0 + u_0 B$  et  $t_2 = u_0$ , la surface critique étant donnée par  $t_1 = r_0 + u_0 B = 0$ .

A l'approximation linéaire on obtient la température critique :

$$r_{0c} = \bar{r}_0(T_c - T_0) = -u_0 B = -\frac{u_0 K_D \Lambda^{D-2}}{2(D-2)}$$

en accord avec (II.49). Le flot de renormalisation au voisinage du point fixe est tracé sur la figure 9.

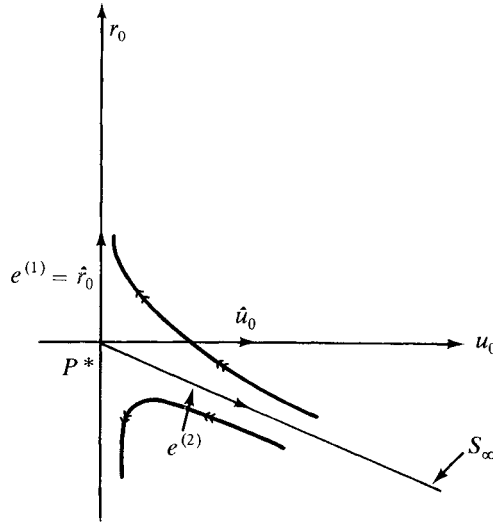


Figure 9. Diagramme de flot pour  $D > 4$ .

Si l'on se limite à l'espace des paramètres  $(r_0, u_0)$ , c'est-à-dire au hamiltonien de Ginzburg-Landau proprement dit, on vient donc de

montrer que pour  $D > 4$  les exposants critiques sont ceux du modèle gaussien, ou de la théorie de Landau. Il est facile de généraliser ce résultat à un hamiltonien arbitraire de la forme (38). En effet dans une TGR, un terme tel que  $u_6$  se transforme, d'après (48) suivant (exercice 3) :

$$u'_6 = s^{6-2D} u_6 + \dots$$

et le champ  $u_6$ , tout comme  $u_0$ , est inessential (toujours si  $D > 4$ ), l'exposant de  $s$  étant négatif. Une suite de TGR amène tout hamiltonien du type (38) au point fixe gaussien  $r_0 = u_0 = u_6 = \dots = 0$ , si l'on part d'un point situé sur la surface critique. Cette propriété permet de démontrer le résultat annoncé au chapitre II : *les exposants critiques de la théorie de Landau sont corrects pour  $D > 4$* . Il faut cependant faire attention pour les exposants  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  : cf. Ma, p. 185.

## E. CALCUL DES EXPOSANTS CRITIQUES À L'ORDRE $\varepsilon$

### E.1. Point fixe non gaussien

Pour  $D < 4$ , le point fixe trouvé précédemment ne décrit plus une transition de phase du deuxième ordre, car  $y_2 = \varepsilon < 0$ . Il apparaît un deuxième point fixe, qui aura lui les caractéristiques convenables :  $y_1 > 0$ ,  $y_2 < 0$ , et c'est ce point fixe qui va déterminer les exposants critiques pour  $D < 4$ . Ce point fixe apparaît comme le prolongement

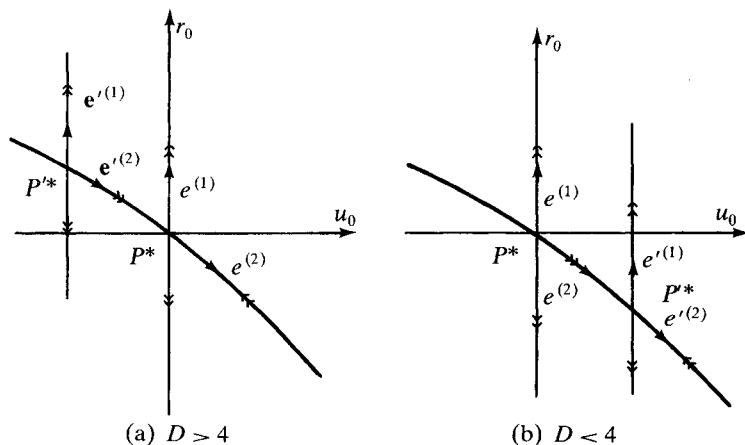


Figure 10. Diagrammes de flot  $D > 4$  et  $D < 4$ .

d'un point fixe de type incorrect pour  $D > 4$  : en effet il lui correspond deux axes divergents. De plus ce point fixe est non physique car il correspond à  $u_0 < 0$ , cas où les intégrales sur  $\varphi(\mathbf{x})$  ne sont pas définies. Les deux points fixes échangent leur stabilité pour  $D = 4$  (figure 10).

La raison de l'apparition de ce point fixe « non gaussien » pour  $D < 4$  réside dans l'existence d'un terme non linéaire pour l'évolution de  $u_0$ . En effet on montre que cette évolution dans une TGR a la forme :

$$u'_0 = s^\varepsilon (u_0 - C u_0^2 \ln s)$$

où  $C$  est une constante. La condition pour l'existence d'un point fixe peut s'écrire  $du'_0/d \ln s|_{s=1} = 0$ , soit :

$$\left. \frac{du'_0}{d \ln s} \right|_{s=1} = \varepsilon u_0 - C u_0^2 = 0.$$

Le point fixe est alors situé à  $u_0^* = \frac{\varepsilon}{C}$ , c'est-à-dire que  $u_0^*$  est d'ordre  $\varepsilon$  : en fait les calculs dont le principe est exposé dans ce qui suit sont valables ordre par ordre dans un développement en puissances de  $\varepsilon$ , car ils reposent sur un développement perturbatif. *Les résultats ne seront valables que pour  $\varepsilon$  « petit »* (cette notion de  $\varepsilon$  « petit » restant à préciser).

Reste évidemment à écrire explicitement les lois de transformation de  $r_0$  et  $u_0$ . Le calcul est plus compliqué que précédemment car il faut aller jusqu'à l'ordre  $u_0^2$  dans le développement perturbatif. Je me contente de donner le résultat des calculs sans démonstration, car j'exposerai plus loin une méthode plus rapide. On trouve (cf. Ma, chapitre VII) :

$$r'_0 = s^2 \left[ r_0 + \frac{u_0}{16 \pi^2} \left( \frac{1}{2} \Lambda^2 (1 - s^{-2}) - r_0 \ln s \right) \right] \quad (56.a)$$

$$u'_0 = s^\varepsilon \left[ u_0 - \frac{3 u_0^2}{16 \pi^2} \ln s \right]. \quad (56.b)$$

Les équations (56) sont obtenues en faisant un certain nombre d'approximations dont la cohérence peut être vérifiée a posteriori, lorsque l'on a montré que  $u_0^*$  et  $r_0^*$  sont tous deux d'ordre  $\varepsilon$ .

## E.2. Equations différentielles de renormalisation

Il vaut la peine de s'arrêter un moment sur l'interprétation des équations (56). Imaginons que l'on soit parti d'un hamiltonien initial,

avec des valeurs  $r_0 = r_0(1)$  et  $u_0 = u_0(1)$ . Après un certain nombre d'itérations, on arrive à un hamiltonien dépendant de paramètres  $r_0(s)$  et  $u_0(s)$ , ainsi que d'autres couplages  $u_6(s) \dots$ . Ces couplages rendent l'étude du voisinage du point fixe très complexe, sauf si on se limite à l'ordre  $\varepsilon$ , auquel cas ils peuvent être négligés. Une indication en faveur de cette propriété est donnée à l'exercice (7.h). Nous admettrons par la suite que nous pouvons nous contenter de la forme tronquée (56) des équations du GR. Comme le facteur de dilatation est continu, on peut effectuer une TGR de facteur de dilatation  $1 + \delta$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Les relations entre  $[r_0(s(1 + \delta)), u_0(s(1 + \delta))]$  et  $[r_0(s), u_0(s)]$  sont données par (56), en prenant  $\ln s = \delta$  ( $\ln(1 + \delta) \simeq \delta$ !). Par conséquent on peut transformer les équations (56) en équations différentielles :

$$\frac{dr_0(s)}{d \ln s} = 2 r_0(s) - \frac{u_0(s) r_0(s)}{16 \pi^2} + \frac{u_0(s) \Lambda^2}{16 \pi^2} \quad (57.a)$$

$$\frac{du_0(s)}{d \ln s} = \varepsilon u_0(s) - \frac{3 u_0^2(s)}{16 \pi^2}. \quad (57.b)$$

En fait les équations (56) ne sont correctes (modulo les remarques ci-dessus) que si  $s$  est suffisamment petit (ce point sera discuté en détail au paragraphe F) : rappelons que l'on ne doit *jamais* faire en une seule étape une TGR correspondant à un facteur de dilatation  $s \gg 1$ , mais toujours décomposer en un produit de TGR. L'avantage des équations différentielles (57) est que  $\ln s$  est même infinitésimal. En général on pourra écrire pour des paramètres  $K_\alpha(s)$  des équations différentielles de renormalisation :

$$\frac{dK_\alpha(s)}{d \ln s} = \beta_\alpha(K_\beta(s)). \quad (58)$$

L'itération des TGR est donnée par la solution de ces équations différentielles : un facteur de dilatation  $s$  s'obtient dans ce formalisme par une suite d'itérations de TGR infinitésimales.

Les équations (57) permettent de calculer aisément la position du point fixe :

$$u_0^* = \frac{16 \pi^2}{3} \varepsilon ; \quad r_0^* = -\frac{\varepsilon}{6} \Lambda^2 \quad (59)$$

et les exposants  $y_1$  et  $y_2$  ont pour valeur (exercice 4) :

$$y_1 = 2 - \frac{\varepsilon}{3} ; \quad y_2 = -\varepsilon < 0. \quad (60)$$

Le fait que  $y_2 < 0$  montre que le point fixe possède bien les propriétés souhaitées. L'exposant critique  $\nu$  vaut :

$$\nu = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + O(\varepsilon^2) \quad (61)$$

et l'équation (61) donne la correction d'ordre  $\varepsilon$  à la théorie de Landau. La démonstration des équations (59) et (60) à partir de (58) est renvoyée à l'exercice (4). L'équation (61) donne les deux premiers termes du « développement  $\varepsilon$  » d'un exposant critique. On écrira ce développement de façon générale pour un exposant critique  $\zeta$  ;

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 \varepsilon + \zeta_2 \varepsilon^2 + \cdots + \zeta_n \varepsilon^n + \cdots \quad (62)$$

où  $\zeta_0$  est donné par la théorie de Landau.

### E.3. Méthode de « raccordement »

La méthode précédente a l'avantage de prouver explicitement l'existence d'un point fixe non trivial pour  $D < 4$ . Cependant les calculs sont assez pénibles et, ce qui est plus ennuyeux, deviennent carrément inextricables si on veut les pousser à l'ordre  $\varepsilon^2$  : en effet l'espace des paramètres  $\{r_0, u_0\}$  ne suffit plus pour localiser le point fixe et les équations tronquées (56) ne rendent plus compte des TGR.

Une méthode plus performante de calcul des exposants critiques consiste à admettre que les fonctions de corrélation ont le comportement prévu par le groupe de renormalisation quand il existe un point fixe.

Nous allons utiliser la fonction de corrélation  $\Gamma^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  :

$$\Gamma^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\delta^{(4)} \Gamma(M)}{\delta M(\mathbf{x}_1) \delta M(\mathbf{x}_2) \delta M(\mathbf{x}_3) \delta M(\mathbf{x}_4)}$$

où  $\Gamma$  est le potentiel de Gibbs. Cette fonction est reliée à la « fonction de corrélation à quatre points »

$$G^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_4) \rangle$$

et aux fonctions de corrélation  $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  (cf. V-C.3) mais nous ne nous servons pas de cette relation. En fait nous aurons seulement besoin de la transformée de Fourier  $\tilde{F}^{(4)}(\mathbf{k}_i = 0)$ , c'est-à-dire pour des valeurs nulles des vecteurs d'onde ; pour être tout à fait précis, il faut ajouter que  $\tilde{F}^{(4)}$  est obtenu en extrayant une fonction  $\delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i\right)$  : cf. V-B.4. Cette quantité s'obtient en

dérivant quatre fois le potentiel de Gibbs  $\Gamma(M)$  de l'équation (II.44) pour une aimantation uniforme  $M$  : en effet une aimantation uniforme possède seulement une composante de Fourier  $\mathbf{k} = 0$ , et dériver par rapport à  $M$  donne bien  $\tilde{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{k}_i = 0)$ .

Le résultat des dérivations (\*), quand on pose à la fin du calcul  $M = 0$  ( $T > T_c$ ) est de donner les deux premiers termes d'un développement de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0)$  en fonction de  $u_0$  (cf. l'argument du chapitre II, paragraphe D.3) :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0) = u_0 - \frac{3}{2} u_0^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + r_0)^2} + O(u_0^3). \quad (62)$$

Nous aurons besoin de déterminer la loi de transformation de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  dans une TGR. Il faut remarquer que  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(0) = 1/\tilde{G}(\mathbf{k} = 0)$  (cf. I.35) s'obtient en dérivant deux fois  $\Gamma(M)$  par rapport à  $M$  et que sa loi de transformation est donnée par (47.a) :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(0; \mu') = s^{D-2d_\varphi} \tilde{\Gamma}^{(2)}(0; \mu).$$

Pour passer de  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  à  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  il faut encore dériver deux fois par rapport à  $M$  et la loi de transformation de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  est :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0; \mu') = s^{D-4d_\varphi} \tilde{\Gamma}^{(4)}(0; \mu).$$

Comme vérification, on note que d'après (62) la dimension normale de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  est celle de  $u_0$ , c'est-à-dire  $4-D$ , et que si  $d_\varphi = d_\varphi^0 = \frac{D}{2} - 1$ ,  $D - 4d_\varphi = 4 - D$ .

La loi de tranformation de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  peut s'écrire (cf. (18) et (20)) :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0; t, t_2, \dots) = s^{D-4+2\eta} \tilde{\Gamma}^{(4)}\left(0; s^{\frac{1}{\nu}} t, s^{y_2} t_2, \dots\right).$$

Au lieu du champ d'échelle  $t$ , il est commode d'utiliser la susceptibilité inverse  $r = \chi^{-1} = t^\gamma$  :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0; r, t_2, \dots) = s^{-\varepsilon+2\eta} \tilde{\Gamma}^{(4)}\left(0; s^{\frac{1}{\nu}} r^{\frac{1}{\gamma}}, s^{y_2} t_2, \dots\right).$$

On choisit maintenant  $s = r^{-\nu/\gamma} = r^{\frac{-1}{2-\eta}}$  et on obtient la relation de départ pour la mise en œuvre de la « méthode de raccordement » :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0; r, t_2, \dots) = r^{\frac{\varepsilon-2\eta}{2-\eta}} \tilde{\Gamma}^{(4)}\left(0; 1, r^{-\frac{y_2\nu}{\gamma}} t_2, \dots\right). \quad (63)$$

(\*) On utilise

$$\ln\left(k^2 + r_0 + \frac{u_0 M^2}{2}\right) = \ln(k^2 + r_0) + \frac{u_0 M^2}{2} (k^2 + r_0)^{-1} + \dots \quad (M \rightarrow 0).$$

A l'ordre  $\varepsilon$ , nous avons vu que  $\eta = 0$  ; en utilisant  $r^\alpha \simeq 1 + \alpha \ln r$ , pour  $\alpha$  petit on obtient :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)} = A \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln r + c y_2 t_2 \ln r, + \dots \right). \quad (64)$$

En effet  $y_2 \simeq \varepsilon$ , mais  $y_3 = -2 + 0(\varepsilon)$  et n'intervient donc pas dans (64). Comparons maintenant avec le développement perturbatif :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(0) &\simeq u_0 - \frac{3}{2} u_0^2 \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + r)^2} \\ &= u_0 - \frac{3 u_0^2}{16 \pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{x dx}{(x + r)^2} \\ &\simeq u_0 + \frac{3 u_0^2}{32 \pi^2} \ln \frac{r}{\Lambda^2} = u_0 \left( 1 + \frac{3 u_0}{32 \pi^2} \ln \frac{r}{\Lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

On va maintenant choisir  $u_0 = u_0(\varepsilon)$  de telle façon que le terme en  $t_2$  soit absent dans (64), c'est-à-dire de telle façon que  $t_2 = 0$ . Ce choix est purement mathématique et n'a pas de signification physique particulière : il veut simplement dire que pour les besoins de la démonstration, on choisit un hamiltonien de Ginzburg-Landau particulier. Ce choix est destiné à éliminer les facteurs  $\varepsilon$  venant de  $y_2$ , de façon à conserver uniquement les facteurs provenant du développement de  $r^{(\varepsilon-2\eta)/(2-\eta)}$  dans (63). Comparant (64) et (65), on trouve que la condition  $t_2 = 0$  implique que  $u_0(\varepsilon)$  est donné par :

$$u_0(\varepsilon) = \frac{16 \pi^2 \varepsilon}{3}. \quad (66)$$

A l'ordre  $\varepsilon$ ,  $u_0(\varepsilon)$  coïncide avec la valeur (59) de  $u_0$  au point fixe. En effet à cet ordre, il suffit de prendre un espace des paramètres à deux dimensions  $(r_0, u_0)$ , et  $t_2 = 0$  correspond à  $u_0(\varepsilon) = u_0^*$  (cf. figure 10.b). A des ordres supérieurs en  $\varepsilon$ , l'espace des paramètres a plus de deux dimensions, et  $u_0(\varepsilon)$  est déterminé par la condition  $t_2 = 0$ . Par exemple à l'ordre  $\varepsilon^2$ , et en utilisant la valeur  $\eta = \varepsilon^2/54$  (cf. V-E.1), on obtient le développement suivant de  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  si  $t_2 = 0$  :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln r + \frac{\varepsilon^2}{8} \ln^2 r - \frac{\varepsilon^2}{54} \ln r + O(\varepsilon^3). \quad (67)$$

La comparaison avec le développement perturbatif à l'ordre  $u_0^3$  permet de déterminer  $u_0(\varepsilon)$  à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

Pour déterminer  $\gamma$ , on se sert de l'équation (II.50) donnant  $r$  :

$$\begin{aligned} \bar{r}_0(T - T_c) &= r \left( 1 + \frac{u_0}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k^2 + r)} \right) \\ &\simeq r \left( 1 + \frac{u_0}{32 \pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dx}{x + r} \right) \\ &= r \left( 1 - \frac{u_0}{32 \pi^2} \ln \frac{r}{\Lambda^2} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant (66) :

$$t \simeq r \left( 1 - \frac{\varepsilon}{6} \ln r \right). \quad (68)$$

D'autre part, on utilise  $t = r^{1/\gamma} = r(r^{1/\gamma-1})$  :

$$t = r(r^{1/\gamma-1}) = r \left( 1 + \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \ln r + \dots \right) \quad (69).$$

La comparaison entre (68) et (69) donne le premier terme du développement  $\varepsilon$  de  $\gamma$  :

$$\frac{1}{\gamma} - 1 = -\frac{\varepsilon}{6}$$

soit :

$$\boxed{\gamma = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + O(\varepsilon^2)}. \quad (70)$$

Grâce à la loi d'échelle  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ , cette équation est identique à l'équation (61) pour  $\nu$ .

Nous venons de terminer le calcul complet d'un exposant critique à l'ordre  $\varepsilon$ . Ajoutons les remarques suivantes :

(i) Les calculs ont été conduits avec un paramètre d'ordre de dimension  $n = 1$ . Il ne serait pas difficile de les généraliser au cas d'un paramètre d'ordre de dimension  $n$  ; le hamiltonien de Ginzburg-Landau décrivant une telle situation s'écrit :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0 \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right) + \frac{u_0}{4!} \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2 \right]. \quad (71)$$

On trouve par exemple pour  $\gamma$  (exercice 6) :

$$\gamma = 1 + \frac{(n+2)\varepsilon}{2(n+8)} + O(\varepsilon^2) \quad (72)$$

ce qui montre la dépendance explicite des exposants critiques par rapport à la dimension du paramètre d'ordre.

(ii) L'exposant critique  $\eta$  est nul à l'ordre  $\varepsilon$ . A l'ordre  $\varepsilon^2$  on obtient : (cf. V-E.4) :

$$\eta = \frac{(n+2)\varepsilon^2}{2(n+8)^2}$$

(iii) Les calculs exposés ci-dessus reposent sur un développement perturbatif remanié par le groupe de renormalisation. Le paramètre du

développement est  $\varepsilon$  et les résultats sont fiables pour  $\varepsilon \ll 1$  (espace à 3.99 dimensions !). L'extrapolation au cas réaliste  $D = 3$  donne des résultats assez satisfaisants, avec toutefois des mauvaises surprises : les résultats à l'ordre  $\varepsilon^3$  sont plutôt moins bons (i.e. moins proches de l'expérience) que ceux à l'ordre  $\varepsilon^2$ . Les développements du type (62) ne sont pas convergents, mais ce sont des séries asymptotiques (du type de l'approximation de Stirling pour  $n!$ ).

(iv) Au début des années 70, l'accent a été mis sur le développement  $\varepsilon$  (exemple l'article de Kogut et Wilson : « The renormalization group and the  $\varepsilon$ -expansion »). Ce développement  $\varepsilon$  a effectivement joué un très grand rôle historique, en permettant pour la première fois d'aller au-delà de la théorie de Landau, avec des résultats qualitativement bons. Aujourd'hui il semble très important de pouvoir prouver l'existence de points fixes par des méthodes non perturbatives, ce qui permettrait un calcul totalement fiable (très vraisemblablement numérique) des exposants critiques.

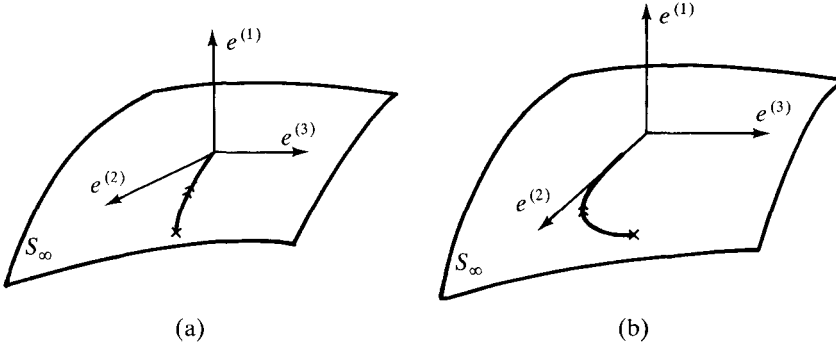
## F. CHAMPS MARGINAUX ET FONCTION $\beta(g)$

### F.1. Equation différentielle pour un champ marginal

J'ai laissé de côté jusqu'à présent le cas des champs marginaux. Ce cas est particulièrement important, car il fait le lien avec la version « ancienne » du groupe de renormalisation (Stueckelberg-Petermann et Gell-Mann-Low) qui est présentée aujourd'hui sous la forme des équations de Callan-Symanzik (chapitre VII).

Dans le cas d'un champ (ou variable) marginal(e), les techniques employées au paragraphe B.3 ne peuvent pas être appliquées directement pour déterminer le comportement de la fonction de corrélation. Afin d'interpréter intuitivement la discussion un peu technique qui va suivre, essayons de comprendre qualitativement la différence de comportement des TGR lorsque l'on est en présence d'une variable marginale (notée  $g$ ) et lorsqu'il n'y a pas de telle variable.

Examinons le flot de renormalisation au voisinage immédiat de la surface critique (cf. figure 11) : dans le cas (a), la trajectoire converge rapidement vers le point fixe, les champs inessentiels décroissant comme une loi de puissance. Dans le cas (b), le champ marginal reste constant à l'approximation linéaire ; nous montrerons un peu plus loin qu'il varie de façon logarithmique, c'est-à-dire très lentement. La trajectoire va s'approcher de l'axe  $e^{(2)}$ , correspondant au champ marginal, et le suivre pendant un certain temps, c'est-à-dire sur un



**Figure 11.** Flot de renormalisation au voisinage de la surface critique.

(a) pas de variable marginale :  $y_2 < 0$  ;

(b) une variable marginale :  $y_2 = 0$ .

intervalle important en  $s$ . Ceci explique que, au moins en partie, les TGR seront contrôlées par l'évolution du champ marginal ; en fin de compte le point fixe retrouvera son influence, mais l'évolution du champ marginal aura eu le temps de modifier le comportement critique par des facteurs logarithmiques.

L'évolution du champ marginal est décrite par une équation différentielle (83), faisant intervenir uniquement le champ marginal lui-même (dans le cas de plusieurs champs marginaux : un système d'équations différentielles). Le champ marginal est souvent identifiable à une constante de couplage  $g$  : l'équation différentielle décrira l'évolution d'une constante de couplage  $g(s)$ .

Le point le plus important est que cette équation différentielle peut être déterminée perturbativement ; cette propriété permet, au moins de façon approchée, un calcul analytique des TGR. C'est pourquoi nous exigerons, dans le raisonnement qui va suivre, de rester dans la région perturbative, c'est-à-dire dans la région où les divers paramètres du problème sont petits.

Je donne ci-dessous une version schématique d'un argument de Wilson, en renvoyant à son article pour certains détails des démonstrations. Considérons une suite de hamiltoniens  $H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_l$  déduits l'un de l'autre par une TGR. Pour fixer les idées, nous supposons que le facteur de dilatation vaut  $s = 2$ , qu'il existe un champ essentiel correspondant à une valeur propre  $y_1 = 2$  (cette valeur est tout à fait arbitraire), un champ marginal noté  $g$  ainsi qu'un champ inessential  $w$  correspondant à une valeur propre  $y_3 = -2$ .

La linéarisation au voisinage du point fixe conduit donc à :

$$t_{l+1} = 4 t_l \quad (73.a)$$

$$g_{l+1} = g_l \quad (73.b)$$

$$w_{l+1} = \frac{1}{4} w_l . \quad (73.c)$$

Si l'on tient compte des termes non linéaires, les équations (73) deviennent (\*) :

$$t_{l+1} = 4 t_l + f(t_l, g_l, w_l) \quad (74.a)$$

$$g_{l+1} = g_l + h(t_l, g_l, w_l) \quad (74.b)$$

$$w_{l+1} = \frac{1}{4} w_l + k(t_l, g_l, w_l) \quad (74.c)$$

où  $f$ ,  $h$  et  $k$  ne contiennent pas de termes linéaires, par exemple :

$$f(t, g, w) = d t g + d' g^2 + \dots \quad (75.a)$$

$$h(t, g, w) = c g^2 + c' t g + \dots \quad (75.b)$$

La règle du jeu dans ce qui va suivre consiste à *ne pas quitter le voisinage du point fixe* :  $t_l$ ,  $g_l$  et  $w_l$  doivent rester petits. En effet on souhaite utiliser des calculs perturbatifs, et ceux-ci ne seront valables que si les champs  $t_l$ ,  $g_l$  et  $w_l$  restent petits : en d'autres termes, *on exige de ne pas quitter la région perturbative*. (Il n'y a aucune objection de principe à quitter la région perturbative ; le seul problème (mais il est de taille) est la nécessité d'avoir recours à des calculs numériques, et non analytiques). La solution des équations (74) peut s'écrire :

$$t_l = 4^l t_0 + \sum_{n=0}^{l-1} 4^{l-(n+1)} f(t_n, g_n, w_n) \quad (76.a)$$

$$g_l = g_0 + \sum_{n=0}^{l-1} h(t_n, g_n, w_n) \quad (76.b)$$

$$w_l = 4^{-l} w_0 + \sum_{n=0}^{l-1} 4^{n+1-l} k(t_n, g_n, w_n) . \quad (76.c)$$

L'équation (76.c) est une « bonne » équation, dans la mesure où les facteurs  $4^{-l}$  et  $4^{n+1-l}$  assurent que  $w_l$  reste petit si les  $t_n$ ,  $g_n$ ,

(\*) On peut également traiter le cas d'une variable « quasi marginale » :

$$g_{l+1} = (1 - \varepsilon) g_l + h(t_l, g_l, w_l) \quad \varepsilon \ll 1.$$

Ce cas sera traité au chapitre VII par une autre méthode et je le laisse de côté pour le moment.

$w_n$  sont petits. Au contraire les équations (76.a) et (76.b) sont un désastre si  $l \rightarrow \infty$ , car les facteurs  $4^l$  et les sommes sur  $n$  conduisent à des valeurs de  $t_l$  et  $g_l$  incontrôlables.

Pour transformer (76.a) en une équation contrôlable, on prend pour valeur de départ, non pas  $t_0$ , mais  $t_L \ll 1$ , où  $L$  est très grand (naturellement à la fin du calcul, on devra être capable de revenir en arrière et de calculer  $t_0$  en fonction de  $t_L$ ). La signification physique de ce choix est la suivante : on se place dans le voisinage immédiat de la surface critique, afin qu'après  $L$  itérations on reste encore très proche de celle-ci. On obtient alors :

$$t_l = 4^{l-L} t_L - \sum_{n=l}^L 4^{l-(n+1)} f(t_n, g_n, w_n)$$

où le facteur  $4^{-n}$  assure une convergence rapide de la somme ; les seules valeurs importantes de  $n$  correspondent à  $n \simeq l$ .

Le comportement de la variable marginale est plus complexe ; pour une première orientation, imaginons que les variables  $t_l$  et  $w_l$  sont absentes ; on obtient alors une version simplifiée de (76.b) :

$$g_l = g_0 + \sum_{n=0}^{l-1} h(g_n) \quad (77)$$

avec

$$h(g) = cg^2 + \bar{c}g^3 + \dots$$

Il est facile de vérifier par récurrence que le coefficient de  $g_0^2$  dans  $g$  est proportionnel à  $l$ , celui de  $g_0^3$  proportionnel à  $l^2$  etc. et l'équation n'est pas directement exploitable. Il en est de même si l'on prend pour valeur de départ  $g_L$ , et non  $g_0$  car :

$$g_l = g_L - c(L-l)g_L^2 + \dots$$

et cette fois c'est  $(L-l)$  qui est grand. Cependant l'équation (78) peut se transformer en équation différentielle pour  $g_l$  :

$$g_{l+1} - g_l = cg_l^2 + O(g_l^3) \Rightarrow \frac{dg_l}{dl} = cg_l^2 + O(g_l^3).$$

En effet l'erreur commise est d'ordre  $g_l^3$  puisque :

$$\frac{d^2 g_l}{dl^2} \simeq g_{l+1} + g_{l-1} - 2g_l = O(g_l^3).$$

Si  $c < 0$ ,  $g_l$  est une fonction décroissante de  $l$  (pour  $g_0$  suffisamment petit), et l'équation donnant  $g_l$  est contrôlable. Avant de commenter

cette propriété cruciale, il nous faut montrer que la présence des variables  $t_l$  et  $w_l$  préserve l'existence d'une équation différentielle pour  $g_l$ .

Partons d'une valeur  $l_0$  telle que  $1 \ll l_0 \ll L$ . Dans ces conditions on peut négliger les termes  $4^{l-L} t_L$  de (77.a) et  $4^{-l} w_0$  de (76.c) ; cependant cette approximation nous ôte la possibilité de calculer  $t_L$  en fonction de  $t_0$ , ce qui est faisable avec une version plus sophistiquée du présent argument (cf. Wilson). En résumé les équations à résoudre sont :

$$t_l = - \sum_{n=l}^L 4^{l-(n+1)} f(t_n, g_n, w_n) \quad (78.a)$$

$$g_l = g_{l_0} + \sum_{n=l_0}^{l-1} h(t_n, g_n, w_n) \quad (78.b)$$

$$w_l = \sum_{n=0}^{l-1} 4^{n+1-l} k(t_n, g_n, w_n). \quad (78.c)$$

Afin d'alléger les notations, je ne tiendrai plus compte de la variable  $w_l$ .

On résout maintenant les équations (78) par itération, en vérifiant à chaque étape que la correction due à une itération supplémentaire est petite par rapport au résultat de l'itération précédente, ce qui montre la convergence de la procédure d'itération. La première itération est :

$$t_l^{(0)} = 0 ; \quad g_l^{(0)} = g_{l_0}$$

la seconde :

$$t_l^{(1)} = - \sum_{n=l}^{\infty} 4^{l-(n+1)} f(0, g_{l_0}) \quad (79.a)$$

$$g_l^{(1)} = g_{l_0} + \sum_{n=l_0}^{l-1} h(0, g_{l_0}) \quad (79.b)$$

etc. Un point important pour la suite est que  $t_l^{(1)}$  est (au moins) d'ordre  $g_{l_0}^2$ . Il n'est pas difficile de se convaincre que la procédure d'itération converge pour  $(l - l_0) \leq 10$ .

La solution de l'équation (79.b) est de la forme  $H^{(1)}(l - l_0, g_{l_0})$  : c'est une fonction de  $(l - l_0)$ , et non de  $l$  et  $l_0$  séparément. En effet, une fois  $g_{l_0}$  fixé,  $g_l$  ne dépend que du nombre de termes de la somme, c'est-à-dire de  $(l - l_0)^{(*)}$ . La seconde itération pour  $t_l$  donne :

$$t_l^{(2)} = - \sum_{n=l}^{\infty} 4^{l-(n+1)} f(t_l^{(1)}, H^{(1)}(n - l_0, g_{l_0}))$$

(\*) Si l'on écrit  $g_{l+1} - g_l = h(g_l)$  sous forme d'une équation différentielle  $\frac{dg}{dl} = h(g)$ ,  
 $\int_{g_{l_0}}^{g_l} \frac{dg}{h(g)} = F(g_l) - F(g_{l_0}) = l - l_0$  ; soit  $g_l = F^{-1}(l - l_0 + F(g_{l_0}))$ .

qui est encore une fonction de  $(l - l_0)$  et de  $g_{l_0}$ . En résumé les solutions de (79) sont de la forme :

$$t_l = F(l - l_0, g_{l_0}) \quad (80.a)$$

$$g_l = H(l - l_0, g_{l_0}). \quad (80.b)$$

L'équation (80.b) permet d'écrire une loi de récurrence :

$$g_{l+1} = H(1, g_l). \quad (81)$$

La fonction  $H(1, g)$  s'obtient en résolvant (78) par itération :

$$\begin{aligned} H^{(0)}(1, g) &= g \\ H^{(1)}(1, g) &= g + h(0, g) = g + cg^2 + O(g^3). \end{aligned}$$

A l'ordre suivant il faudra tenir compte de la correction due à  $t^{(1)}$ ; mais  $t^{(1)}$  étant d'ordre  $g^2$ , le terme en  $tg$  de  $h$  donnera au mieux un terme en  $g^3$ . On obtient donc :

$$H(1, g) = g + cg^2 + c_3 g^3$$

où le terme en  $g^2$  dépend uniquement de la fonction  $h$  dans (76.b). Nous pourrions à nouveau transformer (81) en équation différentielle, mais en ayant inclus cette fois toutes les variables dans le raisonnement :

$$\frac{dg_l}{dl} = cg_l^2 + O(g_l^3). \quad (82)$$

Introduisant le facteur de dilatation usuel  $s = 2^l$  on pourra écrire de façon générale :

$$\frac{dg(s)}{d \ln s} = -\beta(g(s)) = -\beta_0 g(s)^2 - \beta_1 g(s)^3 - \dots$$

(83)

avec  $\beta_0 = c/\ln 2$ . La fonction  $\beta(g)$  dans (83) est la célèbre *fonction  $\beta(g)$  de Callan-Symanzik (C-S)*. Elle est reliée à la fonction  $\beta(g)$  qui sera introduite au chapitre VII dans le cadre de l'« ancienne » version du groupe de renormalisation.

La fonction  $\beta(g)$  permet de calculer  $g(s)$  en fonction de  $g_0$ ; en effet, d'après (83) :

$$\frac{dg'}{\beta(g')} = -d \ln s'$$

et en intégrant :

$$\int_{g_0}^{g(s)} \frac{dg'}{\beta(g')} = -\ln s. \quad (84)$$

Si  $F(g)$  est une primitive de  $1/\beta(g)$ ,  $g(s)$  est obtenu en résolvant :

$$F(g(s)) = -\ln s + F(g_0).$$

Si l'on s'en tient au premier terme de  $\beta(g)$ , cette résolution est immédiate :

$$\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g(s)} = -\beta_0 \ln s$$

$$\boxed{g(s) \simeq \frac{g_0}{1 + \beta_0 g_0 \ln s}}. \quad (85)$$

Si  $\beta_0 > 0$ , ce qui est le cas de la théorie de Ginzburg-Landau,  $g(s) \rightarrow 0$  comme  $1/\ln s$  quand  $s \rightarrow \infty$ . La théorie de Ginzburg-Landau est dite « *infrarouge libre* » : quand  $s \rightarrow \infty$ , la constante couplage tend vers zéro. *A fortiori*,  $g(s)$  reste toujours dans la région perturbative, ce qui était précisément le but recherché. Nous verrons au chapitre VII que le comportement de  $g(s)$  pour  $s \rightarrow \infty$  dépend seulement de  $\beta_0$  et non de  $g_0$ , pourvu que  $\beta(g)$  ne s'annule pas entre 0 et  $g_0$ .

L'équation (85) montre bien ce que l'on a gagné dans la discussion précédente ; le développement de (85) en puissances de  $g_0$  donne :

$$g(s) = g_0(1 - \beta_0 g_0 \ln s + (\beta_0 g_0 \ln s)^2 - \dots).$$

Ce développement n'est valable que si

$$\beta_0 g_0 \ln s = c g_0 l \ll 1.$$

Le groupe de renormalisation permet de sommer les puissances de  $\ln s$  (ou de  $l$ ) sans jamais quitter la région perturbative, même lorsque  $(g_0 l)$  est grand.

Lorsque  $\beta_0 < 0$  (cas d'une interaction en  $g\varphi^3$  en dimension  $D = 6$ ) :

$$g(s) = \frac{g_0}{1 - |\beta_0| g_0 \ln s}$$

et la constante de couplage devient d'ordre 1 si  $|\beta_0| g_0 \ln s \simeq 1$  : on quitte alors la région perturbative, et le raisonnement précédent n'est plus cohérent : pour connaître  $g(s)$ , il ne suffit pas de connaître  $\beta_0$ , ni même  $\beta_0$  et  $\beta_1$ , il faut connaître la fonction  $\beta(g)$  exacte. L'expression (85) ne peut certainement pas être utilisée lorsque  $g_0 \ln s \simeq 1$ .

Lorsque l'on tient compte des termes non linéaires, on voit qu'en fin de compte un champ marginal devient soit essentiel si  $\beta_0 < 0$ , soit inessentiel si  $\beta_0 > 0$ , bien que dans les deux cas l'évolution soit plus lente que dans le cas usuel : l'évolution se fait suivant une loi logarithmique, et non une loi de puissance.

Lorsqu'il n'y a pas de champ marginal, les champs essentiels et inessentiels évoluent rapidement suivant une loi de puissance, et les corrections non linéaires apportent au départ peu de changement au comportement obtenu par linéarisation au voisinage du point fixe. Dès que l'on atteint des valeurs de  $l$  pour lesquelles l'approximation linéaire n'est plus valable, on doit recourir à des méthodes non perturbatives. Le succès de la méthode perturbative dans le cas du point fixe non gaussien (paragraphe E) provient de ce que le champ  $u_0$  est « quasi marginal » (cf. note page 134).

## F.2. Fonction de corrélation

Appliquons les considérations qui précèdent au cas du hamiltonien de Ginzburg-Landau en dimension  $D = 4$  ( $\varepsilon = 0$ ). Le champ  $u_0$  est alors un champ marginal, l'équation (56.b) étant de la forme :

$$u'_0 = u_0 - C u_0^2 \ln s.$$

On posera par convention  $g_0 = u_0$  lorsque  $D = 4$  ; d'après les résultats du paragraphe D.3, le champ d'échelle essentiel  $t_0$  est relié à  $r_0$  et  $g_0$  par :

$$t_0 = r_0 + \frac{\Lambda^2 g_0}{32 \pi^2}.$$

Lorsque l'on utilise les champs d'échelle  $g_0$  et  $t_0$  les équations du GR (56) deviennent :

$$t'_0 = s^2 \left( t_0 - \frac{g_0 t_0}{16 \pi^2} \ln s + O(g_0^2) \right) \quad (86.a)$$

$$g'_0 = g_0 - \frac{3 g_0^2}{16 \pi^2} \ln s + O(g_0^3). \quad (86.b)$$

Pour déterminer le comportement de la fonction de corrélation, nous allons partir de l'équation (47.a) ; il sera commode de poser :

$$\zeta(s) = s^{D-2} \lambda^{-2}(s)$$

ce qui permet d'écrire (47.a) sous la forme :

$$G(\mathbf{k}, t_0, g_0, \Lambda) = s^2 \zeta(s) G(s\mathbf{k}, t(s), g(s), \Lambda). \quad (87)$$

Etudions par exemple le comportement de la susceptibilité en posant  $k = 0$  :

$$\chi(t_0, g_0, \Lambda) = s^2 \zeta(s) \chi(t(s), g(s), \Lambda). \quad (88)$$

A l'ordre de la théorie des perturbations où nous travaillons, il est possible de prendre  $\zeta(s) = 1$ . En effet la dimension anormale est égale à la dimension canonique à l'ordre  $g_0$ . Ce point sera établi un peu plus loin. L'équation d'évolution pour  $t$  est déduite de (86.a) :

$$\frac{dt(s)}{d \ln s} = 2 t(s) - \frac{g(s) t(s)}{16 \pi^2}$$

ou bien :

$$\frac{d \ln t(s)}{d \ln s} = 2 - \frac{g(s)}{16 \pi^2} = 2 - \bar{\gamma}_0 g(s); \quad \bar{\gamma}_0 = \frac{1}{16 \pi^2}. \quad (89)$$

Compte tenu de (83), cette équation s'intègre en (\*) :

$$\begin{aligned} \ln \frac{t(s)}{t_0} &= 2 \ln s + \frac{\bar{\gamma}_0}{\beta_0} \int_{g_0}^{g(s)} \frac{dg}{g} = 2 \ln s + \frac{\bar{\gamma}_0}{\beta_0} \ln \frac{g(s)}{g_0} \\ &\simeq 2 \ln s - \frac{\bar{\gamma}_0}{\beta_0} \ln \ln s \end{aligned}$$

lorsque  $s \rightarrow \infty$ , soit :

$$t(s) \simeq t_0 s^2 (\ln s)^{-\bar{\gamma}_0/\beta_0}. \quad (90)$$

Comme on cherche la susceptibilité dans la région critique,  $t_0 \rightarrow 0$ . Lorsque  $t(s) \simeq 1$  ( $t(s)$  étant de dimension 2, il serait plus correct de définir la variable sans dimension  $t(s)/\Lambda^2$ ), le comportement du membre de droite de (88) est donné par la théorie des perturbations, d'autant mieux que  $g(s) \rightarrow 0$ . On choisit donc :

$$s^2 \simeq \frac{1}{|t_0|} \left( \ln \frac{1}{|t_0|} \right)^{\bar{\gamma}_0/\beta_0}$$

et l'on obtient :

$$\chi(t_0, g_0, \Lambda) \simeq |t_0|^{-1} |\ln |t_0||^{\bar{\gamma}_0/\beta_0} \chi(1, 0, \Lambda)$$

soit :

$$\chi(t_0, g_0, \Lambda) \sim |t_0|^{-1} |\ln |t_0||^{\bar{\gamma}_0/\beta_0}. \quad (91)$$

(\*) Plus généralement si  $d \ln t / d \ln s = 2 - \bar{\gamma}(g)$  on trouve :

$$\ln \frac{t(s)}{t_0} = 2 \ln s + \int_{g_0}^{g(s)} \frac{\bar{\gamma}(g)}{\beta(g)} dg.$$

Le comportement de la théorie de Landau ( $\sim t_0^{-1}$ ) est donc modifié par un logarithme. Notez que l'exposant du logarithme est facile à déterminer : en effet d'après (86)  $\beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}$  et  $\bar{\gamma}_0/\beta_0 = 1/3$ .

Revenons maintenant à  $\zeta(s)$  ;  $\zeta(s) = 1$  à l'ordre  $g_0$ , et la première correction perturbative est d'ordre  $g_0^2$  :

$$\zeta(s) = 1 - \gamma_0 g_0^2 \ln s$$

soit :

$$\frac{d \ln \zeta(s)}{d \ln s} = - \gamma_0 g^2(s)$$

ce qui donne ( $\zeta_0 = 1$ ) :

$$\ln \zeta(s) = \frac{\gamma_0}{\beta_0} \int_{g_0}^{g(s)} dg = - \frac{\gamma_0 g_0}{\beta_0} + O\left(\frac{1}{\ln s}\right).$$

$\zeta(s)$  est indépendant de  $s$ , à des termes  $O\left(\frac{1}{\ln s}\right)$  près. Ceci montre qu'en dimension 4 l'exposant critique  $\eta$  reste égal à zéro. Ce résultat est une particularité de l'interaction en  $\varphi^4$ . En effet avec une théorie en  $\varphi^3$  (en dimension 6) ou une théorie de jauge non abélienne (en fait pour ces deux théories il faut considérer la limite ultraviolette ( $k \rightarrow \infty$ ) : cf. chapitre VII) :

$$\gamma(g) = \gamma_0 g^2 + \dots$$

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

et

$$\frac{\gamma_0}{\beta_0} \int_{g_0}^{g(s)} \frac{dg}{g} \simeq \frac{\gamma_0}{\beta_0} \ln \ln s.$$

La fonction de corrélation est alors modifiée par des puissances de  $(\ln k)$ .

Examinons enfin le comportement de la fonction de corrélation au point critique (pour simplifier la discussion). D'après ce qui précède :

$$G(\mathbf{k}, g_0, \Lambda) \simeq s^2 G(s\mathbf{k}, g(s), \Lambda). \quad (92)$$

Lorsque  $k \ll \Lambda$ , le développement perturbatif de  $G$  contient des termes en  $g_0(\ln(k/\Lambda))$ ,  $g_0^2(\ln(k/\Lambda))$ , etc. (cf. V-E.4) ; ce sont ces termes qui invalident le développement perturbatif lorsque  $k/\Lambda \ll 1$ , c'est-à-dire dans la région infrarouge. Lorsque  $sk/\Lambda \simeq 1$ , le développement perturbatif de  $G$  en fonction de  $g(s)$  dans le membre de droite de (92)

ne contient pas de grands logarithmes, et le développement perturbatif est valable. Ceci veut dire que *pour des vecteurs d'onde*  $k \sim \Lambda/s$ , la constante de couplage que l'on doit utiliser pour éviter les divergences est  $g(s)$ , et non  $g_0$  : à une certaine échelle de vecteurs d'onde correspond donc une valeur de la « constante » de couplage (qui n'est plus constante). Ainsi qu'on le verra plus en détail au chapitre VII, la notion de constante de couplage adaptée à une échelle de vecteurs (ou longueurs) d'onde est fondamentale en théorie de la renormalisation.

## EXERCICES

### 1) Méthode de décimation

Au lieu de former des blocs de spin, on peut définir une TGR en sommant sur certains spins du réseau. Par exemple on somme sur les spins marqués d'un ● dans le réseau à deux dimensions de la figure 12, gardant pour spins  $S'$  ceux marqués de × (remarquez que le réseau transformé a subi une rotation de  $\pi/4$  par rapport au réseau initial). Montrer que si l'on part d'un hamiltonien d'Ising, l'interaction entre spins  $S'$  est de la forme (notations de (5)) :

$$H' = A + B \sum_{\langle ij \rangle} S'_i S'_j + C \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} S'_i S'_j +$$

$$D \sum_{\langle ijkl \rangle} S'_i S'_j S'_k S'_l$$

Figure 12.

et calculer  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

(La méthode de décimation donne de mauvais résultats ; le but de l'exercice est de montrer que  $H'$  n'a pas la même forme que  $H$  dans une TGR.)

Suggestion : examiner d'abord le cas  $D = 1$  et montrer que  $\text{th } K' = (\text{th } K)^2$ .

### 2) Transformées de Fourier

On définit la transformée de Fourier du champ  $\varphi(\mathbf{x})$  par :

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{a^D}{L^{D/2}} \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x})$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^{D/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}) .$$

(a) Calculer le hamiltonien gaussien  $H_0$  en fonction de  $\varphi(\mathbf{k})$ .

(b) Montrer que de façon générale :

$$G(\mathbf{k}) = \langle \varphi(\mathbf{k}) \varphi(-\mathbf{k}) \rangle .$$

(c) Le changement de variable  $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{k})$  a pour inconvénient que  $\varphi(\mathbf{k})$  n'est pas réel. Il est nécessaire d'introduire deux variables réelles  $\alpha(\mathbf{k})$  et  $\beta(\mathbf{k})$  :

$$\varphi(\pm \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha(\mathbf{k}) \pm i\beta(\mathbf{k})) .$$

Calculer le jacobien de la transformation :

$$\mathcal{D}\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \prod_{\mathbf{k}(k_x > 0)} d\alpha(\mathbf{k}) d\beta(\mathbf{k}) .$$

(d) Dédurre de (a) et (c) la fonction de corrélation  $G_0(\mathbf{k})$  du modèle gaussien, par intégration directe sur  $d\alpha(\mathbf{k}) d\beta(\mathbf{k})$ .

3) Soit le hamiltonien de Ginzburg-Landau généralisé (38). Calculer  $r'_0$ ,  $u'_0$ ,  $u'_6$ ,  $u'_8$ , et  $v'_0$  dans une TGR au 1<sup>er</sup> ordre en  $V$  et vérifier que pour  $D > 4$ , tous les champs sauf  $r_0$  sont inessentiels. Calculer également la modification du coefficient du terme en  $(\nabla\varphi)^2$ .

4) (a) Utiliser les équations différentielles (57) pour déterminer les coordonnées  $(r_0^*, u_0^*)$  du point fixe.

(b) On linéarise au voisinage du point fixe :

$$r_0 = r_0^* + \delta r_0 ; \quad u_0 = u_0^* + \delta u_0 .$$

Montrer que :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\delta r_0}{d \ln s} \\ \frac{d\delta u_0}{d \ln s} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \delta r_0 \\ \delta u_0 \end{pmatrix}$$

où  $R$  est une matrice  $2 \times 2$ , et montrer que  $y_1$  et  $y_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $R$ . Calculer  $y_1$  et  $y_2$ .

(c) En partant des équations différentielles de renormalisation (58), montrer que le facteur  $\lambda(s)$  de (11) vérifie une équation différentielle du type :

$$\frac{d \ln \lambda(s)}{d \ln s} = \gamma(K_\alpha(s))$$

et en déduire l'expression suivante pour  $\lambda(s)$  :

$$\lambda(s) = \exp \left[ \int_1^s \gamma(K_\alpha(s')) \frac{ds'}{s'} \right] .$$

Retrouver (11) au voisinage du point fixe. Comment doit-on corriger l'équation (47.a) ?

5) Calcul de  $y_B$  à l'approximation des cumulants

(a) On définit :

$$a_1 = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}; \quad a_2 = \frac{e^{3K} - e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}; \quad a_3 = \frac{e^{3K} - 3e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}}.$$

Montrer que :

$$\langle S_\alpha^{(i)} \rangle_0 = a_1 S'_\alpha; \quad \langle S_\alpha^{(i)} S_\alpha^{(j)} \rangle_0 = a_2; \quad \langle S_\alpha^{(i)} S_\alpha^{(j)} S_\alpha^{(k)} \rangle_0 = a_3 S'_\alpha$$

les indices  $i, j, k$  étant tous différents (les notations sont celles du paragraphe C).

(b) On introduit un champ magnétique infinitésimal :

$$H \rightarrow H - B \sum_i S_i.$$

Si l'on fait l'approximation  $V = 0$ , montrer que si la valeur moyenne  $\langle S \rangle$  est prise à  $[S']$  fixé :

$$\sum_i \langle S_\alpha^{(i)} \rangle = 3 a_1 \sum_\alpha S'_\alpha$$

et en déduire  $y_B$  à cette approximation.

(c) L'approximation suivante consiste à écrire :

$$e^{-(H_0 + V)} \simeq e^{-H_0} (1 - V).$$

Montrer que dans ces conditions  $\delta \langle S_\alpha^{(i)} \rangle = \langle S_\alpha^{(i)} \rangle - \langle S_\alpha^{(i)} \rangle_0$  est donné par :

$$\delta \langle S_\alpha^{(i)} \rangle = \langle V \rangle_0 \langle S_\alpha^{(i)} \rangle_0 - \langle V S_\alpha^{(i)} \rangle_0.$$

Calculer  $\langle S_\alpha^{(1)} \rangle$  et en déduire

$$\sum_i \langle S_\alpha^{(i)} \rangle = \sum_\alpha 3 a_1 [1 + 4 K (1 - a_1^2 + 2(a_2 - a_1^2))] S'_\alpha.$$

(Suggestion : examiner à quelle condition  $\langle S \rangle_0 \langle V \rangle_0 \neq \langle VS \rangle_0$ . N'oubliez pas que  $V$  ne connecte que des blocs différents : figure 13).

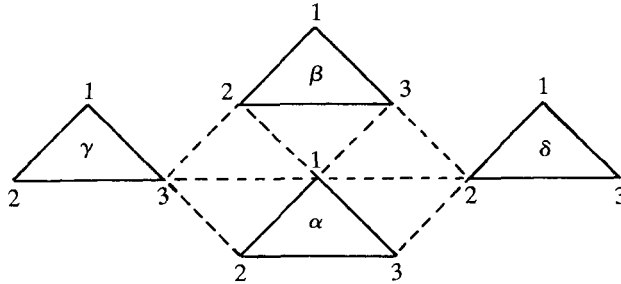


Figure 13.

(d) Calculer numériquement  $y_B$  ainsi que les exposants critiques  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$  à cette approximation et comparer avec les valeurs expérimentales. On utilisera pour  $\nu$  la valeur déterminée dans le texte.

### 6) Calcul des exposants critiques avec un paramètre d'ordre de dimension $n$

On se propose de calculer l'exposant  $\gamma$  en partant d'un hamiltonien de la forme (71).

(a) Calculer le potentiel thermodynamique  $\Gamma(M)$  en utilisant la méthode du chapitre II, paragraphe C. On remarquera que la matrice  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  a maintenant des indices internes  $i$  et  $j$  :

$$D_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(-\nabla_x^2 + r_0) \delta_{ij} + \frac{u_0}{6} (\delta_{ij} \vec{\varphi}^2 + 2 \varphi_i \varphi_j)] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

avec

$$\vec{\varphi}^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2$$

Calculer  $\ln \det (D_{ij}(\mathbf{q}))$  à  $\mathbf{q}$  fixé ; on pourra remarquer que le calcul se simplifie si l'on choisit  $M_i = (M, 0, 0, \dots, 0)$  où  $M = (\vec{M}^2)^{1/2}$ .

Montrer que  $\Gamma(M)$  peut s'écrire :

$$L^{-D} \Gamma(M_i) = \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{u_0}{4!} (\vec{M}^2)^2 + \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \ln \left( q^2 + r_0 + \frac{u_0}{2} \vec{M}^2 \right) + \\ + \frac{n-1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \ln \left( q^2 + r_0 + \frac{u_0}{6} \vec{M}^2 \right)$$

(b) Montrer que les équations (68) et (62) deviennent respectivement :

$$r_0(T - T_c) = r \left( 1 + \frac{u_0(n+2)}{6} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k^2 + r)} \right) \\ \Gamma^{(4)}(0) = u_0 - u_0^2 \frac{(n+8)}{6} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + r)^2}$$

(c) En déduire l'expression (72) de l'exposant critique  $\gamma$ .

### 7) Groupe de renormalisation à la limite $n \rightarrow \infty$ <sup>(4)</sup>

On se propose d'étudier le groupe de renormalisation quand la dimension  $n$  du paramètre d'ordre tend vers l'infini. Le hamiltonien est donné par :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i)^2 + U(\vec{\varphi}^2) \right] \\ \vec{\varphi}^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 ; \quad U(\vec{\varphi}^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_{2m}}{m} \left( \frac{\vec{\varphi}^2}{2} \right)^m \\ t(\vec{\varphi}^2) = 2 \frac{dU}{d\vec{\varphi}^2} = \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m} \left( \frac{\vec{\varphi}^2}{2} \right)^{m-1}$$

(a) On décompose  $\varphi(\mathbf{x})$  en :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \bar{\varphi}(\mathbf{x})$$

où  $\varphi_1(\mathbf{x})(\bar{\varphi}(\mathbf{x}))$  a des composantes de Fourier dans l'intervalle  $0 \leq k \leq \frac{\Lambda}{s} \left( \frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda \right)$ . Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , un terme tel que :

$$\sum_{i=1}^n |\bar{\varphi}_i(\mathbf{k})|^2$$

est d'ordre  $n$ , tandis que :

$$\sum_i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \bar{\varphi}_i(\mathbf{k}) \bar{\varphi}_i(\mathbf{k}')$$

qui est une somme de termes de signe aléatoire, est d'ordre 1. En utilisant ce résultat, montrer que l'intégrale sur  $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$  peut s'écrire, à la limite  $n \rightarrow \infty$  :

$$\int \prod_{\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda} dN_k \exp \left( - \left\{ \left( \int d^D x \frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi}_1)^2 \right) + W \right\} \right)$$

où :

$$W = \sum_{\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda} \left( -\frac{1}{2} n \ln N_k + \frac{1}{2} k^2 N_k \right) + \int d^D x U(\rho + \bar{\varphi}_1^2)$$

$$\rho = L^{-D} \sum_{\frac{\Lambda}{s} \leq k \leq \Lambda} N_k ; \quad N_k = \sum_{i=1}^n |\bar{\varphi}_i(\mathbf{k})|^2.$$

(b) Pour évaluer l'intégrale, on cherche le maximum de l'intégrand et on remplace la valeur de l'intégrale par celle du maximum de l'intégrand. Justifier cette approximation et montrer que l'on doit choisir  $(\varphi_1 \rightarrow \varphi)$

$$\bar{N}_k = \frac{n}{k^2 + t(\bar{\rho} + \bar{\varphi}^2)}$$

$$\bar{\rho} = nK_D \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{k^{D-1} dk}{k^2 + t(\bar{\rho} + \bar{\varphi}^2)}.$$

(c) On effectue maintenant la dilatation de l'unité de longueur et la transformation  $\varphi \rightarrow s^{-d_\varphi} \varphi(\mathbf{x}/s)$ . Montrer que l'on doit choisir  $\eta = 0$  et que la loi de transformation  $t_s = R_s t$  est :

$$t_s(\bar{\varphi}^2) = s^2 t(\bar{\rho} + s^{2-D} \bar{\varphi}^2)$$

$$\bar{\rho} = nK_D \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{k^{D-1} dk}{k^2 + t_s(\bar{\varphi}^2)/s^2}.$$

(d) Montrer que sur la surface critique on doit avoir  $t(N_c) = 0$ , où  $N_c = nK_D \int_0^\Lambda k^{D-3} dk$  (on suppose  $D > 2$ ).

(e) Au voisinage de  $N = N_c$  on définit  $\zeta$  et  $u_c$  par :

$$\bar{\rho} + s^{2-D} \bar{\varphi}^2 = N_c \left( 1 + \frac{\zeta}{s^2} \right) ; \quad u_c = N_c \frac{dt(N)}{dN} \Big|_{N=N_c}$$

(on peut montrer que  $u_c > 0$ ). Démontrer l'équation :

$$\frac{\bar{\varphi}^2}{N_c} = 1 + \zeta s^{D-4} - (D-2) \Lambda^{2-D} \int_\Lambda^\infty dp p^{D-1} \left( \frac{1}{p^2 + t_s} - \frac{1}{p^2} \right)$$

et donner son interprétation lorsque  $t \in S_\infty$ .

(f) Montrer que pour  $2 < D < 4$  le point fixe est donné par :

$$\frac{\bar{\varphi}^2}{N_c} = 1 - (D-2) \Lambda^{2-D} \int_\Lambda^\infty dp p^{D-1} \left( \frac{1}{p^2 + t^*} - \frac{1}{p^2} \right)$$

et expliquer exactement ce qu'est le point fixe. Quel est le point fixe pour  $D > 4$  ?

Faites un calcul numérique pour tracer la fonction  $t^*(x)$ ,  $x = \bar{\varphi}^2/N_c$ , dans le cas  $D = 3$ .

(g) Calculer  $t_s - t^*$  en fonction de  $t_1 = t(N_c)$  au voisinage du point fixe et montrer que si  $2 < D < 4$ , l'exposant  $\nu = 1/y_1$  vaut  $1/(D-2)$  ; montrer également que  $y_2 = D-4$ . Que se passe-t-il si  $D > 4$  ?

(h) Montrer que si  $D$  est voisin de 4, on peut obtenir un développement  $\varepsilon$  de  $t^*$  ; calculer  $u_2^*$ ,  $u_4^*$  et  $u_6^*$  et montrer en particulier que  $u_6^*$  est d'ordre  $\varepsilon^3$ .

### 8) L'exemple de Bell et Wilson

On part du hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2} \int_{q \leq \Lambda} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \rho(q) |\varphi(q)|^2 ; \quad \rho(q) = r_0 + cq^2 + wq^4 + \dots$$

et on définit la TGR  $R_{a,b}$  par ( $a > 0$ ) :

$$R_{a,b} e^{-H} = \int \prod_{\|\mathbf{q}\| \leq \Lambda} d\varphi(\mathbf{q}) \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} a \int \left| \varphi'(\mathbf{q}) - b \varphi \left( \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \right|^2 \frac{d^D q}{(2\pi)^D} - H(\varphi) \right)$$

où le paramètre  $b$  joue le rôle de  $\lambda$  dans (8). La transformation  $R_{a,b}$  dépend donc de deux paramètres  $a$  et  $b$  ; notez que  $\varphi'(\mathbf{q}) = 0$  si  $\|\mathbf{q}\| > \Lambda$ .

(a) Montrer que l'équation précédente pour  $R_{a,b}$  définit bien une TGR

possédant les propriétés requises. Quelle limite obtient-on quand  $a \rightarrow \infty$  ? Quelles sont les dimensions canoniques de  $\varphi(\mathbf{q})$  (la dimension de  $c$  est zéro) et de  $w$  ?

(b) Calculer  $\rho'(\mathbf{q})$  en fonction de  $\rho(\mathbf{q})$  ; on trouve :

$$\rho'(\mathbf{q}) = \frac{4 \rho(\mathbf{q}/2)}{2^{D+2} b^2 + 4 \rho(\mathbf{q}/2)/a}$$

(c) On écrit la  $k^{\text{ième}}$  itération de la TGR sous la forme :

$$\rho^{(k)}(\mathbf{q}) = \frac{L_k^2 \rho(\mathbf{q}/L_k)}{L_k^{D+2} b_k^2 + L_k^2 \rho(\mathbf{q}/L_k)/a_k}.$$

Etablir des relations de récurrence pour  $a_k$ ,  $b_k$  et  $L_k$  et les résoudre. On montrera que :

$$a_k = \frac{a(1 - 2^D b^2)}{1 - (2^D b^2)^k}; \quad b_k = (b)^k; \quad L_k = (2)^k.$$

(d) Montrer que si la transformation doit avoir un point fixe non trivial il est nécessaire que  $b^2 = 2^{-(D+2)}$ . Quels sont les points fixes (triviaux) obtenus si  $b^2 < 2^{-(D+2)}$  et  $b^2 > 2^{-(D+2)}$  ?

Avec le choix  $b^2 = 2^{-(D+2)}$ , déterminer l'exposant critique  $\eta$  et le point fixe  $\rho^*(\mathbf{q})$ . Que trouve-t-on à la limite  $a \rightarrow \infty$  et pourquoi ?

(e) Le point fixe dépend de  $c$  et de  $a$  ;  $c$  peut être choisi arbitrairement : on a en fait une « ligne de points fixes ». Le point fixe dépend du choix de  $a$  dans la TGR : deux TGR physiquement équivalentes peuvent conduire à des points fixes différents. Examiner le comportement de  $r_0$  et de  $w$  dans une suite de TGR. L'exposant critique  $\nu$  dépend-il de  $a$  ?

### 9) Anisotropie cubique <sup>(5)</sup>

On rajoute au hamiltonien de Ginzburg-Landau (71) un terme d'« anisotropie cubique » :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0 \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right) + \frac{1}{4!} u_0 \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2 + \frac{1}{4!} v_0 \sum_{i=1}^n \varphi_i^4 \right].$$

(a) Montrer que le hamiltonien n'est défini positif que si les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

$$u_0 + v_0 > 0; \quad u_0 + \frac{v_0}{n} > 0.$$

Montrer que pour  $n = 2$  le système de paramètres  $(u_0, v_0)$  est équivalent au système de paramètres  $\left(u_0 + \frac{3}{2} v_0, -v_0\right)$ .

(b) On peut démontrer pour  $u = \frac{u_0}{8 \pi^2}$  et  $v = \frac{v_0}{8 \pi^2}$  les équations différentiel-

les de renormalisation suivantes (qui généralisent l'équation 57.b) :

$$\frac{du}{d \ln s} = \varepsilon u - \frac{n+8}{6} u^2 - uv$$

$$\frac{dv}{d \ln s} = \varepsilon v - 2 uv - \frac{3}{2} v^2 .$$

Montrer que ces équations impliquent l'existence de quatre points fixes appelés (on justifiera la terminologie) :

- |              |                |
|--------------|----------------|
| (1) Ising    | (2) Heisenberg |
| (3) Gaussien | (4) Cubique .  |

Etudier pour  $\varepsilon > 0$  la stabilité de ces points fixes dans le plan  $(u, v)$  et dessiner le flot de renormalisation dans ce plan. Montrer que l'on doit distinguer les cas  $n < 4$  et  $n > 4$ .

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Pour une introduction aux concepts fondamentaux du groupe de renormalisation on pourra consulter : Toulouse-Pfeuty (chapitre 1), Ma (chapitre I), Shenker (section 3). On pourra lire en complément les discussions instructives quoique un peu techniques de J. Kogut et K. Wilson, *Phys. Reports*, **12C** (1973) et de T. Bell et K. Wilson, *Phys. Rev.*, **B10**, 3935 et **B11**, 3431 (1975). Le calcul des exposants critiques est décrit par exemple dans Ma (chapitre VI) et Toulouse-Pfeuty (chapitre 4). L'exemple du calcul sur réseau du paragraphe C est emprunté à T. Niemeijer et J. Van Leeuwen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume VI, chapitre VII (Academic Press, 1975). Pour le groupe de renormalisation dans l'espace de Fourier et les points fixes  $D > 4$  et  $D < 4$ , on se reportera à Ma (chapitre VII) et Toulouse-Pfeuty (chapitres 4 et 5). L'exposé de Wilson (sections I, II et III) est remarquable, mais d'un abord un peu plus difficile. Enfin la discussion du champ marginal suit celle de Wilson, section V.

<sup>(1)</sup> E. Stueckelberg et A. Petermann, *Helv. Phys. Acta*, **26**, 499 (1953).

<sup>(2)</sup> M. Gell-Mann et F. Low, *Phys. Rev.*, **95**, 1300 (1954).

<sup>(3)</sup> R. Swendsen in *Cargese Lectures in Theoretical Physics* (1980).

<sup>(4)</sup> S. K. Ma, *Reviews of Modern Physics*, **45**, 589 (1973).

<sup>(5)</sup> Toulouse-Pfeuty (chapitre 8) ; Amit (chapitre II.5).



## CHAPITRE IV

# Modèles bidimensionnels (\*)

Le cas où la dimension d'espace  $D$  est égale à deux présente des particularités intéressantes, car  $D = 2$  est un cas limite où le comportement d'un système de spins dépend qualitativement de la dimension  $n$  du paramètre d'ordre. Lorsque  $n = 1$  (modèle d'Ising), on observe une transition de phase avec aimantation spontanée. Au contraire, pour  $n \geq 2$ , il est possible de prouver l'absence d'aimantation spontanée, mais le cas  $n = 2$  (modèle  $XY$ ) est à nouveau spécial : il existe une transition de phase sans aimantation spontanée, et tout à fait remarquable. Pour  $n \geq 3$  (modèle- $\sigma$  non linéaire), il n'y a plus du tout de transition de phase. Cependant l'étude de ce modèle est intéressante car elle permet d'illustrer de façon non triviale le fonctionnement du groupe de renormalisation dans le cas d'une variable marginale. Le groupe de renormalisation sera également utilisé pour analyser le comportement original du modèle  $XY$ .

Nous allons donc étudier un système de spins  $S_{\alpha,i}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  disposés aux nœuds  $i$  d'un réseau carré à deux dimensions et vérifiant :

$$\sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha,i}^2 = 1 .$$

Donnons d'abord un argument heuristique pour justifier l'absence d'aimantation spontanée en dimension  $D = 2$ , pour  $n \geq 2$  (il existe une preuve rigoureuse due à Mermin et Wagner (<sup>1</sup>)). Supposons qu'au voisinage de  $T = 0$ , il existe une aimantation spontanée telle que tous

(\*) La suite du livre est indépendante de ce chapitre, qui peut être sauté en première lecture.

les spins soient parallèles par exemple à la direction  $n$  :

$$S_{1,i} = S_{2,i} = \dots = S_{n-1,i} = 0 ; \quad S_{n,i} = 1$$

et étudions les petites fluctuations autour de cet état. Pour que cet état soit stable, il ne faut pas qu'il soit détruit par des fluctuations trop importantes. En particulier pour  $T \rightarrow 0$ , les fluctuations doivent tendre vers zéro. Supposons donc les fluctuations petites, ce qui permet de les limiter à un hyperplan perpendiculaire à la direction  $n$ , et de négliger la contrainte sur  $S_{\alpha,i}^2$ . Ecrivons le hamiltonien décrivant ces fluctuations

(  $\sum_{\langle i,j \rangle}$  désigne une somme sur les plus proches voisins) :

$$H = \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (S_{\alpha,i} - S_{\alpha,j})^2.$$

A basse température on s'attend à ce que les fluctuations dominantes soient de grande longueur d'onde, et il est raisonnable de passer à la limite continue :

$$H \rightarrow \frac{1}{2} J \int d^2x \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\nabla \varphi_{\alpha})^2.$$

La fonction de corrélation correspondant à ce hamiltonien est  $T/Jk^2$  dans l'espace de Fourier, et la fluctuation  $\Delta$  recherchée est donnée par :

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle \varphi_{\alpha}^2(x) \rangle = (n-1) \langle \varphi_1^2(x) \rangle = \frac{(n-1) T}{J} \int_{\pi/L}^{\pi/a} \frac{d^2k}{(2\pi)^2 k^2} \quad (1)$$

où  $a$  est le pas du réseau et  $L$  sa taille. Les limites d'intégration dans (1) sont fixées par le cut-off ultraviolet  $\pi/a$ , et par un cut-off infrarouge  $\pi/L$ . En effet la longueur d'onde maximale d'une fluctuation dans un réseau de taille  $L$  est  $\sim L$  ; le mode  $\mathbf{k} = 0$  ne décrit pas une fluctuation, mais une translation d'ensemble de la variable  $\varphi$  :  $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \text{Cte}$ . En dimension  $D > 2$ , l'intégrale (1) est infrarouge convergente et l'hypothèse de petites fluctuations autour de l'état aimanté quand  $T \rightarrow 0$  est cohérente. Mais en dimension  $D = 2$

$$\Delta \sim \frac{(n-1) T}{2\pi J} \ln \frac{L}{a}$$

et  $\Delta \rightarrow \infty$  quand  $L \rightarrow \infty$  ; ceci reflète la divergence infrarouge de l'intégrale dans (1), et c'est un phénomène caractéristique de la dimension  $D = 2$ . L'hypothèse de petites fluctuations n'est pas cohérente : les fluctuations de grande longueur d'onde déstabilisent l'ordre à

longue distance en dimension  $D = 2$ . On peut également arriver à cette conclusion en étudiant  $\langle (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(0))^2 \rangle$  quand  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  à l'aide de (9.b).

Le paragraphe A est consacré à l'étude qualitative du modèle XY et à l'introduction de la notion de vortex (tourbillons). L'analyse par le groupe de renormalisation est effectuée au paragraphe B, tandis qu'au paragraphe C on étudie le cas  $n = 3$  (ou plus généralement  $n \geq 3$ ), c'est-à-dire le cas des « modèles- $\sigma$  non linéaires ».

## A. MODÈLE XY : ÉTUDE QUALITATIVE

Les études numériques et analytiques suggèrent que le cas  $n = 2$  est spécial, et que même s'il n'y a pas d'aimantation spontanée, il semble que l'on observe une transition de phase. Je vais d'abord donner un argument heuristique en faveur d'une telle transition avant de passer, au paragraphe suivant, à une description plus quantitative utilisant le groupe de renormalisation. Le spin du modèle XY au site  $i$  est un vecteur  $\mathbf{S}$  à deux composantes, que l'on peut prendre dans le plan du réseau ; le hamiltonien est invariant par rotation dans ce plan : en d'autres termes il présente la symétrie  $O(2)$  :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2)$$

où  $\theta_i$  est l'angle repérant l'orientation du spin au site  $i$  par rapport à une direction fixée (par exemple l'axe des  $x$ ). La fonction de partition est donc :

$$\begin{aligned} Z = \sum_{[\theta_i]} \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) &= \\ &= \int_0^{2\pi} \prod_i d\theta_i \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right). \quad (3) \end{aligned}$$

### A.1. Développement haute température

Le principe du développement haute température a déjà été exposé au chapitre I, paragraphe B.2 : lorsque  $T \rightarrow \infty$ , on développe l'exponentielle dans (3) en puissances de  $(J/T)$  et on cherche à identifier le (ou les) terme(s) qui donne(nt) la puissance minimale.

Essayons d'estimer par cette méthode la fonction de corrélation de deux spins, l'un au site  $O$  et l'autre au site  $p$  :

$$\langle \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_p \rangle = \langle \cos (\theta_0 - \theta_p) \rangle = \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle$$

où la dernière égalité provient de l'invariance de  $H$  lorsque  $\theta_i \rightarrow -\theta_i$ . On remarque que :

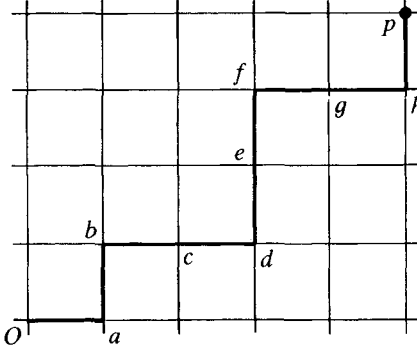


Figure 1. Chemin de  $O$  à  $p$ .

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi ;$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} = 0 . \quad (4)$$

Si l'on veut que l'intégrale sur  $\theta$  donne un résultat non nul, il faut associer à tout facteur  $e^{i\theta}$  un facteur  $e^{-i\theta}$ , à cause de (4). On voit donc qu'à chaque terme non

nul sera associé un chemin sur le réseau allant du site  $O$  au site  $p$  (figure 1) :

$$e^{i\theta_0} (e^{-i\theta_0} e^{i\theta_a}) e^{-i\theta_a} \dots e^{i\theta_h} (e^{-i\theta_h} e^{i\theta_p}) e^{-i\theta_p}$$

où chaque terme entre parenthèses provient d'un  $\cos (\theta_i - \theta_j)$  associé à un lien. Un tel terme donnera une contribution en  $\left(\frac{J}{T}\right)^N$  au développement à haute température, où  $N$  est le nombre de liens sur le chemin joignant les sites  $O$  et  $p$ . Le terme dominant sera obtenu en choisissant le plus court chemin entre  $O$  et  $p$  ;  $N$  est donc approximativement égal à  $r/a$ , où  $r$  est la distance entre les sites  $O$  et  $p$  :

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle \approx \left(\frac{J}{T}\right)^{r/a} = e^{-\frac{r}{a} \ln(T/J)} \quad (5)$$

ce qui correspond à un comportement exponentiel classique avec une longueur de corrélation :

$$\xi = \frac{a}{\ln(T/J)} .$$

Cet argument suggère qu'à température suffisamment élevée (dans le domaine où le développement haute température converge — et on peut prouver que le rayon de convergence est non nul), le système est dans une phase désordonnée classique.

### A.2. Développement basse température

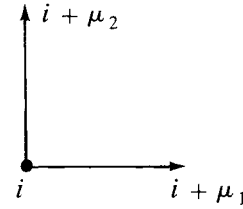
A basse température, il est raisonnable de penser que les fluctuations dominantes sont de grande longueur d'onde, c'est-à-dire que l'on peut remplacer  $H$  par :

$$H \rightarrow H_0 + \frac{1}{2} J \sum_{\langle i, j \rangle} (\theta_i - \theta_j)^2.$$

En effet, à l'approximation des fluctuations de grande longueur d'onde,  $\theta$  varie peu d'un site à l'autre et on peut remplacer  $\cos(\theta_i - \theta_j)$  par  $1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$ . Il est commode d'introduire la notation (cf. II.12) :

$$\partial_\mu \theta_i = \theta_{i+\mu} - \theta_i$$

où  $\mu$  peut prendre deux valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , et  $\theta_{i+\mu}$  est un plus proche voisin de  $\theta_i$ . Le hamiltonien approché peut s'écrire avec cette notation :



$$H = \frac{1}{2} J \sum_i \sum_\mu (\partial_\mu \theta_i)^2. \quad (6)$$

Il sera souvent commode de passer à la limite continue, avec le changement de notations :

$$i \rightarrow \mathbf{x}; \quad \theta_i \rightarrow \theta(\mathbf{x}); \quad \sum_\mu (\partial_\mu \theta_i)^2 \rightarrow [\nabla \theta(\mathbf{x})]^2$$

ce qui conduit à l'expression suivante de  $H$  :

$$H = \frac{1}{2} J \int d^2x (\nabla \theta)^2. \quad (7)$$

L'intégrale donnant  $\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle$  est une intégrale gaussienne :

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l d\theta_l \exp \left( i(\theta_0 - \theta_p) - \frac{J}{2T} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2 \right). \quad (8)$$

Notez que les limites d'intégration sur  $\theta$  ont été prises de  $-\infty$  à  $+\infty$  ; ce point sera rediscuté plus loin. La fonction de corrélation  $G_{ij}$  correspondant au hamiltonien gaussien  $\frac{1}{2} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2$  est donnée par

(exercice II.5) :

$$G_{ij} = a^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik \cdot (x_i - x_j)}}{4 - 2 \cos(k_1 a) - 2 \cos(k_2 a)} . \quad (9.a)$$

On ne sera pas étonné de rencontrer à nouveau une divergence infrarouge. Pour la régulariser, on retranche 1 à l'exponentielle, définissant la fonction  $\bar{G}(\mathbf{x})$  :

$$\bar{G}(\mathbf{x}) = a^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(e^{-ik \cdot \mathbf{x}} - 1)}{(4 - 2 \cos(k_1 a) - 2 \cos(k_2 a))} . \quad (9.b)$$

L'intégration gaussienne dans (8) donne le résultat :

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = e^{-\frac{T}{2J} [G_{00} + G_{pp} - 2 G_{0p}]} = e^{\frac{T}{J} \bar{G}(\mathbf{x})}$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur joignant le site  $O$  au site  $p$ . A la limite continue,  $\bar{G}(\mathbf{x})$  (ou  $G(\mathbf{x})$ ) vérifie :

$$-\nabla^2 \bar{G}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (10)$$

qui est l'équation de Poisson à deux dimensions. Pour trouver la solution de cette équation, remarquons que le potentiel d'un fil chargé rectiligne infini vérifie, dans un plan perpendiculaire au fil, l'équation :

$$-\nabla^2 G(\mathbf{x}) = \lambda \delta(\mathbf{x})$$

où  $\lambda$  est la densité de charge linéaire du fil. Un exercice élémentaire d'électrostatique utilisant le théorème de Gauss montre que le champ électrique correspondant est :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2\pi \|\mathbf{x}\|} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

d'où l'on déduit le potentiel  $-\frac{\lambda}{2\pi} \ln r + \text{Cte}$ . La solution de (10) est donc (\*) :

$$\bar{G}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + \text{Cte} \quad (11)$$

ce qui donne le comportement de la fonction de corrélation à grande distance :

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = e^{-\frac{T}{J} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a}} = \left( \frac{a}{r} \right)^{T/2\pi J} . \quad (12)$$

(\*) On peut montrer que cette constante vaut, à grande distance :  $-(2\pi)^{-1} \left( \gamma + \frac{3}{2} \ln 2 \right) \approx -1/4$ , où  $\gamma (= 0.577...)$  est la constante d'Euler.

La fonction de corrélation décroît comme une loi de puissance avec un exposant dépendant de la température : on a donc une *ligne de points critiques*, avec un exposant  $\eta$  dépendant de la température :

$$\eta(T) = \frac{T}{2\pi J}. \quad (13)$$

L'équation (12) montre aussi que le modèle XY ne donne pas d'aimantation spontanée : dans le cas contraire on aurait en effet :

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \langle \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_p \rangle \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \langle \mathbf{S}_0 \rangle \langle \mathbf{S}_p \rangle = \mathbf{M}^2 \neq 0.$$

Si ces arguments heuristiques sont corrects, il doit exister un point de transition où le comportement en loi de puissance de la fonction de corrélation se transforme en comportement exponentiel. Cependant on peut se demander pour quelle raison l'argument basse température devient incorrect au-dessus d'un point de transition éventuel. Remarquons que dans l'équation (8), les limites d'intégration vont de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et on peut imaginer que si les fluctuations deviennent grandes, la périodicité de  $\theta$  peut jouer un rôle. C'est ce qui se produit effectivement : des excitations de caractère topologique, faisant intervenir la périodicité de  $\theta$ , arrivent à détruire le quasi-ordre à basse température. Ces excitations sont les vortex, ou tourbillons, dont le rôle a été élucidé pour la première fois par Kosterlitz et Thouless.

### A.3. Rôle des vortex

Considérons une configuration de spins telle que  $\theta_i$  soit égal à  $\pi/2 +$  l'angle polaire  $\varphi$  par rapport à une certaine origine  $O$  (figure 2). (Le choix de  $\pi/2$  est arbitraire ; toute constante ferait aussi bien l'affaire). En coordonnées polaires, le gradient de  $\theta$  vaut :

$$\nabla \theta = \left( 0, \frac{1}{r} \right) = \frac{\hat{\phi}}{r}.$$

Si  $C$  est un contour fermé entourant le point  $O$  :

$$\oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi.$$

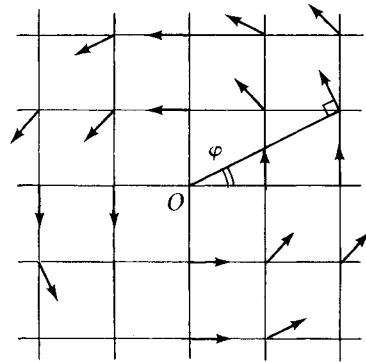


Figure 2. Un vortex.

Une telle configuration de spins est un exemple de vortex. Plus

généralement, comme  $\theta$  est une variable périodique, on aura :

$$\oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = 2 \pi q \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où  $q$  est la vorticité (ou intensité du vortex).

Calculons l'énergie associée au vortex de la figure 2 :

$$E \simeq \frac{1}{2} J \int (\nabla \theta)^2 d^2x = \frac{1}{2} J \int \frac{(\hat{\phi})^2}{r^2} d^2x = \pi J \ln \frac{L}{a}. \quad (14)$$

Naturellement les approximations faites pour obtenir (14) ne sont valables que suffisamment loin du centre  $O$  du vortex et il faudrait rajouter à (14) une constante à calculer numériquement.

Comme le centre du vortex peut être choisi n'importe où sur le réseau, l'entropie associée à la création d'un vortex est :

$$S = \ln (L/a)^2$$

puisqu'il y a  $(L/a)^2$  sites. L'énergie libre associée à la création d'un vortex est :

$$F = E - TS = (\pi J - 2 T) \ln \frac{L}{a}$$

et on voit que les vortex vont déstabiliser le quasi-ordre pour  $T > T_c = \pi J/2$ . En réalité les vortex sont créés par paires, et il serait plus correct de raisonner sur la création de paires (cf. exercice 1).

Il est maintenant possible de résumer la description des phases du système telle qu'elle a été proposée par Kosterlitz et Thouless :   basse température, les fluctuations de grande longueur d'onde, aussi appelées ondes de spin, sont les seules configurations importantes, et les corrélations décroissent en loi de puissance : on obtient un système quasi ordonné, avec des îlots d'aimantation de toutes les tailles. Il n'existe pas de vortex « libres », mais on peut trouver des paires de vortex de vorticité opposée, qui affectent le système uniquement sur de petites distances. Quand la température croît, la taille des paires vortex-antivortex augmente, et diverge à  $T = T_c$  où apparaissent des vortex libres. Ces vortex déstabilisent le quasi-ordre des ondes de spin et la fonction de corrélation décroît exponentiellement.

## B. ANALYSE PAR LE GROUPE DE RENORMALISATION

Dans le modèle XY, les ondes de spin restent couplées aux vortex, ce qui rend un calcul complet impossible. C'est pourquoi nous allons introduire un modèle très voisin du modèle XY, le modèle de Villain, où les ondes de spin sont découplées des vortex. Le modèle de Villain possède les mêmes caractéristiques topologiques que le modèle XY et il est raisonnable de penser (quoique cela n'ait pas été prouvé rigoureusement) que ses phases sont identiques à celles du modèle XY.

### B.1. Modèle de Villain <sup>(2)</sup>

Ecrivons pour un lien une décomposition de Fourier :

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} I_n(\beta) e^{-\beta} \quad (15)$$

où  $\beta = J/T$  et  $I_n(\beta)$  est une fonction de Bessel d'argument imaginaire :

$$I_n(\beta) = \int_0^{2\pi} e^{\beta \cos \theta} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} . \quad (16)$$

Lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ),  $e^{-\beta} I_n(\beta)$  peut être approché par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp(-n^2/2\beta)$  et :

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} e^{-n^2/2\beta} .$$

Ce résultat aurait pu être obtenu directement en remarquant que pour  $\beta \rightarrow \infty$ , la contribution principale à l'intégrale (16) vient de la région  $\theta \rightarrow 0$  et :

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} \simeq e^{-\frac{1}{2}\beta\theta^2} .$$

Le point important dans (17) est que l'approximation faite, même si elle n'est valable que pour  $T \rightarrow 0$ , préserve le caractère périodique de la variable  $\theta$ . Négigeant la constante multiplicative  $(2\pi\beta)^{-1/2}$  on obtien-

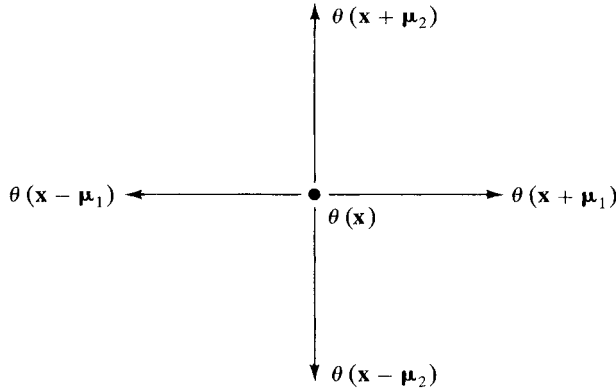
dra le modèle de Villain en écrivant :

$$\exp(-\beta (1 - \cos (\partial_\mu \theta (\mathbf{x})))) \rightarrow \sum_{n_\mu(\mathbf{x}) = -\infty}^{n_\mu(\mathbf{x}) = +\infty} \exp(in_\mu \partial_\mu \theta (\mathbf{x})) \exp(-n_\mu^2/2 \beta)$$

où  $n_\mu(\mathbf{x})$  est un vecteur de composantes entières  $n_1(\mathbf{x})$  et  $n_2(\mathbf{x})$  associé à chaque site  $\mathbf{x}$ . La fonction de partition du modèle de Villain est donc (il n'y a pas de sommation sur les indices répétés dans (18)) :

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_{\mathbf{x}} d\theta(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{x}, \mu} \sum_{n_\mu(\mathbf{x}) = -\infty}^{\infty} \exp(in_\mu \partial_\mu \theta(\mathbf{x})) \exp(-n_\mu^2/2 \beta). \quad (18)$$

Examinons l'intégrale sur  $\theta(\mathbf{x})$  : on trouve les termes suivants dans l'exponentielle :



$$n_1(\mathbf{x})[\theta(\mathbf{x} + \mu_1) - \theta(\mathbf{x})] + n_2(\mathbf{x})[\theta(\mathbf{x} + \mu_2) - \theta(\mathbf{x})] + n_1(\mathbf{x} - \mu_1)[\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x} - \mu_1)] + n_2(\mathbf{x} - \mu_2)[\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x} - \mu_2)].$$

L'intégrale sur  $\theta(\mathbf{x})$  donne un résultat non nul seulement si :

$$[n_1(\mathbf{x}) - n_1(\mathbf{x} - \mu_1)] + [n_2(\mathbf{x}) - n_2(\mathbf{x} - \mu_2)] = 0$$

c'est-à-dire si :

$$\sum_{\mu} \partial_\mu n_\mu(\mathbf{x}) = 0.$$

Autrement dit  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  est un vecteur à « divergence discrète » nulle. Il

pourra donc s'écrire comme un rotationnel ( $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ )

$$n_\mu(\mathbf{x}) = \sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu p(\mathbf{x})$$

où  $p(\mathbf{x})$  est un champ scalaire à valeurs entières. La fonction de partition (18) devient (à une constante multiplicative près) :

$$Z = \sum_{p(\mathbf{x})=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{x}, \mu} (\partial_\mu p(\mathbf{x}))^2 \right). \quad (19)$$

Utilisons maintenant la formule de sommation de Poisson (\*) :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi g(\varphi) e^{2i\pi m\varphi}$$

pour transformer  $Z$  en :

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mathbf{x}} d\varphi(\mathbf{x}) \sum_{m(\mathbf{x})=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2\beta} \sum_{\mathbf{x}, \mu} (\partial_\mu \varphi)^2 + 2i\pi \sum_{\mathbf{x}} m(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \right)$$

(\*) Formule de sommation de Poisson : soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans la bande  $-\rho < \text{Im } z < \rho$  et

$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu + z)$$

supposée également holomorphe.  $F(z)$  étant holomorphe et de période 1 possède un développement de Fourier uniformément convergent :

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2i\pi n z} \\ A_n &= \int_0^1 dx F(x) e^{-2i\pi n x} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx f(\nu + x) e^{-2i\pi n x} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_\nu^{\nu+1} dx f(x) e^{-2i\pi n x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2i\pi n x} \\ F(0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2i\pi n x}. \end{aligned}$$

Mais  $F(0)$  est également donné par :

$$F(0) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu).$$

où  $m(\mathbf{x})$  est un champ scalaire à valeurs entières. Il est maintenant possible d'intégrer sur  $\varphi$  :

$$Z = Z_{SW} \sum_{m(\mathbf{x}) = -\infty}^{\infty} \exp \left( -2 \pi^2 \beta \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} m(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') m(\mathbf{x}') \right) \quad (20)$$

où  $Z_{SW}$ , qui est le déterminant provenant de l'intégration sur  $\varphi$ , est la fonction de partition des ondes de spin (spin waves) : en effet si  $m = 0$ , on trouve exactement la fonction de partition des ondes de spin (remarquez que les limites d'intégration sur  $\varphi$  sont maintenant  $-\infty < \varphi < +\infty$ ). Dans le modèle de Villain, les ondes de spins et les vortex sont découplés :

$$H = H_{SW} + H_V$$

ou :

$$Z = Z_{SW} Z_V$$

alors qu'un tel découplage n'est pas réalisé dans le modèle  $XY$  (reste à identifier  $m(\mathbf{x})$  avec la vorticité, ce qui sera fait un peu plus loin). Dans l'expression (20) il est commode de revenir à la fonction de cor relation régularisée  $\bar{G}(\mathbf{x})$  de (9.b) en écrivant :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= [G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(0)] + G(0) \\ &= \bar{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = Z_{SW} \sum_{m(\mathbf{x})} \exp \left( -2 \pi^2 \beta G(0) \left( \sum m(\mathbf{x}) \right)^2 - \right. \\ \left. -2 \pi^2 \beta \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} m(\mathbf{x}) \bar{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') m(\mathbf{x}') \right). \end{aligned}$$

Comme  $G(0) \sim \frac{1}{2\pi} \ln(L/a)$ , on constate qu'à la limite  $L \rightarrow \infty$ , seul le terme de vorticité nulle :

$$\sum_{\mathbf{x}} m(\mathbf{x}) = 0$$

donnera une contribution. Ceci permet d'écrire la forme finale de la fonction de partition :

$$\begin{aligned} Z = Z_{SW} \sum'_{m(\mathbf{x})} \times \\ \times \exp \left( -2 \pi^2 \beta \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} m(\mathbf{x}) \bar{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') m(\mathbf{x}') \right) = Z_{SW} Z_V \quad (21) \end{aligned}$$

    $\sum'$  indique que l'on doit sommer seulement sur les configurations de

vorticité totale nulle. A grande distance, on peut montrer qu'une bonne approximation de  $\bar{G}(\mathbf{x})$  est (cf. note page 156) :

$$\bar{G}(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{4}. \quad (22)$$

Tenant compte de (22) et de la relation :

$$\sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'} m(\mathbf{x}) m(\mathbf{x}') + \sum_{\mathbf{x}} m^2(\mathbf{x}) = 0$$

on peut récrire la fonction de partition :

$$Z = Z_{SW} \sum_{m(\mathbf{x})} \exp \left( -\frac{\pi^2 \beta}{2} \sum_{\mathbf{x}} m^2(\mathbf{x}) + \pi \beta \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'} m(\mathbf{x}) \ln \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{a} \right\| m(\mathbf{x}') \right). \quad (23)$$

Le terme  $\exp \left( -\frac{\pi^2 \beta}{2} \sum_{\mathbf{x}} m^2(\mathbf{x}) \right)$  peut être interprété comme provenant d'un potentiel chimique  $\pi^2 \beta / 2$  ; on l'écrit conventionnellement :

$$\exp \left( \ln y \sum_{\mathbf{x}} m^2(\mathbf{x}) \right)$$

et dans le modèle de Villain :  $y = y_0 = \exp \left( -\frac{\pi^2 \beta}{2} \right)$ . Ce terme permet de contrôler la densité de vortex. En effet si  $y \rightarrow 0$ , le potentiel chimique défavorise la création de vortex. Quand  $y$  croît, le nombre de vortex augmente.

Pour identifier  $m(\mathbf{x})$  avec la vorticité, il faut étudier la loi de force entre vortex. On peut montrer facilement (exercice 1) que deux vortex tels que ceux dessinés sur la figure 2 s'attirent ou se repoussent (selon le signe relatif de la vorticité) suivant une loi de force déterminée par le potentiel (22). Cette remarque permet l'identification souhaitée.

Il est utile de noter l'analogie avec un gaz de Coulomb à deux dimensions : la fonction de partition (23) est celle d'un gaz bidimensionnel de charges  $2\pi\sqrt{J}m(\mathbf{x})$  disposées aux nœuds d'un réseau, avec un terme de potentiel chimique contrôlant la densité de ces charges. Lorsque  $y \rightarrow 0$ , il existe quelques paires de charges proches l'une de l'autre, et le système est un diélectrique. Lorsque  $y$  croît, il apparaît de plus en plus de charges, la taille moyenne des paires croît et on finit par obtenir des charges libres, c'est-à-dire un plasma.

### B.2. Groupe de renormalisation pour le modèle XY

Ecrivons la fonction de partition des vortex en présence d'un potentiel chimique  $y$  (avec le changement de notations  $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{z}$ ) :

$$Z_V = \sum_{m(\mathbf{x})} ' \exp \left( \pi \beta \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{z}} m(\mathbf{x}) \ln \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{a} \right\| m(\mathbf{z}) + \ln y \sum_{\mathbf{x}} m^2(\mathbf{x}) \right) .$$

Lorsque  $y \rightarrow 0$ , les configurations dominantes sont celles à zéro vortex et à deux vortex de vorticité opposée  $\pm 1$ . On aura par exemple un vortex  $(+1)$  au point  $\mathbf{x}$  et un vortex  $(-1)$  au point  $\mathbf{z}$ . La somme sur les configurations devient donc une somme sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$ , et l'on trouve :

$$Z_V \simeq 1 + e^{2 \ln y} \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{z}} e^{-2 \pi \beta \ln \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{a} \right\|}$$

soit en passant à une formulation continue :

$$Z_V \simeq 1 + \frac{y^2}{a^4} \iint_{(a)} d^2x d^2z \left\| \frac{a}{\mathbf{x} - \mathbf{z}} \right\|^{2 \pi \beta} . \quad (24)$$

La notation  $\iint_{(a)}$  implique que l'on doit avoir  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| > a$  dans (24) : la signification physique du cut-off en  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$  est que les centres de deux vortex ne doivent pas être à une distance inférieure à  $a$ . Effectuons maintenant une dilatation du cut-off :  $a \rightarrow sa$  :

$$Z'_V = 1 + \frac{y^2}{a^4} \iint_{(sa)} d^2x d^2z \left\| \frac{a}{\mathbf{x} - \mathbf{z}} \right\|^{2 \pi \beta} .$$

On revient au cut-off initial en posant :  $x = sx'$ ,  $z = sz'$  :

$$Z'_V = 1 + \frac{y^2}{a^4} s^{4-2 \pi \beta} \iint_{(a)} d^2x' d^2z' \left\| \frac{a}{\mathbf{x}' - \mathbf{z}'} \right\|^{2 \pi \beta} . \quad (25)$$

Comparant les équations (24) et (25) on constate que dans cette transformation du groupe de renormalisation, le paramètre  $y$  se transforme en  $y'$  :

$$y^2 \rightarrow y'^2 = s^{4-2 \pi \beta} y^2 . \quad (26)$$

Pour  $4 - 2 \pi \beta < 0$ , c'est-à-dire si

$$T < T_c = \frac{\pi J}{2} \quad (27)$$

$y$  décroît dans une TGR : on atteint donc la zone où le nombre de vortex  $\rightarrow 0$ . Au contraire si  $T > T_c$ , le nombre de vortex croît dans une TGR. Lorsque  $T < T_c$ , le comportement à longue distance est décrit par la situation où  $y = 0$ , c'est-à-dire par des ondes de spin pures : la fonction de corrélation décroît comme une puissance. Au contraire pour  $T > T_c$ , le comportement à longue distance est décrit par une situation où le nombre de vortex est grand : la fonction de corrélation décroît exponentiellement (figure 3).

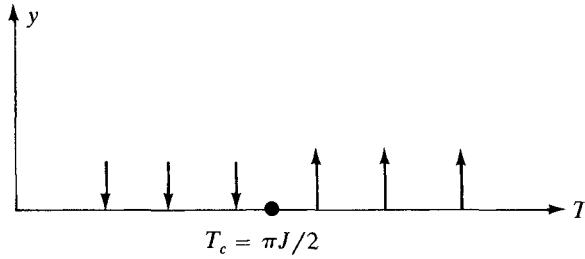


Figure 3. Diagramme de flot pour  $y \rightarrow 0$ .

On peut donner une interprétation de l'équation (26) dans le langage du gaz de Coulomb ; à basse température, les vortex sont liés en paires, et l'augmentation de  $a$  élimine les paires de vortex dont les centres sont très proches : la densité effective de vortex diminue. A haute température, les vortex ne sont pas liés en paires, et l'augmentation de  $a$  accroît leur densité effective.

L'analogie avec le gaz de Coulomb suggère que l'équation (26) ne décrit qu'une partie du groupe de renormalisation : les paires très liées diminuent les forces entre les vortex éloignés par effet d'écran. Cet effet peut être calculé et conduit à l'équation :

$$\frac{dT}{d \ln s} = y^2.$$

Les équations complètes du groupe de renormalisation sont finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy^2}{d \ln s} = 2 \left( 2 - \frac{\pi J}{T} \right) y^2 \\ \frac{dT}{d \ln s} = y^2. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (28.a) \\ (28.b) \end{array}$$

Le point remarquable est évidemment à :

$$y = 0 ; \quad T = T_c = \frac{\pi J}{2}. \quad (29)$$

Au voisinage de ce point, on vérifie aisément que :

$$\frac{d}{d \ln s} \left[ \left( 2 - \frac{\pi J}{T} \right)^2 - \frac{4}{\pi J} y^2 \right] = 0$$

et les trajectoires décrites dans une suite de TGR sont donc de la forme :

$$\left( 2 - \frac{\pi J}{T} \right)^2 - \frac{4}{\pi J} y^2 = \text{Cte} .$$

Il est immédiat de tracer la forme des trajectoires au voisinage du point (29) (figure 4), en posant par exemple  $T = T_c + x$ .

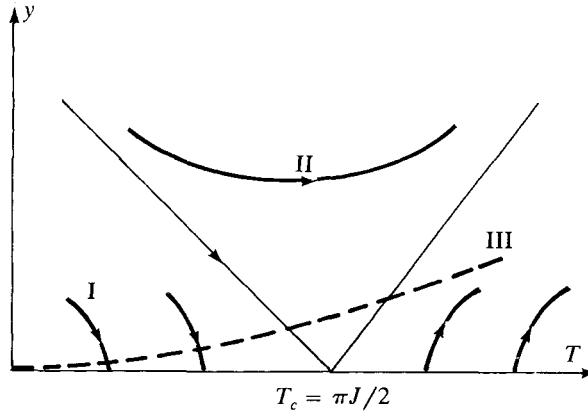


Figure 4. Diagramme de flot du modèle XY ;  
--- : ligne physique du modèle de Villain.

Considérons par exemple une trajectoire de la région I : comme deux points sur une même trajectoire donnent une physique à longue distance identique, tous les points de la région I définissent des théories dont le comportement à longue distance est le même que celui des théories ayant  $y = 0$ , qui correspondent à des ondes de spin pures. On retrouve donc la ligne de points fixes.

Une analyse plus poussée montre que pour  $T > T_c$ , la longueur de corrélation  $\xi(T)$  (pour  $T > T_c$ ) se comporte comme :

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c^+}{\sim} \exp \left[ b \left( \frac{T_c}{T - T_c} \right)^{1/2} \right]$$

et que l'énergie libre est en :

$$\exp \left( -2b \left( \frac{T_c}{T - T_c} \right)^{1/2} \right).$$

Toutes les dérivées par rapport à  $T$  de l'énergie libre sont donc continues à  $T = T_c$ . On peut appeler une telle transition de phase « transition d'ordre infini ».

Enfin à  $T = T_c$  la fonction de corrélation décroît en  $r^{-1/4}$ , conformément à la prédiction heuristique du paragraphe A.

### C. MODÈLES- $\sigma$ NON LINÉAIRES

Lorsque  $n \geq 3$  (toujours dans le cas bidimensionnel) on a affaire aux modèles appelés « modèles- $\sigma$  non linéaires ». L'analyse de ces modèles par le groupe de renormalisation est instructive, car *la température est dans ce cas une variable marginale*, et on peut illustrer de façon non triviale les développements du paragraphe III-F. Pour fixer les idées je me placerai dans le cas  $n = 3$  (modèle de Heisenberg) ; il sera facile de généraliser à  $n$  quelconque.

Le spin  $\mathbf{S}$  étant un spin à trois composantes, la fonction de partition s'écrit (on remarque la symétrie  $O(3)$  du hamiltonien) :

$$Z = \int \prod_{\mathbf{x}} d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \exp \left( -\frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{x}, \mu} (\partial_{\mu} \mathbf{S}(\mathbf{x})) \cdot (\partial_{\mu} \mathbf{S}(\mathbf{x})) \right) \quad (30)$$

la « constante de couplage »  $g$  étant directement proportionnelle à la température :

$$g = T/J.$$

Comme dans le modèle d'Ising à 1 dimension, il n'y a pas de transition de phase à température finie. Cependant la longueur de corrélation tend vers l'infini quand  $T$  (ou  $g$ ) tend vers zéro, et on peut considérer  $T = 0$  comme la température critique.

Comme d'habitude il est commode de passer à une formulation continue ; toutefois on souhaite conserver la condition  $\mathbf{S}^2 = 1$  et la symétrie  $O(3)$  du hamiltonien de départ. On obtient donc une formulation continue très différente de celle de Ginzburg-Landau :

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2g} (\nabla \cdot \mathbf{S})^2 + \frac{1}{2f} ((\nabla \cdot \mathbf{S})^2)^2 + \dots \right] = \int d^2x \mathcal{H}(\mathbf{x}) \quad (31)$$

avec la notation :

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (\nabla \cdot \mathbf{S}_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x_2} \right)^2 \right].$$

En raison de la contrainte  $S^2 = 1$ , seules des puissances de  $(\nabla \cdot \mathbf{S})^2$ , ou de dérivées d'ordre plus élevé, peuvent apparaître dans (31).

Lorsque  $g \rightarrow 0$ , on observe de grands domaines où l'orientation des spins est quasiment uniforme, car le système a tendance à s'aimanter spontanément au voisinage du point critique. Il y a évidemment des fluctuations autour de cette orientation. Nous sommes conduits à distinguer des fluctuations de grande longueur d'onde, correspondant à une rotation lente de l'aimantation, et des fluctuations de courte longueur d'onde autour de cette évolution lente. Décomposons  $\mathbf{S}$  en une composante  $\mathbf{S}_l$  variant lentement, et telle que  $\mathbf{S}_l$  soit d'ordre 1, et une composante  $\mathbf{S}_r$  fluctuant sur de courtes distances. D'après le raisonnement fait dans l'introduction, on s'attend à ce que les fluctuations de  $\mathbf{S}_r$  soient d'ordre  $g$  (cf. (1)). Il sera commode de paramétrer  $\mathbf{S}$  de la façon suivante :

$$S_1 = \sqrt{1 - S_3^2} \cos \theta \quad (32.a)$$

$$S_2 = \sqrt{1 - S_3^2} \sin \theta \quad (32.b)$$

en prenant  $\mathbf{S}_l$  dans le plan (1, 2). La paramétrisation (32) respecte la condition  $S^2 = 1$  ;  $S_3$  fluctue sur des courtes distances,  $\theta$  sur des courtes et longues distances ( $\theta_r$  et  $\theta_l$ ).

La densité de hamiltonien devient :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2g} \left[ (1 - S_3^2) (\nabla \theta)^2 + \frac{(\nabla S_3)^2}{1 - S_3^2} \right] \quad (33)$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur dans (31). Comme on s'attend à ce que  $S_3 \sim \sqrt{g}$ , on peut écrire pour  $g \rightarrow 0$  :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2g} [(\nabla \cdot \mathbf{S}_3)^2 + (1 - S_3^2) (\nabla \theta)^2 + S_3^2 (\nabla S_3)^2 + \dots].$$

Finalement on fait un changement d'échelle sur  $S_3$  de façon à éliminer le facteur multiplicatif  $1/g$  :

$$S_3(\mathbf{x}) \rightarrow \sqrt{g} h(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ (\nabla h)^2 + \left( \frac{1}{g} - h^2 \right) (\nabla \theta)^2 + g h^2 (\nabla h)^2 + \dots \right]. \quad (34)$$

La forme (34) de  $\mathcal{H}$  présente l'intérêt suivant : les fluctuations de  $h$  affectent celles de  $\theta$  (par l'intermédiaire du coefficient de  $(\nabla\theta)^2$  dans (34)), mais celles de  $\theta$  ne réagissent pas sur  $h$ . Pour  $g \rightarrow 0$ , le dernier terme de (34) peut être négligé.

Effectuons maintenant l'intégration sur les fluctuations de vecteur d'onde compris entre  $\Lambda/s$  et  $\Lambda$  ; organisons le calcul de  $Z$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z = \int_{0 \leq k \leq \Lambda} \mathcal{D}\theta(k) \exp\left(-\frac{1}{2g} \int d^2x (\nabla\theta)^2\right) \int_{0 \leq k \leq \Lambda/s} \mathcal{D}h(k) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x (\nabla h)^2\right) \int_{\Lambda/s \leq k \leq \Lambda} \mathcal{D}h(k) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x [(\nabla h)^2 - h^2(\nabla\theta)^2]\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Evaluons la dernière intégrale de (35), en remarquant que  $(\nabla\theta)^2$  est petit ( $\sim g$ ) :

$$\begin{aligned} I = \int_{\Lambda/s \leq k \leq \Lambda} \mathcal{D}h(k) \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x (\nabla h)^2\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2} \int d^2x (\nabla\theta)^2 h^2\right) \simeq \int_{\Lambda/s \leq k \leq \Lambda} \mathcal{D}h(k) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2x (\nabla h)^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} \int d^2x h^2 (\nabla\theta)^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

A une constante près,  $I$  est donnée par :

$$I = 1 + \frac{1}{2} \int d^2x \bar{G}_s(0) (\nabla\theta)^2 \simeq \exp\left(\frac{1}{2} \int d^2x \bar{G}_s(0) (\nabla\theta)^2\right) \quad (36)$$

où :

$$\bar{G}_s(0) = \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2 k^2} = \frac{1}{2\pi} \ln s, \quad (37)$$

tandis que l'intégration sur  $\theta$ , donne une constante multiplicative. Après cette intégration sur les courtes longueurs d'onde, le terme en  $(\nabla\theta)^2$  du hamiltonien est affecté d'un coefficient :

$$\frac{1}{2g} - \frac{1}{4\pi} \ln s = \frac{1}{2g'}$$

et la nouvelle constante de couplage  $g'$  vaut :

$$\frac{1}{g'} = \frac{1}{g} - \frac{1}{2\pi} \ln s. \quad (38)$$

Cette équation se transforme immédiatement en équation différentielle pour la constante de couplage :

$$\frac{dg(s)}{d \ln s} = \frac{g^2(s)}{2\pi}. \quad (39)$$

Si l'on se souvient de la définition (III.83) de la fonction  $\beta(g)$ , l'interprétation de (39) est immédiate : on vient juste de calculer le premier terme du développement perturbatif de  $\beta(g)$  :

$$\beta(g) = -\frac{g^2}{2\pi} + O(g^3).$$

Les équations (38) ou (39) montrent que l'intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde conduit à une augmentation de la température ; cette intégration fait donc correspondre au système initial un système à plus haute température possédant le même comportement à longue distance. Si les intégrations successives conduisent à une température tendant vers l'infini, les propriétés à longue distance seront celles d'une théorie à haute température, et la fonction de corrélation se comportera exponentiellement à toute température. Pour que cette conclusion soit correcte, il faut que la fonction  $\beta(g)$  ne possède pas de zéro sur l'axe  $g > 0$  (cf. chapitre VII), mais il est évidemment impossible de décider de cette éventualité par un calcul perturbatif.

De façon quantitative, la longueur de corrélation  $\xi(g')$  à la température  $T' (= g'J)$  est donnée en fonction de la longueur de corrélation  $\xi(g)$  à la température  $T (= gJ)$  par :

$$\xi(g') = \frac{1}{s} \xi(g).$$

D'après la définition de la fonction  $\beta(g)$  :

$$s = \exp \left( - \int_g^{g'} \frac{dg''}{\beta(g'')} \right)$$

et donc :

$$\xi(g') = \xi(g) e^{\int_g^{g'} \frac{dg''}{\beta(g'')}}. \quad (40)$$

En utilisant l'expression (39) de  $\beta(g)$ , en prenant  $g' \sim 1$ ,  $\xi(g') \sim 1$  et  $g \rightarrow 0$ , on trouve :

$$\xi(g) \simeq e^{2\pi/g}. \quad (41)$$

Le groupe de renormalisation montre que le comportement de

$\xi(g)$  pour  $g \rightarrow 0$  est *non perturbatif* : à cause de la non-analyticité à  $g = 0$ , jamais la théorie des perturbations ne pourrait donner le résultat correct. On remarquera également que le comportement de  $\xi$  pour  $T \rightarrow 0$  est analogue à celui du modèle d'Ising à 1 dimension (cf. I.11).

Le terme d'ordre  $g^3$  de la fonction  $\beta(g)$  a été calculé :

$$\beta(g) = -\beta_0 g^2 - \beta_1 g^3 + O(g^4)$$

ce qui permet de donner pour  $\xi(g)$  une expression plus précise que (41) (exercice 2).

Pour conclure, notons une interprétation géométrique du résultat (39) : l'intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde conduit à une variable de spin  $S'$  telle que  $\|S'\| < 1$ . Pour ramener le hamiltonien à sa forme initiale, il faut faire un changement d'échelle sur le spin :  $S' \rightarrow S'/\|S'\|$ , qui peut être absorbé dans une modification de la constante de couplage :  $g \rightarrow g/\|S'\|^2$ . On retrouve bien le fait que la température a augmenté dans l'opération.

Lorsque  $n \geq 3$ , on remarque que les seules composantes du spin qui contribuent à la renormalisation sont celles qui sont perpendiculaires au plan du mouvement d'ensemble lent ; il y a donc  $(n - 2)$  composantes qui contribuent effectivement à la renormalisation de la constante de couplage et l'équation (39) devient :

$$\frac{dg(s)}{d \ln s} = \frac{(n - 2) g^2}{2 \pi} + O(g^3). \quad (42)$$

Les modèles- $\sigma$  non linéaires possèdent la propriété de liberté asymptotique (cf. VII-C.2) :  $g$  est une fonction décroissante du cut-off. Cette propriété permet des analogies intéressantes avec les théories de jauge non abéliennes (chapitre XIII).

## EXERCICES

1) On se propose d'examiner une paire vortex-antivortex créée dans une configuration telle que  $\theta \rightarrow \theta_\infty$  dans toutes les directions du plan.

(a) En examinant la configuration de la figure 5 (où  $\theta_\infty = \pi$ ) montrer que l'énergie de la paire de vortex est qualitativement :

$$E \simeq 2 \pi J \ln r$$

où  $r$  est la distance entre les deux centres.

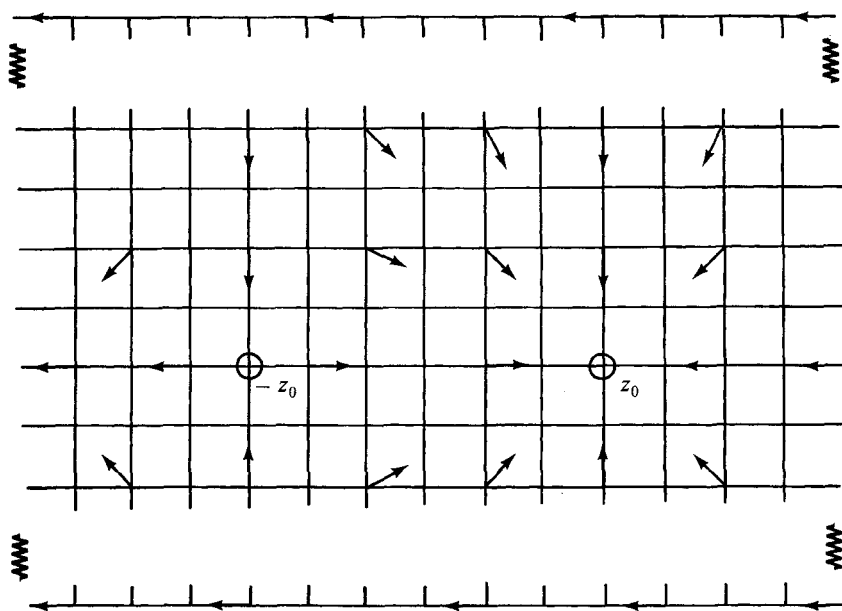


Figure 5. Une configuration vortex-antivortex.

(b) On procède de façon plus quantitative en se donnant  $\theta$  par la relation  $(z = x + iy)$  <sup>(3)</sup> :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta_\infty} \left\{ \frac{(z - z_0)}{|z - z_0|} \frac{|z + z_0|}{(z + z_0)} \right\}.$$

Tracer qualitativement l'allure de  $\theta$ , et montrer que l'expression précédente correspond bien à un vortex  $q = +1$  en  $z_0$  et un vortex  $q = -1$  en  $-z_0$ . (On pourra choisir  $z_0$  sur l'axe réel.)

(c) Afin d'évaluer le hamiltonien, il est commode de définir la fonction analytique :

$$F(z) = e^{i\theta_\infty} (z - z_0) / (z + z_0) = e^{i\theta_\infty} \rho e^{i\theta}.$$

Pour calculer  $\int d^2x (\nabla \theta)^2$ , il faut évidemment exclure les points singuliers que l'on entoure par deux cercles  $C_i$  de rayon  $a$ , définissant ainsi un domaine  $D$ . Montrer que les conditions de Cauchy-Riemann pour  $\ln F$  dans  $D$  impliquent :

$$\nabla^2 \ln \rho = \nabla^2 \theta = 0; \quad (\nabla \theta)^2 = (\nabla \ln \rho)^2 = \nabla(\ln \rho \nabla \ln \rho)$$

et en déduire :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} J \int d^2x (\nabla \theta)^2 = -\frac{1}{2} J \sum_i \int_{C_i} d\ell \ln \rho (\mathbf{n} \cdot \nabla \ln \rho) \\ &= -2 \pi J \ln |2 z_0| - 2 \pi \beta \ln a. \end{aligned}$$

(d) Utiliser cette expression pour calculer l'énergie libre d'une paire et retrouver l'argument qualitatif du paragraphe A.3.

2) Montrer que si la fonction  $\beta(g)$  du modèle- $\sigma$  non linéaire est donnée par le développement perturbatif :

$$\beta(g) = -\beta_0 g^2 - \beta_1 g^3 + O(g^4)$$

on obtient pour  $\xi(g)$  :

$$\xi(g) = (\text{Cte}) g^{-\beta_1/\beta_0^2} e^{-1/\beta_0 g} (1 + O(g)).$$

La seule origine de la non-analyticité provient des deux premiers termes de  $\beta(g)$ .

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Les articles de Kogut (sections VII et VIII.C) et Shenker (sections 5 et 6) sont particulièrement clairs et ont largement inspiré le présent exposé. On pourra aussi consulter l'article original de J. Kosterlitz et D. Thouless, *J. Phys.*, **C6**, 118 (1973). L'analogie avec le gaz de Coulomb permet également une analyse par le groupe de renormalisation : J. Kosterlitz, *J. Phys.*, **C7**, 1046 (1974) et A. Young, *Phys. Rev.*, **B19**, 1855 (1979).

<sup>(1)</sup> N. Mermin et H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1133 (1966).

<sup>(2)</sup> J. Villain, *J. Phys.*, **C36**, 581 (1975).

<sup>(3)</sup> C. Itzykson : livre en préparation.



## DEUXIÈME PARTIE

### **Théorie des perturbations et renormalisation : champ scalaire euclidien**



## CHAPITRE V

# Développement perturbatif Diagrammes de Feynman

Ce chapitre se propose de développer de façon systématique des concepts et des techniques qui ont été introduits dans les trois premiers chapitres : fonction de corrélation et fonction génératrice (I-D.1), transformation de Legendre (I-D.5), développement perturbatif et développement en nombre de boucles (II-D.2, III-D.3 et III-E.3). Les outils utilisés seront la fonctionnelle génératrice et l'intégration gaussienne. Dans plusieurs cas il sera possible d'expliquer la méthode utilisée sur un exemple à une seule variable, dont l'étude préalable permettra de mieux suivre la démonstration générale.

Dans le paragraphe A, nous établissons le théorème de Wick, qui sera à la base du développement perturbatif, comme conséquence de l'intégration gaussienne. Le paragraphe B est consacré au développement perturbatif des fonctions de corrélation  $G^{(2)}$  et  $G^{(4)}$ , et introduit les diagrammes de Feynman : à chaque terme (ou plus exactement à chaque groupement de termes) du développement perturbatif, on fait correspondre un diagramme, et à chaque diagramme correspondent des règles de calcul. Au paragraphe C on étudie la classification des fonctions de corrélation : connexes, une particule irréductibles et vertex propres. La transformation de Legendre est utilisée pour obtenir la fonctionnelle génératrice des vertex propres. Cette fonctionnelle génératrice, qui généralise le potentiel de Gibbs, permettra de préciser au paragraphe D les notions de symétrie brisée et de développement en nombre de boucles. L'évaluation pratique des graphes de Feynman est expliquée au paragraphe E, tandis que des arguments simples, mais riches de conséquences, sont donnés au paragraphe F pour déterminer le comportement des graphes lorsque certains moments tendent vers l'infini (comportement ultraviolet) ou vers zéro (comportement infra-rouge).

J'utiliserai dans ce chapitre le vocabulaire et les notations de la théorie quantique des champs. Ainsi le hamiltonien de Ginzburg-Landau (II.19) sera écrit avec le changement de notations :  $r_0 \rightarrow m^2$  et  $u_0 \rightarrow g$ , où  $m$  est une masse et  $g$  une constante de couplage. Les vecteurs d'onde seront appelés moments ( $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  avec  $\hbar = 1$ ). Enfin les notations vectorielles seront supprimées pour  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{k} \rightarrow k$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow x$ ), sauf s'il peut y avoir ambiguïté.

## A. THÉORÈME DE WICK ET FONCTIONNELLE GÉNÉRATRICE

Dans ce paragraphe, nous reprendrons en les généralisant des résultats du chapitre I (paragraphe D) et de l'appendice A. Le point essentiel est d'obtenir une expression compacte pour les fonctions de corrélation à  $N$ -points  $\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_N) \rangle$  et des règles de calcul pour un hamiltonien gaussien. La méthode peut être expliquée dans le cas d'une seule variable.

### A.1. Fonction génératrice pour une seule variable

Soit  $P(\varphi)$  la distribution de probabilité d'une variable aléatoire :  $P(\varphi) \geq 0$  ; toutefois on ne suppose pas que  $P(\varphi)$  est normalisée :  $\int P(\varphi) d\varphi$  n'est pas nécessairement égal à 1.

La fonction génératrice  $Z(j)$  est définie par :

$$Z(j) = \int d\varphi P(\varphi) e^{j\varphi} ; \quad (1)$$

on suppose implicitement que  $P(\varphi)$  décroît suffisamment rapidement à l'infini pour que l'intégrale dans (1) soit convergente. L'intérêt de  $Z(j)$  est qu'elle permet d'obtenir par dérivation les moments  $\langle \varphi^n \rangle$  de la distribution de probabilité  $P(\varphi)$  :

$$\langle \varphi^n \rangle = \frac{\int d\varphi \varphi^n P(\varphi)}{\int d\varphi P(\varphi)} = \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^n Z}{\partial j^n} \Big|_{j=0} . \quad (2)$$

Inversement  $Z(j)/Z(0)$  est donné en fonction des  $\langle \varphi^n \rangle$  par :

$$Z(j)/Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \langle \varphi^n \rangle . \quad (3)$$

Dans le cas d'une distribution de probabilité gaussienne :

$$P(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi \frac{1}{A} \varphi\right) \quad (4)$$

on trouve, en utilisant l'équation (A.9) :

$$Z(j) = Z(0) \exp\left(\frac{1}{2} j A j\right) \quad (5)$$

(remarquez que les rôles de  $A$  et  $A^{-1}$  ont été échangés) et (l'indice 0 indique une valeur moyenne pour une distribution de probabilité gaussienne) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{2n} \rangle_0 &= \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} \exp\left(\frac{1}{2} j A j\right) \Big|_{j=0} = \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (j A j)^n \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} A^n = (2n-1)!! A^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a développé l'exponentielle et remarqué qu'un seul des termes du développement peut contribuer, à cause des  $2n$  dérivations et de la condition  $j=0$  ;  $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ . Naturellement, tous les moments impairs sont nuls :  $\langle \varphi^{2n+1} \rangle_0 = 0$ . L'équation (6) peut être réécrite en fonction du moment d'ordre 2 :  $\langle \varphi^2 \rangle_0 = A$

$$\boxed{\langle \varphi^{2n} \rangle_0 = (2n-1)!! \langle \varphi^2 \rangle_0^n} \quad (7)$$

Si  $P(\varphi)$  n'est plus gaussien, mais a par exemple la forme :

$$P(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + f(\varphi)\right)$$

alors :

$$Z(j) = \int d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + f(\varphi) + j\varphi\right).$$

La fonction génératrice peut être écrite :

$$Z(j) = \exp\left(f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right)\right) \int d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + j\varphi\right). \quad (8)$$

Cette égalité s'obtient à partir de :

$$f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right) e^{j\varphi} = f(\varphi) e^{j\varphi}$$

que l'on démontre en écrivant un développement de Taylor au voisinage de 0 pour  $f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right)$ .

### A.2. Théorème de Wick

La généralisation à  $N$  variables des considérations précédentes permet de démontrer un théorème fondamental pour les intégrations gaussiennes, le théorème de Wick. Partons d'une distribution de probabilité gaussienne à  $N$  variables :

$$P(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi\right)$$

où :

$$\varphi^T A^{-1} \varphi = \sum_{i,j} \varphi_i A_{ij}^{-1} \varphi_j$$

et définissons la fonction génératrice  $Z(j)$  :

$$Z(j_1, \dots, j_N) = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi + j^T \varphi\right). \quad (9)$$

D'après l'équation (A.10) cette fonction est égale à :

$$Z(j) = Z(0) \exp\left(\frac{1}{2} j^T A j\right) \quad (10)$$

et l'équation (10) donne les moments de  $P(\varphi)$  par dérivation :

$$\langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{2n}} \rangle_0 = \frac{\partial^{2n}}{\partial j_{i_1} \dots \partial j_{i_{2n}}} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (j^T A j)^n. \quad (11)$$

L'équation (11) permet de démontrer la généralisation de (6) : *pour une distribution gaussienne, tous les moments s'expriment en fonction des moments d'ordre 2*. En théorie quantique des champs, ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Wick*. La démonstration n'est pas difficile ; commençons par le moment d'ordre 2 :

$$\langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle_0 = \frac{\partial^2}{\partial j_{i_1} \partial j_{i_2}} \left( \frac{1}{2} \sum_{k,l} j_k A_{kl} j_l \right) = A_{i_1 i_2} = \overline{\varphi_{i_1}} \varphi_{i_2}. \quad (12)$$

La quantité  $\overline{\varphi_{i_1}} \varphi_{i_2}$  est appelée *contraction* de  $\varphi_{i_1}$  et  $\varphi_{i_2}$ . La dérivation dans (11) donne  $(2n)!$  termes ; cependant il faut diviser par  $2^n n!$  et le nombre total de termes dans le membre de droite de (11) est donc  $(2n-1)!!$ . Mais ce nombre n'est pas autre chose que le nombre de

façons de former les paires  $\overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} \overline{\varphi_{i_3} \varphi_{i_4}} \dots \overline{\varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}}$  : en effet il y a  $(2n-1)$  façons de former la première paire  $\overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_k}}$ ,  $(2n-3)$  façons de former la seconde, etc. On trouve donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{2n}} \rangle_0 &= \overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} \overline{\varphi_{i_3} \varphi_{i_4}} \dots \overline{\varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}} \\ &\quad + \text{Permutations} \\ \text{avec : } \overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} &= \langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle_0 = A_{i_1 i_2} \end{aligned}}. \quad (13)$$

Exemple :

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle_0 = \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_3} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_3}.$$

Il est important de noter que le *nombre total de termes ne change pas même si certains indices sont identiques* :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_4 \rangle_0 &= \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_2} \\ &= 2 \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_2}. \end{aligned}$$

D'ailleurs si tous les indices sont identiques on retrouve le résultat (7) :

$$\langle \varphi^{2n} \rangle_0 = (2n-1)!! \langle \varphi^2 \rangle_0^n.$$

### A.3. Fonctionnelle génératrice

Les résultats précédents peuvent être appliqués à une théorie continue, considérée comme la limite d'une théorie sur réseau : cf. II-A.3. Si l'on suppose que la densité de probabilité est donnée par un hamiltonien du type Ginzburg-Landau (II.19) :

$$P[\varphi] = \exp(-H_{GL}) = \exp\left(-\int d^Dx \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4\right)\right)$$

la « *fonctionnelle génératrice* » (des fonctions de corrélation)  $Z(j)$  sera définie par :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp\left(-H + \int d^Dx j(x) \varphi(x)\right). \quad (15)$$

La fonction  $j(x)$ , appelée *source du champ*  $\varphi$ , joue le rôle du champ magnétique  $B(x)$ . Il est utile de définir la *densité de hamiltonien*

$\mathcal{H}(x)$  par :

$$H = \int d^D x \mathcal{H}(x); \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4.$$

Les moments d'ordre  $(2n)$ , qui ne sont pas autre chose que les fonctions de corrélation à  $(2n)$ -points, sont obtenus par dérivation fonctionnelle de  $Z(j)$  :

$$\begin{aligned} G^{(2n)}(x_1, \dots, x_{2n}) &= \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \rangle = \\ &= \frac{1}{Z(0)} \frac{\delta^{(2n)} Z(j)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_{2n})} \Big|_{j=0}. \end{aligned} \quad (16)$$

La fonction de corrélation à deux points :

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle$$

avait été appelée simplement « fonction de corrélation » dans la première partie, car c'était la seule à intervenir et il n'était pas nécessaire de préciser le nombre de variables.

Il est commode de séparer dans le hamiltonien  $H$  une partie gaussienne (i.e. quadratique en  $\varphi$ )  $H_0$  :

$$H_0 = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \quad (17)$$

et un terme  $V$  dit d'interaction :

$$V = \frac{g}{4!} \int d^D x \varphi^4(x). \quad (18)$$

Plus généralement on pourrait prendre au lieu de  $\frac{g}{4!} \varphi^4$  un polynôme en  $\varphi$ ,  $\mathcal{V}(\varphi)$ , pair si l'on veut respecter la symétrie  $\varphi \rightarrow -\varphi$  ; on pourrait aussi introduire des interactions du type  $\varphi^2 (\nabla \varphi)^2$ , dites *interactions dérivatives* ; afin de simplifier la discussion, je les laisserai provisoirement de côté. L'expression (8) se généralise alors à :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \exp \left( - \int d^D x \mathcal{V} \left( \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \int \mathcal{D} \varphi(x) \times \\ &\quad \times \exp \left( - H_0 + \int d^D x j(x) \varphi(x) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

pour une interaction :

$$V = \int d^D x \mathcal{V}(\varphi) = \int d^D x \left( \frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{g_6}{6!} \varphi^6 + \dots \right).$$

L'intégrale sur  $\varphi(x)$  dans (19) est une intégrale gaussienne ; en utilisant (10) on obtient :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left( - \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - j(x) \varphi(x) \right] \right) = \\ = Z_0(j=0) \exp \left( \frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) G_0(x-y) j(y) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

où  $G_0(x-y)$  est la fonction de corrélation à 2 points du modèle gaussien ( $G_0(x, y)$  joue le rôle de  $A_{ij}$ ) :

$$G_0(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + m^2} = \langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle_0. \quad (21)$$

La fonctionnelle génératrice  $Z(j)$  peut donc être mise, à une constante multiplicative près, sous la forme :

$$\begin{aligned} Z(j) = \mathcal{N} \exp \left( - \int d^D x \mathcal{V} \left( \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \times \\ \times \exp \left( \frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) G_0(x-y) j(y) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Dans toute la suite,  $\mathcal{N}$  désignera une constante de normalisation des fonctionnelles génératrices. Cette constante ne joue en général aucun rôle, et il ne sera pas nécessaire de la préciser. Aussi compacte que soit la forme (22) de  $Z(j)$ , celle-ci n'est pas directement calculable. Il faudra développer en série perturbative.

Avant de passer à ce développement, rappelons que pour décrire un système physique dont le paramètre d'ordre est de dimension  $n$ , nous avons dû généraliser le hamiltonien de Ginzburg-Landau en introduisant un champ à  $n$  composantes  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} m^2 \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 + \frac{g}{4!} \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Ce hamiltonien est invariant par rotation dans l'espace à  $n$  dimensions des « indices internes »  $i$  : en effet il ne dépend que de la (« longueur »)<sup>2</sup> du champ dans cet espace :

$$\vec{\varphi}^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2$$

ou de termes contenant des dérivées, également invariants par rotation. Comme le groupe des rotations dans un espace à  $n$  dimensions est en

général noté  $O(n)$  ( $O(n)$  contient aussi les opérations de symétrie  $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$ , qui elles aussi laissent le hamiltonien invariant), on appelle ce hamiltonien : « hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie  $O(n)$  ».

## B. DÉVELOPPEMENT PERTURBATIF DE $G^{(2)}$ ET $G^{(4)}$ DIAGRAMMES DE FEYNMAN

L'objectif de ce paragraphe est d'établir des règles générales pour le calcul perturbatif des fonctions de corrélation, qui donneront le résultat sous forme d'un développement en puissances de  $g$  :

$$G = G_0 + gG_1 + g^2 G_2 + \dots + g^n G_n + \dots$$

où  $G_0$  est la fonction de corrélation du modèle gaussien. Ces règles s'expriment très simplement sous forme diagrammatique : ce sont les fameux « diagrammes de Feynman ». Comme précédemment je commencerai par le cas d'une seule variable afin d'exposer le principe de ce développement. Je prendrai comme exemple l'interaction en  $\varphi^4$ , mais les résultats se généralisent aisément à une interaction polynomiale  $\mathcal{V}(\varphi)$  quelconque.

### B.1. Développement perturbatif pour une variable

Considérons une distribution de probabilité

$$P(\varphi) = e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4}$$

et essayons de calculer les moments de cette distribution. Il n'est pas possible d'obtenir une formule exacte pour  $Z(0)$ , mais si  $g$  est petit on peut développer  $\exp\left(-\frac{g}{4!}\varphi^4\right)$  :

$$\begin{aligned} Z(0) &= \int d\varphi e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2} \left(1 - \frac{g}{4!}\varphi^4 + \frac{g^2}{2!(4!)^2}\varphi^8 + \dots\right) \\ &= \sqrt{2\pi A} \left(1 - \frac{1}{8}gA^2 + \frac{35}{384}g^2 A^4 + \dots\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Calculons maintenant  $\langle \varphi^2 \rangle$ , analogue pour une variable de la fonction

de corrélation à deux points :

$$\begin{aligned} \int d\varphi \varphi^2 P(\varphi) &= \int d\varphi \varphi^2 e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2} \left( 1 - \frac{g}{4!}\varphi^4 + \frac{g^2}{2!(4!)^2}\varphi^8 + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi A} \left( A - \frac{5}{8}gA^3 + \frac{105}{128}g^2A^5 + \dots \right). \end{aligned} \quad (25)$$

$\langle \varphi^2 \rangle$  s'obtient en faisant le rapport de (24) et (25) :

$$\langle \varphi^2 \rangle = A \left( 1 - \frac{1}{2}gA^2 + \frac{2}{3}g^2A^4 + \dots \right). \quad (26)$$

L'équation (26) est un exemple élémentaire de développement perturbatif. Remarquez que si  $g = 0$ , on retrouve simplement  $\langle \varphi^2 \rangle = A =$  valeur gaussienne ; remarquez aussi que la constante  $\sqrt{2\pi A}$  disparaît dans le rapport : on vérifie sur ce cas particulier que la constante due à l'intégration gaussienne est sans effet sur la fonction de corrélation.

## B.2. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g$

Revenons maintenant au cas d'une théorie de Ginzburg-Landau et calculons le terme d'ordre  $g$  de la fonction de corrélation  $G^{(2)}(x - y)$  : Il faut évaluer à l'ordre  $g$  l'intégrale :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H_0} \left[ 1 - \frac{g}{4!} \int d^D z \varphi^4(z) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme du crochet donne simplement

$$\mathcal{N} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \mathcal{N} G_0(x - y)$$

où la constante  $\mathcal{N}$  vaut :

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H_0} = Z_0(j = 0).$$

L'intégrale correspondant au second terme :

$$\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H_0} \int d^D z \varphi^4(z) \quad (27)$$

est évaluée à l'aide du théorème de Wick (13). Le nombre de contractions dans (27) est égal au nombre de contractions de  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(y)$  et  $\varphi^4(z)$ . Il est commode de représenter ces contractions sur une figure en dessinant deux points « externes » (c'est-à-dire se référant aux arguments de la fonction de corrélation)  $x$  et  $y$ , marqués d'une croix, et un point « interne » ou « *vertex* »  $z$ , provenant du développement de  $e^{-V}$ , et sur lequel on intégrera. Comme  $\varphi(z)$  intervient par sa quatrième puissance, ce point apparaîtra dans un premier temps en quatre exemplaires. Chaque contraction sera représentée par une ligne joignant les arguments de  $\varphi$  : par exemple :

$$\overline{\varphi(x)} \varphi(y) \longrightarrow \begin{array}{c} x \text{-----} x \\ x \qquad \qquad y \end{array}$$

Deux types de termes sont possibles (figure 1) :

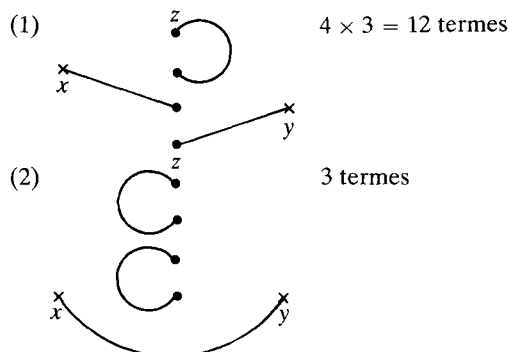


Figure 1.

On vérifie que  $12 + 3 = 15 = (6 - 1)!!$ . Afin de simplifier les figures, on groupe les quatre points  $z$  en un seul, obtenant les figures suivantes (figure 2) :

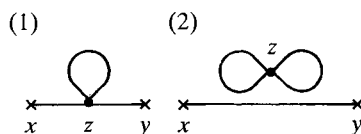


Figure 2. Les deux diagrammes d'ordre  $g$ .

Ces figures sont appelées *diagrammes (ou graphes) de Feynman* ; à tout terme, ou plus exactement à tout groupement de termes, du

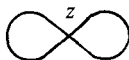
développement perturbatif correspondra un tel diagramme. L'intégrale  $I$  vaut :

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = \mathcal{N} [G_0(x - y) - \\
 - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x - z) G_0(0) G_0(z - y) \\
 - \frac{1}{8} g G_0(x - y) (G_0(0))^2 \int d^D z] . \quad (28)
 \end{aligned}$$

Pour obtenir la fonction de corrélation, il faut diviser par  $Z(0)$ , comme dans l'exemple à une variable :

$$\begin{aligned}
 Z(0) &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-H_0} \left( 1 - \frac{g}{4!} \int d^D z \varphi^4(z) + \dots \right) \\
 &= \mathcal{N} \left[ 1 - \frac{g}{8} (G_0(0))^2 \int d^D z + \dots \right] . \quad (29)
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme du crochet de (29) est représenté par le graphe de la figure 3 :



**Figure 3.** Diagramme de fluctuation du vide.

Pour obtenir la fonction de corrélation à l'ordre  $g$ , il faut faire le rapport de (28) par (29) :

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(x - y) &= \frac{I(x, y)}{Z(0)} = G_0(x - y) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x - z) G_0(0) G_0(z - y) + O(g^2) .
 \end{aligned}$$

Le graphe (2) de la figure 2 n'apparaît pas dans le développement perturbatif de  $G$ . Un diagramme de ce type contient une partie dite de « fluctuation du vide » ou diagramme « vide-vide » (terminologie empruntée à la théorie quantique des champs), c'est-à-dire *un sous-graphe complètement disconnecté des points « externes »  $x$  et  $y$*  (cf.

figure 2). D'autres exemples de diagrammes de ce type sont dessinés sur la figure 4 :

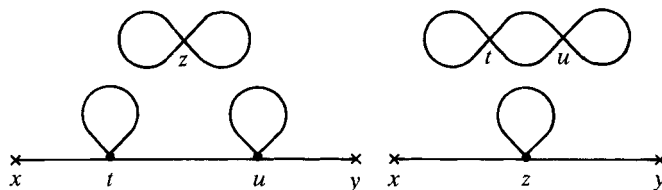


Figure 4. Diagrammes ne contribuant pas à  $G^{(2)}(x - y)$ .

Ces graphes n'apparaissent jamais dans le développement perturbatif des fonctions de corrélation. La somme des diagrammes de fluctuation du vide est égale à  $Z(0) = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H}$ , et c'est l'analogue de (24) dans

le cas d'une variable. La division par  $Z(0)$  fait disparaître tous les graphes contenant une partie « fluctuation du vide » disconnectée du reste du graphe. La démonstration de ce résultat dans le cas général n'est pas très compliquée.

Considérons un diagramme faisant intervenir le hamiltonien d'interaction à l'ordre  $(p + q)$ , et comprenant une partie de fluctuation du vide d'ordre  $q$  ; un exemple est donné dans la figure 5 dans le cas où  $\mathcal{V} = g\varphi^4/4!$  :

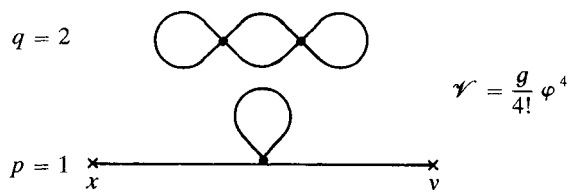


Figure 5.

Si  $n = p + q$ , il y a  $C_n^q$  façons de choisir  $q$  facteurs  $V$  pour former des diagrammes de fluctuation du vide. D'autre part le développement de l'exponentielle  $e^{-V}$  fait apparaître un facteur  $1/n!$ . Un graphe de topologie donnée apparaîtra donc avec un facteur  $\frac{1}{n!} C_n^q = \frac{1}{q! p!}$ .

Comme :

$$\sum_n \sum_{p+q=n} = \sum_{p,q}$$

dans le calcul de la fonction de corrélation, le numérateur pourra s'écrire :

$$\sum_{p,q} \frac{1}{p! q!} [\text{Fluct. vide } (q)] [\text{Connecté } (p)]$$

$$\left( \sum_p \frac{1}{p!} [\text{Connecté } (p)] \right) \left( \sum_q \frac{1}{q!} [\text{Fluct. vide } (q)] \right).$$

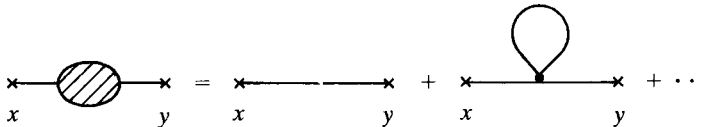
Mais le second facteur est exactement égal à  $Z(0)$  et la fonction de corrélation est donnée par :

$$\sum_p \frac{1}{p!} [\text{Connecté } (p)].$$

Le calcul qui précède permet de commencer à deviner les « règles de Feynman », c'est-à-dire les règles associant au développement perturbatif des diagrammes, ainsi que les prescriptions pour évaluer ces diagrammes (une démonstration complète sera donnée en B.5). A l'ordre  $g$  nous avons déterminé l'expression de  $G^{(2)}(x-y)$  :

$$G^{(2)}(x-y) = G_0(x-y) - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x-z) G_0(0) G_0(z-y) \quad (31)$$

que l'on représente graphiquement par (figure 6) :



**Figure 6.** Développement diagrammatique de  $G^{(2)}(x-y)$ .

L'expression analytique correspondant à un graphe est évaluée grâce aux règles suivantes (« règles de Feynman dans l'espace des  $x$  ») :

- 1) A chaque point interne, ou vertex, correspond un facteur  $-g$ .
- 2) A chaque ligne joignant deux points  $x_i$  et  $x_j$  correspond un facteur  $G_0(x_i - x_j)$  souvent appelé « *propagateur* » (terminologie empruntée à la théorie quantique des champs).

3) On intègre sur tous les points internes  $z_i$  :  $\int d^D z_i$ .

4) Chaque graphe est affecté d'un facteur numérique multiplicatif appelé « *facteur de symétrie* ». Dans le cas discuté plus haut, ce facteur vaut 1/2.

En prenant une transformée de Fourier, l'équation (31) devient dans l'espace des  $k$  :

$$G^{(2)}(k) = G_0(k) - \frac{1}{2} g G_0(k) \left[ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} G_0(q) \right] G_0(k). \quad (32)$$

Cette expression suggère les « règles de Feynman dans l'espace des  $k$  » (démonstration complète en B.5) :

- 1) A chaque vertex correspond un facteur  $-g$ .
- 2) A chaque ligne correspond un facteur  $G_0(k)$ .
- 3) A chaque boucle indépendante (cette notion sera précisée ultérieurement) correspond une intégration  $\int d^D q / (2\pi)^D$ .

4) Enfin chaque graphe est multiplié par un facteur de symétrie.

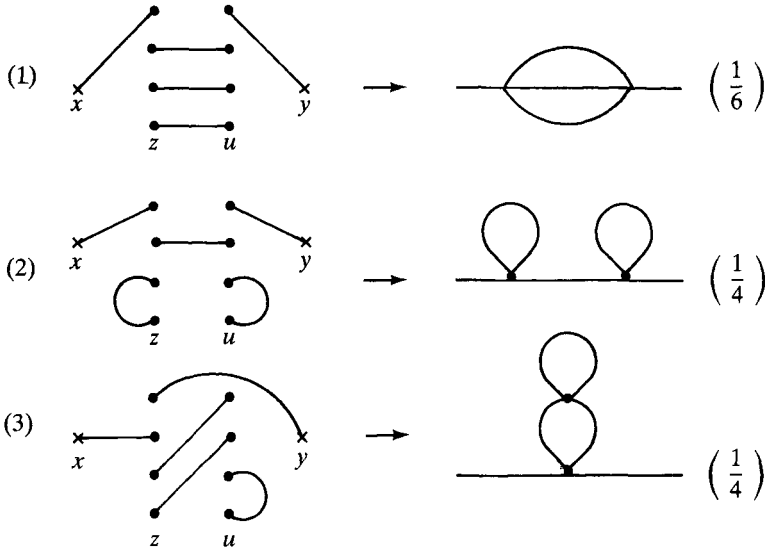
Le développement diagrammatique et les règles de Feynman sont des conséquences immédiates du théorème de Wick (13) : tout terme du développement perturbatif est un produit de  $G_0(x_i - x_j)$ . Le seul facteur qui n'est pas complètement évident est le facteur de symétrie. Par ailleurs on doit encore préciser la notion de « boucle indépendante ». Afin de se familiariser avec le développement perturbatif et les règles de Feynman, il vaut la peine de pousser le calcul de  $G^{(2)}$  à l'ordre  $g^2$ .

### B.3. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre $g^2$

Il faut appliquer le théorème de Wick à l'expression :

$$\varphi(x) \varphi(y) \int d^D z d^D u \varphi^4(z) \varphi^4(u).$$

Éliminant les termes contenant une partie de fluctuation du vide, on trouve trois types de graphes dessinés sur la figure 7 avec entre parenthèses leur facteur de symétrie (exercice 1) :

Figure 7. Diagrammes à l'ordre  $g^2$ .

Il faut remarquer que les vertex  $z$  et  $u$  peuvent être permutés, ce qui donne un facteur multiplicatif  $2!$  ; cependant le développement de l'exponentielle donne un facteur  $1/2!$  qui le compense exactement. En règle générale, si l'on considère un terme en  $g^n$ , le facteur  $n!$  venant de la possibilité de permuter les vertex sera compensé par le  $1/n!$  venant du développement de l'exponentielle.

Nous nous contenterons d'examiner la contribution  $\bar{G}(x-y)$  du graphe (1) de la figure 7 à la fonction de corrélation, en laissant au lecteur le soin d'établir l'expression analytique des deux autres graphes :

$$\bar{G}(x-y) = \frac{1}{6} g^2 \int d^D z d^D u G_0(x-z) [G_0(z-u)]^3 G_0(u-y) .$$

Ecrivons  $\bar{G}(x-y)$  sous forme d'une transformée de Fourier, en remplaçant chacun des facteurs  $G_0$  par sa représentation de Fourier :

$$\begin{aligned} \bar{G}(x-y) = \frac{1}{6} g^2 \int d^D z d^D u \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \prod_{l=1}^3 \left\{ \frac{d^D q_l}{(2\pi)^D} e^{-i \sum_{l=1}^3 q_l \cdot (z-u)} \right\} \\ \times e^{-ik \cdot (x-z)} e^{-ik' \cdot (u-y)} G_0(k) G_0(k') \prod_{l=1}^3 G_0(q_l) . \end{aligned}$$

Les intégrations sur  $z$  et  $u$  donnent un produit de deux fonctions  $\delta$  :

$$(2\pi)^D \delta^{(D)}(k - q_1 - q_2 - q_3) \times (2\pi)^D \delta^{(D)}(k' - q_1 - q_2 - q_3)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{G}(x-y) = & \frac{1}{6} g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik \cdot (x-y)} [G_0(k)]^2 \times \\ & \times \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k - q_1 - q_2) . \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre que  $\bar{G}(x-y)$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $\bar{G}(k)$  :

$$\begin{aligned} \bar{G}(k) = & \frac{1}{6} g^2 G_0(k) \times \\ & \times \left[ \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k - q_1 - q_2) \right] G_0(k) \quad (33) \end{aligned}$$

et la représentation diagrammatique de (33) est donnée sur la figure 8. Le graphe dessiné sur cette figure comporte deux propagateurs externes  $G_0(k)$  et trois propagateurs internes ; à cause des deux fonctions  $\delta^{(D)}(\dots)$ , seules deux des trois lignes internes sont indépendantes. Le diagramme de la figure 8 permet d'introduire la notion de boucles indépendantes : on peut tracer trois boucles fermées suivant les propagateurs internes, mais à cause des fonctions  $\delta^{(D)}$ , seules deux de ces boucles sont indépendantes : il y a seulement deux variables d'intégration dans (33).

Pour terminer cette discussion du développement perturbatif de  $G^{(2)}$ , examinons le facteur de symétrie, d'abord dans le cas du hamiltonien de Ginzburg-Landau simple. A l'ordre  $(p)$  de la théorie des perturbations, on trace tous les diagrammes de Feynman topologiquement inéquivalents et chaque diagramme est évalué avec les règles énoncées précédemment. En principe les  $4!$  permutations des qua-

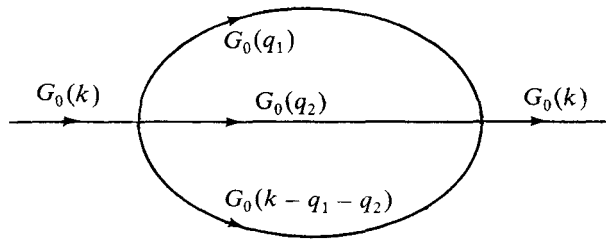


Figure 8. Représentation diagrammatique de (33).

tre points de chaque vertex compensent le  $1/4!$  qui multiplie  $g$ . Cependant certaines de ces permutations peuvent correspondre au même terme du théorème de Wick (13), et il ne faut pas faire de double comptage. On peut essayer de donner des règles générales pour le calcul de ce facteur (cf. Itzykson-Zuber, p. 265-268). Je me contenterai de le calculer explicitement dans chaque cas particulier.

Généralisons maintenant à un hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie  $O(n)$  (cf. équation (23)). Pour un hamiltonien de ce type, la fonction de corrélation gaussienne vaut :

$$\langle \varphi_i(x) \varphi_j(y) \rangle_0 = G_{0,ij}(x-y) = \delta_{ij} G_0(x-y). \quad (34)$$

Pour calculer la correction d'ordre  $g$ , il faut appliquer le théorème de Wick à :

$$\left\langle \int d^D z \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(z) \right)^2 \varphi_i(x) \varphi_j(y) \right\rangle_0.$$

Remarquons que :

$$\left( \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(z) \right)^2 = \sum_{k,l} \varphi_k^2(z) \varphi_l^2(z)$$

et que le point « quadruple »  $z$  peut être décomposé en deux points d'indice  $k$  et deux points d'indice  $l$ . Il y a donc deux types de graphes (le pointillé relie le groupe d'indices  $(k)$  au groupe d'indices  $(l)$ ) : figures 9 et 10) :

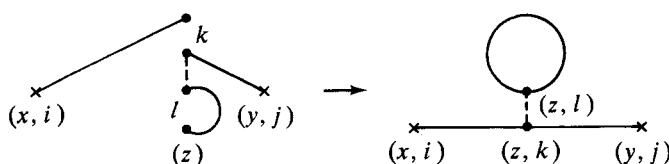


Figure 9.

Comme  $\sum_{k,l} \delta_{ik} \delta_{jk} \delta_{ll} = n \delta_{ij}$ , le facteur de symétrie est  $\frac{1}{4!} (4n) = \frac{n}{6}$ .

Le facteur de symétrie du graphe de la figure 10 vaut :  $\frac{1}{4!} 8 = \frac{1}{3}$ .

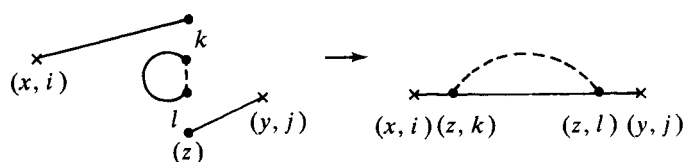


Figure 10.

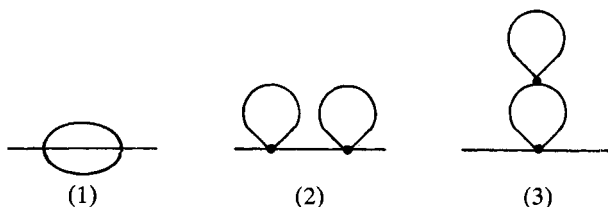
La somme des deux graphes (figure 11) :



Figure 11.

aura un facteur de symétrie :  $\frac{1}{6} (n+2) \left( = \frac{1}{2} \text{ si } n = 1 \right)$ .

A l'ordre  $g^2$ , les trois graphes de la figure 12

Figure 12.  $G^{(2)}$  à l'ordre  $g^2$ .

ont un facteur de symétrie  $\frac{n+2}{18}$ ,  $\frac{(n+2)^2}{36}$  et  $\frac{(n+2)^2}{36}$  respectivement (exercice 4).

#### B.4. Fonction de corrélation à quatre points $G^{(4)}$

Continuons à utiliser le hamiltonien (23) ; la fonction de corrélation à quatre points  $G_{ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est donnée par :

$$G_{ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_3) \varphi_l(x_4) \rangle .$$

Par invariance par translation, cette fonction ne dépend que de trois différences de coordonnées : par exemple  $(x_1 - x_2)$ ,  $(x_2 - x_3)$ ,  $(x_3 - x_4)$ .

A l'ordre  $g^0$ ,  $G_{0;ijkl}^{(4)}$  est la somme de trois graphes disconnectés (figure 13) :

$$G_{0;ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_{0;ij}(x_1 - x_2) G_{0;kl}(x_3 - x_4) + \\ + G_{0;ik}(x_1 - x_3) G_{0;jl}(x_2 - x_4) + G_{0;il}(x_1 - x_4) G_{0;jk}(x_2 - x_3) .$$

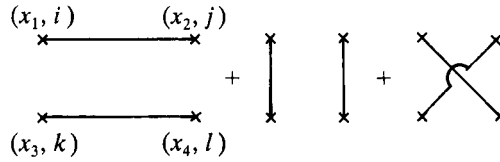


Figure 13.  $G^{(4)}$  à l'ordre  $g^0$ .

A l'ordre  $g$  on aura trois types de graphes (figure 14) :

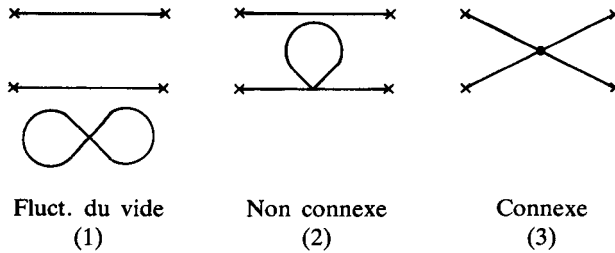


Figure 14.  $G^{(4)}$  à l'ordre  $g$ .

Les graphes de type (1) contiennent des parties de fluctuation du vide et sont éliminés quand on divise par  $Z(0)$ . Les graphes de type (2) peuvent être écrits comme le produit de deux termes indépendants : ce sont des *graphes non connexes*. Leur expression est connue car ils font intervenir des fonctions de corrélation à deux points, déjà calculées. Les graphes de type (3) sont les plus intéressants. Ecrivons l'expression analytique du graphe (3) de la figure 14 :

$$\bar{G}_{ijkl} = - \bar{\Gamma}_{ijkl} \int d^D z G_0(x_1 - z) G_0(x_2 - z) \times \\ \times G_0(x_3 - z) G_0(x_4 - z) . \quad (35)$$

(Remarquez le signe  $-$  dans (35)). Il est immédiat de calculer  $\bar{\Gamma}_{ijkl}$  :

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{ijkl} = \frac{1}{3} g S_{ijkl} \\ S_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} . \end{cases} \quad (36)$$

Si  $n = 1$ , on a simplement  $\bar{\Gamma} = g$  car  $S_{ijkl} = 3$ . Le signe  $(-)$  dans (35) assure que  $\bar{\Gamma}$  est égal à  $+g$ , et non  $-g$  (cf. C.3).

Remplaçons maintenant les  $G_0$  dans (35) par leur représentation de Fourier :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ijkl} &= -\bar{\Gamma}_{ijkl} \int d^D z \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} e^{-ik_i(x_i - z)} G_0(k_i) \right\} \\ &= -\bar{\Gamma}_{ijkl} \int \prod_{i=1}^4 \left\{ \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x_i} G_0(k_i) \right\} \times \\ &\quad \times (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \end{aligned} \quad (37)$$

On remarque dans (37) le facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum k_i\right)$  : ce facteur provient de l'invariance par translation de  $G^{(4)}(x_i)$  ; établissons-le dans le cas général, c'est-à-dire sans invoquer le développement perturbatif, en effectuant le changement de variables :

$$y_1 = x_1 - x_4 ; \quad y_2 = x_2 - x_4 ; \quad y_3 = x_3 - x_4 ; \quad y_4 = x_4$$

$$\sum_{i=1}^4 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i y_i + \left( \sum_{i=1}^4 k_i \right) y_4$$

dans l'intégrale :

$$\int \left[ \prod_{i=1}^4 d^D x_i e^{ik_i x_i} \right] G^{(4)}(x_i) .$$

Par invariance par translation,  $G^{(4)}(x_i)$  peut s'écrire en fonction de  $y_1, y_2, y_3$  uniquement ; l'intégrale sur  $y_4 = x_4$  donne bien  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right)$ . De façon générale on extraira un facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right)$  dans la définition de la transformée de Fourier  $G^{(4)}(k_i)$  :

$$(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) G^{(4)}(k_i) = \int \left[ \prod_{i=1}^4 d^D x_i e^{ik_i x_i} \right] G^{(4)}(x_i) . \quad (38)$$

Dans le cas d'une fonction de corrélation d'ordre  $N$ , on extraira un facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^N k_i\right)$ . Le lecteur vérifiera sans difficulté que cette convention avait été adoptée implicitement pour  $G^{(2)}$ . Lorsque l'on utilise des variables  $k_i$  discrètes, on extrait un facteur  $L^D \delta_{\sum k_i}^N$ , en utilisant cette fois un  $\delta$  de Kronecker ( $L$  est la taille de l'échantillon considéré).

Les exemples précédents ont permis de deviner la forme des règles de Feynman ; il reste à les établir de façon générale. Je me contenterai de le faire dans l'espace des  $k$ , qui est le plus utile en pratique.

### B.5. Règles de Feynman dans l'espace des $k$

Définissons la transformée de Fourier de  $j(x)$  par :

$$j(k) = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} e^{ik \cdot x} j(x).$$

D'après la relation de Parseval on peut écrire :

$$\int d^D x j(x) \varphi(x) = \int d^D k \varphi(k) j(-k).$$

La fonctionnelle génératrice gaussienne s'écrit dans l'espace des  $k$  :

$$\begin{aligned} Z_0(j) &= \int \mathcal{D}\varphi(k) \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^D k (m^2 + k^2) \varphi(k) \varphi(-k) + \right. \\ &\quad \left. + \int d^D k \varphi(k) j(-k) \right) \\ &= Z_0(0) \exp\left(\frac{1}{2} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k) \right) \end{aligned} \quad (39)$$

tandis que l'interaction  $V$  devient :

$$V = \frac{g}{4!} \int \left[ \prod_{i=1}^4 \frac{d^D q_i}{(2\pi)^{D/2}} \varphi(q_i) \right] (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum q_i\right). \quad (40)$$

Relions maintenant la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'ordre  $N$  à  $\langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle$  :

$$\begin{aligned} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \rangle = \\ &= \int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{D/2}} e^{-ik_i \cdot x_i} \right\} \langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle. \end{aligned}$$

Mais d'après l'équation (38), écrite dans le cas général,  $G^{(N)}(x_i)$  vaut également :

$$\int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i \cdot x_i} \right\} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1 \dots k_N)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) &= \\ &= (2\pi)^{ND/2} \langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

On note le cas particulier :

$$(2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + k_2) G^{(2)}(k_1) = (2\pi)^D \langle \varphi(k_1) \varphi(k_2) \rangle$$

soit :

$$G^{(2)}(k) = \langle \varphi(k) \varphi(-k) \rangle.$$

En combinant (39), (40) et (41) on trouve pour  $G^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$  :

$$\begin{aligned} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) &= \\ &= \mathcal{N} (2\pi)^{ND/2} \exp\left(-V\left(\frac{\delta}{\delta j(-q)}\right)\right) \frac{\delta^N}{\delta j(-k_1) \dots \delta j(-k_N)} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k)\right) \end{aligned}$$

(42)

On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta j(-k_1) \delta j(-k_2)} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k) &= \\ &= 2 \delta^{(D)}(k_1 + k_2) G_0(k_1). \end{aligned}$$

A chaque ligne, interne ou externe, est associé le facteur  $\delta^{(D)}(k_1 + k_2) G_0(k_1)$  ; d'autre part, à cause du facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum k_i\right)$  dans (40), la somme de tous les moments entrant dans un vertex doit être nulle. On peut choisir sur chaque ligne (interne ou externe) du diagramme une direction pour le flot de moment ; à un vertex donné arrivent quatre lignes de moments  $k_i$ , comptées positive-

ment si le moment entre dans le vertex et négativement dans le cas contraire. La fonction  $\delta$  dans (40) conduit à la loi de conservation pour chaque vertex :

$$\sum_{i=1}^4 (\pm k_i) = 0 .$$

Il sera souvent commode d'adopter la *convention* suivante : les moments externes  $k_1, \dots, k_N$  sont orientés de façon à entrer dans le diagramme. Ainsi, à cause du facteur  $\delta^{(D)}(k_1 + k_2)$ , une ligne arrivant dans un vertex avec un moment  $k$ , ou bien arrive dans le diagramme avec un moment  $k$ , ou bien entre dans un autre vertex avec un moment  $-k$ . Un exemple est donné sur la figure 15 où :

$$k_1 + k_2 - q_1 - q_2 = 0 ; \quad q_1 + q_2 + k_3 + k_4 = 0$$

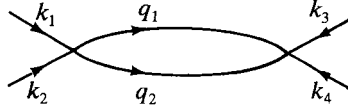


Figure 15. Une contribution à  $G^{(4)}$ .

La conservation du moment à chaque vertex assure la conservation totale du moment :  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ .

Etablissons pour terminer les facteurs  $(2\pi)$ . La fonction de corrélation possède  $N$  lignes externes et  $V$  vertex à l'ordre  $V$  de la théorie des perturbations. A cet ordre on a donc un facteur (cf. (40) et (42)) :

$$(2\pi)^{ND/2} (2\pi)^{-4VD/2} (2\pi)^{VD} .$$

Mais dans un diagramme connexe on a la relation :

$$4V = 2I + N$$

où  $I$  est le nombre de lignes internes du diagramme : en effet si l'on coupe chaque ligne interne, quatre lignes arrivent à chaque vertex et le nombre total de lignes est  $2I + N$ . Un exemple est donné sur la figure 16 :

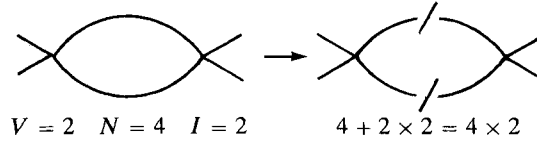


Figure 16.

Le facteur multiplicatif est donc :

$$(2\pi)^{VD} (2\pi)^{(N-4V)D/2} = (2\pi)^{VD} (2\pi)^{-ID}.$$

On peut résumer les règles de Feynman pour  $G^{(N)}(k_1 \dots k_N)$  dans l'espace des  $k$  sous deux formes équivalentes (dans le cas de diagrammes disconnectés il peut y avoir des modifications triviales : à titre d'exercice on pourra écrire la contribution à  $G^{(4)}$  des diagrammes de la figure 13) :

(1) Tracer tous les diagrammes topologiquement inéquivalents à un ordre donné de la théorie des perturbations.

(2) Associer à chaque ligne du diagramme un facteur  $G_0(k)$ .

(3) Associer à chaque vertex un facteur :  $-g(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^4 q_i\right)$  et extraire le facteur de conservation du moment  $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right)$ .

(4) Intégrer sur chaque ligne interne avec une mesure d'intégration  $\frac{d^D q}{(2\pi)^D}$ .

(4) Multiplier par le facteur de symétrie.

La deuxième forme s'obtient en utilisant la notion de boucles : dans un diagramme, il y a

$$L = I - V + 1$$

variables d'intégration indépendantes, ou bien  $L$  boucles indépendantes : en effet chaque vertex introduit une fonction  $\delta$ , mais une de ces fonctions  $\delta$  est déjà incluse dans la conservation du moment. Le facteur  $(2\pi)^{(-I+V)D}$  peut s'écrire :

$$(2\pi)^{-ID} (2\pi)^{VD} = (2\pi)^{-LD} (2\pi)^D.$$

Le facteur  $(2\pi)^D$  est à associer au  $\delta(\dots)$  de conservation du moment dans le diagramme. On pourra donc remplacer (3) et (4) par :

(3a) Associer à chaque vertex un facteur  $-g$ .

(4a) Ecrire les moments internes en assurant la conservation du moment à chaque vertex, et intégrer sur toutes les boucles indépendantes avec une mesure  $d^D q / (2\pi)^D$ . Donnons un exemple d'application de ces règles (figure 17). La contribution du graphe de la figure 17 à  $G^{(2)}$  s'écrit :

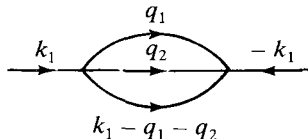


Figure 17. Une contribution à  $G^{(2)}$ .

$$\frac{1}{6} g^2 G_0(k_1) \left[ \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \times \right. \\ \left. \times G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k_1 - q_1 - q_2) \right] G_0(k_1).$$

Le résultat est bien en accord avec (33).

### C. FONCTIONS DE CORRÉLATION CONNEXES VERTEX PROPRES

Nous avons vu que certaines contributions aux fonctions de corrélation pouvaient se mettre sous la forme de deux ou plusieurs facteurs indépendants : par exemple la contribution du diagramme de la figure 18 à  $G^{(4)}$  s'écrit comme le produit de deux facteurs. Afin de limiter le nombre de diagrammes il est utile de définir les *diagrammes connexes* : ce sont les diagrammes qui ne peuvent pas être décomposés en deux ou plusieurs parties indépendantes sans couper au moins une ligne du diagramme. La décomposition en diagrammes connexes généralise l'écriture des moments d'une distribution de probabilité en termes de *cumulants*.

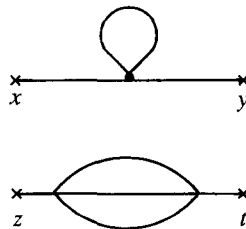


Figure 18. Une contribution non connexe à  $G^{(4)}$ .

### C.1. Cumulants d'une distribution de probabilité

Soit  $Z(j)$  la fonction génératrice d'une distribution de probabilité  $P(\varphi)$  :

$$Z(j) = Z(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} j^n \langle \varphi^n \rangle .$$

On pose  $Z(j) = Z(0) \exp[W(j)]$  ou  $W(j) = \ln(Z(j)/Z(0))$  ( $W$  est l'analogie d'une énergie libre) et on définit les cumulants d'ordre  $n$ ,  $\langle \varphi^n \rangle_c$  par :

$$W(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \langle \varphi^n \rangle_c$$

$$\langle \varphi^n \rangle_c = \left. \frac{\partial^n W(j)}{\partial j^n} \right|_{j=0} .$$

On obtient par identification :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle_c &= \langle \varphi \rangle \\ \langle \varphi^2 \rangle_c &= \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle \\ \langle \varphi^3 \rangle_c &= \langle \varphi^3 \rangle - 3 \langle \varphi \rangle \langle \varphi^2 \rangle + 2 \langle \varphi \rangle^3 = \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^3 \rangle \\ \langle \varphi^4 \rangle_c &= \langle \varphi^4 \rangle - 4 \langle \varphi \rangle \langle \varphi^3 \rangle - 3 \langle \varphi^2 \rangle^2 + 12 \langle \varphi \rangle^2 \langle \varphi^2 \rangle - 6 \langle \varphi \rangle^4 \\ &= \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^4 \rangle - 3 \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle^2 . \end{aligned}$$

Les cumulants d'une distribution gaussienne sont nuls pour  $n \geq 3$ . En effet, d'après (5),  $Z(j) \sim \exp\left(\frac{1}{2} A j^2\right)$  et  $W(j) = \frac{1}{2} A j^2$ . Si la distribution gaussienne n'est pas centrée à l'origine, le seul effet est d'ajouter un terme linéaire en  $j$  à  $F(j)$  :  $\langle \varphi \rangle_c$  et  $\langle \varphi^2 \rangle_c$  sont  $\neq 0$ , mais  $\langle \varphi^n \rangle_c = 0$  si  $n \geq 3$ . Nous allons généraliser ce qui précède au cas des fonctions de corrélation avec la correspondance : fonction de corrélation  $\rightarrow$  moment et fonction de corrélation connexe  $\rightarrow$  cumulant.

### C.2. Fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes

Commençons par un exemple en examinant la fonction de corrélation  $G^{(4)}$  ;  $G^{(4)}$  se décompose en un diagramme connexe et trois diagrammes non connexes :

$$\begin{aligned} G^{(4)}(1, 2, 3, 4) &= G_c^{(4)}(1, 2, 3, 4) + \\ &\quad + \{ G_c^{(2)}(1, 2) G_c^{(2)}(3, 4) + \text{Permutations} \} \end{aligned}$$

où  $G_c$  désigne une fonction de corrélation connexe ; remarquez que  $G_c^{(2)} = G^{(2)}$ . Graphiquement on obtient l'équation de la figure 19 :

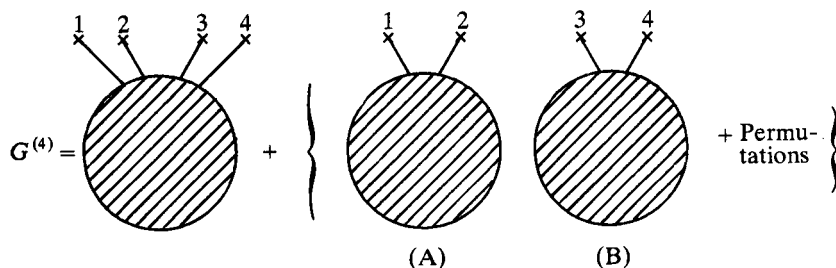


Figure 19.

Le nombre de termes non connexes est  $3 = 4! / [(2!)^2 \times (2!)]$  :  $4!$  est le nombre de permutations des points externes (1, 2, 3, 4) ; mais permuter (1, 2), ou (3, 4), ou les deux boules (A) et (B) ne change pas le résultat, d'où le facteur  $(2!)^2 \times 2!$ .

Le cas d'une théorie en  $\varphi^4$  est un peu particulier car toutes les fonctions de corrélation telles que  $N$  est impair sont nulles :  $G^{(2k+1)} = 0$ .(\*) Pour être tout à fait général, on supposera que l'interaction comprend des termes en  $\varphi^{2p+1}$ , par exemple  $\varphi^3$ , de telle sorte que  $G^{(2k+1)} \neq 0$ . Considérons un diagramme non connexe de  $G^{(N)}$  correspondant à la décomposition de la figure 20 en diagrammes connexes :

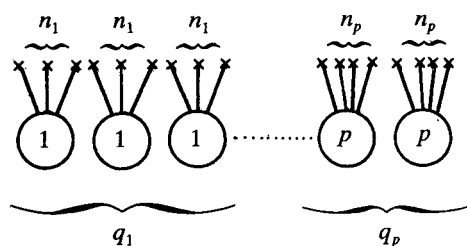


Figure 20.

(\*) On peut avoir  $G^{(1)} = \langle \varphi \rangle \neq 0$  dans le cas d'une symétrie brisée, ou bien si  $\mathcal{V}(\varphi)$  contient des termes impairs en  $\varphi$ , par exemple  $\varphi^3$ .

Il y a  $q_1$  boules connectées à  $n_1$  points externes...  $q_p$  boules connectées à  $n_p$  points externes avec :

$$q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N .$$

Le nombre de termes indépendants est :

$$\frac{N!}{[(n_1!)^{q_1} q_1!] \dots [(n_p!)^{q_p} q_p!]} . \quad (43)$$

La fonction génératrice  $Z(j)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{Z(j)}{Z(0)} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) \times \\ &\quad \times \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} G_c^{(n_1)}(x_1 \dots x_{n_1}) \dots G_c^{(n_p)}(\dots x_N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} \prod_{i=1}^p \frac{1}{q_i!} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} j(x_1) \dots j(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1 \dots x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} \\ &= \sum_{q_i} \prod_i \frac{1}{q_i!} \left[ \frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} j(x_1) \dots j(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1 \dots x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} . \\ &= \exp \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) . \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième égalité, on a utilisé (43) et la symétrie de  $G_c$  par rapport à ses variables. On trouve donc que la fonctionnelle génératrice  $W(j)$  des fonctions de corrélation connexes est  $\ln [Z(j)/Z(0)]$  :

$$W(j) = \ln \frac{Z(j)}{Z(0)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) \times \\ \times G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) .$$

(44)

Notez que  $G^{(N)}$  peut s'écrire :

$$G^{(N)} = G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{U I_\alpha = I} \prod_{\alpha} G_c(I_\alpha)$$

où  $I = \{x_1, \dots, x_N\}$  et  $I_\alpha$  est une partition de  $I : U(I_\alpha) = I$ . Chaque terme apparaît une fois et une seule dans le membre de droite. Remarquez aussi que dans le cas d'un hamiltonien gaussien, les fonctions de corrélation connexes sont nulles pour  $N \geq 3$ .

### C.3. Vertex propres et fonctionnelle génératrice

On peut encore trouver une simplification supplémentaire. En effet dans l'espace des  $k$  un diagramme tel que celui de la figure 21 s'écrit  $\hat{G}_1 G_0(k) \hat{G}_2$ .

Il suffit donc de savoir calculer  $\hat{G}_1$  et  $\hat{G}_2$  indépendamment pour obtenir l'expression de ce diagramme. Un tel diagramme est appelé 1-particule réductible (1-PR). On appellera *fonction de corrélation 1-particule irréductible* (1-PI) toute fonction de corrélation connexe qui ne peut pas être séparée en deux parties indépendantes en coupant une seule ligne interne (figure 22).

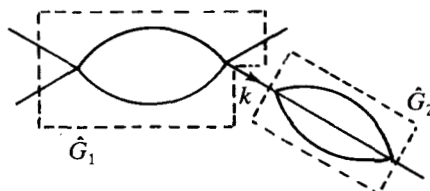


Figure 21. Un diagramme 1-particule réductible.

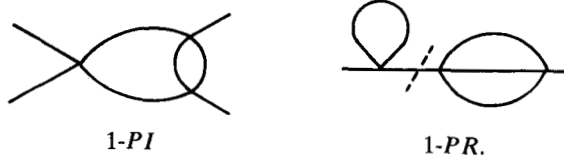


Figure 22. Diagrammes 1-PI et 1-PR.

Enfin on appellera *vertex propre* une fonction de corrélation 1-PI que l'on a amputée de ses lignes externes.

Par exemple l'expression du vertex propre de la figure 23 est donnée par :

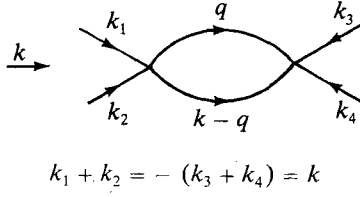


Figure 23.

$$-\frac{g^2}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)} \times \frac{1}{((k-q)^2 + m^2)}.$$

Il n'y a pas de facteur  $\prod_{i=1}^4 G_0(k_i)$

associé aux lignes externes. Un vertex propre sera en général noté  $\Gamma$ . On démontre le résultat remarquable suivant :

**Théorème :** La fonctionnelle génératrice des vertex propres est la transformée de Legendre de  $W(j)$ .

Afin d'alléger les notations dans la démonstration qui va suivre, il sera commode d'utiliser :

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} \rightarrow \frac{\delta}{\delta j_i}; \quad \int d^D x \rightarrow \sum_i.$$

Soit  $\bar{\varphi}_i = \frac{\delta W}{\delta j_i}$  la valeur moyenne du champ et  $\Gamma$  la transformée de Legendre de  $W$ ; en théorie des champs, le potentiel de Gibbs  $\Gamma$  est appelé *action effective* (remarquez que  $j(x)$  joue le rôle du champ magnétique et  $\bar{\varphi}(x)$  celui de l'aimantation; les équations qui vont suivre généralisent celles du chapitre I, paragraphe D.5) :

$$\Gamma = \sum_i \bar{\varphi}_i j_i - W(j); \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_k} = j_k. \quad (45)$$

Nous avons déjà vu (I-D.5) l'identité :

$$\sum_l \frac{\delta^2 W}{\delta j_l \delta j_l} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} = \sum_l G_{ll}^{(2)} \Gamma_{lk}^{(2)} = \delta_{ik} \quad (46)$$

montrant que  $\Gamma_{kl}^{(2)} = \delta^2 \Gamma / \delta \bar{\varphi}_k \delta \bar{\varphi}_l$  est l'inverse de la fonction de corrélation  $G_{kl}^{(2)}$ . Avec des variables continues, l'équation (46) s'écrit :

$$\int d^D z G^{(2)}(x-z) \Gamma^{(2)}(z-y) = \delta^{(D)}(x-y)$$

et dans l'espace de Fourier :

$$G^{(2)}(k) = 1/\Gamma^{(2)}(k).$$

Il est utile de définir l'énergie propre (\*)  $\Sigma(k)$  ;  $-\Sigma(k)$  est la somme de tous les diagrammes à deux points 1-PI et amputés de leurs lignes externes (c'est-à-dire la somme de tous les vertex propres à deux points) :

$$-\Sigma(k) = \text{tadpole} + \text{tadpole with bubble} + \text{bubble loop} + O(g^3)$$

La fonction de corrélation  $G^{(2)}(k)$  s'exprime en fonction de  $\Sigma(k)$  :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(k) &= G_0(k) - G_0(k) \Sigma(k) G_0(k) + \dots \\ &= G_0(k) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [-\Sigma(k) G_0(k)]^n \right) = [G_0^{-1}(k) + \Sigma(k)]^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit les expressions de  $G^{(2)}(k)$  et  $\Gamma^{(2)}(k)$  :

$$\boxed{G^{(2)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2 + \Sigma(k)} ; \quad \Gamma^{(2)}(k) = k^2 + m^2 + \Sigma(k)} \quad (47)$$

Passons maintenant aux fonctions de corrélation d'ordre plus élevé, en dérivant l'identité (46) par rapport à  $j_m$  :

$$\sum_i \frac{\delta^3 W}{\delta j_i \delta j_l \delta j_m} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} + \sum_l \frac{\delta^2 W}{\delta j_i \delta j_l} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta j_m \delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} = 0. \quad (48a)$$

Comme  $\Gamma$  est une fonction des  $\bar{\varphi}_i$ , il faut transformer la deuxième dérivation dans (48.a) ; faisons-le dans le cas général ( $\Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \delta^{(N)} \Gamma / \delta \varphi_{i_1} \dots \delta \varphi_{i_N}$ ) :

$$\frac{\delta}{\delta j_m} \Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \sum_n \frac{\delta \bar{\varphi}_n}{\delta j_m} \frac{\delta \Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)}}{\delta \bar{\varphi}_n} = \sum_n G_{mn}^{(2)} \Gamma_{n i_1 \dots i_N}^{(N+1)}. \quad (48b)$$

(\*) Terminologie empruntée à la théorie quantique des champs. Il faut prendre garde au fait que le signe de  $\Sigma(k)$  varie selon les auteurs.

Les équations (48) peuvent s'écrire sous forme graphique en représentant les  $\Gamma^{(N)}$  par des boules hachurées (figure 24) (on a utilisé (48.b) pour transformer (48.a)) :

$$\begin{aligned}
 \sum_l i \text{---} \textcircled{3} \text{---} l \text{---} \textcircled{\text{hachuré}} \text{---} k &= - \sum_{l,n} i \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} l \text{---} \textcircled{3} \text{---} k \text{---} n \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} m \quad (a) \\
 \frac{\delta}{\delta j_m} \textcircled{N} \text{---} i_1 \text{---} \text{---} i_N &= \sum_n m \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} n \text{---} \textcircled{N+1} \text{---} i_1 \text{---} \text{---} i_N \quad (b)
 \end{aligned}$$

Figure 24. Représentation graphique de (48).

Multipliant à droite les deux membres de (48.a) par  $G_{kp}$  et sommant sur  $k$  on obtient la relation entre  $G_c^{(3)}$  et  $\Gamma^{(3)}$ :

$$-G_c^{(3)}(i, m, p) = \sum_{l,k,n} i \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} l \text{---} \textcircled{3} \text{---} k \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} p \text{---} n \text{---} \textcircled{\phantom{3}} \text{---} m \quad (49)$$

L'équation (49) permet d'identifier  $\Gamma_{kin}^{(3)} = \frac{\delta^{(3)} \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_k \delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_n}$  avec le vertex

propre  $\bar{\Gamma}_{kin}^{(3)}$  : en effet  $\Gamma_{kin}^{(3)}$  est bien la fonction de corrélation connexe amputée de ses propagateurs externes complets, et c'est bien une fonction de corrélation 1-PI.

Continuons le processus en dérivant une nouvelle fois l'équation (49) par rapport à  $j_l$ . En utilisant (48.a) et (48.b) nous obtenons la relation entre  $G^{(4)}$  et  $\Gamma^{(4)}$  (figure 25) :

$$-\frac{\delta}{\delta j_l} G_c^{(3)}(i, m, p) = -G_c^{(4)}(i, m, p, l) =$$

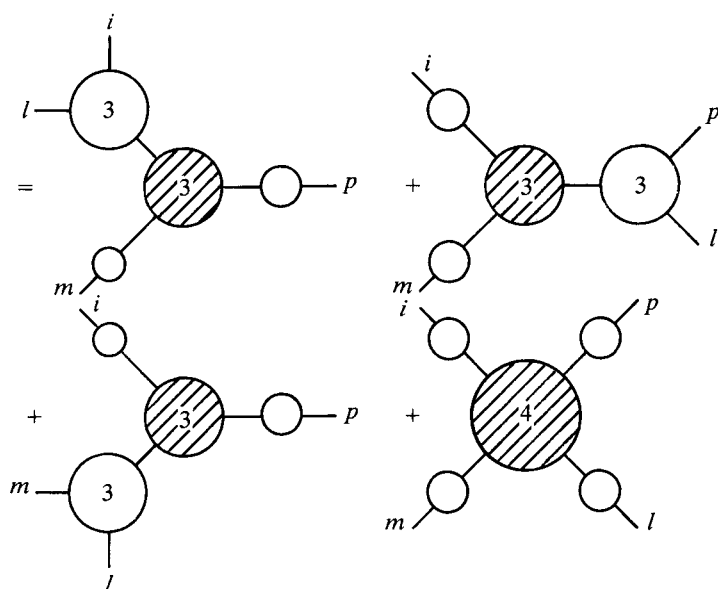


Figure 25.

Les trois premiers termes peuvent être réécrits en utilisant l'équation de la figure 26 :

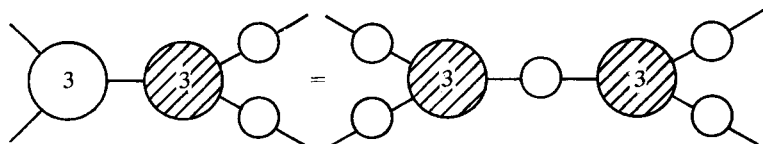


Figure 26.

Dans une théorie en  $\varphi^4$ , en l'absence de brisure de symétrie, le résultat final est très simple car un seul terme est non nul (figure 27) :

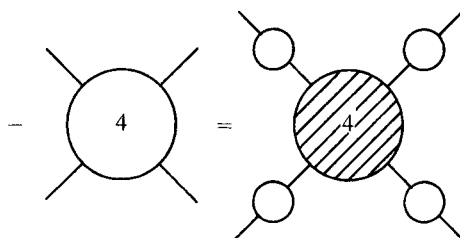


Figure 27.

Comme précédemment, la figure 25 (ou dans le cas le plus simple la figure 27) permet d'identifier  $\delta^{(4)}\Gamma/(\delta\varphi)^4$  avec le vertex propre  $\bar{\Gamma}^{(4)}$ .

Les cas particuliers  $N = 3$  et  $N = 4$  que nous venons d'étudier démontent le mécanisme de démonstration du théorème annoncé précédemment. Il suffit de procéder par récurrence, en admettant que nous ayons pu écrire à l'ordre  $N$  une équation analogue à celle de la figure 25, et que nous ayons pu identifier le vertex propre  $\bar{\Gamma}^{(N)}$  avec la dérivée d'ordre  $N$  du potentiel de Gibbs  $\Gamma$ . Dérivant cette équation par rapport à  $j_l$  nous obtenons :

$$- \text{diagram}(N+1) = \frac{\delta}{\delta j_l} \text{diagram}(N) + \frac{\delta}{\delta j_l} (\text{Reste})$$

où le « reste » ne contient pas  $\Gamma^{(N)}$ , mais seulement  $\Gamma^{(N-1)}$ ,  $\Gamma^{(N-2)}$  etc. (cf. figure 25). Nous en déduisons :

$$- \text{diagram}(N+1) = \text{diagram}(N+1) + \sum_{k=1}^N \text{diagram}(N) + \frac{\delta}{\delta j_l} (\text{Reste})$$

En amputant les deux membres de l'équation précédente des propagateurs externes complets, nous pouvons identifier  $\bar{\Gamma}^{(N+1)}$  dans le membre de gauche avec  $\Gamma^{(N+1)}$  dans le membre de droite : en effet, après amputation, il ne reste qu'un seul graphe 1-PI dans chacun des deux membres de l'équation.

## D. POTENTIEL EFFECTIF DÉVELOPPEMENT EN NOMBRE DE BOUCLES

Compte tenu de ce que nous venons d'établir dans les deux paragraphes précédents, il est utile de revenir sur les résultats démontrés en II-D et de les réinterpréter à la lumière des propriétés du développement perturbatif. Rappelons que le champ extérieur (ou source) est  $j(x)$  qui joue le rôle du champ magnétique  $B(x)$  du chapitre II, et que l'aimantation est notée  $\bar{\varphi}(x)$ .

### D.1. Symétrie brisée et potentiel effectif

Lorsque  $T < T_c$ , la valeur moyenne de  $\varphi(x)$  est non nulle, même en l'absence de champ extérieur :

$$\lim_{j \rightarrow 0} \lim_{L^D \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(x) = v \neq 0.$$

Je me limiterai au cas d'un hamiltonien de Landau-Ginzburg simple :  $n = 1$ , bien que le cas  $n > 1$  introduise une nouveauté intéressante : les bosons de Goldstone (exercice II.4 et XIII-C.1).

En champ extérieur nul ( $j = 0$ ) nous avons :

$$\Gamma^{(1)} = \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} \right|_{j=0} = 0$$

et l'on peut écrire  $\Gamma(\bar{\varphi}(x))$  sous la forme :

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v) \times \\ \times (\bar{\varphi}(x_1) - v) \dots (\bar{\varphi}(x_N) - v) \quad (50)$$

où le vertex propre  $\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v)$  est calculé en présence d'une brisure de symétrie. On remarque que le développement de Taylor d'une fonction  $f(\bar{\varphi})$  peut être écrit, soit au voisinage de  $\bar{\varphi} = v$  :

$$f(\bar{\varphi}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} f^{(N)}(v) (\bar{\varphi} - v)^N$$

ou au voisinage de  $\bar{\varphi} = 0$  :

$$f(\bar{\varphi}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} f^{(N)}(0) \bar{\varphi}^N.$$

L'expression (50) peut donc être transformée en :

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \bar{\varphi}(x_1) \dots \bar{\varphi}(x_N) \quad (51)$$

où :

$$\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v = 0) .$$

Dans l'expression (51) de  $\Gamma(\bar{\varphi})$ , les *vertex propres* sont donc calculés en l'absence de brisure de symétrie (valeur moyenne du champ nulle).

Si  $\bar{\varphi}(x)$  est indépendant de  $x$  :  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}$  l'expression (51) devient :

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}^N}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) .$$

Si l'on se souvient que l'on extrait un facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma k_i)$ , ou  $L^D \delta_{\Sigma k_i}$ , dans la définition de la transformée de Fourier d'une fonction de corrélation, on trouve pour le potentiel de Gibbs par unité de volume :

$$\boxed{L^{-D} \Gamma(\bar{\varphi}) = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}^N}{N!} \Gamma^{(N)}(k_i = 0)} . \quad (52)$$

La quantité  $L^{-D} \Gamma(\bar{\varphi})$  est souvent appelée *potentiel effectif*  $U(\bar{\varphi})$ . L'équation d'état (en champ extérieur uniforme) est :

$$dU/d\bar{\varphi} = j .$$

En champ extérieur nul, la valeur moyenne  $v$  est obtenue en cherchant le minimum du potentiel effectif  $U(\bar{\varphi})$ . Ceci a été vu en détail (II-B) dans le cadre de l'approximation de Landau pour  $\Gamma(\bar{\varphi})$ .

Il est maintenant instructif de faire le lien entre l'expression exacte (52) et les expressions approchées (approximation de Landau : II-B ; première correction à Landau : II-D) que nous avons obtenues précédemment. Ce lien sera établi grâce au développement en nombre de boucles.

## D.2. Développement en nombre de boucles

Remplaçons  $H$  par  $\frac{1}{\hbar} H$  et cherchons un développement en puissances de  $\hbar$  de la fonctionnelle génératrice  $Z(j)$  :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \mathcal{N} \exp \left( - \int \frac{1}{\hbar} V \left( \frac{\delta}{\delta j} \right) \right) \int \mathcal{D}\varphi \times \\ &\quad \times \exp \left( - \frac{1}{2} \int \varphi \frac{1}{\hbar} G^{(0)-1} \varphi + \int j \varphi \right) \\ &= \mathcal{N}' \exp \left( - \int \frac{1}{\hbar} V \left( \frac{\delta}{\delta j} \right) \right) \exp \left( \frac{1}{2} \hbar \int j G^{(0)} j \right). \end{aligned}$$

On obtient le même développement perturbatif que précédemment à ceci près que :

- chaque interaction est multipliée par  $1/\hbar$ ,
- chaque ligne est multipliée par  $\hbar$ .

Un vertex propre à un certain ordre de la théorie des perturbations sera donc multiplié par :

$$\hbar^I - V = \frac{1}{\hbar} \hbar^{I-V+1} = \frac{1}{\hbar} \hbar^L$$

où  $I$  est le nombre de lignes internes (un vertex propre n'a pas de lignes externes),  $V$  le nombre d'interactions et  $L$  le nombre de boucles.

Nous avons effectué au chapitre II un calcul direct de  $\Gamma(\varphi)$  sous forme d'un développement en puissances de  $\hbar$  ; d'après ce qui précède *ce développement est donc un développement en nombre de boucles* ; en particulier :

$L = 0$  correspond à l'approximation de Landau

$L = 1$  correspond à la première correction calculée au II-D .

Dans le cas d'une interaction *monomiale* ( $\mathcal{V}(\varphi) = c\varphi^n$ ), il y a, à  $N$  fixé, correspondance biunivoque entre l'ordre de la théorie des perturbations et le nombre de boucles : en effet, par exemple si  $\mathcal{V} = c\varphi^4$ ,  $L = p + 1 - N/2$ , où  $p$  est l'ordre de la théorie des perturbations. Cette remarque confirme le raisonnement utilisé au II-D.2.

Nous avons donc à notre disposition deux méthodes pour calculer le potentiel effectif  $U(\varphi)$  :

- soit effectuer comme au II-D un calcul direct à chaque ordre en  $\hbar$ ,

• soit utiliser l'équation (52) en calculant perturbativement tous les  $\Gamma^{(N)}$  et en obtenant  $\Gamma^{(N)}$  à l'ordre  $L = 0$ ,  $L = 1$ , etc. On montre explicitement dans l'exercice 6 que les deux méthodes donnent le même résultat pour  $L = 0$  et  $L = 1$ . Notons que l'approximation de Landau  $L = 0$  est souvent appelée *approximation en arbres* (figure 28), ou *approximation classique* ( $\hbar \rightarrow 0$ , cf. note p. 76).

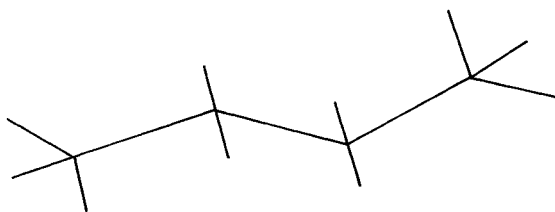


Figure 28. Un diagramme en arbres.

## E. ÉVALUATION DES INTÉGRALES DE FEYNMAN

Sauf dans le cas à une boucle ( $L = 1$ ), l'évaluation des diagrammes de Feynman est complexe, et en règle générale un calcul analytique exact est impossible. Cependant il arrive souvent que l'on n'ait pas besoin de l'expression complète du graphe, mais seulement de son comportement dans certaines limites. Il n'existe pas de recette générale pour ce type de calcul, et la technique doit être adaptée à chaque cas particulier. Il n'est évidemment pas question de faire dans ce livre une revue de tous les procédés d'évaluation mis au point depuis quatre décennies par les physiciens. Je me contenterai de décrire les calculs à une boucle de façon assez détaillée, et de donner une représentation paramétrique qui peut, ou peut ne pas être une technique pratique d'évaluation, mais qui permet en tout cas la démonstration de nombreuses propriétés générales.

### E.1. Un cas élémentaire



Figure 29.

Examinons d'abord un cas très simple, celui de la correction d'ordre  $g$  à  $G^{(2)}(k)$  ; le graphe de la figure 29 est appelé « tadpole » (dans la théorie en  $\varphi^3$ , ces graphes ont, avec un peu d'imagination, la forme d'un têtard) : techniquement un tadpole est un graphe dont l'expression est indépendante des moments externes. L'expression ana-

lytique du vertex propre de la figure 29 est :

$$\bar{\Sigma} = g \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2} = \frac{1}{2} g K_D \int_0^\Lambda \frac{q^{D-1} dq}{q^2 + m^2}.$$

L'intégrale est convergente si le cut-off  $\Lambda$  est fini. Lorsque  $\Lambda/m \gg 1$ , et pour  $D > 2$ , l'intégrale se comporte comme  $\Lambda^{D-2}$ . En théorie quantique des champs on souhaitera prendre la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et il faudra interpréter les divergences des intégrales de Feynman : les divergences qui proviennent de la région  $q \rightarrow \infty$ , sont appelées *divergences ultraviolettes*. Lorsque  $m^2 = 0$ , l'intégrale diverge à cause de la région  $q \rightarrow 0$  si  $D \leq 2$  : cette fois il s'agit d'une *divergence infrarouge*.

Supposons  $D < 2$  et faisons tendre  $\Lambda$  vers l'infini ; il est alors possible d'obtenir une expression analytique pour  $\bar{\Sigma}$  :

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{4} g K_D m^{D-2} \int_0^\infty \frac{x^{D/2-1} dx}{x+1} = \frac{1}{4} g K_D m^{D-2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (53)$$

Le pôle de la fonction  $\Gamma(1 - D/2)$  à  $D = 2$  reflète la divergence ultraviolette pour  $D \geq 2$ . Cependant cette expression peut être utilisée pour définir  $\bar{\Sigma}$  par prolongement analytique pour des valeurs de  $D$  différentes de 2, 4, 6 ...

A la limite  $m^2 = 0$ , et pour des valeurs de  $D > 2$ ,  $D \neq 4, 6, \dots$ ,  $\bar{\Sigma}$  s'annule. Ceci suggère (mais ne prouve pas !) que si l'on définit les intégrales de Feynman pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  par prolongement analytique, ce que nous appellerons au chapitre suivant « régularisation dimensionnelle », on peut purement et simplement ignorer les tadpoles, bien que pour  $m = 0$ , l'intégrale, à strictement parler, ne soit définie pour aucune valeur de  $D$  ! Une justification de ce résultat est donnée par exemple dans le livre de Collins, chapitre 4. Nous nous contenterons de l'argument heuristique exposé ci-dessus.

## E.2. Méthode de l'identité de Feynman

Dans le cas des diagrammes à une boucle, on utilise en général l'identité de Feynman (exercice 8) :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (54)$$

Appliquons cette identité pour calculer la contribution de la figure 30 à  $\Gamma_{ijkl}^{(4)}$  :

$$\bar{\Gamma}_{ijkl}^{(4)} = \frac{g^2}{18} [\delta_{ij} \delta_{kl} (n+4) + 2 \delta_{ik} \delta_{jl} + 2 \delta_{il} \delta_{jk}] I(k)$$

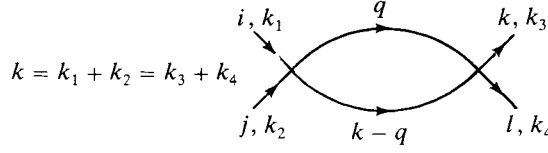


Figure 30.

(pour le facteur entre crochets, cf. exercice 3) ; l'intégrale  $I(k)$  vaut :

$$I(k) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)((k - q)^2 + m^2)}.$$

En utilisant l'identité (54) on obtient :

$$I(k) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(1-x)(q^2 + m^2) + x((k - q)^2 + m^2)]^2}.$$

Le changement de variables  $q \rightarrow q' + xk$  met  $I(k)$  sous la forme :

$$I(k^2) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + x(1-x)k^2 + m^2)^2}.$$

Cette forme montre que  $I$  est en fait une fonction de  $k^2$  uniquement. L'intégrale sur  $q$  s'effectue en coordonnées polaires :

$$I(k^2) = K_D \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{q^{D-1} dq}{(q^2 + x(1-x)k^2 + m^2)^2}.$$

On pose  $u = q^2$  et on utilise :

$$\int_0^\infty \frac{u^\alpha du}{(u + r)^\beta} = r^{\alpha+1-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta - \alpha - 1)}{\Gamma(\beta)}$$

ce qui donne :

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx [m^2 + x(1-x)k^2]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (55)$$

Dans l'intégration sur  $q$ , on a supposé  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Ceci n'est possible que si  $D < 4$ , car dans le cas contraire l'intégrale présente une divergence ultraviolette, c'est-à-dire une divergence provenant de la région  $q \rightarrow \infty$ . La divergence à  $D = 4$  est reflétée par le pôle de la fonction  $\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$  à  $D = 4$ . L'expression (55) de  $I(k^2)$  peut être utilisée pour définir  $I(k^2)$  pour des valeurs arbitraires de  $D$  (sauf  $D = 4, 6, 8, \dots$ ).

Lorsque  $m^2 \neq 0$ , le résultat de l'intégration sur  $x$  s'exprime sous forme de fonctions hypergéométriques, ce qui n'est pas particulièrement illuminant. Lorsque  $m^2 = 0$ , les choses se simplifient en remarquant que (\*) :

$$\int_0^1 du u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

On trouve :

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\left[ \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \right]^2}{\Gamma(D - 2)} (k^2)^{\frac{D}{2} - 2}. \quad (56)$$

Le facteur  $(k^2)^{\frac{D}{2} - 2}$  a une origine purement dimensionnelle : en effet la dimension de  $I$  est  $D - 4$  et  $k$  est la seule quantité dimensionnée à notre disposition.

D'autre part une nouvelle divergence apparaît pour  $D = 2$  à cause du facteur  $[\Gamma(D/2 - 1)]^2 / \Gamma(D - 2)$ . Cette divergence provient de la région  $q \rightarrow 0$  : c'est un nouvel exemple de divergence infrarouge.

### E.3. Représentation paramétrique générale

Etablissons maintenant une représentation paramétrique générale des intégrales de Feynman en suivant Itzykson-Zuber ; considérons un vertex propre  $\Gamma^{(E)}$  comprenant (\*\*):

- $E$  lignes externes  $k_s$  :  $1 \leq s \leq E$ ,
- $I$  lignes internes  $p_i$  :  $1 \leq i \leq I$ , correspondant à des masses  $m_i$ ,
- $L$  variables d'intégration indépendantes  $q_r$  :  $1 \leq r \leq L$ .

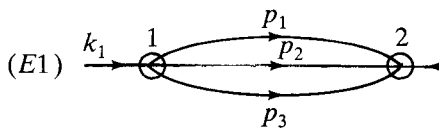
Tous les moments externes sont supposés entrer dans le diagramme ; les lignes internes sont orientées arbitrairement. Considérons un vertex  $v$  et une ligne interne  $i$ , et choisissons un facteur  $\varepsilon_{vi}$  de la façon suivante :

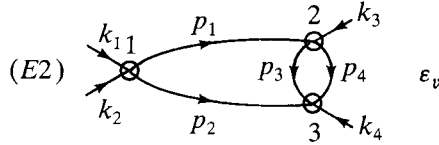
$$\begin{aligned} \varepsilon_{vi} &= +1 && \text{si la ligne } i \text{ part du vertex } v \\ \varepsilon_{vi} &= -1 && \text{si la ligne } i \text{ arrive au vertex } v \\ \varepsilon_{vi} &= 0 && \text{si la ligne } i \text{ n'est pas connectée directement au vertex } v. \end{aligned}$$

(\*) De façon générale, l'évaluation des intégrales de Feynman est plus simple quand les masses sont nulles.

(\*\*) Jusqu'à la fin du chapitre, je désignerai par  $E$  (et non  $N$ ) le nombre de lignes externes.

Exemples :

(E1)   $\varepsilon_{vi} = \begin{matrix} i \rightarrow \\ v \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (E1)$

(E2)   $\varepsilon_{vi} = \begin{matrix} i \rightarrow \\ v \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (E2)$

L'expression de l'intégrale sera :

$$J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} \frac{1}{p_i^2 + m_i^2} \right\} \prod_{v=1}^V (2\pi)^D \delta^{(D)} \left( k_v - \sum_i \varepsilon_{vi} p_i \right) \quad (57)$$

où  $k_v$  = somme de tous les moments externes arrivant au vertex  $v$  ( $k_v = 0$  si le vertex n'est pas connecté directement aux lignes externes).

Nous allons utiliser la « régularisation de Schwinger » du propagateur :

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 + m^2)}. \quad (58)$$

Cette représentation a un double avantage :

- elle permet de ramener le calcul de (57) au calcul d'intégrales gaussiennes,
- elle se prête bien à l'introduction d'un cut-off :

$$\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 + m^2)} = \frac{e^{-(p^2 + m^2)/\Lambda^2}}{p^2 + m^2}. \quad (59)$$

Cette façon d'introduire un cut-off est beaucoup plus élégante que celle qui consiste à couper brutalement les intégrales sur  $q$  à  $q = \Lambda$  ; dès que  $L > 1$ , le cut-off brutal devient impraticable. En utilisant (58) et la représentation exponentielle de la fonction  $\delta$  l'expression de  $J'$  devient :

$$J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} d\alpha_i \exp(-\alpha_i(p_i^2 + m_i^2)) \right\} \times \\ \times \prod_{v=1}^V \left\{ d^D y_v \exp \left( -i y_v \cdot \left( k_v - \sum_i \varepsilon_{vi} p_i \right) \right) \right\}.$$

L'intégrale sur  $p$  est une transformée de Fourier d'une gaussienne :

$$\int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} \exp \left( -\alpha_i p_i^2 + i p_i \cdot \sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right) = \frac{1}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{4\alpha_i} \left( \sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right)^2 \right) \\ J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \exp \left( -\frac{1}{4\alpha_i} \left( \sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right)^2 \right)}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \right\} \prod_{v=1}^V \{ d^D y_v e^{-ik_v \cdot y_v} \}.$$

Effectuons maintenant les intégrations sur les variables  $y_v$ , en numérotant les vertex de 1 à  $V$  et en faisant le changement de variables de jacobien 1 :

$$y_1 = z_1 + z_V ; \quad y_2 = z_2 + z_V ; \quad \dots ; \quad y_V = z_V .$$

Remarquons que  $\sum_v \varepsilon_{vi} = 0$  car à  $i$  fixé seuls deux  $\varepsilon_{vi}$  sont  $\neq 0$ , l'un est égal à +1 et l'autre à -1.

$$\sum_{v=1}^V \varepsilon_{vi} y_v = \sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v + \sum_{v=1}^V \varepsilon_{vi} z_V = \sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v .$$

L'intégrale sur  $z_V$  donne donc un facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)} \left( \sum_{i=1}^V k_i \right)$  :

$$J' = (2\pi)^D \delta^{(D)} \left( \sum_{s=1}^E k_s \right) J$$

et par convention ce facteur  $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\dots)$  est à extraire de  $\Gamma^{(E)}$ ;  $J$  devient :

$$J = \int \prod_{i=1}^J \left\{ \frac{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \exp \left( -\frac{1}{4\alpha_i} \left( \sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v \right)^2 \right)}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \right\} \prod_{v=1}^{V-1} \{ d^D z_v e^{-ik_v \cdot z_v} \}.$$

Introduisons maintenant la matrice symétrique  $(V-1) \times (V-1) A_{st}(\alpha)$  :

$$A_{st}(\alpha) = \sum_i \varepsilon_{si} \frac{1}{\alpha_i} \varepsilon_{ti} .$$

On peut montrer que cette matrice est non singulière et positive. L'intégrale sur les variables  $z_v$  est à nouveau gaussienne :

$$\int \left( \prod_{v=1}^{V-1} d^D z_v e^{-ik_v \cdot z_v} \right) \exp \left( -\frac{1}{4} \sum_{s,t} z_s A_{st}(\alpha) z_t \right) = \\ = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}(V-1)}}{[\det A(\alpha)]^{D/2}} \exp \left( -\sum_{s,t=1}^{V-1} k_s A_{st}^{-1}(\alpha) k_t \right).$$

Notez que  $I - V + 1 = L$  est le nombre de boucles indépendantes. On trouve donc finalement :

$$\boxed{J = (4\pi)^{-LD/2} \int \prod_{i=1}^I \{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2}\} \left[ \frac{1}{P(\alpha)} \right]^{D/2} e^{-k^T A^{-1} k} \quad A_{st} = \sum_i \varepsilon_{si} \frac{1}{\alpha_i} \varepsilon_{ti} ; \quad P(\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_I \det A(\alpha)} \quad (60)$$

Ecrivons explicitement les intégrales correspondant aux exemples E1 et E2 :

$$(E1) \quad A_{11} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$$

$$J = (4\pi)^{-D} \int \prod_{i=1}^3 \{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2}\} [P(\alpha)]^{-D/2} e^{-k^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{P(\alpha)}}$$

$$(E2) \quad A_{11} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} ; \quad A_{12} = A_{21} = \frac{-1}{\alpha_1} ; \quad A_{22} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4}$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 .$$

Il est possible de donner des règles générales pour écrire  $P(\alpha)$  et  $A^{-1}(\alpha)$  dans le cas d'un graphe arbitraire : cf. Itzykson-Zuber, p. 297.

La dernière étape consiste à introduire les variables d'homogénéité :

$$\lambda = \alpha_1 + \dots + \alpha_I ; \quad \alpha_i = \lambda x_i ; \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

$$\int \prod d\alpha_i = \int \prod dx_i \frac{d\lambda}{\lambda^{-I+1}} \delta\left(1 - \sum x_i\right) .$$

D'autre part :

$$A(\alpha) = \frac{1}{\lambda} A(x)$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_I \det A(\alpha) = \lambda^{I-(V-1)} (x_1 \dots x_I \det A(x)) \\ = \lambda^{LD/2} P(x)$$

d'où le résultat :

$$\boxed{J = (4\pi)^{-LD/2} \int \frac{\prod dx_i \delta\left(1 - \sum x_i\right)}{[P(x_i)]^{D/2}} \int \frac{d\lambda}{\lambda^{1-I+LD/2}} \times} \quad (61)$$

$$\times \exp\left(-\lambda \left(\sum_i x_i m_i^2 + k^T A^{-1}(x) k\right)\right)$$

Si  $m_i = m$ ,  $\sum m_i^2 x_i = m^2$ ; d'autre part si l'intégrale sur  $\lambda$  converge à  $\lambda = 0$ :

$$J = \frac{\Gamma(I - LD/2)}{(4\pi)^{LD/2}} \int \frac{\prod dx_i \delta\left(1 - \sum x_i\right)}{[P(x_i)]^{D/2}} (m^2 + k^T A^{-1}(x) k)^{\frac{LD}{2} - I}. \quad (62)$$

On retrouve bien l'équation (55) dans le cas  $I = 2$ ,  $L = 1$ ; il est facile de vérifier que  $P(x) = 1$  et  $A^{-1}(x) = x(1 - x)$ . L'exposant  $\left(\frac{LD}{2} - I\right)$  se retrouve par un argument dimensionnel : la dimension de  $J$  est en effet  $LD - 2I$ .

Il faut se méfier de la simplicité apparente de l'équation (62) : des divergences sont cachées dans les intégrales sur les variables  $x_i$ ; cela ne se produit pas dans le cas d'une boucle, mais les ennuis arrivent dès que  $L > 1$ . Je donne maintenant deux exemples d'évaluation explicite.

#### E.4. Calcul de $\eta$ à l'ordre $\varepsilon^2$

Les divergences des intégrales de Feynman au voisinage de  $D = 4$  vont jouer un rôle crucial dans les deux chapitres suivants. Commençons par étudier un cas simple, celui de  $\Gamma^{(4)}$ , en reprenant l'expression (55) de  $I(k^2)$  et en l'évaluant au voisinage de  $\varepsilon (= 4 - D) = 0$ .

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx [m^2 + x(1-x)k^2]^{-\varepsilon/2}.$$

En utilisant :

$$X^{-\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon \ln X; \quad \Gamma(\varepsilon) \simeq \frac{1}{\varepsilon}$$

on trouve à l'ordre  $(\varepsilon)^0$ :

$$(4\pi)^2 I(k^2) = \frac{2}{\varepsilon} - \int_0^1 dx \ln[m^2 + x(1-x)k^2] + \text{Cte}. \quad (63)$$

Le pôle à  $\varepsilon = 0$  reflète la divergence ultraviolette à  $D = 4$ .

L'étude de l'exemple (E1) va permettre le calcul de  $\eta$  à l'ordre  $\varepsilon^2$ ; le graphe de l'exemple (E1) donne une contribution à l'énergie propre  $\Sigma(k^2)$  et cette fois,

on calculera directement en dimension  $D = 4$  avec un cut-off  $\Lambda$  :

$$I(k^2) = (4\pi)^{-4} \int \frac{\prod_1^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i)}{[P(x_i)]^2} \int_{c\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \exp(-\lambda(m^2 + k^2 f(x_i)))$$

$$P(x_i) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 ; \quad f(x_i) = (x_1 x_2 x_3)/P(x_i)$$

et  $c$  est une constante.

L'intégrale est une intégrale à deux boucles et présente des divergences de recouvrement, qui se traduisent par la divergence de l'intégrale sur les  $x_i$ .

Ces divergences se produisent quand certains des  $x_i$  tendent vers zéro ; en réalité, à cause du cut-off, les  $x_i$  ne peuvent jamais être nuls, mais tenir compte du cut-off est compliqué. Heureusement nous aurons uniquement besoin de la dérivée :

$$\frac{dI}{dk^2} = -\frac{1}{(4\pi)^4} \int \frac{\prod dx_i \delta(1 - \sum x_i) f(x_i)}{[P(x_i)]^2} \times \int_{c\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \exp(-\lambda(m^2 + k^2 f(x_i))) .$$

L'intégrale sur les  $x_i$  est maintenant convergente. En effet comme :

$$P(x_i) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

on voit que la région dangereuse est celle où  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$  ou  $(x_2, x_3)$  tendent vers zéro *simultanément* ; par exemple si  $x_3 \rightarrow 1$ ,  $P(x_i) \simeq (x_1 + x_2)$  et

$$\int \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

diverge. Par contre :

$$\int \frac{x_1 x_2 dx_1 dx_2}{(x_1 + x_2)^3}$$

est parfaitement convergent. L'intégrale sur  $\lambda$  donne un facteur  $\ln \Lambda^2$  + termes non divergents ; on trouve :

$$\frac{dI}{dk^2} \simeq -\frac{\ln \Lambda^2}{(4\pi)^4} \int \frac{\prod dx_i \delta(1 - \sum x_i) f(x_i)}{[P(x_i)]^2} .$$

Pour calculer l'intégrale, on effectue le changement de variables :

$$x_1 = \rho x ; \quad x_2 = x(1 - \rho) ; \quad x_3 = 1 - x .$$

Un calcul ennuyeux, mais sans aucune difficulté, montre que l'intégrale vaut 1/2 :

$$\frac{dI}{dk^2} = -\frac{1}{2(4\pi)^4} \ln \Lambda^2 + \text{termes non divergents} . \quad (64)$$

Comme application, calculons l'exposant critique  $\eta$  à l'ordre  $\varepsilon^2$ . Le graphe que nous venons d'étudier est le seul à donner une contribution dépendant de  $k$  à l'ordre  $g^2$ . En effet, l'autre graphe 1-PI (figure 31) donne une contribution indépendante de  $k$ . Lorsque  $m^2 = 0$ , le terme logarithmique de  $\Sigma(k^2)$  est en  $\ln(\Lambda^2/k^2)$ , car l'argument du logarithme doit être sans dimensions. Rétablissant tous les facteurs, la contribution à  $\frac{d}{dk^2} \Sigma(k^2)$  que nous venons de calculer est :

$$-\frac{g^2}{12(4\pi)^4} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}$$

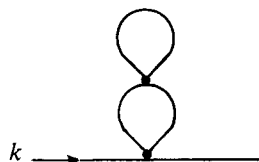


Figure 31.

ce qui donne pour la dérivée de la fonction de corrélation inverse :

$$\frac{d}{dk^2} \Gamma(k^2) = 1 - \frac{g^2}{12(4\pi)^4} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2} + O(g^2 \times 1, g^3).$$

D'autre part à  $T = T_c$  on sait que

$$\Gamma(k^2) = k^{2-\eta} = k^2 \left( 1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2 + \dots \right), \quad \Gamma'(k^2) \simeq 1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2.$$

On sait également que l'on doit choisir pour  $g$  la valeur au point fixe (cf. III.67) :

$$g = g^* = \frac{(4\pi)^2 \varepsilon}{3}.$$

Par identification des termes en  $\ln k^2$ , on obtient  $\eta$  :

$$\eta = \frac{(g^*)^2}{6(4\pi)^4} = \frac{\varepsilon^2}{54}. \quad (65)$$

## F. COMPTAGE DE PUISSANCES DIVERGENCES ULTRAVIOLETES ET INFRAROUGES

Dans des facteurs tels que  $\lambda^{-1+I-LD/2}$  dans (61) ou  $(m^2 + k^T A^{-1} k)^{LD/2-I}$  dans (62), les exposants ont une origine purement dimensionnelle : l'intégrand est, schématiquement,  $\int (d^D q)^L (p^2)^{-I}$  et a pour dimension  $LD - 2I$ . On définit une quantité  $\omega(G)$ , appelée *degré (ou indice) superficiel de divergence* du

*diagramme*, qui permet de déterminer le *degré de divergence ultraviolet* ( $q \rightarrow \infty$ ), par :

$$\omega(G) = LD - 2I.$$

L'intégrale sur  $q$  se comporte schématiquement comme  $\int^\Lambda q^{\omega(G)-1} dq$  : si  $\omega(G) > 0$ , l'intégrale divergera comme  $\Lambda^{\omega(G)}$  (plus exactement comme  $\Lambda^{\omega(G)}(\ln \Lambda)^p$  où  $p$  est entier), et si  $\omega(G) = 0$ , comme  $(\ln \Lambda)^p$ . Si  $\omega(G) < 0$ , le graphe est superficiellement convergent (superficiellement car une sous-intégration peut conduire à une divergence). Nous allons obtenir une expression intéressante de  $\omega(G)$ , faisant intervenir le nombre de lignes externes du diagramme, en utilisant d'abord un argument topologique, puis un argument dimensionnel.

### F.1. Argument topologique

Supposons une interaction de type tout à fait général, avec des termes en  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$ , etc., et même des couplages dérivatifs :  $\varphi^2(\nabla\varphi)^2$  etc. Dans le cas d'une interaction dérivative, chaque  $\nabla$  donne un facteur  $ik$  au vertex ; en effet dans l'application du théorème de Wick :

$$\overline{\varphi(x)} \nabla \varphi(z) \rightarrow \nabla_z G_0(x-z) = \text{T.F.} (ikG_0(k)).$$

Si l'on a un vertex de type  $(i)$  avec une interaction contenant  $\delta_i$  dérivées, il faudra multiplier l'intégrand du diagramme par un facteur  $(k)^{\delta_i}$ . On aura donc dans le cas de couplages dérivatifs :

$$\omega(G) = LD - 2I + \sum_i \delta_i.$$

Utilisons d'abord  $L = I - V + 1$  :

$$\omega(G) - D = I(D - 2) + \sum_i (\delta_i - D).$$

Au vertex  $(i)$  arrivent  $n_i$  lignes si le vertex correspond à une interaction en  $(\varphi)^{n_i}$ , avec éventuellement des dérivées ;  $n_i = n_i^{(\text{int})} + n_i^{(\text{ext})}$  et :

$$I = \frac{1}{2} \sum_i n_i^{(\text{int})}; \quad E = \sum_i n_i^{(\text{ext})}.$$

Définissons un index  $\omega_i$  dont l'interprétation sera donnée un peu plus loin :

$$\omega_i = n_i \left( \frac{D}{2} - 1 \right) + \delta_i. \quad (66)$$

L'expression de  $\omega(G)$  devient :

$$\begin{aligned}
 \omega(G) - D &= \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \sum_i n_i^{(\text{int})} + \sum_i (\delta_i - D) \\
 &= \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \sum_i n_i - \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \sum_i n_i^{(\text{ext})} + \sum_i (\delta_i - D) \\
 &= \sum_i (\omega_i - D) - E \left( \frac{D}{2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\omega(G) - D = \sum_i (\omega_i - D) - E \left( \frac{D}{2} - 1 \right)} \quad (67)$$

**Exemple :** Théorie en  $g\varphi^4$  :  $\omega = 4 \left( \frac{D}{2} - 1 \right) = 2D - 4$

$$\begin{aligned}
 E = 2 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 2 \\
 E = 4 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 4 - D \\
 E = 6 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 6 - 2D.
 \end{aligned}$$

De façon générale, l'équation (66) montre que pour  $D > 2$  (mais sinon la théorie n'est pas définie),  $\omega(G)$  décroît avec le nombre de lignes externes. Pour une théorie en  $g\varphi^4$ , et pour  $D = 4$ , seuls les diagrammes  $E = 2$  ( $\omega(G) = 2$ ) et  $E = 4$  ( $\omega(G) = 0$ ) sont superficiellement divergents.

## F.2. Argument dimensionnel

Nous avons vu (III-D.2) que la dimension du champ  $\varphi$  est  $[\varphi] = \frac{D}{2} - 1$ . Un terme d'interaction général s'écrira :

$$g_i \int d^D x (\nabla)^{\delta_i} (\varphi)^{n_i}.$$

Cette quantité doit être sans dimensions, ce qui impose :

$$[g_i] - D + \delta_i + n_i \left[ \frac{D}{2} - 1 \right] = 0$$

ou

$$\boxed{[g_i] = D - \omega_i} \quad (68)$$

La dimension  $[g_i]$  de la constante de couplage est donc reliée très directement à l'index  $\omega_i$  défini en (66).

Pour retrouver l'équation (67), déterminons d'abord la dimension de  $\Gamma^{(E)}$  dans l'espace des  $k$  ;  $\Gamma^{(E)}(k_i = 0)$  s'obtient en dérivant  $E$  fois le potentiel de Gibbs (sans dimension) par rapport à une aimantation uniforme  $M$ , de dimension  $\left(\frac{D}{2} - 1\right)$ , et en divisant par un volume (dimension  $-D$ ) :

$$[\Gamma^{(E)}] = D - E \left( \frac{D}{2} - 1 \right). \quad (69)$$

La quantité :

$$\left( \prod_{i=1}^V g_i \right) \int k^{\omega(G)-1} dk$$

doit avoir pour dimension  $D - E \left( \frac{D}{2} - 1 \right)$ , et compte tenu de (68) on retrouve bien le résultat (67).

### F.3. Divergences infrarouges (interaction en $\varphi^4$ )

Lorsque  $m^2 = 0$ , on peut avoir dans certains cas des divergences infrarouges. Contrairement au cas des divergences ultraviolettes, *ces divergences ne se produisent que pour des configurations particulières des moments externes, du moins lorsque  $D = 4$* . Par exemple la contribution de la figure 32 à  $\Gamma^{(6)}$

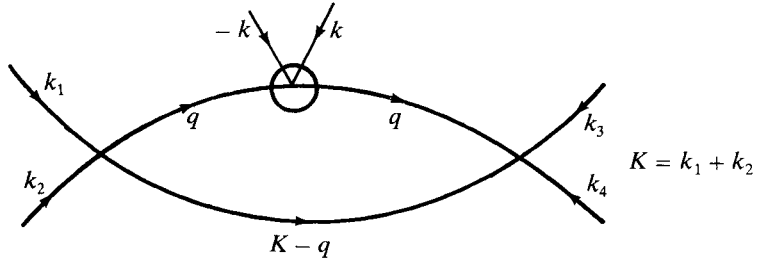


Figure 32.

sera donnée, à un facteur près, par l'intégrale ( $D = 4, m^2 = 0$ ) :

$$\int \frac{d^4 q}{q^4 (K - q)^2}$$

qui est infrarouge divergente. Cette divergence provient de ce qu'au vertex encerclé entre un moment externe nul. De façon générale, on appellera *configuration non exceptionnelle* une configuration des moments externes telle qu'aucune somme partielle des  $k_i$  n'est nulle :

$$\sum_{i \in I} k_i \neq 0 \quad \forall I$$

où  $I$  est un sous-ensemble quelconque des indices  $(1, \dots, E)$  des  $E$  moments externes  $k_i$ . Lorsqu'une configuration est non exceptionnelle, il est possible de relier tous les moments externes par des lignes internes dont les moments sont  $\neq 0$ , appelées lignes de « moments durs ». En effet si cela n'était pas possible, on pourrait séparer le diagramme en deux parties en coupant uniquement des lignes internes de moment  $\simeq 0$  (appelées lignes de « moments mous »). Cependant dans une des parties du diagramme entre un moment  $\sum_{i=1}^{E_i} k_i \neq 0$ , alors que les lignes internes emportent un moment nul.

Considérons par exemple le graphe de la figure 33, emprunté à Itzykson-Zuber :

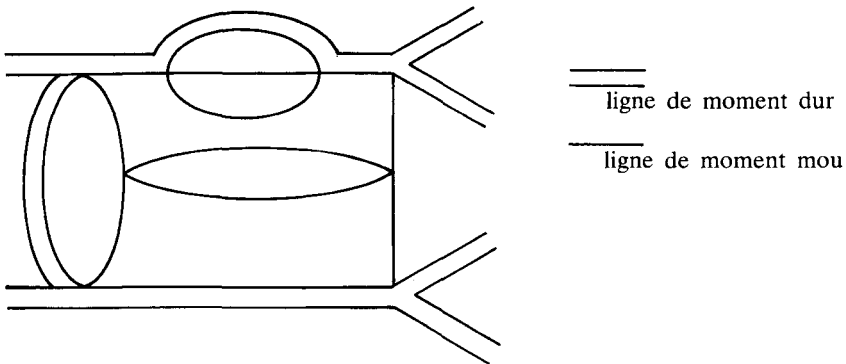


Figure 33.

avec un schéma possible pour le « flot des moments durs ». Imaginons de contracter toutes les lignes internes de moment dur en un vertex unique (figure 34) et soient  $I$ ,  $L$  et  $V$  le nombre de boucles, de lignes internes et de vertex du diagramme *contracté* ; soit  $n$  le nombre de

lignes internes de moment mou accrochées au vertex contracté. Nous avons les relations :

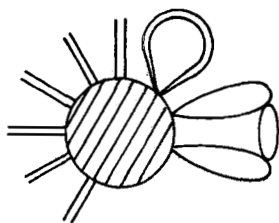


Figure 34.

$$\begin{aligned} L &= I - (V + 1) + 1 = I - V \\ 2I &= 4V + n. \end{aligned}$$

Le degré superficiel de divergence du diagramme contracté est :

$$\begin{aligned} \omega &= DL - 2I = L(D - 4) + 4L - 2I \\ \omega &= n + L(D - 4). \end{aligned} \quad (70)$$

Le degré d'homogénéité du diagramme contracté lorsque toutes les boucles internes ont des moments  $\approx 0$  est  $\omega$  : si  $D = 4$ , cet argument semi-heuristique montre que *le diagramme est infrarouge convergent dans une configuration non exceptionnelle* : en effet comme le diagramme est 1-PI,  $n \geq 2$ .

Au contraire pour  $D < 4$ , on peut facilement trouver des diagrammes infrarouges-divergents même dans une configuration non exceptionnelle. Par exemple le diagramme de la figure 35 :

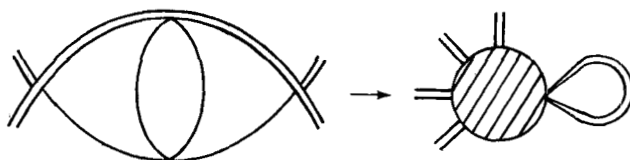


Figure 35.

a un degré superficiel de divergence :

$$\omega = 4 + 3(D - 4) = 3D - 8.$$

Il sera donc infrarouge-divergent, même dans une configuration non exceptionnelle lorsque  $D \leq \frac{8}{3}$ .

Le raisonnement précédent montre que l'interaction en  $\varphi^4$  est la plus singulière dans la région infrarouge (celle en  $\varphi^3$  étant exclue par la symétrie  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ). Ceci justifie, au moins de façon heuristique, l'utilisation du hamiltonien de Ginzburg-Landau (II.19) pour l'étude du comportement critique.

Le *théorème de Weinberg* <sup>(1)</sup> permet de déterminer le comportement asymptotique d'un graphe lorsque tous les moments externes tendent vers l'infini au même rythme :  $k_i \rightarrow \lambda k_i$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Plaçons-nous en dimension 4 dans le cadre d'une interaction en  $\varphi^4$ , et supposons que l'intégrale dans (62) converge dans le domaine ultraviolet ; si la limite  $m = 0$  de cette intégrale existe, ce qui sera le cas si la configuration  $[k_i]$  est non exceptionnelle, alors :

$$J(\lambda k_i) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)}. \quad (71)$$

Lorsque  $J(k)$  doit être renormalisée à cause des divergences ultraviolettes (chapitre VI)

$$J(\lambda k_i) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)} (\ln \lambda)^p \quad (72)$$

où  $p$  est un entier dépendant du graphe considéré.

## EXERCICES

1) Dans le cas  $n = 1$ , quels sont les facteurs de symétrie des graphes de la figure 36 :

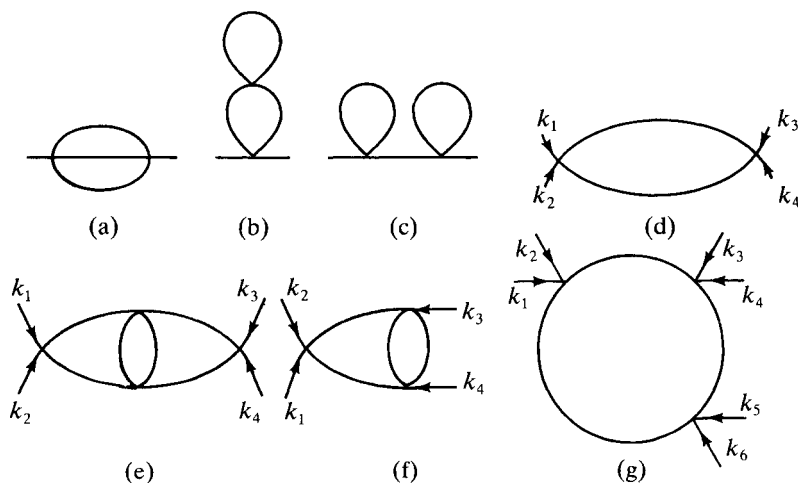


Figure 36.

2) Quels sont les facteurs de symétrie des diagrammes de fluctuation du vide de la figure 37 (cas  $n = 1$ ) ?

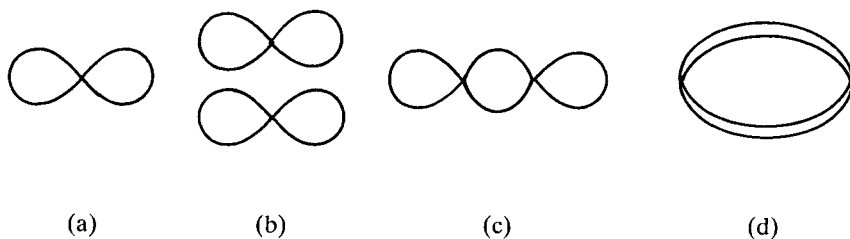


Figure 37.

Vérifiez votre résultat en utilisant (24).

3) Dans le cas où  $n$  est quelconque, déterminer le facteur de symétrie du graphe de la figure 38 :

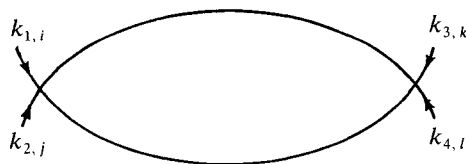


Figure 38.

4) Dans le cas où  $n$  est quelconque, quels sont les facteurs de symétrie des graphes de la figure 39 ?

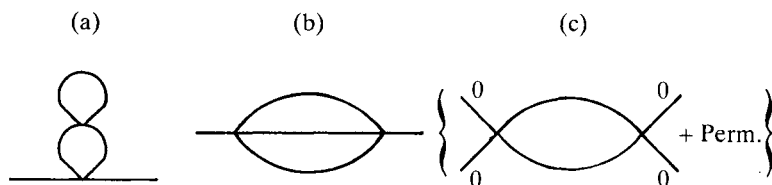


Figure 39.

5) (a) Dans le cas d'une interaction en  $\frac{g}{3!} \varphi^3$ , dessiner :

- les diagrammes de fluctuation du vide à l'ordre  $g^2$  et  $g^4$
- $G^{(1)}$  à l'ordre  $g$  et  $g^3$
- $G^{(2)}$  à l'ordre  $g^2$  et  $g^4$
- $G^{(3)}$  à l'ordre  $g$  et  $g^3$
- $G^{(4)}$  à l'ordre  $g^2$  et  $g^4$ .

(b) Quels sont à ces ordres les graphes 1-PI de  $G^{(2)}$ ,  $G^{(3)}$  et  $G^{(4)}$  ?

6) (a) Quel est le facteur de symétrie du graphe de la figure 40 contribuant à  $\Gamma^{(2N)}(k_i = 0)$  ? (On se limitera au cas  $n = 1$ .)

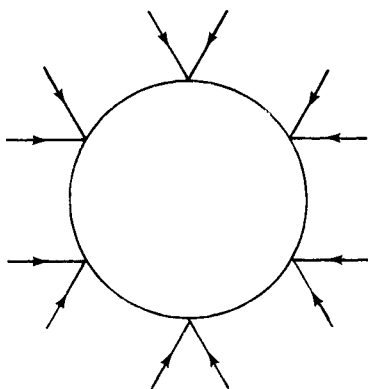


Figure 40.

(b) En sommant sur tous les graphes à zéro et à une boucle, retrouver à l'ordre  $\hbar$  l'expression (II.44) du potentiel effectif.

7) Obtenir dans le cas  $n = 1$  l'expression du type (60) pour le graphe de la figure 41, les lignes internes étant numérotées comme l'indique la figure. Vérifier votre résultat en utilisant les règles données dans Itzykson et Zuber, p. 297.

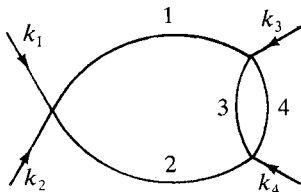


Figure 41.

**8) Identité de Feynman**

Démontrer l'identité :

$$\frac{1}{a^{\alpha_1} a^{\alpha_2}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \delta(1-x_1-x_2)}{(x_1 a_1 + x_2 a_2)^{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

Suggestion :

$$\int dx x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}.$$

Généraliser à  $(a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n})^{-1}$  (cf. équation B.1).

9) Calculer l'intégrale :

$$\int \frac{\prod_{i=1}^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i) x_1 x_2 x_3}{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^3}.$$

10) Montrer par un calcul direct à  $(4 - \varepsilon)$  dimensions que :

$$\overline{\Sigma}'(k^2) = -\frac{d}{dk^2} \text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{g^2}{12(4\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon)^0.$$

11) Calcul de  $\overline{\Sigma}(k^2)$  dans l'espace des  $x(D=4)$  <sup>(2)</sup>

(a) Montrer que

$$\overline{\Sigma}(k^2) = (\text{Cte}) \int d^4x e^{ik \cdot x} [G_0(x)]^3.$$

(b) En utilisant l'expression de  $G_0(x)$  avec un cut-off  $\Lambda$  (cf. exercice II.6)

$$G_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 \|\mathbf{x}\|^2} (1 - J_0(\Lambda \|\mathbf{x}\|))$$

déterminer le coefficient de  $k^2 \ln(k^2/\Lambda^2)$ .

**12) Intégration successive sur les boucles**

Une méthode d'évaluation des intégrales de Feynman consiste à intégrer successivement sur les boucles. Cette méthode est bien adaptée au cas  $m=0$  et à la régularisation dimensionnelle.

(a) On écrit l'intégrale  $I(k^2)$  du graphe :

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(p-q)^2} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2} \Pi(p^2) = I(k^2) \end{aligned}$$

Donner l'expression de  $I(k^2)$  obtenue en utilisant l'expression (56) pour  $\Pi(p^2)$  et l'identité de l'exercice 8, sans faire l'intégration sur  $x$ .

(b) Montrer que le calcul se simplifie si l'on souhaite seulement déterminer la partie divergente (en  $1/\varepsilon$ ) de  $I(k^2)$ , et retrouver le résultat de l'exercice 10.

### 13) Développement en $1/n$ (2)

On se propose de calculer les corrections en  $1/n$  aux résultats de l'exercice (III.7), en utilisant une méthode diagrammatique reposant sur la représentation des figures 9 à 11. On supposera que la constante de couplage  $u_0$  du hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie  $O(n)$  est d'ordre  $1/n$  :  $u_0 \rightarrow u_0/n$ .

(a) Montrer que les graphes dominants de  $\Sigma(k^2, r_0)$  sont donnés à la limite  $n \rightarrow \infty$  par la figure 42 :

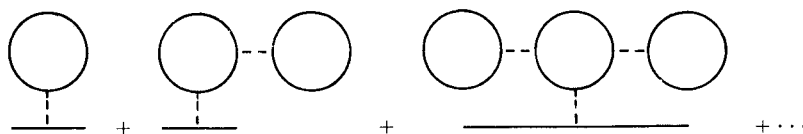


Figure 42.

et en déduire pour  $\Sigma(0, r_0)$  la relation :

$$\Sigma(0, r_0) = \frac{u_0}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + r_0 + \Sigma(0, r_0)}.$$

Retrouver à partir de cette équation les résultats de l'exercice (III.7) :

$$\eta = 0 ; \quad \nu = \frac{1}{D-2} \quad \text{pour } 2 < D < 4.$$

(b) La contribution dominante dépendant de  $k^2$  à  $\Sigma(k^2)$  est d'ordre  $1/n$ . Montrer qu'elle est donnée par les graphes de la figure 43 :

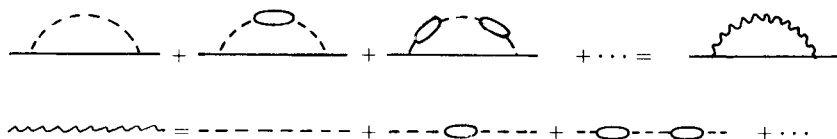


Figure 43.

En déduire l'expression de  $\Sigma(k^2, 0)$  à l'ordre  $1/n$  :

$$\Sigma(k^2, 0) = \frac{u_0}{3n} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(1 + \frac{u_0}{6} \Pi(p^2)\right) (p+k)^2}$$

où

$$\Pi(p^2) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(q+p)^2}.$$

(c) On utilise la méthode de raccordement pour déterminer  $\eta$  :

$$\Gamma^{(2)} \simeq k^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2 + \dots\right)$$

en identifiant le coefficient de  $\ln k^2$  (il faut remarquer que  $y_2 \simeq D-4$  : cf. exercice III.7(g)). Montrer que la singularité en  $\ln k^2$  de  $\Sigma(k^2)$  provient de la région d'intégration  $p \rightarrow 0$ , et calculer le coefficient de  $\ln k^2$  en se servant de l'expression (56) de  $\Pi(p^2)$ . Suggestion : calculer  $\partial^2 \Sigma / (\partial k^2)^2$  et identifier le coefficient de  $1/k^2$ . Résultat :

$$\eta = \frac{2(4-D) \Gamma(D-2)}{n \Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)\right)^2}.$$

**14)** Reprendre le raisonnement du paragraphe F.3 lorsqu'une ligne externe est de moment mou. Montrer que l'on doit remplacer dans (70)  $n$  par  $(n-1)$ .

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Le théorème de Wick et les diagrammes de Feynman sont exposés dans Amit (chapitres 2 et 4). Pour la fonctionnelle génératrice des vertex propres et le développement en nombre de boucles, on pourra consulter Amit (chapitre 5), Itzykson-Zuber (chapitres 6 et 9) ou Abers-Lee (section 16). La représentation paramétrique des intégrales de Feynman est détaillée dans Itzykson-Zuber (chapitre 6), tandis que le problème des divergences est traité dans la même référence (chapitre 8) ou dans Amit (chapitre 7).

<sup>(1)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **118**, 838 (1960). Y. Hahn et W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.*, **10**, 330 (1968).

<sup>(2)</sup> Ma, chapitre 9.

## CHAPITRE VI

# Renormalisation

Nous avons vu au chapitre précédent que pour des dimensions d'espace suffisamment grandes, les fonctions de corrélation présentent souvent des « divergences ultraviolettes », lorsque le moment  $q$  des boucles tend vers l'infini. Il est donc nécessaire, au moins dans une étape intermédiaire, de limiter ces moments par un cut-off  $\Lambda$ . En théorie quantique des champs, on souhaite faire tendre  $\Lambda$  vers l'infini (rappelons que  $\Lambda$  est  $\sim 1/a$ , où  $a$  est le pas du réseau, et l'espace ordinaire est continu), en maintenant fixés les masses physiques  $m_i$  et les moments externes  $k_i$  :  $m_i/\Lambda \rightarrow 0$ ,  $k_i/\Lambda \rightarrow 0$ . Ceci ne sera possible que si l'on arrive d'une manière ou d'une autre à se débarrasser des infinis, ce qui est l'objectif de la renormalisation : nous verrons que, dans le cas des théories renormalisables, on obtient des résultats finis à condition *d'absorber les infinis dans une redéfinition de la masse, de la constante de couplage, et de la normalisation des champs*. En physique statistique, on ne devrait pas avoir à se préoccuper de renormalisation, puisque le cut-off est fini. Cependant, en physique des phénomènes critiques, on étudie la limite  $m/\Lambda \rightarrow 0$  ( $m = \xi^{-1}$ ),  $k_i/\Lambda \rightarrow 0$ , et on est naturellement ramené au problème précédent.

L'avantage de la théorie de la renormalisation, par rapport à la présentation donnée au chapitre III, est de reposer sur des théorèmes rigoureux, qui justifient entièrement toutes les manipulations permettant de rendre la théorie finie. Cependant les preuves de ces théorèmes sont complexes et je me contenterai de les énoncer sans démonstration ; mon objectif est avant tout de démontrer le mécanisme de la renormalisation, en m'appuyant sur des exemples simples.

Les résultats exposés dans ce chapitre sont suffisants pour les applications à la mécanique statistique. Ils demandent à être complétés

en théorie quantique des champs, où l'on rencontre des complications supplémentaires dues au spin des particules. De plus il est indispensable de montrer que la renormalisation préserve des propriétés comme la causalité et l'unitarité de la matrice  $S$ . Enfin les théories des champs avec symétrie de jauge locale posent des problèmes particuliers : on le verra au chapitre XII dans le cas de l'électrodynamique quantique, et au chapitre XIII dans celui des théories de jauge non abéliennes.

Le paragraphe A introduit des notions générales : classification des théories des champs en théories renormalisables et non renormalisables, et régularisation. Avant de passer au paragraphe B, à des exemples de renormalisation à l'ordre d'une boucle, il est nécessaire de faire la remarque suivante : le hamiltonien de Ginzburg-Landau (V.17-18) dépend de trois paramètres : une masse  $m$ , une constante de couplage  $g$ , et un cut-off  $\Lambda$ . Cependant nous verrons qu'avec cette définition,  $m$  et  $g$  ne peuvent être que des intermédiaires de calcul que l'on appellera *masse et constante de couplage « nues »*, et que l'on notera dans toute la suite  $m_0$  et  $g_0$  (\*). La première version de la renormalisation consistera à calculer les fonctions de corrélation en fonction de  $m_0$ ,  $g_0$  et  $\Lambda$  et à éliminer ces paramètres au profit de paramètres physiques (ou renormalisés)  $m$  et  $g$ , qui seront définis comme valeurs de fonctions de corrélation en des points particuliers. La procédure est illustrée sur des exemples simples aux paragraphes B et C. Une deuxième façon de procéder consiste à éviter l'introduction de paramètres nus, en ajoutant au hamiltonien des contre-termes dépendant d'un cut-off, exprimés en fonction des paramètres physiques  $m$  et  $g$ . Les deux approches sont également utiles, et il est indispensable de savoir passer de l'une à l'autre : le lien nécessaire est explicité au paragraphe D.

Dans certains problèmes, on est amené à introduire des fonctions de corrélation dépendant de produits de champs (ou de dérivées des champs) au même point  $x$ , par exemple  $\varphi^2(x)$ ,  $\varphi^2(x)(\nabla\varphi(x))^2$  etc. De tels produits sont appelés *opérateurs composés* et il est nécessaire d'étudier leur renormalisation. Le cas le plus simple, celui de l'opérateur composé  $\varphi^2(x)$ , est étudié au paragraphe E ; on montre en particulier que cet opérateur exige une renormalisation indépendante de celle du champ  $\varphi(x)$ . Enfin le « schéma de soustraction minimal », très utile pour les calculs, est illustré au paragraphe F à l'ordre de deux boucles.

(\*) En mécanique statistique,  $m_0$  et  $g_0$  sont des paramètres du hamiltonien de G-L ; en théorie quantique des champs, ils n'ont pas de signification physique.

## A. INTRODUCTION

### A.1. Classification des théories

Nous avons vu au chapitre précédent (équation V (67)) que pour une interaction monomiale le degré superficiel de divergence  $\omega(G)$  d'un graphe  $G$  contribuant à un vertex propre  $\Gamma^{(E)}$  à  $E$  lignes externes était donné par :

$$\omega(G) - D = V(\omega - D) - E\left(\frac{D}{2} - 1\right) \quad (1)$$

où  $D - \omega = [g]$  est la dimension de la constante de couplage. A  $E$  fixé nous constatons que :

(i) Si  $\omega > D$ , le degré de divergence croît avec l'ordre  $V$  de la théorie des perturbations.

(ii) Si  $\omega = D$ , le degré de divergence est indépendant de l'ordre de la théorie des perturbations.

(iii) Si  $\omega < D$ , le degré de divergence décroît avec l'ordre de la théorie des perturbations. Il y a seulement un nombre *fini* de graphes divergents.

Le cas (i) correspond à celui des théories *non renormalisables*. On ne sait pas leur donner un sens en théorie des perturbations, car il faudrait se fixer un nombre infini de paramètres pour les rendre finies. Rappelons que la constante de couplage est, dans ce cas, de dimension  $< 0$  : les puissances de  $g$  doivent être compensées par des puissances de  $\Lambda$ . Dans certains cas très particuliers (électrodynamique massive, cf. chapitre XII), il peut arriver que les termes proportionnels à une constante de couplage de dimension  $< 0$  ne contribuent pas aux quantités physiques : la théorie est alors équivalente en pratique à une théorie renormalisable. Mais, en règle générale, on ne sait pas donner une signification physique aux théories non renormalisables, ce qui ne veut pas dire qu'elles soient sans intérêt (\*) ! Un bon exemple de théorie non renormalisable est la Relativité Générale, que l'on sait traiter au niveau classique, mais non au niveau quantique. Peut-être la solution sera-t-elle donnée par une méthode non perturbative ; peut-être la Relativité Générale est-elle une limite de basse énergie d'une théorie plus complexe... ou peut-être existe-t-il une solution entièrement nouvelle.

(\*) On commence à savoir donner un sens à des théories non renormalisables, considérées comme limites de théories à cut-off, grâce à des méthodes non perturbatives : cf. A. Kupiainen, *op. cit.*, chapitre VII.

Le cas (iii) est celui des théories *super-renormalisables*. Malgré leur caractère a priori sympathique (seulement un nombre fini de graphes divergents) il semble que les théories de ce type soient pathologiques en dimension 4 et elles n'ont pas trouvé pour le moment d'applications intéressantes en physique.

Le cas (ii) est le plus intéressant : c'est celui des théories *renormalisables* : on remarque que  $\omega = D$  correspond à  $[g] = 0$  : la dimension de la constante de couplage d'une théorie renormalisable est nulle. Les divergences d'une théorie renormalisable peuvent être absorbées en se fixant un nombre *fini* de paramètres et en calculant les fonctions de corrélation en fonction de ces paramètres.

### A.2. Diagrammes divergents d'une théorie renormalisable

Pour fixer les idées, nous prenons le cas de l'interaction en  $\varphi^4$ , où  $\omega = 2D - 4$  :

$$\omega - D = D - 4 ; \quad [g_0] = 4 - D .$$

On obtient donc les résultats suivants :

- (i)  $D > 4$  : théorie non renormalisable.
- (ii)  $D = 4$  : théorie renormalisable.
- (iii)  $D < 4$  : théorie super-renormalisable.

Lorsque  $D = 4$ , la dimension de  $g_0$  est nulle, ainsi que nous l'avons déjà vu, et  $\omega(G)$  est donné par :

$$\omega(G) = D - E \left( \frac{D}{2} - 1 \right) = 4 - E ,$$

ce qui donne pour les graphes  $G$  contribuant à  $\Gamma^{(E)}$  :

$$E = 2(\Gamma^{(2)}) : \omega(G) = 2$$

$$E = 4(\Gamma^{(4)}) : \omega(G) = 0$$

$$E \geq 6(\Gamma^{(E)}) : \omega(G) < 0 .$$

Seules les fonctions de corrélation à deux et quatre points sont divergentes. Pour  $E \geq 6$ , les fonctions de corrélation sont superficiellement convergentes. On peut néanmoins rencontrer des divergences dues à des sous-intégrations (figure 1) :

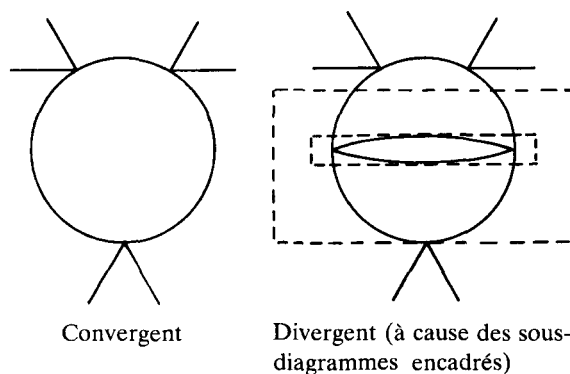


Figure 1. Deux contributions à  $\Gamma^{(6)}$ .

Soit  $\gamma$  un sous-diagramme de  $G$ , c'est-à-dire un ensemble de vertex appartenant à  $G$  et de lignes joignant ces vertex. Lorsque  $\omega(G) < 0$ , on démontre le théorème suivant :

#### Premier théorème de convergence

Si tous les sous-diagrammes connexes 1- $PI$   $\gamma$  d'un diagramme  $G$  (y compris  $G$  lui-même) sont tels que  $\omega(\gamma) < 0$ , alors l'intégrale de Feynman du graphe  $G$  est absolument convergente.

On démontre ce théorème en utilisant la représentation paramétrique (V.60) et en découpant le domaine d'intégration en  $\alpha$  en sous-domaines  $0 \leq \alpha_{\pi_1} \leq \alpha_{\pi_2} \leq \dots \leq \alpha_{\pi_I}$ , où  $\{\pi_1, \dots, \pi_I\}$  est une permutation de  $\{1, \dots, I\}$  : cf. Itzykson-Zuber, chapitre 8.

#### A.3. Régularisation

Afin de manipuler des intégrales a priori divergentes, il est utile de les *régulariser*, c'est-à-dire de les rendre finies dans une étape intermédiaire. La régularisation ne doit pas être confondue avec la renormalisation : la théorie renormalisée doit être indépendante de la procédure de régularisation, qui disparaît totalement du résultat final. Les principales méthodes de régularisation sont les suivantes :

(a) Cut-off brutal : les intégrales sur  $q$  sont coupées à  $\|q\| < \Lambda$ . Ce type de cut-off ne sert que dans des arguments heuristiques et il est impraticable au-delà d'une boucle.

(b) Régularisation de Schwinger :

$$\frac{1}{q^2 + m^2} \rightarrow \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\alpha \, e^{-\alpha(q^2 + m^2)}.$$

(c) Régularisation « à la Pauli-Villars » :

$$\frac{1}{q^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 + m^2} - \frac{1}{q^2 + \Lambda^2}.$$

(d) Régularisation dimensionnelle : on calcule les intégrales pour une valeur de  $D$  suffisamment petite. Les divergences se manifestent sous forme de pôles en  $(2 - D)$ ,  $(4 - D)$ ... et on peut définir les intégrales, en dehors de ces pôles, par un prolongement analytique en  $D$ .

(e) Régularisation sur réseau : on « met la théorie sur réseau » en discrétisant l'espace. La variable de champ  $\varphi(x)$  est remplacée par une variable sur réseau  $\varphi_i$  :

$$\varphi_i \simeq \frac{1}{a^D} \int \varphi(x) d^D x$$

où l'intégrale porte sur un volume  $a^D$  centré au site  $i$ . Le cut-off est  $\Lambda \sim \pi/a$ .

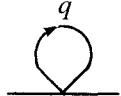
Les méthodes de régularisation à la mode en 1986 étaient (d) et (e). Cependant nous utiliserons dans un premier temps une régularisation avec cut-off car elle semble plus intuitive ; de plus, en mécanique statistique, il est indispensable de conserver le cut-off (ou le réseau) pour certains raisonnements.

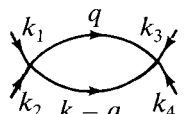
Certaines méthodes de régularisation peuvent être incompatibles avec des symétries que l'on souhaite conserver ; par exemple la régularisation sur réseau brise l'invariance par rotation et par translation. Cela peut-être un ennui sérieux, mais non une tare définitive : il sera nécessaire de montrer à la fin des calculs que la théorie renormalisée possède bien les symétries souhaitées, même si celles-ci ont disparu dans une étape intermédiaire. Il peut aussi arriver que la renormalisation ne puisse pas préserver une symétrie de la théorie classique, c'est-à-dire de l'approximation en arbres : dans ce cas on a affaire à une *anomalie*.

## B. RENORMALISATION DE LA MASSE ET DE LA CONSTANTE DE COUPLAGE

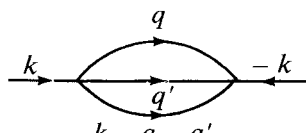
Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie en  $\varphi^4$ , en dimension  $D = 4$ , avec un paramètre d'ordre de dimension  $n = 1$ . Le hamiltonien dépend de la masse nue  $m_0$  et de la constante de couplage nue  $g_0$ , ainsi que d'un cut-off  $\Lambda$ . Nous allons étudier les vertex propres

$\Gamma^{(2)}$  et  $\Gamma^{(4)}$  d'abord à l'ordre d'une boucle, en réservant l'ordre de deux boucles au paragraphe C. Il est utile de définir les intégrales suivantes, qui permettent d'écrire les contributions à une et deux boucles à  $\Gamma^{(2)}$ , ainsi que la contribution à une boucle à  $\Gamma^{(4)}$ :

$$I_A(m_0^2) = \int_A \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \quad : \quad \text{Diagram (2)}$$


$$J_A(k_i, m_0^2) = \int_A \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)((k - q)^2 + m_0^2)} \quad : \quad \text{Diagram (3)}$$


$$K_A(k^2, m_0^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)(q'^2 + m_0^2)[(k - q - q')^2 + m_0^2]} \quad k = k_1 + k_2$$

$$: \quad \text{Diagram (4)}$$


Les intégrales sont régularisées par un cut-off  $\Lambda$  dont il n'est pas nécessaire de préciser la forme pour le moment. Le comptage de puissances montre que  $I_A \sim \Lambda^2$ ,  $J_A \sim \ln \Lambda$ ,  $K_A \sim \Lambda^2$ ;  $K_A$  contient également des termes en  $(\ln \Lambda)^2$ ,  $\ln \Lambda$ , et (nous l'avons vu au chapitre V) des termes en  $k^2 \ln \Lambda$ . Notez que les intégrales sont définies sans le facteur de symétrie des graphes correspondants.

### B.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la masse

À l'ordre d'une boucle  $\Gamma^{(2)}$  est donné par :

$$\Gamma^{(2)}(k^2) = k^2 + m_0^2 + \frac{1}{2} g_0 I_A(m_0^2). \quad (5)$$

On souhaite que  $\Gamma^{(2)}$  soit fini quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  ; en particulier on souhaite que  $\Gamma^{(2)}(k^2 = 0)$  soit fini :

$$\Gamma^{(2)}(k^2 = 0) = m^2, \quad (6)$$

où  $m$  est un paramètre fini ayant les dimensions d'une masse, appelé masse renormalisée :

$$m^2 = m_0^2 + \frac{1}{2} g_0 I_\Lambda(m_0^2) . \quad (7)$$

Réexprimons maintenant dans (5)  $m_0^2$  en fonction de  $m^2$  :

$$\Gamma^{(2)}(k^2) = k^2 + m^2 \quad (8)$$

et  $\Gamma^{(2)}$  est finie pour tout  $k^2$ . Les divergences ont été absorbées dans une redéfinition ( $m_0^2 \rightarrow m^2$ ) de la masse. La masse nue  $m_0$  est une fonction de  $g_0$ ,  $\Lambda$  et  $m$  (cf. équation (7)).

### B.2. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre d'une boucle : renormalisation de la constante de couplage

D'après les résultats du chapitre V,  $\Gamma^{(4)}$  à l'ordre d'une boucle vaut :

$$\Gamma^{(4)}(k_i) = g_0 - \frac{1}{2} g_0^2 [J_\Lambda(k_i, m_0^2) + \text{Perm.}] . \quad (9)$$

A nouveau on exige que  $\Gamma^{(4)}$  soit fini en un certain point, par exemple  $k_i = 0$ , ce qui définit un deuxième paramètre fini,  $g$ , appelé constante de couplage renormalisée :

$$\Gamma^{(4)}(k_i = 0) = g . \quad (10)$$

L'équation (10) permet de calculer  $g$  en fonction de  $g_0$  :

$$g = g_0 - \frac{3}{2} g_0^2 J_\Lambda(0, m_0^2)$$

et inversement :

$$g_0 = g + \frac{3}{2} g^2 J_\Lambda(0, m^2) . \quad (11)$$

En écrivant l'équation (11), on a négligé tous les termes d'ordre  $g^3$  : en effet, comme nous n'avons calculé que les diagrammes à une boucle, nous ignorons les termes d'ordre  $g_0^3$ . Il est donc parfaitement cohérent de remplacer  $g_0^2$  par  $g^2$  et  $J_\Lambda(0, m_0^2)$  par  $J_\Lambda(0, m^2)$  : l'erreur commise est d'ordre  $g^3$ . De façon générale, il est très important de remarquer que l'on peut se permettre toutes les manipulations valides à un ordre fixé en  $g_0$ , même si les termes d'ordre supérieur que l'on néglige ont des coefficients infinis si  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Ces remarques étant faites, on reporte dans (9) la valeur (11) de  $g_0$  :

$$\Gamma^{(4)}(k_i) = g - \frac{1}{2} g^2 [(J_\Lambda(k_i, m^2) - J_\Lambda(0, m^2)) + \text{Perm.}] . \quad (12)$$

Il est immédiat de vérifier que la quantité :

$$J_\Lambda(k_i, m^2) - J_\Lambda(0, m^2)$$

est finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  (exercice 1). L'expression (12) pour  $\Gamma^{(4)}(k_i)$  possède pour tout  $k_i$  une limite finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  et s'écrit en fonction des paramètres *finis*  $g$  et  $m^2$ .

En résumé, à l'ordre d'une boucle, le choix de deux paramètres finis  $m^2$  et  $g$  a permis de rendre finies les fonctions de corrélation  $\Gamma^{(2)}$  et  $\Gamma^{(4)}$  : les divergences ont été absorbées dans une redéfinition de la masse ( $m_0^2 \rightarrow m^2$ ) et de la constante de couplage ( $g_0 \rightarrow g$ ).

Le calcul à une boucle permet d'envisager une stratégie générale : à un ordre fixé de la théorie des perturbations, les conditions (6) et (10) permettent d'exprimer  $m_0^2$  et  $g_0$  en fonction de  $m^2$  et  $g$ . Reportant ces expressions dans celles des vertex propres, on peut espérer obtenir, à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , une expression finie dépendant de  $m^2$  et de  $g$ . Cependant on doit encore procéder à une opération supplémentaire : celle de la renormalisation du champ, que nous allons illustrer sur le cas du vertex propre  $\Gamma^{(2)}$  à l'ordre de deux boucles.

## C. RENORMALISATION DU CHAMP. CONTRE-TERMES

### C.1. $\Gamma^{(2)}$ à l'ordre de deux boucles : renormalisation du champ

A l'ordre de deux boucles, le développement diagrammatique de  $\Gamma^{(2)}$  est (figure 2) :

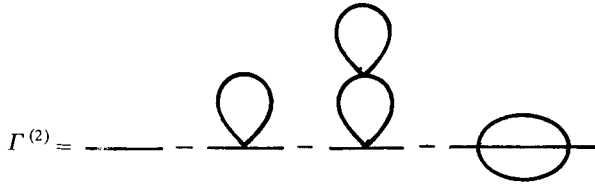


Figure 2.

soit sous forme analytique :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(k^2) = & k^2 + m_0^2 + \frac{1}{2} g_0 I_\Lambda(m_0^2) - \\ & - \frac{1}{4} g_0^2 I_\Lambda(m_0^2) J_\Lambda(0, m_0^2) - \frac{1}{6} g_0^2 K_\Lambda(k^2, m_0^2) \quad (13) \end{aligned}$$

Posons comme au paragraphe précédent (nous verrons plus loin que  $m_1^2$  n'est pas encore le paramètre définitif  $m^2$ ) :

$$\Gamma^{(2)}(k^2 = 0) = m_1^2. \quad (14)$$

Dans les termes en  $g_0^2$ , on peut remplacer  $m_0^2$  par  $m_1^2$  ; mais dans le terme en  $g_0$ , il faut tenir compte de la relation (7) pour procéder de façon cohérente à l'ordre  $g_0^2$  :

$$\begin{aligned} I_A(m_0^2) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_1^2 - \frac{1}{2} g_0 I_A(m_1^2)} \\ &= I_A(m_1^2) + \frac{1}{2} g_0 I_A(m_1^2) J_A(0, m_1^2) + O(g_0^2). \end{aligned}$$

Reportant dans (13) et posant  $k^2 = 0$ , on obtient  $m_0^2$  en fonction de  $m_1^2$  :

$$m_0^2 = m_1^2 - \frac{1}{2} g_0 I_A(m_1^2) + \frac{1}{6} g_0^2 K_A(0, m_1^2). \quad (15)$$

On reporte cette expression dans (13) :

$$\Gamma^{(2)}(k^2) = k^2 + m_1^2 - \frac{1}{6} g^2 [K_A(k^2, m_1^2) - K_A(0, m_1^2)] \quad (16)$$

en remarquant que l'on peut remplacer  $g_0$  par  $g$ , l'erreur commise étant d'ordre  $g^3$ . Malheureusement, l'expression (16) est encore divergente quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . En effet nous avons vu que  $K_A(k^2, m^2)$  contient un terme en  $k^2 \ln \Lambda$  qui n'est pas éliminé par la soustraction de  $K_A(0, m_1^2)$ . La dernière opération nécessaire est celle d'un changement de normalisation du champ, aussi appelé renormalisation du champ.

Cette renormalisation nous amène à faire la différence entre les fonctions de corrélation nues  $\Gamma^{(E)}$  et les fonctions de corrélation renormalisées (finies)  $\Gamma_R^{(E)}$  ; la *constante de renormalisation*  $Z_3$  (la notation  $Z_3$  est conventionnelle) permet de relier les deux types de fonctions de corrélation : par exemple dans le cas de  $\Gamma_R^{(2)}$  on écrira :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2, m^2, g) = Z_3 \Gamma^{(2)}(k^2, m_0^2, g_0, \Lambda). \quad (17)$$

Il faut souligner que  $\Gamma_R^{(2)}$  dépend des paramètres renormalisés (finis)  $m^2$  et  $g$ , tandis que  $\Gamma^{(2)}$  dépend des paramètres nus  $m_0^2$  et  $g_0$  ainsi que de  $\Lambda$ , et que par analyse dimensionnelle  $Z_3$  ne peut être qu'une fonction de  $g$  et de  $\Lambda/m$  :  $Z_3 = Z_3(g, \Lambda/m)$ . Pour que  $\Gamma_R^{(2)}$  soit finie, il suffit à nouveau d'imposer une seule condition :

$$\left. \frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2) \right|_{k^2=0} (= \Gamma_R'^{(2)}(k^2=0)) = 1. \quad (18)$$

Le choix du point  $k^2 = 0$  dans (18) est tout à fait arbitraire, mais commode. D'après l'équation (17) :

$$Z_3^{-1} = \Gamma'^{(2)}(k^2 = 0) = 1 - \frac{1}{6} g^2 K'_A(0, m_1^2) \quad (19)$$

et en reportant dans (16) on obtient la fonction de corrélation renormalisée :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2) = k^2 + Z_3 m_1^2 - \frac{1}{6} g^2 [K_A(k^2, m_1^2) - K_A(0, m_1^2) - k^2 K'_A(0, m_1^2)] . \quad (20)$$

Le terme entre crochets dans (20) est fini (exercice 1) ; pour que  $\Gamma_R^{(2)}$  soit finie il suffit de fixer le paramètre  $m_1^2$  par :

$$m^2 = Z_3 m_1^2$$

et le résultat final s'écrit :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2) = k^2 + m^2 - \frac{1}{6} g^2 [K_A(k^2, m^2) - K_A(0, m^2) - k^2 K'_A(0, m^2)] \quad (21)$$

le remplacement de  $m_1^2$  par  $m^2$  dans le crochet étant justifié à cet ordre de la théorie des perturbations. En résumé les divergences de  $\Gamma^{(2)}$  ont été absorbées en fixant les conditions suivantes, ou *conditions de normalisation* des fonctions de corrélation renormalisées :

$$(1) \quad \Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = m^2 \quad (22.a)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2) \big|_{k^2=0} = 1 \quad (22.b)$$

$$(3) \quad \Gamma_R^{(4)}(k_i = 0) = g \quad (22.c)$$

Il convient à ce point de faire plusieurs remarques :

(a) L'équation (17) fixe la relation entre  $\Gamma_R^{(2)}$  et  $\Gamma^{(2)}$  ;  $\Gamma^{(2)}$ , fonction de corrélation nue, s'exprime en fonction des paramètres nus  $m_0^2$ ,  $g_0$  et du cut-off  $\Lambda$ . Ces paramètres doivent être réexprimés en fonction des paramètres physiques (ou renormalisés)  $m^2$  et  $g$ . A condition d'ajouter à cette opération un changement de normalisation du champ (facteur  $Z_3$ ),  $\Gamma_R^{(2)}$ , qui s'exprime en fonction de  $m^2$  et  $g$ , est finie et indépendante de  $\Lambda$  à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Les divergences ont été absorbées dans une redéfinition de la masse, de la constante de couplage, et un changement de normalisation du champ. Remarquez

que  $\Gamma_R^{(2)}$  ne dépend que d'un seul paramètre dimensionné,  $m$ , alors que  $\Gamma^{(2)}$  dépend de  $m_0$  et  $\Lambda$  : cf. le point (c) ci-dessous.

(b) Il n'est pas nécessaire que les paramètres  $m^2$  et  $g$  soient accessibles *directement* à l'expérience. Par contre toutes les fonctions de corrélation s'expriment en fonction de  $m^2$  et  $g$ , et de ces deux paramètres seulement. En ce sens, la théorie est prédictive : il suffit de deux expériences indépendantes pour déterminer  $m^2$  et  $g$ .

(c) Dans le cas des phénomènes critiques, le paramètre  $m$  est relié à la longueur de corrélation :  $m \simeq \xi^{-1}$ . En effet pour  $k \rightarrow 0$  :

$$\Gamma_R^{(2)} \simeq k^2 + m^2$$

et  $G_R^{(2)}$  possède un pôle à  $k \simeq \pm im$ . Si l'on calcule la transformée de Fourier, celle-ci se comportera à grande distance comme :

$$e^{-mr} = e^{-r/\xi}$$

(cf. le calcul de la fonction de corrélation de l'approximation de Landau, II-C). La région critique correspond à  $m \ll \Lambda$  ( $\xi \gg a$ ) ; avec un choix générique des paramètres  $m_0$ ,  $g_0$  et  $\Lambda$ ,  $m$  serait a priori d'ordre  $\Lambda$ . Il faut donc une relation entre  $m_0$ ,  $g_0$  et  $\Lambda$  pour que l'on se trouve dans la région critique. En d'autres termes, *la construction d'une théorie renormalisée implique l'existence d'un point critique*.

(d) La condition (22.c) est  $\Gamma_R^{(4)}(0) = g$ , alors qu'au paragraphe précédent on a écrit  $\Gamma^{(4)}(0) = g$ . Néanmoins ceci est correct, car  $\Gamma_R^{(4)} = Z_3^2 \Gamma^{(4)}$  (ce point sera établi ultérieurement), et à cet ordre de la théorie des perturbations on peut prendre  $Z_3 = 1$ , étant donné que  $Z_3 = 1 + O(g^2)$ . Ceci est une particularité de la théorie en  $\varphi^4$  ; dans le cas de la théorie en  $\varphi^3$  à six dimensions par exemple, il importe de tenir compte du facteur  $Z_3$  pour définir  $g$  (exercice 2).

(e) Il est utile de définir la constante de renormalisation  $Z_1$  par :

$$Z_1^{-1} g_0 = \Gamma^{(4)}(0, g_0, m_0^2, \Lambda) . \quad (23)$$

La relation entre  $g_0$  et  $g$  est alors :

$$g = Z_3^2 Z_1^{-1} g_0 . \quad (24)$$

(f) Les conditions de normalisation (22) sont dans une large mesure arbitraires. Il suffit qu'elles soient vérifiées à l'ordre de zéro boucle. Des commentaires supplémentaires sur ce point seront faits à la fin du paragraphe D.

## C.2. Contre-termes

Comme on cherche en définitive à calculer les fonctions de corrélation renormalisées en fonction des paramètres  $m^2$  et  $g$ , on peut essayer d'éviter d'introduire les quantités nues  $m_0^2$  et  $g_0$ . La stratégie de la renormalisation consiste alors à rajouter des « contre-termes », c'est-à-dire un hamiltonien supplémentaire  $\delta H$ , qui sera traité comme un hamiltonien d'interaction, et dont les coefficients seront déterminés ordre par ordre en théorie des perturbations, ou plus exactement ordre par ordre en nombre de boucles, par les conditions de normalisation (22). Comme ces conditions de normalisation fixent les fonctions de corrélation de façon unique à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , cette procédure sera équivalente à la précédente, avec l'avantage que tous les calculs sont effectués avec les paramètres renormalisés  $m^2$  et  $g$ . On écrira donc la densité de hamiltonien (l'indice  $\Lambda$  indique que l'on calcule avec un cut-off  $\Lambda$  et que  $\delta m^2$ ,  $Z_1$  et  $Z_3$  dépendent de  $\Lambda$ ) :

$$\mathcal{H}_0(x) = \mathcal{H}_\Lambda(x) + \delta \mathcal{H}_\Lambda(x) \quad (25.a)$$

$$\mathcal{H}_\Lambda(x) = \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} g \varphi^4 \quad (25.b)$$

$$\delta \mathcal{H}_\Lambda(x) = \frac{1}{2} (Z_3 - 1) (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} (Z_3 m_0^2 - m^2) \varphi^2 + \frac{1}{4!} g (Z_1 - 1) \varphi^4. \quad (25.c)$$

On remarque que les contre-termes ont la même forme  $((\nabla \varphi)^2, \varphi^2$  et  $\varphi^4$ ) que les termes du hamiltonien initial. Ceci est parfois utilisé comme critère de renormalisabilité. Cependant, il peut arriver (cas de l'électrodynamique scalaire) que l'on doive introduire des contre-termes qui n'ont pas la même forme que les termes du hamiltonien initial. Si le nombre de contre-termes est fini, la théorie sera en pratique renormalisable.

Comme  $\delta \mathcal{H}_\Lambda$  est traité perturbativement, on pourra représenter graphiquement les contre-termes :

$$\text{---} \times \text{---} : - (Z_3 m_0^2 - m^2) = - \delta m^2 = - [\delta m^{2(1)} + \dots + \delta m^{2(l)} + \dots]$$

$$\text{---} \bullet \text{---} : - (Z_3 - 1) q^2 = - q^2 [Z_3^{(2)} + \dots + Z_3^{(l)} + \dots]$$

$$\text{---} \times \text{---} : - g (Z_1 - 1) = - g [Z_1^{(1)} + \dots + Z_1^{(l)} + \dots]$$

où  $\delta m^{2(l)}$ ,  $Z_1^{(l)}$  et  $Z_3^{(l)}$  sont calculés à l'ordre de  $l$  boucles.



$$\begin{aligned}
\Gamma_R^{(2)} = & k^2 + m^2 + \frac{1}{2} g I_A(m^2) - \frac{1}{4} g^2 I_A(m^2) J_A(0, m^2) \\
& - \frac{1}{6} g^2 K_A(k^2, m^2) + \delta m^{2(1)} + \delta m^{2(2)} + Z_3^{(2)} k^2 \\
& - \frac{1}{2} g \delta m^{2(1)} J_A(0, m^2) + \frac{1}{2} g Z_1^{(1)} I_A(m^2) .
\end{aligned}$$

La condition (22.a) donne :

$$\delta m^{2(2)} = -\frac{3}{4} g^2 I_A(m^2) J_A(0, m^2) + \frac{1}{6} g^2 K_A(0, m^2)$$

tandis que (22.b) devient :

$$Z_3^{(2)} = \frac{1}{6} g^2 K'_A(0, m^2)$$

en accord avec (19). L'expression finale pour  $\Gamma_R^{(2)}$  coïncide bien avec (21).

## D. CAS GÉNÉRAL

### D.1. $\Gamma^{(4)}$ à l'ordre de deux boucles

L'examen de  $\Gamma^{(4)}$  à l'ordre de deux boucles permet d'illustrer le mécanisme de fonctionnement des contre-terms et de comprendre intuitivement comment ce mécanisme peut se généraliser à tous les ordres de la théorie des perturbations. Les graphes à deux boucles donnant une contribution à  $\Gamma^{(4)}$  sont dessinés sur la figure 5.a-c, ainsi que les graphes construits avec des contre-terms (d-f) :

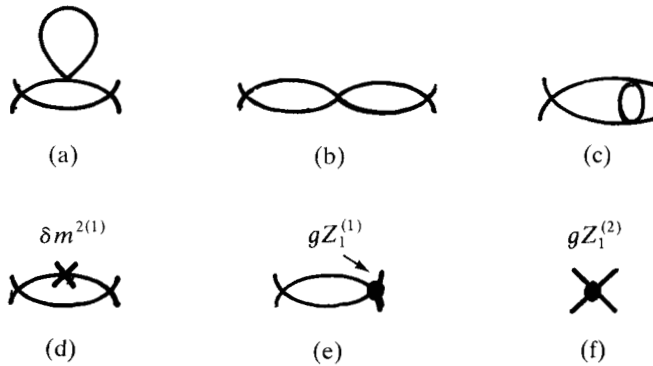


Figure 5.

La relation (26) donnant  $\delta m^{2(1)}$  montre que la somme des graphes (a) et (d) est nulle. Le graphe (b) est facile à calculer : c'est le produit de deux boucles simples ; le graphe (c) est plus complexe, mais aussi plus intéressant, et nous allons l'examiner en détail. Utilisant la représentation paramétrique (V.60) ainsi que les résultats de l'exercice (V.7), on obtient l'expression analytique de ce graphe sous la forme d'une intégrale sur quatre paramètres  $\alpha_i$  (je n'écris pas le facteur multiplicatif  $g^3/[2(4\pi)^4]$  qui ne joue aucun rôle dans l'argument qui va suivre) :

$$I(k_i) = \int \frac{\prod_{i=1}^4 d\alpha_i}{[P(\alpha_i)]^2} \exp\left(-\left[m^2\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i\right) + Q(\alpha_i, k_i)\right]\right) \quad (28)$$

avec :

$$P(\alpha_i) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3 \alpha_4$$

$$Q(\alpha_i, k_i) = [P(\alpha_i)]^{-1}[\alpha_1 \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) k^2 + \alpha_3 \alpha_4(\alpha_1 k_3^2 + \alpha_2 k_4^2)]$$

et  $k^2 = (k_1 + k_2)^2$ . L'étiquetage des lignes internes est précisé sur la figure 6 :

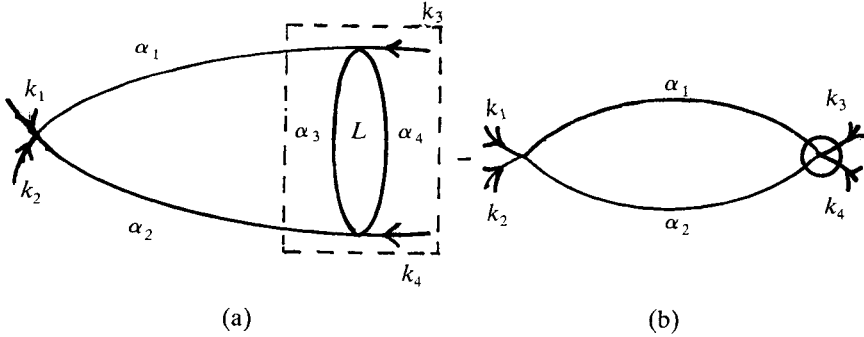


Figure 6. Le graphe (5c) et son contre-terme.

L'intégrale (28) diverge en premier lieu à cause d'une sous-intégration correspondant à la boucle  $L$ , encadrée sur la figure 6. La divergence provient de la région où  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  tendent vers zéro simultanément,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  restant finis. Le contre-terme est défini par le graphe 6.b, où le vertex encerclé correspond à une boucle  $L$ , calculée avec des valeurs nulles des moments externes. Il faut remarquer que le contre-terme est celui d'un graphe particulier, et non la totalité du graphe (e) de la figure 5.

Une deuxième divergence provient de la région où tous les  $\alpha_i \rightarrow 0$  simultanément, ou en d'autres termes, de la région  $\lambda \rightarrow 0$ , où  $\lambda$  est le paramètre d'homogénéité de l'équation (V.61) : cette divergence est donc liée au degré superficiel de divergence du graphe :  $\omega(G) = 0$ .

La divergence provenant de la sous-intégration est compensée par le contre-termes, la contribution totale de la figure 6 s'écrivant :

$$\begin{aligned} \bar{I}(k_i) = & \int \prod_{i=1}^4 d\alpha_i \left\{ \frac{1}{[P(\alpha_i)]^2} \exp \left( - \left[ m^2 \left( \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right) + Q(\alpha_i, k_i) \right] \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_3 + \alpha_4)^2} \exp \left( - \left[ m^2 \left( \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

En effet dans la région où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont finis et où  $\alpha_3, \alpha_4 \rightarrow 0$ , on peut remplacer  $P(\alpha_i)$  et  $Q(\alpha_i, k_i)$  par (une preuve complète est donnée dans l'exercice (4)) :

$$\begin{aligned} P(\alpha_i) & \rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) \\ Q(\alpha_i, k_i) & \rightarrow \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que la singularité est bien compensée dans (29). L'intégrale  $\bar{I}(k_i)$  est superficiellement divergente, mais cette divergence est *indépendante* de  $k^2$ , alors que  $I(k_i)$  contient un terme en  $\ln \Lambda \ln k^2$  : pour le montrer, il suffit de dériver (29) par rapport à  $k^2$  :  $\partial \bar{I} / \partial k^2$  est donné par une intégrale convergente, avec  $\omega(G) = -2$ . Si l'on ajoute les graphes des figures 6.a et 6.b et que l'on retranche la valeur du total prise à  $k_i = 0$ , on obtient un résultat convergent ; le terme soustrait donne une contribution à  $Z_1^{(2)}$  contenant des termes en  $(\ln \Lambda)^2$  et  $(\ln \Lambda)$ .

L'exemple précédent permet de comprendre comment fonctionne la renormalisation dans le schéma appelé BPHZ (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann). Dans ce schéma chaque graphe est traité individuellement, alors que les conditions de normalisation (22) font intervenir l'ensemble des graphes d'un ordre donné de la théorie des perturbations contribuant à  $\Gamma_R^{(2)}$  et à  $\Gamma_R^{(4)}$ . A l'ordre d'une boucle, on retranche à  $\Gamma_R^{(4)}(\Gamma_R^{(2)})$  le premier (les deux premiers) terme(s) de leur développement de Taylor à  $k_i = 0$  (cf. (12) et (21)) ; ceci donne des intégrales de Feynman convergentes, ce qui fait que l'on peut se passer entièrement de régularisation, puisque l'on peut soustraire directement les *intégrands*. De même à l'ordre de deux boucles la somme des graphes 6.a et 6.b sera rendue convergente en soustrayant l'intégrand à

$k_i = 0$ . On remarque que le graphe avec contre-terme 6.b a été défini de façon récursive, puisque l'on a retranché à l'intégrand de la boucle  $L$  son intégrand pris pour des valeurs nulles des moments externes.

Considérons maintenant le cas général d'un graphe contenant  $(l + 1)$  boucles ; les divergences provenant de sous-intégrations seront compensées par des contre-termes d'ordre  $\leq l$  ; la prescription générale pour écrire ces contre-termes est la formule de récurrence de Bogoliubov, ou bien sa solution : la formule des forêts de Zimmermann (cf. Itzykson-Zuber, chapitre 8, ou Collins, chapitre 5). Deux cas sont alors possibles :

(i) Le graphe considéré est superficiellement convergent ( $\omega(G) < 0$ ) : la somme graphe plus contre-termes d'ordre  $\leq l$  est alors donnée par une intégrale absolument convergente.

(ii) Le graphe est superficiellement divergent ( $\omega(G) \geq 0$ ) : la somme graphe + contre-termes est divergente, mais il suffit alors d'une soustraction de l'intégrand ( $\Gamma_R^{(4)} : \omega(G) = 0$ ) ou de deux soustractions ( $\Gamma_R^{(2)} : \omega(G) = 2$ ) pour obtenir un résultat convergent. La divergence globale est donc proportionnelle à un polynôme de degré  $\omega(G)$  construit avec les moments externes, correspondant à une interaction locale dans l'espace des  $x$  (c'est-à-dire qui peut s'écrire en fonction de  $\varphi(x)$  et d'un nombre fini de ses dérivées).

Un argument combinatoire complexe permet de montrer que cette procédure est bien équivalente à celle qui consiste à construire les contre-termes à l'aide des conditions de normalisation (22). Par exemple l'expression complète de  $Z_1^{(2)}$  est donnée par l'équation de la figure (7) :

$$gZ_1^{(2)} = \left[ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{Perm.} \right] \Big|_{k_i = 0}$$

Figure 7.

Il est clair que cette discussion est purement descriptive, mais les preuves complètes de toutes les affirmations qui précèdent sortent du cadre de cet exposé. Avant de quitter le schéma BPHZ, remarquons à nouveau que la procédure systématique de soustraction des intégrands évite de recourir à une régularisation intermédiaire. Comme on peut toujours appliquer ce schéma avec une telle régularisation, ceci montre que les  $\Gamma_R^{(N)}$  sont bien indépendants de la régularisation, puisque toutes les intégrales sont absolument convergentes ; les fonctions de corrélations renormalisées ne dépendent en fait que des conditions de normalisation.

Cependant malgré son grand intérêt théorique, le schéma BPHZ n'est pas en général le plus commode pour les calculs pratiques, et il conduit à des complications dans le cas de la masse nulle. C'est pourquoi je reviens maintenant au point de vue initial, en établissant le lien entre fonctions de corrélation nues et renormalisées.

## D.2. Relation entre fonctions de corrélation nues et renormalisées

Effectuons la somme de  $\mathcal{H}_A$  et  $\delta\mathcal{H}_A$  dans (25) :

$$\mathcal{H}_0(x) = \frac{1}{2} Z_3 (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} Z_3 m_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} g Z_1 \varphi^4$$

et effectuons le changement de normalisation du champ :

$$\varphi_0(x) = Z_3^{1/2} \varphi(x). \quad (30)$$

$\mathcal{H}_0(x)$  devient, en utilisant (24) :

$$\mathcal{H}_0(x) = \frac{1}{2} (\nabla\varphi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{4!} g_0 \varphi_0^4. \quad (31)$$

Examinons maintenant la fonctionnelle génératrice :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \exp \left( - \int d^4x [\mathcal{H}_A + \delta\mathcal{H}_A + j(x) \varphi(x)] \right) \\ &= \exp \left( - \int d^4x [\mathcal{H}_0 + Z_3^{-1/2} j(x) \varphi_0(x)] \right). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement par dérivation fonctionnelle :

$$G_R^{(E)}(x_1, \dots, x_E; g, m^2) = Z_3^{-E/2} G^{(E)}(x_1, \dots, x_E; g_0, m_0^2, \Lambda).$$

On écrit en général cette relation pour les vertex propres, en passant dans l'espace des  $k$  ; compte tenu de la définition (chapitre V, paragraphe C.3) des vertex propres, on obtient :

$$\Gamma_R^{(E)}(k_1, \dots, k_E; g, m^2) = Z_3^{E/2} \Gamma^{(E)}(k_1, \dots, k_E; g_0, m_0^2, \Lambda)$$

(32)

On notera le facteur  $Z_3^{E/2}$  (au lieu de  $Z_3^{-E/2}$ ) dû à la division par les propagateurs externes complets.

On peut maintenant énoncer le *deuxième théorème de convergence* :  $\Gamma_R^{(2)}(0)$ ,  $\Gamma_R^{(2)'}(0)$  et  $\Gamma_R^{(4)}(0)$  étant fixés par les conditions de normalisation (22), on peut définir les contre-terms  $\delta m^2$ ,  $Z_1$  et  $Z_3$ . Les intégrales

donnant  $\Gamma_R^{(E)}$  sont alors absolument convergentes et :

$$\Gamma_R^{(E)}(k_1, \dots, k_E; g, m^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_3^{E/2} \Gamma^{(E)}(k_1, \dots, k_E; g_0, m_0^2, \Lambda)$$

existe et est indépendant de la procédure de régularisation.

Il faut bien comprendre la signification de l'équation (32) : dans le membre de droite,  $g_0$ ,  $m_0/m$  et  $Z_3$  sont des fonctions de  $g$  et  $\Lambda/m$  :  $g_0 = g_0(g, \Lambda/m)$ ,  $m_0/m = f(g, \Lambda/m)$ ,  $Z_3 = Z_3(g, \Lambda/m)$ , déterminées par les conditions de normalisation (22). Les fonctions de corrélation nues  $\Gamma^{(E)}$  étant calculées avec un cut-off  $\Lambda$ , la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  de  $Z_3^{E/2} \Gamma^{(E)}$  définit les fonctions de corrélations renormalisées  $\Gamma_R^{(E)}$ . Lorsque  $\Lambda$  est grand, mais fini,  $\Gamma_R^{(E)}$  conserve une faible dépendance par rapport à  $\Lambda$  ( $\sim (k/\Lambda)^2$  et  $(m/\Lambda)^2$ ).

### D.3. Cas de la masse nulle

Le cas de la masse nulle pose un problème particulier, car on ne peut pas utiliser les conditions de normalisation (22) ; en effet si la condition  $\Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = 0$  fixe la masse (renormalisée) à zéro,  $\Gamma_R^{(2)}(k^2)$  et  $\Gamma_R^{(4)}(k_i)$  sont infrarouge-divergents pour  $k^2 = 0$  et  $k_i = 0$  (cf. V-F.3). On doit se donner une masse auxiliaire  $\mu$ , arbitraire mais indispensable pour écrire les conditions de normalisation. Cette masse brise l'invariance d'échelle de l'approximation classique, qui ne dépend d'aucun paramètre dimensionné. On peut alors choisir les conditions de normalisation de la façon suivante :

$\Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = 0$	(33.a)
$\left. \frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2) \right _{k^2 = \mu^2} = 1$	(33.b)
$\Gamma_R^{(4)}(k_{i0}) = g$	(33.c)

où  $k_{i0}$ , appelé *point de soustraction*, est défini de la façon la plus symétrique possible par :

$$k_{i0} \cdot k_{j0} = \frac{1}{4} \mu^2 (4 \delta_{ij} - 1). \quad (34)$$

Le choix (34) se comprend en remarquant que si dans  $\Gamma^{(4)}$ ,  $k_1 + k_2 = -(k_3 + k_4)$ , on obtient les relations suivantes lorsque  $k_i^2 = k^2$  :

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = 2k^2 + 2k_1 \cdot k_2 \\ t &= (k_1 + k_3)^2 = 2k^2 + 2k_1 \cdot k_3 \\ u &= (k_1 + k_4)^2 = 2k^2 + 2k_1 \cdot k_4 \end{aligned}$$

et :

$$s + t + u = 4 k^2.$$

Le choix le plus symétrique correspond à :

$$s = t = u = \mu^2; \quad k^2 = \frac{3}{4} \mu^2; \quad k_i \cdot k_j = -\frac{1}{4} \mu^2$$

c'est-à-dire (34).

Précisons à nouveau que les conditions (33) sont dans une large mesure arbitraires (sauf  $\Gamma_R^{(2)}(0) = 0$  qui est précisément la condition de masse nulle). On pourrait par exemple prendre  $\Gamma_R^{(2)}(2\mu^2) = 1$ , ou bien  $k_{i0} \cdot k_{j0} = \frac{\mu^2}{\sqrt{2}} (4\delta_{ij} - 1)$  etc. Un point important est que la théorie renormalisée dépend de *deux* paramètres finis :  $g$  et  $\mu^2$ . Cependant ces deux paramètres ne sont pas indépendants, ainsi que nous le verrons au chapitre suivant.

De façon générale, les conditions de normalisation ne fixent de façon non ambiguë que la partie divergente des contre-terms. Une modification des conditions de normalisation change les contre-terms par une quantité *finie*, et est absorbée dans une redéfinition de la masse, de la constante de couplage et de la normalisation du champ : la théorie est inchangée, mais elle est paramétrée de façon différente. Cette invariance de la théorie par reparamétrisation est à la base du groupe de renormalisation (première version), qui sera exposé au chapitre suivant ; un exemple simple de reparamétrisation est donné à l'exercice 7.

## E. OPÉRATEURS COMPOSÉS ET LEUR RENORMALISATION

On appelle opérateur composé tout opérateur  $O(x)$  fonction du champ  $\varphi(x)$  et de ses dérivées. Je me limiterai au seul cas de l'opérateur composé :

$$O(x) = \varphi^2(x)$$

dont j'aurai à me servir par la suite. Ce paragraphe sera consacré à l'étude des fonctions de corrélation formées avec  $\varphi(x)$  et  $\varphi^2(x)$  :

$$G^{(N, L)} = \left( \frac{1}{2} \right)^L \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \varphi^2(y_1) \dots \varphi^2(y_L) \rangle. \quad (35)$$

A priori on peut s'étonner que l'on doive étudier de tels objets car après

tout  $\varphi^2(y) = \varphi(y) \varphi(y)$ . Le problème est que la limite

$$\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \varphi(y + \varepsilon) \varphi(y)$$

est singulière à l'intérieur d'une fonction de corrélation lorsque  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Par exemple à l'approximation gaussienne :

$$\langle \varphi(0) \varphi(0) \rangle = \int_{q \leq \Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m_0^2}$$

diverge quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . A cause du processus de renormalisation, il est indispensable de définir  $\varphi^2(x)$  comme entité indépendant de  $\varphi(x)$ .

### E.1. Fonctionnelle génératrice

Il est immédiat d'écrire une fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation (35) :

$$\begin{aligned} \hat{Z}(j, t; m_0^2) &= \\ &= \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left( -H + \int \left[ j(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} t(x) \varphi^2(x) \right] d^4 x \right) \end{aligned} \quad (36)$$

et :

$$\begin{aligned} G^{(N, L)}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_L; m_0^2) &= \\ &= \frac{(-1)^L}{Z(0; m_0^2)} \left[ \frac{\delta^{N+L} \hat{Z}(j, t; m_0^2)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_N) \delta t(y_1) \dots \delta t(y_L)} \right]_{j=t=0}. \end{aligned} \quad (37)$$

Si dans l'équation (36)  $t(x)$  est indépendant de  $x$  :

$$t(x) = \mu^2$$

le terme de source en  $\varphi^2(x)$  peut être combiné avec le terme de masse  $\frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2$  de  $H$  et on obtient une relation entre les fonctionnelles génératrices  $Z$  et  $\hat{Z}$  :

$$\hat{Z}(j, \mu^2; m_0^2) = Z(j; m_0^2 + \mu^2). \quad (38)$$

Cette relation permet de démontrer l'équation suivante (exercice 5)

$$\begin{aligned} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; m_0^2 + \mu^2) &= \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(-1)^L \mu^{2L}}{L!} \times \\ &\times \int d^4 y_1 \dots d^4 y_L G^{(N, L)}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_L; m_0^2), \end{aligned} \quad (39)$$

où les  $G^{(N,L)}$  sont connexes pour les  $\varphi^2$  (cf. exercice 5). En passant à la limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ , on calcule la dérivée de  $G^{(N)}$  par rapport à  $m_0^2$  :

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; m_0^2) = - \int d^4 y G^{(N,1)}(x_1, \dots, x_N; y; m_0^2) . \quad (40)$$

Définissons comme dans le cas des fonctions de corrélation ordinaires la transformée de Fourier :

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_1^N k_i + q\right) G^{(N,1)}(k_1, \dots, k_N; q; m_0^2) = \int \left( \prod_{i=1}^N d^4 x_i e^{ik_i \cdot x_i} \right) d^4 y e^{iq \cdot y} G^{(N,1)}(x_1, \dots, x_N; y; m_0^2)$$

où le moment  $q$  est associé à  $\varphi^2$ . L'équation (40) devient :

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} G^{(N)}(k_1, \dots, k_N; m_0^2) = - G^{(N,1)}(k_1, \dots, k_N; q = 0; m_0^2)$$

(41)

On appelle souvent l'opération de dérivation par rapport à  $m_0^2$  une « *insertion de masse* ».

Le théorème de Wick permet d'établir les règles de Feynman pour les  $G^{(N,L)}$  exactement comme pour les  $G^{(N)}$ . Examinons par exemple les premiers termes de  $G^{(2,1)}(x, y; z)$  (figure 8) :

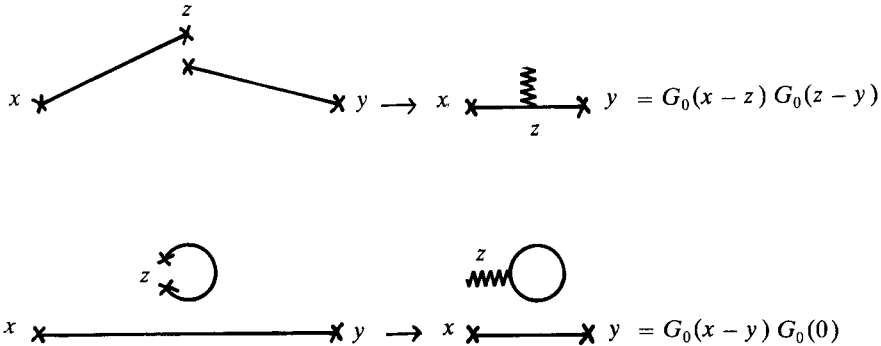


Figure 8. Contributions à  $G^{(2,1)}$ .

L'insertion de  $\varphi^2$  au point  $z$  a été représentée par une ligne ondulée. Le deuxième terme ( $G_0(x-y)G_0(0)$ ) n'est pas connexe en  $\varphi^2$  et ne doit

pas être décompté dans l'équation (39). Dans l'espace des  $k$  on trouve pour le premier terme, dans le cas où  $k_1 + k_2 = q = 0$ ,  $k_1 = -k_2 = k$  :

$$G^{(2,1)}(k, -k ; q = 0) = \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \frac{1}{k^2 + m_0^2}$$

en accord avec (41).

Comme dans le cas des fonctions de corrélation ordinaires  $G^{(N)}$ , on définit des fonctions de corrélation connexes  $G_c^{(N,L)}$  et des vertex propres  $\Gamma^{(N,L)}$  en effectuant une transformation de Legendre par rapport à  $j$ .

Examinons par exemple le vertex propre  $\Gamma^{(2,1)}$ , qui est obtenu à partir de  $G^{(2,1)}$  en divisant par deux propagateurs :

$$\Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2 ; q = -(k_1 + k_2)) = \frac{1}{G^{(2)}(k_1)} G^{(2,1)}(k_1, k_2 ; q) \frac{1}{G^{(2)}(k_2)} .$$

Lorsque  $q = 0$ , il est facile de relier  $\Gamma^{(2,1)}$  à la dérivée de  $G^{(2)}$  par rapport à  $m_0^2$  ; en effet :

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} \frac{1}{G^{(2)}(k)} = \frac{1}{G^{(2)}(k)} G^{(2,1)}(k, -k ; 0) \frac{1}{G^{(2)}(-k)}$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma^{(2)}(k) = \Gamma^{(2,1)}(k, -k ; q = 0) . \quad (42)$$

### E.2. Exemple : $\Gamma^{(2,1)}$ à l'ordre d'une boucle

Pour montrer que les renormalisations décrites aux paragraphes précédents ne suffisent pas à rendre fini  $\Gamma^{(N,L)}$ , il suffit de calculer  $\Gamma^{(2,1)}$  à l'ordre d'une boucle (figure 9) :

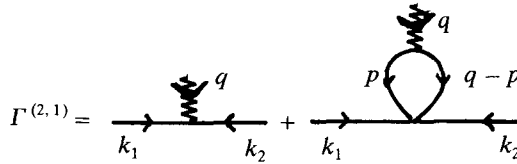


Figure 9. Graphes contribuant à  $\Gamma^{(2,1)}$ .

$$\Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2 ; q) = 1 - \frac{1}{2} g_0 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m_0^2)((q-p)^2 + m_0^2)} . \quad (43)$$

Il est instructif de vérifier (42) en utilisant

$$\Gamma^{(2)}(k) = k^2 + m_0^2 + \frac{1}{2} g_0 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_0^2}.$$

L'intégrale dans l'équation (43) diverge logarithmiquement, et aucune des renormalisations discutées précédemment, ou de façon équivalente, aucun des contre-termes de (25.c) ne peut rendre (43) fini. Il est nécessaire d'introduire une constante de renormalisation supplémentaire  $\bar{Z}$  par la relation :

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2; q; g, m^2) = \bar{Z} Z_3 \Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2; q; g_0, m_0^2, \Lambda) \quad (44)$$

où  $\bar{Z}$  est déterminé par la condition de normalisation :

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_i = 0; q = 0) = 1 \quad (45)$$

en supposant la masse  $\neq 0$ . Dans le cas de la masse nulle, l'intégrale dans (43) est infrarouge divergente lorsque  $q = 0$ , et il est nécessaire de choisir un point de soustraction différent. A l'ordre d'une boucle, et compte tenu du fait que  $Z_3 = 1 + O(g^2)$  on calcule immédiatement  $\bar{Z}$  :

$$\bar{Z} = 1 + \frac{1}{2} g \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}. \quad (46)$$

Pour comprendre le cas général, on procède comme dans le cas des fonctions de corrélation ordinaires, par comptage de puissances.

### E.3. Comptage de puissances et contre-termes

Examinons le degré superficiel de divergence d'un diagramme à  $N$  lignes externes  $\varphi$ ,  $L$  lignes externes  $\varphi^2$  et d'ordre  $V$  en théorie des perturbations. Le facteur  $\omega$  correspondant à l'insertion d'un  $\varphi^2$  est d'après (V.66) :

$$\omega - D = 2 \left( \frac{D}{2} - 1 \right) - D = -2 \quad (47)$$

ce que l'on aurait également pu trouver directement en remarquant que la constante de couplage d'une interaction en  $\varphi^2$  est de dimension 2. On obtient le degré superficiel de divergence  $\omega(N, L)$  du vertex propre  $\Gamma^{(N, L)}$  d'après (V.67) :

$$\omega(N, L) = D - 2L + V(D - 4) - \frac{N}{2}(D - 1)$$

soit si  $D = 4$  :

$$\omega(N, L) = 4 - 2L - N. \quad (48)$$

Pour obtenir (48), on pourrait également remarquer que chaque insertion de  $\varphi^2$  est équivalente à une dérivation par rapport à  $m_0^2$  et diminue la dimension de l'intégrand de 2. Les deux seuls vertex propres superficiellement divergents ont donc :

$$\begin{aligned} N = 0, \quad L = 2 : \omega(0, 2) &= 0 \\ N = 2, \quad L = 1 : \omega(2, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Le premier cas n'intervient que si l'on veut étudier l'énergie libre, et je le laisserai de côté. Comme  $\Gamma^{(2,1)}$  est le seul graphe superficiellement divergent, il suffira d'une renormalisation de  $\varphi^2$  pour rendre tous les  $\Gamma^{(N,L)}$  finis. On utilisera par exemple les conditions de normalisation suivantes :

Masse non nulle :

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_1 = k_2 = q = 0) = 1. \quad (22.d)$$

Masse nulle :

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_{i0}; q_0) = 1 \quad (33.d)$$

où :

$$k_{10}^2 = k_{20}^2 = \frac{3}{4} \mu^2; \quad k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4} \mu^2.$$

Comme dans le cas de  $\Gamma_R^{(2)}$  et  $\Gamma_R^{(4)}$ , il y a une grande part d'arbitraire dans ce choix de normalisation.

Après renormalisation, l'insertion de  $\varphi^2$  n'est pas équivalente à l'insertion d'un produit de deux  $\varphi$  ; pour bien souligner la distinction, on désignera (provisoirement) l'insertion de  $\varphi^2$  par  $[\varphi^2]$ . Les fonctions de corrélation se calculent à l'aide du hamiltonien  $H_A$ , du contre-terme  $\delta H_A$  et du terme de source :

$$\int \left[ j(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} t(x) [\varphi^2] \right] d^4x.$$

La constante de renormalisation  $\bar{Z}$  relie  $[\varphi^2(x)]$  à  $\varphi_0^2(x)$  ; par définition :

$$[\varphi^2(x)] = \bar{Z} Z_3 \varphi^2(x) = \bar{Z} \varphi_0^2(x). \quad (49)$$

Après changement de normalisation du champ, le terme de source devient :

$$\int \left[ Z_3^{-1/2} j(x) \varphi_0(x) - \frac{1}{2} \bar{Z} t(x) \varphi_0^2(x) \right] d^4x$$

et on en déduit la relation entre fonctions de corrélation nues et renormalisées :

$$G_{R,c}^{(N,L)}(k_i, q_j; g, m^2) = Z_3^{-N/2} \bar{Z}^L G_c^{(N,L)}(k_i, q_j; g_0, m_0^2, \Lambda)$$

ou :

$$\Gamma_R^{(N,L)}(k_i, q_j; g, m^2) = Z_3^{N/2} \bar{Z}^L \Gamma^{(N,L)}(k_i, q_j; g_0, m_0^2, \Lambda) \quad (50)$$

(il faut se souvenir que la transformation de Legendre est prise seulement par rapport à  $j$ ). L'équation (44) est bien un cas particulier de (50).

Remarquons également que :

$$\frac{1}{2} t(x) [\varphi^2(x)] = \frac{1}{2} t(x) \varphi^2(x) + \frac{1}{2} t(x) (Z_3 \bar{Z} - 1) \varphi^2(x). \quad (51)$$

Le premier terme de (51) peut être inclus dans  $\mathcal{H}_\Lambda$ , et le second dans  $\delta \mathcal{H}_\Lambda$ , car il joue le rôle d'un contre-terme, et peut être traité suivant les mêmes règles que les contre-terme usuels : il est déterminé de façon récursive en utilisant la condition de normalisation (22.d) (ou 33.d dans le cas de la masse nulle).



Figure 10. Contre-terme associé à l'insertion d'un  $\varphi^2$ .

Remarquons enfin que le cas de la renormalisation de  $\varphi^2(x)$  dans la théorie en  $g\varphi^4$  est particulièrement simple. En règle générale, l'insertion d'un opérateur composé sera couplée par renormalisation avec l'insertion de tous les opérateurs de dimension inférieure ou égale à sa propre dimension, sauf si des conditions de symétrie s'y opposent (cf. exercice 9).

## F. SCHÉMA DE SOUSTRACTION MINIMAL (MS)

Concluons ce chapitre par un exposé du schéma de renormalisation minimal, qui se révèle souvent très commode dans les calculs effectifs. Ce schéma ne fonctionne que si l'on utilise la régularisation dimensionnelle : en effet, au lieu d'utiliser des conditions de normalisation du type (22) ou (33), on construit les contre-terme en soustrayant les

pôles en  $\varepsilon$  des fonctions de corrélation superficiellement divergentes, après avoir effectué une régularisation dimensionnelle. Soulignons que l'on peut parfaitement utiliser une régularisation dimensionnelle avec les conditions de normalisation (22) ou (33). Les fonctions de corrélation renormalisées seront strictement identiques à celles obtenues par régularisation à l'aide d'un cut-off : les fonctions de corrélation renormalisées ne dépendent que des conditions de normalisation, et non de la procédure de régularisation. Au contraire les fonctions de corrélation renormalisées du schéma minimal seront *différentes* de celles obtenues à partir de (22) ou (33). Toutefois les prédictions physiques seront identiques, du moins si l'on somme tous les termes de la série de perturbations : en effet les différences sont absorbées dans une redéfinition de la masse et de la constante de couplage ; si  $g$  est la constante de couplage (renormalisée) obtenue à partir de (22) ou (33), et  $g'$  celle du schéma minimal,  $g'$  s'exprimera par un développement perturbatif en puissances de  $g$  :

$$g' = g + c_1 g^2 + c_2 g^3 + \dots \quad (52)$$

(Le calcul de  $c_1$  est proposé à l'exercice 7.) Ces propriétés ne constituent bien sûr qu'un cas particulier de l'invariance par reparamétrisation de la théorie renormalisée, déjà évoquée précédemment. Cependant on ne connaît qu'un nombre fini de termes (en général deux ou trois) de la série perturbative et les prédictions des deux schémas seront en pratique différents. Supposons par exemple que l'on ait calculé une fonction de corrélation dans les deux schémas à l'ordre  $g^3$ . Les deux schémas différeront par des termes d'ordre  $g^4$ .

Le choix du « meilleur schéma de renormalisation » est important, par exemple en chromodynamique quantique. Plusieurs prescriptions ont été proposées, mais les arguments avancés pour « optimiser le schéma de renormalisation » ne peuvent être qu'heuristiques.

Afin d'illustrer le mécanisme du schéma minimal, je me propose d'effectuer la renormalisation à l'ordre de deux boucles dans le cas de la masse nulle, ce qui correspond au hamiltonien :

$$H = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\mu^\varepsilon g}{4!} \varphi^4 \right) + (\text{contre-termes}) . \quad (53)$$

Comme on utilise la régularisation dimensionnelle, le hamiltonien est écrit pour un espace à  $D$  dimensions, avec comme d'habitude  $\varepsilon = 4 - D$ . La constante de couplage étant dimensionnée, il est commode de définir une constante de couplage sans dimension  $g$  et une masse  $\mu$  : la combinaison  $\mu^\varepsilon g$  a la dimension correcte pour une constante de couplage. Nous aurons besoin du résultat du calcul des

graphes suivants :

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \text{diagram of a circle with a horizontal line through its center} \right] = -\frac{1}{2\varepsilon} \left( 1 - \varepsilon \ln \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) + \varepsilon \times \text{Cte} + O(\varepsilon^2) \right) \quad (54.a)$$

$$\begin{matrix} k_1 \\ \swarrow \\ \text{diagram of two vertices connected by two arcs} \\ \nwarrow \\ k_2 \end{matrix} = \frac{2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2)) \quad (54.b)$$

$$\begin{matrix} k_1 \\ \swarrow \\ \text{diagram of two vertices connected by four arcs} \\ \nwarrow \\ k_2 \end{matrix} = \frac{4}{\varepsilon^2} (1 + 2 \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2)) \quad (54.c)$$

$$\begin{matrix} k_1 \\ \swarrow \\ \text{diagram of two vertices connected by three arcs, one with a loop} \\ \nwarrow \\ k_2 \end{matrix} = \frac{2}{\varepsilon^2} \left( 1 + 2 \varepsilon a_1 + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2) \right) \quad (54.d)$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{(k_1 + k_2)^2}{\mu^2} \quad (54.e)$$

L'écriture des équations (54) est quelque peu schématique. On a omis un facteur multiplicatif  $g\mu^\varepsilon$  pour  $\Gamma^{(4)}$ ; de plus chaque graphe doit être multiplié par un facteur de symétrie et par  $\alpha^L$ , où  $\alpha = g/(4\pi)^{D/2}$  et  $L$  le nombre de boucles. Par exemple (54.a) devrait être multiplié par  $\alpha^2/6$ ;  $\gamma$  représente la constante d'Euler ( $\gamma = 0.577\dots$ ). L'équation (54.a) est à démontrer dans les exercices V.10 ou V.12. La démonstration de (54.b)-(54.d) est renvoyée à l'exercice 6. Calculons d'abord  $Z_3$ , en exigeant la compensation du pôle à  $\varepsilon = 0$  de (54.a) (\*):

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \text{diagram of a circle with a horizontal line through its center} + \text{diagram of a horizontal line with a dot in the middle} \right] \text{ n'a pas de pôle à } \varepsilon = 0$$

d'où :

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha^2}{12\varepsilon} + O(\alpha^3). \quad (55.a)$$

(\*) Le coefficient du pôle est de la forme  $f(D)/\varepsilon$ . Le schéma minimal strict consisterait à soustraire  $f(4)/\varepsilon$ , c'est-à-dire à développer  $(4\pi)^{-D/2}$  en puissances de  $\varepsilon$ . J'utilise en fait une variante du schéma minimal, qui consiste à choisir au lieu de  $\mu$  la masse  $\mu' = \mu(4\pi)^{1/2}$ . Une autre variante est le schéma  $\overline{MS}$ , très utilisé en chromodynamique quantique, qui consiste à choisir  $\bar{\mu} = \mu [e^{-\gamma}(4\pi)]^{1/2}$ .

L'avantage du schéma minimal est que  $Z_3$  est indépendant de la constante dans (54.b) : il n'est donc pas nécessaire de la calculer. Avec la condition de normalisation (33.b), il aurait été nécessaire de calculer cette constante pour obtenir  $Z_3$ .

Déterminons maintenant  $Z_1$  à l'ordre d'une boucle à partir (54.b) :  $Z_1 = 1 + Z_1^{(1)}$  avec :

$$Z_1^{(1)} = \frac{3}{\varepsilon} \alpha. \quad (56)$$

Pour calculer  $Z_1$  à l'ordre de deux boucles, il ne faut pas oublier le graphe à une boucle construit avec le contre-terme :

$$\text{Diagram} = \frac{1}{2} \alpha g Z_1^{(1)} \frac{2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon a_1) \quad (54.f)$$

Tenant compte des facteurs de symétrie et des permutations on trouve :

$$Z_1^{(2)} = -\frac{3}{\varepsilon^2} \alpha^2 (1 + 2 \varepsilon a_1) - \frac{6}{\varepsilon^2} \alpha^2 \left(1 + 2 \varepsilon a_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{18}{\varepsilon^2} \alpha^2 (1 + \varepsilon a_1) \quad (57)$$

où les trois termes correspondent respectivement aux graphes (54.c), (54.d) et (54.f) ; cette équation donne pour  $Z_1^{(2)}$  :

$$Z_1^{(2)} = \frac{9}{\varepsilon^2} \alpha^2 - \frac{3}{\varepsilon} \alpha^2 \quad (58)$$

et donc à l'ordre de deux boucles :

$$Z_1 = 1 + \frac{3}{\varepsilon} \alpha + \frac{9}{\varepsilon^2} \alpha^2 - \frac{3}{\varepsilon} \alpha^2. \quad (55.b)$$

Les équations (55) donnent les deux constantes de renormalisation  $Z_1$  et  $Z_3$  à l'ordre de deux boucles. La relation entre  $g_0$  et  $g$  définit la constante de renormalisation  $Z$  (cf. (24)) :

$$g_0 = Z_1 Z_3^{-2} g = Zg \quad (59)$$

avec :

$$Z = 1 + \frac{3}{\varepsilon} \alpha + \frac{9}{\varepsilon^2} \alpha^2 - \frac{17}{6\varepsilon} \alpha^2 + O(\alpha^3). \quad (55.c)$$

Quelques remarques pour conclure : le coefficient de  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  dans (55.c) est le carré du coefficient de  $1/\varepsilon$  dans (55.b) ; ceci n'est pas le fait du hasard, mais provient de la renormalisabilité de la théorie (cf.

chapitre VII). D'autre part dans l'équation (57), les termes en  $\ln \frac{(k_1 + k_2)^2}{\mu^2}$  se compensent, et heureusement, car dans le cas contraire les contre-termes ne seraient pas locaux en  $x$  et tout le schéma de renormalisation s'écroulerait. Cette compensation est évidemment reliée à celle du terme en  $\ln \Lambda \ln k^2$  entre le graphe de la figure (6.a), et son contre-terme de la figure (6.b). Dans le schéma minimal, les contre-termes apparaîtront donc comme des polynômes de degré  $\leq \omega(G)$  construits avec les moments externes, c'est-à-dire locaux en  $x$ ; les coefficients contiendront à l'ordre de  $l$  boucles des pôles en  $\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-l}$ .

Enfin nous avons conduit les calculs dans le cas de la masse nulle. Cependant les constantes de renormalisation sont, dans le schéma minimal, indépendantes de la masse renormalisée  $m$ , qui est reliée à la masse nue  $m_0^2$  par  $m_0^2 = Z_m m^2$ . En effet, par analyse dimensionnelle,  $Z_1$ ,  $Z_3$  et  $Z_m$  sont fonctions de  $g$ ,  $\varepsilon$  et  $\mu/m$ . Cependant la masse  $\mu$  apparaît uniquement à travers  $\mu^\varepsilon$  qui est développé en  $(1 + \varepsilon \ln \mu + \dots)$ . Les constantes de renormalisation ne peuvent donc être que fonction de  $\ln(\mu/m)$ , mais comme elles sont régulières lorsque  $m = 0$ , une telle dépendance est exclue;  $Z_1$ ,  $Z_3$  et  $Z_m$  dépendent donc uniquement de  $g$  et  $\varepsilon$  dans le schéma minimal. Ceci ne serait pas vrai avec des conditions de renormalisation du type (33).

## EXERCICES

1) (a) Montrer que  $J_A^R = [J_A(k_i, m^2) - J_A(0, m^2)]$  (cf. (12)) est fini à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Montrer également que  $J_A^R$  diffère de  $J_\infty^R$  par des termes en  $k^2/\Lambda^2$ .

(b) Montrer que  $[K_A(k^2, m^2) - K_A(0, m^2) - k^2 K_A'(0, m^2)]$  (cf. (21)) est fini à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  (on pourra utiliser la représentation paramétrique de V-E3).

### 2) Renormalisation de la théorie en $\varphi^3$

Soit  $H$  le hamiltonien de la « théorie en  $\varphi^3$  » :

$$H = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} g \mu^{\varepsilon/2} \varphi^3 \right] + \text{C.T.}$$

avec  $\varepsilon = 6 - D$ . Le facteur  $\mu^{\varepsilon/2}$  assure que la constante de couplage  $g$  est sans dimension.

(a) Montrer que la théorie en  $\varphi^3$  est renormalisable lorsque  $D = 6$ . Quelles sont les fonctions de corrélation superficiellement divergentes ?

(b) On se débarrasse des « tadpoles » (cf. V-E1) à l'aide d'un contre-terme proportionnel à  $\varphi$ . Expliquer pourquoi cette opération — qui consiste à exiger que  $\langle \varphi \rangle = 0$  — est possible. Il ne reste alors comme fonctions de corrélation superficiellement divergentes que  $\Gamma^{(2)}$  et  $\Gamma^{(3)}$  (pour  $D = 6$ ).

(c) Calculer  $\Gamma^{(2)}$  à l'ordre d'une boucle en utilisant :

(c.1) la régularisation de Schwinger,

(c.2) la régularisation dimensionnelle.

Calculer  $\Gamma_R^{(2)}$  en utilisant les conditions de normalisation (22) et vérifier que le résultat est indépendant de la régularisation (sans effectuer l'intégrale sur le paramètre de Feynman). Dans le cas (c.1) on pourra utiliser des identités du type :

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x_0}) = -\ln(x/x_0).$$

Réponse :

$$\Gamma_R^{(2)} = k^2 + m^2 + \frac{1}{12} \alpha k^2 - \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx f(x, k^2) \ln [f(x, k^2)/m^2]$$

avec

$$\alpha = g^2/(4\pi)^3 \quad \text{et} \quad f(x, k^2) = m^2 + x(1-x)k^2.$$

Déterminer également les parties divergentes de  $\delta m^2$  et de  $Z_3$ .

(d) Déterminer la partie divergente de  $\Gamma^{(3)}$  et en déduire la partie divergente de  $Z_1$  à l'ordre d'une boucle. Montrer que dans le schéma minimal  $Z = Z_1 Z_3^{-3/2}$  est donné par :

$$Z = 1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

### 3) Constantes de renormalisation dans une régularisation avec cut-off

(a) En utilisant une régularisation à la Schwinger, calculer  $\Gamma^{(4)}(0)$  à l'ordre d'une boucle en tenant compte des termes constants (finis à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ). En déduire  $Z_1^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{g}{(4\pi)^2} \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - (\gamma + \ln 2 + 1) \right]$ , où  $\gamma$  est la constante d'Euler. Il faut faire attention aux limites d'intégration sur les paramètres  $\alpha_i$  et utiliser la relation :

$$\gamma = - \left[ \int_0^1 \frac{du}{u} (e^{-u} - 1) + \int_0^\infty \frac{du}{u} e^{-u} \right].$$

(b) On se propose de calculer l'intégrale correspondant au graphe (e) de la figure (6), pour  $k_i = 0$ . On pourra utiliser la représentation paramétrique (V-61), en intégrant d'abord sur les variables  $x_i$  (attention aux limites d'intégration). On se contentera de calculer les termes divergents en  $(\ln \Lambda)^2$  et

( $\ln \Lambda$ ). Montrer que l'on obtient :

$$I = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2} - (\gamma + \ln 2) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Il faut multiplier ce résultat par  $g\alpha$ , où  $\alpha = g/(4\pi)^2$ , et par le facteur de symétrie.

(c) Montrer qu'à l'ordre de deux boucles la constante de renormalisation  $Z_1$  est donnée par :

$$Z_1 = 1 + \frac{3}{2} \alpha \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - (\gamma + \ln 2 + 1) \right] + \alpha^2 \left\{ \frac{9}{4} \ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2} - \left[ \frac{9}{2} (\gamma + \ln 2) + \frac{15}{2} \right] \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right\}.$$

En déduire la constante de renormalisation  $Z$  à partir de  $Z = Z_1 Z_3^{-2}$  et (cf. (V-64))

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha^2}{12} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

4) Afin de déterminer rigoureusement le comportement de l'intégrale (28) quand  $\alpha_i \rightarrow 0$ , on divise le domaine d'intégration en secteurs du type :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$$

et on utilise (dans ce secteur) le changement de variables ( $0 \leq \beta_i \leq 1$ ,  $i \leq 3$ ;  $0 \leq \beta_4 < \infty$ ) :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 & \alpha_2 &= \beta_2 \beta_3 \beta_4 \\ \alpha_3 &= \beta_3 \beta_4 & \alpha_4 &= \beta_4. \end{aligned}$$

Justifier les affirmations du paragraphe D.1 sur le comportement de  $I(k_i)$ ,  $\partial I / \partial k^2$ ,  $\bar{I}(k_i)$ ,  $\partial \bar{I} / \partial k^2$ ; on pourra se contenter d'examiner les secteurs  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$  et  $\alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  à titre d'exemple.

La division en secteurs est indispensable pour éviter des incidents dus à des intégrales du type (exemple emprunté à Itzykson-Zuber) :

$$\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \frac{2\alpha_1}{[\alpha_1^2 + \alpha_2]^2}.$$

Cette intégrale a l'air convergente si l'on examine les régions ( $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2$  fini) ( $\alpha_2 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_1$  fini), ( $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$  au même rythme), et pourtant elle est divergente.

5) En prenant le logarithme de l'équation (38), montrer la relation (39) pour les fonctions de corrélation connexes  $G_c^{(N,L)}$ . En déduire (39) pour les fonctions de corrélation « connexes en  $\varphi^2$  », où les insertions de  $\varphi^2$  sont reliées à des points externes en  $\varphi$  (un diagramme qui n'est pas « connexe en  $\varphi^2$  » est dessiné sur la figure (8)).

### 6) Graphe à deux boucles en régularisation dimensionnelle

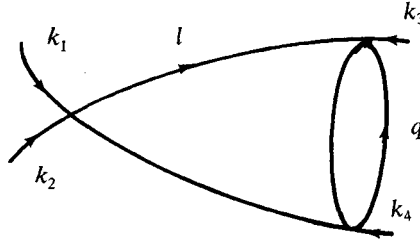
(a) Calculer le graphe à une boucle contribuant à  $\Gamma^{(4)}$  dans le cas de la masse nulle en utilisant la régularisation dimensionnelle. On évaluera non seulement la partie divergente, mais également la partie constante à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (Réponse : cf. (54.b)).

(b) Calculer le graphe à deux boucles de la figure (5.c), toujours dans le cas de la masse nulle et en utilisant une régularisation dimensionnelle. On se limitera aux termes en  $1/\varepsilon^2$  et  $1/\varepsilon$ .

On pourra utiliser l'une des deux techniques suivantes :

- (i) partir de la représentation paramétrique (V.61),
- (ii) intégrer successivement sur les deux boucles (cf. exercice V.12).

La deuxième méthode est probablement la plus rapide. Je donne quelques intermédiaires de calcul : l'intégration sur  $d^D q$  conduit à ( $k = k_1 + k_2$ ) :



$$I = \frac{\Gamma(\varepsilon/2) B(1 - \varepsilon/2; 1 - \varepsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2 (k-l)^2 [(k_3+l)^2]^{\varepsilon/2}}.$$

Les trois dénominateurs sont combinés à l'aide de l'identité de Feynman (B.1) et on intègre sur  $l$  :

$$I = \frac{\Gamma(\varepsilon) B(1 - \varepsilon/2; 1 - \varepsilon/2)}{(4\pi)^D} \times \\ \times \int \frac{\left( \prod_1^3 dx_i \right) \delta \left( 1 - \sum_1^3 x_i \right) x_3^{\varepsilon/2-1}}{[x_2(1-x_2)k^2 + x_3(1-x_3)k_3^2 + 2x_2x_3k \cdot k_3]^{\varepsilon}}.$$

Pour obtenir les termes en  $1/\varepsilon^2$  et  $1/\varepsilon$  on remarque que :

$$\int_0^{x_2} dx_3 x_3^{\varepsilon/2-1} f(x_3) = f(0) \int_0^{x_2} dx_3 x_3^{\varepsilon/2-1} + O(\varepsilon).$$

Le résultat est donné en (54.d).

7) Trouver, à l'ordre  $g^2$ , la relation entre la constante de couplage renormalisée du schéma minimal (défini au paragraphe F),  $g_{MS}$ , et celle  $g(\mu)$  obtenue à partir des conditions de normalisation (33). On calculera la constante de renormalisation  $Z_1$  dans les deux schémas pour une même valeur de la constante de couplage nue.

Réponse :

$$g(\mu) = g_{MS} - \frac{3 g_{MS}^2}{(4\pi)^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \gamma \right).$$

### 8) Renormalisation de l'action effective

On part de l'expression (II.44) du potentiel effectif à l'ordre d'une boucle en dimension  $D = 4$  (expliquer la différence entre cette équation et l'équation ci-dessous pour  $V(\bar{\varphi})$ ) :

$$V(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2} m^2 \bar{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} g \bar{\varphi}^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \ln \left( 1 + \frac{g \bar{\varphi}^2 / 2}{q^2 + m^2} \right).$$

L'intégrale sur  $q$  est divergente. Pour renormaliser le potentiel effectif on se sert des conditions (22), en se souvenant que :

$$\Gamma^{(2)}(0) = \frac{d^2 V}{d\bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}=0}; \quad \Gamma^{(4)}(0) = \frac{d^4 V}{d\bar{\varphi}^4} \Big|_{\bar{\varphi}=0}.$$

(a) Montrer que les conditions (22) sont bien satisfaites si le potentiel effectif renormalisé  $V_R(\bar{\varphi})$  est donné par :

$$V_R(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2} m^2 \bar{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} g \bar{\varphi}^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\ \times \left\{ \ln \left( 1 + \frac{g \bar{\varphi}^2 / 2}{q^2 + m^2} \right) - \frac{g \bar{\varphi}^2 / 2}{q^2 + m^2} + \frac{1}{2} \frac{(g \bar{\varphi}^2 / 2)^2}{(q^2 + m^2)^2} \right\}.$$

Vérifier la convergence de l'intégrale.

(b) Calculer explicitement  $V_R(\bar{\varphi})$  et obtenir :

$$V_R(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2} m^2 \bar{\varphi}^2 + \frac{1}{4!} g \bar{\varphi}^4 + \frac{1}{(8\pi)^2} \times \\ \times \left[ \left( m^2 + \frac{g \bar{\varphi}^2}{2} \right)^2 \ln \left( 1 + \frac{g \bar{\varphi}^2}{2 m^2} \right) - \frac{g \bar{\varphi}^2}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{g \bar{\varphi}^2}{2} + m^2 \right) \right].$$

(c) Si  $m = 0$ , la méthode précédente conduit à une intégrale infrarouge divergente. On définit une nouvelle constante de couplage :

$$g(\mu) = \frac{d^4 V(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}^4} \Big|_{\bar{\varphi}=\mu}.$$

Calculer  $V(\bar{\varphi})$  en utilisant un cut-off  $\Lambda$  et montrer que la définition de  $g(\mu)$ , ainsi que la condition  $d^2 V(\bar{\varphi}) / d\bar{\varphi}^2 \Big|_{\bar{\varphi}=0} = 0$  conduisent à l'expression suivante de  $V_R(\bar{\varphi})$ , due à Coleman et Weinberg<sup>(1)</sup> :

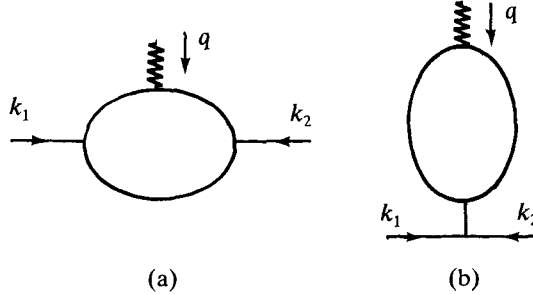
$$V_R(\bar{\varphi}) = \frac{1}{4!} g(\mu) \bar{\varphi}^4 + \frac{g^2(\mu) \bar{\varphi}^4}{(16\pi)^2} \left( \ln \frac{\bar{\varphi}^2}{\mu^2} - \frac{25}{6} \right).$$

Tracer qualitativement  $V_R(\bar{\varphi})$ .

### 9) Renormalisation de l'opérateur $\varphi^2$ dans la théorie en $\varphi^3$ <sup>(2)</sup>

On se place dans le cadre de la théorie en  $\varphi^3$  à six dimensions (cf. exercice 2), et on se propose d'étudier la renormalisation de la fonction de corrélation  $G_c^{(2,1)}(x, y; z) = \left\langle \varphi(x) \varphi(y) \frac{1}{2} \varphi^2(z) \right\rangle_c$  ou du vertex propre  $\Gamma^{(2,1)}$  qui lui est associé.

(a) Montrer qu'à l'ordre d'une boucle les diagrammes divergents de  $\Gamma^{(2,1)}$  sont :



En déduire les contre-termes correspondants.

(i)  $-\frac{\alpha}{\varepsilon}$

(ii)  $-\frac{g}{(4\pi)^3 \varepsilon} \left( m^2 + \frac{1}{6} q^2 \right).$

(b) Montrer que la renormalisation de  $\varphi^2$  se fait de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} [\varphi^2] = \frac{1}{2} Z_a \varphi^2 + \mu^{-\varepsilon/2} Z_b m^2 \varphi + \mu^{-\varepsilon/2} Z_c \nabla^2 \varphi$$

où, à l'ordre d'une boucle :

$$Z_a = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}; \quad Z_b = \frac{-g}{(4\pi)^3 \varepsilon}; \quad Z_c = -\frac{1}{6} Z_b.$$

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Un exposé élémentaire de la renormalisation est donné par S. Coleman, « Renormalization and Symmetry : a Review for Non-Specialists », dans les *Comptes Rendus de l'Ecole d'Erice* (1970). Les exposés de Brézin *et al.* (section III) et de Amit (chapitres 6 et 7) sont d'un niveau comparable à celui de ce chapitre. A un niveau plus avancé, on pourra consulter Itzykson-Zuber (chapitre 8) et Collins (chapitres 3 et 5). La régularisation dimensionnelle est exposée en détail dans Collins (chapitre 4). Pour la renormalisation des opérateurs composés, on pourra consulter Itzykson-Zuber, chapitre 8.

<sup>(1)</sup> S. Coleman et E. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**, 1888 (1973).

<sup>(2)</sup> Collins, chapitre 6.

## CHAPITRE VII

# Equations de Callan-Symanzik

Au chapitre III, nous avons vu apparaître le terme « renormalisation » dans l'expression « groupe de renormalisation » ; rappelons que la stratégie utilisée consistait à suivre l'évolution des paramètres définissant le hamiltonien dans des contractions successives du cut-off  $\Lambda$ , l'objectif étant d'atteindre le comportement à longue distance ( $r \gg 1/\Lambda$ ) de la théorie. Au chapitre précédent, la renormalisation semble apparaître dans un contexte tout à fait différent : il s'agit d'éliminer une théorie nue qui est soit non physique, soit non directement exploitable, au profit d'une théorie renormalisée dépendant d'un petit nombre de paramètres. Cependant on peut déjà remarquer que la théorie renormalisée, étant finie quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , est aussi approximativement indépendante de  $\Lambda$  lorsque  $\Lambda$  est grand, mais fini, du moins dans la région à longue distance  $r \gg 1/\Lambda$ . Il doit donc exister, au moins à un niveau qualitatif, un lien entre la théorie obtenue par intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde et la théorie renormalisée, qui ont pour caractéristique commune d'être toutes deux des théories à longue distance.

On a d'ailleurs assisté à un changement progressif de point de vue sur la signification d'une théorie renormalisée en théorie quantique des champs ; jusqu'au début des années 70, la théorie nue était considérée comme un artifice de calcul sans signification physique. Aujourd'hui on aurait plutôt tendance à penser qu'une théorie renormalisée apparaît comme une approximation à longue distance d'une théorie plus complexe et qui nous est encore inconnue. Cependant à longue distance (c'est-à-dire dans ce cas pour  $r \sim 10^{-18}$  m!), les détails de cette théorie à courte distance sont sans importance, car il suffit de connaître les quelques paramètres définissant la théorie renormalisée. Il est clair que

l'étude des phénomènes critiques a joué un rôle important dans ce changement de point de vue.

Les résultats obtenus au chapitre III, paragraphes E et F, vont être retrouvés en exploitant une propriété de la théorie renormalisée que nous avons déjà signalée : l'invariance par reparamétrisation de la masse et de la constante de couplage, qui provient de l'arbitraire dans le choix de la partie finie des contre-termes. En fait nous allons nous servir uniquement d'une classe restreinte de reparamétrisations, celle qui consiste à faire varier la masse de renormalisation  $\mu$  (cf. VI.33). Cette invariance s'exprime mathématiquement sous la forme des équations de Callan-Symanzik (C-S) (\*) ; sous certaines conditions, à savoir l'existence d'un zéro de la fonction  $\beta(g)$  possédant des propriétés convenables, on pourra déduire de ces équations le comportement à longue distance (cas des phénomènes critiques) ou à courte distance (cas de la théorie quantique des champs :  $m, \mu \ll k \ll \Lambda$ ) de la théorie. On retrouvera ainsi la propriété d'invariance d'échelle, avec des exposants dépendant de dimensions anormales, ou bien des corrections logarithmiques.

Une partie de la physique contenue dans les équations de C-S a déjà été exposée au chapitre III, paragraphes E et F. Cependant il est nécessaire d'examiner ces équations avec attention pour les raisons suivantes :

(i) ce sont des équations exactes, qui sont une conséquence directe de l'existence d'une théorie renormalisée, alors que la méthode exposée au chapitre III est au mieux semi quantitative (cf. cependant <sup>(1)</sup>) ;

(ii) elles constituent le langage moderne de la « première version » du groupe de renormalisation, celle de Stueckelberg et Petermann et de Gell-Mann et Low. C'est le langage généralement utilisé par les théoriciens des champs ;

(iii) elles fournissent une mécanique quasi automatique pour déduire les conséquences du groupe de renormalisation et permettent des calculs sans ambiguïté à des ordres élevés de la théorie des perturbations ;

(iv) en revanche la méthode de Wilson s'applique à une classe beaucoup plus large de systèmes physiques car elle n'est pas liée à la théorie des perturbations.

Au paragraphe A je discuterai de façon qualitative la relation entre l'exposé du chapitre III, paragraphe F et la renormalisation telle qu'elle

(\*) En réalité l'équation de Callan-Symanzik proprement dite est celle de l'exercice (2.a). Par abus de langage, j'appellerai « équation de Callan-Symanzik » toute équation ayant une forme analogue. Naturellement il conviendra de bien faire la distinction entre les différents types d'équations de C-S.

a été décrite au chapitre précédent. En particulier, je clarifierai la relation entre constantes de couplage nue et renormalisée, ainsi que la notion de constante de renormalisation du champ.

Le paragraphe B présente une version des équations de C-S qui est la plus proche dans son esprit de la méthode de Wilson. La démonstration repose sur l'observation déjà faite précédemment : la théorie renormalisée est, à longue distance ( $r \gg \Lambda^{-1}$ ), approximativement indépendante du cut-off  $\Lambda$ . On obtient ainsi des équations pour les fonctions de corrélation nues ; cependant ces équations ne sont pas exactes, car on néglige des termes d'ordre  $\Lambda^{-2}$ . L'approximation ainsi faite correspond, dans la méthode de Wilson, à celle qui consiste à négliger l'influence des champs inessentiels.

Pour obtenir des équations exactes, on passera au paragraphe C à la théorie renormalisée. On examinera d'abord le cas  $T = T_c$ , qui correspond, rappelons-le, à celui d'une masse renormalisée nulle. L'équation de C-S sera obtenue en exploitant l'invariance par rapport au paramètre  $\mu$  (cf. VI.33), arbitraire mais nécessaire pour définir la théorie de masse nulle. Ce paramètre brise l'invariance d'échelle naïve ; l'invariance d'échelle sera finalement récupérée, mais dépendra de dimensions anormales. La théorie à  $T \neq T_c$  sera construite à partir de celle à  $T = T_c$  et une équation de C-S permettra d'établir le comportement (I.30) de la fonction de corrélation à deux points.

Les deux derniers paragraphes contiennent des détails plus techniques sur le calcul des fonctions  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$ ... ainsi qu'un calcul des exposants critiques à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

Les paragraphes B à E sont (relativement) indépendants de la première partie du livre. Le lecteur intéressé uniquement par les problèmes de théorie quantique des champs pourra donc sauter le paragraphe A, ainsi que tous les passages consacrés spécifiquement aux phénomènes critiques.

## A. RENORMALISATION ET GROUPE DE RENORMALISATION

### A.1. Analyse dimensionnelle

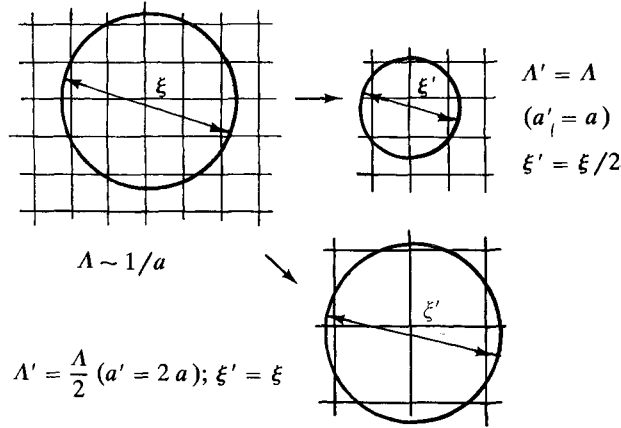
Ce paragraphe contient une discussion qualitative du lien entre le groupe de renormalisation (chapitre III) et la théorie de la renormalisation (chapitre VI). Il repose sur les résultats établis au paragraphe III-F.1 ; sa lecture n'est pas nécessaire pour aborder les paragraphes B à E. Nous nous placerons en dimension  $D = 4$  et, par souci de simplification,

dans le cas de la masse renormalisée nulle ( $m = 0$  ou  $T = T_c$ ). Les équations du GR peuvent être résumées par la donnée d'équations différentielles dont le membre de droite ne dépend que de la constante de couplage  $g_0(s)$  de l'interaction en  $\varphi^4$ . Rappelons la loi de transformation (III.87) d'un vertex propre  $\Gamma^{(N)}$  choisi en configuration non exceptionnelle :

$$\Gamma^{(N)}(sk_i, g_0(s), \Lambda) = s^{D-N\left(\frac{D}{2}-1\right)} [\zeta(s)]^{-N/2} \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda). \quad (1)$$

On notera le changement de notations :  $g(s) \rightarrow g_0(s)$ .

Dans l'équation (1), l'exposant  $d = D - N\left(\frac{D}{2} - 1\right)$  de  $s$  est simplement la dimension normale du vertex propre  $\Gamma^{(N)}$  (cf. V.69), et le facteur  $(\zeta(s))^{-N/2}$  provient de la différence entre dimension canonique et dimension anormale. Rappelons que pour établir l'équation (1), nous avons fait au chapitre III une dilatation de l'unité de longueur d'un facteur  $s$ , de façon à maintenir  $\Lambda$  (ou le pas du réseau  $a$ ) constant. Cette opération était commode mais non indispensable. On peut aussi bien ne pas faire cette dilatation, et comparer deux systèmes physiques de même longueur de corrélation  $\xi$  sur des réseaux de pas différents (figure 1).



**Figure 1.** Deux façons d'envisager une transformation du groupe de renormalisation.

L'analyse dimensionnelle ordinaire permet en effet d'écrire :

$$\Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) = \Lambda^d f\left(\frac{k_i}{\Lambda}, g_0\right) \quad (2)$$

étant donné que  $g_0$  est sans dimension ( $D = 4$ ) et l'équation (1) est transformée en :

$$\Gamma^{(N)}\left(k_i, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right) = [\zeta(s)]^{-N/2} \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda). \quad (3)$$

Rappelons que la constante de couplage  $g_0(s)$  vérifie :

$$\frac{dg_0(s)}{d \ln s} = -\beta(g_0(s)); \quad g_0(1) = g_0 \quad (4)$$

et que si l'on tient compte uniquement du premier terme (en  $\beta_0 g_0^2$ ) de  $\beta(g)$  on peut résoudre (4) :

$$g_0(s) = \frac{g_0}{1 + \beta_0 g_0 \ln s}. \quad (5)$$

Les conséquences physiques de (3) sont les suivantes : partons d'une situation où  $k_i/\Lambda \ll 1$ ,  $g_0$  étant fixé. Le développement perturbatif de  $\Gamma^{(N)}$  dans le membre de droite de (3) contient des facteurs  $g_0 \ln(k_i/\Lambda)$ , qui invalident la série perturbative. Après transformation du GR, on peut choisir  $s$  de telle sorte que  $sk_i/\Lambda \sim 1$  (ceci correspond à intégrer sur les fluctuations de moment  $k_i \leq k \leq \Lambda$ ) : le membre de gauche de (3) possède un développement perturbatif en puissances de  $g_0(s)$ , et mieux  $g_0(s) \rightarrow 0$  si  $s \rightarrow \infty$ . Le comportement critique se trouve contenu dans le facteur  $[\zeta(s)]^{-N/2}$ .

### A.2. Identification de la constante de couplage renormalisée

Afin de simplifier l'exposé, il est commode de se débarrasser provisoirement des facteurs  $\zeta(s)$  en définissant des « charges invariantes »  $\hat{\Gamma}$  qui se transforment sans ce facteur, et dont la dimension canonique est nulle. Pour fixer les idées, étudions la charge invariante  $\hat{\Gamma}$  :

$$\hat{\Gamma}(k_i, g_0, \Lambda) = \frac{\Gamma^{(4)}(k_i, g_0, \Lambda) \left( \prod_{i=1}^4 k_i^2 \right)^{1/2}}{\left( \prod_{i=1}^4 \Gamma^{(2)}(k_i, g_0, \Lambda) \right)^{1/2}}. \quad (6)$$

A l'ordre de zéro boucle (approximation de Landau),  $\hat{\Gamma}$  se réduit à la constante de couplage  $g_0$ ; dans une TGR, la loi de transformation de  $\hat{\Gamma}$  est :

$$\hat{\Gamma}(k_i, g_0(s), \Lambda/s) = \hat{\Gamma}(k_i, g_0, \Lambda). \quad (7)$$

Faisons maintenant le lien avec la théorie renormalisée, en introduisant un point de soustraction  $k_{i0}$  dépendant d'un paramètre de masse  $\mu \gtrsim k_i$ , et en choisissant  $s = \frac{\Lambda}{\mu}$ ; d'après (7) :

$$\hat{\Gamma} \left( k_i, g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right), \mu \right) = \hat{\Gamma} (k_i, g_0, \Lambda). \quad (8)$$

Fixons maintenant la constante de couplage renormalisée  $g$  par :

$$\hat{\Gamma} \left( k_{i0}, g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right), \mu \right) = g. \quad (9)$$

A l'ordre de zéro boucle,  $g = g_0(\Lambda/\mu)$  et d'après ce qui précède  $g$  possède un développement régulier (c'est-à-dire ne contenant pas de grands logarithmes) en puissances de  $g_0(\Lambda/\mu)$ , et réciproquement :

$$g = g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) + c g_0^2 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) + \dots \quad (10)$$

Autrement dit  $g$  et  $g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)$  ne diffèrent que par une renormalisation finie et les corrections perturbatives dans (10) peuvent toujours être absorbées dans un changement des conditions de normalisation (VI.33). On peut donc identifier  $g_0(\Lambda/\mu)$  avec la constante de couplage renormalisée  $g$  et  $\hat{\Gamma}(k_i, g, \mu)$  avec la charge invariante renormalisée.

Dans ce raisonnement, la théorie renormalisée apparaît manifestement comme une théorie à longue distance, valable pour une échelle de moments  $k_i \leq \mu \ll \Lambda$ . Cette théorie dépend d'un paramètre, la constante de couplage renormalisée  $g$ , qui est elle aussi déterminée à une échelle  $\sim \mu$ . Ainsi qu'on le verra plusieurs fois dans ce chapitre, une théorie renormalisée ne dépend pas d'une constante de couplage fixe ; en réalité, à chaque échelle de moments correspond une constante de couplage adaptée à cette échelle, et qui autorise un développement perturbatif.

La discussion qui précède n'est pas complète, car nous n'avons pas explicité les couplages (ou variables) inessentiels. Pour fixer les idées, restreignons-nous à un seul couplage inessentiel, par exemple la constante de couplage nue de l'interaction (non renormalisable) en  $\varphi^6$ ,  $u_6^0$ . Cette constante de couplage a pour dimension  $-2$ , et il est commode de définir la constante de couplage sans dimension  $g_6^0 = \Lambda^2 u_6^0$ ,  $g_6^0(s) = (\Lambda/s)^2 u_6^0(s)$ . On notera qu'il revient au même, dans les équations du GR, d'utiliser des constantes de couplage sans dimension ou de faire un changement d'échelle comme au chapitre III. Considérons dans le plan  $(g, g_6)$  deux trajectoires (1) et (2) du flot de renormalisation, correspondant à deux choix initiaux différents pour

$g_6^0 : g_6^0 = 0$  et  $g_6^0 \neq 0$  avec des valeurs de  $g_0$  identiques ;  $m_0^2$  est ajusté de telle sorte que la théorie soit critique (figure 2).

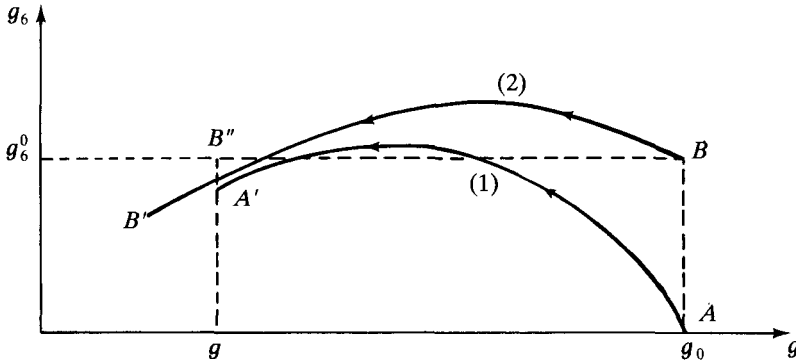


Figure 2.

Les trajectoires issues des points  $A$  et  $B$  aboutissent, après un nombre identique de TGR, aux points  $A'$  et  $B'$ . Cependant, il existe sur la trajectoire (2) un point  $B''$ , correspondant à une valeur de  $g$  identique à celle de (1), et décrivant évidemment la même physique à longue distance que  $B'$ . Le couplage  $g_6^0$  vérifie une équation analogue à (III-80) et les points  $A'$  et  $B''$  diffèrent par un terme d'ordre  $(\mu/\Lambda)^2$  : cf. le facteur  $4^{-1}$  dans l'équation (III-76c). Il existe un argument heuristique plus direct, dû à Polchinski<sup>(1)</sup>, qui donne également une preuve complète (mais longue). Ainsi, avec une précision  $\sim (\mu/\Lambda)^2$ , il est toujours possible, en jouant sur  $\Lambda$ , de se restreindre dans la théorie *nue* aux interactions *renormalisables*, c'est-à-dire partir de points situés sur l'axe des  $g$ , dans le cas de la figure 2. Cependant il est nécessaire que  $u_6^0$  soit proportionnel à  $\Lambda^{-2}$ , et non à une échelle de (masse) $^{-2}$  inférieure, par exemple  $\mu^{-2}$ .

De façon générale, avec une précision  $\sim (\mu/\Lambda)^2$ , toutes les trajectoires du flot de renormalisation convergent vers une variété de dimension  $n$ , où  $n$  est le nombre de couplages essentiels et marginaux (une courbe dans le cas de la figure 2). La théorie renormalisée est définie par la donnée de  $n$  couplages renormalisés ( $g$  dans le cas de la figure 2) ; les couplages inessentiels ne sont pas nuls, mais ils sont entièrement déterminés par la donnée des couplages essentiels et marginaux (et  $g_6$  est — au moins — d'ordre  $g^2$ ). En ce sens la notation  $\hat{\Gamma}^{(N)}(k_i, g_0(s), \Lambda/s)$  peut être source de confusion :  $\hat{\Gamma}^{(N)}$  dépend aussi de  $g_6^0(s)$ , etc., mais ces couplages sont calculables (avec une précision  $1/s^2$ ) en fonction de  $g_0(s)$ . Il faut également se rendre compte que le véritable cut-off n'est pas  $\mu = \Lambda/s$ , mais  $\Lambda$  : à  $\Lambda$  fini, les corrections à

$\hat{\Gamma}^{(N)}$  sont en  $(k_i/\Lambda)^2$ , et non en  $(k_i/\mu)^2$ . Le rôle des variables inessentiels est évidemment crucial pour assurer cette propriété.

Afin d'achever l'identification avec la théorie usuelle de la renormalisation il faudrait faire tendre  $\Lambda$  vers l'infini et montrer l'existence d'une variété limite. Cependant cette limite pose problème dans le cadre de la théorie en  $\varphi^4$ , car  $g_0$  diverge à  $g$  fixé pour une valeur finie de  $\Lambda$ . C'est seulement dans le cas de théories asymptotiquement libres (cf. A.3) que l'on peut s'attendre à trouver une telle variété limite. Néanmoins, dans le cadre de la théorie perturbative,  $g_0$  existe toujours comme série formelle en  $g$ , ce qui permet — dans ce cadre — de compléter l'argument <sup>(1)</sup>. Remarquons enfin que l'identification explicite entre des calculs menés dans la version usuelle de la renormalisation et dans celle de Wilson n'est possible qu'à l'ordre d'une boucle. En effet, dans la version de Wilson, les calculs analytiques deviennent rapidement inextricables en raison de la complexité de l'intégration sur les fluctuations de courte longueur d'onde.

### A.3. Classification des théories

On souhaite disposer d'une théorie renormalisée finie, qui permette de développer les fonctions de corrélation renormalisées en fonction d'une constante de couplage  $g$  petite (disons  $g \sim \frac{1}{10} - \frac{1}{100}$ ), et faire tendre le cut-off  $\Lambda$  vers l'infini, de façon à éliminer toute dépendance par rapport à  $\Lambda$ . L'expression (5) peut être inversée afin d'obtenir  $g_0$  en fonction de  $g$  :

$$g_0\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \simeq \frac{g}{1 - \beta_0 g \ln \Lambda/\mu}. \quad (11)$$

La discussion précédente a été conduite dans le cadre de la théorie en  $\varphi^4$ . Dans le cas général, il faudra distinguer deux cas :

(a) Si  $\beta_0 < 0$ ,  $g_0$  décroît et tend vers zéro quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  à  $g$  fixé. Il est donc possible de définir une théorie nue perturbative à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

(b) Si  $\beta_0 > 0$ ,  $g_0$  croît et devient éventuellement infini (naturellement dès que  $g_0 \sim 1$  on sort de la région perturbative et l'expression (11) n'est plus utilisable). Bien que le raisonnement soit incomplet, car nous n'avons utilisé que le premier terme de  $\beta(g)$ , on constate qu'il sera vraisemblablement difficile de définir une théorie renormalisée non triviale. Une autre façon de montrer la difficulté est de remarquer que pour  $\Lambda/\mu$  très grand et  $g_0$  petit,  $g \rightarrow 0$  : la théorie renormalisée tend vers une théorie libre. Ce cas est celui de la théorie en  $\varphi^4$  : à cause de

cet argument (et d'autres beaucoup plus sophistiqués mais dont la base physique est identique), de nombreux théoriciens pensent qu'à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , la théorie en  $\varphi^4$  est une théorie libre si  $D = 4$  ; lorsque  $D > 4$ , le résultat a été prouvé rigoureusement (cf. également l'exercice (6)).

Le cas  $\beta_0 < 0$  est celui de théorie des champs dites « *asymptotiquement libres* » (sous-entendu : dans le domaine ultraviolet (cf. paragraphe C)) : c'est celui des théories de jauge non abéliennes (XIII-D.1) et de la théorie en  $\varphi^3$  à six dimensions (exercice 4). On note que dans ce cas la relation (11) entre  $g_0$  et  $g$  est parfaitement bien définie :

$$g_0 = \frac{g}{1 + |\beta_0| g \ln (\Lambda/\mu)}$$

mais qu'une série de termes tendant vers l'infini apparaît si l'on développe le dénominateur :

$$g_0 = g \left( 1 - |\beta_0| g \ln \frac{\Lambda}{\mu} + |\beta_0|^2 g^2 \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \right).$$

A un ordre fixé en  $g$ , la relation entre  $g_0$  et  $g$  fait apparaître des quantités infinies, qui en fait disparaissent par resommation. Ceci montre que la renormalisation ne devrait pas être faite ordre par ordre en théorie des perturbations, mais que l'on devrait d'abord sommer les logarithmes dominants  $(g \ln \Lambda/\mu)^n$ , puis sous-dominants :  $g^n \ln^{n-1} \Lambda/\mu$  etc. Malheureusement, bien que cette façon de voir soit physiquement la plus satisfaisante, elle ne semble pas commode à réaliser techniquement.

#### A.4. Identification de $Z_3$

Il reste à rétablir les facteurs  $\zeta(s)$  qui n'intervenaient pas dans les charges invariantes. Comme  $\zeta(s)$  provient de la renormalisation du champ dans une TGR, on ne sera pas surpris que ce facteur soit relié très directement à  $Z_3$ . La fonction  $\zeta(s)$  vérifie l'équation différentielle (cf. III-F.2) :

$$\frac{d \ln \zeta(s)}{d \ln s} = \gamma(g_0(s)) ; \quad \zeta(1) = 1 \quad (12)$$

qui a pour solution :

$$\zeta(s) = \exp \left( \int_0^{\ln s} \gamma(g_0(s')) d \ln s' \right)$$

ou :

$$\zeta(s) = \exp \left( - \int_{g_0}^{g_0(s)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right). \quad (13)$$

En reportant dans l'équation (3) on trouve la loi de transformation de  $\Gamma^{(N)}$ :

$$\Gamma^{(N)} \left( k_i, g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right), \mu \right) = \exp \left( \frac{1}{2} N \int_{g_0}^{g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right) \times \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda). \quad (14)$$

En reprenant les arguments développés ci-dessus,  $\Gamma^{(N)}(k_i, g_0(\Lambda/\mu), \mu)$  peut être identifié avec la fonction de corrélation renormalisée  $\Gamma_R^{(N)}(k_i, g, \mu)$ , et, comparant avec (VI.32), on obtient :

$$Z_3 = \zeta \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)^{-1} = \exp \left( \int_{g_0}^{g_0 \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right) \quad (15)$$

où  $g_0(\Lambda/\mu) \simeq g$ .

#### A.5. Schémas de renormalisation et définition de $\beta(g_0)$

Le hamiltonien de Ginzburg-Landau avec cut-off  $\Lambda$  n'est évidemment pas défini de façon unique ; on peut utiliser un cut-off brutal, ou bien un cut-off « doux », utiliser une régularisation sur réseau, etc. Tous ces hamiltoniens diffèrent par des termes inessentiels, et donnent, à un changement d'échelle près, la même physique à longue distance, ou, de façon équivalente, des couplages  $g_0(s)$  différents : cf. les points  $A'$  et  $B'$  de la figure 2. Soit deux hamiltoniens de départ donnant des couplages  $g_0(s)$  et  $g'_0(s)$  ; nous aurons :

$$g'_0(s) = g_0(s) + c_1 g_0^2(s) + c_2 g_0^3(s) + \dots \quad (16)$$

où les coefficients  $c_1, c_2, \dots$  sont indépendants de  $s$  avec une précision  $\sim 1/s^2$ . En effet  $g_0(s)$  et  $g'_0(s)$  ne peuvent différer que par une renormalisation *finie*, c'est-à-dire par une différence de *schéma de renormalisation* ; les fonctions  $\beta$  décrivant l'évolution de  $g_0(s)$  et  $g'_0(s)$  seront a priori différentes. Cependant il est possible de prouver la propriété suivante :

*Les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$  des deux premiers termes du développement perturbatif de  $\beta(g_0)$  et  $\beta'(g'_0)$  sont identiques.*

Démonstration : Soit :

$$\beta(g_0(s)) = \beta_0 g_0^2(s) + \beta_1 g_0^3(s) + \dots \quad (17)$$

Calculons  $\beta'(g'_0(s))$  :

$$\begin{aligned} \beta'(g'_0(s)) &= - \frac{dg'_0(s)}{d \ln s} = \beta(g_0(s)) + 2 c_1 g_0(s) \beta(g_0(s)) + \dots \\ &= \beta_0 g_0^2(s) + \beta_1 g_0^3(s) + 2 c_1 \beta_0 g_0^3(s) + \dots \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de substituer dans la dernière équation :

$$g_0(s) = g'_0(s) - c_1 g'_0(s)^2$$

pour obtenir :

$$\beta'(g'_0(s)) = \beta_0 g_0'^2(s) + \beta_1 g_0'^3(s) + \dots$$

En dehors des deux premiers termes de son développement perturbatif, la fonction  $\beta(g_0)$  n'est pas définie de façon unique. Pour lever l'ambiguïté dans la définition de  $\beta(g_0)$ , on peut se donner une quantité physique (par exemple une charge invariante)  $H(\mu, g_0(s), \Lambda/s)$  mesurée à une échelle de masse  $\mu$  et exiger que cette quantité soit strictement indépendante de  $s$  :

$$\frac{d}{d \ln s} H\left(\mu, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right) = 0$$

ou :

$$\left( \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + \frac{\Lambda}{s} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) H\left(\mu, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right) = 0. \quad (18)$$

Cette expression permet de déterminer  $\beta(g_0)$  analytiquement ou numériquement de façon parfaitement bien définie y compris même en dehors de la région perturbative ; cependant le résultat dépend de la quantité physique choisie  $H$ . De plus si  $\Lambda$  est fini,  $\beta(g_0)$  comprend des corrections  $\sim (\mu/\Lambda)^2$ , dues aux opérateurs inessentiels.

Enfin la constante de couplage renormalisée vérifie une équation analogue à (4) : la constante de couplage renormalisée dépend du point de soustraction  $\mu$  :  $g = g(\mu)$  et on définit la fonction  $\bar{\beta}(g)$  (notation provisoire, cf. paragraphe C) par :

$$\frac{dg}{d \ln \mu} \Big|_{g_0, \Lambda} = \bar{\beta}(g(\mu)). \quad (19)$$

Les quantités physiques doivent être indépendantes du point de soustraction, et ceci nous amènera au paragraphe C aux équations de

C-S pour la théorie renormalisée. Comme  $g(\mu) \approx g_0(s)$ , on s'attend à ce que les deux premiers termes du développement perturbatif de  $\bar{\beta}(g)$  soient aussi déterminés par  $\beta_0$  et  $\beta_1$  :

$$\bar{\beta}(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots \quad (20)$$

Donnons une démonstration directe de (20), en remarquant que  $\beta(g_0)$  décrit la variation de  $g_0$  en fonction du cut-off quand la théorie renormalisée est fixée (cf. aussi le paragraphe B.2) :

$$\ln \frac{\Lambda}{\mu} \approx \int_{g(\mu)}^{g_0(\Lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} \Rightarrow \beta(g_0) = \left. \frac{dg_0}{d \ln \Lambda} \right|_{g, \mu}$$

et que par analyse dimensionnelle  $g(\mu)$  est fonction de  $g_0$  et  $x = \ln(\mu/\Lambda)$  :

$$g(\mu) = g(g_0, x). \quad (21)$$

De même  $g_0(\Lambda) = g_0(g, x)$ . Ceci permet d'écrire :

$$\bar{\beta}(g) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{g_0}; \quad \beta(g_0) = - \left( \frac{\partial g_0}{\partial x} \right)_g,$$

où la dépendance de  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  par rapport à  $x$ , qui est  $\sim (\mu/\Lambda)^2$  n'a pas été explicitée. La relation :

$$\left( \frac{\partial g_0}{\partial g} \right)_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{g_0} \left( \frac{\partial x}{\partial g_0} \right)_g = -1$$

donne alors :

$$\bar{\beta}(g) = \left( \frac{\partial g}{\partial g_0} \right)_x \beta(g_0) \quad (22)$$

et à la limite  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\beta}$  et  $\beta$  sont indépendants de  $x$ ;  $g$  possède un développement perturbatif (contenant des grands logarithmes) en puissances de  $g_0$  :

$$g = g_0 + c \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) g_0^2 + \dots$$

ou :

$$g_0 = g - c \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) g^2 + \dots$$

Il suffit de remplacer  $g_0$  par  $g$  dans l'expression de  $\beta(g_0)$  pour trouver l'expression (20).

## B. ÉQUATIONS DE CALLAN-SYMANZIK POUR LA THÉORIE NUE ( $T = T_c$ )

Nous allons maintenant établir les équations de C-S pour les fonctions de corrélation nues, toujours pour  $T = T_c$  (dans un souci de simplification), mais en étendant cette fois la discussion à  $D < 4$ , avec  $\varepsilon = 4 - D > 0$ . Le hamiltonien de Ginzburg-Landau s'écrira :

$$H = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_{0c}^2 \varphi^2 + \frac{\Lambda^\varepsilon g_0}{4!} \varphi^4 \right). \quad (23)$$

Le coefficient  $m_{0c}^2$  de  $\varphi^2$  est ajusté ordre par ordre en théorie des perturbations de façon à assurer que  $T = T_c$ , ou de façon équivalente  $m$  (renormalisée) = 0 ; la constante de couplage  $u_0$  étant dimensionnée, il est commode de définir la constante de couplage sans dimension  $g_0$  :

$$u_0 = \Lambda^\varepsilon g_0. \quad (24)$$

La série perturbative fondée sur (23) possède a priori des divergences infrarouges sévères qu'il est nécessaire de discuter.

### B.1. Divergences infrarouges

Nous avons examiné au chapitre V, paragraphe F.3 les divergences infrarouges, et montré qu'elles se manifestaient pour  $D < 4$  même dans des configurations non exceptionnelles. Donnons sur la figure 3 un exemple supplémentaire d'un graphe de  $\Gamma^{(4)}$ ,

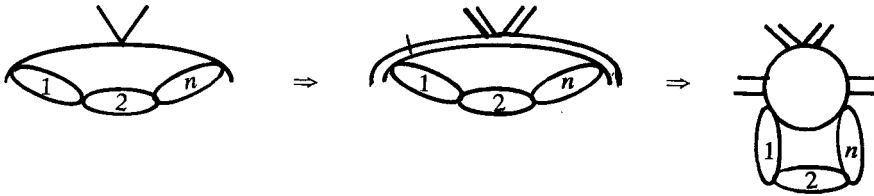


Figure 3. Diagrammes infrarouges divergents.

en représentant, sur le diagramme du centre, une configuration possible pour le flot des moments durs, ainsi que le diagramme contracté. A l'ordre  $(n + 2)$  de la théorie des perturbations, le diagramme contracté

possède  $(n + 1)$  boucles et quatre lignes internes sont accrochées au vertex contracté. Le degré superficiel de divergence est (cf. V.70)

$$\omega = 4 + (n + 1)(D - 4) = D - n\varepsilon.$$

A  $\varepsilon$  fixé, le diagramme sera infrarouge-divergent même en configuration non exceptionnelle pour  $n > (D/\varepsilon)(*)$ . Il est donc impossible de définir une théorie des perturbations à  $\varepsilon$  fixé. Cependant il est possible de définir une série perturbative par un double développement en puissances de  $\varepsilon$  et  $g$  :

$$\sum_{p,q} c_{p,q} \varepsilon^p g^q$$

en développant tous les résultats en puissances de  $\varepsilon$ .

### B.2. Démonstration de l'équation de Callan-Symanzik

A la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , les fonctions de corrélation renormalisées  $\Gamma_R^{(N)}$  tendent vers une limite finie, et elles deviennent donc indépendantes de  $\Lambda$  pour  $\Lambda$  grand. Ceci correspond à l'existence d'une physique à longue distance ( $k_i \ll \Lambda$ ) indépendante de  $\Lambda$ , les fonctions de corrélation renormalisées décrivant la physique à longue distance. Les variations du cut-off dans ce paragraphe sont l'équivalent de l'intégration sur les courtes longueurs d'onde du chapitre III.

Rappelons que dans le cas de la masse nulle on doit utiliser les conditions de normalisation (VI.33) :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = 0 \quad (25.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2 = \mu^2) = 1 \quad (25.b)$$


$$\Gamma_R^{(4)}(k_{i0}) = \mu^\varepsilon g \quad (25.c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_{i0}, q_0) = 1. \quad (25.d)$$

On notera le facteur  $\mu^\varepsilon$  dans (25.c) : ce facteur est présent afin que  $g$  soit sans dimension.

Lorsque  $g$  et  $\mu$  sont fixés, les fonctions de corrélation  $\Gamma_R^{(N)}$  sont parfaitement définies ; pour qu'elles soient invariantes dans une dilatation du cut-off, il est nécessaire que  $g_0$  soit une fonction de  $\Lambda$  (en fait  $\Lambda/\mu$  pour des raisons dimensionnelles) :

$$g_0 = g_0 \left( g, \frac{\Lambda}{\mu} \right).$$

(\*) On peut aussi trouver ce résultat en remarquant que la boucle simple  se comporte comme  $k^{-\varepsilon}$  (par simple analyse dimensionnelle).

L'indépendance des  $\Gamma_R^{(N)}$  par rapport à  $\Lambda$  n'est pas complète : à  $\Lambda$  grand, mais fini :

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \Gamma_R^{(N)}|_{g, \mu} = O\left(\frac{(\ln \Lambda)^p}{\Lambda^2}\right) \quad (26)$$

où  $p$  dépend de l'ordre de la théorie des perturbations (cf. exercice VI.1). Toutefois la borne dans (26) est uniforme pour  $D \leq 4$  (y compris  $D = 4$ ). En admettant que les puissances de  $\ln \Lambda$  ne se resomment pas pour compenser le facteur  $\Lambda^{-2}$  on pourra écrire :

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left[ Z_3^{N/2} \left( g, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) \right]_{g, \mu} \simeq 0. \quad (27)$$

On transforme (27) en une équation aux dérivées partielles en définissant les fonctions  $\beta(g_0, \varepsilon)$  et  $\gamma(g_0, \varepsilon)^{(*)}$  :

$$\beta(g_0, \varepsilon) = \frac{dg_0}{d \ln \Lambda} \Big|_{g, \mu} \quad (28)$$

$$\gamma(g_0, \varepsilon) = - \frac{d \ln Z_3}{d \ln \Lambda} \Big|_{g, \mu}. \quad (29)$$

La différence de signe entre (28) et (4) s'explique par le fait que dans la transformation  $\Lambda \rightarrow \Lambda/s$ , le cut-off diminue. On obtient à partir de (27)-(29) l'équation de Callan-Symanzik

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta(g_0, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g_0} - \frac{1}{2} N \gamma(g_0, \varepsilon) \right] \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) = 0 \quad (30)$$

Remarquez que les dérivées sont des dérivées *partielles* dans (30) et *totales* dans (27).

Les notations dans (28) et (29) anticipent sur un point crucial : *les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  sont indépendantes de  $\Lambda$* . Pour le montrer, écrivons (30) dans le cas d'une charge invariante (cf. (6)) :

$$\beta \frac{\partial}{\partial g_0} \hat{\Gamma} = - \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \hat{\Gamma}. \quad (31)$$

Le membre de droite de (31) est indépendant de  $\mu$ , car  $\hat{\Gamma}$  est une fonction de  $g_0$  et  $\Lambda$  ; il en est de même pour  $\frac{\partial}{\partial g_0} \hat{\Gamma}$ .  $\beta$  est indépendant de

(\*) Bien que nous conservions la même notation, les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  définies en (28) et (29) ne sont pas identiques à celle du paragraphe A pour  $\varepsilon = 0$  : cf. A.5.

$\mu$ , et, par analyse dimensionnelle, de  $\Lambda/\mu$ . Ayant prouvé la propriété pour  $\beta$ , il est immédiat de l'étendre à  $\gamma$ .

Avant d'étudier la solution de (30), il est instructif de calculer  $\beta(g_0, \varepsilon)$  à l'ordre d'une boucle afin de se familiariser avec cette fonction.

### B.3. Calcul de $\beta(g_0, \varepsilon)$ à l'ordre d'une boucle

La fonction  $\beta(g_0, \varepsilon)$  à l'ordre d'une boucle peut être déduite de l'équation (III.56.b), mais celle-ci n'avait pas été démontrée ; nous allons donc procéder à un calcul explicite. A cet ordre du calcul  $Z_3 = 1$  et pour relier  $g_0$  et  $g$ , il suffit de calculer  $\Gamma^{(4)}$  au point de soustraction :

$$\Gamma^{(4)}(k_{i0}) = u_0 - \left[ \frac{u_0^2}{2} \int_{q \leq \Lambda} \frac{d^D q}{(2\pi)^D q^2 (k_0 - q)^2} + \text{Perm.} \right]$$

où  $k_0$  est une somme de  $k_{i0}$ . Si l'on calcule à l'ordre  $g_0^2$ , en négligeant les termes en  $g_0^2 \varepsilon$  (car  $g_0$  sera d'ordre  $\varepsilon$ ), on peut poser  $D = 4$  dans le calcul de l'intégrale et l'on trouve :

$$\Gamma^{(4)}(k_{i0}) = g_0 \Lambda^\varepsilon - \frac{3}{2} g_0^2 \frac{(\Lambda^2/\mu)^\varepsilon}{8 \pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{Cte} \right).$$

Comme nous allons dériver par rapport à  $\Lambda$ , il suffit de garder le terme en  $\ln \Lambda/\mu$  ; en utilisant (25.b) on obtient :

$$g \mu^\varepsilon = g_0 \Lambda^\varepsilon - \frac{3 g_0^2}{16 \pi^2} \left( \frac{\Lambda^2}{\mu} \right)^\varepsilon \ln \frac{\Lambda}{\mu}$$

soit :

$$g_0 = g_0 \left( g, \frac{\Lambda}{\mu} \right) = \left( \frac{\mu}{\Lambda} \right)^\varepsilon \left[ g + \frac{3 g^2}{16 \pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right]$$

et d'après la définition (28) :

$$\beta(g_0, \varepsilon) = -\varepsilon g + \frac{3 g^2}{16 \pi^2} = -\varepsilon g_0 + \frac{3 g_0^2}{16 \pi^2} \quad (32)$$

les termes négligés étant d'ordre  $g_0^3$ ,  $\varepsilon g_0^2$ ,  $\varepsilon^2 g_0$ . La fonction  $\beta(g_0, \varepsilon)$  possède un zéro à :

$$g_0^* = \frac{16 \pi^2 \varepsilon}{3}.$$

Si  $g_0 < g_0^*$ ,  $\frac{dg_0}{d \ln \Lambda} < 0$  et  $g_0 \rightarrow g_0^*$  quand  $\Lambda$  décroît. De même si  $g_0 > g_0^*$ ,  $\frac{dg_0}{d \ln \Lambda} > 0$  et à nouveau  $g_0 \rightarrow g_0^*$ . Le point  $g_0^*$  est donc un point fixe stable pour les contractions du cut-off (figure 4).

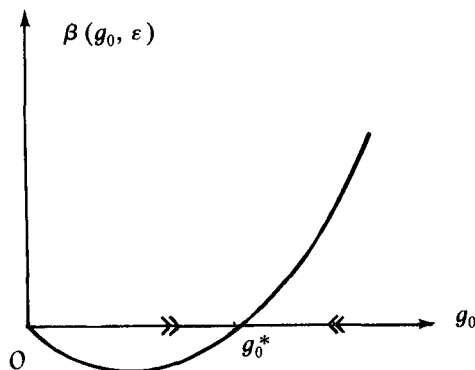


Figure 4. La fonction  $\beta(g_0, \varepsilon)$ .

Il n'est pas étonnant qu'il coïncide avec le point fixe déterminé en (III.59), quoique cette identification ne soit pas possible aux ordres supérieurs en  $\varepsilon$ .

Nous avons vu au paragraphe A que la constante de couplage renormalisée n'était pas autre chose (avec les notations de ce paragraphe) que  $g_0(\mu)$ . Comme  $\Lambda/\mu \rightarrow \infty$ ,  $g_0(\mu) \rightarrow g_0^*$  et la constante de couplage renormalisée décrivant le comportement critique est égale à  $g_0^*$ .

#### B.4. Solution de l'équation de Callan-Symanzik

La solution de (30) a déjà été écrite au début de ce chapitre (équation (14)). Pour bien faire ressortir l'équivalence entre la formulation du chapitre III et celle des équations de C-S, et afin de rendre la lecture de ce chapitre indépendante de la première partie, je vais détailler cette solution ; une méthode plus directe est proposée à l'exercice 1. Examinons d'abord le cas d'une charge invariante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g_0} \right) \hat{\Gamma}(k_i, g_0, \Lambda) = 0. \quad (33)$$

On utilise le fait que les solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi(x, y) = 0 \quad (34)$$

sont de la forme  $F(x - y)$ . Il suffit d'un changement de variables pour se ramener à (34) :

$$t = \int^{g_0} \frac{dg'}{\beta(g')}; \quad \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} = \frac{\partial}{\partial t}$$

et la solution de (33) est de la forme :

$$F\left(k_i; \ln \Lambda - \int^{g_0} \frac{dg'}{\beta(g')}\right).$$

Définissons maintenant  $g_0(s)$  à l'aide de (4) qui peut s'écrire :

$$\ln s = - \int_{g_0}^{g_0(s)} \frac{dg'}{\beta(g')}. \quad (35)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \ln \Lambda - \int^{g_0} \frac{dg'}{\beta(g')} &= \ln \Lambda - \int^{g_0(s)} \frac{dg'}{\beta(g')} - \int_{g_0(s)}^{g_0} \frac{dg'}{\beta(g')} \\ &= \ln \frac{\Lambda}{s} - \int^{g_0(s)} \frac{dg'}{\beta(g')} \end{aligned}$$

on obtient la relation :

$$\hat{\Gamma}(k_i, g_0, \Lambda) = \hat{\Gamma}\left(k_i, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right) \quad (36)$$

que nous avons déjà vue (équation (7)). Il est immédiat de vérifier que la solution de (30) est :

$$\Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) = F(k_i, g_0, \Lambda) \exp\left(\frac{1}{2} N \int^{g_0} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')}\right) \quad (37)$$

où  $F(k_i, g_0, \Lambda)$  obéit à la propriété (36). On déduit de (37) :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) &= \exp\left(-\frac{1}{2} N \int_{g_0}^{g_0(s)} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')}\right) \times \\ &\quad \times \Gamma\left(k_i, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right), \quad (38) \end{aligned}$$

équation qui coïncide bien avec (14) pourvu que la fonction  $\gamma(g)$

définie dans (12) soit analogue (en fait identique à l'ordre d'une boucle) à celle définie dans (29). Ceci est bien le cas car de la relation :

$$\Gamma_R^{(N)} = Z_3^{N/2} \Gamma^{(N)}$$

on déduit

$$\Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) = \frac{Z_3^{N/2}(g, \Lambda/\mu s)}{Z_3^{N/2}(g, \Lambda/\mu)} \Gamma^{(N)}\left(k_i, g_0(s), \frac{\Lambda}{s}\right)$$

et la fonction  $\zeta(s)$  n'est autre que :

$$\zeta(s) = \frac{Z_3(g, \Lambda/\mu s)}{Z_3(g, \Lambda/\mu)}. \quad (39)$$

Elle vérifie donc d'après (29) :

$$\frac{d \ln \zeta(s)}{d \ln s} = \gamma(g_0(s)). \quad (12)$$

En posant dans (38)  $s = \Lambda/\mu$  et en identifiant  $g_0(\Lambda/\mu)$  avec la constante de couplage renormalisée  $g$ , on retrouve l'expression (15) de  $Z_3$  :

$$Z_3\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \simeq \exp\left(\int_{g_0\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right)}^g \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')}\right). \quad (40)$$

### B.5. Application aux phénomènes critiques

L'analyse dimensionnelle ordinaire permet de transformer (38) en (cf. équation (1)) :

$$\Gamma^{(N)}(k_i, g_0, \Lambda) = s^{-D+N\left(\frac{D}{2}-1\right)} \zeta(s)^{N/2} \Gamma^{(N)}(sk_i, g_0(s), \Lambda)$$

et en remplaçant  $k_i$  par  $k_i/s$  :

$$\Gamma^{(N)}\left(\frac{k_i}{s}, g_0, \Lambda\right) = s^{-D+N\left(\frac{D}{2}-1\right)} \zeta(s)^{N/2} \Gamma^{(N)}(k_i, g_0(s), \Lambda). \quad (41)$$

La région critique correspond à  $s \rightarrow \infty$  ; dans ces conditions  $g_0(s)$  tend vers la constante de couplage au point fixe  $g_0^*$  ;  $\zeta(s)$  est dominé par la région  $g_0(s) \simeq g_0^*$  : en effet :

$$-\int_{g_0}^{g_0(s)} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} = \int_0^{\ln s} \gamma(g(s')) d \ln s' \simeq \gamma(g_0^*, \varepsilon) \ln s,$$

l'intégrale étant dominée par la région  $\ln s' \rightarrow \infty$ , si l'on admet que  $\gamma(g_0^*, \varepsilon) \neq 0$  ; le comportement critique est donné par :

$$\Gamma^{(N)}\left(\frac{k_i}{s}, g_0, \Lambda\right) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} s^{-D + \frac{N}{2}(D-2) + \frac{N}{2}\gamma(g_0^*, \varepsilon)} \Gamma^{(N)}(k_i, g_0^*, \Lambda) \quad (42)$$

ce qui permet d'identifier l'exposant critique  $\eta$ , en choisissant par exemple  $N = 2$  :

$$\Gamma^{(2)}\left(\frac{k_i}{s}\right) \simeq s^{-2 + \gamma(g_0^*, \varepsilon)} \simeq s^{-2 + \eta}$$

et par conséquent :

$$\eta = \gamma(g_0^*, \varepsilon). \quad (43)$$

Le facteur  $d_\varphi$  mis en évidence dans (42) :

$$d_\varphi = \frac{D}{2} - 1 + \frac{1}{2} \gamma(g_0^*, \varepsilon) = \frac{D}{2} - 1 + \frac{\eta}{2} \quad (44)$$

est bien sûr la dimension anormale du champ  $\varphi(x)$ , qui, en dimension  $D \neq 4$ , est différente de la dimension canonique  $d_\varphi^0 = \frac{D}{2} - 1$ . L'équation de C-S permet donc de retrouver la propriété d'invariance d'échelle au point critique :

$$G^{(2)}(k) \sim k^{-2 + \eta}.$$

On notera qu'au point fixe cette invariance d'échelle se déduit immédiatement de (30), qui se réduit alors, après un peu d'analyse dimensionnelle, à :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln s} - \left( \frac{1}{2} N \eta - d \right) \right] \Gamma^{(N)}\left(\frac{k_i}{s}, g_0^*, \Lambda\right) = 0$$

avec  $d = D - N(D/2 - 1)$ .

### C. ÉQUATIONS DE CALLAN-SYMANZIK POUR LA THÉORIE RENORMALISÉE

Les équations du GR écrites précédemment ne sont pas des équations exactes : au chapitre III comme au paragraphe B, nous avons négligé des termes en  $1/\Lambda^2$  provenant des champs inessentiels. En

prenant la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , nous allons obtenir des équations exactes, mais le prix à payer est que nous pourrons utiliser uniquement des fonctions de corrélation renormalisées, qui sont les seules à être définies dans cette limite. Dans le cas de l'application aux phénomènes critiques, les fonctions de corrélation renormalisées diffèrent des fonctions de corrélation nues (physiques) par une constante multiplicative  $Z_3^{N/2}$ . Dans le cas de l'application à la théorie quantique des champs, ce sont les fonctions de corrélation renormalisées qui ont une interprétation physique directe. Commençons par le cas  $T = T_c (m = 0)$ .

### C.1. Equation de Callan-Symanzik pour $T = T_c$

Les conditions de normalisation ont été rappelées en (25) ; écrivons la fonction de corrélation nue :

$$\Gamma^{(N)}(k_i, u_0, \Lambda) = Z_3^{-N/2} \left( g, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \Gamma_R^{(N)}(k_i, g, \mu)$$

et remarquons que  $\Gamma^{(N)}$  est indépendant de  $\mu$  à  $u_0$  et  $\Lambda$  fixés :

$$\frac{d}{d \ln \mu} \Gamma^{(N)}(k_i, u_0, \Lambda) \Big|_{u_0, \Lambda} = 0, \quad (45)$$

car la fonction de corrélation nue ne connaît pas le point de renormalisation. Définissons les fonctions  $\beta$  (notée  $\bar{\beta}$  au paragraphe A.5) et  $\gamma$  de la théorie renormalisée (ces fonctions ne sont pas identiques à celles définies en (28) et (29), bien que nous conservions la même notation. De façon générale, il faut prendre garde au fait que les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  dépendent du type d'équation de C-S, du schéma de renormalisation etc.) :

$$\beta(g, \varepsilon) = \frac{dg}{d \ln \mu} \Big|_{u_0, \Lambda} \quad (46)$$

$$\gamma(g, \varepsilon) = \frac{d \ln Z_3}{d \ln \mu} \Big|_{u_0, \Lambda} \quad (47)$$

où cette fois les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  sont exprimées en fonction de la constante de couplage renormalisée. Un argument analogue à celui du paragraphe précédent montre qu'elles ne peuvent pas dépendre de  $\Lambda/\mu$ . L'équation (45) est transformée en une équation aux dérivées

partielles, l'équation de Callan-Symanzik pour les fonctions de corrélation renormalisées :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g, \varepsilon) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, g, \mu) = 0 \quad (48)$$

Rappelons l'interprétation de l'équation (48) : la physique doit être indépendante du point de renormalisation, c'est-à-dire du choix de  $\mu$  qui est un paramètre nécessaire, mais arbitraire. Une variation de  $\mu$  doit être compensée par une redéfinition de la constante de couplage ( $\beta(g)$ ) et une redéfinition de la normalisation du champ ( $\gamma(g)$ ).

### C.2. Points fixes

Nous allons adopter les conventions usuelles en théorie quantique des champs et définir la variable  $s$  par une *dilatation* de  $\mu$  d'un facteur  $s$  :  $\mu \rightarrow s\mu$  (remarquez que le couple  $(\Lambda/s, \mu)$  équivaut à  $(\Lambda, \mu s)$ , le rapport cut-off/masse de renormalisation étant inchangé) :

$$\frac{dg(s)}{d \ln s} = \beta(g(s)) ; \quad g(1) = g \quad (49.a)$$

ou :

$$\ln s = \int_g^{g(s)} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (49.b)$$

(attention au changement de signe par rapport à (4)). Dans ces conditions la solution de l'équation (48) peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_R^{(N)}(sk_i, g, \mu) = s^{D-N \left( \frac{D}{2} - 1 \right)} \exp \left( -\frac{1}{2} N \int_g^{g(s)} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right) \times \Gamma^{(N)}(k_i, g(s), \mu) . \quad (50)$$

On obtiendra un comportement simple pour  $s \rightarrow 0$  ou  $s \rightarrow \infty$ , si  $\lim_{s \rightarrow 0} g(s)$  ou  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = g^*$ , c'est-à-dire si  $g(s)$  est conduit vers un point

fixe. Dans le cas des phénomènes critiques on s'intéressera à la région  $s \rightarrow 0$ , tandis qu'en physique des particules élémentaires c'est la région  $s \rightarrow \infty$  qui sera intéressante.

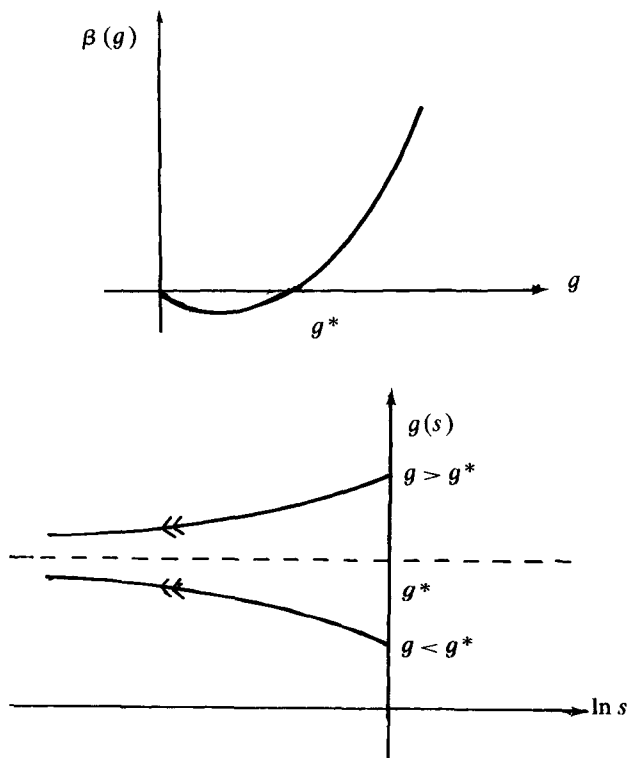
Un point fixe correspond à un zéro de la fonction  $\beta(g)$  :

$$\beta(g^*) = 0$$

étant donné que dans ce cas  $dg(s)/d \ln s = 0$ . Le point fixe est de type attractif, ou stable, si partant du voisinage de  $g^*$  on est ramené à  $g^*$ ; il sera de type répulsif, ou instable, si on s'écarte de  $g^*$ .

Examinons les divers cas possibles.

**Point fixe infrarouge (IR) stable ( $s \rightarrow 0$  : figure 5) :**



**Figure 5.** Stabilité IR.

Lorsque  $s \rightarrow 0$ , un point fixe sera stable si la dérivée de  $\beta(g)$  au point fixe est positive :

$$\beta'(g^*) > 0.$$

En effet la dérivée est positive si  $g > g^*$ , négative si  $g < g^*$ , et on est conduit dans les deux cas au point fixe pour  $\ln s \rightarrow -\infty$ .

Point fixe ultraviolet (UV) stable ( $s \rightarrow \infty$  : figure 6) :

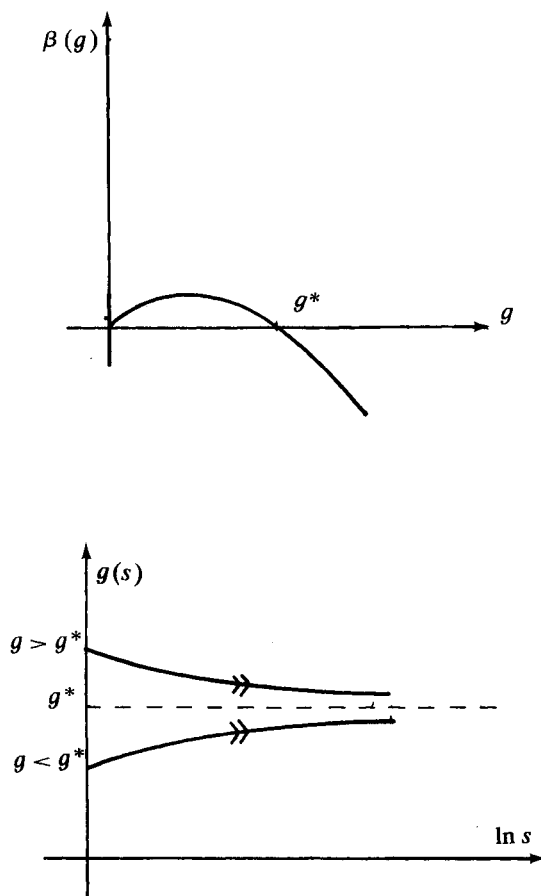


Figure 6. Stabilité UV.

La dérivée de  $\beta(g)$  au point fixe est négative  $\beta'(g^*) < 0$ ).

Un point fixe infrarouge stable est ultraviolet instable et réciproquement (figure 7) :

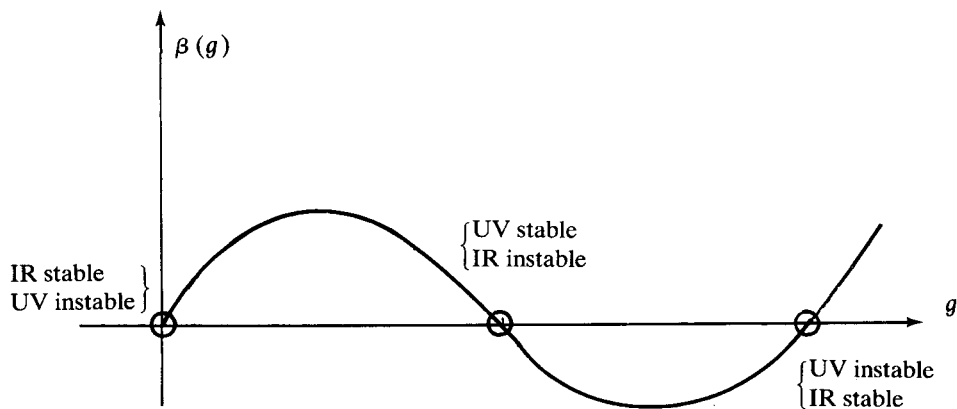


Figure 7. Une configuration hypothétique de points fixes.

Liberté asymptotique dans le cas  $D = 4$  (figure 8)

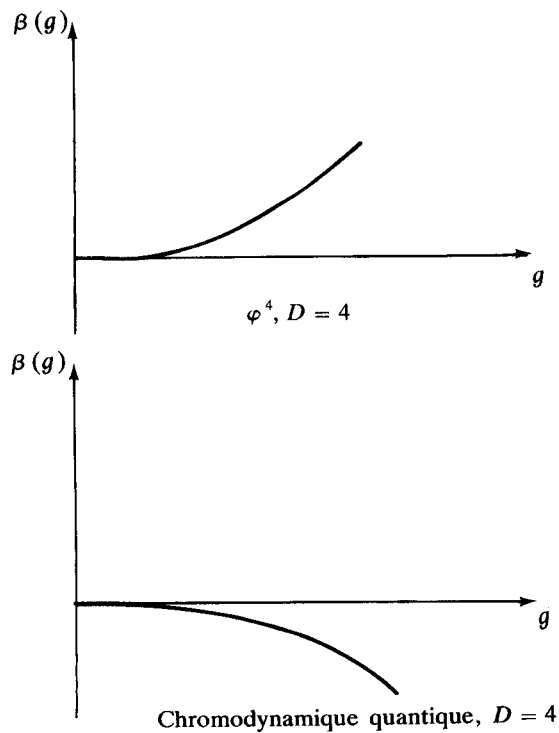


Figure 8. Points fixes en dimension 4.

Si l'origine est un point fixe stable (IR ou UV),  $\lim_{\ln s \rightarrow \pm \infty} g(s)$  dans le

membre de droite de (50) est égal à zéro : les fonctions de corrélation du membre de droite de (50) sont celles de la théorie libre.

L'origine est un point fixe IR stable dans le cas de la théorie en  $\varphi^4$  ; c'est un point fixe UV stable dans le cas de la chromodynamique quantique (XIII-D) ou de la théorie en  $\varphi^3$  à 6 dimensions (exercice 3).

Dans les deux cas on dira que la théorie est asymptotiquement (IR ou UV) libre. Ceci ne veut pas dire que le comportement des fonctions de corrélation obéit à l'invariance d'échelle naïve. Le préfacteur dans (50) contient en général des corrections logarithmiques au comportement canonique (exercice 3). Cependant ces corrections sont calculables. De même si l'on se trouve à  $s$  grand, mais non infini, il est possible de faire un développement perturbatif de  $\Gamma_R^{(N)}(k_i, g(s), \mu)$  en puissances de  $g(s)$ , qui est petit. Le fait que la chromodynamique quantique (théorie présumée des interactions fortes) soit asymptotiquement libre a permis pour la première fois un calcul fiable de certains processus : diffusion profondément inélastique des électrons, production de paires de leptons, etc., à haute énergie.

Lorsque l'origine est un point fixe UV stable, la théorie des perturbations peut être appliquée sans problème pour  $k \rightarrow \infty$ , la constante de couplage renormalisée ayant été fixée à une échelle  $\mu$  finie. Au contraire, lorsque l'origine est un point fixe UV instable, on quitte nécessairement la région perturbative lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Ce problème est évidemment une autre façon de présenter la difficulté déjà mentionnée au paragraphe A lorsque le coefficient  $\beta_0$  de la fonction  $\beta(g)$  est positif. Cependant l'argument présenté ici est un peu plus général, car il justifie le fait que le comportement asymptotique ne dépend que du signe de  $\beta_0$  (et de l'existence éventuelle d'autres points fixes, non perturbatifs).

### C.3. Equation de Callan-Symanzik pour $T > T_c$

Lorsque  $T$  est supérieur à  $T_c$ , ou, de façon équivalente, lorsque la masse (renormalisée)  $m$  est  $\neq 0$ , on peut utiliser les conditions de normalisation (VI.22), et démontrer une équation de C-S (cf. exercice 2). La méthode est parfaitement viable et permet d'obtenir les exposants critiques (exercice 2). Cependant il est plus commode de construire la théorie à  $T \neq T_c$  à partir de celle à  $T = T_c$  : en effet les conditions de normalisation étant régulières à  $T = T_c$ , contrairement aux conditions (VI.22) qui sont singulières dans cette limite, on peut passer de façon continue à la limite  $T = T_c$ .

La densité de hamiltonien utilisée dans le calcul sera (cf. (VI.49) ; si

l'on utilise une régularisation dimensionnelle,  $m_{0c}^2 = 0$ ) :

$$\mathcal{H}_0(x) = \frac{1}{2} (\nabla \varphi_0)^2 + \frac{\Lambda^\varepsilon}{4!} g_0 \varphi_0^4 + \frac{1}{2} m_{0c}^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{2} t \bar{Z} \varphi_0^2. \quad (51)$$

Le coefficient de  $\frac{1}{2} \varphi_0^2$ , qui est par définition la masse nue  $m_0^2$  vaut :

$$m_0^2 = m_{0c}^2 + t \bar{Z}$$

soit :

$$\bar{Z} t = m_0^2 - m_{0c}^2. \quad (52)$$

On peut interpréter  $t$  comme une différence de température ( $T - T_c$ ) renormalisée : rappelons que  $m_0^2 - m_{0c}^2$  ( $= r_0 - r_{0c}$  avec les notations de physique statistique) est proportionnel à  $T - T_c$  : cf. équation (II.11).

Grâce à l'identité (VI.39) on peut écrire pour les fonctions de corrélation nues (en réalité, je passe sous silence quelques difficultés dues aux divergences infrarouges : il faudrait, en toute rigueur, commencer par choisir une fonction  $t(x)$  s'annulant à l'infini) :

$$\Gamma^{(N)}(m_{0c}^2 + \bar{Z}t) = \sum_L \frac{\bar{Z}^L t^L}{L!} \int \Gamma^{(N,L)}(\dots; m_{0c}^2) dy_1 \dots dy_L. \quad (53)$$

Multiplions les deux membres de (53) par  $Z_3^{N/2}$  et utilisons l'équation (VI.50) définissant les  $\Gamma_R^{(N,L)}$  :

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, t, g) = \sum_L \frac{t^L}{L!} \Gamma_R^{(N,L)}(k_i, q_j = 0, t = 0, g). \quad (54)$$

Le membre de droite contient des quantités finies  $\Gamma_R^{(N,L)}$  ; à moins que la somme sur  $L$  ne soit divergente,  $\Gamma_R^{(N)}(k_i; t, g)$  est donc bien une quantité finie, *alors que les constantes de renormalisation  $Z_3$  et  $\bar{Z}$  ont été calculées pour la théorie de masse nulle.*

La fonction de corrélation  $\Gamma_R^{(N,L)}$  obéit à une équation de C-S :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g, \varepsilon) - L \bar{\gamma}(g, \varepsilon) \right] \Gamma_R^{(N,L)} = 0$$

avec :

$$\bar{\gamma}(g, \varepsilon) = \frac{d \ln \bar{Z}}{d \ln \mu} \Big|_{u_0, \Lambda}. \quad (55)$$

Comme

$$\sum_L \frac{L t^L}{L!} f^{(L)}(0) = \frac{\partial f(t)}{\partial \ln t},$$

on obtient l'équation de C-S pour  $\Gamma_R^{(N)}$  à  $T \neq T_c$  :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g, \varepsilon) - \bar{\gamma}(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \ln t} \right] \times \\ \times \Gamma_R^{(N)}(k_i, t, g, \mu) = 0 \quad (56)$$

La solution de (56) peut s'écrire (exercice 1) :

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, t, g, \mu) = s^{D-N \left( \frac{D}{2} - 1 \right)} \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} N \int_0^{\ln s} \gamma(g(s')) d \ln s' \right) \Gamma_R^{(N)} \left( \frac{k_i}{s}, \frac{t(s)}{s^2}, g(s), \mu \right) \quad (57)$$

avec (remarquez que  $t(s)$  dans (58) diffère par un facteur  $s^2$  de  $t(s)$  défini en (III.89)) :

$$t(s) = t \exp \left( - \int_0^{\ln s} \bar{\gamma}(g(s')) d \ln s' \right). \quad (58)$$

Choisissons maintenant  $s$  de telle sorte que

$$\frac{t(s)}{s^2 \mu^2} = 1. \quad (59)$$

Ce choix implique physiquement que dans le membre de droite de (57) on se trouve très loin de la région critique. En utilisant (58), l'équation (59) peut s'écrire :

$$\frac{t}{\mu^2} = \exp \left( \int_0^{\ln s} (2 + \bar{\gamma}(g(s'))) d \ln s' \right). \quad (60)$$

Dans la région critique  $t/\mu^2 \rightarrow 0$  et  $s \rightarrow 0$ , ce qui implique que  $g(s) \rightarrow g^*$ . L'intégrale dans (60) est dominée par les valeurs de  $\ln s' \rightarrow -\infty$ , et :

$$\frac{t}{\mu^2} \approx e^{(2 + \bar{\gamma}(g^*, \varepsilon)) \ln s} = s^{2 + \bar{\gamma}(g^*, \varepsilon)}.$$

Posons

$$\nu = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}(g^*, \varepsilon)} \quad (61)$$

(l'identification de  $\nu$  avec l'exposant critique habituel sera faite très bientôt), ce qui donne :

$$s \approx \left( \frac{t}{\mu^2} \right)^\nu.$$

On peut transformer (57) en :

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, t, g, \mu) = t^{\nu \left[ D - N \left( \frac{D}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} N \gamma(g^*, \varepsilon) \right]} \times \\ \times \Gamma_R^{(N)} \left( \frac{k_i}{(t/\mu^2)^\nu}, \mu^2, g^*, \mu \right). \quad (62.a)$$

En particulier pour  $N = 2$  on trouve le comportement suivant de  $\Gamma_R^{(2)}$  :

$$\Gamma_R^{(2)}(k, t, g, \mu) \simeq \mu^2 \left( \frac{t}{\mu^2} \right)^{\nu(2-\eta)} F \left( \frac{k}{\mu} \left( \frac{t}{\mu^2} \right)^{-\nu} \right) \quad (62.b)$$

où  $\eta = \gamma(g^*, \varepsilon)$  et  $F$  est une fonction sans dimension. On constate que :

- la quantité de dimension 1,  $\mu (t/\mu^2)^\nu$ , doit être identifiée avec la masse renormalisée  $m = \xi^{-1}$  : en effet la fonction  $F$  ne dépend que de la combinaison  $k/m = k\xi$ . La masse  $m$  définie de cette façon diffère par une renormalisation finie de la masse utilisée dans les conditions de normalisation (VI.22) et dans l'exercice 2 ;

- l'équation (62.b) peut évidemment s'écrire sous la forme :

$$\Gamma_R^{(2)} \simeq \mu^\eta k^{2-\eta} G(k\xi).$$

La comparaison avec l'équation (I.30) achève l'identification des exposants critiques  $\eta$  et  $\nu$  :

$$\boxed{\eta = \gamma(g^*, \varepsilon); \quad \nu = [2 + \bar{\gamma}(g^*, \varepsilon)]^{-1}}. \quad (63)$$

Les autres exposants critiques se déduisent de  $\eta$  et  $\nu$  à l'aide des lois d'échelle (III.29). Ces lois d'échelle pourraient être redémontrées, dans le formalisme de ce chapitre, en étudiant l'énergie libre et l'équation d'état pour  $T < T_c$ . Je renvoie sur ce point à l'article de Brézin *et al.* ou au livre d'Amit.

Les résultats qui précèdent méritent quelques commentaires :

(i) Dans la théorie renormalisée, c'est le paramètre  $\mu$  qui apparaît comme l'échelle naturelle : dans la région critique  $k_i \ll \mu$ ,  $t \ll \mu^2$  ;  $\mu$  joue le rôle qui était dévolu à  $\Lambda$  dans la théorie nue. L'avantage de la théorie renormalisée est que les équations de C-S (49) et (56) sont exactes. Ceci donne la base de départ pour le calcul des corrections aux lois d'échelle (exercice 8).

(ii) Les fonctions de corrélation dans (62) ont par construction une limite finie lorsque  $t \rightarrow 0$ . Afin de simplifier les notations, je me limite à

(62.b), mais le raisonnement qui suit est évidemment valable quel que soit  $N$ . Si l'on se place à  $k$  fixé et  $t \rightarrow 0$ , l'argument de la fonction  $F$  tend vers l'infini. Le facteur  $t^{\nu(2-\eta)}$  doit être compensé de façon à obtenir une limite finie, ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = x^{2-\eta}$$

et

$$\Gamma_R^{(2)}(k, t, g, \mu) \underset{k \gg m}{\simeq} k^{2-\eta}. \quad (64)$$

On retrouve l'invariance d'échelle dans la région ultraviolette  $k/m \gg 1$  (ou  $r \ll \xi$ ) : on remarquera que le comportement *ultraviolet* de la théorie massive ( $m \neq 0$ ) est donné par un exposant identique à celui du comportement *infrarouge* de la théorie de masse nulle ( $k/\mu \ll 1$ ). Ceci peut paraître paradoxal car on s'attendrait plutôt à ce que le comportement pour  $k/m \gg 1$  soit contrôlé par le point fixe UV (trivial)  $g = 0$ . En réalité la théorie critique correspond à  $g = g^*$  (cf. (B.3) et point (iv)), et elle est contrôlée par le point fixe IR.

(iii) La masse renormalisée  $m$  peut être définie de façon plus précise par :

$$m = s\mu = \mu \exp \left[ \int_g^{g(s)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right] \simeq \mu (t/\mu^2)^\nu$$

tandis que la solution de l'équation de C-S (56) peut s'écrire (cf. exercice 1.b)

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, t, g, \mu) = \tilde{Z}_3^{N/2} \left( \frac{m}{\mu}, g(s) \right) \tilde{\Gamma}_R^{(N)}(k_i, g(s), m)$$

avec

$$\tilde{Z}_3 \left( \frac{m}{\mu}, g(s) \right) = \exp \left( - \int_g^{g(s)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right) \simeq \left( \frac{m}{\mu} \right)^{-\eta}.$$

La fonction de corrélation  $\tilde{\Gamma}_R^{(N)}$  diffère par une renormalisation finie de la fonction de corrélation définie par les conditions de normalisation (VI.22) ; on retrouve le fait que la limite  $m \rightarrow 0$  de cette fonction de corrélation est singulière, contrairement à la limite  $t \rightarrow 0$  de  $\Gamma_R^{(N)}$ . A une température fixée  $\tilde{\Gamma}_R^{(2)}$  est de la forme  $m^2 f(k/m) = m^2 f(k\xi)$  et ne dépend donc que d'un seul paramètre dimensionné, alors que la théorie nue dépendait de deux paramètres dimensionnés  $m_0$  et  $\Lambda$  : la conséquence de la renormalisation est qu'il n'y a plus qu'une seule longueur (ou masse) pertinente à une température fixée.

(iv) La constante de couplage nue  $g_0$  est une fonction sans dimension de  $g$  et de  $\Lambda/\mu$  :

$$g_0 = f\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$$

qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dg_0}{d \ln \mu} = \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} \right] f\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) = 0$$

dont la solution est :

$$g_0\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) = g_0\left(g(s), \frac{\Lambda}{\mu s}\right).$$

Si l'on veut dilater le cut-off à  $g_0$  fixé, il faut donc faire varier  $g$ , et pour  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $g(s) \rightarrow g^*$  : nous retrouvons la propriété, déjà signalée, que la région critique est décrite par la théorie renormalisée avec  $g = g^*$ . La constante de couplage  $u_0 = g_0 \Lambda^\varepsilon$  tend, dans ces conditions, vers l'infini. En fait quand  $g$  décrit l'intervalle  $[0, g^*]$ , la constante de couplage nue  $u_0$  décrit l'intervalle  $[0, \infty[$  (exercice 6).

Terminons ce paragraphe par une discussion heuristique <sup>(2)</sup> du rôle des opérateurs inessentiels, qui reprend sous un autre angle celle du paragraphe A.2.

Un terme tel que  $u_6^0 \varphi^6$  a été écarté de la discussion sur la base d'arguments purement dimensionnels : en dimension 4 la constante de couplage  $u_6^0$  a pour dimension  $-2$ , et s'écrit sous la forme  $\Lambda^{-2} g_6^0$ , où  $g_6^0$  est sans dimensions et finie. Cependant l'introduction de ces opérateurs conduit à des divergences supplémentaires dans les fonctions de corrélation, et l'effet global n'est pas évident. Par exemple l'opérateur  $\varphi^6$  donne des contributions à  $\Gamma^{(2)}$  et  $\Gamma^{(4)}$  qui sont dessinées sur la figure 9 :

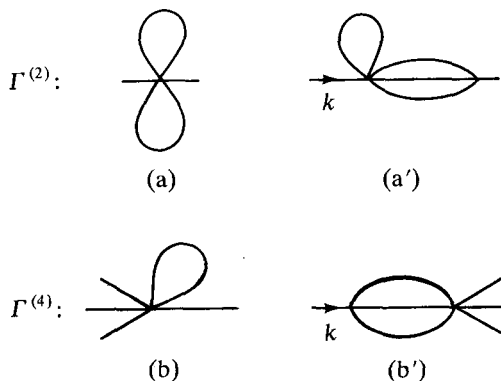


Figure 9. Insertion de  $\varphi^6$  dans  $\Gamma^{(2)}$  et  $\Gamma^{(4)}$ .

Le graphe (9.a) diverge comme  $\Lambda^4 \times (\text{Cte})$ , tandis que le graphe (9.a') contient une partie divergente en  $\Lambda^4 \times (\text{Cte})$  et une autre en  $\Lambda^2 \ln (\Lambda/k)$ ; multipliant par  $u_6^0 \sim \Lambda^{-2}$  on constate que ces graphes vont contribuer à déplacer la température critique et à changer la normalisation du champ. Le graphe (9.b) contient une partie divergente en  $\Lambda^2 \times (\text{Cte})$ , tandis que le graphe (9.b') contient une partie divergente en  $\Lambda^2 \times (\text{Cte})$  et une autre en  $\ln (\Lambda/k)$ . Multipliant par  $u_6^0$ , on constate que la contribution de ces diagrammes peut être absorbée dans une redéfinition de la constante de couplage renormalisée. Ces redéfinitions conduisent à des corrections à l'invariance d'échelle en  $\sim (k/\Lambda)^\epsilon$  (cf. exercice 8), correspondant très précisément à l'existence d'une valeur propre  $y_2 = -\epsilon$  (cf. III.60) dans le formalisme du chapitre III (cf. en particulier le début du paragraphe III.B.3).

L'analyse rigoureuse consiste à étudier la renormalisation d'insertions d'opérateurs composés tels que  $\varphi^6$ ,  $\varphi^2(\nabla\varphi)^2$  etc., dans les fonctions de corrélation. Cette analyse est plutôt pénible, en raison du couplage par renormalisation de ces opérateurs. Elle confirme entièrement l'analyse heuristique qui précède : les corrections dues aux opérateurs inessentiels, une fois que l'on a tenu compte de la redéfinition de la constante de couplage, de la normalisation du champ et de la température critique, sont proportionnelles à un facteur  $\Lambda^{-2+0(\epsilon)}$ . Leur influence sur le comportement critique est donc négligeable et ceci justifie a posteriori l'utilisation d'un hamiltonien de Ginzburg-Landau avec un seul couplage en  $\varphi^4$ .

## D. LE GROUPE DE RENORMALISATION EN DIMENSION $D = 4$

Le cas  $D = 4$  est le cas important en théorie quantique des champs et nous allons établir dans ce paragraphe quelques résultats utiles.

### D.1. Calcul de $\beta(g)$

Si l'on calcule en dimension 4, il est nécessaire d'utiliser un cut-off ; on peut bien sûr obtenir aussi  $\beta(g)$  par une régularisation dimensionnelle : cf. le paragraphe E, mais on suppose pour le moment que les constantes de renormalisation  $Z_1$  et  $Z_3$  ont été calculées en utilisant des contre-termes, fonctions de  $g$  et de  $\Lambda$ . Rappelons que la relation entre constantes de couplage nue et renormalisée est :

$$g_0 = Z_1 Z_3^{-2} g = Zg .$$

$Z$  est une fonction de  $g$  et de  $\Lambda/\mu$  ou de  $g$  et de  $X = \ln \Lambda/\mu$ . D'après l'équation (46) définissant  $\beta(g)$  :

$$\begin{aligned}\beta(g) &= \left. \frac{dg}{d \ln \mu} \right|_{g_0, \Lambda} = - \left. \frac{dg}{dX} \right|_{g_0} = -g_0 \frac{dZ^{-1}}{dX} = -gZ \frac{dZ^{-1}}{dX} = \\ &= g \frac{d \ln Z}{dX} \Big|_{g_0}.\end{aligned}$$

Exprimons maintenant la dérivée totale en fonction de dérivées partielles :

$$\left. \frac{d \ln Z}{dX} \right|_{g_0} = \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial g} \frac{dg}{dX} \right|_{g_0} + \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial X} \right|_{g_0} = -\beta(g) \frac{\partial \ln Z}{\partial g} + \frac{\partial \ln Z}{\partial X}$$

ce qui donne pour  $\beta(g)$  :

$$\beta(g) = \frac{g \partial \ln Z / \partial X}{1 + g \partial \ln Z / \partial g}. \quad (65)$$

Le point intéressant de l'expression (65) est que tous les calculs se font avec  $g$  et  $X$  : il n'est pas nécessaire de repasser par  $g_0$ . Supposons que nous ayons calculé  $Z$  à l'ordre d'une boucle :

$$Z(g, X) = 1 + g(a_1 X + a_0) + O(g^2).$$

L'expression (65) donne immédiatement :

$$\beta(g) = a_1 g^2 + O(g^3) \quad (66)$$

et le coefficient  $\beta_0$  est donc égal à  $a_1$  :  $\beta_0 = a_1$ . Nous allons maintenant montrer que la structure de  $Z(g)$  est contrainte par l'équation (65) et le développement perturbatif de  $\beta(g)$  :

$$\beta(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots \quad (67)$$

Ecrivons le terme d'ordre  $g^2$  de  $Z(g)$  sous la forme  $g^2 f(X)$  :

$$Z(g, X) = 1 + g(a_1 X + a_0) + g^2 f(X) + O(g^3)$$

$$\ln Z(g, X) = g(a_1 X + a_0) + g^2 \left[ f(X) - \frac{1}{2} (a_1 X + a_0)^2 \right] + \dots$$

La comparaison des termes en  $g^3$  donne pour  $f(X)$  l'équation différentielle :

$$f'(X) = 2 a_1^2 X + \beta_1 + 2 a_1 a_0$$

soit :

$$f(X) = a_1^2 X^2 + (\beta_1 + 2 a_1 a_0) X + b_2.$$

Ainsi le coefficient de  $g^2$  contient un terme en  $\ln^2 \Lambda/\mu$ , qui est entièrement déterminé par le calcul à l'ordre  $g$ , ou plus exactement à l'ordre d'une boucle ; un calcul à deux boucles est nécessaire pour déterminer le coefficient  $\beta_1$ . De façon générale on pourrait montrer par récurrence que :

$$Z(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^n g^n c_{np} (\ln \Lambda/\mu)^p. \quad (68)$$

La puissance maximale du logarithme dans le terme en  $g^n$  est  $(\ln \Lambda/\mu)^n$  : ce terme s'appelle *terme de logarithme dominant* (leading logarithm) ; le terme en  $(\ln \Lambda/\mu)^{n-1}$  est sous-dominant (next-to-leading logarithm). Le terme de logarithme dominant est entièrement déterminé par le calcul à une boucle, le sous-dominant par le calcul à deux boucles, etc. Nous avons déjà vu un exemple concret de ce phénomène au chapitre précédent.

La structure de l'équation (68) se généralise aux autres constantes de renormalisation et aux fonctions de corrélation. Bien entendu cette structure n'a rien de miraculeux : c'est une conséquence du groupe de renormalisation. On pourrait par exemple l'obtenir en développant en série de perturbations des expressions telles que (40) pour  $Z_3$  ou telles que (50) pour la solution des équations de Callan-Symanzik.

## D.2. Théorie des perturbations améliorée par le groupe de renormalisation

Supposons que nous voulions calculer une fonction de corrélation  $\Gamma_R^{(N)}$  pour des valeurs des moments  $p_i \sim p \gg \mu$ . Un calcul direct de  $\Gamma_R^{(N)}$  en série de perturbations donnerait, en supposant  $m = 0$ , ou  $\mu \gg m$  :

$$\Gamma_R^{(N)} = g^{\frac{N}{2}-1} A(p_i) \left( 1 + g \left( \ln \frac{p}{\mu} + c \right) + \dots \right) \quad (69)$$

et si  $\ln(p/\mu)$  est grand, la série perturbative converge mal, ou pas du tout. Le cas d'une théorie IR libre est de toute façon désespéré ; au contraire dans le cas d'une théorie asymptotiquement libre dans le domaine UV, il est possible d'obtenir un résultat sensé. On définit un facteur de dilatation  $s$  par  $s = p/\mu \gg 1$  et  $k_i = p_i/s$ . L'équation (50) donne alors :

$$\Gamma_R^{(N)}(p_i, g, \mu) = s^{D-N \left( \frac{D}{2}-1 \right)} \exp \left( -\frac{N}{2} \int_g^{g(s)} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right) \times \Gamma_R^{(N)}(k_i, g(s), \mu).$$

Comme  $k_i/\mu \sim 1$ , la série perturbative du membre de droite est de la forme :

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, g(s), \mu) = [g(s)]^{\frac{N}{2}-1} A(k_i) \left( 1 + g(s) f\left(\frac{k_i \cdot k_j}{\mu^2}\right) + \dots \right)$$

où  $f(k_i \cdot k_j/\mu^2) \sim 1$ . Comme la dimension de  $A(k_i)$  est la dimension canonique de  $\Gamma_R^{(N)}$  on obtient finalement :

$$\Gamma_R^{(N)} = [g(s)]^{\frac{N}{2}-1} A(p_i) \exp \left( -\frac{1}{2} N \int_g^{g(s)} \frac{\gamma(g') dg'}{\beta(g')} \right) \times \\ \times \left( 1 + g(s) f\left(\frac{k_i \cdot k_j}{\mu^2}\right) + \dots \right). \quad (70)$$

Pour une théorie asymptotiquement libre dans le domaine UV,  $g(s) \rightarrow 0$  et la série perturbative dans le membre de droite de (70) converge rapidement ; l'application du GR a permis de « sommer les grands logarithmes » de l'équation (69).

Une façon équivalente de procéder consiste à choisir le point de soustraction à  $s\mu$  au lieu de  $\mu$  pour définir la constante de couplage renormalisée ; supposons que nous ayons choisi la charge invariante de l'équation (6) pour définir  $g$ . Nous aurions alors :

$$\hat{\Gamma}_R(p_{i0}, g, \mu) = \hat{\Gamma}_R(k_{i0}, g(s), \mu) \quad (71)$$

où  $k_{i0}$  est le point de soustraction (VI.34) et  $p_{i0} = sk_{i0}$ . Par définition le membre de droite de (71) est égal à  $g(s)$  et :

$$\hat{\Gamma}_R(p_{i0}, g, \mu) = g(s).$$

Afin d'éviter les grands logarithmes dans la série perturbative, il est donc recommandé de choisir le point de soustraction à  $\mu \sim p$ , lorsque les moments  $p_i$  sont tous  $\sim p$ . Le cas ennuyeux est celui où  $p_i/p_j \gg 1$  : en effet le groupe de renormalisation ne contrôle pas les  $\ln(p_i/p_j)$  qui apparaissent dans la série perturbative.

## E. LE GROUPE DE RENORMALISATION EN DIMENSION $D < 4$

Pour l'application aux phénomènes critiques et au schéma de renormalisation minimal, il est intéressant de calculer les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  à  $D < 4$ . L'expression obtenue dépend de  $\varepsilon = 4 - D$ , mais il suffira

de faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro pour avoir immédiatement les expressions de  $\beta$  et  $\gamma$  en dimension 4.

### E.1. Une équation pour $\beta(g, \varepsilon)$

Quand  $D < 4$ , on peut faire tendre  $\Lambda$  vers l'infini dans les intégrales, et il sera commode de relier  $g_0$  et  $u_0$  par :

$$u_0 = \mu^\varepsilon g_0 \quad (72)$$

au lieu d'utiliser (24). Grâce à la relation :

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \mu} \right)_{u_0} \left( \frac{\partial \mu}{\partial u_0} \right)_g \left( \frac{\partial u_0}{\partial g} \right)_\mu = -1$$

on peut écrire :

$$\mu \left( \frac{\partial g}{\partial \mu} \right)_{u_0} = \frac{-\mu (\partial u_0 / \partial \mu)_g}{(\partial u_0 / \partial g)_\mu} \quad (73)$$

A la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $u_0 = \mu^\varepsilon g_0(g)$  et :

$$\mu \left( \frac{\partial u_0}{\partial \mu} \right)_g = \varepsilon \mu^\varepsilon g_0$$

d'où :

$$\beta(g, \varepsilon) = \mu \left( \frac{\partial g}{\partial \mu} \right)_{u_0} = - \frac{\varepsilon \mu^\varepsilon g_0}{(\partial u_0 / \partial g)_\mu} = - \frac{\varepsilon g_0}{(\partial g_0 / \partial g)_\mu}$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon \left( \frac{\partial \ln g_0}{\partial g} \right)^{-1} \quad (74)$$

On trouve de même pour  $\gamma(g, \varepsilon)$  :

$$\gamma(g, \varepsilon) = \mu \left( \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \mu} \right)_{u_0} = \mu \left( \frac{\partial g}{\partial \mu} \right)_{u_0} \left( \frac{\partial \ln Z_3}{\partial g} \right)_{u_0}$$

A la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $Z_3 = Z_3(g, \varepsilon)$  et :

$$\gamma(g, \varepsilon) = \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial \ln Z_3(g, \varepsilon)}{\partial g} \quad (75)$$

Notez que les expressions (74) et (75) ne s'appliquent que pour  $D$  strictement inférieur à 4, lorsque l'on a fait tendre le cut-off vers l'infini.

Les divergences logarithmiques sont évidemment reflétées par la présence de pôles quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La relation (74) peut encore être transformée en utilisant  $g_0 = Zg$  :

$$\beta(g, \varepsilon) = \frac{-\varepsilon g}{1 + g \frac{\partial \ln Z}{\partial g}} \quad (76.a)$$

d'où :

$$\left[ \beta(g, \varepsilon) + \varepsilon g + g \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} \right] Z(g, \varepsilon) = 0. \quad (76.b)$$

## E.2. Calcul de $\beta(g, \varepsilon)$ et $\gamma(g, \varepsilon)$ dans le schéma minimal

Par définition du schéma minimal, les constantes de renormalisation ne contiennent que des pôles en  $\varepsilon$  (dans ce paragraphe,  $i$  désigne l'ordre du pôle en  $\varepsilon$  et non le nombre de boucles) :

$$Z(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} \quad (77)$$

$$Z_3(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_3^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}. \quad (78)$$

Examinons d'abord l'équation (76.a) ; dans le schéma minimal :

$$\left( 1 + g \frac{\partial \ln Z}{\partial g} \right)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}.$$

Pour que  $\beta(g, \varepsilon)$  ait une limite finie quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il est nécessaire que seul  $z^{(1)}$  soit  $\neq 0$  et :

$$\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \beta_4(g) \quad (79)$$

où  $\beta_4(g) = \beta(g)$  est la fonction  $\beta$  en dimension 4.

Notez que la relation (79) est spécifique du schéma minimal. On obtient aussi :

$$\beta(g) = -z^{(1)}(g)$$

mais en général on a calculé  $Z$ , et non  $\ln Z$ . Exprimons donc  $\beta(g)$  en fonction des  $Z^{(i)}$  en récrivant (76) :

$$\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} (gZ(g, \varepsilon)) - \varepsilon g^2 \frac{\partial}{\partial g} Z(g, \varepsilon) = 0. \quad (80)$$

En reportant (77) dans (80) on obtient :

$$\beta(g) \left( 1 + \sum_i \frac{Z^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} \right) - \varepsilon g^2 \sum_i \frac{Z'^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} + g \beta(g) \sum_i \frac{Z'^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} = 0.$$

Il suffit maintenant d'identifier les puissances de  $1/\varepsilon$  pour écrire l'expression de  $\beta(g)$  :

$$\beta(g) = g^2 \frac{\partial Z^{(1)}(g)}{\partial g} \quad (81)$$

ainsi que la relation de récurrence :

$$g^2 \frac{\partial}{\partial g} Z^{(i+1)}(g) = \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} (g Z^{(i)}(g)) . \quad (82)$$

Cette dernière relation permet par exemple de calculer les pôles en  $\varepsilon^{-2}$  en fonction de ceux en  $\varepsilon^{-1}$  : nous avons déjà rencontré un exemple d'une telle relation au chapitre précédent (paragraphe F).

Le calcul de  $\gamma(g, \varepsilon)$  s'effectue à partir de (75) :

$$\left[ \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma(g, \varepsilon) \right] Z_3(g, \varepsilon) = 0 .$$

Utilisons maintenant l'équation (78) :

$$\beta(g, \varepsilon) \sum_i \frac{\partial}{\partial g} \frac{Z_3^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} = \gamma(g, \varepsilon) \left( 1 + \sum_i \frac{Z_3^{(i)}(g)}{\varepsilon^i} \right) .$$

Grâce à la forme (79) de  $\beta(g, \varepsilon)$  on obtient :

$$\gamma(g, \varepsilon) = \gamma(g) = -g \frac{\partial}{\partial g} Z_3^{(1)}(g) . \quad (83)$$

Dans le schéma minimal,  $\gamma(g, \varepsilon)$  est indépendant de  $\varepsilon$  ! Soulignons que les formes (79) et (83) de  $\beta(g, \varepsilon)$  et  $\gamma(g, \varepsilon)$  ne sont valables que dans le schéma minimal. L'utilisation des conditions de normalisation (25) conduirait par exemple à une forme de  $\gamma(g, \varepsilon)$  dépendant explicitement de  $\varepsilon$ . Notons aussi que l'on obtient des relations de récurrence en  $i$  pour les  $Z_3^{(i)}$  (exercice 5).

Les arguments développés ci-dessus pour le calcul de  $\gamma(g, \varepsilon)$  se transposent évidemment à celui de  $\bar{\gamma}(g, \varepsilon)$  :

$$\bar{\gamma}(g, \varepsilon) = \bar{\gamma}(g) = -g \frac{\partial}{\partial g} \bar{Z}^{(1)}(g) . \quad (84)$$

### E.3. Calcul de $\beta$ , $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ à l'ordre de deux boucles

Au chapitre précédent, nous avons obtenu  $Z_3$  et  $Z$  à l'ordre de deux boucles :

$$Z_3(g, \varepsilon) = 1 - \frac{\alpha^2}{12 \varepsilon} \quad (85)$$

$$Z(g, \varepsilon) = 1 + \frac{3 \alpha}{\varepsilon} + \frac{9 \alpha^2}{\varepsilon^2} - \frac{17 \alpha^2}{6 \varepsilon} \quad (86)$$

avec  $\alpha = g/(4\pi)^{D/2}$  (\*). D'après (81) :

$$\beta(g) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{d}{d\alpha} \left( 3\alpha - \frac{17}{6}\alpha^2 \right) = g \left[ 3\alpha - \frac{17}{3}\alpha^2 \right]$$

$$\boxed{\beta(g) = \frac{3g^2}{(4\pi)^2} - \frac{17}{3} \frac{g^3}{(4\pi)^4} + O(g^4)} \quad (87)$$

Comme les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont indépendants du schéma de renormalisation, on aurait également trouvé le résultat (87) par exemple en utilisant les conditions de normalisation (25) en calculant directement en dimension 4 avec un cut-off : exercice (3) ;  $\gamma(g)$  s'obtient à partir de (83) et (85) :

$$\gamma(g) = -\frac{g}{(4\pi)^2} \frac{d}{d\alpha} \left( -\frac{\alpha^2}{12} \right) = \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^4} = \frac{\alpha^2}{6} \quad (88)$$

Pour calculer  $\bar{\gamma}$ , il faut déterminer  $\bar{Z}$  ; toutes les intégrales nécessaires ont été calculées au chapitre précédent, car elles sont identiques à celles du calcul de  $\Gamma^{(4)}$ . Seuls les facteurs de symétrie sont différents. Evaluons la partie divergente de  $\Gamma^{(2,1)}$  à l'ordre de deux boucles :

$$\Gamma^{(2,1)} = \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \\ \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \\ \text{diagram 5} \\ \text{diagram 6} \\ \text{diagram 7} \end{array} \quad (89)$$

The diagrams represent the following Feynman diagrams for  $\Gamma^{(2,1)}$  at two-loop order:

- 1. A tree-level diagram with an incoming fermion line, a vertex, and an outgoing fermion line with momentum  $q$ .
- 2. A one-loop diagram with a fermion loop and an external fermion line with momentum  $q$ .
- 3. A one-loop diagram with a fermion loop and an external fermion line with momentum  $q$ .
- 4. A two-loop diagram with two fermion loops and an external fermion line with momentum  $q$ .
- 5. A two-loop diagram with two fermion loops and an external fermion line with momentum  $q$ .
- 6. A two-loop diagram with two fermion loops and an external fermion line with momentum  $q$ .
- 7. A two-loop diagram with two fermion loops and an external fermion line with momentum  $q$ .

La partie divergente du deuxième graphe de (89) vaut :

$$\Gamma_R^{(2,1)}|_{\text{div}} = - \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) = - \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

(\*) Au lieu d'utiliser  $g$ , on peut utiliser une fonction de  $g$  :  $\alpha = cgf(D)$  où  $f(4) = 1$ . Il suffira d'écrire toutes les équations ((77), (78), (79) ...) en fonction de  $\alpha$  et non de  $g$ .

soit :

$$\bar{Z} = 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} + O(\alpha^2)$$

tandis que la partie divergente des quatre derniers graphes vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{4} \frac{4}{\varepsilon^2} (1 + 2 \varepsilon a_1) - \frac{1}{2} \frac{3 \alpha^2}{\varepsilon} \frac{2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon a_1) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \frac{2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon a_1) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{2}{\varepsilon^2} \left( 1 + 2 \varepsilon a_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

avec  $a_1 = 1 - \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \ln(q^2/\mu^2)$  (cf. VI.54.e).

On constate à nouveau l'élimination des termes indésirables proportionnels à  $\ln(q^2/\mu^2)$  et on trouve pour  $\bar{Z}Z_3$  :

$$\bar{Z}Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{2 \alpha^2}{\varepsilon^2} - \frac{\alpha^2}{2 \varepsilon}$$

soit :

$$\bar{Z} = 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{2 \alpha^2}{\varepsilon^2} - \frac{5 \alpha^2}{12 \varepsilon}. \quad (90)$$

Cette expression donne immédiatement  $\bar{\gamma}$  :

$$\bar{\gamma}(g) = -\alpha + \frac{5 \alpha^2}{6}. \quad (91)$$

#### E.4. Calcul des exposants critiques à l'ordre $\varepsilon^2$

Le point fixe est donné par  $\beta(\alpha^*, \varepsilon) = 0$  soit :

$$3 \alpha^* - \frac{17}{3} \alpha^{*2} = \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\alpha^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{17}{81} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (92)$$

A l'ordre  $\varepsilon^2$ ,  $\eta$  est donné par :

$$\eta = \gamma(\alpha^*) = \frac{\varepsilon^2}{54} \quad (93)$$

résultat que nous avons déjà obtenu au chapitre V (équation (V.65)).

Pour obtenir  $\nu$ , il faut calculer  $\bar{\gamma}(\alpha^*)$  :

$$\bar{\gamma}(\alpha^*) = -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{19}{162} \varepsilon^2$$

et :

$$\nu = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}(\alpha^*)} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{7\varepsilon^2}{162} + O(\varepsilon^3). \quad (94)$$

Les autres exposants critiques s'obtiennent grâce aux lois d'échelle (III.29).

## EXERCICES

### 1) Solutions de l'équation de C-S

(a) Soit l'équation de C-S (56). On examine d'abord le cas d'une charge invariante  $\hat{\Gamma}_R$ , correspondant à  $N = 0$ . En remarquant que (56) est équivalente à  $d\hat{\Gamma}_R/d \ln s = 0$ , montrer que :

$$\hat{\Gamma}_R(k_i, t, g, \mu) = \hat{\Gamma}_R(k_i, t(s), g(s), \mu(s) = s\mu).$$

(b) Obtenir la solution de (56) sous la forme :

$$\Gamma_R(k_i, t, g, \mu) = \exp \left( -\frac{1}{2} N \int_0^{\ln s} \gamma(g(s')) d \ln s' \right) \Gamma_R(k_i, t(s), g(s), s\mu)$$

et utiliser l'analyse dimensionnelle pour en déduire (57).

### 2) Autre type d'équation de C-S

(a) On se propose d'abord de démontrer l'équation établie à l'origine par Callan et Symanzik. On suppose que la théorie renormalisée est définie par les conditions de normalisation (VI.22) avec la modification suivante pour  $D < 4$  :

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i = 0, m, g) = m^\varepsilon g.$$

En appliquant l'opérateur  $m \left( \frac{d}{dm} \right)_{g_0, \Lambda}$  à

$$\Gamma^{(N)}(k_i, m_0, g_0, \Lambda) = Z_3^{-N/2} \left( \frac{\Lambda}{m}, g \right) \Gamma_R^{(N)}(k_i, m, g)$$

montrer que l'on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} \left[ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g, \varepsilon) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, m, g) = \\ = m^2 (2 - \gamma(g, \varepsilon)) \Gamma_R^{(N,1)}(k_i, q = 0, m, g) \end{aligned}$$

où  $\Gamma_R^{(N,1)}$  correspond à l'insertion d'un opérateur  $\varphi^2$  (cf. chapitre VI-E) et :

$$\beta(g, \varepsilon) = m \frac{dg}{dm} \Big|_{g_0, \Lambda}; \quad \gamma(g, \varepsilon) = m \frac{d \ln Z_3}{dm} \Big|_{g_0, \Lambda}.$$

Suggestion : utiliser les conditions de normalisation VI.22.b et VI.22.d.

(b) On peut montrer, à l'aide du théorème de Weinberg, que le second membre de l'équation de C-S est négligeable si  $k_i/m \gg 1$  :

$$\left[ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g, \varepsilon) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, g, m) \simeq 0.$$

En déduire, pour  $k_i/m \gg 1$  (régime ultraviolet) et  $g = g^*$  (pourquoi ?) que

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, g^*, m) \sim k_i^{D-N \left( \frac{D}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} N \gamma(g^*, \varepsilon)}.$$

(c) En utilisant une identité analogue à celle de l'exercice (6.a), montrer que

$$m \sim |g - g^*|^{1/\omega}$$

où  $\omega = \beta'(g^*)$  et en déduire :

$$Z \sim m^{\gamma^*}; \quad \bar{Z} \sim m^{\bar{\gamma}^*}.$$

Identifier les exposants critiques  $\nu$  et  $\gamma$ .

3) En utilisant les résultats de l'exercice VI.3 ainsi que ceux du paragraphe D.1, calculer la fonction  $\beta(g)$  à l'ordre de deux boucles. On vérifiera que  $\beta(g)$ , calculé avec une normalisation du type (VI.22) est bien identique au résultat obtenu à l'équation (87) : les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont universels.

#### 4) Groupe de renormalisation pour la théorie en $\varphi^3$

(a) En utilisant les résultats de l'exercice (VI.2), calculer les fonctions  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$  et  $\gamma_m(g)$  de la théorie en  $\varphi^3$  en dimension 6 à l'ordre d'une boucle. La fonction  $\gamma_m(g)$  est définie par :

$$\gamma_m(g) = -d \ln m^2 / d \ln \mu \Big|_{g_0, \Lambda}.$$

On utilisera une régularisation dimensionnelle, où  $m_0^2 = Z_m m^2$ , et le schéma minimal ;  $m$  est alors un paramètre de masse, dépendant de la masse de renormalisation  $\mu$ , analogue au paramètre  $t$  de la théorie en  $\varphi^4$  (cf. (52)).

Réponse :

$$\beta(g) = -\frac{3}{4} \alpha g; \quad \gamma(g) = \frac{1}{6} \alpha; \quad \gamma_m(g) = \frac{5}{6} \alpha$$

avec  $\alpha = g^2 / (4 \pi)^3$ . Attention au remplacement de  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$  !

(b) Montrer que la théorie en  $\varphi^3$  est asymptotiquement libre dans le domaine ultraviolet. En supposant d'abord la masse égale à zéro, montrer que le

comportement quand  $s \rightarrow \infty$  des fonctions de corrélation est donné par :

$$\Gamma_R^{(N)}(sk_i, g, \mu) = s^{d - \frac{1}{2}N} \int_0^{\ln s} \gamma(g(s')) d \ln s' \times \\ \times \Gamma_R^{(N)}(k_i, g(s), \mu) \simeq s^d (\ln s)^{-N/18} \Gamma_R^{(N)}(k_i, g(s), \mu).$$

Pour obtenir la dernière équation, on a utilisé les approximations à une boucle pour  $\beta(g)$  et  $\gamma(g)$ , obtenues à la question précédente.

(c) On suppose maintenant la masse non nulle. Montrer que les fonctions de corrélation obéissent à une équation de C-S :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} N \gamma(g) - \gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial \ln m^2} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, g, m, \mu) = 0.$$

Discuter l'influence de la masse sur le comportement asymptotique déterminé à la question précédente.

### 5) Relations de récurrence

(a) En utilisant la relation de récurrence (82), montrer que le terme  $c'(\alpha^2/\varepsilon^2)$  est calculable en fonction du terme  $c(\alpha/\varepsilon)$  de  $Z(g, \varepsilon)$  :  $c' = c^2$ .

(b) En écrivant la constante de renormalisation  $Z_3$  dans le schéma minimal sous la forme :

$$Z_3(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_3^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}$$

démontrer la relation de récurrence :

$$g \frac{\partial Z_3^{(i+1)}(g)}{\partial g} = \beta(g) \frac{\partial Z_3^{(i)}(g)}{\partial g} - \gamma(g) Z_3^{(i)}(g).$$

### 6) Relation entre $g_0$ et $g$

On se propose de déterminer la relation entre les constantes de couplage nue  $g_0 = \mu^{-\varepsilon} u_0$  et renormalisée pour  $D < 4$ . Pour fixer les idées, on pourra utiliser le schéma minimal bien que les résultats soient plus généraux.

(a) Montrer que  $Z(g, \varepsilon)$  est donné par :

$$Z(g, \varepsilon) = \exp \left[ \int_0^g \frac{dx \beta(x)}{x(\varepsilon x - \beta(x))} \right].$$

(b) En déduire que pour  $g \rightarrow g^*$  ( $g < g^*$ )

$$Z(g, \varepsilon) \simeq |g - g^*|^{-\varepsilon/\omega}$$

où  $\omega = \frac{d}{dg} \beta(g, \varepsilon)|_{g=g^*}$ . Ceci montre que lorsque  $g$  parcourt l'intervalle

$[0, g^*]$ ,  $g_0$  (et donc  $u_0$ ) parcourt l'intervalle  $[0, \infty[$ . Comme  $g^* \rightarrow 0$  quand  $D \rightarrow 4$ , la région  $g > 0$ ,  $D = 4$  ne peut être atteinte sans un prolongement analytique où  $g_0$  devient complexe. Cette remarque fournit une autre indication sur l'impossibilité d'une théorie renormalisée non triviale en dimension 4.

(c) On prend maintenant le cas d'une théorie asymptotiquement libre dans le domaine UV, par exemple la théorie en  $\varphi^3$  de l'exercice 4. Montrer que dans ce cas  $Z(g, \varepsilon) \rightarrow 0$  à  $g$  fixé (suffisamment petit — précisez ce point ! —) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  : la constante de couplage nue  $\rightarrow 0$ . Montrer également que :

$$Z_3(g, \varepsilon) = \exp \left[ - \int_0^g \frac{dx \gamma(x)}{\varepsilon x/2 - \beta(x)} \right] \rightarrow 0$$

dans les mêmes conditions.

7) Les fonctions  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$ ... dépendent du schéma de renormalisation, mais certaines propriétés sont universelles, comme les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$ . Montrer que les propriétés suivantes sont indépendantes du schéma de renormalisation <sup>(3)</sup> :

- (i) Existence d'un zéro de  $\beta(g)$  :  $\beta(g^*) = 0$ .
- (ii) Valeur de  $\beta'(g^*)$  quand  $\beta(g^*) = 0$
- (iii) Valeur  $\gamma(g^*)$  de  $\gamma(g)$  en un point fixe
- (iv) Premier coefficient  $\gamma_0$  de  $\gamma(g)$  :  $\gamma(g) = \gamma_0 g + \dots$  ou  $\gamma(g) = \gamma_0 g^2 + \dots$ .

#### 8) Corrections à l'invariance d'échelle <sup>(4)</sup>

(a) On se propose de calculer les corrections au comportement invariant d'échelle. Pour simplifier les notations, on se place à  $T = T_c$ , mais la méthode se généralise sans difficulté à  $T \neq T_c$ . La fonction de corrélation au point fixe est invariante d'échelle pour  $s \rightarrow 0$  :

$$\Gamma_R^{(N)}(s k_i, g^*, \mu) = s^{d - \frac{1}{2} N \gamma(g^*)} \Gamma_R^{(N)}(k_i, g^*, \mu).$$

On définit la fonction  $C^{(N)}(k_i, g, \mu)$  par :

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i, g, \mu) = \exp \left( - \frac{1}{2} N \int_g^{g^*} \frac{\gamma(g') - \gamma(g^*)}{\beta(g')} dg' \right) \times \\ \times C^{(N)}(k_i, g, \mu) \Gamma_R^{(N)}(k_i, g^*, \mu)$$

avec  $C^{(N)}(k_i, g^*, \mu) = 1$ . Montrer que  $C^{(N)}$  vérifie l'équation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial g} \right) C^{(N)}(k_i, g, \mu) = 0.$$

(b) En utilisant  $(\omega = d\beta(g, \varepsilon)/dg|_{g=g^*})$  :

$$\beta(g, \varepsilon) = \omega(g - g^*) + O(g - g^*)^2$$

montrer que  $C^{(N)}$  est de la forme :

$$C^{(N)}(k_i, g, \mu) \simeq 1 + (g - g^*) \mu^{-\omega} D(k_i).$$

En déduire que  $\Gamma_R^{(N)}$  se comporte comme :

$$\Gamma_R^{(N)}(sk_i, g, \mu) \simeq s^{d - \frac{1}{2} N \gamma(g^*)} \Gamma(k_i, g^*, \mu) (1 + s^\omega (g - g^*) \mu^{-\omega} D(k_i)).$$

(c) Montrer que  $\omega = \varepsilon + C_1 \varepsilon^2$  et calculer explicitement  $C_1$ . Ces corrections à l'invariance d'échelle sont précisément celles déjà examinées au chapitre III, paragraphe B.3 : l'exposant  $y_2$  vaut  $-\varepsilon + O(\varepsilon^2)$  dans le modèle en  $\varphi^4$  (cf. exercice III.4(b)).

9) Montrer que le potentiel effectif de Coleman-Weinberg (exercice VI.9(c)) est invariant (à l'ordre  $g^2(\mu)$ ) par un changement du point de renormalisation  $\mu$ , à condition que  $g(\mu)$  obéisse à l'équation d'évolution (46) en dimension  $D = 4$ .

Démontrer, de façon générale, que le potentiel effectif vérifie l'équation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \gamma(g) \frac{\partial}{\partial \ln \varphi} \right] V(\varphi, g, \mu) = 0$$

et que  $V \sim \frac{2\pi^2}{9} \frac{\varphi^4}{\ln \mu / \varphi}$ , lorsque  $\varphi / \mu \ll 1$  et  $D = 4$ .

## NOTES ET RÉFÉRENCES

On trouvera des exposés détaillés de l'application du groupe de renormalisation aux phénomènes critiques dans Brézin *et al.* (sections V et VI) et dans Amit (chapitres 8 et 9). On pourra également consulter deux articles très clairs (plus particulièrement orientés vers la théorie quantique des champs) : S. Coleman in « Properties of Fundamental Interactions », *Comptes Rendus de l'Ecole d'Erice* (1973) et D. Gross in « Methods in Field Theory » (section 4), *Ecole des Houches* (1975) ainsi que Collins, chapitre 7. Le rôle des opérateurs inessentiels est discuté par Brézin *et al.* (section VIII.C) et par Amit (chapitre II.2).

(<sup>1</sup>) J. Polchinski : *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984). Voir également : A. Kupiainen in *Proceedings of the VIII<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Physics*, World Scientific (1986) et les références citées.

(<sup>2</sup>) E. Brezin : « Critical Behaviour from Field Theoretical Renormalization Group Techniques », *Ecole de Cargèse* (1980).

(<sup>3</sup>) Gross, paragraphe 4.

(<sup>4</sup>) Amit, chapitre II.2.



## TROISIÈME PARTIE

# **Théorie quantique des champs scalaires**



## CHAPITRE VIII

# Intégrales de chemin en mécanique quantique et mécanique statistique (\*)

Ce chapitre fait la transition entre les deux premières parties, consacrées à la mécanique statistique et la troisième, qui traitera de théorie quantique des champs. Nous allons retrouver dans cette troisième partie les outils mis au point dans l'étude des phénomènes critiques : intégrales fonctionnelles (souvent appelées intégrales de chemin dans ce nouveau contexte), diagrammes de Feynman, renormalisation et groupe de renormalisation. Il suffira de quelques modifications pour adapter ces outils au nouveau contexte, et nous verrons sur des exemples élémentaires le lien entre un problème de mécanique statistique et un problème de mécanique quantique.

Toutefois, et bien que les résultats de ce chapitre permettent de mieux comprendre une partie des développements qui vont suivre, je ne les utiliserai pas directement par la suite. Ce chapitre peut donc être sauté en première lecture.

Dans son cours de mécanique quantique <sup>(1)</sup>, Feynman utilise une expérience d'interférences, du type trous d'Young réalisée avec des électrons, afin d'introduire le concept fondamental en mécanique quantique, celui d'*amplitude de probabilité*. Dans cette expérience, des électrons émis par une source  $A$  arrivent en un point d'impact  $B$  (variable) sur un écran  $E'$ , après avoir franchi un écran  $E$  percé de deux trous (1) et (2). Aux deux trajets possibles correspondent deux amplitudes de probabilité  $a_1$  et  $a_2$ , qui sont données par les règles suivantes (avec des notations évidentes : cf. figure 1) :

$$a_1 = a_{B1} a_{1A} ; \quad a_2 = a_{B2} a_{2A} .$$

(\*) Ce chapitre peut être sauté en première lecture.

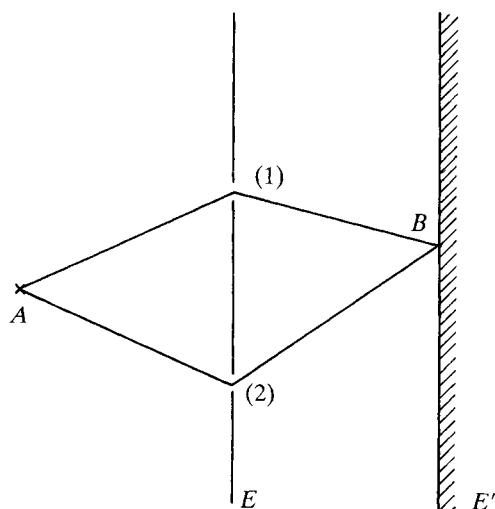


Figure 1. L'expérience des trous d'Young.

L'amplitude de probabilité  $a$  pour observer un électron en  $B$  est la somme de  $a_1$  et  $a_2$  :

$$a = a_1 + a_2 = \sum_{j=1}^2 a_{Bj} a_{jA}.$$

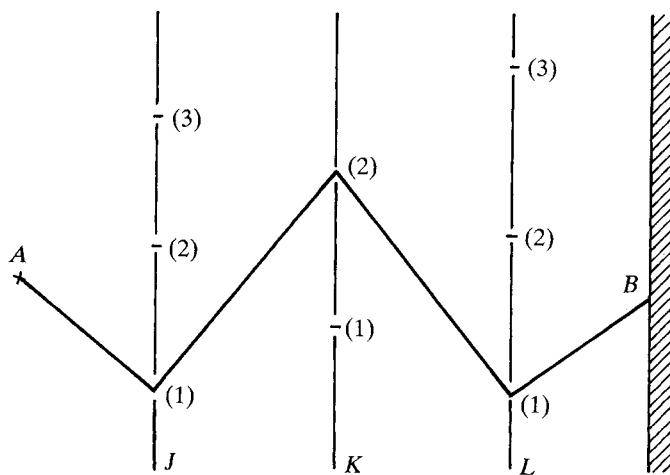


Figure 2. Une version compliquée de l'expérience des trous d'Young.

Compliquons un peu l'expérience en plaçant plusieurs écrans intermédiaires  $J, K, L$  percés chacun de plusieurs trous numérotés  $j, k$  et  $l$ . L'amplitude de probabilité  $a$  est alors :

$$a = \sum_{j,k,l} a_{Bl} a_{lk} a_{kj} a_{jA}.$$

L'amplitude de probabilité  $a$  est une somme sur tous les chemins allant de  $A$  à  $B$  ; par exemple on a dessiné sur la figure 2 le chemin  $A \rightarrow J(1) \rightarrow K(2) \rightarrow L(1) \rightarrow B$ .

On peut maintenant remplacer les écrans par un potentiel où se déplacent les électrons, et imaginer qu'à chaque chemin  $[c]$  allant de  $A$  à  $B$  on associe une amplitude de probabilité  $a[c]$ , l'amplitude totale  $a$  étant la somme (figure 3) :

$$a = \sum_{[c]} a[c]. \quad (1)$$

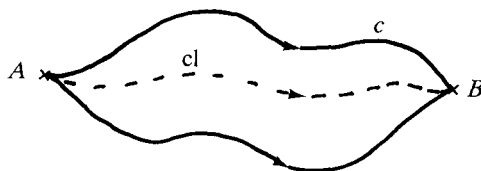


Figure 3. Chemins de  $A$  à  $B$ .

Reste évidemment à donner une prescription pour  $a[c]$  et pour la somme sur les chemins. Ceci sera fait au paragraphe B où, partant des propriétés de l'opérateur d'évolution  $\exp(-iHt)$ , nous montrerons que le poids statistique de chaque chemin, c'est-à-dire  $a[c]$ , est donné par ( $\sim$  : proportionnel à) :

$$a[c] \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(B, A)\right) \quad (2)$$

où  $S(B, A)$  est l'action classique calculée le long du chemin allant de  $A$  à  $B$  en un temps déterminé. Inversement on peut prendre (1) et (2) comme postulats fondamentaux et en déduire tous les résultats de la mécanique quantique : en d'autres termes on peut choisir (2) comme postulat de quantification au lieu de la relation de commutation canonique (RCC)  $[Q, P] = i\hbar$ .

Les amplitudes de probabilité dans (1) sont des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution dans la représentation où l'opérateur position

$Q$  est diagonal. On peut prolonger cet élément de matrice pour des valeurs complexes du temps  $t = -i\tau$  : l'amplitude de probabilité devient alors un élément de matrice densité (non normalisé), toujours dans la représentation où  $Q$  est diagonal ; la fonction de partition du système *quantique* est la trace de cette matrice densité lorsque l'on choisit  $\tau = 1/kT$ . Mais on peut interpréter cette matrice densité d'une autre manière : à chaque chemin  $[c]$  on fait correspondre une configuration  $[\gamma]$  d'un système *classique*, le poids statistique de chaque configuration étant :

$$p(\gamma) \sim \exp(-H[\gamma]) \quad (3)$$

où  $H$  n'est autre que le hamiltonien du système classique et peut être déduit de  $S$  ( $H$  est aussi noté  $S_E$  : « action euclidienne » — cf. paragraphe C). La fonction de partition du système classique est :

$$Z = \sum_{[\gamma]} \exp(-H[\gamma]) \quad (4)$$

où la somme sur les configurations est l'analogie de la somme sur les chemins dans (1).

Ainsi, partant d'un système quantique et des amplitudes de probabilité (2), on a abouti à un système classique décrit par les probabilités (3).

En mécanique quantique, un rôle important est souvent joué par le chemin classique allant de  $A$  à  $B$ , c'est-à-dire par le chemin qui rend l'action stationnaire. Dans le problème correspondant de physique statistique classique, la configuration correspondant au chemin classique est la « configuration de Landau » : en effet la configuration de Landau est celle qui rend le hamiltonien stationnaire (cf. II.B). Aux fluctuations quantiques autour du chemin classique correspondent les fluctuations statistiques autour de la configuration de Landau. Ces fluctuations sont étudiées par la théorie des perturbations, et il n'est pas étonnant de rencontrer les mêmes techniques dans les deux types de problèmes.

Le paragraphe A traite d'un exemple élémentaire : la correspondance entre la dynamique d'un spin 1/2 quantique et celle du modèle d'Ising à 1 dimension. Cette exemple illustre de façon très simple le passage d'un problème quantique à un problème statistique, et permet de préciser un certain nombre de correspondances.

Au paragraphe B, on établit la traduction de l'équation de Schrödinger en termes d'intégrale de chemin, en donnant un sens précis à la somme dans (1). Un point important de ce paragraphe est l'étude des conditions aux limites de l'intégrale de chemin dans le cas de l'oscillateur harmonique : en effet un champ quantifié n'est jamais qu'une superposition d'oscillateurs harmoniques (indépendants dans le cas du champ libre, couplés en général), et ces conditions aux limites seront

cruciales par la suite, car elles assureront l'unitarité et la causalité de la théorie.

Enfin nous préciserons au paragraphe C le lien entre mécanique statistique et mécanique quantique, en introduisant le « prolongement euclidien » de l'intégrale de chemin du paragraphe précédent.

## A. SPIN QUANTIQUE ET MODÈLE D'ISING

### A.1. Intégrale de chemin pour un spin 1/2

Considérons en mécanique quantique un hamiltonien décrivant un spin 1/2 (dans un système d'unités où  $\hbar = 1$ ) :

$$H = -K\sigma_1 \quad (5)$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les matrices de Pauli habituelles (cf. l'équation C.5). Dans la représentation où  $\sigma_3$  est diagonal, les vecteurs propres de  $H$  sont :

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

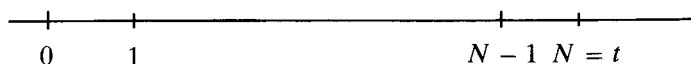
correspondant aux valeurs propres  $E_0 = -K$  (état fondamental) et  $E_1 = K$ . Ce système, comme tout système quantique, présente des fluctuations ; par exemple :

$$\langle 0 | \sigma_3^2 | 0 \rangle \neq |\langle 0 | \sigma_3 | 0 \rangle|^2.$$

Considérons maintenant un élément de matrice de l'opérateur d'évolution  $\exp(-iHt)$  entre deux états propres de  $\sigma_3$ ,  $|S_a\rangle$  et  $|S_b\rangle$  ( $S_a, S_b = \pm 1$ ) :

$$F(t, S_b | 0, S_a) = \langle S_b | \exp(-iHt) | S_a \rangle.$$

$F$  est l'amplitude de probabilité pour observer la valeur propre  $S_b$  au temps  $t$ , sachant que le spin est au temps  $t = 0$  dans l'état  $|S_a\rangle$ . Les valeurs de  $S_a$  et de  $S_b$  constituent les *conditions aux limites* au temps  $t = 0$  et  $t$  respectivement. Pour simplifier les notations, on suppose  $t = N = \text{entier} \gg 1$  et on divise l'intervalle  $[0, t]$  en  $N$  intervalles de longueur unité :



On insère maintenant un ensemble complet  $|S_i\rangle$ ,  $S_i = \pm 1$ , d'états propres de  $\sigma_3$  à chaque division de l'intervalle  $[0, t]$  :

$$\langle S_b | e^{-iHt} | S_a \rangle = \sum_{S_1 = \pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1} = \pm 1} \langle S_b | e^{-iH} | S_{N-1} \rangle \times \langle S_{N-1} | \cdots | S_1 \rangle \langle S_1 | e^{-iH} | S_a \rangle \quad (6)$$

et on introduit la fonction (complexe)  $V(S, S')$  par :

$$\langle S | e^{-iH} | S' \rangle = e^{-iV(S, S')}. \quad (7)$$

L'équation (6) devient :

$$\begin{aligned} \langle S_b | e^{-iH} | S_a \rangle &= \\ &= \sum_{[S_i]} \exp(-i[V(S_b, S_{N-1}) + V(S_{N-1}, S_{N-2}) + \cdots + V(S_1, S_a)]) \end{aligned} \quad (8)$$

où la somme porte sur toutes les configurations intermédiaires  $S_i$  :

$$\sum_{[S_i]} = \sum_{S_1 = \pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1} = \pm 1}.$$

Il n'y a plus d'opérateur dans le membre de droite de (8), qui constitue un exemple élémentaire d'intégrale de chemin : remarquez que (8) a bien la même forme que (1).

Effectuons maintenant un prolongement analytique de (6) pour des valeurs imaginaires de  $t$  :  $t = -i\tau$ . L'élément de matrice :

$$F(-i\tau, S_b; 0, S_a) = \langle S_b | e^{-H\tau} | S_a \rangle$$

est donné par une expression analogue à (8) et il est facile de calculer la matrice  $V_E(S, S')$  correspondante car :

$$e^{-H} = e^{K\sigma_1} = \begin{pmatrix} \text{ch } K & \text{sh } K \\ \text{sh } K & \text{ch } K \end{pmatrix}$$

dans une base où  $\sigma_3$  est diagonal. En écrivant  $\exp(-V_E(S, S'))$  sous la forme :

$$\exp(-V_E(S, S')) = \exp(A + BSS')$$

on peut faire l'identification :

$$e^{A+B} = \text{ch } K; \quad e^{A-B} = \text{sh } K. \quad (9)$$

Cette identification permet de faire le lien avec un problème de mécanique statistique *classique*. Supposons en effet qu'aux points 0,

$1, \dots, N$  nous ayons disposé des spins d'Ising  $S_i$  pouvant prendre seulement deux valeurs :  $S_i = +1$  et  $S_i = -1$ , et dont le hamiltonien d'interaction est :

$$H[S_i] = - \sum_{i=0}^{N-1} (A + BS_i S_{i+1}) \quad (10.a)$$

la probabilité de la configuration  $[S_i]$  étant donnée par :

$$p[S_i] = \exp(-H[S_i]) . \quad (10.b)$$

Le hamiltonien (10.a) est celui du modèle d'Ising à une dimension (cf. I-B.2). L'expression (8) pour  $t = -i\tau$  est la fonction de partition du modèle d'Ising lorsque les spins des extrémités  $S_a$  et  $S_b$  ont une valeur fixée (la température est incluse dans les coefficients  $A$  et  $B$  ; ou mieux, on pourrait identifier la température et  $\hbar$ ). Si l'on somme sur  $S_a$  et  $S_b$ , on obtient la fonction de partition du modèle d'Ising avec des conditions aux limites périodiques (cycliques)

$$\begin{aligned} S_a (= S_0) &\equiv S_b (= S_N) \\ Z_N &= \sum_{[S_i]} e^{\sum_i (A + BS_i S_{i+1})} = \sum_{[S_i]} e^{-H[S_i]} \end{aligned} \quad (11)$$

qui est égale à :

$$Z_N = \text{Tr } e^{-H\tau} . \quad (12)$$

La fonction de partition du système de  $N$  spins *classiques* est égale à la fonction de partition d'un spin quantique à la température  $kT = 1/N$ . Le programme exposé dans l'introduction a été réalisé sur cet exemple élémentaire : partant d'une amplitude de probabilité sous la forme (8) (cf. (1)), nous avons construit un système classique, la probabilité d'une configuration étant donnée par (10) (cf. (3)). Cependant le spin quantique n'a pas de limite classique, et nous n'avons pas vu l'analogue de (2). C'est pourquoi l'intégrale de chemin (8) n'a aucune utilité pratique. D'autre part, seule la limite  $N \rightarrow \infty$  donne des résultats intéressants, ainsi que nous allons le voir ci-dessous.

## A.2. Correspondances

### 1) Energie libre, énergie de l'état fondamental

A la limite  $N \rightarrow \infty$ , l'énergie libre par spin  $\hat{F}$  est donnée par :

$$\hat{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{N} \ln Z_N \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\tau} \ln \text{Tr } e^{-H\tau} \right) . \quad (13)$$

Mais lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $e^{-H\tau}$  est dominé par la valeur propre de l'état fondamental :

$$e^{-H\tau} \approx |0\rangle e^{-E_0\tau} \langle 0|$$

et :

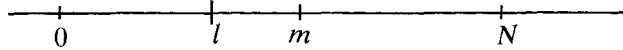
$$\hat{F} = E_0.$$

L'énergie *libre* par spin du système statistique est donc l'analogue de l'énergie de l'état fondamental du système quantique.

## 2) Fonction de corrélation. Produit ordonné dans le temps

Examinons maintenant la fonction de corrélation de deux spins d'Ising :

$$\langle S_m S_l \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{[S_i]} S_m S_l e^{-H[S_i]} \quad (m > l) \quad (14)$$



qui peut être transformée en :

$$\langle S_m S_l \rangle = \frac{1}{\text{Tr } e^{-H\tau}} \text{Tr} [e^{-(N-m)H} \sigma_3 e^{-(m-l)H} \sigma_3 e^{-lH}]$$

grâce à la relation :

$$\langle S_l | \sigma_3 e^{-H} | S_{l-1} \rangle = S_l e^{-V_E(S_l, S_{l-1})}.$$

A la limite où  $N \rightarrow \infty$ ,  $(m-l)$  fixé on peut mettre  $\langle S_m S_l \rangle$  sous la forme :

$$\langle S_m S_l \rangle = e^{E_0(m-l)} \langle 0 | \sigma_3 e^{-(m-l)H} \sigma_3 | 0 \rangle \quad (15.a)$$

ou :

$$\langle S_m S_l \rangle = | \langle 0 | \sigma_3 | 0 \rangle |^2 + | \langle 0 | \sigma_3 | 1 \rangle |^2 e^{-(m-l)(E_1 - E_0)}. \quad (16)$$

Avant de commenter l'équation (16), remarquons que dans le cas  $m < l$  nous aurions obtenu :

$$\langle S_m S_l \rangle = e^{E_0(l-m)} \langle 0 | \sigma_3 e^{-(l-m)H} \sigma_3 | 0 \rangle. \quad (15.b)$$

Si l'on définit l'opérateur  $\sigma_3(t)$  de la représentation de Heisenberg :

$$\sigma_3(t) = e^{iHt} \sigma_3 e^{-iHt} \quad (17)$$

et par prolongement à des valeurs complexes de  $t$  :

$$\sigma_3(\tau) = e^{H\tau} \sigma_3 e^{-H\tau}$$

on note que les résultats (15.a) et (15.b) peuvent s'écrire sous la forme unique :

$$\langle S_m S_l \rangle = \langle 0 | T(\sigma_3(\tau_m) \sigma_3(\tau_l)) | 0 \rangle \quad (18)$$

où j'ai introduit le *produit ordonné dans le temps* (ou produit- $T$ ) :

$$\begin{aligned} T(\sigma_3(t_m) \sigma_3(t_l)) &= \sigma_3(t_m) \sigma_3(t_l) & t_m > t_l \\ &= \sigma_3(t_l) \sigma_3(t_m) & t_m < t_l \end{aligned} \quad (19)$$

et  $\tau_m > \tau_l$  si  $t_m > t_l$ .

Ainsi nous voyons que la fonction de corrélation de deux spins est le prolongement, pour des valeurs complexes de  $t$ , de la valeur moyenne sur l'état fondamental d'un produit- $T$ . Aux fluctuations quantiques de l'opérateur  $\sigma_3$  correspondent les fluctuations statistiques de la variable classique  $S$ .

### 3) Longueur de corrélation, saut d'énergie

Revenons maintenant à l'équation (16) ; avec le hamiltonien choisi,  $\langle 0 | \sigma_3 | 0 \rangle = 0$  ; si cette condition n'est pas réalisée (cf. par exemple l'exercice 1), il faut définir la fonction de corrélation en retranchant le produit  $\langle S_m \rangle \langle S_l \rangle$  (cf. I-D.1) :

$$\langle S_m S_l \rangle \rightarrow \langle S_m S_l \rangle - \langle S_m \rangle \langle S_l \rangle .$$

En nous limitant pour le moment au hamiltonien (1) nous obtenons :

$$\langle S_m S_l \rangle = | \langle 0 | \sigma_3 | 1 \rangle |^2 e^{-|m-l|\Delta E}$$

où  $\Delta E = E_1 - E_0$  est la différence d'énergie entre le niveau fondamental et le niveau excité. L'équation (20) permet d'identifier la longueur de corrélation :

$$\langle S_m S_l \rangle \sim e^{-|m-l|/\xi} \quad (20)$$

et nous obtenons  $\xi = 1/\Delta E$  : la longueur de corrélation est l'inverse de la différence d'énergie entre le niveau fondamental et le niveau excité. Lorsqu'il y a plusieurs niveaux excités, le comportement de la fonction

de corrélation est également déterminé par  $\Delta E = E_1 - E_0$ , où  $E_1$  est le premier niveau excité ; cependant il faut choisir  $|m - l|$  suffisamment grand pour que la contribution des autres niveaux devienne négligeable.

Au lieu de diviser l'intervalle  $[0, \tau]$  en intervalles de longueur unité, j'aurais pu le diviser en  $\tau/\varepsilon$  intervalles de longueur  $\varepsilon$ . A condition que  $\tau/\varepsilon \gg 1$  (plus précisément  $\tau \Delta E/\varepsilon \hbar \gg 1$ ), rien n'aurait été changé aux résultats précédents, le problème de mécanique quantique restant le même. On peut vérifier sans difficulté cette affirmation à partir de l'expression explicite de la fonction de partition (exercice 1). Toutefois le résultat (13) doit être interprété de la façon suivante : comme il y a maintenant  $\tau/\varepsilon$  spins dans l'intervalle  $[0, \tau]$ ,  $\frac{-1}{\tau} \ln Z$  n'est plus l'énergie libre par spin, mais la *densité* (linéaire) d'énergie libre. Remarquons qu'au problème de mécanique quantique sur un site a été associé un problème de mécanique statistique sur une droite, c'est-à-dire un espace à 1 dimension. Dans une théorie quantique des champs, à chaque point d'espace est associé un système quantique (et la difficulté vient de ce que ces systèmes interagissent entre eux). *A une théorie quantique des champs dans un espace à  $D - 1$  dimensions (c'est-à-dire un espace-temps de dimension  $D$ ) correspondra un système statistique dans un espace à  $D$  dimensions.* Cette remarque étant faite, je donne le tableau de correspondance général :

Densité d'énergie libre	$\sim$ Densité d'énergie de l'état fondamental
Fonction de corrélation	$\sim$ Produit ordonné dans le temps
Inverse de la longueur de corrélation	$\sim$ Saut d'énergie $\Delta E$

Enfin, on fait souvent tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui permet de définir la *matrice de transfert*  $T$

$$e^{\varepsilon K \sigma_1} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon K \\ \varepsilon K & 1 \end{pmatrix} = 1 + \varepsilon T.$$

## B. PARTICULE DANS UN POTENTIEL

Envisageons maintenant un système quantique un peu plus compliqué qu'un spin 1/2 : une particule (non relativiste) de masse  $m$  se déplaçant sur une droite dans un potentiel  $V(q)$ . Nous appellerons  $Q$  et  $P$  les opérateurs de position et d'impulsion,  $|q\rangle$  et  $|p\rangle$  leurs états propres

dans la représentation de Schrödinger ; la normalisation choisie est :  $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ ,  $\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$  et  $\langle q|p\rangle = e^{iq \cdot p} / \sqrt{2\pi}$ .  $Q(t)$  et  $|q, t\rangle$  désignent l'opérateur position et ses vecteurs propres dans la représentation de Heisenberg :

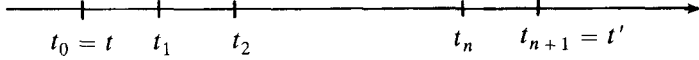
$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{iHt} Q e^{-iHt} \\ |q, t\rangle &= e^{iHt} |q\rangle . \end{aligned} \quad (21)$$

### B.1. Représentation d'une amplitude de probabilité par une intégrale de chemin

Soit  $F(q', t' ; q, t)$  l'amplitude de probabilité pour que la particule initialement en  $q$  au temps  $t$  se trouve en  $q'$  au temps  $t'$  (les conditions aux limites sont donc  $q(t) = q$ ,  $q(t') = q'$ ) :

$$F(q', t' ; q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle . \quad (22)$$

Divisons l'intervalle  $[t, t']$  en  $(n+1)$  intervalles de longueur  $\varepsilon = \frac{t'-t}{n+1}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  :



Insérons aux temps  $t_1 \dots t_n$  un ensemble complet de vecteurs propres de  $Q$  :

$$\begin{aligned} F(q', t' ; q, t) &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q' | e^{-iH(t'-t_n)} | q_n \rangle \langle q_n | \dots \\ &\quad \dots | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-iH(t_1-t)} | q \rangle \end{aligned}$$

et examinons l'élément de matrice  $\langle q' | e^{-i\varepsilon H} | q \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-i\varepsilon H} | q \rangle &= \langle q' | \exp \left( -i\varepsilon \left( \frac{P^2}{2m} + V(Q) \right) \right) | q \rangle \\ &\simeq \langle q' | 1 - i\varepsilon \frac{P^2}{2m} - i\varepsilon V(Q) | q \rangle . \end{aligned}$$

Calculons les éléments de matrice de  $P^2$  et  $V(Q)$  :

$$\begin{aligned} \langle q' | P^2 | q \rangle &= \int dp \langle q' | P^2 | p \rangle \langle p | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} p^2 e^{i(q'-q)p} \\ \langle q' | 1 - i\varepsilon V(Q) | q \rangle &= \delta(q - q') (1 - i\varepsilon V(q)) \\ &= \left( 1 - i\varepsilon V \left( \frac{q + q'}{2} \right) \right) \int \frac{dp}{2\pi} e^{i(q'-q)p} . \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\langle q' | e^{-i\varepsilon H} | q \rangle \simeq \int \frac{dp}{2\pi} \exp \left( i(q' - q)p - i\varepsilon \left( \frac{p^2}{2m} + V \left( \frac{q + q'}{2} \right) \right) \right). \quad (23)$$

(On peut négliger les termes en  $\varepsilon^2$  par analogie avec :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)^{T/\varepsilon} = e^{-T} = (e^{-\varepsilon})^{T/\varepsilon}.$$

On remarque que dans l'équation (23) les quantités  $p$  et  $q$  sont des variables *classiques* (de même que dans le paragraphe précédent le spin  $S$  était une variable classique). On obtient une représentation de l'amplitude de probabilité sous forme d'une intégrale de chemin :

$$F(q', t'; q, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \prod_{l=1}^n dq_l \prod_{l=0}^n \left\{ \frac{dp_l}{2\pi} \exp(ip_l(q_{l+1} - q_l)) \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -i\varepsilon \left( \frac{p_l^2}{2m} + V \left( \frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \right) \right) \right\}. \quad (24)$$

Si  $V$  est uniquement fonction de  $Q$ , il est possible de faire l'intégration sur  $p_l$  (exercice 2) :

$$\int \frac{dp}{2\pi} \exp \left( ipq - i\varepsilon \frac{p^2}{2m} \right) = \left( \frac{m}{2i\pi\varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{imq^2}{2\varepsilon} \right) \quad (25)$$

et l'équation (24) devient :

$$F(q', t'; q, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2i\pi\varepsilon} \right)^{1/2} \int \prod_{l=1}^n \left[ \left( \frac{m}{2i\pi\varepsilon} \right)^{1/2} dq_l \right] \times \\ \times \exp \left[ i \sum_{l=0}^n \frac{m(q_l - q_{l+1})^2}{2\varepsilon} - \varepsilon \sum_{l=0}^n V \left( \frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \right]. \quad (26)$$

En introduisant la notation abrégée  $\mathcal{D}q$  pour l'intégrale sur les  $q_l$  et en remarquant que :

$$\varepsilon \sum_{l=0}^n V \left( \frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \rightarrow \int_t^{t'} V(q(t'')) dt'' \\ \varepsilon \sum_{l=0}^n \frac{m(q_l - q_{l+1})^2}{2\varepsilon^2} \rightarrow \int_t^{t'} m \left( \frac{dq}{dt''} \right)^2 dt''$$

on trouve la forme finale de l'intégrale de chemin :

$$F(q', t' ; q, t) = \int \mathcal{D}q \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt'' \right) = \int \mathcal{D}q \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right) \quad (27)$$

avec les conditions aux limites :  $q(t) = q$  ;  $q(t') = q'$ .

Dans l'équation (27) j'ai rétabli la constante de Planck  $\hbar$  ;  $\dot{q} = dq/dt$  et

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (28)$$

est le lagrangien de la particule ;  $S$  est l'action correspondante :

$$S = \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) dt'' . \quad (29)$$

Naturellement la « démonstration » précédente mériterait d'être étayée par une analyse mathématique rigoureuse afin de donner un sens précis à la mesure d'intégration  $\mathcal{D}q$ . Avec les mêmes notations, on peut transformer (24) et obtenir la forme hamiltonienne de l'intégrale de chemin :

$$F(q', t' ; q, t) = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left( i \int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p, q)] dt'' \right) . \quad (30)$$

#### Interprétation de l'équation (27)

Considérons un chemin allant de  $A : (q, t)$  à  $B : (q', t')$  ; à ce chemin correspond une certaine action  $S$ . L'équation (27) peut être interprétée en admettant que chaque chemin est affecté d'un poids statistique  $\exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right)$ , et que l'amplitude de probabilité est obtenue en faisant la somme sur tous ces chemins. Dans la procédure que nous avons suivie, la somme sur les chemins a été définie de la façon suivante : les chemins sont des lignes brisées joignant les positions  $q, q_1, \dots, q'$  aux temps  $t, t_1, \dots, t'$  (figure 4). La somme sur les chemins consiste à intégrer à  $q$  et  $q'$  fixés sur tous les  $q_l$  correspondant aux temps intermédiaires  $t_l$  avec une mesure d'intégration :

$$\left( \frac{m}{2i\pi\epsilon} \right)^{1/2} \prod_{l=1}^n \left( \frac{m}{2i\pi\epsilon} \right)^{1/2} dq_l \rightarrow \mathcal{D}q .$$

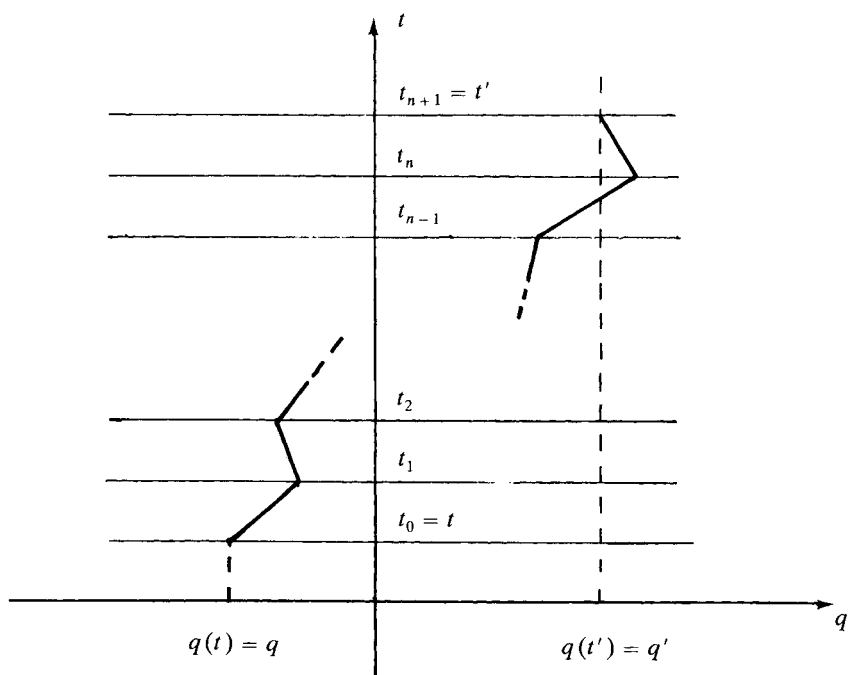


Figure 4. Trajets utilisés pour l'évaluation de (26).

L'action correspondant à un élément de chemin  $q_l \rightarrow q_{l+1}$  est :

$$\Delta S = \frac{1}{2} m \frac{(q_l - q_{l+1})^2}{\varepsilon} - \varepsilon V \left( \frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right).$$

Si  $|q_l - q_{l+1}| \gg (\hbar \varepsilon / m)^{1/2}$ , le facteur  $\exp i \Delta S / \hbar$  oscille rapidement et la contribution du trajet sera faible : on voit que seuls les trajets « suffisamment réguliers » donneront une contribution importante. Il existe d'autres manières de définir des sommes sur les chemins, qui sont décrites dans les livres cités en référence.

Examinons maintenant le rôle du chemin classique  $q_{cl}(t'')$ . Ce chemin correspond à une action stationnaire :

$$\left. \frac{\delta S}{\delta q(t'')} \right|_{q=q_{cl}(t'')} = 0.$$

Considérons un chemin  $q(t'')$ , et soit  $S$  l'action correspondante (figure 5). Si  $|S - S_{cl}| \gg \hbar$ , cela veut dire que le facteur  $\exp iS/\hbar$  oscille

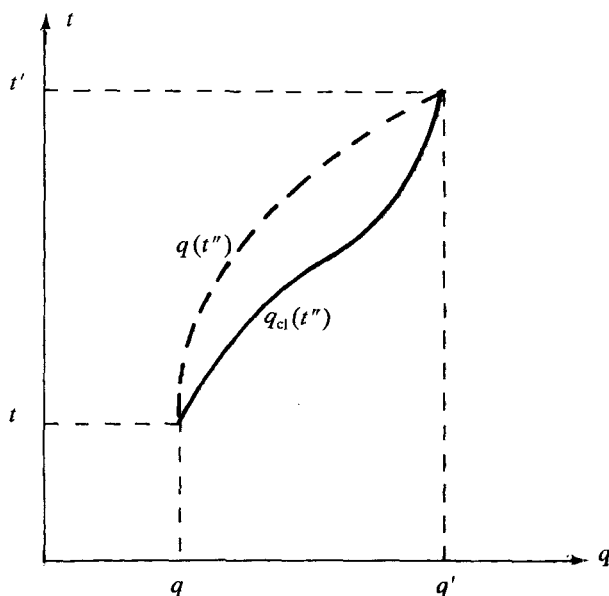


Figure 5.

un grand nombre de fois lorsque l'on déforme  $q_{cl}$  en  $q$ . Ceci implique que les chemins voisins de  $q$  donnent une contribution négligeable à l'amplitude de probabilité. Celle-ci sera dominée par les trajets voisins de  $q_{cl}$ , dont l'action est telle que  $|S - S_{cl}| \leq \hbar$ . Dans certains cas on peut espérer tenir compte des fluctuations quantiques autour de la trajectoire classique par un développement en puissances de  $\hbar$ , ou développement en nombre de boucles (cf. II-D.2 et V-D.2).

## B.2. Fonctionnelle génératrice des produits- $T$ . Expression du produit- $T$

En théorie quantique des champs, les valeurs moyennes sur l'état fondamental  $|0\rangle$  (souvent appelé « état du vide ») de produits- $T$  d'opérateurs jouent un rôle très important. En suivant la même technique qu'au paragraphe précédent, il est facile d'écrire l'élément de matrice du produit- $T$  d'opérateurs-position entre les états  $|q' t'\rangle$  et  $|q, t\rangle$  :

$$\langle q', t' | T(Q(t_1) Q(t_2)) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \, q(t_1) q(t_2) e^{iS}. \quad (31)$$

Cependant on cherche plutôt à obtenir :

$$\langle 0 | T(Q(t_1) Q(t_2)) | 0 \rangle$$

et il va falloir « projeter » l'équation (31) sur l'état fondamental.

### Amplitude vide-vide et fonctionnelle génératrice

Il sera commode de coupler le système quantique à une « source »  $j(t)$  ;  $j(t)$  est une fonction dont la valeur est fixée à l'avance : elle ne dépend pas de la dynamique de la particule. Le lagrangien se transforme en :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) + j(t) q(t) \quad (32)$$

et d'après les équations du mouvement, on voit que la particule est soumise à une force supplémentaire  $j(t)$ . La source  $j(t)$  sera prise égale à zéro en dehors d'un intervalle  $[t, t']$  (figure 6) :

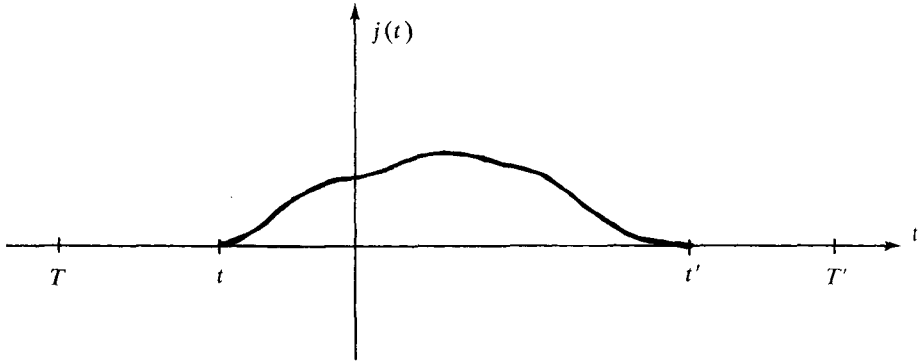


Figure 6. La source  $j(t)$ .

Dans cet intervalle l'opérateur d'évolution  $U_j(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$i \frac{dU_j}{dt} = [H - j(t) Q] U_j(t) \quad (33)$$

où  $H$  est le hamiltonien correspondant aux deux premiers termes de (32).

Soient deux temps  $T$  et  $T'$  qui vérifient  $T < t$  et  $T' > t'$  ; l'amplitude

de probabilité  $\langle Q', T' | Q, T \rangle_j$  en présence de la source peut s'écrire :

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle_j = \int dq dq' \langle Q', T' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle_j \langle q, t | Q, T \rangle .$$

Nous allons maintenant sélectionner l'état fondamental en prenant des limites appropriées en  $T$  et  $T'$ . Remarquons que :

$$\langle q, t | Q, T \rangle = \langle q | e^{-iH(t-T)} | Q \rangle = \sum_n \varphi_n(q) \varphi_n^*(Q) e^{-iE_n(t-T)}$$

où  $\varphi_n(q) = \langle q | n \rangle$  est la fonction d'onde de l'état  $n$ , d'énergie  $E_n$ . En prenant la limite  $T \rightarrow i\infty$  on sélectionne l'état fondamental (il faut imposer que les trajectoires  $Q(T)$  et  $Q'(T')$  ne partent pas à l'infini, par exemple que  $Q(T)$  et  $Q'(T')$  tendent vers une constante lorsque  $T$  et  $T' \rightarrow \infty$ , afin que les  $\varphi_n(Q)$  tendent vers une limite finie) :

$$\lim_{T \rightarrow i\infty} e^{-iE_0 T} \langle q, t | Q, T \rangle = \varphi_0(q, t) \varphi_0^*(Q)$$

avec :

$$\varphi_0(q, t) = \langle q, t | 0 \rangle = e^{-iE_0 t} \varphi_0(q) .$$

De même on obtient :

$$\lim_{T' \rightarrow -i\infty} e^{iE_0 T'} \langle Q', T' | q', t' \rangle = \varphi_0^*(q', t') \varphi_0(Q) .$$

On définit la *fonctionnelle génératrice* (des produits- $T$ )  $Z(j)$  par :

$$Z(j) = \lim_{\substack{T \rightarrow i\infty \\ T' \rightarrow -i\infty}} \frac{\langle Q', T' | Q, T \rangle_j}{e^{-iE_0(T'-T)} \varphi_0^*(Q) \varphi_0(Q')} \quad (34)$$

ou :

$$Z(j) = \int dq dq' \varphi_0^*(q', t') \langle q', t' | q, t \rangle_j \varphi_0(q, t) . \quad (35)$$

L'équation (35) donne la « projection sur l'état fondamental » que nous recherchions. L'interprétation physique de  $Z(j)$  est la suivante : si le système est dans son état fondamental au temps  $t$ ,  $Z(j)$  est l'amplitude de probabilité pour le trouver dans l'état fondamental au temps  $t'$  (à un facteur de phase près) : c'est « l'amplitude vide-vide ».

L'équation (35) montre que  $Z(j)$  s'écrit aussi sous forme d'un élément de matrice :

$$Z(j) = \langle 0 | e^{iHt'} U_j(t', t) e^{-iHt} | 0 \rangle \quad (36)$$

ce qui entraîne immédiatement que  $Z(0) = 1$ . Ceci n'est pas surprenant car en l'absence de source le système doit rester dans son état fondamental. La démonstration qui a conduit à l'équation (27) reste valable en présence d'un potentiel dépendant explicitement du temps  $V(q, t)$  : il suffit de remplacer  $\exp(-iH(t' - t))$  par l'opérateur d'évolution  $U_j(t', t)$  et d'utiliser la loi de groupe :

$$U_j(t', t) = U_j(t', t_n) U_j(t_n, t_{n-1}) \dots U_j(t_1, t).$$

On peut donc écrire  $\langle q', t' | q, t \rangle_j$  sous forme d'une intégrale de chemin et à une constante  $\mathcal{N}$  près :

$$Z(j) = \mathcal{N} \lim_{\substack{T \rightarrow i\infty \\ T' \rightarrow -i\infty}} \int \mathcal{D}q \exp \left( i \int_T^{T'} (L(q, \dot{q}) + j(t) q(t)) dt \right) \quad (37)$$

avec les conditions aux limites :  $\lim_{T \rightarrow i\infty} q(t) = \text{Cte}$ ,  $\lim_{T' \rightarrow -i\infty} q(t') =$

Cte. En général la constante multiplicative  $\mathcal{N}$  ne joue aucun rôle et l'expression (37) suffira toujours en pratique.

Les valeurs moyennes sur le vide de produits- $T$  s'obtiennent par dérivation fonctionnelle par rapport à  $j$  ; par exemple :

$$\langle 0 | T(Q(t_1) Q(t_2)) | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z(0)} \frac{\delta^2 Z(j)}{\delta j(t_1) \delta j(t_2)} \Big|_{j=0}. \quad (38)$$

Cette équation se déduit immédiatement de (37) ; il est nécessaire de diviser par  $Z(0)$  lorsque  $Z(0) \neq 1$ .

### B.3. Oscillateur harmonique et conditions aux limites de Feynman

Nous allons maintenant appliquer les résultats établis précédemment au cas de l'oscillateur harmonique ; les propriétés de l'oscillateur harmonique sont bien connues en mécanique quantique, et ce n'est pas a priori un exercice passionnant que de les retrouver par les méthodes fonctionnelles. Le point est bien sûr que la formulation que nous allons mettre au point se généralise à la théorie quantique des champs.

Ecrivons la fonctionnelle génératrice d'un oscillateur harmonique de masse  $m = 1$  et de fréquence  $\omega$ , couplé à une force extérieure (ou source)  $j(t)$ , dont le lagrangien et les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} L(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + j(t) q(t) \\ \ddot{q} + \omega^2 q = j(t). \end{cases} \quad (39)$$

La fonctionnelle génératrice  $Z(j)$  s'écrit :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}q \exp \left( i \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + j(t) q(t) \right) \right) \quad (40)$$

où les limites  $T \rightarrow i\infty$ ,  $T' \rightarrow -i\infty$  ainsi que la constante multiplicative sont sous-entendues. Rappelons que  $Z(j)$  est l'amplitude de probabilité vide  $\rightarrow$  vide en présence de la source  $j$ , et elle peut être calculée par des techniques de mécanique quantique usuelles : le calcul est fait au chapitre IX, paragraphe C. (Le début de ce paragraphe jusqu'à l'équation (IX.73) peut être lu indépendamment du reste du chapitre ; l'équation (IX.73) donne l'expression de  $U_j(t', t)$ .) Si l'on traite de façon cavalière les conditions aux limites, on peut intégrer par parties dans (40) :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}q \exp \left( i \int dt \left( -\frac{1}{2} q \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + j(t) q(t) \right) \right). \quad (41)$$

L'intégrale sur  $q$  dans (41) est une intégrale gaussienne qui s'écrit, à un facteur indépendant de  $j$  près, sous la forme :

$$Z(j) = \exp \left( -\frac{1}{2} \iint dt dt' j(t) D_F(t-t') j(t') \right) \quad (42)$$

où  $D_F$  est une fonction de Green (\*) de l'oscillateur harmonique :

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) D_F(t-t') = -i \delta(t-t'). \quad (43)$$

En effet le terme en  $q^2$  dans (41) s'écrit :

$$-\frac{1}{2} q \left[ i \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \right] q$$

et formellement  $D_F$  est l'inverse de l'opérateur entre crochets :

$$D_F = \left[ i \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \right]^{-1}.$$

On s'aperçoit immédiatement qu'il faut traiter soigneusement les conditions aux limites, car (43) ne définit pas la fonction  $D_F$  de façon unique : on peut en effet ajouter une combinaison linéaire arbitraire

(\*) En principe on ne devrait pas avoir de facteur  $(-i)$  dans le membre de droite de (43) si l'on voulait définir une fonction de Green au sens exact du terme ;  $D_F$  est une fonction de Green à un facteur  $i$  près.

des solutions  $\exp(\pm i\omega t)$  de l'équation homogène. On aboutit à la même conclusion dans l'espace de Fourier : prenant la transformée de Fourier de (43), et appelant  $k_0$  la variable conjuguée de  $t$ , on obtient :

$$(k_0^2 - \omega^2) D_F(k_0) = i \quad (44)$$

$D_F(k_0)$  a des pôles à  $k_0 = \pm \omega$ , et nous avons besoin d'une prescription pour traiter ces pôles. Cette prescription, qui correspond à traiter correctement les conditions aux limites, sera déduite du calcul explicite de  $Z(j)$ . On pourrait utiliser le résultat (IX.73), mais il est intéressant de montrer que l'on peut tout faire avec l'intégrale de chemin, et qu'il n'est pas nécessaire de passer par le formalisme opératoire.

Le calcul de  $Z(j)$  est proposé à l'exercice (3), où suffisamment d'indications sont données pour que ce calcul ne présente pas de difficulté. Avec le changement de notations  $t \rightarrow t_i$ ,  $t' \rightarrow t_f$ ,  $T = t_f - t_i$ , on obtient d'abord  $F(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle_j$  :

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_j &= \left( \frac{\omega}{2 i \pi \sin \omega T} \right)^{1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\omega}{2 \sin \omega T} [(q_i^2 + q_f^2) \cos \omega T - 2 q_i q_f] + \right. \\ &+ \frac{i q_i}{\sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} \sin [\omega (t_f - t)] j(t) dt + \frac{i q_f}{\sin \omega T} \times \\ &\times \int_{t_i}^{t_f} \sin [\omega (t - t_i)] j(t) dt - \frac{i}{\omega \sin \omega T} \times \\ &\times \iint dt dt' j(t) \theta(t - t') \sin [\omega (t_f - t)] \sin [\omega (t' - t_i)] j(t') \cdot \end{aligned} \quad (45)$$

Pour obtenir  $Z(j)$  il faut utiliser (35) avec :

$$\varphi_0(q, t) = \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2} \omega q^2} e^{-\frac{i}{2} \omega t}. \quad (46)$$

Les intégrales sur  $q_i$  et  $q_f$  sont des intégrales gaussiennes et l'on trouve pour  $Z(j)$  (cf. exercice 3) :

$$Z(j) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} dt dt' j(t) D_F(t - t') j(t') \right\} \quad (47)$$

avec

$$D_F(t - t') = \frac{1}{2 \omega} [\theta(t - t') e^{-i\omega(t - t')} + \theta(t' - t) e^{-i\omega(t' - t)}] \quad (48)$$

On vérifie immédiatement que  $D_F(t - t')$  obéit bien à l'équation (43). Le calcul complet a permis de fixer la fonction de Green  $D_F$  de façon non ambiguë. Etablissons maintenant un résultat *fondamental* pour la suite :  $D_F(t)$  s'obtient à partir de (44) par la prescription de Feynman  $\omega^2 \rightarrow \omega^2 - i\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), la convention pour les transformées de Fourier étant fixée par (49) :

$$D_F(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 t}}{k_0^2 - \omega^2 + i\varepsilon}. \quad (49)$$

Cette prescription place les pôles à  $k_0 = -\omega + i\varepsilon$  et  $k_0 = \omega - i\varepsilon$ . Calculons  $D_F(t)$  par la méthode des résidus : pour  $t > 0$  on peut refermer le contour par un grand demi-cercle dans le demi-plan inférieur et pour  $t < 0$  par un grand demi-cercle dans le demi-plan supérieur (figure 7) : on retrouve bien l'expression (48).

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on pourra remplacer avantageusement l'équation (40) pour  $Z(j)$  par :

$$Z(j) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp \left( i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^2 - (\omega^2 - i\varepsilon) q^2 + jq \right) dt \right). \quad (50)$$

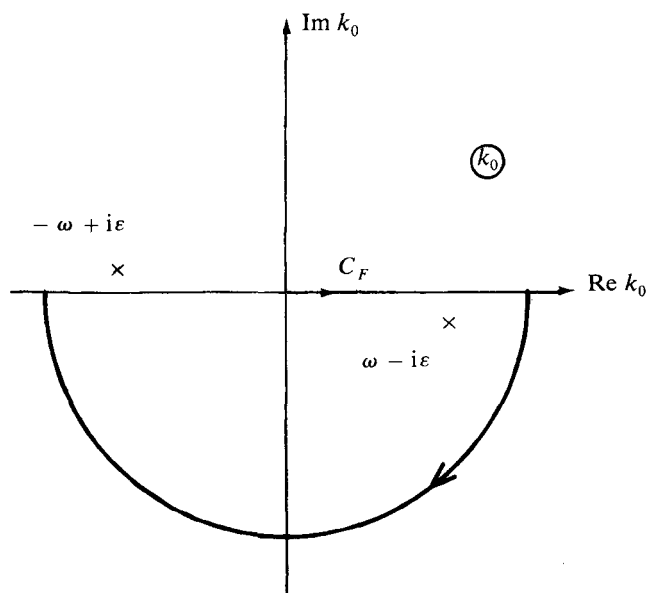


Figure 7. Le contour de Feynman.

Remarquons aussi que d'après (38) et (42) on démontre :

$$\langle 0 | T(Q(t) Q(t')) | 0 \rangle = D_F(t - t')$$

relation que l'on peut aussi établir par un calcul direct (cf. exercice 4) : ceci nous conduira à identifier fonctions de Green et valeurs moyennes sur le vide de produits- $T$  d'opérateurs position.

Le lecteur qui aura mené jusqu'au bout les calculs de l'exercice (3) aura constaté que ceux-ci, sans présenter de difficulté, sont néanmoins assez longs. Ceci suggère que les conditions aux limites  $(q, t)$  et  $(q', t')$  de l'intégrale de chemin (27) ne sont pas les mieux adaptées au problème de l'oscillateur harmonique. La forme la mieux adaptée est de type hamiltonien, avec des conditions aux limites sur les variables  $a(t)$  et  $a^*(t)$ , analogues classiques des opérateurs de création et d'annihilation. Cependant, même avec ces variables, il est nécessaire de disposer d'une préparation technique importante (espace de Bargmann), et je renvoie à l'article de Fadeev ou au livre d'Itzykson-Zuber pour cet aspect des intégrales de chemin <sup>(2)</sup>.

## C. PROLONGEMENT EUCLIDIEN ET COMMENTAIRES

### C.1. Fonction de partition quantique

Les limites  $T \rightarrow i\infty$ ,  $T' \rightarrow -i\infty$  peuvent paraître a priori assez peu naturelles. On obtient des limites beaucoup plus naturelles en travaillant avec des temps imaginaires  $t = -i\tau$  et l'opérateur d'évolution  $\exp(-H\tau)$ . L'élément de matrice :

$$\langle q' | e^{-H(\tau' - \tau)} | q \rangle = F(q', -i\tau'; q, -i\tau)$$

est le prolongement analytique pour des valeurs  $t = -i\tau$ ,  $t' = -i\tau'$  de l'élément de matrice (22). Le raisonnement conduisant à l'équation (27) peut être suivi pas à pas et permet d'écrire l'élément de matrice sous forme d'une intégrale de chemin :

$$\langle q' | e^{-H(\tau' - \tau)} | q \rangle = \int \mathcal{D}q \exp \left( - \int_{\tau}^{\tau'} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right) d\tau'' \right). \quad (51)$$

Les signes dans l'exponentielle s'expliquent ainsi : le prolongement analytique fait passer de  $\varepsilon$  à  $-i\varepsilon'$  :

$$\begin{aligned} -i\varepsilon V(q) &\rightarrow -\varepsilon' V(q) \\ i\varepsilon \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 &\rightarrow \varepsilon' \left( i \frac{dq}{d\tau} \right)^2 \rightarrow -\varepsilon' \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2. \end{aligned}$$

L'expression (51) fait apparaître le « lagrangien euclidien » (la motivation pour cette terminologie apparaîtra au chapitre X, paragraphe C.3) :

$$L_E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \quad (52)$$

(remarquez le signe + devant  $V(q)$ ), dont l'intégrale sur  $\tau''$  est « l'action euclidienne »  $S_E$ .

L'élément de matrice (51) est un élément de matrice densité non normalisée  $\rho(q', q; \tau' - \tau)$ . Cette matrice densité obéit à une équation de diffusion, qui est l'équation de Schrödinger pour des valeurs imaginaires du temps (exercice 2). L'intégration sur  $q$  et  $q'$  avec  $q = q'$  donne la fonction de partition de la particule quantique à la température  $T(\beta = 1/kT)$

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tr } e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle = \\ &= \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q \exp \left( - \int_0^\beta \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right) d\tau'' \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Dans la forme fonctionnelle, on doit intégrer sur toutes les trajectoires vérifiant les conditions aux limites périodiques :

$$q(0) = q(\beta).$$

Les moyennes thermiques de « produits- $T$  » (avec ordre en  $\tau$ ) sont définies par :

$$\begin{aligned} \langle T(Q(\tau_1) Q(\tau_2)) \rangle_\beta &= \frac{1}{Z} \text{Tr} (T(Q(\tau_1) Q(\tau_2) e^{-\beta H})) = \\ &= \frac{1}{Z} \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q q(\tau_1) q(\tau_2) \exp \left( - \int_0^\beta L_E(q, \dot{q}) d\tau'' \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Ces produits- $T$  obéissent à la condition de périodicité (évidente sur la forme fonctionnelle) :

$$\langle T(Q(\beta) Q(\tau_2)) \rangle_\beta = \langle T(Q(0) Q(\tau_2)) \rangle_\beta \quad (55)$$

qu'il est aussi facile de démontrer en utilisant la cyclicité de la trace. Ce sont les prolongements analytiques de produits- $T$  à température finie (exercice (4)).

Pour définir une fonctionnelle génératrice  $Z_E(j)$  de valeurs moyennes sur le vide de produits- $T$ , il faut à nouveau projeter sur l'état fondamental. Les limites  $\tau' \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow -\infty$  sélectionnent cet état et on

obtient pour  $Z_E(j)$  :

$$Z_E(j) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \times \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) - j(\tau'') q(\tau'') \right) d\tau'' \right) \quad (56)$$

les conditions aux limites étant

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} q(\tau) = \text{Cte}, \quad \lim_{\tau' \rightarrow \infty} q(\tau') = \text{Cte}.$$

$Z_E(j)$  est appelée fonctionnelle génératrice euclidienne ; remarquez que l'expression (56) est logique : pour projeter sur l'état fondamental, il faut faire tendre la température vers zéro, c'est-à-dire  $\beta$  vers l'infini. En dérivant par rapport à  $j$ , on obtient les prolongements analytiques de valeurs moyennes sur le vide de produits- $T$  ordinaires (cf. (38)) :

$$\frac{(-i)^n}{Z(0)} \frac{\delta^n Z(j)}{\delta j(t_1) \dots \delta j(t_n)} \Big|_{\substack{t_l = -i\tau_l \\ j=0}} = \frac{1}{Z_E(0)} \frac{\delta^n Z_E(j)}{\delta j(\tau_1) \dots \delta j(\tau_n)} \Big|_{j=0}. \quad (57)$$

La figure 8 permet de mieux visualiser les conditions aux limites dans (37) et (56).

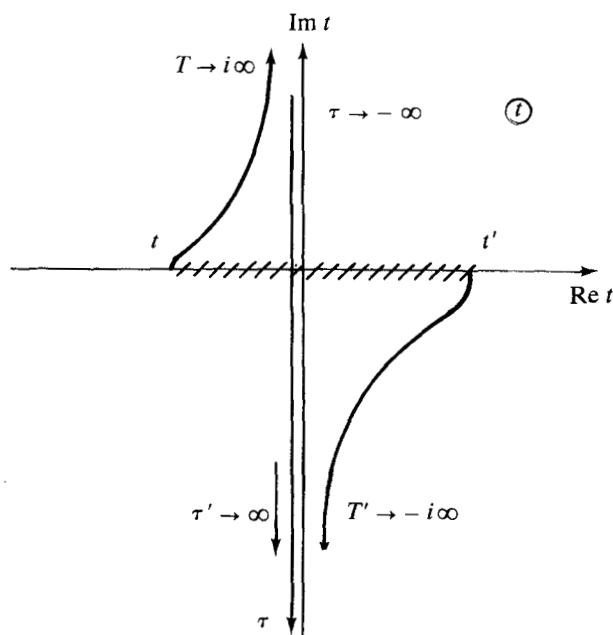


Figure 8.

### C.2. Analogie classique

Suivant le schéma exposé dans l'introduction, nous allons maintenant trouver un problème de mécanique statistique *classique* qui soit l'analogue du problème quantique. Effectuons le changement de notations :

$$t \rightarrow x ; \quad \tau \rightarrow -\frac{L}{2} ; \quad \tau' \rightarrow \frac{L}{2}$$

et considérons une quantité  $q(x)$  (un « champ ») aléatoire dans l'intervalle  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ , avec des conditions aux limites  $q\left(-\frac{L}{2}\right) = q\left(\frac{L}{2}\right)$ .

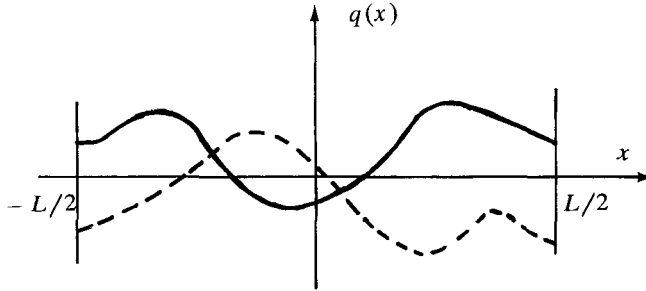


Figure 9. Deux configurations du champ  $q(x)$ .

On suppose que chaque configuration  $q(x)$  du champ est affectée du poids statistique :

$$\exp \left[ - \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 + V(q) - j(x) q(x) \right] dx \right].$$

La fonction de partition (= somme sur toutes les configurations du champ  $q(x)$ ) sera donnée par une formule analogue à (53) :

$$Z_E(j) = \int \mathcal{D}q \exp \left( - \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 + V(q) - j(x) q(x) \right] dx \right) \quad (58)$$

où la mesure d'intégration  $\mathcal{D}q$  est définie par une limite analogue à celle que nous venons de voir. Le changement de notations  $q(x) \rightarrow \varphi(x)$  permet bien évidemment de reconnaître dans (58) la fonction de

partition du modèle de Ginzburg-Landau à 1 dimension, avec une interaction  $V(\varphi)$ . Les corrélations  $\langle q(x_1) q(x_2) \rangle$  en l'absence de source  $j$  seront données par dérivation fonctionnelle de (41) :

$$\langle q(x_1) q(x_2) \rangle = \frac{1}{Z_E(0)} \frac{\delta^2 Z_E(j)}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \Big|_{j=0} \quad (59)$$

et seront reliées aux valeurs moyennes sur le vide de produits- $T$  du problème quantique correspondant si l'on fait tendre  $L$  vers l'infini. On pourra faire à nouveau la correspondance entre énergie libre par unité de longueur et énergie de l'état fondamental, inverse de la longueur de corrélation et saut d'énergie  $\Delta E$ .

### C.3. Oscillateur harmonique euclidien

Le prolongement euclidien de la fonctionnelle génératrice (50) de l'oscillateur harmonique est :

$$Z_E(j) = \mathcal{N} \times \int \mathcal{D}q \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - j(\tau'') q(\tau'') \right) d\tau'' \right). \quad (60)$$

L'intégrale sur  $q$  dans (60) est une intégrale gaussienne ; pour la calculer, nous avons besoin de l'inverse  $D_E(\tau)$  de l'opérateur :

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2$$

c'est-à-dire de la fonction de Green :

$$\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) D_E(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau'). \quad (61)$$

Naturellement  $D_E(\tau)$  n'est pas autre chose que la fonction de corrélation à deux points du modèle gaussien à 1 dimension. La solution de (61) est de la forme :

$$D_E(\tau) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau|} + A e^{\omega\tau} + B e^{-\omega\tau} \quad (62)$$

et le résultat de l'intégrale gaussienne (60) est :

$$Z(j) = \mathcal{N}' \exp \left( \frac{1}{2} \iint d\tau d\tau' j(\tau) D_E(\tau - \tau') j(\tau') \right). \quad (63)$$

Cependant si nous voulons que  $\lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} q(\tau) = \text{Cte}$ , il faut éliminer les solutions de l'équation homogène dans (62), et il reste :

$$D_E(\tau) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau|} . \quad (64)$$

Dans l'espace de Fourier,  $D_E(\nu)$ , où  $\nu$  est la variable conjuguée de  $\tau$ , vérifie :

$$(\nu^2 + \omega^2) D_E(\nu) = 1 \quad (65)$$

et la transformée de Fourier inverse donne bien (64) ; la fonction  $D_E(\tau)$  est le prolongement euclidien de  $D_F(t)$  ; en effet d'après (48) on vérifie :

$$D_F(-i\tau) = D_E(\tau) . \quad (66)$$

Notons enfin que d'après (53) et (63) :

$$D_E(\tau - \tau') = \langle 0 | T(Q(\tau) Q(\tau')) | 0 \rangle \quad (67)$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul direct (exercice 4).

Tous les résultats obtenus pour l'oscillateur harmonique vont se généraliser à la théorie quantique des champs (chapitres IX et X). La seule complication est qu'au lieu d'avoir une seule fréquence  $\omega$ , on devra intégrer sur des fréquences  $\omega(\mathbf{k})$  dépendant d'un moment  $\mathbf{k}$ .

## EXERCICES

1) (a) La fonction de partition du modèle d'Ising à une dimension est donnée (cf. I-B.2) par :

$$Z_N = e^{NA} 2^N [(\text{ch } B)^N + (\text{sh } B)^N]$$

pour un hamiltonien :

$$H = - \sum_{i=0}^{N-1} (A + B S_i S_{i+1})$$

et des conditions aux limites cycliques. La fonction de corrélation vaut (pour  $N \rightarrow \infty$ ) :

$$\langle S_l S_m \rangle = (\text{th } B)^{|l-m|} .$$

En utilisant ces résultats, vérifiez la correspondance entre l'énergie libre par spin et l'énergie de l'état fondamental. Que se passe-t-il si l'on divise l'intervalle  $(0, \tau)$  en  $2N$  intervalles au lieu de  $N$  ?

(b) Examiner le cas où l'on divise  $[0, \tau]$  en  $\tau/\varepsilon$  intervalles,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(c) Au lieu du hamiltonien (1) on prend :

$$H = -K[\sigma_1 \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta].$$

Comment les résultats du paragraphe A sont-ils modifiés ?

2) (a) Examiner la convergence de l'intégrale :

$$\int \frac{dp}{2\pi} \exp \left( i p q - i \varepsilon \frac{p^2}{2m} \right)$$

et montrer que le choix de la racine carrée dans (25) est bien correct (Suggestion : remplacer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon - i\eta$  et examiner la limite  $\eta \rightarrow 0$ ).

(b) Montrer que la fonction d'onde  $\psi(q', t')$  au temps  $t'$  peut s'écrire en fonction de celle au temps  $t$  à l'aide de :

$$\psi(q', t') = \int dq F(q', t'; q, t) \psi(q, t).$$

Calculer  $F(q', t'; q, t)$  lorsque le potentiel  $V(q) = 0$ .

(c) Montrer que  $F(q', t'; q, t)$  vérifie l'équation de Schrödinger :

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t'} - H(q') \right] F(q', t', q, t) = 0$$

avec la condition aux limites :

$$F(q', t; q, t) = \delta(q' - q).$$

(d) Montrer que l'élément de matrice densité (51) vérifie l'équation de diffusion :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau'} + H(q') \right] \rho(q', \tau'; q, \tau) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\rho(q', \tau; q, \tau) = \delta(q' - q).$$

(3) On se propose de démontrer les équations (45) et (48).

(a) Soit  $\bar{q}(t)$  une solution de l'équation du mouvement de l'oscillateur forcé :

$$\ddot{\bar{q}} + \omega^2 \bar{q} = j(t) \quad (1)$$

et  $\bar{q}_0(t)$  une solution de l'oscillateur libre. Il sera commode d'écrire pour  $t_i \leq t \leq t_f$  ( $T = t_f - t_i$ ) :

$$\bar{q}(t) = \bar{q}_0(t) + \int_{t_i}^{t_f} G(t, t') j(t') dt' \quad (2)$$

où  $G(t, t')$  est une fonction de Green de l'oscillateur harmonique vérifiant :

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t, t') = \delta(t - t') ; \quad G(t_i, t) = G(t_f, t) = 0 .$$

Montrer que l'on peut écrire :

$$G(t, t') = \theta(t - t') u(t) v(t') + \theta(t' - t) u(t') v(t)$$

où  $u$  et  $v$  sont solutions de l'équation homogène :

$$u(t) = \lambda \sin \omega (t_f - t)$$

$$v(t) = \lambda' \sin \omega (t - t_i)$$

$$\text{avec :} \quad \lambda \lambda' = - [\omega \sin(\omega T)]^{-1} .$$

Pourquoi les points  $\omega T = \pm \pi, \pm 2\pi$ , etc. sont-ils singuliers ?

(b) Soient les conditions aux limites :

$$q(t_i) = q_i ; \quad q(t_f) = q_f$$

et  $\bar{q}(t)$  une solution de l'équation du mouvement (1). On écrit :  $q(t) = \bar{q}(t) + h(t)$  avec  $h(t_f) = h(t_i) = 0$ . Montrer que l'action  $S(q, j)$  s'écrit :

$$S(q, j) = S(\bar{q}, j) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} (\dot{h}^2 - \omega^2 h^2)$$

le deuxième terme étant indépendant de  $j$ .

(c) Calcul de  $S(\bar{q}, j)$  : on remarque que  $\bar{q}_{0i} = q_i$ ,  $\bar{q}_{0f} = q_f$  et que :

$$\int_{t_i}^{t_f} L(\bar{q}) dt = \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\bar{q}} \Big|_{t_i}^{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} j(t) \bar{q}(t) dt .$$

En déduire  $S(q_f, q_i ; j)$ , c'est-à-dire l'exposant dans (45) (à un facteur  $i$  près).

(d) Effectuer l'intégrale sur  $q_i$  et  $q_f$  pour obtenir  $Z(j)$  (à un facteur constant près), en utilisant la fonction d'onde (46) de l'état fondamental (l'intégrale est une intégrale gaussienne double, dont la matrice  $A$  est :

$$A = \frac{-i\omega}{\sin \omega T} \begin{pmatrix} e^{i\omega T} & -1 \\ -1 & e^{i\omega T} \end{pmatrix}$$

et obtenir l'exposant dans (48).

(e) Reste à établir le coefficient devant l'exponentielle, c'est-à-dire en particulier le facteur  $(\omega/2\pi \sin \omega T)^{1/2}$  dans (45). Pour cela on discrétise l'intégrale :

$$I = \int \mathcal{D}h \exp \left( i \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} (\dot{h}^2 - \omega^2 h^2) \right)$$

et on remarque que si  $D_n$  est une matrice  $n \times n$  de la forme :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \dots \\ a & 1 & a & 0 & \dots \\ 0 & a & 1 & a & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

son déterminant  $\Delta_n$  vérifie :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - a^2 \Delta_{n-2}.$$

(f) En réalité le calcul n'est valable que si  $|\omega T| < \pi$ . Pour calculer le préfacteur dans le cas général, on remarque que :

$$\int dq'' F(q' t'; q'', t'') F(q'', t''; q, t) = F(q', t'; q, t)$$

et on prend  $t = 0$ ,  $t'' = \frac{\pi}{\omega}$ ,  $t' = \frac{\pi}{\omega}$ ,  $j = 0$ . En déduire le préfacteur :

$$e^{-\frac{i\pi}{2} \left( \frac{1}{2} + \text{Int} \left( \frac{\omega T}{\pi} \right) \right)} \left( \frac{\omega}{2\pi |\sin \omega T|} \right)^{1/2}$$

où  $\text{Int}(x)$  est la partie entière de  $x$ .

4) (a) Montrer par un calcul direct dans le cas de l'oscillateur harmonique que :

$$D_F(t - t') = \langle 0 | T(Q(t) Q(t')) | 0 \rangle.$$

On utilisera l'expression de  $Q$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} (a + a^\dagger)$$

et on montrera que :

$$a(t) = a e^{-i\omega t}; \quad a^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega t}.$$

Le calcul de la valeur moyenne sur l'état fondamental est alors trivial.

(b) Même question pour  $D_E(\tau - \tau')$ .

(c) Calculer  $(\tau = i\tau')$  :

$$D_\beta(t - t') = (\text{Tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{Tr } (e^{-\beta H} T(Q(t) Q(t')))$$

$$\bar{D}_\beta(\tau - \tau') = (\text{Tr } e^{-\beta H})^{-1} \text{Tr } (e^{-\beta H} T(Q(\tau) Q(\tau'))).$$

Montrer la périodicité de  $\bar{D}_\beta$  :

$$\bar{D}_\beta(\tau = 0, \tau') = \bar{D}_\beta(\tau = \beta, \tau').$$

Ces résultats sont faciles à généraliser à une théorie quantique des champs à température finie <sup>(3)</sup>.

## NOTES ET RÉFÉRENCES

L'exemple du paragraphe A est adapté de Shenker, section 1. On pourra aussi consulter Kogut, section III. Pour un exposé systématique des intégrales de chemin en mécanique quantique, voir R. P. Feynman et A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965). D'autres références utiles sont : Abers et Lee section II, B. De Witt, in *Cargèse Lectures in Theoretical Physics* (1980) et Amit, chapitre 3. Pour l'intégrale de chemin en mécanique statistique, voir R. P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Benjamin (1972), chapitre 3. Des indications intéressantes sur le traitement des mesures d'intégration  $\mathcal{Q}q$  sont données dans B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields*, Odense University Press (1981), chapitre 5.

<sup>(1)</sup> R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley (1965) Vol. III, chapitres 1 et 3. Traduction française : *Le cours de physique* de Feynman, InterEditions, 1979.

<sup>(2)</sup> L. D. Fadeev, « Introduction to Functional Methods » in *Methods in Field Theory*, Ecole des Houches (1975) section 3. Itzykson-Zuber, chapitre 9.

<sup>(3)</sup> L. Dolan et R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9**, 3320 (1974).



## CHAPITRE IX

# Quantification du champ de Klein-Gordon

La théorie quantique des champs est née de la nécessité de décrire des processus où des particules sont créées ou détruites (annihilées). Un exemple élémentaire est la transition radiative d'un atome dans un état excité  $A^*$ , qui revient à son état fondamental  $A$  en émettant un photon ( $\gamma$ ) :

$$A^* \rightarrow A + \gamma .$$

Le photon est créé au moment de la transition.

La désintégration  $\beta$  du neutron, où un neutron ( $n$ ) donne un proton ( $p$ ), un électron ( $e^-$ ) et un antineutrino ( $\bar{\nu}$ ) est un autre exemple :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} .$$

Dans ce cas également les particules finales sont créées au moment de la désintégration : un argument simple, fondé sur le principe d'incertitude, permet par exemple de montrer que l'électron émis dans la désintégration  $\beta$  du neutron ne peut pas préexister dans celui-ci. Les réactions où des particules sont créées ou détruites sont la règle en physique des particules élémentaires : par exemple un méson  $\pi^0$  peut être créé dans la collision de deux protons :

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 .$$

Les réactions où des particules sont créées ou détruites sont fondamentalement différentes des réactions chimiques, qui correspondent à des réarrangements d'atomes dans les molécules, et des réactions nucléaires, où des nucléons se réarrangent en donnant des noyaux différents : dans les deux cas il y a réarrangement, et non création ou

destruction. Toutefois la ligne de partage n'est pas aussi évidente, le processus de réarrangement pouvant être complexe, avec destruction ou création de particules — virtuelles — dans une étape intermédiaire. L'équation de Schrödinger, qui suppose le nombre de particules fixé, est incapable de décrire des processus de création et de destruction, mais dès les années 30, les fondateurs de la mécanique quantique ont compris comment la quantification d'un champ classique (appelée improprement pour des raisons historiques « seconde quantification ») pouvait décrire de tels processus. Considérons par exemple un champ électromagnétique dans une cavité ; ce champ peut être décomposé en modes normaux (propres), chaque mode étant en fait un oscillateur harmonique de fréquence  $\omega_k$ . La quantification du champ, qui consiste à imposer des relations de commutation entre le champ et son moment conjugué (cf. équation 15), permet de montrer que chacun de ces oscillateurs harmoniques devient un oscillateur quantifié, dont les niveaux d'énergie sont  $\frac{1}{2}\hbar\omega_k, \frac{3}{2}\hbar\omega_k, \dots, \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k, \dots$  ; l'état d'énergie  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k$  peut être interprété comme un état à  $n$  photons d'énergie  $\hbar\omega_k$ . Ainsi la quantification d'un champ classique permet-elle de décrire création et destruction des particules, les opérateurs de création et d'annihilation étant simplement les opérateurs bien connus  $a^\dagger$  et  $a$  de l'oscillateur harmonique quantique.

La *quantification canonique* consiste à postuler des relations de commutation à temps égaux entre le champ et son moment conjugué. En dehors des travaux initiaux de Feynman, cette méthode a été pratiquement la seule sur le marché jusqu'au début des années 70. Cependant cette méthode n'est pas sans problèmes (même si l'on omet les questions de renormalisation) :

(i) elle privilégie un référentiel particulier et l'invariance de Lorentz demande à être vérifiée. Dans certains cas (cf. (ii) ci-dessous) elle conduit à des termes explicitement non covariants dans une étape intermédiaire ;

(ii) elle devient très compliquée quand l'interaction dépend des dérivées du champ : la définition du moment conjugué dépend alors de l'interaction ;

(iii) elle est mal adaptée au cas des théories de jauge abéliennes (électromagnétisme) : il faut introduire une métrique indéfinie etc., et elle devient complètement inextricable dans le cas des théories de jauge non abéliennes.

A cause de ces difficultés (et de l'intérêt croissant pour les théories de jauge), une autre méthode de quantification, qui utilise les intégrales de chemin, est devenue très populaire. Cette méthode consiste à représen-

ter une amplitude de probabilité  $a$  pour passer d'une configuration initiale du champ à une configuration finale par une intégrale de chemin, en généralisant ce qui a été expliqué au chapitre VIII, paragraphe B ; symboliquement :

$$a = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

où  $\varphi$  est le champ et  $S$  l'action. Cette méthode a l'avantage d'être explicitement covariante et ne pose aucun problème particulier dans le cas d'interactions dérivatives. Elle est incomparablement plus simple que la quantification canonique dans le cas des théories de jauge, et elle sera utilisée au chapitre XI pour l'électrodynamique et au chapitre XIII pour les théories de jauge non abéliennes.

Cependant cette méthode n'échappe évidemment pas au problème des divergences ultraviolettes, et l'expression de  $a$  doit être régularisée en dimension 4. De plus il n'est pas évident que la théorie quantique définie par l'intégrale de chemin soit unitaire, ou, en d'autres termes, conserve la probabilité. Cette propriété doit être vérifiée explicitement.

Quoi qu'il en soit, la quantification canonique et la quantification par les intégrales de chemin sont, autant que nous le sachions à l'heure actuelle, équivalentes. Il sera donc possible de choisir la méthode la mieux adaptée à chaque cas particulier.

L'expérience déjà acquise dans le cas des phénomènes critiques permettrait d'éviter complètement le passage par la quantification canonique. Le lecteur déjà familier avec ce formalisme peut d'ailleurs sauter directement au chapitre suivant, paragraphe B. Cependant il m'a paru difficile de passer entièrement sous silence la quantification canonique pour les raisons suivantes :

- le concept de particule est très peu intuitif dans le formalisme des intégrales de chemin, alors qu'un opérateur de création est facile à visualiser,
- une bonne partie de la littérature, et en tout cas pratiquement toute la littérature d'avant 1970 utilise ce formalisme,
- le cas des fermions me semble plus facile à comprendre si on l'aborde d'abord par la quantification canonique.

Le plan du chapitre est le suivant : la quantification d'un champ sera introduite au paragraphe A sur l'exemple du champ des vibrations dans un solide, et on montrera comment une particule (dans ce cas le phonon) est associée à un champ quantifié. Le paragraphe B est consacré à la quantification du champ de Klein-Gordon, qui décrit des particules de spin zéro. Le couplage du champ de Klein-Gordon avec une source classique (paragraphe C), permettra de démontrer le théorème de Wick. Grâce à ce théorème, on pourra établir au chapitre

suivant l'équivalence des développements perturbatifs obtenus en quantification canonique et à l'aide des intégrales fonctionnelles.

Un mot enfin sur le système d'unités : j'utiliserai systématiquement (sauf avis contraire) un système d'unités tel que  $\hbar$  (constante de Planck/ $2\pi$ ) =  $c$  (vitesse de la lumière) = 1. Dans ce système masses, moments et énergies ont même dimension ; longueurs et temps ont pour dimension l'inverse d'une masse.

## A. QUANTIFICATION DES VIBRATIONS ÉLASTIQUES

### A.1. Système à $N$ degrés de liberté : lagrangien, hamiltonien, quantification

Commençons par l'étude d'un système mécanique à  $N$  degrés de liberté. En mécanique classique, un tel système est décrit par  $N$  coordonnées généralisées (ou variables dynamiques)  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ),  $N$  vitesses généralisées  $\dot{\varphi}_i = d\varphi_i/dt$ , et un lagrangien  $L$  dépendant de  $\varphi_i$ ,  $\dot{\varphi}_i$  et éventuellement du temps  $t$ . Les équations du mouvement sont obtenues en minimisant l'action  $S$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, t) dt \quad (1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\delta \varphi_i(t_1) = \delta \varphi_i(t_2) = 0. \quad (2)$$

La condition  $\delta S = 0$  ainsi que les conditions aux limites (2) donnent les équations du mouvement, ou équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0. \quad (3)$$

Rappelons que les équations du mouvement (3) sont inchangées si l'on ajoute au lagrangien une dérivée totale  $\frac{d}{dt} f(\varphi_i, t)$  des coordonnées et du temps.

Appliquons immédiatement ce formalisme à un modèle unidimensionnel des vibrations élastiques dans un solide : les atomes sont représentés par des masses ponctuelles  $m$ , disposées sur une ligne, et leur interaction par des ressorts identiques reliant ces atomes ;

$\varphi_i$  est le *déplacement* de l'atome n°  $i$  par rapport à sa position d'équilibre (figure 1) :

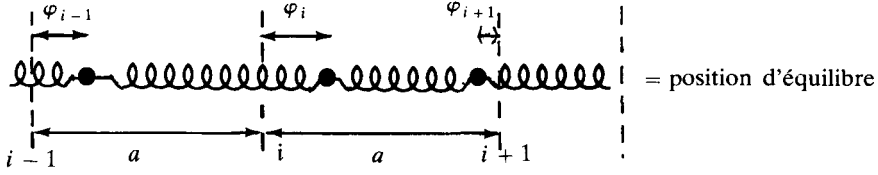


Figure 1. Une chaîne de ressorts.

Comme le lagrangien est égal à l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle, on obtient :

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\varphi}_i^2 - \frac{1}{2} K (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right\} \quad (4)$$

où  $K$  est la raideur des ressorts ; comme d'habitude, il sera commode d'utiliser des conditions aux limites périodiques :

$$\varphi_{i+N} \equiv \varphi_i .$$

L'équation du mouvement (3) devient :

$$m \ddot{\varphi}_i = K [(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})] ; \quad (5)$$

il est instructif de retrouver (5) par un raisonnement direct, en écrivant la force sur l'atome numéro  $i$ .

Le hamiltonien  $H$  s'obtient à partir du lagrangien par une transformation de Legendre ; on définit les moments conjugués  $p_i$  par :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (6)$$

et :

$$H = \sum_i p_i \dot{\varphi}_i - L . \quad (7)$$

Dans le cas du lagrangien (4) l'équation (7) devient :

$$H = \sum_i \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} K (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right\} . \quad (8)$$

Les règles de quantification d'un système mécanique à  $N$  degrés de liberté sont classiques : les coordonnées  $\varphi_i$  et les moments  $p_i$  deviennent

des opérateurs hermitiques agissant dans un espace de Hilbert, l'espace des états, et obéissant aux relations de commutation canoniques (RCC) :

$$\begin{cases} [\varphi_i(t), \varphi_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0 \\ [\varphi_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij} . \end{cases} \quad (9)$$

Les opérateurs  $\varphi_i$  et  $p_i$  ont été écrits dans la représentation de Heisenberg <sup>(1)</sup>, et les RCC (9) sont écrites à *temps égaux*. Remarquez aussi l'utilisation d'un système d'unités où  $\hbar = 1$ .

Il n'est pas difficile de diagonaliser le hamiltonien (8) après quantification ; cependant je préfère passer directement à la formulation continue, en renvoyant cette diagonalisation à l'exercice 1.

## A.2. Quantification de la ligne continue

Passons à la limite continue pour le système mécanique décrit par le lagrangien (4), en suivant une stratégie déjà utilisée dans la première partie. Soit  $a$  la distance entre atomes à l'équilibre ; on se propose de faire tendre  $a$  vers zéro, en maintenant fixe la longueur  $\bar{L} = Na$  du système : le nombre  $N$  de degrés de liberté devient donc infini. Dans cette limite :

$$\begin{aligned} \frac{m}{a} &\rightarrow \mu = \text{masse par unité de longueur} \\ Ka &\rightarrow Y = \text{module d'Young} . \end{aligned}$$

En effet l'allongement relatif d'un ressort est donné par :

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} = \frac{F}{Ka} = \frac{F}{Y}$$

d'après les définitions de la raideur d'un ressort et du module d'Young. Récrivons (4) sous la forme :

$$L = a \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\varphi}_i^2 - \frac{1}{2} Ka \left( \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right\} = a \sum_i L_i$$

qui fait apparaître une somme de Riemann, immédiatement transformée en intégrale :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\bar{L}} dx \left\{ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &= \int_0^{\bar{L}} dx \mathcal{L}(\varphi, \partial \varphi / \partial x) . \end{aligned} \quad (10)$$

L'intégrand  $\mathcal{L}$  dans (10) est la *densité de lagrangien*. Le lagrangien (10) décrit les vibrations longitudinales dans un milieu continu ou le long d'une corde vibrante. Il est important de remarquer que  $x$  n'est pas une variable dynamique (coordonnée généralisée) mais l'*indice* d'une coordonnée généralisée

$$\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(t, x) :$$

$i \rightarrow x$  dans la formulation continue ;  $\varphi(t, x)$  est appelé *champ des déplacements* (longitudinaux) dans le milieu (ou la corde), et c'est un exemple de *champ classique*. C'est le déplacement par rapport à sa position d'équilibre du point étiqueté  $x$  sur la corde.

La densité de lagrangien  $\mathcal{L}$  dans (10) ne dépend ni de  $\varphi$ , ni de  $t$ , mais en général  $\mathcal{L}$  sera aussi fonction de ces deux quantités. Les équations du mouvement s'obtiennent à l'aide du principe de moindre action  $\delta S = 0$  avec les conditions aux limites :

$$\delta \varphi(t_1, x) = \delta \varphi(t_2, x) = 0$$

$$\delta \varphi(t, 0) = \delta \varphi(t, \bar{L}) = 0 .$$

On admettra en général que  $x$  varie dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , et que le champ s'annule à l'infini, de telle sorte que la deuxième condition est automatique. On peut également utiliser des conditions aux limites périodiques.

Dans le cas général (toujours à 1 dimension d'espace) le principe de moindre action permet d'obtenir les équations du mouvement sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (11)$$

ce qui donne, dans le cas particulier du lagrangien (10), l'équation d'onde classique

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

où  $c_s = \sqrt{Y/\mu}$  est la vitesse du son. On vérifie que (12) est bien la limite continue de (5).

Pour déterminer le hamiltonien, on remarque que :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\varphi}_i} \rightarrow a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

et que par conséquent :

$$H = a \sum_i \left( \dot{\varphi}_i \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\varphi}_i} - L_i \right) \rightarrow \int_0^{\bar{L}} dx \left( \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right) . \quad (13)$$

Dans l'équation (13),  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$  est le *moment conjugué* du champ  $\phi$  :

$$\pi(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, x)} . \quad (14)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les RCC en formulation continue en suivant l'équation (9) et en remarquant que :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \delta_{ij} &= \delta(x - x') \\ \begin{cases} [\varphi(t, x), \varphi(t, x')] = [\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0 \\ [\varphi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta(x - x') . \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Il faut bien noter que les RCC sont écrites à *temps égaux* pour les opérateurs intervenant dans les commutateurs. Les RCC à temps égaux sont indépendantes de la dynamique, mais par exemple le commutateur :

$$[\varphi(t, x), \varphi(t', x')] : \quad t \neq t'$$

en dépend explicitement ; il ne peut d'ailleurs être calculé que dans des cas simples.

### A.3. Modes normaux

Le terme en  $(\partial \varphi / \partial x)^2$  du lagrangien (10), qui est une limite d'interactions entre plus proches voisins, s'écrit simplement en fonction des modes normaux. Ecrivons donc une décomposition de Fourier du champ (pour le moment classique) :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \varphi_k(t) e^{ikx} \quad (16)$$

où  $k$  prend des valeurs discrètes :  $k = 2\pi p / \bar{L}$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . L'équation d'onde (12) permet d'obtenir pour le coefficient de Fourier  $\varphi_k(t)$  l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + c_s^2 k^2 \varphi_k = 0 . \quad (17)$$

Comme prévu, les modes normaux obéissent à des équations différentielles découplées. La solution de (17) est une combinaison linéaire d'exponentielles  $e^{i\omega_k t}$  et  $e^{-i\omega_k t}$ , avec  $\omega_k = c_s |k|$  :

$$\varphi_k(t) = A_k e^{-i\omega_k t} + A_{-k}^* e^{i\omega_k t} . \quad (18)$$

La réalité de  $\varphi(t, x)$  :

$$\varphi(t, x) = \varphi^*(t, x)$$

impose en effet la condition :

$$\varphi_k(t) = \varphi_{-k}^*(t)$$

d'où la forme (18) de  $\varphi_k(t)$ . Les décompositions de Fourier du champ et de son moment conjugué se mettent finalement sous la forme :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k (A_k e^{-i\omega_k t + ikx} + A_k^* e^{i\omega_k t - ikx}) \quad (19.a)$$

$$\pi(t, x) = \dot{\varphi}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k (-i\omega_k A_k e^{-i\omega_k t + ikx} + i\omega_k A_k^* e^{i\omega_k t - ikx}). \quad (19.b)$$

Il est immédiat d'inverser ces décompositions de Fourier pour obtenir  $A_k$  et  $A_k^*$  :

$$A_k = \frac{i}{2\omega_k} \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^{\bar{L}} dx e^{i\omega_k t - ikx} (\pi(t, x) - i\omega_k \varphi(t, x)) \quad (20.a)$$

$$A_k^* = \frac{-i}{2\omega_k} \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^{\bar{L}} dx e^{-i\omega_k t + ikx} (\pi(t, x) + i\omega_k \varphi(t, x)). \quad (20.b)$$

Les décompositions (19) et (20) sont pour le moment celles d'un champ classique :  $\varphi(t, x)$  est un nombre réel, le champ des déplacements au point  $x$ .

La quantification des vibrations se fait à l'aide des RCC (15) :  $\varphi$  et  $\pi$  deviennent des opérateurs, et il en est de même pour  $A_k$  et  $A_k^*$  ; plus précisément, l'opérateur dans (20.b) est hermitique conjugué de celui dans (20.a) :  $A_k^* \rightarrow A_k^\dagger$ . Les RCC (15) permettent de calculer facilement les relations de commutation des  $A_k$  ; comme ces opérateurs sont indépendants du temps, le calcul se simplifie si l'on pose  $t = 0$  dans (20). On trouve (exercice 2) :

$$[A_k, A_{k'}] = 0 ; \quad [A_k, A_{k'}^\dagger] = (2\omega_k)^{-1} \delta_{kk'}.$$

Il est commode de faire un changement d'échelle sur  $A_k$  :  $a_k = \sqrt{2\omega_k} A_k$ , ce qui donne :

$$\boxed{[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k, k'}} \quad (21)$$

tandis que la décomposition de Fourier du champ devient :

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [a_k e^{-i\omega_k t + ikx} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikx}] \quad (22)$$

#### A.4. Phonons, espace de Fock

L'expression du hamiltonien va permettre de donner une interprétation physique fondamentale des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^\dagger$ . L'expression classique de  $H$  est (avec  $\mu = 1$ ) :

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{L}} dx \left( \pi^2(t, x) + c_s^2 \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (23)$$

On obtient l'opérateur  $H$  en remplaçant  $\varphi$  et  $\pi$  par les opérateurs correspondants, et son expression en fonction des modes normaux en remplaçant  $\varphi$  et  $\pi = \dot{\varphi}$  par leur décomposition de Fourier. Le résultat étant indépendant du temps, on peut faire le calcul à  $t = 0$  ; il est commode d'utiliser l'identité de Parseval :

$$\int_0^{\bar{L}} \varphi^2 dx = \sum_k \varphi_k \varphi_{-k}$$

et on obtient (exercice 3 — on rétablit  $\hbar$  jusqu'à la fin du paragraphe) :

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \sum_k \hbar \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (24)$$

La décomposition en modes normaux montre que  $H$  est une somme de hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants de fréquence  $\omega_k$ .

Soit  $\omega_k$  la fréquence d'un mode normal (ou fréquence propre). Chaque mode de vibration est quantifié comme un oscillateur harmonique indépendant. Rappelons que les vecteurs propres du hamiltonien de l'oscillateur harmonique simple sont de la forme  $(^2)$  :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle ; \quad H|n\rangle = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

où  $|0\rangle$  est le vecteur propre normalisé obéissant à  $a|0\rangle = 0$ . Les opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  sont appelés respectivement *opérateurs d'annihilation*

et de création (ils font passer de  $|n\rangle$  à  $|n-1\rangle$  et de  $|n\rangle$  à  $|n+1\rangle$  respectivement), et  $|0\rangle$  est appelé *l'état du vide*. Pour construire les états propres de  $H$  dans (24), il suffit de prendre le produit tensoriel des états propres des hamiltoniens correspondant à chacun des modes normaux ; par exemple l'état du vide sera :

$$|0\rangle = |0_{k_1} 0_{k_2} \dots 0_{k_i} \dots\rangle$$

et il sera annihilé par tous les  $a_{k_i}$  :

$$a_{k_i}|0\rangle = 0 \quad \forall k_i. \quad (25)$$

Un état propre de  $H$  sera caractérisé par les *nombre d'occupation*  $n_{k_1} \dots n_{k_i} \dots$  :

$$H|n_{k_1} \dots n_{k_i} \dots\rangle = \left[ \sum_i \hbar \omega_{k_i} \left( n_{k_i} + \frac{1}{2} \right) \right] |n_{k_1} \dots n_{k_i} \dots\rangle \quad (26)$$

avec :

$$|n_{k_1} \dots n_{k_i} \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{k_1}! \dots n_{k_i}!}} (a_{k_1}^\dagger)^{n_{k_1}} \dots (a_{k_i}^\dagger)^{n_{k_i}} |0\rangle. \quad (27)$$

L'opérateur  $a_k^\dagger$  appliqué sur un état propre de  $H$  d'énergie  $E$  donne un état d'énergie  $E + \hbar \omega_k$  : on peut interpréter ce résultat en déclarant que l'opérateur  $a_k^\dagger$  crée une particule d'énergie  $\hbar \omega_k$ , appelée *phonon*, ou quantum de vibration sonore. L'état  $|n_{k_1} \dots n_{k_i} \dots\rangle$  contient  $n_{k_1}$  phonons d'énergie  $\hbar \omega_{k_1}$ , ...,  $n_{k_i}$  phonons d'énergie  $\hbar \omega_{k_i}$  ... .

Nous voyons que la quantification d'un champ classique, le champ des vibrations longitudinales le long d'une corde, nous a conduits naturellement à la possibilité de décrire la création ou l'annihilation de particules. Cette interprétation est possible parce que l'énergie d'une onde quantifiée de fréquence  $\omega_k$  ne peut pas prendre toutes les valeurs possibles, contrairement au cas classique, mais seulement les valeurs  $\frac{1}{2} \hbar \omega_k, \frac{3}{2} \hbar \omega_k, \dots \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k \dots$ .

Ce que nous venons de faire dans le cas des vibrations sonores pourrait être répété (avec quelques complications) dans le cas du champ électromagnétique. Par exemple la quantification des modes normaux de vibration du champ électromagnétique dans une cavité conduit au concept de photon : l'énergie du champ électromagnétique associée à une vibration de fréquence  $\omega_k$  ne peut prendre que les valeurs  $\frac{1}{2} \hbar \omega_k, \frac{3}{2} \hbar \omega_k, \dots, \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k, \dots$ , correspondant à un état à  $0, 1, \dots, n, \dots$  photons.

Le lecteur attentif aura remarqué que j'ai passé allègrement sur un problème sérieux : l'énergie de tous les états définis en (27) est infinie. Par exemple dans le cas du vide :

$$\sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k = +\infty$$

puisque  $\omega_k = 2\pi k/\bar{L}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Cependant, à moins de détruire le cristal ou la corde vibrante, il est impossible d'observer autre chose que des *différences* d'énergie par rapport à l'état fondamental  $|0\rangle$ . On pourra prendre par convention l'énergie du vide égale à 0, ce qui revient à redéfinir  $H$  :

$$H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k ; \quad H|0\rangle = 0. \quad (28)$$

Afin que l'énergie du vide soit automatiquement nulle, on conviendra d'écrire tous les produits d'opérateurs sous forme *normale*, en mettant à gauche les opérateurs de création et à droite les opérateurs d'annihilation et en négligeant leur commutateur. Le produit normal de  $AB$  est noté :  $AB :$  et on aura par exemple :

$$\frac{1}{2} : a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger : = a_k^\dagger a_k.$$

La construction précédente des états propres de  $H$  nous a permis de trouver un espace de Hilbert et une forme explicite des opérateurs  $a_k$  et  $a_k^\dagger$  : en termes mathématiques, nous avons trouvé une *représentation* des RCC (21). En mécanique quantique ordinaire, la représentation usuelle des RCC  $[Q, P] = i$  est la suivante : l'espace de Hilbert est l'espace  $L^2$  des fonctions de carré sommable dans l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  et :

$$Q \rightarrow x ; \quad P \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}.$$

Un théorème de von Neumann affirme que cette représentation est unique à une équivalence unitaire près. Le même théorème est valable pour un système à un nombre fini de degrés de liberté. Cependant lorsque le nombre de degrés de liberté est infini, il existe d'autres représentations des RCC que celle que nous venons de construire. Celle-ci est appelée *représentation des RCC dans l'espace de Fock* et elle est *caractérisée* par l'existence d'un vide  $a_k|0\rangle = 0$ , avec une condition supplémentaire : le vide doit être un vecteur cyclique (cf. Streater-Wightman). Les autres représentations, non unitairement équivalentes à celle de Fock, semblent avoir peu d'utilité en physique.

## B. QUANTIFICATION DU CHAMP DE KLEIN-GORDON

### B.1. Equation d'onde, lagrangien

Considérons un champ (classique) qui soit un scalaire de Lorentz :  $\varphi'(x') = \varphi(x)$ , où  $x' = \Lambda x$ ,  $\Lambda$  étant une transformation de Lorentz (cf. appendice C). Ce champ doit obéir à une équation aux dérivées partielles analogue à (12). Le seul opérateur du second ordre invariant de Lorentz que l'on puisse former avec les dérivées  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$  est le d'Alembertien (rappelons que  $c = 1$  dans notre système d'unités) :

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (29)$$

La plus simple des équations du second ordre invariante de Lorentz que l'on puisse écrire est :

$$\boxed{(\square + m^2) \varphi(x) = 0}. \quad (30)$$

L'équation (30) est appelée équation du *champ de Klein-Gordon libre*. Soulignons que  $\varphi(x)$  doit être interprété pour le moment comme un champ classique, analogue au champ électromagnétique classique, et non comme la fonction d'onde d'une généralisation relativiste de l'équation de Schrödinger. Le paramètre  $m$  a les dimensions de l'inverse d'une longueur (ou d'un temps puisque  $c = 1$ ).

Si  $j(x)$  est une fonction scalaire, dont le comportement est prescrit à l'avance, c'est-à-dire une *source classique*, l'équation de Klein-Gordon couplée à une source classique est :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x).$$

Elle sera étudiée au paragraphe C. Enfin le membre de droite de (30) peut aussi être une fonction de  $\varphi$  (et même de ses dérivées)

$$(\square + m^2) \varphi(x) = -V'(\varphi).$$

On a alors affaire au champ de Klein-Gordon en interaction, qui sera traité au chapitre suivant.

L'équation (30) peut être obtenue par minimisation de l'action :

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi \right). \end{aligned} \quad (31.a)$$

La troisième forme pour  $S$  a été obtenue grâce à une intégration par parties. Cette intégration est justifiée dans les directions d'espace car on suppose toujours que les champs s'annulent suffisamment rapidement à l'infini. Dans la direction temporelle, elle a un caractère formel et sert à mettre en évidence le propagateur : cf. VIII-B.3. (Il ne faudrait pas conclure que (31.a) que  $\mathcal{L} = 0$  si  $\varphi$  obéit à (30).) Les équations du mouvement généralisent (11) :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (31.b)$$

## B.2. Décomposition de Fourier

Comme dans le cas du champ des vibrations dans un solide, il est naturel de chercher les modes normaux. On définit les transformées de Fourier par intégration dans tout l'espace, de façon à préserver l'invariance de Lorentz formelle, ou la *covariance* des équations :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \varphi(k) \quad (32.a)$$

$$\varphi(k) = \int d^4 x e^{ikx} \varphi(x) \quad (32.b)$$

où  $kx = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . La réalité de  $\varphi$  impose  $\varphi(k) = \varphi^*(-k)$ . D'autre part l'équation d'onde (30) appliquée sur (32.a) conduit à la relation :

$$(k^2 - m^2) \varphi(k) = 0.$$

Le coefficient de Fourier  $\varphi(k)$  n'est  $\neq 0$  que sur l'*hyperboloïde de masse*  $k^2 - m^2 = 0$ , et  $\varphi(k)$  doit donc être proportionnel à  $\delta(k^2 - m^2)$ . D'autre part l'hyperboloïde de masse  $k^2 - m^2 = 0$  se sépare en deux nappes, l'une ayant  $k^0 > 0$  et l'autre  $k^0 < 0$  ; ces deux nappes ne peuvent pas être reliées par une transformation du groupe de Lorentz propre. La relation :

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\delta(k^0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0 + \omega_{\mathbf{k}})) \quad (33)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} (> 0)$$

permet d'écrire  $\varphi(k)$  sous la forme :

$$\varphi(k) = 2\pi \delta(k^2 - m^2) [\theta(k^0) \varphi^{(+)}(\mathbf{k}) + \theta(-k^0) \varphi^{(-)}(\mathbf{k})] \quad (34)$$

où  $\theta(k^0)$  est la fonction de Heaviside :  $\theta(k^0) = 1$  si  $k^0 > 0$ ,  $\theta(k^0) = 0$  si  $k^0 < 0$ , et le facteur  $(2\pi)$  est conventionnel. En reportant (34) dans (32.a) on obtient :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\varphi^{(+)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \varphi^{(-)}(-\mathbf{k}) e^{ikx})$$

avec

$$kx = \omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}. \quad (35)$$

La notation  $k \cdot x$  est en fait ambiguë. Dans le cas d'une transformée de Fourier à quatre dimensions (par exemple (32) ou (48))  $kx = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , où  $k^0$  est de signe quelconque. Dans le cas d'une transformée de Fourier à trois dimensions (par exemple (40) ou (50)),  $kx = \omega_k x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , avec  $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$ . L'expression (35) est très semblable à (19.a) ; il y a trois différences :

- l'espace a trois dimensions et non une seule,
- $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$  au lieu de  $\omega_k = |k|$  : dans (19.a)  $m = 0$ ,
- le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  prend des valeurs continues au lieu de valeurs discrètes : on a intégré dans tout l'espace au lieu d'intégrer sur un intervalle fini. L'équation (35) s'écrit avec des notations évidentes :

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$$

où  $\varphi^{(+)}(\varphi^{(-)})$  est la partie à fréquences positives (négatives) : en mécanique quantique, l'évolution dans le temps d'un système d'énergie  $E$  est (par convention)  $\exp(-iEt/\hbar) = \exp(-i\omega t)$ .

La mesure d'intégration dans (35)

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \quad (36)$$

est invariante de Lorentz car elle peut aussi s'écrire sous forme manifestement invariante :

$$d\tilde{k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0).$$

Il est également possible de le vérifier directement (exercice 4).

On peut former des paquets d'ondes avec des solutions d'énergie positive (ou négative) ; par exemple :

$$f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ikx} f(\mathbf{k}). \quad (37)$$

Le produit scalaire de deux paquets d'ondes est donné par :

$$(g, f) = i \int d^3x g^* \vec{\partial}_0 f = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} g^*(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \quad (38)$$

où la notation  $\vec{\partial}_0$  est définie par :

$$f \vec{\partial}_0 g = f \frac{\partial g}{\partial x^0} - \frac{\partial f}{\partial x^0} g. \quad (39)$$

Ce produit scalaire est défini positif pour les solutions d'énergie  $> 0$  et conservé au cours du temps :  $\partial_0(g, f) = 0$  (exercice 5). Un paquet d'ondes d'énergie négative et un paquet d'ondes d'énergie positive sont orthogonaux (pour le produit scalaire (38)).

### B.3. Quantification canonique

Par analogie avec le paragraphe A, nous allons obtenir le champ de Klein-Gordon quantifié en remplaçant les coefficients de Fourier dans (35) par des opérateurs ; il faudra simplement prendre garde à la normalisation. L'équation (35) devient :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) \quad (40)$$

avec

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (41)$$

Il est immédiat de vérifier (exercice 6) que (40) et (41) conduisent bien aux relations de commutation canoniques :

$$\begin{aligned} [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x}')] &= [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = 0 \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (42)$$

Il est parfois commode de quantifier dans une boîte de volume fini  $V$ , en général un cube de côté  $\bar{L}$  :  $V = \bar{L}^3$ , de façon à travailler avec des exponentielles normalisables. La généralisation immédiate de (22) est :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}) \quad (43)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (44)$$

On notera la différence de normalisation dans (40)-(41) et (43)-(44). L'expression du hamiltonien obtenue par exemple à l'aide de (43)-(44) :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$$

montre que l'opérateur  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(a_{\mathbf{k}})$  crée (détruit) une particule de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  (donc de moment  $\mathbf{k}$ ) et d'énergie  $\omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ . Ces particules n'ont pas d'autre degré de liberté, et ce sont donc des particules scalaires, de spin zéro. Le champ de Klein-Gordon sera utilisé pour décrire des particules comme les mésons  $\pi$ . Ces particules obéissent par construction à la statistique de Bose : en effet la construction de l'espace de Fock assure la symétrie de la fonction d'onde dans l'échange de deux particules.

Comme j'utilise un système d'unités où  $\hbar = 1$ ,  $\mathbf{k}$  est un vecteur d'onde, mais aussi un moment ( $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ),  $\omega_{\mathbf{k}}$  est une fréquence, mais aussi une énergie ( $E_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}$ ). Le paramètre  $m$  a les dimensions d'une masse dans le système d'unités où  $\hbar = c = 1$  ( $\hbar/mc$  est une longueur) :  $m$  est la masse des particules décrites par le champ de Klein-Gordon quantifié :

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} (= \sqrt{\hbar^2 \mathbf{k}^2 c^2 + m^2 c^4}).$$

La quantification a été faite en choisissant un référentiel particulier, puisque les RCC sont écrites à temps égaux. Il serait nécessaire de vérifier qu'une théorie équivalente serait obtenue par quantification dans un autre référentiel. A cette fin, il faudrait construire les générateurs infinitésimaux des translations et des transformations de Lorentz, c'est-à-dire les opérateurs énergie-moment et moment angulaire. Cette construction est un peu ennuyeuse (nombreux indices) et se trouve dans tous les traités classiques. Comme nous utiliserons ultérieurement une méthode manifestement covariante, il n'est pas nécessaire de s'attarder sur ce point.

#### B.4. Commutateur à $t \neq t'$

Dans le cas du champ de Klein-Gordon *libre* (c'est-à-dire obéissant à (30)), il est possible de calculer les commutateurs des champs à  $t \neq t'$ . On a déjà souligné que ce calcul était en général impossible, car il dépend de la dynamique, alors que les RCC à *temps égaux* (42) en sont indépendantes.

Calculons donc  $[\varphi(x), \varphi(x')]$  en utilisant la représentation de Fourier (40) :

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(x')] &= \int d\tilde{k} d\tilde{k}' \{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ikx + ik'x'} + \\ &\quad + [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{ikx - ik'x'} \} \\ &= \int d\tilde{k} (e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}) \underset{\text{def.}}{=} i \Delta(x - x') \end{aligned}$$

Il est possible d'écrire une expression explicitement covariante pour  $\Delta(x - x')$  :

$$\begin{aligned} \Delta(x - x') &= -i [\varphi(x), \varphi(x')] = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \times \\ &\quad \times 2\pi \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) \quad (45) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0)$ . On déduit de l'expression (45) un certain nombre de propriétés de la fonction  $\Delta$  :

- (i)  $(\square + m^2) \Delta(x) = 0$
- (ii)  $\Delta(x) = \Delta(x^2, \varepsilon(x^0))$
- (ii')  $\Delta(\Lambda x) = \Delta(x)$  si  $\Lambda \in$  au groupe orthochrone
- (iii)  $\Delta(x) = -\Delta(-x)$
- (iv)  $\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x - x') = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$
- (v)  $\Delta(x) = 0$  si  $x^2 < 0$ .

La propriété (v) reflète ce que l'on appelle la *localité* de la théorie : les observables doivent commuter si elles sont calculées en des points d'espace-temps séparés par un intervalle de genre espace. En effet deux tels points ne peuvent pas être reliés par un signal quelconque, et les observations en ces deux points doivent être indépendantes. Le champ de Klein-Gordon étant hermitique est une observable, et le commutateur  $[\varphi(x), \varphi(x')]$  doit être nul pour  $(x - x')^2 < 0$ .

### B.5. Propagateur

Etudions maintenant les fonctions de Green de l'équation de Klein-Gordon, c'est-à-dire les solutions de l'équation :

$$(\square + m^2) G(x) = \delta^{(4)}(x) \quad (46)$$

ou, en passant dans l'espace de Fourier :

$$(-k^2 + m^2) G(k) = 1 \quad (47)$$

soit :

$$G(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{(k^0)^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2)}. \quad (48)$$

L'intégrale sur  $k^0$  présente des pôles à  $k^0 = \pm \omega_{\mathbf{k}}$ , ce qui permet de définir plusieurs fonctions de Green selon le contour utilisé pour éviter

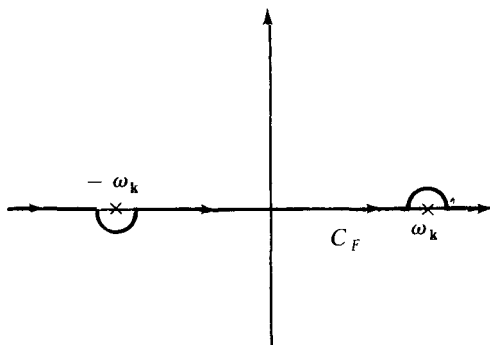


Figure 2. Le contour de Feynman.

ces pôles. Je me contenterai d'étudier la fonction de Green  $G_F$ , obtenue en utilisant le contour de Feynman  $C_F$  de la figure 2 en renvoyant l'étude d'autres fonctions de Green à l'exercice 7. Remarquons que l'on peut aussi écrire :

$$G_F = - \int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (49)$$

où le remplacement  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , assure le déplacement du pôle à  $k^0 = \omega_{\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}})$  dans le 1/2 plan  $\text{Im } k^0 < 0$  ( $\text{Im } k^0 > 0$ ). Calculons maintenant  $G_F$  par la méthode des résidus. Pour  $x^0 > 0$ , on peut refermer le contour d'intégration par un demi-cercle dans le demi-plan  $\text{Im } k^0 < 0$ , et seul le pôle à  $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} - i\varepsilon$  donne une contribution :

$$G_F(x)|_{x^0 > 0} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ikx} = i \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle. \quad (50.a)$$

Pour  $x^0 < 0$ , on referme le contour d'intégration par un demi-cercle

dans le demi-plan  $\text{Im } k^0 > 0$ , et seul le pôle à  $k^0 = -\omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon$  donne une contribution :

$$G_F(x)|_{x^0 < 0} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} e^{ikx} = i \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle . \quad (50.b)$$

Les équations (50) peuvent être résumées par :

$$G_F(x - x') = i \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(x')) | 0 \rangle \quad (51)$$

où le *produit-T* de deux champs est défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} T(\varphi(x) \varphi(x')) &= \varphi(x) \varphi(x') & x^0 > x'^0 \\ T(\varphi(x) \varphi(x')) &= \varphi(x') \varphi(x) & x^0 < x'^0 \end{aligned}} . \quad (52)$$

On pourrait être légitimement inquiet de la covariance d'une telle définition : en effet l'ordre des temps n'est pas invariant dans une transformation de Lorentz. Cependant l'ordre des temps ne peut être modifié que si  $x$  et  $x'$  sont séparés par un intervalle du genre espace :  $(x - x')^2 < 0$ , et dans ce cas les champs commutent, grâce à la propriété de localité.

Afin d'éviter des facteurs  $i$  dans les formules, je définirai le *propagateur de Feynman*  $\Delta_F(x - x')$  par :

$$\Delta_F(x - x') = \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(x')) | 0 \rangle \quad (53.a)$$

$$\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (53.b)$$

La convention (53) n'est pas habituelle. La plupart des auteurs utilisent la définition  $\Delta_F = -i \langle 0 | T(\varphi \varphi) | 0 \rangle$ . Le propagateur  $\Delta_F$  est égal à  $-iG_F$ , et vérifie donc l'équation :

$$(\square + m^2) \Delta_F = -i \delta^{(4)}(x) . \quad (54)$$

Il est instructif de vérifier directement cette équation à partir de la définition (53.a) de  $\Delta_F$  (exercice 8).

### B.6. Singularités sur le cône de lumière

Les « fonctions »  $\Delta(x)$ ,  $\Delta_F(x)$  etc. ne sont pas à proprement parler des fonctions, mais des distributions, qui sont singulières sur le cône de

lumière  $x^2 = 0$ . Afin de les évaluer dans un cas simple, je me limiterai à  $m = 0$  ; les singularités obtenues dans ce cas sont d'ailleurs les plus fortes. La notation standard lorsque  $m = 0$  est :

$$D_i = \Delta_i(m = 0) .$$

Commençons par calculer  $D_+(x)$  :

$$D_+(x) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} e^{-i(kx^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

avec :

$$k = \|\mathbf{k}\| (= \omega_{\mathbf{k}}) ; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \theta .$$

L'intégration sur  $\cos \theta$  donne :

$$D_+(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{-ik(x^0 - r)} - e^{-ik(x^0 + r)}) .$$

L'intégrale sur  $k$  doit être interprétée au sens des distributions : c'est une transformée de Fourier de  $\theta(k)$  ; pour rendre l'intégrale convergente, on remplace  $(x^0 - r)$  par  $(x^0 - r - i\varepsilon)$  :

$$\int_0^\infty dk e^{-ik(x^0 - r - i\varepsilon)} = \frac{-i}{x_0 - r - i\varepsilon} = -iP \frac{1}{x^0 - r} + \pi \delta(x^0 - r)$$

où  $P$  désigne une partie principale. Cette égalité permet de terminer le calcul de  $D_+(x)(x^2 = (x^0)^2 - r^2)$  :

$$D_+(x) = \frac{-1}{4\pi^2} P \left( \frac{1}{x^2} \right) - \frac{i}{4\pi} \delta(x^2) \varepsilon(x^0) . \quad (55)$$

Définissant  $D_-(x)$  par :

$$D_-(x) = \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(-x) \varphi(0) | 0 \rangle = D_+(-x)$$

on obtient immédiatement les fonctions  $D(x)$  et  $D_F(x)$  :

$$D(x) = -i(D_+(x) - D_-(x)) = \frac{-1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2) \quad (56)$$

$$D_F(x) = \theta(x^0) D_+(x) + \theta(-x^0) D_-(x)$$

soit :

$$D_F(x) = \frac{-1}{4\pi^2} P \frac{1}{x^2} - \frac{i}{4\pi} \delta(x^2) . \quad (57)$$

Lorsque  $m \neq 0$ , on peut obtenir l'expression suivante pour  $\Delta_F(x)$  <sup>(3)</sup> :

$$\Delta_F(x) = \frac{-1}{4\pi^2} P\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{i}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{im^2}{16\pi} \theta(x^2) + \\ + \frac{m^2}{8\pi^2} \ln \frac{m\sqrt{|x^2|}}{2} + O(\sqrt{|x^2|} \ln |x^2|). \quad (58)$$

L'existence de singularités sur le cône de lumière montre qu'il n'est pas possible de multiplier sans précautions deux champs au même point. En réalité, les opérateurs de champ doivent être considérés comme des « distributions à valeur opérateur » ; les valeurs moyennes sur le vide de produits de champs sont des distributions ordinaires. Un programme reposant sur cette observation a été développé principalement par Wightman et ses collaborateurs : c'est la théorie axiomatique des champs. Cette théorie axiomatique a permis de démontrer rigoureusement les théorèmes PCT et spin-statistique et d'établir des bornes asymptotiques sur les amplitudes de diffusion (avec des hypothèses supplémentaires). Mais ce programme n'a pu être poursuivi, en raison de son inadaptation aux théories de jauge.

## C. COUPLAGE À UNE SOURCE CLASSIQUE THÉORÈME DE WICK

### C.1. Opérateur d'évolution. Equation de Dyson

En mécanique quantique, l'opérateur d'évolution  $U(t, t_0)$  relie le vecteur d'état de la représentation de Schrödinger au temps  $t$  au vecteur d'état au temps  $t_0$  :

$$|\psi_s(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle. \quad (59)$$

Il vérifie l'équation différentielle, équivalente à l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad (60)$$

ainsi que la propriété de groupe :

$$U(t, t_1) U(t_1, t_0) = U(t, t_0) \quad (61)$$

et la condition d'unitarité :

$$U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t). \quad (62)$$

En règle générale on ne sait pas calculer exactement l'opérateur d'évolution, mais il arrive souvent que l'on puisse trouver une décomposition de  $H$  :

$$H = H_0 + H_1 \quad (63)$$

telle que l'on sache calculer l'opérateur d'évolution  $U_0(t, t_0)$  correspondant à  $H_0$  ; en pratique cela veut dire que l'on sait diagonaliser  $H_0$ . On traitera alors  $H_1$  comme une perturbation :  $H_0$  est en général appelé « hamiltonien libre » et  $H_1$  « hamiltonien d'interaction ». Pour le traitement perturbatif, il est commode d'écrire :

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0) U_I(t, t_0) \quad (64)$$

et on montre facilement que  $U_I$  vérifie l'équation différentielle :

$$i \frac{dU_I}{dt} = H_I(t) U_I(t, t_0) \quad (65.a)$$

$$H_I(t) = U_0^{-1}(t, t_0) H_1(t) U_0(t, t_0). \quad (65.b)$$

$H_I$  est le hamiltonien  $H_1$  écrit dans la « *représentation interaction* ». L'équation différentielle (65) peut aussi s'écrire sous forme d'une équation intégrale qui incorpore automatiquement la condition initiale  $U_I(t_0, t_0) = 1$  :

$$U_I(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') U_I(t', t_0) dt'. \quad (66)$$

Remarquez que l'on ne *peut pas* écrire en général

$$U_I(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} \quad (67)$$

car le commutateur  $[H_I(t'), H_I(t'')]$  est en général non nul, et que  $\exp(A + B) \neq \exp A \exp B$  lorsque  $[A, B] \neq 0$  (sauf cas particulier). Cependant l'équation (65) peut être résolue par itération :

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (68)$$

L'équation (68), ou équation de Dyson, s'écrit formellement :

$$U_I(t, t_0) = T \left( e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} \right)$$

(69)

où le produit- $T$  indique que l'on doit utiliser (68) dans le développement de l'exponentielle. L'équation (68) est bien un développement perturbatif en puissances de  $H_1$  : si  $H_1$  contient en facteur une constante de couplage  $g$ , le terme d'ordre  $n$  de (68) est proportionnel à  $g^n$ . Le produit- $T$  dans (69) corrige l'expression incorrecte (67) et assure que  $U_I(t, t_0)$  obéit à la loi de groupe (61) et vérifie la relation d'unitarité (62).

## C.2. Oscillateur harmonique couplé à une source classique

Avant d'aborder le couplage du champ de Klein-Gordon à une source classique, étudions le couplage d'un oscillateur harmonique simple à une source classique, ce qui permettra d'introduire sur un exemple élémentaire les notions d'états entrants, ou états « in », d'états sortants, ou états « out », et de matrice  $S$ . Le hamiltonien choisi est (dans la représentation de Schrödinger) :

$$H = \omega a^\dagger a - a j^*(t) - a^\dagger j(t) = H_0 + H_1 \quad (70)$$

où  $H_0 = \omega a^\dagger a$  est le hamiltonien de l'oscillateur harmonique simple. Si la source  $j(t)$  est réelle,  $H_1 = -\sqrt{2\omega} jx$ , et  $\sqrt{2\omega} j(t)$  représente simplement une force extérieure appliquée à l'oscillateur harmonique : le problème est donc celui d'un oscillateur forcé quantique. Lorsque  $j$  est complexe, il y a également un terme de couplage à la vitesse. Afin de simplifier les équations, on choisira pour temps de référence  $t_0 = 0$  et on posera  $U(t, 0) = U(t)$ . Pour calculer  $a_I(t)$  (cf. (65.b)) :

$$a_I(t) = e^{iH_0 t} a e^{-iH_0 t}$$

on utilise :

$$\frac{da_I}{dt} = i[H_0, a_I(t)] = -i\omega a_I(t)$$

soit :

$$a_I(t) = e^{-i\omega t} a ; \quad a_I^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger \quad (71)$$

et le hamiltonien  $H_I(t)$  est :

$$H_I(t) = -[a e^{-i\omega t} j^*(t) + a^\dagger e^{i\omega t} j(t)] . \quad (72)$$

La solution de l'équation d'évolution (65.a) est « presque » donnée par (67), car si  $H_I(t)$  et  $H_I(t')$  ne commutent pas, leur commutateur est néanmoins un nombre :

$$[H_I(t), H_I(t')] = e^{-i\omega(t-t')} j^*(t) j(t') - e^{-i\omega(t'-t)} j(t) j^*(t') .$$

Cette propriété permet de deviner la solution de l'équation d'évolution (cf. exercice 10)

$$U_I(t) = \exp \left( ia^\dagger \int_0^t j(t') e^{i\omega t'} dt' \right) \exp \left( ia \int_0^t j^*(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) \times \\ \times \exp \left( - \iint_0^t dt' dt'' \theta(t' - t'') j^*(t') e^{-i\omega(t' - t'')} j(t'') \right). \quad (73)$$

On vérifie par un calcul direct que (73) obéit bien à l'équation d'évolution (65.a). Il est possible d'écrire cette solution sous d'autres formes (cf. exercice 10) ; on remarquera que dans (73)  $U_I(t)$  est écrit sous forme normale : tous les  $a^\dagger$  sont à gauche de tous les  $a$ .

Supposons que la source  $j(t)$  est nulle en dehors d'un intervalle  $[T_1, T_2]$ , avec  $T_1 > 0$  (figure 3) pour simplifier le raisonnement suivant, et étudions l'opérateur d'annihilation dans la représentation de Heisenberg :

$$a_H(t) = U^{-1}(t) a U(t) = e^{-i\omega t} U_I^{-1}(t) a U_I(t).$$

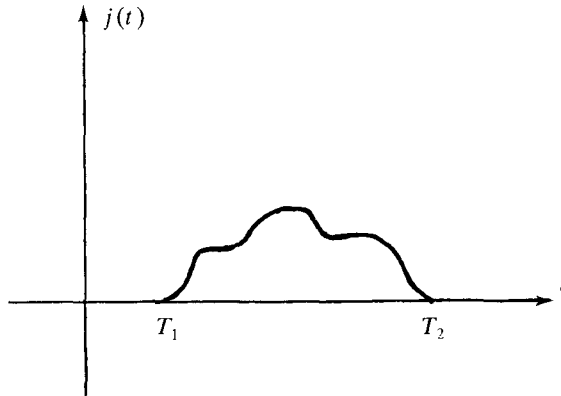


Figure 3. La source  $j(t)$ .

En utilisant (73) et l'identité :

$$e^{-iaa^\dagger} a e^{iaa^\dagger} = a + i\alpha$$

on obtient :

$$a_H(t) = e^{-i\omega t} \left[ a + i \int_0^t j(t') e^{i\omega t'} dt' \right]. \quad (74)$$

Pour  $t < T_1$ ,  $a_H(t)$  coïncide avec  $a(t) = a e^{-i\omega t}$  que nous appellerons  $a_{\text{in}}(t)$  :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} a_H(t) = a_{\text{in}}(t)$$

tandis que pour  $t \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a_H(t) = e^{-i\omega t} \left( a + i \int_{-\infty}^{\infty} j(t') e^{i\omega t'} dt' \right)$$

soit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a_H(t) = e^{-i\omega t} (a + ij(\omega)) = a_{\text{out}}(t).$$

Les opérateurs  $a_{\text{in}}(t)$  et  $a_{\text{out}}(t)$  ont en facteur  $e^{-i\omega t}$ , et on peut définir des opérateurs indépendants du temps  $a_{\text{in}}$  et  $a_{\text{out}}$  :

$$a_{\text{in}} = a ; \quad a_{\text{out}} = a + ij(\omega). \quad (75)$$

La relation entre  $a_{\text{in}}$  et  $a_{\text{out}}$  s'écrit également :

$$a_{\text{out}} = S^{-1} a_{\text{in}} S \quad (76)$$

où l'opérateur unitaire  $S$  (en général appelé *matrice*  $S$ , à ne pas confondre avec l'action) vaut :

$$S = U_I(\infty, -\infty) ; \quad S^\dagger = S^{-1}. \quad (77)$$

On remarquera qu'à la limite  $t \rightarrow \infty$ , seule intervient la composante de Fourier  $j(\omega)$  de la source  $j(t)$  : la limite  $t \rightarrow \infty$  « projette sur la couche d'énergie ». Examinons brièvement les probabilités de transition ; partant d'un état  $|n_{\text{in}}\rangle$  à  $t = t_1$  ( $t_1 < T_1$ )

$$|n_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_{\text{in}}^\dagger)^n |0_{\text{in}}\rangle$$

on se propose de calculer la probabilité d'observer au temps  $t = t_2$  ( $t_2 > T_2$ ) un état  $|m_{\text{in}}\rangle$ . L'amplitude de probabilité est :

$$\begin{aligned} \langle m_{\text{in}} | U(t_2, t_1) | n_{\text{in}} \rangle &= \langle m_{\text{in}} | U_0(t_2, t_1) U_I(t_2, t_1) | n_{\text{in}} \rangle \\ &= e^{-iE_m(t_2 - t_1)} \langle m_{\text{in}} | S | n_{\text{in}} \rangle \\ &= e^{-iE_m(t_2 - t_1)} \langle m_{\text{out}} | n_{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (78)$$

Le facteur de phase dans (78) n'affecte évidemment pas la probabilité de

transition. Il est facile de calculer  $\langle m_{\text{out}} | n_{\text{in}} \rangle$  lorsque  $n = 0$  ; en effet (supprimant l'indice « in » pour alléger les notations) on peut évaluer :

$$\langle m | e^{i a a^\dagger} | 0 \rangle = \frac{i^m \alpha^m}{\sqrt{m!}}$$

$$\begin{aligned} \int dt' dt'' \theta(t' - t'') j^*(t') e^{-i\omega(t' - t'')} j(t'') = \\ = -\frac{1}{2i\pi} P \int \frac{dE}{E} j^*(\omega + E) j(\omega + E) + \frac{1}{2} |j(\omega)|^2 = i\varphi + \frac{1}{2} |j(\omega)|^2 \end{aligned}$$

(pour obtenir la dernière équation, il suffit d'utiliser la représentation intégrale de la fonction  $\theta$ ), ce qui donne pour l'amplitude de probabilité :

$$\langle m | U(t_2, t_1) | 0 \rangle = e^{-iE_m(t_2 - t_1)} e^{-i\varphi} \frac{i^m (j(\omega))^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{1}{2} |j(\omega)|^2}$$

et pour la probabilité de transition  $P_m$  :

$$P_m = |\langle m | U(t_2, t_1) | 0 \rangle|^2 = \frac{(|j(\omega)|^2)^m e^{-|j(\omega)|^2}}{m!}. \quad (79)$$

La loi de probabilité du nombre d'occupation  $m$  est une *loi de Poisson* de valeur moyenne  $|j(\omega)|^2 = \bar{m}$ . Ceci est une propriété générale du rayonnement d'une source classique, lorsque l'on part de l'état fondamental à  $t = -\infty$ . L'état final est un *état cohérent* (exercice 11) égal à une phase près à :

$$e^{-\frac{1}{2} |j(\omega)|^2} e^{i a^\dagger j(\omega)} | 0 \rangle \quad (80)$$

et on vérifie que cet état est de norme 1  $\left( \sum_m P_m = 1 \right)$  : la probabilité est conservée, ce qui est évidemment une conséquence immédiate de l'unitarité de la matrice  $S$ .

### C.3. Champ de Klein-Gordon couplé à une source classique

Passons maintenant au problème d'un champ de Klein-Gordon couplé à une source classique  $j(x)$  ; la densité de lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + j\varphi$$

conduisant à l'équation du mouvement :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x) \quad (81)$$

et au hamiltonien d'interaction :

$$H_1 = - \int d^3x j(x) \varphi(x)$$

où le champ  $\varphi(x)$  est écrit dans la représentation de Heisenberg. La source  $j(x)$  est supposée nulle pour  $t < T_1$ , et pour  $t < T_1$  le champ  $\varphi(t, \mathbf{x})$  est un champ libre que nous noterons  $\varphi_{\text{in}}(x)$  :

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) \quad t < T_1.$$

Partons d'un temps  $t_1 < T_1$  et examinons l'évolution au cours du temps de  $\varphi(t, \mathbf{x})$  :

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{x}) &= U^{-1}(t, t_1) \varphi(t_1, \mathbf{x}) U(t, t_1) \\ &= U_I^{-1}(t, t_1) U_0^{-1}(t, t_1) \varphi_{\text{in}}(t_1, \mathbf{x}) U_0(t, t_1) U_I(t, t_1) \end{aligned}$$

soit :

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = U_I^{-1}(t, t_1) \varphi_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) U_I(t, t_1) \quad (82)$$

étant donné que l'opérateur d'évolution du champ libre  $\varphi_{\text{in}}$  est  $U_0(t, t_1)$ . Dans la représentation interaction, le hamiltonien  $H_1$  devient :

$$H_I(t) = - \int d^3x j(x) \varphi_{\text{in}}(x). \quad (83)$$

Comme  $\varphi_{\text{in}}(x)$  est un champ libre, on peut utiliser la décomposition de Fourier (40). Définissant la transformée de Fourier à 3 dimensions de  $j(t, \mathbf{x})$  par :

$$j(t, \mathbf{k}) = j^*(t, -\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} j(t, \mathbf{x})$$

on récrit (83) sous forme d'une somme de composantes de Fourier :

$$\begin{aligned} H_I(t) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\text{in}}(\mathbf{k}) j^*(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \\ &\quad + a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{k}) j(t, \mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}). \end{aligned} \quad (84)$$

Le hamiltonien (84) est une somme de hamiltoniens du type (72). On peut donc écrire l'expression de l'opérateur d'évolution  $U_I(t)$  par analogie avec (73). Nous aurons seulement besoin de l'expression de la matrice  $S = U_I(\infty, -\infty)$ , mais nous pourrions aussi bien écrire l'expression de  $U_I(t_2, t_1)$ . Remarquons que :

$$\int d\tilde{k} a_{\text{in}}(\mathbf{k}) j^*(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} = \int d^3x \varphi_{\text{in}}^{(+)}(x) j(x)$$

et que le terme d'intégrale double dans (73) devient :

$$\begin{aligned}
 & \int dt dt' d\tilde{k} \theta(t-t') j^*(t, \mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')} j(t', \mathbf{k}) = \\
 & = \int d^4x d^4x' j(x) j(x') \int d\tilde{k} \theta(t-t') e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
 & = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) j(x') \int d\tilde{k} \times \\
 & \quad \times [\theta(t-t') e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + \theta(t'-t) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t'-t) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}] \\
 & = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) \Delta_F(x-x') j(x').
 \end{aligned}$$

Rassemblant ces résultats, on peut mettre la matrice  $S$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
 S &= T \left( \exp \left( i \int d^4x j(x) \varphi_{\text{in}}(x) \right) \right) \\
 &= : \exp \left( i \int d^4x j(x) \varphi_{\text{in}}(x) \right) : \times \\
 & \quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) \Delta_F(x-x') j(x') \right)
 \end{aligned} \tag{85}$$

Cette expression est importante, car elle donne l'expression de la matrice  $S$  dans le cas du couplage à une source classique, ce qui est déjà en soi un résultat intéressant. Mais l'intérêt principal de la formule (85) est de conduire à une démonstration très simple du théorème de Wick.

#### C.4. Théorème de Wick

Le théorème de Wick s'obtient tout simplement en développant les exponentielles dans les deux membres de (85) et en identifiant les puissances de  $j(x)$ . Toutefois il faut faire un peu attention : les termes du développement de

$$T \left( e^{i \int d^4x j(x) \varphi_{\text{in}}(x)} \right)$$

par exemple :

$$\frac{(i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 j(x_1) j(x_2) T(\varphi_{\text{in}}(x_1) \varphi_{\text{in}}(x_2))$$

sont symétriques dans l'échange des arguments de  $\varphi_{\text{in}}$  et de  $j$ . Il faudra donc symétriser aussi le développement du membre de droite de (85) : en effet si l'on a :

$$\int dx_1 dx_2 j(x_1) j(x_2) T(x_1, x_2) = \int dx_1 dx_2 j(x_1) j(x_2) F(x_1, x_2)$$

avec  $T(x_1, x_2) = T(x_2, x_1)$ , on peut simplement conclure que :

$$T(x_1, x_2) = F_S(x_1, x_2)$$

où  $F_S(x_1, x_2)$  est la partie symétrique de  $F$  dans l'échange de  $(x_1, x_2)$  ; en effet l'intégrale de la partie antisymétrique  $F_A(x_1, x_2)$  est automatiquement nulle.

Examinons un terme du développement du membre de droite de (85) en  $(j(x))^p (j(x))^{2m}$  ; il est affecté d'un coefficient :

$$i^p \left( -\frac{1}{2} \right)^m \frac{1}{p! m!}.$$

Il faut symétriser le coefficient de  $(j(x))^p (j(x))^{2m}$  par rapport à tous ses indices ; le nombre de termes indépendants est :

$$\frac{(2m+p)!}{p! m! 2^m}$$

et le coefficient d'un terme en  $(j(x))^{2m+p}$  dans le membre de droite de (85) sera affecté d'un coefficient :

$$i^p \left( -\frac{1}{2} \right)^m \frac{1}{m! p!} \frac{2^m p! m!}{(2m+p)!} = \frac{(i)^{2m+p}}{(2m+p)!}.$$

Ce coefficient est exactement celui trouvé dans le développement du produit- $T$ . Dans le cas où  $(2m+p) = 2n$  est pair, on obtient par identification (en omettant l'indice « in ») :

$$\begin{aligned} T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n})) = & : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) : + \\ & + \{ : \overline{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} \varphi(x_3) \dots \varphi(x_{2n}) : + \text{Perm.} \} \\ & + \{ : \overline{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} \overline{\varphi(x_3) \varphi(x_4)} \varphi(x_5) \dots \varphi(x_{2n}) : + \text{Perm.} \} \\ & + \{ \dots \} + \dots + \{ \dots \} \\ & + \{ \overline{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} \dots \overline{\varphi(x_{2n-1}) \varphi(x_{2n})} + \text{Perm.} \} \end{aligned} \quad (86)$$

où la « contraction »  $\overline{\varphi(x_1)} \varphi(x_2)$  désigne :

$$\overline{\varphi(x_1)} \varphi(x_2) = \langle 0 | T(\varphi_{\text{in}}(x_1) \varphi_{\text{in}}(x_2)) | 0 \rangle = \Delta_F(x_1 - x_2) .$$

Par exemple pour  $2n = 4$ , l'équation (86) devient :

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) = & : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + \{ : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + \\ & + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : \\ & + : \varphi_1 \overline{\varphi_2 \varphi_3} \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \overline{\varphi_3 \varphi_4} : \} + \{ \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} \\ & + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} \} . \end{aligned} \quad (87)$$

Remarquez que  $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$  par exemple peut être extrait du produit normal car c'est un nombre.

Lorsque certains produits sont déjà sous forme normale, on peut également appliquer le théorème de Wick, à condition d'omettre toutes les contractions de termes qui se trouvaient initialement à l'intérieur d'un produit normal. Donnons un exemple simple :

$$\begin{aligned} T(: \varphi_1 \varphi_2 : : \varphi_3 \varphi_4 :) = & : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + \{ : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + \\ & + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : + : \overline{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \varphi_4 : \} \\ & + \{ \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} \} . \end{aligned} \quad (88)$$

Enfin prenons la valeur moyenne sur le vide des deux membres de l'équation (86). A cause du produit normal, seul le dernier terme est différent de zéro et :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n})) | 0 \rangle = \\ = \Delta_F(x_1 - x_2) \dots \Delta_F(x_{2n-1} - x_{2n}) + \text{Perm.} \end{aligned} \quad (89)$$

On note une similitude frappante entre cette équation et l'équation (V.13) que nous avons obtenue pour les intégrales gaussiennes. Cette similitude sera exploitée au chapitre suivant pour montrer l'équivalence de la formulation canonique et de celle qui utilise les intégrales de chemin.

## EXERCICES

## 1) Quantification de la « ligne discrète »

On se propose de quantifier le système mécanique décrit par le lagrangien  $L$  de l'équation (4) (avec des conditions aux limites périodiques).

(a) Montrer que les modes normaux sont donnés par :

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_s \varphi_s(t) e^{-iks}$$

avec  $k = 2\pi p/N$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , et que  $\varphi_k(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\varphi}_k + \omega_k^2 \varphi_k = 0 ; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{4K}{m}} \left| \sin \frac{k}{2} \right| .$$

(b) En écrivant la décomposition de Fourier :

$$\varphi_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k}} (a_k e^{-i\omega_k t + iks} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t - iks})$$

vérifier les RCC et montrer que :

$$H = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) .$$

2) En utilisant les relations (20) à  $t = 0$  et les RCC (15), montrer que  $[A_k, A_{k'}^\dagger] = (2\omega_k)^{-1} \delta_{kk'}$ .

3) Démontrer l'expression (24) du hamiltonien. Suggestion : déterminer les coefficients de Fourier  $\pi_k$  et  $(\partial\varphi/\partial x)_k$  de  $\pi$  et  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  et utiliser la relation de Parseval.

4) Soit une transformation de Lorentz parallèle à l'axe  $Oz$  :

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 \cosh \varphi - k_z \sinh \varphi \\ k'_z &= -k_0 \sinh \varphi + k_z \cosh \varphi ; \quad k'_x = k_x ; \quad k'_y = k_y . \end{aligned}$$

Vérifier l'invariance de la mesure d'intégration  $d\tilde{k}$  (36) dans une telle transformation.

5) Démontrer l'équation (38), vérifier l'orthogonalité des solutions d'énergie  $> 0$  et  $< 0$ , et montrer que le produit scalaire  $(g, f)$  est indépendant du temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} (g, f) = 0 .$$

(Utiliser l'équation de Klein-Gordon et le théorème de Green.)

6) Vérifier les RCC de  $\varphi$  et  $\pi = \dot{\varphi}$  à partir de (40) et (41).

### 7) Fonctions de Green de l'équation de Klein-Gordon

Pour le calcul de (48) on se donne les contours  $C_R$  et  $C_A$  de la figure 4. Montrer que  $G_R(x) = -\theta(x^0)\Delta(x)$  et que  $G_A(x) = \theta(-x^0)\Delta(x)$ . En déduire :

$$G_R(x-y) = i \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

$$G_A(x-y) = -i \langle 0 | \theta(-x^0 + y^0) [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle .$$

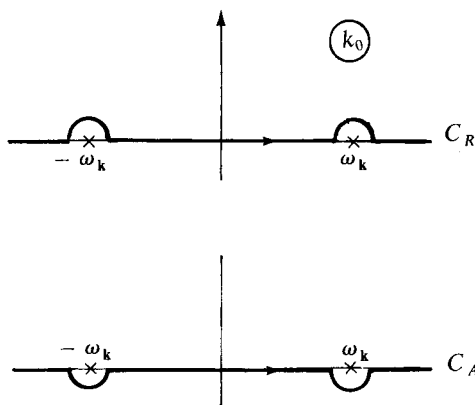


Figure 4. Contours  $C_A$  et  $C_R$ .

8) Vérifier en calculant explicitement les dérivées que

$$(\square_x + m^2) \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(0)) | 0 \rangle = -i \delta^{(4)}(x) .$$

Suggestion : utiliser l'équation de Klein-Gordon et remarquer que  $\partial/\partial x^0 \theta(x^0) = \delta(x^0)$ .

### 9) Identités opératorielles utiles

(a)  $A$  et  $B$  étant deux opérateurs quelconques, démontrer :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

Suggestion : examiner le développement de Taylor à  $t=0$  de  $F(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ .

(b) Soient deux opérateurs  $A$  et  $B$  tels que  $A$  et  $B$  commutent avec  $[A, B]$ . Montrer que

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} .$$

Suggestion : Obtenir une équation différentielle pour  $F(t) = e^{At} e^{Bt}$ . En déduire :  $e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}$ .

(Attention ! Les deux identités ci-dessus ne sont pas valables en général, c'est-à-dire pour  $A$  et  $B$  quelconques.)

(c) Applications :  $e^{aa^\dagger} e^{\beta a} e^{-aa^\dagger} = e^{-\alpha\beta} e^{\beta a}$ .

### 10) Autres formes de l'équation (73)

L'équation (73) peut s'écrire :

$$U_I(t) = e^{i\alpha a^\dagger} e^{i\alpha^* a} e^{-X}; \quad \alpha = \int_0^t j(t') e^{i\omega t'} dt'$$

et  $X$  est une intégrale double.

(a) Soient  $n$  opérateurs  $A_1, \dots, A_n$  tels que le commutateur  $[A_i, A_j]$  soit un nombre. Montrer que :

$$e^{A_n} e^{A_{n-1}} \dots e^{A_1} = e^{A_n + \dots + A_1} e^{\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} [A_j, A_i]}$$

(b) En décomposant l'intervalle  $[0, t]$  en  $n$  intervalles de longueur  $\Delta t$ , avec  $\Delta t$  petit, montrer que :

$$U_I(t) \simeq \exp \left( -i \sum_{j=1}^n H_I(t_j) \Delta t \right) \exp \left( -\frac{1}{2} (\Delta t)^2 \sum_{j>i} [H_I(t_j), H_I(t_i)] \right)$$

et en déduire :

$$U_I(t) = e^{i(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)} e^{-X'}$$

$$X' = \frac{1}{2} \iint dt' dt'' \varepsilon(t' - t'') j^*(t') e^{-i\omega(t' - t'')} j(t'')$$

(c) Montrer que cette expression de  $U_I(t)$  coïncide bien avec (73).

### 11) Champ couplé à une source classique

Soit un champ scalaire hermitique couplé à une source classique :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x).$$

(a) Montrer que les champs « in » et « out » sont reliés par (cf. exercice 7) :

$$\varphi_{\text{out}}(x) = \varphi_{\text{in}}(x) - \int \Delta(x - x') j(x') d^4x'.$$

(On supposera que  $j(x)$  est nulle en dehors d'un intervalle  $[T_1, T_2]$ .)

(b) En utilisant la décomposition de Fourier de  $j(x)$  :

$$j(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} j(k)$$

montrer que les opérateurs  $a_{\text{in}}$  et  $a_{\text{out}}$  sont reliés par :

$$a_{\text{out}}(\mathbf{k}) = a_{\text{in}}(\mathbf{k}) + i j(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}).$$

(c) Définissant la matrice  $S$  par :

$$S^{-1} a_{\text{in}}(\mathbf{k}) S = a_{\text{out}}(\mathbf{k})$$

montrer qu'à un facteur de phase près :

$$S = \exp \left\{ i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\text{in}}(\mathbf{k}) j^*(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) + a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{k}) j(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})) \right\}.$$

Montrer que cette expression diffère de  $U_I(\infty, -\infty)$  (équation (85)) par un facteur de phase que l'on déterminera.

## 12) Etats cohérents <sup>(4)</sup>

Soit  $|z\rangle$  l'« état cohérent »  $|z\rangle = e^{a^\dagger z} |0\rangle$ , où  $z$  est un nombre complexe.

(a) Montrer que  $|z\rangle$  est vecteur propre de  $a$  :  $a|z\rangle = z|z\rangle$  et que  $\langle z|z\rangle = \exp(|z|^2)$ .

(b) Montrer que  $\int \frac{dx dy}{\pi} e^{-|z|^2} |z\rangle \langle z| = \mathbb{1}$  avec  $z = x + iy$  (relation de fermeture).

(c) Soit  $D(z) = \exp(za^\dagger - z^* a)$ . Montrer que  $D(z)|0\rangle$  est un état cohérent normalisé à l'unité. Calculer  $\langle x|D(z)|0\rangle$ , où  $|x\rangle$  est un vecteur propre de l'opérateur position.

(d) Montrer que  $y a^\dagger a |z\rangle = |yz\rangle$  et en déduire :

$$x a^\dagger a = : e^{(x-1)a^\dagger a} :$$

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Le système mécanique du paragraphe A est décrit en détail dans H. Goldstein, *Mécanique Classique*, Dunod (1964), chapitre 11. On trouvera une introduction à la quantification des vibrations élastiques et du champ électromagnétique dans C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann (1973), chapitre 5. La

quantification du champ de Klein-Gordon est discutée dans tous les traités classiques, par exemple Bjorken-Drell, chapitre 12 ou Itzykson-Zuber, chapitre 3. Pour le formalisme lagrangien des champs classiques, la construction des opérateurs énergie-moment et moment angulaire, on pourra consulter Bjorken-Drell, chapitre 11. Le programme de Wightman (théorie axiomatique des champs) est exposé dans Streater-Wightman. Pour les différentes représentations et les opérateurs d'évolution, voir par exemple Messiah, chapitre 8. Le couplage d'un champ quantifié (le champ électromagnétique) à une source classique est traité dans Bjorken-Drell, chapitre 17 ou Itzykson-Zuber, chapitre 4.

<sup>(1)</sup> Messiah, chapitre 8.

<sup>(2)</sup> Messiah, chapitre 12 ; Cohen-Tannoudji *et al.*, chapitre 5.

<sup>(3)</sup> Bogolioubov-Chirkov, appendice I.

<sup>(4)</sup> Cohen-Tannoudji *et al.*, chapitre 5.

## CHAPITRE X

# Fonctions de Green et matrice $S$

Dans ce chapitre nous allons étudier le champ de Klein-Gordon en interaction avec lui-même. Ce modèle n'est pas susceptible de décrire une situation physique réelle, mais il nous permettra d'introduire un certain nombre de notions importantes sans qu'il soit nécessaire d'utiliser le formalisme plus complexe des particules de spin non nul. La densité de lagrangien  $\mathcal{L}$  (souvent appelée par abus de langage lagrangien : la notation  $\mathcal{L}$  au lieu de  $L$  suffira à lever l'ambiguïté) sera :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi) \quad (1)$$

où  $V(\varphi)$  est un polynôme dépendant de  $\varphi$  et de ses dérivées. Lorsque  $V$  dépend des dérivées  $\partial_\mu \varphi$ , on a affaire à des *couplages dérivatifs*. Ceux-ci conduisent à des complications dans le formalisme canonique, car le moment conjugué  $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}$  dépend alors de  $V$ . Je supposerai dans un premier temps que  $V$  ne contient pas de couplages dérivatifs : ceux-ci seront examinés au paragraphe E. Les deux premiers termes de (1), notés  $\mathcal{L}_0$ , forment le *lagrangien libre*, et  $-V(\varphi)$ , également noté  $\mathcal{L}_1$ , est le *lagrangien d'interaction*. Une décomposition analogue vaut pour le hamiltonien :  $H = H_0 + H_1$ . Les équations du mouvement déduites de (IX.31.a) sont :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = -V'(\varphi(x)). \quad (2)$$

Mon exemple favori sera la « théorie en  $\varphi^4$  », correspondant à :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{4!} \varphi^4(x) \quad (3.a)$$

ce qui rappelle évidemment beaucoup la théorie de Ginzburg-Landau ; le lien entre les deux théories sera examiné au paragraphe B. Remarquez que  $g$  doit être positif si l'on veut un hamiltonien défini positif. On utilise parfois au lieu de (3.a) une interaction écrite avec un produit normal :

$$\mathcal{L}'_1 = -\frac{g}{4!} : \varphi^4(x) : . \quad (3.b)$$

L'utilisation de (3.b) au lieu de (3.a) est une question de goût et d'opportunité, les différences étant absorbées dans la renormalisation de masse. En général on n'utilisera pas le produit normal si l'on souhaite faire des transformations inhomogènes (translations par exemple) sur  $\varphi$ , tout en conservant certaines symétries. Au lieu de la « théorie en  $\varphi^4$  », il m'arrivera aussi de choisir comme exemple la « théorie en  $\varphi^3$  », où :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{3!} \varphi^3(x) . \quad (4)$$

Dans cette théorie la renormalisation du champ (liée à  $Z_3$ ) est non triviale dès l'ordre d'une boucle, dans la dimension où cette théorie est renormalisable, c'est-à-dire  $D = 6$  (cf. exercice VI.2), alors que dans la théorie en  $\varphi^4$  il faut attendre l'ordre de deux boucles pour que  $Z_3$  diffère de 1. Naturellement cette théorie est encore moins réaliste que celle en  $\varphi^4$ , et elle est de plus pathologique car son hamiltonien n'est pas défini positif. Cependant elle est parfaitement définie en théorie des perturbations.

Notre premier objectif (paragraphe A et B) sera de déterminer le développement perturbatif des fonctions de Green, définies comme valeurs moyennes sur le vide (= état fondamental) de produits- $T$  de champs :

$$\langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle .$$

Les règles de Feynman de ce développement perturbatif, obtenues à partir du théorème de Wick, permettront de faire le lien entre ces fonctions de Green et les fonctions de corrélation de la deuxième partie, et d'établir le formalisme des intégrales de chemin pour la quantification.

Le deuxième objectif sera de relier les fonctions de Green aux quantités observables. La description des collisions se fait au moyen de la matrice  $S$ , et il faudra établir une relation entre les fonctions de Green et les éléments de matrice  $S$  (paragraphe C). La propriété importante d'unitarité de la matrice  $S$  sera étudiée au paragraphe D, et des généralisations (champ scalaire complexe, champ vectoriel et couplages dérivatifs) seront traitées au paragraphe E.

## A. DÉVELOPPEMENT PERTURBATIF DES FONCTIONS DE GREEN

### A.1. Représentation interaction et matrice $S$

Nous avons utilisé au chapitre précédent une formule (IX.82) reliant le champ  $\varphi(t, \mathbf{x})$  interagissant avec une source classique au champ « entrant »  $\varphi_{\text{in}}(t, \mathbf{x})$ . Cette formule était facile à établir dans la mesure où la source était nulle en dehors d'un intervalle de temps fini. De même l'expression de la matrice  $S$  entre un état initial et un état final à nombre fixé de particules s'obtenait sans difficulté.

Le cas d'un champ en interaction avec lui-même est beaucoup plus complexe, car l'interaction  $V(\varphi)$  ne s'annule jamais. Notre objectif est de décrire une expérience de collision, qui se présente de la façon suivante : au temps  $t = -\infty$ , l'expérimentateur a préparé deux paquets d'ondes très éloignés, et donc sans interactions. Ces deux paquets d'ondes entrent en collision à un temps  $t \approx 0$ , et la collision produit  $N$  particules finales qui se séparent et qui au temps  $t = +\infty$  sont à nouveau représentées par des paquets d'ondes sans interactions (on suppose qu'il y a un seul type de particules, celles décrites par le champ de Klein-Gordon de ce chapitre). Cependant, dans une théorie des champs en interaction, la notion de particule est dépourvue de signification pendant le temps ( $\sim 10^{-23}$  s) de la collision ; *la notion de particule ne peut être qu'asymptotique*. Nous serons conduits à décrire les particules initiales et finales au moyen d'opérateurs de champs *libres*  $\varphi_{\text{in}}(x)$  et  $\varphi_{\text{out}}(x)$ , qui seront en un certain sens les limites  $t \rightarrow \mp \infty$  du champ  $\varphi(x)$ . Ceci nous permettra d'établir le formalisme nécessaire au calcul des amplitudes de probabilité décrivant la transition 2 particules initiales  $\rightarrow N$  particules finales, ce qui est après tout le problème physique intéressant. La matrice  $S$  est alors définie par les produits scalaires entre états « in » et états « out » :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \varphi_{\beta}, \text{out} | \varphi_{\alpha}, \text{in} \rangle . \quad (5.a)$$

Il faut bien comprendre que les états « in » et « out » sont obtenus en mesurant des observables « in » et « out » différentes, car dans la représentation de Heisenberg les vecteurs d'état sont fixes et les observables varient avec le temps. Par exemple, pour l'opérateur nombre de particules d'un type donné  $\alpha$ ,  $N_{\alpha}$ , on distinguera  $N_{\alpha}^{\text{in}}$  de  $N_{\alpha}^{\text{out}}$ . Si  $|\varphi_{\alpha}, \text{in}\rangle$  et  $|\varphi_{\beta}, \text{out}\rangle$  décrivent des états de deux particules libres de type  $\alpha$  et de type  $\beta$ , le produit scalaire

$\langle \varphi_\beta, \text{out} | \varphi_\alpha, \text{in} \rangle$  n'a aucune raison d'être nul. Les états « in » et « out » forment donc deux bases de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  des états, et si ces deux bases sont complètes, la relation d'unitarité  $S^\dagger = S^{-1}$  exprime simplement le fait que l'opérateur  $S$  effectue un changement de base orthonormée :

$$|\beta, \text{out}\rangle = S^\dagger |\beta, \text{in}\rangle$$

et on peut récrire (5.a) sous la forme :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle . \quad (5.b)$$

Au chapitre précédent, la matrice  $S$  avait été écrite dans la représentation interaction, où le vecteur d'état  $|\varphi(t)\rangle$  varie avec le temps :

$$|\varphi(t')\rangle = U_I(t', t) |\varphi(t)\rangle .$$

Partant au temps  $t = -\infty$  d'un état  $|\varphi_\alpha\rangle$ , on obtient l'amplitude de probabilité pour mesurer au temps  $t = +\infty$  un état  $|\varphi_\beta\rangle$  à l'aide de :

$$\langle \varphi_\beta | U_I(+\infty, -\infty) | \varphi_\alpha \rangle = \langle \varphi_\beta | S | \varphi_\alpha \rangle ,$$

équation qui coïncide formellement avec (5.b), le point important étant que les états  $|\varphi_\alpha\rangle$  et  $|\varphi_\beta\rangle$  se réfèrent à la même base de l'espace de Hilbert.

Pour construire les états asymptotiques « in » et « out », nous devons obtenir les champs asymptotiques  $\varphi_{\text{in}}$  et  $\varphi_{\text{out}}$ . Cette construction peut se faire indépendamment de la théorie des perturbations (construction de Haag-Ruelle) à partir des axiomes suivants :

1) Existence d'un vide unique et cyclique : l'application réitérée de  $\varphi(x)$  sur  $|0\rangle$  engendre  $\mathcal{H}$ .

2) Existence d'un opérateur énergie-moment  $P_\mu$  :

$$e^{ia_\mu P^\mu} \varphi(x) e^{-ia_\mu P^\mu} = \varphi(x + a) .$$

3) Condition sur le spectre de  $P^2 = P_\mu P^\mu$  : le spectre comprend deux points isolés :  $P^2 = 0$  et  $P^2 = m^2$ , et un continuum  $P^2 > (m + \mu)^2$  avec  $0 < \mu < m$ .

4) Condition de causalité (ou de localité) :

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 < 0 .$$

5) Si  $|\mathbf{k}\rangle$  est un état à une particule, alors :

$$\langle 0 | \varphi(x) | \mathbf{k} \rangle \neq 0 .$$

On peut alors construire la théorie asymptotique de la façon suivante : soit  $\varphi(f, t)$  l'opérateur défini par :

$$\varphi(f, t) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \varphi(-k) f(k) e^{i(k_0 - \omega_k)t}$$

où  $\varphi(k)$  est la transformée de Fourier de  $\varphi(x)$  et  $f(k)$  celle d'une fonction  $f(t, \mathbf{x})$ , telle que  $f(k)$  soit non nul uniquement pour  $k^0 > 0$  et  $(m - \mu)^2 \leq k^2 \leq (m + \mu)^2$ . Construisons l'état :

$$|\varphi_n(f_1, \dots, f_n; t)\rangle = \varphi(f_1, t) \dots \varphi(f_n, t)|0\rangle.$$

Pour comprendre la signification physique de cet état, il faut remarquer que dans le cas du champ libre il est indépendant du temps :

$$\varphi_{\text{out}}^{\text{in}}(f, t)|0\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(\omega_k, \mathbf{k}) a_{\text{out}}^{\dagger}(\mathbf{k})|0\rangle = |\varphi_{\text{out}}^{\text{in}}(\hat{f})\rangle.$$

On peut alors démontrer la condition asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} |\varphi_n(f_1, \dots, f_n; t)\rangle = |\varphi_{\text{out}}^{\text{in}}(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)\rangle \quad (6)$$

où les  $\hat{f}_i$  sont les restrictions à la couche de masse  $k^2 = m^2$  des  $f_i$  :  $\hat{f}_i(k) = f_i(\omega_k, \mathbf{k})$ , et la convergence dans (6) est une convergence forte. Pour terminer la construction il faut rajouter l'axiome de complétion :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{in}} = \mathcal{H}_{\text{out}}.$$

La condition asymptotique (6) peut s'écrire de façon schématique :

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \varphi(x) = \varphi_{\text{out}}^{\text{in}}(x).$$

La condition asymptotique précédente fixe la normalisation de  $\varphi(x)$ . Cette normalisation est en général incompatible avec les RCC (IX.42) (exiger des RCC fait d'ailleurs sortir du cadre axiomatique). Par la suite nous allons normaliser  $\varphi(x)$  par les RCC, et dans ces conditions la condition asymptotique doit s'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \varphi(x) = Z_3^{1/2} \varphi_{\text{in}}(x). \quad (7)$$

où la constante  $Z_3$  (il est facile de montrer qu'elle doit être identique pour  $t \rightarrow \mp \infty$  : cf. paragraphe C.5) sera reliée à la renormalisation du champ. La condition (7) est évidemment incompatible avec une limite forte pour les opérateurs dans (7) (sauf si  $Z_3 = 1$ , mais alors  $\varphi(x)$  est un champ libre), et doit être comprise au sens des éléments de matrice (convergence faible).

Les résultats qui précèdent seront suffisants pour démontrer au paragraphe C.4 les « formules de réduction », c'est-à-dire les relations entre fonctions de Green et éléments de matrice  $S$ . Cependant, pour établir une théorie des perturbations fondée sur la séparation de  $H$  en partie « libre »  $H_0$  et partie d'« interaction »  $H_1$ , nous allons avoir besoin d'hypothèses beaucoup plus fortes. Dans la suite du paragraphe,  $\varphi_{\text{in}}(x)$  désigne un champ libre de masse  $m$ , dont l'évolution est régie par  $H_0$ .

Comme les champs  $\varphi(x)$  et  $\varphi_{\text{in}}(x)$  obéissent tous deux aux RCC (IX.42), si nous avons affaire à un système possédant un nombre fini de degrés de liberté, nous pourrions conclure que ces deux champs sont reliés par une transformation unitaire (théorème de von Neumann). Dans le cas d'une théorie des champs, nous admettrons l'existence d'une telle transformation :

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t) \varphi_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) U(t). \quad (8)$$

Malheureusement un théorème dû à Haag <sup>(1)</sup> affirme que l'existence de la transformation unitaire (8) entraîne que  $\varphi(x)$  doit être un champ libre. Nous passerons sur cette difficulté et admettrons que nous pouvons travailler, au moins formellement, avec l'équation (8), tout en gardant à l'esprit que les déductions qui vont suivre n'ont qu'un caractère heuristique.

Dans le problème de l'interaction avec une source classique,  $U(t)$  n'était pas autre chose que l'opérateur d'évolution  $U_I(t, -\infty)$  de la représentation interaction. Essayons d'établir une équation d'évolution de  $U(t)$ , qui soit l'analogue de (IX.65.a). Les équations du mouvement de  $\varphi$  et  $\varphi_{\text{in}}$  sont :

$$\dot{\varphi} = i[H, \varphi] \quad (9.a)$$

$$\dot{\varphi}_{\text{in}} = i[H_0, \varphi_{\text{in}}] \quad (9.b)$$

et nous nous servirons également de la relation suivante, obtenue en dérivant  $UU^{-1} = \mathbb{1}$  :

$$U(t) \dot{U}^{-1}(t) + \dot{U}(t) U^{-1}(t) = 0.$$

Afin d'être tout à fait général, nous introduirons également un couplage à une source classique, et d'après (8) nous pourrions écrire pour le hamiltonien :

$$U(t) H(\varphi(t), \pi(t), j(t)) U^{-1}(t) = H(\varphi_{\text{in}}(t), \pi_{\text{in}}(t), j(t)).$$

Calculons maintenant  $\dot{\varphi}_{\text{in}}$  en fonction de  $\dot{\varphi}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\text{in}} &= \frac{d}{dt} [U\varphi U^{-1}] = \dot{U}U^{-1} \varphi_{\text{in}} + iU[H, \varphi] U^{-1} + \varphi_{\text{in}} U\dot{U}^{-1} \\ \dot{\varphi}_{\text{in}} &= [(\dot{U}U^{-1} + iH(\varphi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}, j)), \varphi_{\text{in}}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Comparant (10) et (9.b), on constate que l'opérateur antihermitique :

$$\dot{U}U^{-1} + i[H(\varphi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}, j) - H_0] = \dot{U}U^{-1} + iH_1(\varphi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}, j) \quad (11)$$

commute avec  $\varphi_{\text{in}}$  ; le même raisonnement montre que cet opérateur commute aussi avec  $\pi_{\text{in}}$ , et c'est donc un nombre imaginaire  $ic(t)$  (en mécanique quantique ordinaire, un opérateur qui commute avec  $Q$  et  $P$  est un nombre). Si  $c(t) = 0$ ,  $U(t)$  est solution de l'équation différentielle :

$$i\dot{U}(t) = H_1(\varphi_{\text{in}}, \pi_{\text{in}}, j) U(t) = H_I(t) U(t) \quad (12)$$

et si  $c(t) \neq 0$ , il suffira de définir :

$$U'(t) = U(t) e^{-i \int^t c(t') dt'}$$

où  $U'(t)$  vérifie (12). Nous montrerons un peu plus loin que  $\exp\left(-i \int^t c(t') dt'\right)$  disparaît du résultat final, et nous allons simplement utiliser (12) comme équation différentielle définissant  $U(t)$ . Cette équation est évidemment à identifier avec (IX.65.a), d'où la notation  $H_I(t)$ .

La solution de (12) est déjà connue (cf. IX.69) :

$$U(t) = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^t dt' H_I(t')} \right) \quad (13)$$

et la matrice  $S = U(+\infty)$  est donnée par :

$$S = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t')} \right). \quad (14)$$

Si l'interaction  $\mathcal{L}_1(\varphi)$  ne contient pas de dérivées de  $\varphi$  (par exemple dans le cas des lagrangiens (3) ou (4)), on a simplement  $L_1 = -H_1$  et :

$$S = T \left( \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(x), j(x)) \right] \right). \quad (15)$$

Cette expression généralise l'équation (IX.85) que nous avons obtenue dans le cas du couplage à une source classique. Il faut bien remarquer que les champs intervenant dans l'expression (15) sont les champs  $\varphi_{\text{in}}(x)$ , et donc des champs libres.

Lorsque l'interaction  $\mathcal{L}_1(\varphi)$  dépend des dérivées, le moment conjugué de  $\varphi$  n'est pas simplement  $\dot{\varphi}$ , et  $H_1$  n'est pas égal à  $-L_1$ . Un exemple d'une telle situation est l'électrodynamique des particules scalaires <sup>(2)</sup>. Après un certain nombre d'intermédiaires compliqués, qui démontrent l'inadéquation de la quantification canonique à ce type de problème, on retombe sur l'équation (15). Ainsi que nous allons le voir au paragraphe E, la méthode des intégrales de chemin permet d'obtenir ce résultat sans difficulté.

Il est utile d'ajouter quelques commentaires à la formule (15) ; plaçons-nous par exemple dans le cas de la théorie en  $\varphi^4$  (3.b), où l'équation (15) devient :

$$S = T \left( \exp \left[ \frac{-ig}{4!} \int d^4x : \varphi_{in}^4(x) : \right] \right) \quad (16)$$

Cette équation semble correcte à tous les points de vue :  $S$  est bien un opérateur unitaire, et l'expression (16) est manifestement invariante de Lorentz grâce à la covariance du produit- $T$ . Cependant la démonstration qui précède est suspecte à cause du théorème de Haag, et de plus l'expression (16) n'est pas définie en raison des divergences de la série perturbative, qui sont une conséquence directe de l'impossibilité de multiplier deux champs au même point d'espace-temps. Afin d'examiner ce problème, développons (16) en puissances de  $g$  :

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1, \dots, d^4x_n S_n(x_1, \dots, x_n)$$

Le terme d'ordre 2 de ce développement,  $S_2(x_1, x_2)$ , s'écrit par exemple :

$$S_2(x_1, x_2) = \left( \frac{-ig}{4!} \right)^2 T( : \varphi_{in}^4(x_1) : : \varphi_{in}^4(x_2) : ) \quad (17)$$

Cette expression sera a priori mal définie au point  $x_1 = x_2$  (le produit normal définissant  $\varphi^4(x)$  sans ambiguïté). Il existe une méthode plus satisfaisante d'arriver à la relation (16), qui met bien le doigt sur l'ambiguïté de cette formule : c'est la *construction de Bogolioubov*. Cette construction utilise une constante de couplage dépendant du point  $x$ , et prend pour point de départ les propriétés (i) d'invariance de Lorentz (ii) d'unitarité (iii) de causalité (c'est-à-dire l'impossibilité pour un événement se passant en un point d'espace-temps  $x$  d'influencer des événements qui se passent en dehors du cône futur de  $x$ ). Partant de  $S_1(x) = \frac{-ig}{4!} : \varphi^4(x) :$ , Bogolioubov montre que les  $S_n$  peuvent être construits par récurrence, mis à part un terme antihermitique qui ne peut être  $\neq 0$  que lorsque les points  $x_1, \dots, x_n$  coïncident. Par exemple l'équation (17) est modifiée en :

$$S_2(x_1, x_2) = \left( \frac{-ig}{4!} \right)^2 T( : \varphi_{in}^4(x_1) : : \varphi_{in}^4(x_2) : ) + \\ + iP \left( \varphi_{in}(x_1), \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x_1}, \dots \right) \delta(x_1 - x_2) \quad (18)$$

où  $P$  est un polynôme du champ et de ses dérivées. La construction de Bogolioubov présente un grand intérêt mais comme elle n'entre pas dans la logique du présent exposé, je renvoie le lecteur au livre de Bogolioubov-Chirkov (chapitre III).

## A.2. Formule de Gell-Mann et Low

La formule de Gell-Mann et Low que nous allons démontrer ci-dessous permet le calcul perturbatif des fonctions de Green  $G^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$  définies par :

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle \quad (19)$$

où les  $\varphi$  sont les champs en interaction et  $|0\rangle$  l'état fondamental à zéro particule. Pour démontrer cette formule à partir de la définition (19), examinons d'abord le cas où les temps sont ordonnés de la façon suivante ( $t_i = x_i^0$ ) :

$$t_1 > t_2 > \dots > t_N$$

et exprimons les  $\varphi(x_i)$  en fonction des  $\varphi_{\text{in}}(x_i)$  (équation (8)) :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle &= \langle 0 | U^{-1}(t_1) \varphi_{\text{in}}(x_1) U(t_1, t_2) \dots \\ &\dots U(t_{N-1}, t_N) \varphi_{\text{in}}(x_N) U(t_N) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

où l'on a utilisé la loi de groupe (IX.61) pour  $U(t_1, t_2)$ . Soit  $t$  un temps tel que  $t \gg t_1$  et  $-t \ll t_N$  ; écrivons :

$$U(t_N) = U(t_N, -t) U(-t) ; \quad U^{-1}(t_1) = U^{-1}(t) U(t, t_1)$$

et insérons ces relations dans (20) :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle &= \langle 0 | U^{-1}(t) \{ U(t, t_1) \varphi_{\text{in}}(x_1) \times \\ &\times U(t_1, t_2) \varphi_{\text{in}}(x_2) \dots \varphi_{\text{in}}(x_N) U(t_N, -t) \} U(-t) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U^{-1}(t) \left\{ T \left( \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_N) e^{i \int_{-1}^t dt' H_I(t')} \right) \right\} U(-t) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (21)$$

Pour obtenir cette relation, on a utilisé l'expression (IX.69) de  $U(t_2, t_1)$  ainsi que l'égalité :

$$T \left( A(t) e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H_I(t') dt'} \right) = T \left( e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H_I(t') dt'} \right) A(t) T \left( e^{-i \int_{t_1}^t H_I(t') dt'} \right)$$

valable lorsque  $t_1 < t < t_2$ , d'après la définition du produit- $T$  : on notera que si  $A(t) = \mathbb{1}$ , l'égalité précédente est simplement la loi de groupe (IX.61). Grâce au produit- $T$ , l'égalité (21) qui avait été démontrée pour un ordre particulier des temps devient valable pour tout ordre de  $(t_1, \dots, t_N)$ .

Nous allons supposer que l'interaction  $\mathcal{L}_1$  est « branchée » et « débranchée » adiabatiquement :  $\mathcal{L}_1 \rightarrow e^{-\varepsilon|t|} \mathcal{L}_1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Dans ces conditions  $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(-t)|0\rangle = |0_{\text{in}}\rangle$ , où  $|0_{\text{in}}\rangle$  est le « vide perturbatif »

annihilé par les  $a_{\text{in}}(\mathbf{k})$ . Grâce à l'hypothèse adiabatique,  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)|0_{\text{in}}\rangle = \lambda |0_{\text{in}}\rangle$ , où  $\lambda$  est un facteur de phase :  $|\lambda| = 1$  (\*).

On obtient donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | U^{-1}(t) = \langle 0_{\text{in}} | \lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0_{\text{in}} | U^{-1}(t) | 0_{\text{in}} \rangle \langle 0_{\text{in}} |$$

et l'équation (21) devient (en supposant que  $\mathcal{L}_1(\varphi)$  ne contient pas de dérivées) :

$$\boxed{G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\langle 0_{\text{in}} | T \left( \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_N) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(x))} \right) | 0_{\text{in}} \rangle}{\langle 0_{\text{in}} | T \left( e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(x))} \right) | 0_{\text{in}} \rangle}} \quad (22)$$

Le facteur  $\exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} c(t') dt' \right)$  s'élimine entre le numérateur et le dénominateur de (22) et peut donc être ignoré. Le dénominateur de (22) est l'élément de matrice vide-vide de la matrice  $S$  :  $\langle 0_{\text{in}} | S | 0_{\text{in}} \rangle$ , et c'est, comme nous l'avons vu, un facteur de phase.

La formule (22) est appelée *formule de Gell-Mann et Low*. Compte tenu des remarques sur la représentation interaction, des infinités possibles dans  $Z_3$  etc. la « démonstration » qui précède n'a qu'une valeur purement heuristique.

(\*) Il faut bien souligner la différence avec le cas de l'interaction avec une source classique, où des particules sont créées à partir du vide par interaction entre le champ et la source.

Il est facile de construire à partir de (22) une fonctionnelle génératrice des fonctions des Green. Définissons la fonctionnelle  $Z(j)$  par :

$$Z(j) = \langle 0_{\text{in}} | T \left( \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(x)) + j(x) \varphi_{\text{in}}(x)) \right) \right) | 0_{\text{in}} \rangle . \quad (23)$$

Il est clair que  $G^{(N)}$  s'obtient par différentiation fonctionnelle :

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{(-i)^N}{Z(0)} \frac{\delta^{(N)} Z(j)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_N)} \Big|_{j=0} \quad (24)$$

et que  $Z(j)/Z(0)$  peut aussi s'écrire :

$$Z(j)/Z(0) = \langle 0 | T \left( \exp \left( i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right) \right) | 0 \rangle . \quad (25)$$

On remarquera que le champ libre  $\varphi_{\text{in}}$  intervient dans (23) et le champ  $\varphi$  dans (25).

### A.3. Développement perturbatif

L'importance des formules (22) et (23) vient de ce qu'elles permettent d'obtenir le développement perturbatif des fonctions de Green. En effet, développant l'exponentielle dans le numérateur de (22), nous avons :

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{in}} | T \left( \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_N) e^{i \int d^4y \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(y))} \right) | 0_{\text{in}} \rangle &= \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \int d^4y_1 \dots d^4y_p \langle 0_{\text{in}} | T(\varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_N) \times \\ &\quad \times \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(y_1)) \dots \mathcal{L}_1(\varphi_{\text{in}}(y_p))) | 0_{\text{in}} \rangle . \end{aligned} \quad (26)$$

Les valeurs moyennes sur le vide dans (22) peuvent être calculées à l'aide du théorème de Wick : comme on prend la valeur moyenne sur le vide, seul le dernier terme de l'équation (IX.86) donne une contribution non nulle. Mais ce terme a exactement la structure (V.13) d'une valeur moyenne calculée avec un poids gaussien. On pourra donc transposer les règles de Feynman établies au chapitre V à condition de faire deux modifications :

(i) la contraction dans (V.13) doit être remplacée par celle de (IX.86), c'est-à-dire  $\Delta_F(y_i - y_j)$  ;

(ii) dans le cas du modèle en  $\varphi^4$  du chapitre V, le développement perturbatif provenait du développement de l'exponentielle :

$$e^{-\frac{g}{4!} \int d^4y \varphi^4(y)} = \sum_p \left( \frac{-g}{4!} \right)^p \frac{1}{p!} \int d^4y_1 \dots d^4y_p \varphi^4(y_1) \dots \varphi^4(y_p)$$

où  $p$  est l'ordre de la théorie des perturbations. A chaque vertex correspondait un facteur  $-g$ . Dans le cas présent, si le lagrangien est donné par (3.a), le terme d'ordre  $p$  du développement perturbatif fait intervenir un facteur  $(-ig)^p$ , et à chaque vertex correspondra un facteur  $-ig$ .

Le développement perturbatif du dénominateur de (22) donne les diagrammes vide-vide, où les vertex ne sont reliés à aucun point externe. Ils jouent le même rôle que ceux du développement de  $Z(0)$  dans (V.16) (d'où la terminologie introduite au chapitre V). Pour tenir compte du dénominateur, il suffira donc, comme au chapitre V, d'éliminer tous les diagrammes contenant une partie vide-vide. On peut énoncer les règles de Feynman pour  $G^{(N)}$  dans l'espace des  $x$ , à l'ordre  $p$  de la théorie des perturbations :

(i) Tracer tous les diagrammes topologiquement inéquivalents avec  $N$  points externes  $x_1, \dots, x_N$ , et  $p$  vertex  $y_1, \dots, y_p$  ne contenant pas de partie vide-vide. Si l'interaction est écrite sous forme d'un produit normal, certains diagrammes sont absents (cf. (IX.88)). Par exemple la contribution à  $G^{(2)}$  du diagramme de la figure 1 ne doit pas être décomptée dans le cas du lagrangien (3.b) :

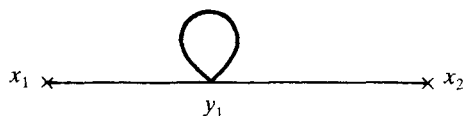


Figure 1. Graphe (tadpole) éliminé par le produit normal.

(ii) Associer à chaque ligne du diagramme un facteur  $\Delta_F(x - y)$  ( $= \Delta_F(y - x)$ ).

(iii) Associer à chaque vertex un facteur  $-ig$ .

(iv) Intégrer sur tous les points internes  $y_j$ .

(v) Multiplier par le facteur de symétrie du diagramme.

La discussion du chapitre V sur les fonctions de corrélation connexes et sur les vertex propres se transpose immédiatement aux fonctions de Green. Les fonctions de Green connexes  $G_c^{(N)}$  seront définies à partir

du logarithme de  $Z(j)$  :  $Z(j) = \exp(W(j))$  et les vertex propres à partir de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma(\bar{\varphi})$  :

$$\begin{aligned} i\Gamma(\bar{\varphi}) &= W(j) - i \int d^4x j(x) \bar{\varphi}(x) \\ \bar{\varphi}(x) &= -i \delta W(j) / \delta j(x). \end{aligned}$$

Le vertex propre  $\Gamma^{(2)}$  sera donné, à un facteur  $i$  près, par l'inverse du propagateur :

$$\Gamma^{(2)}(k) = i[G^{(2)}(k)]^{-1} = k^2 - m^2 - \Sigma(k) \quad (27.a)$$

où  $\Sigma(k)$  est l'énergie propre. Les vertex propres  $\Gamma^{(N)}$ ,  $N > 2$  seront reliés aux fonctions de Green connexes, 1-particule irréductibles, amputées de leurs propagateurs externes *complets*,  $\bar{G}_c^{(N)}|_{1\text{-PI}}$  (remarquez que les fonctions de Green  $\bar{G}_c^{(N)}$  ne sont pas nécessairement 1-PI, et diffèrent en général des vertex propres) :

$$\bar{G}_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \prod_{i=1}^N [G^{(2)}(k_i)]^{-1} G_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N) \quad (27.b)$$

$$\Gamma^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = -i \bar{G}_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N)|_{1\text{-PI}}, \quad (27.c)$$

les transformées de Fourier étant définies par (cf. V.23) :

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N k_i\right) G_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N) &= \\ &= \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{-i \sum_{j=1}^N k_j \cdot x_j} G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (28)$$

Avec cette définition, tous les moments  $k_i$  *entrent* dans le diagramme (paragraphe C.3). Les règles de Feynman, par exemple pour les vertex propres  $\Gamma^{(N)}(k_i)$ , seront données par :

(i) Tracer tous les diagrammes 1-particule irréductibles d'ordre  $p$  avec  $N$  4-moments externes  $k_1, \dots, k_N$  entrant dans le diagramme.

(ii) Associer à chaque ligne interne du diagramme un facteur  $i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$ .

(iii) Associer à chaque vertex un facteur  $(-ig)$ .

(iv) Ecrire les moments internes en assurant la conservation du 4-moment à chaque vertex, et intégrer sur toutes les variables indépendantes  $q$ , c'est-à-dire sur toutes les boucles, avec une mesure  $d^4q/(2\pi)^4$ .

(v) Multiplier par le facteur de symétrie du graphe et par un facteur global  $(-i)$  (cf. 27.c).

#### A.4. Renormalisation et conditions de normalisation

Les fonctions de Green définies par les règles de Feynman précédentes sont en général divergentes en dimension 4. Comme dans la seconde partie, il sera nécessaire de renormaliser la théorie. Il faudra donc se fixer des conditions de normalisation, analogues à (VI.22) ou (VI.33). En théorie quantique des champs on utilise souvent (mais ce n'est évidemment pas une obligation) la *renormalisation sur couche de masse*, en exigeant que le propagateur renormalisé ait un pôle à  $k^2 = m^2$ , où  $m^2$  est la masse physique de la particule (\*), et que ce pôle ait un résidu 1 : ainsi ce propagateur est-il le plus voisin possible du propagateur libre  $i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$  près du pôle  $k^2 = m^2$ . Les conditions de normalisation sur couche de masse seront :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2 = m^2) = 0 \quad (29.a)$$

$$\frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2 = m^2) = 1 \quad (29.b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i = 0) = -g \quad (29.c)$$

Dans le cas de la masse nulle, l'existence de singularités pour  $k_i^2 \geq 0$  conduit à choisir un point de soustraction du genre espace (cf. équation (VI.34)) :

$$k_i \cdot k_j \Big|_{SP} = -\frac{1}{4} \mu^2 (4 \delta_{ij} - 1) ; \quad k_i^2 = -\frac{3}{4} \mu^2 \quad (30)$$

et les conditions (VI.33) deviennent :

$$\Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = 0 \quad (31.a)$$

$$\frac{d}{dk^2} \Gamma_R^{(2)}(k^2 = -\mu^2) = 1 \quad (31.b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i|_{SP}) = -g \quad (31.c)$$

(\*) En général la masse renormalisée  $m_R^2$  n'est pas égale à la masse physique  $m^2$ , mais en diffère par une renormalisation finie (par exemple si l'on utilise la condition de normalisation  $\Gamma_R^{(2)}(k^2 = 0) = m_R^2$ ). Naturellement on doit avoir dans tous les cas  $\Gamma_R^{(2)}(k^2 = m^2) = 0$ . Dans la renormalisation sur couche de masse,  $m^2 = m_R^2$ .

## B. INTÉGRALE DE CHEMIN ET THÉORIE EUCLIDIENNE

### B.1. Intégrale de chemin pour $Z(j)$

Grâce au théorème de Wick, nous avons pu identifier dans le développement perturbatif des fonctions de Green le résultat d'une intégrale gaussienne. Il doit donc être possible d'écrire la fonctionnelle génératrice (23) des fonctions de Green sous forme d'une intégrale de chemin. Remarquons d'abord que  $Z(j)$  peut s'écrire, dans la mesure où l'on n'utilise pas le produit normal (cf. V.22) :

$$Z(j) = \mathcal{N} \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) \Delta_F(x-x') j(x') \right) \quad (32)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante multiplicative qui ne joue aucun rôle dans le calcul des fonctions de Green ; il est instructif de vérifier les facteurs (i) par exemple dans le cas du lagrangien (3.a). Mais la deuxième exponentielle de (32) peut être obtenue par une intégration gaussienne :

$$\exp \left( -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) \Delta_F(x-x') j(x') \right) = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\varphi \times \\ \times \exp \left( - \int d^4x \left( \frac{1}{2} \varphi [i(\square + m^2 - i\varepsilon)] \varphi - i j(x) \varphi(x) \right) \right) = \\ = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0(x) + j(x) \varphi(x)) \right). \quad (33)$$

Une intégration par parties (cf. les remarques suivant l'équation (IX.31a)) permet d'identifier  $\mathcal{L}_0(x)$  dans (33) et dans (1). L'intégrale sur  $\varphi$  dans (33) est une intégrale gaussienne, qui fait intervenir l'inverse de l'opérateur :

$$i(\square + m^2 - i\varepsilon)$$

que l'on peut noter symboliquement  $[i(\square + m^2 - i\varepsilon)]^{-1}$ . Mais cet inverse n'est autre que  $\Delta_F$  étant donné que (cf. (IX.54)) :

$$[i(\square_x + m^2 - i\varepsilon)] \Delta_F(x-x') = \delta^{(4)}(x-x').$$

On peut aussi raisonner dans l'espace de Fourier :

$$\Delta_F(k) = i/(k^2 + m^2 - i\varepsilon) ; \quad i(\square + m^2 - i\varepsilon) \rightarrow -i(k^2 - m^2 - i\varepsilon).$$

On remarquera que le facteur  $(-i\varepsilon)$  assure la convergence de l'intégrale gaussienne (33) : en l'absence de ce facteur, le comportement de l'intégrand serait oscillant à la limite  $\varphi \rightarrow \pm \infty$ . On peut finalement mettre (32) sous la forme :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_1(\varphi) + j(x) \varphi(x)) \right) \\ &= \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\varphi \exp(i(\text{Action}/\hbar)) \end{aligned} \quad (34)$$

où la partie gaussienne  $\mathcal{L}_0(\varphi)$  s'identifie au lagrangien libre. Il faut remarquer un abus manifeste dans les notations : dans (33) et (34)  $\varphi(x)$  désigne une configuration de champ *classique* et non un opérateur. Il faudrait utiliser dans (33) et (34) une notation différente, par exemple  $A(x)$ . Cependant cet abus de notations est de règle dans la littérature, et nous nous conformerons à l'usage. Les formes (23), (32) et (34) pour  $Z(j)$  diffèrent par des constantes multiplicatives qui peuvent être ignorées car elles disparaissent dans le calcul des fonctions de Green (cf. équation (24)).

Le fait que l'on puisse obtenir  $Z(j)$  dans (23) comme une intégrale de chemin n'est évidemment pas un hasard. En effet nous avons montré au chapitre VIII, paragraphe B qu'une amplitude de probabilité en mécanique quantique pouvait s'écrire comme une intégrale de chemin, c'est-à-dire comme une somme sur toutes les configurations  $q(t)$  vérifiant certaines conditions initiales et finales, et nous en avons déduit une fonctionnelle génératrice des valeurs moyennes sur le vide des produits- $T$  (équations (VIII.37)). Dans le cas présent la variable dynamique n'est pas la position  $q$ , mais le champ  $\varphi$ , et il n'est pas surprenant que la fonctionnelle génératrice des valeurs moyennes sur le vide des produits- $T$  puisse s'écrire comme une somme sur les configurations de champs. La seule ambiguïté dans la formulation fonctionnelle provient du choix de l'inverse de l'opérateur  $(\square + m^2)$ . Comme au chapitre VIII, il est possible de justifier la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$ . Dans l'exposé que j'ai suivi, cette prescription est bien évidemment conséquence de la formulation canonique.

Cela dit, étant donné un lagrangien classique  $\mathcal{L}(x)$ , on peut *décider* de le quantifier en écrivant la fonctionnelle génératrice (34), au lieu de passer par le formalisme canonique. Compte tenu des incertitudes du formalisme canonique (représentation interaction), cette façon de procéder est a priori tout aussi valable. Il conviendra toutefois de

remarquer que (34) suppose que l'on utilise une régularisation dans une étape intermédiaire, et que l'on vérifie les propriétés de localité et d'unitarité de la matrice  $S$  de la théorie quantique obtenue par cette méthode. En dernière analyse, la meilleure façon de procéder serait peut-être de se donner les règles de Feynman, puisqu'après tout la renormalisation procède ordre par ordre en théorie des perturbations, et qu'il faut bien avoir à sa disposition un développement perturbatif.

Les formulations fonctionnelles (32) ou (34) suggèrent qu'il doit exister une relation très précise entre les fonctions de Green du présent chapitre et les fonctions de corrélation du chapitre V, qui sont aussi appelées — pour des raisons qui deviendront évidentes dans un moment — fonctions de Green de la théorie euclidienne. Cette relation est indépendante du développement perturbatif. Cependant nous allons dans un premier temps utiliser ce développement, ce qui permettra au passage d'examiner le calcul pratique des fonctions de Green. Commençons par un exemple simple, celui de  $\Gamma^{(4)}$  dans le cadre du modèle  $\phi^4$  (3.b) au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations.

## B.2. $\Gamma^{(4)}$ au deuxième ordre en $g$ . Rotation de Wick

Calculons la contribution  $\bar{\Gamma}^{(4)}$  du graphe de la figure 2 à  $\Gamma^{(4)}$ :

$$\bar{\Gamma}^{(4)} = -i \frac{(-ig)^2}{2} I(k_i)$$

$$I(k_i) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(i)^2}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)((k-q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (35)$$

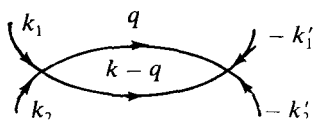


Figure 2. Contribution d'ordre  $g^2$  à  $\Gamma^{(4)}$ .

avec  $k = k_1 + k_2$ . Comme l'intégrale est divergente en dimension 4, j'ai utilisé une régularisation dimensionnelle ( $D$  est toujours la dimension de l'espace-temps, l'espace ordinaire a dimension  $D - 1$ ). Pour calculer (35), nous allons suivre à nouveau la méthode des paramètres de Feynman, en indiquant les différences entre le présent calcul et celui du

chapitre V. Nous obtenons d'abord :

$$I(k^2) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(i)^2}{[q^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (36)$$

Supposons  $k^2 < 0$  :  $k^2 = -\mathbf{k}_E^2$ . C'est ce qui se passerait par exemple pour  $k_0 = 0$

$$k^2 = -\mathbf{k}^2 = -k_1^2 - \dots - k_{D-1}^2 = -\mathbf{k}_E^2.$$

L'intégrale sur  $q_0$  présente alors des pôles à :

$$q_0 = \pm (m^2 + \mathbf{q}^2 + x(1-x)\mathbf{k}_E^2)^{1/2}$$

et la prescription pour contourner ces pôles est parfaitement définie car  $m^2$  est en réalité  $m^2 - i\varepsilon$ . On peut déformer le contour en évitant les pôles et intégrer sur l'axe imaginaire  $-\infty < \text{Im } q_0 < +\infty$  en posant  $q_0 = iq_4$  (figure 3) :

$$I(k^2) = -i \int_0^1 dx \int \frac{d^D q_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\mathbf{q}_E^2 + x(1-x)\mathbf{k}_E^2 + m^2]^2} \quad (37)$$

où  $d^D q_E = dq_4 dq_1 \dots dq_{D-1}$ . Au facteur  $(-i)$  près, cette expression coïncide avec celle que nous avons obtenue au chapitre V. La déformation du contour d'intégration, qui est une rotation de

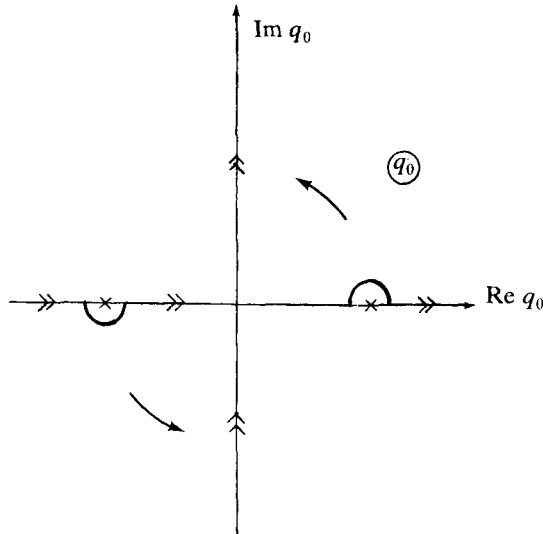


Figure 3. La rotation de Wick.

$\pi/2$  est appelée *rotation de Wick*. Enfin l'indice  $E$  dans  $q_E$  est une abréviation pour « euclidien » : en effet, pour  $D = 4$ , la métrique dans

$$q_E^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

est une métrique euclidienne, alors que la métrique originale était celle de Minkowski :

$$q^2 = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2.$$

Lorsque  $k^2 = -\mathbf{k}_E^2 < 0$ , on dit que la fonction de Green est calculée dans la région euclidienne. Rassemblant tous les facteurs (i), on constate que :

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(k^2 = -\mathbf{k}_E^2 < 0) = -\bar{\Gamma}_E^{(4)}(\mathbf{k}_E^2) \quad (38)$$

où  $\bar{\Gamma}_E^{(4)}(\mathbf{k}_E^2)$  est le vertex propre calculé au chapitre V, que nous appellerons désormais vertex propre de la théorie euclidienne.

Terminons le calcul de  $\bar{\Gamma}^{(4)}$  :

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(k^2) = \frac{g^2 \Gamma(2 - D/2)}{2(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx [m^2 - x(1-x)k^2]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (39)$$

Ainsi que nous le savions déjà, cette expression diverge pour  $D = 4$ , c'est-à-dire pour  $\varepsilon = 4 - D = 0$ . En utilisant  $x^{-\varepsilon/2} \simeq 1 - \varepsilon/2 \ln x$  l'expression (39) devient

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(k^2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dx \ln (m^2 - x(1-x)k^2) + \right. \\ \left. + (\text{Cte}) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (40)$$

et le terme divergent en  $1/\varepsilon$  est éliminé par la renormalisation. En choisissant par exemple la condition de renormalisation (29.c) on obtient pour la fonction de Green renormalisée :

$$\bar{\Gamma}_R^{(4)} = \frac{-g^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \left( 1 - \frac{x(1-x)k^2}{m^2} \right). \quad (41)$$

Le logarithme est bien défini pour  $k^2 < 4m^2$ , et en particulier il est bien défini dans la région euclidienne. Mais  $\bar{\Gamma}_R^{(4)}$  présente une coupure pour  $k^2 \geq 4m^2$ , dont l'origine physique sera examinée au paragraphe D.

### B.3. Relation avec la théorie euclidienne

Pour traiter le cas général d'un vertex propre à  $N$  lignes externes  $\Gamma^{(N)}$ , à l'ordre  $V$  de la théorie des perturbations, on procèdera en suivant la

méthode exposée au chapitre V ; on partira de la représentation de Schwinger du propagateur :

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (42)$$

où le facteur  $i\varepsilon$  assure la convergence de l'intégrale. Il est inutile de répéter le calcul du chapitre V, paragraphe E.3 et on peut se contenter de suivre à la trace des facteurs (i). Ces facteurs (i) proviennent des deux intégrales suivantes (exercice 1) :

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{iak^2} = \frac{i e^{-i\pi D/4}}{(4\pi a)^{D/2}} \quad (a > 0) \quad (43)$$

et

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^{\alpha-1} e^{-i\lambda(m^2 - i\varepsilon)} = e^{-i\pi\alpha/2} (m^2)^{-\alpha} \Gamma(\alpha). \quad (44)$$

En suivant le calcul du chapitre V on note :

- un facteur  $(i e^{-i\pi D/4})^I$  provenant des  $I$  intégrations sur les  $p_i$  ;
  - un facteur  $(i e^{-i\pi D/4})^{V-1}$  provenant de l'intégrale sur les  $(V-1)$  variables  $z$  ;
  - un facteur  $e^{-\frac{i\pi}{2}(I-LD/2)}$  provenant de l'intégrale sur la variable d'homogénéité  $\lambda$  (passage de (V.61) à (V.62)) ;
- soit un facteur global  $(-i)^{V-1}$ . On obtient donc pour l'intégrale  $J$  :

$$J = \frac{(-i)^{V-1} \Gamma(I-LD/2)}{(4\pi)^{LD/2}} \int \frac{\prod dx_i \delta(1 - \sum x_i)}{[P(x_i)]^{D/2}} (m^2 - k^T A^{-1} k)^{\frac{LD}{2}-I} \quad (45)$$

où la matrice  $A$  est identique à celle de (V.60). Définissons maintenant la *région euclidienne* : les moments  $k_i$  appartiennent à cette région si pour tout choix de  $\lambda_i$  réels l'inégalité :

$$\left( \sum_i \lambda_i k_i \right)^2 < 0$$

est vérifiée. Dans cette région, toutes les combinaisons linéaires de  $k_i$  sont orthogonales à un vecteur de genre temps, qui, dans un référentiel convenable, a pour composantes  $(1, 0, 0, 0)$ . Dans un tel référentiel, les composantes de temps des  $k_i$  sont nulles ( $k_{i0} = 0$ ) et :

$$k \cdot k' = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = -(k_1 k'_1 + k_2 k'_2 + k_3 k'_3).$$

On peut associer à chaque  $k_i$  un vecteur  $\mathbf{k}_{iE}$  d'un espace euclidien à 4 dimensions tel que  $k_{i4} = 0$  dans un référentiel particulier, avec :

$$\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{k}'_E = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'.$$

Le terme  $k^T A^{-1} k$  dans (45) devient  $-\mathbf{k}_E^T A^{-1} \mathbf{k}_E$  (rappelons que  $\mathbf{k}_E^T A^{-1} \mathbf{k}_E \geq 0$  car  $A$  est une matrice positive). Tenant compte du facteur (i) provenant de la substitution  $-g \rightarrow -ig$ , du facteur  $(-i)$  dans la définition de  $\Gamma^{(N)}$  (cf. 27.c) et du  $(-1)$  dans la définition de  $\Gamma_E^{(N)}$ , on obtient, dans la région euclidienne, l'identification (remarquez que notre définition des  $\Gamma^{(N)}$  coïncide avec celle d'Itzykson-Zuber, mais les  $\Gamma_E^{(N)}$  diffèrent d'un facteur  $(-1)$ ) :

$$\Gamma^{(N)}(k_i)|_E = -\Gamma_E^{(N)}(\mathbf{k}_{iE}). \quad (46)$$

Le passage des  $\Gamma^{(N)}$  aux fonctions de Green connexes  $G_c^{(N)}$  fait intervenir un produit de propagateurs externes :  $\prod_{j=1}^N G^{(2)}(k_j)$  dans le cas de Minskowski,  $\prod_{j=1}^N G_E^{(2)}(\mathbf{k}_{jE})$  dans le cas euclidien ; comme  $G^{(2)}(k)|_E = -iG_E^{(2)}(\mathbf{k}_E)$ , tenant compte du facteur  $(-i)$  de (27.c) ainsi que du  $(-1)$  dans la définition de  $\Gamma_E^{(N)}$ , on trouve pour les fonctions de Green connexes :

$$G_c^{(N)}(k_i)|_E = i(-i)^N G_{c,E}^{(N)}(\mathbf{k}_{i,E}). \quad (47)$$

Comme les fonctions de corrélation  $G_{c,E}^{(N)}(\mathbf{k}_E)$  sont calculables à partir de l'intégrale fonctionnelle :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int d^D x (\mathcal{H}(\varphi) - j(x) \varphi(x)) \right) \quad (48)$$

ainsi que nous l'avons vu en détail dans les deux premières parties, nous aurions pu établir (46) et (47) directement en comparant les expressions (34) et (48), sans passer par le développement perturbatif. En effet  $\mathcal{H}(x)$  n'est autre que le prolongement pour  $t \rightarrow -i\tau$  de  $\mathcal{L}(x)$  :

$$\square + m^2 \rightarrow - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^2.$$

Ceci généralise ce que nous avons vu au chapitre VIII dans le cas d'un degré de liberté : le prolongement euclidien  $t \rightarrow -i\tau$  permettait de passer d'un problème de mécanique quantique à un problème de mécanique statistique à 1 dimension. Ici nous voyons qu'un problème de théorie quantique des champs dans un espace-temps à  $D$  dimensions se prolonge analytiquement en un problème de mécanique statistique dans un espace à  $D$  dimensions. Le « hamiltonien »  $\mathcal{H}(x)$  des deux premières parties du livre doit donc être considéré comme le prolongement euclidien  $\mathcal{L}_E(x)$  du lagrangien  $\mathcal{L}(x)$  d'une théorie quantique des champs. C'est pourquoi on rencontre fréquemment la notation

$\mathcal{L}_E(x)$  au lieu de  $\mathcal{H}(x)$ . Des relations telles que (46) ou (47) peuvent être déduites de formules généralisant (VIII.57). Il suffit d'ailleurs de considérer la composante de temps, puisque c'est la seule à être affectée par le prolongement euclidien.

Notons enfin que la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$  peut être obtenue par le « postulat d'euclidicité » : par définition les fonctions de Green de la théorie quantique sont obtenues par prolongement analytique  $\tau \rightarrow i\tau$  à partir des fonctions de corrélation de la théorie euclidienne.

#### B.4. Equations du mouvement

Comme application de la formulation fonctionnelle, nous allons démontrer des équations du mouvement pour les fonctions de Green. Effectuons dans la fonctionnelle génératrice (34) le changement de variables :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varepsilon f(x)$$

où  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $f(x)$  est une fonction arbitraire. Comme  $\mathcal{D}\varphi$  est invariant dans cette translation, la valeur de  $Z(j)$  est inchangée, et développant à l'ordre  $\varepsilon$ , on obtient :

$$\int d^4y f(y) \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( iS[\varphi] + i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right) \times \\ \times \left[ \frac{\delta S}{\delta \varphi(y)} + j(y) \right] = 0.$$

Comme la fonction  $f$  est arbitraire, nous en déduisons :

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp \left( iS[\varphi] + i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right) \left[ \frac{\delta S}{\delta \varphi(y)} + j(y) \right] = 0. \quad (49)$$

Les équations du mouvement recherchées se démontrent en dérivant par rapport à  $j$  et en posant  $j = 0$  ; dérivant une fois, l'on trouve :

$$[Z(0)]^{-1} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \left[ i\varphi(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(y)} + \delta^{(4)}(x-y) \right] = 0.$$

Prenant comme exemple le lagrangien (1), cette équation devient (si  $V(\varphi)$  ne dépend pas des dérivées de  $\varphi$ ) :

$$[Z(0)]^{-1} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \{ \varphi(x) [(\square_y + m^2) \varphi(y) + V'(\varphi(y))] \} + \\ + i\delta^{(4)}(x-y) = 0.$$

Le résultat s'exprime aussi sous forme d'un produit- $T$ , en remarquant que l'on peut sortir les dérivations par rapport à  $y$  de l'intégration fonctionnelle :

$$(\square_y + m^2) \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle + \langle 0 | T(\varphi(x) V'(\varphi(y))) | 0 \rangle = -i \delta^{(4)}(x - y). \quad (50)$$

Bien que  $\delta S / \delta \varphi(y) = 0$  au niveau classique, on notera que :

$$\langle 0 | T \left( \varphi(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(y)} \right) | 0 \rangle$$

qui est équivalent au membre de gauche de (50), n'est pas nul. La fonction  $\delta^{(4)}(x - y)$  vient évidemment de ce que l'opérateur de Klein-Gordon  $(\square_y + m^2)$  ne « commute pas » avec le produit- $T$  (cf. exercice IX.8). Cette remarque permettrait bien sûr de donner une démonstration directe de l'équation (50). Retenons de cette discussion le point important suivant : supposons que l'on ait obtenu une certaine identité à l'aide du formalisme fonctionnel ; lorsque l'on écrit cette identité en termes de valeur moyenne sur le vide de produits- $T$ , *il faut faire passer les opérations de dérivation à l'extérieur du produit- $T$ .*

En dérivant  $N$  fois l'équation (49) on obtient l'équation du mouvement générale :

$$\begin{aligned} (\square_y + m^2) G^{(N+1)}(y, x_1, \dots, x_N) + \\ + \langle 0 | T(V'(\varphi(y)) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle = \\ = -i \sum_{j=1}^N \delta^{(4)}(y - x_j) G^{(N-1)}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N), \quad (51) \end{aligned}$$

### C. SECTIONS EFFICACES ET MATRICE $S$

La dynamique des particules élémentaires est accessible par l'observation de désintégrations de particules, et surtout par l'observation des collisions de particules dans les accélérateurs. Dans ce dernier cas, les quantités mesurables sont les sections efficaces, et il nous faut d'abord relier ces sections efficaces aux éléments de matrice  $S$ . Il faudra ensuite relier les éléments de matrice  $S$  aux fonctions de Green, que nous avons appris à calculer, au moins en théorie des perturbations. Cette relation est établie grâce aux « formules de réduction », mais le formalisme nécessaire à la démonstration de ces formules est assez lourd, particulièrement dans le cas de particules de spin  $\neq 0$ , et je commencerai par utiliser une méthode moins rigoureuse, mais plus intuitive. On définit

en général la matrice  $T$ , qui contient la partie non triviale de la matrice  $S$ , par la relation suivante pour les éléments de matrice  $i \rightarrow f$  :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - K_i) T_{fi} \quad (52)$$

où  $K_i(K_f)$  est le quadri-moment de l'état initial (final).

### C.1. Sections efficaces

Dans ce calcul il est important de noter la normalisation des états : si  $|\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ , la relation d'orthonormalisation est, d'après (IX.41) :

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

et la relation de fermeture, dans le sous-espace à une particule de l'espace de Fock s'écrit :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = \mathbb{1}_1.$$

Partons d'un état initial formé de deux paquets d'ondes :

$$|i, \text{in}\rangle = \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 f_1(\mathbf{k}_1) f_2(\mathbf{k}_2) |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \text{in}\rangle$$

où :

$$d\tilde{k} = d^3k / [(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}].$$

A chaque paquet d'ondes correspond une solution d'énergie positive de l'équation de Klein-Gordon :

$$f(x) = \int d\tilde{k} e^{-ikx} f(\mathbf{k}) \quad (53)$$

le produit scalaire étant défini par (cf. IX.38) :

$$(f, g) = i \int d^3x f^* \vec{\partial}_0 g = \int d\tilde{k} f^*(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}).$$

La probabilité de transition

$$w_{fi} = |\langle f, \text{out} | i, \text{in} \rangle|^2$$

est donnée en fonction de l'élément de matrice  $T$  :  $\langle f | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle$  par

(cf. (52) ; l'indice « in » est omis afin d'alléger les notations) :

$$w_{fi} = \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 d\tilde{k}'_1 d\tilde{k}'_2 f_1^*(\mathbf{k}_1) f_2^*(\mathbf{k}_2) f_1(\mathbf{k}'_1) f_2(\mathbf{k}'_2) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - k_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \\ \times \langle f | T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle^* \langle f | T | \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 \rangle . \quad (54)$$

Si le moment du paquet d'ondes est bien défini,  $f(\mathbf{k}_i)$  est piqué au voisinage de  $\mathbf{k}_i = \underline{\mathbf{k}}_i$ . Nous supposons que l'élément de matrice varie peu au voisinage de  $(\underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2)$  :

$$\langle f | T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle \simeq \langle f | T | \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2 \rangle . \quad (55)$$

Transformons une des fonctions  $\delta$  dans (54) :

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) = \int d^4x e^{i(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)x}$$

et effectuons l'intégration sur les  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}'_i$  en faisant l'approximation (55) :

$$w_{fi} = \int d^4x |f_1(x)|^2 |f_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - \underline{k}_1 - \underline{k}_2) \times \\ \times |\langle f | T | \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2 \rangle|^2 . \quad (56)$$

$w_{fi}$  est une probabilité de transition intégrée sur l'espace et le temps : c'est l'intégrale d'une probabilité de transition par unité de volume et de temps :

$$\frac{dw_{fi}}{dV dt} = |f_1(x)|^2 |f_2(x)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - \underline{k}_1 - \underline{k}_2) |\langle f | T | \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2 \rangle|^2 \quad (57)$$

Mais si le moment du paquet d'ondes est bien défini on doit avoir :

$$f(x) \simeq e^{-i\mathbf{k} \cdot x} F(x)$$

où  $F(x)$  est une fonction lentement variable, car le paquet d'ondes est étendu. Dans ce cas :

$$if^*(x) \ddot{\partial}_\mu f(x) \simeq 2 k_\mu |f(x)|^2 .$$

Supposons que la particule 1 soit la particule incidente, et la particule 2 la particule cible, immobile dans le référentiel du laboratoire. Le

nombre de particules cibles par unité de volume est :

$$\frac{dn_2}{dV} \simeq 2 \omega_2 |f_2(x)|^2 \quad (58)$$

(en utilisant la notation abrégée :  $\omega_2 = \omega_{k_2}$ ), et comme la particule cible est au repos,  $\omega_2 = m_2$ . Le flux de particules incidentes est :

$$\frac{\|\mathbf{k}_1\|}{\omega_1} 2 \omega_1 |f_1(x)|^2 = 2 \|\mathbf{k}_1\| |f_1(x)|^2. \quad (59)$$

Reste à utiliser la définition de la section efficace :

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{dV dt} \frac{d\Phi}{(\text{Flux}) (\text{densité de cible})}$$

où  $d\Phi$  est l'espace de phase, pour obtenir, à partir de (57), (58) et (59) :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - k_1 - k_2)}{4 m_2 \|\mathbf{k}_1\|} |\langle f | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle|^2 d\Phi.$$

Le « facteur de flux »  $m_2 \|\mathbf{k}_1\| = F$  peut s'écrire sous forme invariante de Lorentz :

$$F = [(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}. \quad (60)$$

Si l'on veut calculer la section efficace d'observation des  $N$  particules finales de moments  $(\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_N)$  dans une certaine région de l'espace de phase, il faudra intégrer avec la mesure d'intégration :

$$d\Phi^{(N)} = d\tilde{k}'_1 \dots d\tilde{k}'_N = \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2 \omega'_1} \dots \frac{d^3 k'_N}{(2\pi)^3 2 \omega'_N}. \quad (61)$$

Nous écrirons donc le résultat final pour  $d\sigma$  sous la forme :

$$d\sigma = \frac{1}{4F} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - k_1 - k_2) |\langle f | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle|^2 \times$$

$$\times \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2 \omega'_1} \dots \frac{d^3 k'_N}{(2\pi)^3 2 \omega'_N} \mathcal{S} \quad (62)$$

où  $K_f = \sum_{i=1}^N k'_i$  et  $\mathcal{S}$  est un facteur statistique égal à  $\prod_i (1/m_i!)$ , s'il y a dans l'état final  $m_i$  particules identiques de type (i).

Un calcul analogue (exercice 3) montre que le taux de désintégration

d'une particule d'énergie  $\omega$ , qui donne  $N$  particules finales  $k'_1, \dots, k'_N$  est :

$$d\Gamma = \frac{1}{2\omega} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(k - \sum_1^N k'_i\right) |\langle f|T|\mathbf{k}\rangle|^2 \times \\ \times \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2\omega'_1} \cdots \frac{d^3k'_N}{(2\pi)^3 2\omega'_N} \mathcal{S}. \quad (63)$$

### C.2. Application : 2 particules $\rightarrow$ 2 particules

Afin d'illustrer le résultat (62), appliquons-le au cas d'une réaction 2 particules  $\rightarrow$  2 particules :

$$k_1 + k_2 \rightarrow k'_1 + k'_2$$

en calculant la section efficace  $d\sigma/d\Omega$  dans le référentiel du centre de masse. A cause de l'invariance par rotation autour de  $\mathbf{k}_1$ , la section efficace ne dépend évidemment pas de l'angle azimuthal  $\varphi$ , mais seulement de l'angle polaire  $\theta$  (figure 4).

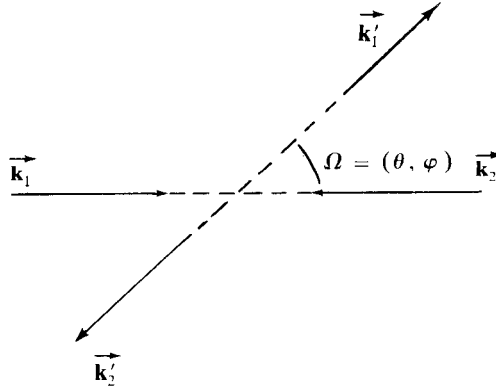


Figure 4. Cinématique à deux particules.

Plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse avec :

$$k_1 = (\omega_1, \mathbf{k}); \quad k_2 = (\omega_2, -\mathbf{k}); \quad s = E^2 = (k_1 + k_2)^2.$$

Un calcul cinématique simple (exercice 2) donne :

$$F = \sqrt{s} \|\mathbf{k}\|. \quad (64)$$

Evaluons maintenant l'espace de phase  $d\Phi^{(2)}$  à 2 particules :

$$d\Phi^{(2)} = \int \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2\omega'_1} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3 2\omega'_2} (2\pi)^4 \delta(K_i - k'_1 - k'_2).$$

L'intégration sur  $d^3k'_2$  est immédiate ; après cette intégration il reste une fonction  $\delta$  et :

$$\begin{aligned} \int d^3k' \delta(E - \omega'_1 - \omega'_2) &= \int k'^2 dk' d\Omega \delta(E - \omega'_1 - \omega'_2) \\ &= \frac{\omega'_1 \omega'_2 k'}{E} d\Omega \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est l'angle solide et où l'on a utilisé :

$$\frac{d}{dk'} (\omega'_1 + \omega'_2) = \frac{k'}{\omega'_1} + \frac{k'}{\omega'_2} = \frac{k' E}{\omega'_1 \omega'_2} \quad \text{car} \quad \omega'_i = \sqrt{\mathbf{k}'^2 + m_i'^2}.$$

L'espace de phase  $d\Phi^{(2)}$  vaut donc :

$$d\Phi^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^2 4E} d\Omega = \frac{k' d\Omega}{16\pi^2 \sqrt{s}}. \quad (65)$$

Reportant (64) et (65) dans (62) on obtient l'expression de  $d\sigma/d\Omega$  :

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\|\mathbf{k}'\|}{\|\mathbf{k}\|} \left| \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 | T | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle \right|^2}. \quad (66)$$

### C.3. Calcul d'un élément de matrice $S$

Avant de démontrer la relation générale entre les éléments de matrice  $S$  (ou  $T$ ) et les fonctions de Green, nous allons expliquer sur un exemple simple comment on peut calculer perturbativement ces éléments de matrice. Nous aurons besoin du théorème de Wick pour les produits d'opérateurs  $(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N))$  ; le résultat est très simple : il suffit de reprendre l'équation (IX.86) et de remplacer dans le membre de droite les contractions  $\overline{\varphi(x_1)} \varphi(x_2)$  par :

$$\underbrace{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} = \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle$$

où l'indice « in » a été omis ;  $\varphi_{\text{in}}(x) \rightarrow \varphi(x)$ . On obtient par exemple dans le cas du produit de deux champs :

$$\varphi(x_1) \varphi(x_2) = : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : + \underbrace{\varphi(x_1) \varphi(x_2)}.$$

La démonstration de ce théorème est élémentaire et est proposée à l'exercice 4. Essayons de calculer au deuxième ordre des perturbations l'élément de matrice  $S$  pour le processus :

$$k_1 + k_2 \rightarrow k'_1 + k'_2$$

dans le cadre de la théorie décrite par le lagrangien (3.b).

Le développement au deuxième ordre de (16) est :

$$S_2(x', x) = \left( \frac{-ig}{4!} \right)^2 T(: \varphi^4(x') :: \varphi^4(x) :). \quad (67)$$

La première réaction pour évaluer  $S_{fi}$  est d'écrire l'élément de matrice :

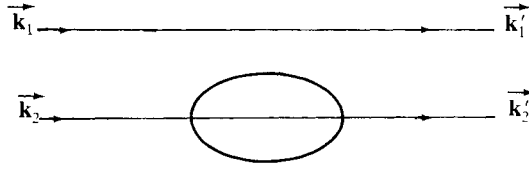
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 | S_2(x', x) | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle = \\ = \langle 0 | a(\mathbf{k}'_1) a(\mathbf{k}'_2) S_2(x', x) a^\dagger(\mathbf{k}_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (68)$$

Cette expression est correcte à cet ordre de la théorie des perturbations, mais on doit en général tenir compte d'un facteur multiplicatif que nous déterminerons plus loin, et que nous ignorons pour le moment. Pour évaluer  $S_2$  on développe (67) à l'aide du théorème de Wick :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4!)^2} T(: \varphi^4(x) :: \varphi^4(x') :) = \\ = \frac{1}{(4!)^2} : \varphi^4(x') \varphi^4(x) : + \frac{1}{(3!)^2} \overline{\varphi(x')} \varphi(x) \times \\ \times : \varphi^3(x') \varphi^3(x) : + \frac{1}{8} (\overline{\varphi(x')} \varphi(x))^2 : \varphi^2(x') \varphi^2(x) : + \\ + \frac{1}{3!} (\overline{\varphi(x')} \varphi(x))^3 : \varphi(x') \varphi(x) : + \frac{1}{4!} (\overline{\varphi(x')} \varphi(x))^4 \end{aligned} \quad (69)$$

où les facteurs tels que  $1/8$  sont évidemment reliés aux facteurs de symétrie. On peut maintenant appliquer le théorème de Wick pour les produits d'opérateurs afin d'évaluer la valeur moyenne sur le vide dans (68). Les seuls termes non nuls sont ceux qui contiennent uniquement des contractions. De plus une contraction comme  $\overline{a(\mathbf{k}'_1)} a^\dagger(\mathbf{k}_1)$  donne un facteur  $\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1)$ , c'est-à-dire une particule se propageant sans interactions (figure 5).

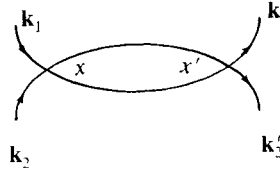
Un tel terme correspond à un diagramme non connexe pour la matrice  $S$ . Nous cherchons à calculer les termes connexes et dans ce cas nous voyons que tous les opérateurs « extérieurs »  $a$  et  $a^\dagger$  doivent être contractés avec des opérateurs « intérieurs »  $\varphi(x')$ ,  $\varphi(x)$ . Seul le

Figure 5. Diagramme non connexe pour la diffusion  $2 \rightarrow 2$ .

troisième terme de (69) contribue aux éléments de matrice  $S$  connexes, grâce aux contractions du type :

$$\underbrace{a(\mathbf{k}'_1)} \varphi(x') \underbrace{a(\mathbf{k}'_2)} \varphi(x') (\overline{\varphi(x')} \varphi(x))^2 \underbrace{\varphi(x)} a^\dagger(\mathbf{k}_1) \underbrace{\varphi(x)} a^\dagger(\mathbf{k}_2)$$

que l'on pourra représenter par le graphe de la figure 6 :

Figure 6. Une contribution à la diffusion  $2 \rightarrow 2$ .

Il y a quatre possibilités pour construire ce graphe, d'où le facteur de symétrie usuel  $4 \times 1/8 = 1/2$ , et de plus on peut obtenir trois autres graphes par permutation des lignes externes ; la permutation de  $x$  et  $x'$  compense le  $1/2$  ! du développement de l'exponentielle.

Le calcul des contractions  $\underbrace{a(\mathbf{k})} \varphi(x)$  est immédiat à partir de la représentation de Fourier (IX.40) de  $\varphi(x)$  et de la relation de commutation (IX.41) qui implique :

$$\langle 0 | a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

et l'on trouve :

$$\underbrace{a(\mathbf{k})} \varphi(x) = e^{ikx} ; \quad \underbrace{\varphi(x)} a^\dagger(\mathbf{k}) = e^{-ikx}. \quad (70)$$

L'élément de matrice  $S$  au deuxième ordre de la théorie des perturbations sera :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 | S | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rangle = \\ \frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x d^4x' e^{i(k'_1 + k'_2)x'} e^{-i(k_1 + k_2)x} [\Delta_F(x' - x)]^2 + \text{Perm.} \end{aligned} \quad (71)$$

Si nous comparons ce résultat à celui du calcul d'une fonction de Green connexe à 4 points  $G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , nous constatons que les propagateurs externes comme  $\Delta_F(x_1 - x)$  ont été remplacés par des exponentielles :  $\exp(-ikx)$  pour une particule entrante,  $\exp(ikx)$  pour une particule sortante (\*) : les éléments de matrice  $S$  sont donc des transformées de Fourier de fonctions de Green  $G_c$  amputées de leurs propagateurs externes  $\Delta_F(x_1 - y_1)$ , ou dans l'espace de Fourier, des fonctions de Green amputées des facteurs  $i/(k^2 - m^2)$  ; de plus les lignes externes sont « sur couche de masse » :  $k_i^2 = k_i'^2 = m^2$ ,  $k_{i0}, k_{i0}' > 0$ . Il faut prendre garde au fait qu'une telle fonction de Green n'est pas un vertex propre, car elle n'est pas en général 1-particule irréductible : elle peut comprendre en particulier des insertions d'énergie propre sur les lignes externes (cf. figure 7). Donnons maintenant une démonstration plus complète, en établissant les formules de réduction.

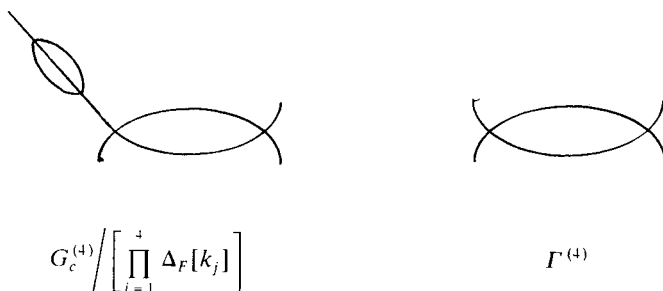


Figure 7.

#### C.4. Formules de réduction

Pour démontrer les formules de réduction, nous pourrions partir de la relation (6) (cf. cours de Bros), mais il est plus simple, quoique moins rigoureux, de suivre le formalisme original de Lehmann, Symanzik et Zimmermann (LSZ) en utilisant la condition asymptotique (7) :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(x) = Z_3^{1/2} \varphi_{\text{in}}(x) ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x) = Z_3^{1/2} \varphi_{\text{out}}(x). \quad (72)$$

Afin d'alléger les notations, contentons-nous d'étudier une diffusion 2 particules  $\rightarrow$  2 particules. Le calcul est fait en utilisant la *représentation de*

(\*) Dans (70) et (71),  $\exp(ikx) = \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  : les exponentielles contiennent implicitement un facteur  $\theta(k^0)$  et  $k^2 = m^2$ .

*Heisenberg*, où les états sont indépendants du temps, et l'élément de matrice  $S$  est donné par (cf. 5.a) :

$$S_{fi} = \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 \text{ out} | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \text{ in} \rangle = \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{k}_1) | \mathbf{k}_2 \rangle \quad (73)$$

(l'état à une particule étant stable,  $|\mathbf{k}, \text{out}\rangle = |\mathbf{k}, \text{in}\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ ). Utilisons l'expression de  $a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{k}_1)$  :

$$a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{k}_1) = -i \int d^3x e^{-ik_1 x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\text{in}}(x) \quad (74)$$

qui s'obtient aisément par comparaison avec (IX.20.b), ainsi que (72) :

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -iZ_3^{-1/2} \int_t d^3x e^{-ik_1 x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle .$$

Comme :

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int_t d^3x \psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \int d^3x \psi(t, \mathbf{x})$$

on obtient :

$$S_{fi} = \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | a_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{k}_1) | \mathbf{k}_2 \rangle + \\ + iZ_3^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-ik_1 x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle] . \quad (75)$$

Le premier terme de (75) est un terme disconnecté, contenant par exemple une fonction  $\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1)$ , et nous allons l'ignorer. Effectuons dans le second terme des intégrations par parties (en toute rigueur il faudrait travailler avec des paquets d'ondes, et non des ondes planes, ce qui justifie les intégrations par parties dans l'espace) :

$$\partial_0^2 e^{-ik_1 x} = -\omega_1^2 e^{-ik_1 x} = -(\mathbf{k}_1^2 + m^2) e^{-ik_1 x} \rightarrow (\nabla^2 - m^2) e^{-ik_1 x} \\ \int d^4x [(\nabla^2 - m^2) e^{-ik_1 x}] \langle \dots | \varphi(x) | \dots \rangle = \\ = \int d^4x e^{-ik_1 x} (\nabla^2 - m^2) \langle \dots | \varphi(x) | \dots \rangle$$

et (75) devient :

$$S_{fi} = \text{Disc.} + iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{-ik_1 x} (\square_x + m^2) \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle . \quad (76)$$

On continue l'opération en transformant l'élément de matrice dans (76) :

$$\langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \text{out} | \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle = \langle \mathbf{k}'_2 | a_{\text{out}}(\mathbf{k}'_1) \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle = \\ = \lim_{t' \rightarrow \infty} iZ_3^{-1/2} \int d^3x' e^{ik'_1 x'} \overleftrightarrow{\partial}'_0 \langle \mathbf{k}'_2 | \varphi(x') \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle .$$

Comme  $t' = x'_0 \rightarrow \infty$ , on peut remplacer  $\varphi(x') \varphi(x)$  par un produit  $T$ :  $T(\varphi(x') \varphi(x))$ . Il suffit de répéter les manipulations précédentes pour obtenir :

$$\langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 \text{ out} | \varphi(x) | \mathbf{k}_2 \rangle = \langle \mathbf{k}'_2 | \varphi(x) a_{\text{in}}(\mathbf{k}'_2) | \mathbf{k}_2 \rangle + \\ + iZ_3^{-1/2} \int d^4x' e^{ik'_1 x'} (\square_{x'} + m^2) \langle \mathbf{k}'_2 | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \mathbf{k}_2 \rangle \quad (77)$$

où le premier terme est un terme non connexe. Il est clair que l'on peut continuer l'opération pour les particules  $\mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{k}'_2$  et obtenir pour l'élément de matrice  $S$  connexe (parce qu'il y a seulement deux particules initiales) une valeur moyenne sur le vide :

$$S_{fi | \text{connexe}} = (i)^4 (Z_3^{-1/2})^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 \times \\ \times e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} e^{i(k'_1 x'_1 + k'_2 x'_2)} (\square_{x_1} + m^2) (\square_{x_2} + m^2) \\ \times (\square_{x'_1} + m^2) (\square_{x'_2} + m^2) \langle 0 | T(\varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x'_1) \varphi(x'_2)) | 0 \rangle. \quad (78)$$

Il est clair également que cette formule se généralise à un élément de matrice  $S$  quelconque avec les règles suivantes :

— un facteur  $iZ_3^{-1/2} e^{-ikx} (\square_x + m^2)$  est associé à chaque particule entrante,

— un facteur  $iZ_3^{-1/2} e^{ik'x'} (\square_{x'} + m^2)$  est associé à chaque particule sortante.

La valeur moyenne sur le vide dans (78) est une fonction de Green, et le facteur  $i(\square_x + m^2)$  correspond à l'amputation d'un propagateur externe  $\Delta_F$  ; dans l'espace de Fourier ce facteur vaut  $-i(k^2 - m^2)$ . La règle générale pour l'élément de matrice  $S$  connexe  $\langle \mathbf{k}'_1 \dots \mathbf{k}'_n, \text{out} | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N, \text{in} \rangle_c$  sera finalement (pour éviter toute ambiguïté, j'écris explicitement les facteurs  $\theta(k^0)$  implicites dans les équations qui précèdent) :

$$\langle \mathbf{k}'_1 \dots \mathbf{k}'_M \text{ out} | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N \text{ in} \rangle_c = \\ = \lim_{k_j^2 \rightarrow m^2} \prod_{j=1}^N [-iZ_3^{-1/2} (k_j^2 - m^2) \theta(k_j^0)] \lim_{k'_l{}^2 \rightarrow m^2} \prod_{l=1}^M [-iZ_3^{-1/2} \times \\ \times (k'_l{}^2 - m^2) \theta(k'_l{}^0)] G_c^{(N+M)}(k_1, \dots, k_N; -k'_1, \dots, -k'_M)$$

(79)

Le signe  $(-)$  pour les particules finales tient compte du fait qu'avec nos conventions (cf. équation (28)), tous les moments sont supposés entrer

dans le diagramme, alors que pour les particules sortantes  $k'$  est un moment sortant du diagramme.

### C.5. Matrice $S$ et fonctions de Green renormalisées

Il reste à faire le lien entre le facteur  $Z_3$  apparaissant dans la formule de réduction (79) et la constante de renormalisation  $Z_3$  introduite au chapitre VI. Examinons d'abord l'élément de matrice du champ  $\varphi(x)$  entre le vide et l'état à une particule  $|\mathbf{k}\rangle$  (rappelons que par un choix de phases convenable,  $|\mathbf{k}_{\text{in}}\rangle = |\mathbf{k}_{\text{out}}\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ ), en utilisant l'opérateur d'énergie-moment  $P_\mu$ , qui est aussi le générateur des translations d'espace-temps :

$$\langle 0 | \varphi(x) | \mathbf{k} \rangle = \langle 0 | e^{iPx} \varphi(0) e^{-iPx} | \mathbf{k} \rangle = (\text{Cte}) e^{-ikx} \quad (80)$$

tandis que :

$$\langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) | \mathbf{k} \rangle = e^{-ikx}.$$

En prenant la limite  $t \rightarrow -\infty$ , et grâce à la condition asymptotique (72), on constate que la constante dans (80) doit être égale à  $Z_3^{1/2}$ ; prenant la limite  $t \rightarrow +\infty$ , on montre que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x) =$

$Z_3^{1/2} \varphi_{\text{out}}(x)$ , ce qui avait été admis sans démonstration précédemment. Supposons maintenant que nous essayons de calculer une expression du propagateur complet  $G^{(2)}(x-y)$  en isolant la contribution de l'état à 1 particule :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle = \left\{ \theta(x^0 - y^0) \sum_{\mathbf{k}} \langle 0 | \varphi(x) | \mathbf{k} \rangle \times \right. \\ &\times \langle \mathbf{k} | \varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \sum_{\mathbf{k}} \langle 0 | \varphi(y) | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \varphi(x) | 0 \rangle \Big\} + \\ &+ \left\{ \theta(x^0 - y^0) \sum_n \langle 0 | \varphi(x) | n \rangle \langle n | \varphi(y) | 0 \rangle + \right. \\ &+ \theta(y^0 - x^0) \sum_n \langle 0 | \varphi(y) | n \rangle \langle n | \varphi(x) | 0 \rangle \Big\} \end{aligned}$$

où  $\sum_n$  désigne une somme sur un système complet d'états, à l'exclusion des états à une particule (et du vide).

Dans le premier crochet, nous pouvons utiliser l'expression (80) avec  $(\text{Cte}) = Z_3^{1/2}$  pour évaluer l'élément de matrice ; le premier crochet

n'est autre que  $Z_3 \Delta_F(x-y; m^2)$  : si nous avons utilisé un champ libre, seul l'état à une particule pourrait donner une contribution. On obtient donc :

$$G^{(2)}(x-y) = Z_3 \Delta_F(x-y; m^2) + \dots$$

ou dans l'espace de Fourier (cf. exercice 5) :

$$G^{(2)}(k) = \frac{iZ_3}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} dm'^2 \rho(m'^2) \Delta_F(k; m'^2) \quad (81)$$

où la « fonction spectrale »  $\rho(m^2)$  est positive ; l'expression (81) est la représentation de Källen-Lehmann du propagateur. Nous n'avons effectué pour le moment aucune renormalisation (sauf celle de masse :  $m$  dans (81) est la masse physique), et  $\varphi(x)$  doit être considéré pour le moment comme le champ nu :  $\varphi(x) \rightarrow \varphi_0(x)$ , dont la normalisation est fixée par les RCC. Après renormalisation

$$\varphi_0(x) = \hat{Z}_3^{1/2} \varphi_R(x)$$

où  $\varphi_R(x)$  est le champ renormalisé et  $\hat{Z}_3$  la constante de renormalisation du champ (cf. VI.30) (\*) ; examinons d'abord le comportement du propagateur au voisinage de  $k^2 = m^2$  :

$$G_R^{(2)}(k) \underset{k^2 \rightarrow m^2}{\simeq} \frac{iZ_3 \hat{Z}_3^{-1}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{iz_3}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (82)$$

ce qui définit la constante  $z_3$  :  $iz_3$  est le résidu du pôle du propagateur renormalisé à  $k^2 = m^2$ . Nous allons exprimer la section efficace en fonction des fonctions de Green connexes amputées de leurs propagateurs complets  $\bar{G}_c^{(N)}(k_i)$  (cf. 27.b) ; l'indice 0 désigne une fonction de corrélation nue. Nous observons que :

$$\lim_{k^2 \rightarrow m^2} (k^2 - m^2) G_0^{(2)}(k) = iZ_3$$

(\*) Compte tenu des infinités dans  $\delta m^2$  et  $Z_3$ , le raisonnement menant à l'équation (83) n'a qu'une valeur heuristique. On se contentera de noter les deux propriétés cruciales : (1) les éléments de matrice- $S$  sont des invariants du groupe de renormalisation, (2) la matrice- $S$  obéit à la propriétés d'unitarité, au moins ordre par ordre en théorie des perturbations (paragraphe D.2).

et par conséquent (afin d'alléger l'écriture, nous ne faisons pas la distinction entre particules entrantes et sortantes) :

$$\begin{aligned} \lim_{k_i^2 \rightarrow m^2} \left\{ \prod_{i=1}^{N+M} -i(k_i^2 - m^2) \right\} Z_3^{-(N+M)/2} G_{c,0}^{(N+M)}(k_i) &= Z_3^{(N+M)/2} \times \\ &\times \bar{G}_{c,0}^{(N+M)}(k_i) = (Z_3 \hat{Z}_3^{-1})^{(N+M)/2} \bar{G}_{c,R}^{(N+M)}(k_i) \\ &= z_3^{(N+M)/2} \bar{G}_{c,R}^{(N+M)}(k_i) \end{aligned}$$

étant donné que les  $\bar{G}^{(N)}$  se transforment comme les  $\Gamma^{(N)}$  par renormalisation. L'expression de la matrice  $S$  en fonction des quantités renormalisées sera finalement :

$$\boxed{\langle \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_M \text{ out} | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N \text{ in} \rangle_c = \lim_{k_i^2 \rightarrow m^2} \lim_{k_j'^2 \rightarrow m^2} z_3^{(N+M)/2} \bar{G}_{c,R}^{(N+M)}(k_1, \dots, k_N; -k'_1, \dots, -k'_M)} \quad (83)$$

Dans la renormalisation sur couche de masse, le facteur  $z_3$  est égal à 1 par définition (c'est un avantage de ce schéma) mais dans tout autre schéma (MS, ...) il importe de ne pas l'oublier. La méthode suivie pour obtenir (83) montre que l'élément de matrice  $S$  est indépendant du schéma de renormalisation : en d'autres termes c'est, comme il se doit, un invariant du groupe de renormalisation.

En pratique, pour calculer les éléments de matrice  $S$ , on pourra utiliser la technique du paragraphe C.3 qui est plus simple que les formules de réduction dans le cas de particules à spin. Il suffira de multiplier le résultat par la puissance de  $z_3$  convenable.

## C.6. Unitarité et renormalisation

Il est loin d'être évident que l'unitarité de la matrice  $S$ , ainsi que les propriétés de localité de la théorie survivent au processus de renormalisation. Que tout se passe bien est le résultat des travaux (techniquement complexes) rassemblés sous le sigle BPHZ et de ceux de Epstein et Glaser <sup>(3)</sup>.

Un argument convaincant et (relativement) simple est donné par la construction de Bogolioubov, esquissée au paragraphe A. Cet argument consiste à montrer que les contre-terms ont précisément la forme requise dans cette construction : le contre-terme d'ordre  $p$  peut s'écrire comme une contribution à  $S_p(x_1, \dots, x_p)$  ; cette contribution est un opérateur antihermitique, et c'est un

polynôme construit avec le champ et ses dérivées, différent de zéro seulement au point  $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ . Il préserve les propriétés d'unitarité et de causalité de la matrice  $S$ .

Donnons un exemple en partant du lagrangien (4) ; à l'ordre  $g^2$  de la théorie des perturbations, le contre-terme  $\delta\mathcal{L}$  comprend un contre-terme de masse et un contre-terme de renormalisation du champ :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} \delta m^2 : \varphi^2(x) : - \frac{1}{2} (Z_3 - 1) : \varphi(x)(\square_x + m^2) \varphi(x) :$$

Tenant compte de ce contre-terme, la matrice  $S$  à l'ordre 2 devient :

$$S_2(x_1, x_2) = \left( \frac{-ig}{3!} \right)^3 : \varphi^3(x_1) : : \varphi^3(x_2) : + iA_2(x_1, x_2) \quad (84)$$

avec :

$$A_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \delta m^2 : \varphi(x_1) \delta(x_1 - x_2) \varphi(x_2) : - \\ - \frac{1}{2} (Z_3 - 1) : \varphi(x_1)(\square_{x_1} + m^2) \delta(x_1 - x_2) \varphi(x_2) : \quad (85)$$

Les expressions (84) et (85) ont bien toutes les propriétés requises :  $iA_2(x_1, x_2)$  est antihermitique et s'annule pour  $x_1 \neq x_2$ .

## D. UNITARITÉ DE LA MATRICE $S$

L'unitarité de la matrice  $S$  ( $S^\dagger = S^{-1}$ ) est une propriété cruciale, car elle assure la conservation de la probabilité. Si celle-ci n'est pas assurée, la théorie perd toute signification. Ce paragraphe est consacré à l'étude de deux problèmes :

— admettant  $S^\dagger = S^{-1}$ , nous allons en déduire dans un cas simple une propriété importante des éléments de matrice  $T$ ,

— nous allons établir de façon générale les « règles de coupure » des diagrammes, qui permettent de vérifier l'unitarité de la matrice  $S$  ; ceci peut être très utile quand on construit la théorie à partir d'une intégrale de chemin, auquel cas la propriété d'unitarité n'est pas évidente.

### D.1. Unitarité et relation de dispersion

Reprenons l'exemple favori de ce chapitre : une contribution d'ordre deux à la diffusion  $k_1 + k_2 \rightarrow k'_1 + k'_2$  dans la théorie en  $\varphi^4$ , correspondant au graphe de la figure 6 : ce graphe a été calculé au paragraphe B, équation (41) ; le facteur  $(-i)$  provenant de la définition (52) de la

matrice  $T$  est identique à celui de  $\Gamma^{(N)}$  (cf. 27.c). D'autre part, au lieu d'effectuer la normalisation à  $k_i = 0$ , on peut la faire en un point  $s_0 < 4m^2$ , où  $s = (k_1 + k_2)^2$ . Dans ces conditions l'expression de  $T^{(2)}$  devient :

$$T^{(2)}(s, s_0) = \frac{-g^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 - sx(1-x)}{m^2 - s_0x(1-x)} \right]. \quad (86)$$

Il est commode de faire le changement de variables :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y; \quad x(1-x) = \frac{1}{4}(1-y^2)$$

$$T^{(2)}(s, s_0) = \frac{-g^2}{16(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dy \ln \left[ \frac{4m^2 - s(1-y^2)}{4m^2 - s_0(1-y^2)} \right]. \quad (87)$$

Le logarithme est bien défini pour  $(1-y^2) < (4m^2/s)$ , et présente un point de branchement à  $s = 4m^2/(1-y^2)$ . Comme les points de branchement se trouvent sur l'axe réel quand  $y$  varie, nous allons définir  $T^{(2)}(s, s_0)$  dans un plan coupé de  $4m^2$  à l'infini (figure 8), la

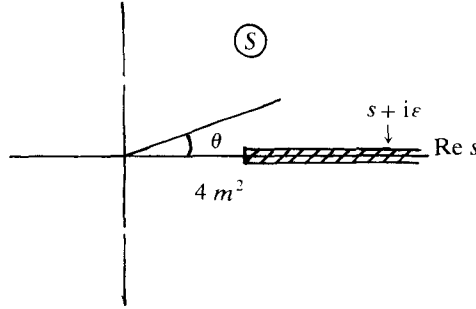


Figure 8. Le plan coupé de la variable  $s$ .

détermination du logarithme étant réelle pour  $s$  réel  $< 4m^2$ , tandis que pour  $s(1-y^2) \geq 4m^2$  :

$$\ln(4m^2 - s(1-y^2)) = \ln |4m^2 - s(1-y^2)| + i(\theta - \pi). \quad (88)$$

$T^{(2)}(s)$  est alors une fonction analytique de  $s$  dans le plan coupé, l'intégrale sur  $y$  étant uniformément convergente. La prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$  implique que  $T^{(2)}(s, s_0)$  doit être défini, pour  $s \geq 4m^2$ , par :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T^{(2)}(s + i\epsilon, s_0). \quad (89)$$

Autrement dit on doit approcher la coupure dans le demi-plan  $\text{Im } s > 0$ . On en déduit  $\text{Im } T^{(2)}(s, s_0)$  :

$$\text{Im } T^{(2)}(s, s_0) = \frac{\pi g^2}{16(2\pi)^2} \int_{-(1-4m^2/s)^{1/2}}^{(1-4m^2/s)^{1/2}} dy = \frac{\pi g^2}{8(2\pi)^2} \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}}. \quad (90)$$

Considérons de façon générale une fonction  $f(s)$  de la variable complexe  $s$ , analytique dans le plan coupé de  $4m^2$  à l'infini, et qui de plus vérifie la propriété *d'analyticité réelle*

$$f^*(s) = f(s^*). \quad (91)$$

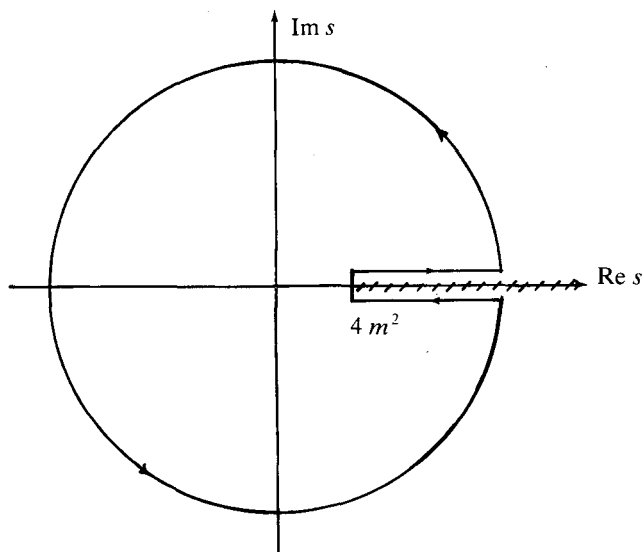


Figure 9. Contour pour le théorème de Cauchy.

En appliquant le théorème de Cauchy au contour  $C$  de la figure 9, et en supposant que l'intégrale sur le grand cercle tend vers zéro, on obtient :

$$f(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} [f(s' + i\varepsilon) - f(s' - i\varepsilon)]$$

soit :

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } f(s') ds'}{s' - s} \quad (92)$$

où, pour passer de la première ligne à la seconde, on a utilisé la propriété (91) :

$$f(s' + i\varepsilon) - f(s' - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} f(s' + i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} f(s')$$

(par convention on écrira  $f(s)$  au lieu de  $f(s + i\varepsilon)$  quand il n'y a pas de confusion possible). Si l'intégrale le long du grand cercle ne tend pas vers zéro, on fait une (ou plusieurs) soustraction(s) :

$$f(s) - f(s_0) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)}. \quad (93)$$

Les équations (92) et (93) sont appelées *relations de dispersion*. La connaissance de  $\operatorname{Im} f(s)$  dans le cas d'une soustraction fixe  $f(s)$  à une constante arbitraire  $f(s_0)$  près. Si l'on doit faire  $N$  soustractions, on introduit  $N$  constantes arbitraires. Dans le cas de  $T^{(2)}$  il suffit d'une seule soustraction et d'après (90) :

$$T^{(2)}(s, s_0) = T^{(2)}(s_0, s_0) + \frac{g^2(s - s_0)}{8(2\pi)^2} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \sqrt{\frac{s' - 4m^2}{s'}} \times \\ \times \frac{1}{(s' - (s + i\varepsilon))(s' - s_0)}. \quad (94)$$

La partie imaginaire (90) peut être obtenue à partir de la relation d'unitarité. En effet les deux autres graphes du deuxième ordre sont réels pour  $s \geq 4m^2$ ; ils pourraient avoir des coupures dans les variables  $t = (k_1 - k_3)^2$  et  $u = (k_1 - k_4)^2$ , mais  $t$  et  $u$  sont  $< 0$  si  $s \geq 4m^2$ . En utilisant la matrice  $T$  définie par (52), la relation  $SS^\dagger = 1$  devient :

$$T_{fi} - T_{fi}^\dagger = i \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_f - K_i) T_{fn} T_{ni}^\dagger. \quad (95)$$

L'invariance par renversement du sens du temps entraîne que :

$$\langle \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 | T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = \langle -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 | T | -\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2 \rangle = \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \rangle$$

et l'équation (95) devient au deuxième ordre de la théorie des perturbations

$$\operatorname{Im} T^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega (2\pi)^3 2\omega'} \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k' - k_1 - k_2) |T^{(1)}|^2. \quad (96)$$

On reconnaît dans (96) l'espace de phase  $d\Phi^{(2)}$  (65), qui, intégré sur  $d\Omega$ , vaut :

$$\frac{\|\mathbf{k}\|}{4\pi\sqrt{s}} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}}.$$

Dans l'équation (96), on a également tenu compte d'un facteur  $1/2$  dû à l'identité des particules ; l'élément de matrice  $T^{(1)}$  est on ne peut plus simple :

$$T^{(1)} = -g$$

et :

$$\text{Im } T^{(2)} = \frac{\pi g^2}{8(2\pi)^2} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}}$$

ce qui coïncide exactement avec (90). On vérifie sur cet exemple que la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$  est cruciale pour assurer l'unitarité de la matrice  $S$ . D'autre part l'existence de relations de dispersion est étroitement liée à la propriété de causalité. A nouveau la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$  est cruciale pour cette propriété.

Cet exemple illustre de façon élémentaire un certain nombre de propriétés que l'on peut attendre des éléments de matrice  $T$ , et qui ont fait l'objet d'un nombre considérable de travaux :

(i) les éléments de matrice  $T$  peuvent être prolongés analytiquement dans le(s) plan(s) complexe(s) de leurs variables cinématiques ;

(ii) la possibilité d'états intermédiaires physiques donne lieu à des coupures dans ce(s) plan(s) complexe(s). Un état lié ou une particule élémentaire stable correspondent à des pôles : par exemple dans la théorie en  $\varphi^3(4)$ , l'amplitude de diffusion  $2 \rightarrow 2$  a un pôle à  $s = m^2$  et une coupure pour  $s \geq 4m^2$  (figure 10) :

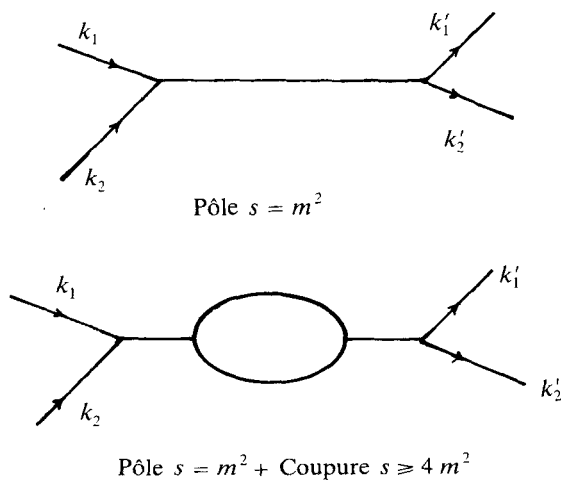


Figure 10. Diagrammes donnant des pôles et des coupures en  $s$ .

(iii) la somme sur les états intermédiaires permet de calculer la partie imaginaire de l'amplitude, en fonction des ordres inférieurs de la théorie des perturbations. Cette observation fournit une méthode possible pour le calcul de certains diagrammes ;

(iv) la partie réelle est calculée par une relation de dispersion, qui peut nécessiter des soustractions. Ceci introduit des constantes inconnues, et reflète la nécessité de la renormalisation.

## D.2. Règles de coupure

Nous allons maintenant établir, en suivant 'tHooft et Veltman, les règles générales de coupure des diagrammes, ou *règles de Cutkosky*. Nous nous servirons des fonctions suivantes :

$$\Delta^\pm(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(\pm k^0) e^{-ikx} \quad (97)$$

qui vérifient :

$$\begin{aligned} \Delta^\pm(x) &= (\Delta^\mp(x))^* ; & \Delta^\pm(-x) &= \Delta^\mp(x) \\ \Delta^+(x) &= \langle 0 | \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle ; & \Delta^-(x) &= \langle 0 | \varphi(0) \varphi(x) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (98)$$

Rappelons que :

$$\Delta_F(x) = \theta(x^0) \Delta^+(x) + \theta(-x^0) \Delta^-(x) . \quad (99)$$

Il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

$$\Delta_F(x_i - x_j) = \Delta_{ij} ; \quad \Delta^\pm(x_i - x_j) = \Delta_{ij}^\pm \quad (100)$$

et de remarquer que la conjugaison complexe échange les fréquences positives et négatives :

$$\Delta_{ij}^* = \theta(x_i^0 - x_j^0) \Delta_{ij}^- + \theta(x_j^0 - x_i^0) \Delta_{ij}^+ .$$

Une fonction de Green amputée de ses propagateurs externes complets sera notée  $F(x_1, \dots, x_n)$ , et elle sera composée de vertex et de propagateurs, par exemple :

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-ig)^3 \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{23} .$$

Pour fixer les idées, la discussion sera illustrée par la théorie en  $\varphi^3(4)$ ; d'autre part nous ignorerons les problèmes de renormalisation, en nous plaçant, par exemple, dans une dimension d'espace-temps convenable.

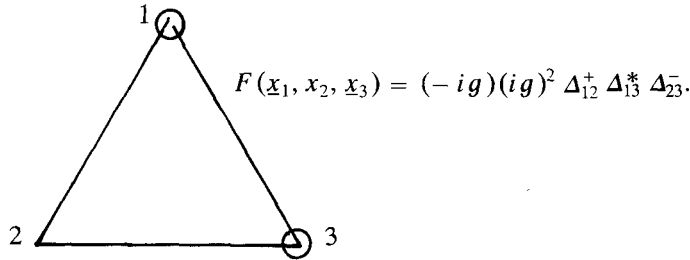
Définissons à partir de  $F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$  une fonction  $F(x_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$  où certains des  $x_i$  sont soulignés, avec les conventions suivantes :

- (i)  $\Delta_{kl} \rightarrow \Delta_{kl}$  si  $x_k$  et  $x_l$  ne sont pas soulignés,
- (ii)  $\Delta_{kl} \rightarrow \Delta_{kl}^+$  si  $x_k$  est souligné et non  $x_l$ ,
- (iii)  $\Delta_{kl} \rightarrow \Delta_{kl}^-$  si  $x_l$  est souligné et non  $x_k$ ,
- (iv)  $\Delta_{kl} \rightarrow \Delta_{kl}^*$  si  $x_k$  et  $x_l$  sont soulignés,
- (v)  $-ig \rightarrow ig$  où  $(+ig)$  correspond à un vertex souligné.

En résumé :

$$\Delta_{kl} = \Delta_{kl}^+; \quad \Delta_{k\bar{l}} = \Delta_{kl}^-; \quad \Delta_{\bar{k}l} = \Delta_{kl}^*.$$

Remarquez que ces règles sont cohérentes; en effet  $\Delta_{kl} = \Delta_{lk}$ ;  $\Delta_{kl} = \Delta_{kl}^+$  et,  $\Delta_{l\bar{k}} = \Delta_{lk}^-$ , mais d'après (98),  $\Delta_{kl}^+ = \Delta_{lk}^-$ . Si  $x_i$  est souligné, le vertex correspondant sera encerclé sur le graphe. Donnons un exemple :



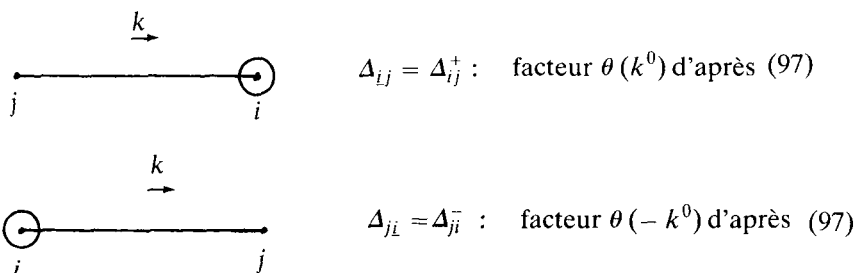
D'autre part si  $x_i^0 > x_j^0$ ,  $\Delta_{ij} = \Delta_{ij}$  et  $\Delta_{i\bar{j}} = \Delta_{i\bar{j}}$  grâce à (99); souligner  $\underline{x}_i$  ne modifie pas le propagateur. Nous en déduisons le théorème :

**Théorème 1 :** Supposons que  $x_i^0$  soit supérieur à  $x_j^0$  pour tout  $j \neq i$ . Alors :

$$F(x_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -F(x_1, \dots, x_i, \dots, \underline{x}_j, \dots, x_n) \quad (101)$$

où la seule différence entre les deux membres de l'équation (101) vient de ce que  $x_i$  est souligné (non souligné) dans le membre de gauche (droite), le signe  $(-)$  provenant de  $-ig \rightarrow ig$  au vertex  $x_i$ . Faisons maintenant la remarque suivante : lorsque l'on calcule  $\Delta_{ij}$  ou  $\Delta_{ij}^\pm$  à l'aide

de (97) et (100), le facteur  $e^{-ik(x_i - x_j)}$  correspond à un moment  $k$  entrant dans le vertex  $(i)$ . Ceci montre que si deux vertex sont reliés par un  $\Delta^+$  ou un  $\Delta^-$ , le flot d'énergie se fait toujours vers le vertex encerclé :



Le flot d'énergie se fait dans les deux directions si la ligne interne correspond à un  $\Delta_{ij}$  ou à un  $\Delta_{ij}^*$ .

Calculons maintenant un élément de matrice  $S$  ; par convention les particules entrantes sont dessinées à gauche du diagramme, les particules sortantes à droite. Un exemple d'élément de matrice  $S$  est donné par le graphe de la figure 11 :

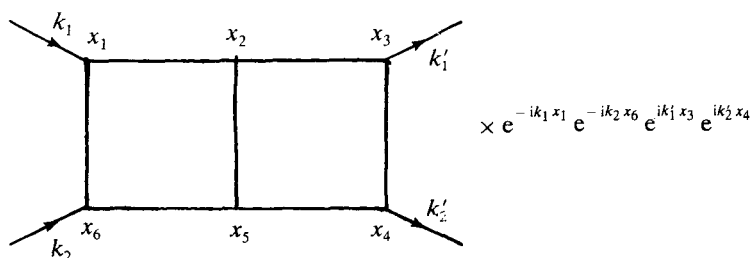


Figure 11.

La fonction  $F(x_1, \dots, x_6)$  doit être multipliée par un produit d'exponentielles donné par les règles établies au paragraphe C :

$$\text{Particule entrante : } e^{-ikx} \quad \text{Particule sortante : } e^{ik'x}$$

et intégrée sur tous les  $x_i$ . Un corollaire du théorème 1 est :

$$\sum F(x_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, x_j, \dots, \underline{x}_n) = 0 \quad (102)$$

où  $\sum$  indique que l'on a sommé sur toutes les façons possibles de souligner. En effet soit  $x_i$  le point ayant la plus grande composante de

temps ; on peut grouper par paires tous les termes de (102), où chaque paire est formée de deux termes identiques sauf sur un point : dans un des termes  $x_i$  est souligné, et dans l'autre  $x_i$  ne l'est pas. D'après le théorème 1, la somme de ces deux termes est nulle.

On remarque maintenant qu'un grand nombre de diagrammes seront nuls à cause de situations conflictuelles. Par exemple le diagramme de la figure 12 est nul car au vertex  $i$  :  $k_{01} + k_{02} + k_{03} = 0$  (conservation du moment), mais  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ , et  $k_{03}$  doivent être tous trois positifs, car le flot d'énergie se fait vers le vertex encerclé.

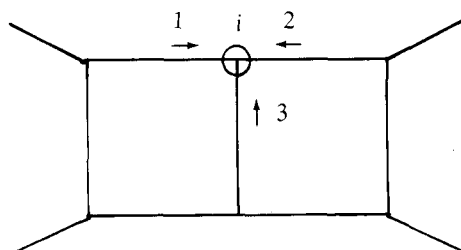


Figure 12.

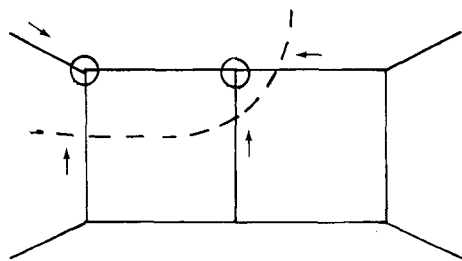


Figure 13.

la conservation de l'énergie. De même le diagramme de la figure 14 est égal à zéro car uniquement des énergies positives sortent du sous-diagramme délimité par la ligne de démarcation. Cette remarque

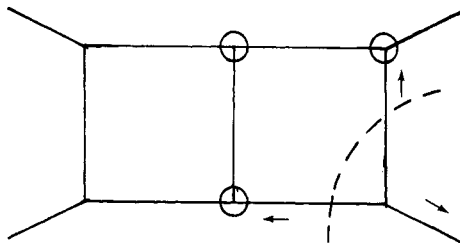


Figure 14.

permet de séparer les diagrammes non nuls en deux régions : l'une au soleil, contenant les vertex non encerclés, l'autre à l'ombre contenant les vertex encerclés (figure 15) :

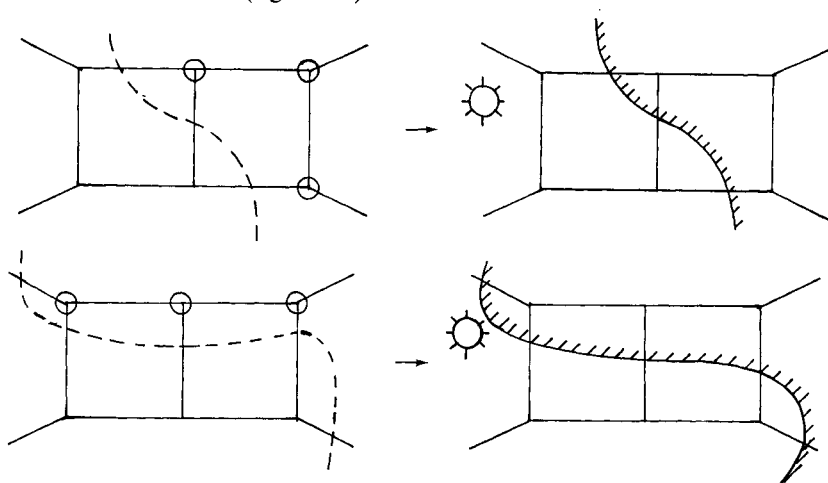


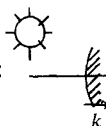


Figure 15. Coupure d'un diagramme en deux régions.

La coupure des lignes externes par la ligne de démarcation n'a pas de signification particulière. Les lignes internes seront données par les règles suivantes (on utilise la première forme des règles de Feynman données en V.B.5) :

Propagateur au soleil :   $\left( \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$  (103.a)

Propagateur à l'ombre :   $\left( \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \right)$  (103.b)

Propagateur coupé :   $\frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0)$  (103.c)

et les vertex par :

$$\begin{aligned} \text{Vertex au soleil : } & (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum k_i\right) \\ \text{Vertex à l'ombre : } & (ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum k_i\right) \end{aligned} \quad (103.d)$$

On déduit de (102) :

$$F(k_1, \dots, k_n) + \bar{F}(k_1, \dots, k_n) = - \sum_{\text{coupures}} F_c(k_1, \dots, k_n) . \quad (104)$$

L'équation (103) donne les règles de coupure, ou règles de Cutkosky. Dans le membre de gauche de (104),  $F$  est calculé avec les règles au soleil,  $\bar{F}$  avec les règles à l'ombre, et  $F_c$  en suivant (103). La somme porte sur toutes les coupures possibles, l'énergie s'écoulant du soleil vers l'ombre. Certaines coupures peuvent donner zéro à cause de la cinématique.

Reste à faire le lien avec la relation d'unitarité. Définissons le lagrangien  $\mathcal{L}^*$  obtenu à partir de  $\mathcal{L}$  par conjugaison complexe, et  $\bar{S}$  la matrice  $S$  obtenue à partir de  $\mathcal{L}^*$ , en utilisant comme propagateur  $-i/(k^2 - m^2 - i\varepsilon)$  et en remplaçant  $(-ig)$  par  $(ig)$ , c'est-à-dire en utilisant les règles de la région à l'ombre.

Il est facile de se convaincre que :

$$\langle f | S^\dagger(\mathcal{L}) | i \rangle = \langle f | \bar{S}(\mathcal{L}^*) | i \rangle .$$

Si  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$  la relation d'unitarité peut s'écrire :

$$T_{fi} + T_{fi} = -i \sum_p \int d\Phi^{(p)} \bar{T}_{fp} T_{pi} \quad (105)$$

où  $d\Phi^{(p)}$  est l'espace de phase de  $p$  particules intermédiaires. Mais ceci n'est autre que la relation (104) ( $T = -iF$ ) car  $\bar{T}_{fp}$  est calculé avec les règles de la région à l'ombre et :

$$d\Phi^{(p)} = (2\pi)^4 \delta(K_f - K_p) \prod_{j=1}^p \frac{(2\pi)}{(2\pi)^4} \delta(k_j^2 - m^2) \theta(k_j^0) .$$

Examinons enfin les facteurs  $Z_3$ , car les éléments de matrice  $T$  sont reliés aux fonctions de Green par un facteur  $Z_3^{-(N+M)/2}$ , où  $N$  est le nombre de particules entrantes et  $M$  celui de particules sortantes (cf. (79)). Si nous considérons un état intermédiaire à  $p$  particules, ceci conduit à un facteur  $Z_3^{-p}$ . Mais chaque propagateur coupé sur couche de masse donne un facteur  $Z_3 \delta(k^2 - m^2)$  et les facteurs  $Z_3$  se compensent exactement (cf. exercice 6).

On peut donc conclure que si  $\mathcal{L}$  est réel, chaque diagramme obéit à la relation d'unitarité : on a la propriété d'*unitarité perturbative*. Cette propriété entraîne l'unitarité de la somme des diagrammes, c'est-à-dire l'unitarité de la matrice  $S$ . Une méthode analogue (cf. 'tHooft et Veltman) permet également de traiter la question de la causalité.

## E. GÉNÉRALISATIONS

Nous avons jusqu'à présent traité uniquement le cas d'un champ scalaire neutre. Nous allons maintenant généraliser les considérations précédentes au cas d'un champ scalaire chargé, d'un champ massif de spin 1, et nous examinerons également les couplages dérivatifs, qui ont été laissés de côté jusqu'à présent.

### E.1. Champ scalaire chargé

On souhaite décrire un couple de particules chargées, de charges  $\pm 1$  (\*) (dans un système d'unités convenables) et de spin 0, par exemple le couple des mésons  $\pi^+$  et  $\pi^-$ . Il serait possible d'utiliser deux champs hermitiques  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , mais pour construire des états propres de la charge, il est plus commode de se servir de deux champs  $\varphi(x)$  et  $\varphi^\dagger(x)$  :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2) ; \quad \varphi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2) . \quad (106)$$

Les décompositions de Fourier des champs libres  $\varphi(x)$  et  $\varphi^\dagger(x)$  s'écrivent :

$$\varphi(x) = \int d\tilde{k} [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}] \quad (107.a)$$

$$\varphi^\dagger(x) = \int d\tilde{k} [a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} + b(\mathbf{k}) e^{-ikx}] \quad (107.b)$$

(\*) Il ne s'agit pas nécessairement de la charge électrique.

où  $a(b)$  détruit des particules de charge  $+1(-1)$  (cf. (111)). Les relations de commutation sont :

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (108.a)$$

$$[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (108.b)$$

tous les autres commutateurs étant nuls. Le lagrangien du champ libre s'écrit :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (109)$$

et il est invariant dans la transformation de phase :

$$\varphi \rightarrow e^{-i\Lambda} \varphi ; \quad \varphi^\dagger \rightarrow e^{i\Lambda} \varphi^\dagger .$$

Le théorème de Noether (cf. XI-C.3) permet de conclure à l'existence d'un courant conservé :

$$j_\mu = i : \varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi : ; \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \quad (110)$$

qui conduit à la conservation de la charge :

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d\tilde{k} [a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})] . \quad (111)$$

Cette équation confirme que  $a(b)$  détruit des particules de charge  $+1(-1)$ . On peut généraliser le couplage en  $\varphi^4$  en écrivant par exemple un lagrangien d'interaction :

$$\mathcal{L}_1(x) = - \frac{g}{(2!)^2} : \varphi^\dagger(x)^2 \varphi(x)^2 : . \quad (112)$$

Pour établir les règles de Feynman, il sera commode d'orienter le propagateur dans le sens du flot de la charge positive : dans  $\langle 0 | T(\varphi_{\text{in}}(y) \varphi_{\text{in}}^\dagger(x)) | 0 \rangle$ ,  $\varphi_{\text{in}}^\dagger(x)$  crée un  $\pi^+$  (ou détruit un  $\pi^-$ ) en  $x$ , tandis que  $\varphi_{\text{in}}(y)$  détruit un  $\pi^+$  (ou crée un  $\pi^-$ ) en  $y$  ; dans tous les cas une charge  $+1$  est créée en  $x$  et annihilée en  $y$ . On remarquera que

$$\langle 0 | T(\varphi_{\text{in}}(y) \varphi_{\text{in}}(x)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\varphi_{\text{in}}^\dagger(y) \varphi_{\text{in}}^\dagger(x)) | 0 \rangle = 0 .$$

Si l'on décide de suivre (par convention) la charge positive, le propagateur sera orienté de  $x$  vers  $y$  :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \quad \xleftarrow{-k} \\ x \quad \quad \quad y \end{array} : \Delta_F(y-x) = \overbrace{\varphi(y) \varphi^\dagger(x)} =$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik(x-y)} .$$

Il ne faut surtout pas confondre l'orientation du propagateur avec celle des moments. Afin de déterminer aisément les facteurs de symétrie, notons (provisoirement) le point de départ du propagateur par une croix ( $\times$ ) et le point d'arrivée par un cercle ( $\circ$ ) (\*): dans le développement perturbatif, tout propagateur devra joindre une croix à un cercle.

Calculons comme exercice les contributions d'ordre  $g^2$  à la fonction de corrélation d'ordre 4 :

$$G^{(4)} = \langle 0 | T(\varphi(x_3) \varphi(x_4) \varphi^\dagger(x_1) \varphi^\dagger(x_2)) | 0 \rangle$$

en utilisant le lagrangien d'interaction (112). Chaque vertex sera décomposé en deux croix ( $\times$ ) et deux cercles ( $\circ$ ). On obtient deux types de graphes (figure 16) — auxquels il faut naturellement ajouter les permutations :

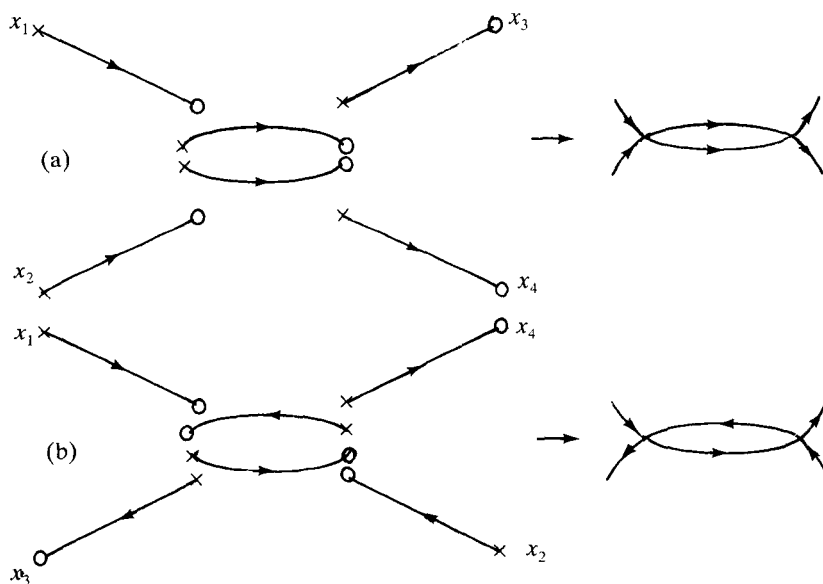


Figure 16. Contributions à  $G^{(4)}$ .

Le facteur de symétrie du graphe (a) est :

$$\left[ \frac{1}{(2!)^2} \right]^2 \times (2!)^3 = \frac{1}{2}.$$

(\*) Le vertex encadré n'a évidemment rien à voir avec celui du paragraphe D.2.

Ce graphe correspond à la diffusion de particules identiques ( $\pi^+ - \pi^+$ ) et on retrouve le facteur de symétrie usuel. Au contraire le graphe de la figure (16.b) correspond à la diffusion  $\pi^+ - \pi^-$ , et son facteur de symétrie est 1.

Le formalisme fonctionnel se généralise sans difficulté si l'on définit  $Z(j)$  par :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}(\varphi, \varphi^*) \times \exp \left( iS(\varphi, \varphi^*) + i \int d^4x (j(x) \varphi^*(x) + j^*(x) \varphi(x)) \right) \quad (114)$$

et si l'on utilise l'identité (A.12), qui donne :

$$\int \mathcal{D}(\varphi, \varphi^*) \exp \left( iS_0(\varphi, \varphi^*) + i \int d^4x (j(x) \varphi^*(x) + j^*(x) \varphi(x)) \right) = \mathcal{N} \exp \left( - \int d^4x d^4x' j^*(x) \Delta_F(x - x') j(x') \right). \quad (115)$$

On notera que l'exposant dans (115) diffère par un facteur 2 de celui de (33). Les résultats obtenus par application de (114) et (115) sont naturellement identiques à ceux que l'on obtient par application du théorème de Wick.

Pour le calcul des éléments de matrice  $S$ , on se servira des contractions suivantes, avec leur représentation diagrammatique (cf. 70)

$$\underbrace{\varphi(x) a^\dagger(\mathbf{k})}_{\text{mésoson } \pi^+ \text{ entrant}} = e^{-ikx} : \quad \longrightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (116.a)$$

$$\underbrace{a(\mathbf{k}) \varphi^\dagger(x)}_{\text{mésoson } \pi^+ \text{ sortant}} = e^{ikx} : \quad \bigcirc \text{---} \longrightarrow \quad (116.b)$$

$$\underbrace{\varphi^\dagger(x) b^\dagger(\mathbf{k})}_{\text{mésoson } \pi^- \text{ entrant}} = e^{-ikx} : \quad \text{---} \longleftarrow \bigcirc \quad (116.c)$$

$$\underbrace{b(k) \varphi(x)}_{\text{mésoson } \pi^- \text{ sortant}} = e^{ikx} : \quad \bigcirc \text{---} \longleftarrow \quad (116.d)$$

## E.2. Champ vectoriel massif

Pour être tout à fait général (mais en se restreignant à des champs de bosons) on peut se donner des champs réels  $\varphi_i$  dépendant d'indices de

spin et/ou d'indices de symétries internes ( $i$ ) et des champs complexes  $\psi_i$ . Afin de simplifier les notations, convenons que ( $i$ ) indice non seulement le spin et les symétries internes, mais également le point d'espace-temps. Dans ces conditions on pourra écrire un lagrangien très général :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi_i W_{ij} \varphi_j + \psi_i^* \bar{W}_{ij} \psi_j + \text{interactions}$$

où  $W$  est une matrice symétrique. Les propagateurs seront les inverses de  $W_{ij}$  et  $\bar{W}_{ij}$  (à un facteur  $i$  près) :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{ij}^F = iW_{ij}^{-1} & \bar{\Delta}_{ij}^F = i\bar{W}_{ij}^{-1} & (117) \\ \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} & \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} & \end{array}$$

Le propagateur  $\Delta_{ij}^F$  n'est pas orienté, la matrice  $W_{ij}$  étant symétrique, mais  $\bar{\Delta}_{ij}^F$  le sera en règle générale.

Donnons comme exemple le lagrangien d'une particule de spin 1 et de masse  $m \neq 0$  couplée à un courant conservé  $j_\mu$  ( $\partial^\mu j_\mu = 0$ ) :

$$\mathcal{L} = A^\mu [(\square + m^2) g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - j_\mu A^\mu. \quad (118)$$

Les équations du mouvement sont :

$$(\square + m^2) A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (119)$$

mais la conservation de  $j^\mu$  impose :

$$m^2 (\partial^\mu A_\mu) = 0 \Rightarrow \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (m \neq 0). \quad (120)$$

On obtient finalement une équation de Klein-Gordon pour chaque composante :

$$(\square + m^2) A^\mu = 0.$$

Toutefois les quatre composantes ne sont pas indépendantes à cause de (120) : seules trois composantes sont indépendantes, ce qui correspond bien au nombre de degrés de liberté d'un spin 1. L'identification complète d'un spin 1 nécessiterait la construction du tenseur moment angulaire et une démonstration du fait que ses composantes se transforment comme un vecteur dans une rotation.

Le propagateur se lit directement sur l'équation (118) :

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = i \frac{-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (121)$$

La partie longitudinale du propagateur n'a pas de pôle à  $k^2 = 0$  :

$$k_\mu \Delta_F^\mu(k) = m^{-2} k^\nu \quad (122)$$

ce qui confirme (120) : cette partie longitudinale n'est pas un degré de liberté dynamique. Le propagateur coupé s'écrit :

$$\begin{array}{c} \nu \\ \bullet \\ \hline \mu \end{array} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2). \quad (123)$$

D'autre part, on peut décrire l'état de spin d'une particule de spin 1 par trois directions de polarisation. Dans un référentiel où la particule est au repos, on peut par exemple choisir les trois axes de coordonnées  $(x, y, z)$ . Si la particule possède un moment  $\mathbf{k}$  parallèle à  $Oz$ , ces trois directions se transforment en :

$$\varepsilon_\mu^{(x)} = (0, 1, 0, 0) \quad (124.a)$$

$$\varepsilon_\mu^{(y)} = (0, 0, 1, 0) \quad (124.b)$$

$$\varepsilon_\mu^{(0)} = (k/m, 0, 0, k^0/m); \quad (124.c)$$

$\varepsilon_\mu^{(x)}$  et  $\varepsilon_\mu^{(y)}$  sont des polarisations transverses ; les combinaisons  $\varepsilon_\mu^{(\pm)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_\mu^{(x)} \pm i\varepsilon_\mu^{(y)})$  correspondent à une projection du spin égale à  $\pm 1$  le long de  $Oz$  ;  $\varepsilon_\mu^{(0)}$  correspond à une projection du spin égale à zéro, aussi appelée polarisation longitudinale <sup>(4)</sup>.

On obtient facilement l'identité :

$$\sum_{\lambda = \pm, 0} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{*(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}. \quad (125)$$

L'identité (125) intervient dans la relation d'unitarité, car la somme sur les états intermédiaires contient une somme sur les polarisations. Mais la somme (125) est bien identique au résultat obtenu en coupant le propagateur, et la théorie sera unitaire. Le point crucial est que seuls les degrés de liberté physiques apparaissent dans le propagateur coupé ; le degré de polarisation parallèle à  $k_\mu$  donne une contribution nulle à cause de (122). Au contraire la renormalisabilité est a priori en danger, car le facteur  $m^{-2}$  dans le propagateur agit comme une constante de couplage de dimension négative. On verra cependant, au chapitre XII, que l'on peut préserver la renormalisabilité pour les quantités physiques.

### E.3. Couplages dérivatifs

Jusqu'à présent, nous avons soigneusement évité les couplages dérivatifs. Ceux-ci sont particulièrement délicats à traiter dans le formalisme canonique, car des quantités non covariantes se glissent dans les étapes intermédiaires. Au contraire ces couplages ne posent aucun problème dans le formalisme fonctionnel. Considérons par exemple un champ vectoriel  $A_\mu$  couplé à un champ scalaire chargé par un lagrangien d'interaction :

$$\mathcal{L}_1 = ig A^\mu(x) [\varphi^\dagger(x) \vec{\partial}_\mu \varphi(x)] \quad (126)$$

où le facteur  $i$  assure l'hermiticité de  $\mathcal{L}_1$ . Cette interaction fera apparaître des termes du type :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \quad \xleftarrow{-k} \\ \times \xrightarrow{\quad} \times \\ y \qquad \qquad x \end{array} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \overline{\varphi(x)} \varphi^\dagger(y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}$$

$$= -ik_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}.$$

Le terme en  $\partial_\mu \varphi$  dans  $\mathcal{L}_1$  conduit donc à un facteur  $-ik_\mu$  où  $k_\mu$  est le moment entrant dans le vertex  $x$ . La simplicité du formalisme fonctionnel vient de ce qu'il n'est pas nécessaire de commuter les dérivées avec des produits- $T$  (cf. la discussion suivant l'équation (50)). Au contraire, dans le formalisme canonique, cette commutation conduit à des termes non covariants ; ceux-ci seront finalement éliminés par d'autres termes non covariants, dus au fait que le moment conjugué de  $\varphi$  n'est pas  $\dot{\varphi}$ , mais la compensation résulte d'un calcul complexe. A nouveau il n'y aura pas de problème avec l'unitarité et la causalité ; cependant la dérivation tend à introduire des constantes de couplages de dimension négative, et la renormalisabilité pourra être en danger.

## EXERCICES

1) (a) Montrer que pour  $a > 0$  on obtient l'identité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iak^2} dk = e^{i\pi/4} \sqrt{\pi/a} e^{-ib^2/4a}.$$

(Suggestion : considérer la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  de  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iak^2 - \varepsilon k^2} dk$ ). En déduire (43).

(b) Démontrer l'équation (44) à partir de l'identité :

$$\int d\lambda \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda} = \Gamma(\lambda).$$

2) Montrer que le facteur de flux (60) se réduit à  $\sqrt{s} \|\mathbf{k}\|$  pour deux particules incidentes dans le référentiel du centre de masse.

3) En adaptant le raisonnement du paragraphe C.1, démontrer l'équation (63) donnant le taux de désintégration d'une particule.

#### 4) Théorème de Wick pour les produits ordinaires

(a) Démontrer l'identité :

$$\begin{aligned} \exp \left( i \int d^4x j(x) \varphi_{\text{in}}(x) \right) &= \\ &= : \exp \left( i \int d^4x j(x) \varphi_{\text{in}}(x) \right) : \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' j(x) \underbrace{\varphi(x) \varphi(x')} j(x') \right) \end{aligned}$$

où

$$\underbrace{\varphi(x) \varphi(x')} = \langle 0 | \varphi_{\text{in}}(x) \varphi_{\text{in}}(x') | 0 \rangle.$$

(Suggestion :  $\varphi_{\text{in}}(x) : \varphi_{\text{in}}^+(x) + \varphi_{\text{in}}^-(x)$  et exercice IX.9.)

(b) En déduire le théorème de Wick pour :

$$\varphi_{\text{in}}(x_1) \varphi_{\text{in}}(x_2) \dots \varphi_{\text{in}}(x_{2n}).$$

#### 5) Représentation de Källen-Lehman <sup>(5)</sup>

(a) Soit  $F(x-y)$  la valeur moyenne sur le vide du commutateur  $[\varphi(x), \varphi(y)]$  :

$$F(x-y) = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle.$$

En introduisant un système complet d'états intermédiaires  $|n\rangle$  ainsi que l'identité :

$$1 = \int d^4q \delta^{(4)}(q - p_n)$$

montrer que :

$$F(x - y) = i \int_0^\infty dm'^2 \rho(m'^2) \Delta(x - y; m'^2)$$

où

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(p_n - q) |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2.$$

On utilisera l'invariance de Lorentz et la positivité de l'énergie pour montrer que  $\rho(q) = \rho(q^2) \theta(q^0)$  avec  $q^2 > 0$ .

(b) En isolant la contribution à 1 particule et en utilisant les RCC, démontrer la relation :

$$1 = Z_3 + \int_{4m^2}^\infty dm'^2 \rho(m'^2).$$

En déduire l'inégalité :  $0 \leq Z_3 \leq 1$  ( $Z_3 = 1$  correspond à un champ libre. La condition  $Z_3 < 1$  ne peut être satisfaite que pour une théorie asymptotiquement libre (cf. exercice VII.6).)

(c) Montrer que l'on obtient une représentation analogue à celle de (a) pour le propagateur complet  $G^{(2)}(x - y)$  avec la même fonction spectrale  $\rho$  (cf. (81)).

6) Ecrire l'unitarité perturbative pour le graphe d'ordre  $g^6$  de la théorie en  $\varphi^3$  dessiné sur la figure 17. Examiner en particulier les facteurs  $Z_3$ .

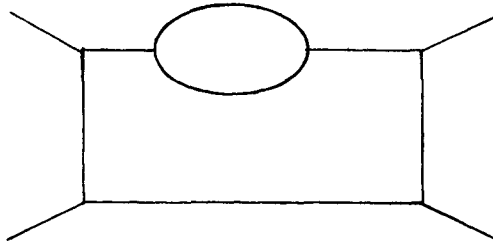


Figure 17.

7) Le méson  $\rho^0$  est une particule de masse  $M = 765$  MeV, se désintégrant en une paire  $\pi^+ - \pi^-$  ( $m = 140$  MeV) avec une largeur  $\Gamma = 125$  MeV. On décrit la désintégration à l'aide du lagrangien phénoménologique (126). Quelle est la valeur de  $g$  ?

## NOTES ET RÉFÉRENCES

La construction de Haag-Ruelle est décrite dans le livre de R. Jost *The General Theory of Quantized Fields*, AMS, Providence (1965). On trouvera un exposé pédagogique dans le cours de J. Bros, Ecole de Gif-sur-Yvette (1971). Pour une autre démonstration de la formule de Gell-Mann et Low, on consultera Gasirowicz (chapitre 8). Les formules de réduction sont établies par exemple dans Itzykson-Zuber (chapitre 5), Bjorken-Drell (chapitre 16) ou Gasirowicz (chapitre 6). La démonstration de l'équation (62) donnant l'expression des sections efficaces suit celle d'Itzykson-Zuber (chapitre 5). Les propriétés analytiques des amplitudes de diffusion sont étudiées dans Itzykson-Zuber (chapitre 6), Bjorken-Drell (chapitre 18) et dans le livre de R. Eden, P. Landshoff, D. Olive et J. Polkinghorne *The Analytic S-matrix*, Cambridge University Press (1966). La quantification du champ scalaire chargé est examinée en détail dans tous les livres classiques (Itzykson-Zuber, Bjorken-Drell, Gasirowicz, etc.). Enfin les sections 1 à 9 de 'tHooft et Veltman donnent une vue générale de tous les problèmes abordés dans ce chapitre.

(<sup>1</sup>) Cf. Streater-Wightman, chapitre 4.

(<sup>2</sup>) Itzykson-Zuber, chapitre 6.

(<sup>3</sup>) H. Epstein et V. Glaser, *Annales IHP*, XIX, 211 (1973).

(<sup>4</sup>) Messiah, Chapitre XIII.

(<sup>5</sup>) Itzykson-Zuber (chapitre 5) ou Bjorken-Drell (chapitre 16).



## QUATRIÈME PARTIE

### **Théories de jauge**



## CHAPITRE XI

# Quantification du champ de Dirac et du champ électromagnétique

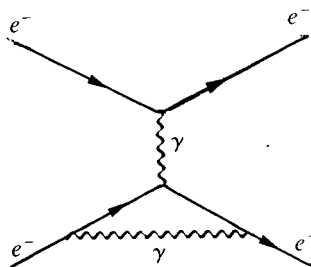
La physique moderne des particules élémentaires est dominée par les théories de jauge, dont le prototype est l'électrodynamique quantique. Dans les théories de jauge, les particules fondamentales sont :

(i) des particules de spin  $1/2$ , décrites par des champs appelés « champs de matière » ;

(ii) des particules de spin  $1$ , décrites par des champs appelés « champs de jauge » (la terminologie n'est sans doute pas très heureuse : une particule de jauge comme le photon est aussi « matérielle » qu'une particule de spin  $1/2$  comme le neutrino).

Ces particules sont supposées élémentaires, *dans le sens où leurs interactions sont ponctuelles : ces interactions sont décrites par le produit de champs au même point d'espace-temps*. Dans le cas de l'électrodynamique quantique, les particules de spin  $1/2$  sont les électrons (et leurs antiparticules, les positrons), et les particules de jauge sont les photons. Les interactions entre particules de spin  $1/2$  sont transmises dans ce cas par les photons : on a représenté sur la figure 1 un graphe de Feynman contribuant à la diffusion électron-électron.

Les interactions électromagnétiques et faibles ont été unifiées en interactions électro-faibles, dont les particules de jauge sont le photon et les bosons  $W^\pm$  et  $Z^0$  (prédits théoriquement en 1967 et découverts expérimentalement en 1983). On a représenté sur la figure 2 un graphe de Feynman contribuant à la diffusion électron-neutrino. Dans



**Figure 1.** Graphe de Feynman pour la diffusion électron-électron.

le cas des interactions électro-faibles, il faut en plus introduire des particules de spin zéro, les particules de Higgs, qui ont jusqu'à présent (1986) échappé à toute détection (cf. XIII-C.3).

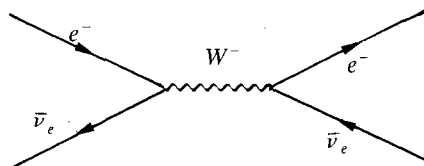
Les particules à interactions fortes : proton, neutron, mésons, etc. ne sont pas des particules ponctuelles, et en ce sens elles ne sont pas élémentaires : elles sont

composées de quarks et d'antiquarks. La théorie de jauge des interactions fortes est la chromodynamique quantique, où les particules de spin  $1/2$  sont les quarks et les particules de jauge sont appelées gluons (cf. XIII-D). Les quarks et antiquarks ont également des interactions électro-faibles.

La théorie que nous avons élaborée aux deux chapitres précédents ne nous permet encore que de traiter des particules de spin zéro... c'est-à-dire le cas très limité et quelque peu académique des interactions des bosons de Higgs. Nous devons encore apprendre à quantifier les champs décrivant des particules de spin  $1/2$ , ou champs de Dirac, ainsi que les champs de jauge.

La quantification canonique du champ de Dirac est traitée au paragraphe A. Afin de ne pas allonger l'exposé, j'ai traité l'équation de Dirac de façon très succincte ; le lecteur qui n'est pas familier avec cette équation devra sans doute se reporter à d'autres exposés, en particulier pour les propriétés de transformation par le groupe de Poincaré et les symétries discrètes. Cependant toutes les notions indispensables aux applications traitées dans ce livre ont été introduites explicitement. Le paragraphe B est consacré au théorème de Wick pour les fermions et à la formulation fonctionnelle.

Le cas le plus simple de théorie de jauge est celui du champ électromagnétique : en effet le groupe de jauge est abélien, alors que dans le cas des interactions électro-faibles, comme dans celui de la chromodynamique quantique, le groupe de jauge est non abélien. Cependant, même dans le cas abélien, la quantification canonique est complexe, et il sera plus commode, après avoir rappelé quelques données de base au paragraphe C, de passer directement au paragraphe D à la quantification à l'aide des intégrales de chemin. Ceci constitue d'ailleurs une bonne préparation au cas plus complexe des théories de jauge non abéliennes.



**Figure 2.** Un graphe contribuant à la diffusion  $\bar{\nu}_e - e^-$ .

## A. QUANTIFICATION DU CHAMP DE DIRAC

Le champ de Klein-Gordon étudié au chapitre IX décrit des particules de spin 0. Nous avons également vu au chapitre X comment décrire des particules de spin 1 massives ; les particules de spin 0 et de spin 1 ont en commun d'être des *bosons*, c'est-à-dire des particules obéissant à la statistique de Bose-Einstein. Au contraire il est bien connu que des particules de spin 1/2 comme les électrons ou les protons obéissent à la statistique de Fermi-Dirac : ce sont des *fermions*. Le formalisme des chapitres précédents est manifestement inadapté au cas des fermions, car un vecteur d'état tel que

$$a^\dagger(\mathbf{k}_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2) |0\rangle$$

est symétrique dans l'échange des deux particules en raison des relations de commutation des  $a^\dagger(\mathbf{k})$ . Il nous faut donc trouver une modification de l'espace de Fock qui assure automatiquement l'antisymétrie, au lieu de la symétrie. Le deuxième ingrédient dont nous avons besoin est une équation de champ ayant les propriétés de transformation d'un spin 1/2 : c'est l'équation de Dirac. La quantification du champ de Dirac se fera par analogie avec celle du champ de Klein-Gordon, mais en utilisant un espace de Fock adapté aux fermions.

### A.1. Espace de Fock pour les fermions

Commençons par un problème simple de mécanique quantique non relativiste : un système de  $N$  fermions sans interactions dans un potentiel  $V(\mathbf{x})$  ; afin de ne pas introduire de complications de notations, nous supposons même que ces fermions ont spin 0 (cette hypothèse, comme nous le verrons un peu plus loin, n'est pas cohérente dans le cadre d'une théorie quantique des champs *relativiste*, mais elle n'introduit aucune contradiction en mécanique quantique non relativiste). Soit  $u_{\alpha_i}(\mathbf{x})$  les fonctions propres du hamiltonien à une particule :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}).$$

Étiquetons les différents niveaux d'énergie  $E_{\alpha_i}$  par des indices  $\alpha_i$  rangés dans un ordre déterminé :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \dots$  (si les niveaux d'énergie sont dégénérés, il faut évidemment les étiqueter par des nombres quantiques supplémentaires) :

$$Hu_{\alpha_i}(\mathbf{x}) = E_{\alpha_i} u_{\alpha_i}(\mathbf{x}).$$

La fonction d'onde d'un ensemble de  $N$  fermions occupant les niveaux  $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_N}$ , correctement antisymétrisée et normalisée, est donnée par le

déterminant de Slater :

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det(u_{\alpha_i}(\mathbf{x}_j)). \quad (1)$$

Par exemple dans le cas de deux particules occupant les niveaux 3 et 5 la fonction d'onde est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} (u_3(\mathbf{x}_1) u_5(\mathbf{x}_2) - u_3(\mathbf{x}_2) u_5(\mathbf{x}_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} u_3(\mathbf{x}_1) & u_5(\mathbf{x}_1) \\ u_3(\mathbf{x}_2) & u_5(\mathbf{x}_2) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Une information équivalente à la fonction d'onde (1) est contenue dans les *nombre d'occupation*  $n_{\alpha_i}$  des niveaux  $\alpha_i$  ; par exemple, dans le cas de la fonction d'onde (2) ces nombres d'occupation sont :

$$n_3 = 1 ; \quad n_5 = 1 ; \quad n_i = 0 \quad i \neq 3, 5.$$

Dans le cas des bosons,  $n_\alpha$  pouvait prendre les valeurs 0, 1, 2, ... ; dans celui des fermions,  $n_\alpha = 0$  ou 1, car on ne peut pas mettre plus d'un fermion dans un niveau d'énergie (non dégénéré). Examinons d'abord le cas d'un seul niveau ( $\alpha$ ), et essayons de construire des opérateurs de création et d'annihilation par analogie avec le cas des bosons. L'espace des états est à deux dimensions, et nous pouvons choisir comme vecteurs de base les vecteurs  $|0\rangle_\alpha$  et  $|1\rangle_\alpha$  correspondant respectivement à  $n_\alpha = 0$  et  $n_\alpha = 1$  :

$$\text{état non occupé } |0\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\alpha ; \quad \text{état occupé } |1\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha.$$

( $n_\alpha = 0$ )                      ( $n_\alpha = 1$ )

Les opérateurs  $a_\alpha$  et  $a_\alpha^\dagger$  doivent obéir aux conditions suivantes :

- (i)  $a_\alpha$  appliqué au vide donne zéro :  $a_\alpha |0\rangle_\alpha = 0$
- (ii)  $a_\alpha^\dagger$  appliqué au vide crée un état occupé, avec  $n_\alpha = 1$  :  $a_\alpha^\dagger |0\rangle_\alpha = |1\rangle_\alpha$
- (iii) on ne doit pas pouvoir mettre un deuxième fermion dans l'état  $\alpha$  :  $a_\alpha^\dagger |1\rangle_\alpha = 0$ .

Ces trois conditions déterminent immédiatement la forme matricielle de  $a_\alpha$  et  $a_\alpha^\dagger$  :

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad a_\alpha^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui conduit à la relation *d'anticommutation* :

$$\{a_\alpha, a_\alpha^\dagger\} = a_\alpha a_\alpha^\dagger + a_\alpha^\dagger a_\alpha = \mathbb{1}_\alpha. \quad (3)$$

Comme dans le cas des bosons, l'opérateur nombre de particules dans l'état ( $\alpha$ ) est  $N_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$  :

$$\begin{aligned} N_\alpha &= a_\alpha^\dagger a_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ N_\alpha |0\rangle_\alpha &= 0 ; \quad N_\alpha |1\rangle_\alpha = |1\rangle_\alpha. \end{aligned}$$

Pour construire l'espace des états, il suffit de prendre le produit tensoriel des espaces à deux dimensions correspondant à chacun des niveaux individuels ; par exemple le vide sera construit par produit tensoriel des vecteurs  $|0\rangle_\alpha$  :

$$|0\rangle = \prod_\alpha |0\rangle_\alpha = \prod_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\alpha .$$

Cependant l'antisymétrie dans l'échange de deux fermions n'est pas encore assurée car les opérateurs  $a_{\alpha_i}$  et  $a_{\alpha_j}$ , qui agissent dans des espaces différents, commutent. Pour construire des opérateurs qui anticommulent, on introduit l'opérateur  $\eta_{\alpha_i}$  :

$$\eta_{\alpha_i} = \prod_{\alpha_1}^{\alpha_i-1} (1 - 2 N_{\alpha_1}) = \prod_{\alpha_1}^{\alpha_i-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\alpha_1} \quad (4)$$

et on définit l'opérateur  $b_{\alpha_i}^\dagger$  par :

$$b_{\alpha_i}^\dagger = \eta_{\alpha_i} a_{\alpha_i}^\dagger = a_{\alpha_i}^\dagger \eta_{\alpha_i} . \quad (5)$$

On remarque que si  $\alpha_i < \alpha_j$  :

$$a_{\alpha_i}^\dagger \eta_{\alpha_j} = - \eta_{\alpha_j} a_{\alpha_i}^\dagger ; \quad a_{\alpha_j}^\dagger \eta_{\alpha_i} = \eta_{\alpha_i} a_{\alpha_j}^\dagger$$

et on en déduit :

$$\{b_{\alpha_i}^\dagger, b_{\alpha_j}^\dagger\} = 0 .$$

Cette relation d'anticommution assure l'antisymétrie du vecteur d'état :

$$|\Psi\rangle = b_{\alpha_i}^\dagger b_{\alpha_j}^\dagger |0\rangle = - b_{\alpha_j}^\dagger b_{\alpha_i}^\dagger |0\rangle .$$

Les autres relations d'anticommution sont faciles à établir :

$$\{b_{\alpha_i}, b_{\alpha_j}\} = \{b_{\alpha_i}^\dagger, b_{\alpha_j}^\dagger\} = 0 ; \quad \{b_{\alpha_i}, b_{\alpha_j}^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (6)$$

et on peut construire un opérateur de champ  $\psi(t, \mathbf{x})$  qui, dans la représentation de Heisenberg, est donné par :

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_\alpha b_\alpha u_\alpha(t, \mathbf{x}) \quad (7)$$

et vérifie les relations d'anticommution à temps égaux :

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{x}')\} &= 0 \\ \{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{x}')\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (8)$$

La deuxième équation dans (8) est obtenue grâce à la relation de fermeture :

$$\sum_\alpha u_\alpha(t, \mathbf{x}) u_\alpha^*(t, \mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .$$

On peut montrer (exercice 1) que la fonction d'onde  $\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  dans (1) est donnée par  $(\psi(\mathbf{x}) = \psi(t=0, \mathbf{x}))$ :

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_N) | \Psi \rangle. \quad (9)$$

Le formalisme exposé ci-dessus est très utile pour étudier la dynamique d'un système de  $N$  fermions identiques (ou bien de  $N$  bosons identiques : dans ce cas il convient naturellement d'utiliser des relations de commutation) en mécanique quantique non relativiste. C'est ce que l'on appelle souvent le « problème à  $N$ -corps », qui a des applications importantes en physique du solide et en physique nucléaire. Cependant le contenu physique des équations reposant sur ce formalisme, dit de « seconde quantification » est strictement identique à celui de l'équation de Schrödinger : ce formalisme est simplement une technique commode.

## A.2. Equation de Dirac

L'équation de Dirac a été introduite initialement comme généralisation relativiste de l'équation de Schrödinger, afin de surmonter les difficultés d'interprétation de l'équation de Klein-Gordon comme équation quantique relativiste. Précisons bien qu'il s'agissait dans les deux cas d'équations à *une particule*, supposées décrire par exemple le comportement d'une particule relativiste dans un potentiel. En réalité l'équation de Dirac n'est pas plus susceptible que celle de Klein-Gordon d'être interprétée de façon *complètement* cohérente comme équation à une particule. Malgré tout, l'interprétation à une particule est physiquement acceptable, et pratiquement très utile, lorsque le potentiel varie peu sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde Compton ( $\hbar/mc$ ) de la particule considérée. Elle permet par exemple de calculer en première approximation les corrections relativistes au spectre de l'atome d'hydrogène. Je laisserai entièrement de côté cet aspect de l'équation de Dirac, qui est traité de façon très détaillée dans de nombreux livres, et, comme dans le cas du champ de Klein-Gordon, je considérerai dans un premier temps l'équation de Dirac *comme l'équation d'un champ classique*, qu'il s'agira ensuite de transformer en champ quantifié.

Ecrivons immédiatement l'équation de Dirac, en renvoyant à d'autres exposés pour la motivation et la « démonstration » de cette équation :

$$(i\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \partial_{\mu} - m\delta_{\alpha\beta}) \psi_{\beta}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (10.a)$$

Dans l'équation (10.a),  $\psi_{\beta}(t, \mathbf{x})$  est un objet (spineur) à quatre composantes :  $\beta = 1, 2, 3, 4$  et  $\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  un ensemble de matrices  $4 \times 4$ , les

*matrices de Dirac*, vérifiant les relations d'anticommuation ( $\alpha$  et  $\beta$  ne sont *pas* des indices de Lorentz, contrairement à  $\mu$ ) :

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1}} . \quad (11)$$

L'indice  $\mu$  est un indice de Lorentz :  $\mu = 0, 1, 2, 3$  et  $m$  la masse de la particule. On utilise souvent la notation :

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (12)$$

ou plus généralement  $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$  pour un quadrivecteur  $a_\mu$ , et on peut récrire (10.a) sous la forme matricielle :

$$(i\not{\partial} - m) \psi = 0 . \quad (10.b)$$

Les représentations irréductibles des relations d'anticommuation (11) sont uniques à une transformation de similarité près. La représentation standard des matrices  $\gamma^\mu$  est :

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

où  $\mathbb{1}$  est la matrice  $2 \times 2$  unité et  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les matrices de Pauli. La relation de conjugaison hermitique :

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (14)$$

est souvent utile. On définit à partir des matrices  $\gamma_\mu$  les matrices  $\sigma_{\mu\nu}$  :

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (15)$$

et la matrice  $\gamma_5$  :

$$\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5^\dagger \quad (16)$$

qui vérifie :

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0; \quad \gamma_5^2 = 1; \quad \gamma_5^\dagger = -\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 . \quad (17)$$

L'équation (10.b) implique que  $\psi(t, \mathbf{x})$  obéit à l'équation de Klein-Gordon ; en effet si l'on multiplie cette équation à gauche par  $(i\not{\partial} + m)$  on trouve, en utilisant (11) :

$$(\square + m^2) \psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

ce qui confirme l'interprétation de  $m$  comme masse de la particule.

L'équation de Dirac est covariante de Lorentz : si  $\Lambda$  est une transformation de Lorentz ( $x' = \Lambda x$ ), il existe une matrice  $S(\Lambda)$  transformant  $\psi(x)$  suivant :

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (18)$$

et qui vérifie (l'ambiguïté de signe provient du caractère 1/2 entier du spin) :

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu; & S(\Lambda_1 \Lambda_2) &= \pm S(\Lambda_1) S(\Lambda_2) \\ S^{-1}(\Lambda) &= \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0. \end{aligned} \quad (19)$$

$\psi'(x')$  obéit alors à l'équation de Dirac dans le référentiel transformé :

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0.$$

La loi de transformation (18) est plus complexe que celle d'un champ scalaire, qui est simplement  $\varphi'(x') = \varphi(x)$ . Je renvoie aux exposés classiques pour la démonstration de (19) et pour la forme explicite de  $S(\Lambda)$ , ainsi que pour la justification du fait que l'équation de Dirac décrit bien un champ de spin 1/2.

L'équation de Dirac peut se déduire de la densité de lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\vec{\partial} - m) \psi(x) = -\bar{\psi}(x)(i\vec{\partial} + m) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \left( \frac{i}{2} \vec{\partial} - m \right) \psi(x) \end{aligned} \quad (20)$$

où le spineur conjugué  $\bar{\psi}(x)$  est défini par :

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \psi_\beta^*(x) \gamma_{\beta\alpha}^0 \quad (21)$$

et les différentes formes dans (20) sont reliées par intégration par parties ; dans l'application du principe variationnel,  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  doivent être considérés comme des variables indépendantes. Remarquez que  $\bar{\psi}(x)$  obéit à l'équation :

$$\bar{\psi}(x)(i\vec{\partial} + m) = 0 \quad (22)$$

que l'on peut déduire de (20), ou de (10.b) par conjugaison hermitique. Le moment conjugué  $\pi_\alpha$  de  $\psi_\alpha$  vaut :

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_\alpha)} = i\bar{\psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^0 = i\psi_\alpha^\dagger \quad (23)$$

ce qui donne pour la densité de hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} = i\psi^\dagger (\partial_0 \psi) - \mathcal{L}. \quad (24)$$

Dans les calculs ultérieurs, on pourra remarquer que  $\mathcal{L} = 0$  si  $\psi$  obéit à l'équation de Dirac. Le couplage à un champ électromagnétique  $A_\mu(x)$  se fait à l'aide de la substitution (couplage minimal) :

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$$

où  $e$  est la charge de la particule considérée (pour plus de détails, cf. paragraphe C), et le lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_1$  vaut :

$$\mathcal{L}_1 = -e\bar{\psi}(x) \not{A} \psi(x) = -j^\mu(x) A_\mu(x). \quad (25)$$

Le courant électromagnétique  $j^\mu(x)$  est donc donné par :

$$j_\mu(x) = e\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (26)$$

Il est facile de s'assurer que ce courant est bien un courant conservé (exercice 2)

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 \quad (27)$$

ce qui conduit à la conservation de la charge  $Q$  :

$$Q = \int_t d^3x j^0(x); \quad \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (28)$$

En effet, en utilisant (27) et le théorème de la divergence, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \int_t d^3x j^0(x) = - \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{j}) = - \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

en supposant, comme d'habitude, que les champs s'annulent suffisamment rapidement à l'infini.

### A.3. Solutions de l'équation de Dirac

Comme le champ de Dirac obéit à l'équation de Klein-Gordon, les solutions seront des superpositions linéaires d'ondes planes de la forme :

$$\psi_n(x) = w_n(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_n(p \cdot x)} \quad (29)$$

avec :

$$p \cdot x = E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}; \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \geq 0$$

et  $\varepsilon_n = \pm 1$ ;  $\varepsilon_n = +1$  correspond aux solutions d'énergie positive,

$\varepsilon_n = -1$  aux solutions d'énergie négative. En reportant (29) dans (10.b) on trouve pour  $w_n(\mathbf{p})$  les équations :

$$(\not{p} - m) w_n(\mathbf{p}) = 0 : \varepsilon_n = +1 \quad (30.a)$$

$$(\not{p} + m) w_n(\mathbf{p}) = 0 : \varepsilon_n = -1 . \quad (30.b)$$

Lorsque  $\mathbf{p} = 0$ ,  $\not{p} = m\gamma^0$  et on obtient quatre solutions linéairement indépendantes qui peuvent être choisies de la façon suivante :

$$w_1 = u^{(1)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = u^{(2)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$w_3 = v^{(1)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad w_4 = v^{(2)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les spineurs  $u^{(r)}(v^{(r)})$  correspondent à  $\varepsilon_n = +1(-1)$  : ce sont des spineurs d'énergie positive (négative). Pour  $\mathbf{p}$  quelconque, on remarque que :

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = (p^2 - m^2) = 0 .$$

Ceci permet d'écrire la solution générale de (30) :

$$u^{(r)}(\mathbf{p}) = C (\not{p} + m) u^{(r)}(\mathbf{0}) \quad (32.a)$$

$$v^{(r)}(\mathbf{p}) = -C' (\not{p} - m) v^{(r)}(\mathbf{0}) \quad (32.b)$$

où  $C$  et  $C'$  sont des constantes de normalisation. Afin d'exhiber explicitement ces solutions, on peut recourir à la représentation (13) des matrices de Dirac qui donne :

$$\not{p} = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{p}} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Les spineurs  $u^{(r)}(\mathbf{p})$  et  $v^{(r)}(\mathbf{p})$  s'écrivent en fonction des spineurs à deux composantes  $\chi^{(r)}$  :

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sous la forme :

$$\text{En. } > 0 : \quad u^{(r)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} (E_{\mathbf{p}} + m) \chi^{(r)} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi^{(r)} \end{pmatrix} \quad (34.a)$$

$$\text{En.} < 0 : \quad v^{(r)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi^{(r)} \\ (E_{\mathbf{p}} + m) \chi^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (34.b)$$

Les constantes de normalisation  $C = C' = (E_{\mathbf{p}} + m)^{-1/2}$  dans (32) ont été choisies de telle sorte que (\*) :

$$\begin{aligned} u^{(r)}(\mathbf{p}) u^{(s)}(\mathbf{p}) &= 2 m \delta_{rs} \\ \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) v^{(s)}(\mathbf{p}) &= -2 m \delta_{rs} \\ u^{(r)}(\mathbf{p}) v^{(s)}(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

On remarquera le signe (–) dans la relation d'orthogonalité des spineurs d'énergie négative. Les relations de fermeture sont également très utiles, par exemple dans les calculs de sections efficaces. Evaluons par exemple la matrice  $\Lambda_+(\mathbf{p})$  :

$$\begin{aligned} (\Lambda_+(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} &= \sum_{r=1}^2 u_{\alpha}^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^{(r)}(\mathbf{p}) \\ &= \sum_r \frac{1}{(E_{\mathbf{p}} + m)} u_{\alpha}^{(r)}(0) (\not{p} + m)_{\alpha\lambda} (\not{p} + m)_{\gamma\beta} \bar{u}_{\gamma}^{(r)}(0) \\ &= \frac{1}{2(E_{\mathbf{p}} + m)} (\not{p} + m)_{\alpha\lambda} (1 + \gamma^0)_{\lambda\gamma} (\not{p} + m)_{\gamma\beta} \\ &= (\not{p} + m)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que :

$$(\Lambda_-(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} = - \sum_{r=1}^2 v_{\alpha}^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\beta}^{(r)}(\mathbf{p}) = - (\not{p} - m)_{\alpha\beta}.$$

On peut donc définir deux « projecteurs »  $\Lambda_+(\mathbf{p})$  et  $\Lambda_-(\mathbf{p})$ , projetant respectivement sur les états de moment  $\mathbf{p}$  et d'énergie positive et négative :

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \sum_r u^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}) = \not{p} + m \quad (36.a)$$

$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = - \sum_r v^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) = - (\not{p} - m) \quad (36.b)$$

(\*) La plupart des auteurs utilisent la normalisation :

$$u^{(r)} u^{(s)} = \delta_{rs}; \quad \bar{v}^{(r)} v^{(s)} = -\delta_{rs}.$$

La normalisation (35), qui est peu élégante dans certains cas (cf. (37)), permet d'utiliser les mêmes formules de section efficace pour les bosons et les fermions.

qui vérifient :

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 2m ; \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0 ; \quad \Lambda_{\pm}^2 = 2m \Lambda_{\pm} . \quad (37)$$

A cause de la normalisation (35),  $\Lambda_+$  et  $\Lambda_-$  ne sont pas exactement des projecteurs. Mais même si les spineurs sont normalisés à l'unité,  $\Lambda_+$  et  $\Lambda_-$  ne sont pas hermitiques, sauf si  $\mathbf{p} = 0$  :  $\Lambda_{\pm}^{\dagger} = \gamma^0 \Lambda_{\pm} \gamma^0$ . L'indice ( $r$ ) est un indice de spin et on peut facilement définir des opérateurs de projection sur les différents états de spin. Les quatre degrés de liberté du champ de Dirac correspondent à deux degrés de liberté de spin pour chaque signe de l'énergie.

#### A.4. Quantification du champ de Dirac

Comme dans le cas du champ de Klein-Gordon, nous allons partir de la décomposition de Fourier du champ de Dirac classique. Pour chaque valeur de  $\mathbf{p}$  les spineurs  $u^{(r)}(\mathbf{p})$  et  $v^{(r)}(\mathbf{p})$  forment une base de l'espace à quatre dimensions des spineurs de Dirac, et l'on peut écrire :

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [b_r(\mathbf{p}) u^{(r)}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^*(\mathbf{p}) v^{(r)}(\mathbf{p}) e^{ipx}] \quad (38.a)$$

$$\bar{\psi}(t, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [b_r^*(\mathbf{p}) \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_r(\mathbf{p}) \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}] . \quad (38.b)$$

Comme  $\psi$  est un champ complexe, il est nécessaire d'introduire deux coefficients indépendants  $b_r(\mathbf{p})$  et  $d_r^*(\mathbf{p})$ , la conjugaison complexe étant associée aux énergies négatives.

Suivant l'étude que nous avons faite au début du paragraphe, il est logique de *postuler* que les coefficients de Fourier  $b_r(\mathbf{p})$ ,  $d_r(\mathbf{p})$  et leur complexes conjugués doivent être remplacés par des opérateurs obéissant à des relations d'anticommutation :

$$\begin{aligned} \{b_r(\mathbf{p}), b_{r'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} &= (2\pi)^3 2E_p \delta_{rr'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \{d_r(\mathbf{p}), d_{r'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} &= (2\pi)^3 2E_p \delta_{rr'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (39)$$

tous les autres anticommutateurs étant nuls. Ainsi que nous allons le montrer très bientôt, ce postulat de quantification ne conduit à aucune incohérence, alors que l'hypothèse de relations de commutation n'est pas acceptable.

Les champs quantifiés  $\psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x)$  s'obtiennent à partir de (38) en remplaçant les coefficients de Fourier  $b_r(\mathbf{p})$ ,  $d_r(\mathbf{p})$  par des opérateurs  $b_r(\mathbf{p})$ ,  $d_r(\mathbf{p})$ :

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [b_r(\mathbf{p}) u^{(r)}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v^{(r)}(\mathbf{p}) e^{ipx}] \quad (40.a)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [b_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_r(\mathbf{p}) \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) e^{-ipx}]. \quad (40.b)$$

Comme dans le cas du champ de Klein-Gordon, les opérateurs d'annihilation (création) sont associés aux énergies positives (négatives). Il est instructif de comparer les équations (40) à celles (X.107) obtenues dans le cas du champ scalaire chargé.

On vérifie (exercice 6) que les relations (39) impliquent les relations d'anticommutation suivantes pour les champs :

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (41)$$

Mais d'après (23) le moment conjugué de  $\psi_\beta$  n'est autre que  $i\psi_\beta^\dagger$ , ce qui permet de récrire (41) sous la forme :

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{x}')\} = i\delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (42)$$

L'hypothèse (39) revient en fait à postuler des relations d'anticommutation entre le champ et son moment conjugué, ce qui est après tout l'hypothèse la plus naturelle, après que l'on ait constaté la faillite des relations de commutation.

Examinons maintenant le hamiltonien et la charge. D'après (24) le hamiltonien  $H$  est donné par :

$$H = i \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}.$$

Pour calculer  $H$  on utilise la relation de Parseval : si

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \psi(\mathbf{p})$$

alors :

$$\int d^3x \psi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \psi(\mathbf{p}) \varphi(-\mathbf{p}).$$

Dans le cas considéré, d'après la décomposition de Fourier (40) on obtient les coefficients :

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}) = \sum_r \frac{1}{2 E_p} [d_r(\mathbf{p}) \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) e^{-i E_p t} + b_r^\dagger(-\mathbf{p}) \bar{u}^{(r)}(-\mathbf{p}) e^{i E_p t}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(-\mathbf{p}) = \frac{-i}{2} \sum_s [b_s(-\mathbf{p}) u^{(s)}(-\mathbf{p}) e^{-i E_p t} - d_s^\dagger(\mathbf{p}) v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{i E_p t}].$$

Il faut maintenant tenir compte des relations d'orthogonalité (exercice 5) :

$$\bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) \gamma^0 u^{(s)}(-\mathbf{p}) = 0 \quad (43)$$

$$\bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}) \gamma^0 v^{(s)}(\mathbf{p}) = \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}) \gamma^0 u^{(s)}(\mathbf{p}) = 2 E_p \delta_{rs}$$

pour obtenir le hamiltonien en fonction des coefficients de Fourier :

$$H = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2 E_p} E_p [b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p})]. \quad (44)$$

Grâce aux relations d'anticommutation (39) on peut transformer le terme précédé d'un signe  $(-)$  dans (44) ; pour plus de clarté, on peut utiliser une normalisation discrète comme dans (IX.44) :

$$-d_{r,p} d_{r,p}^\dagger = -1 + d_{r,p}^\dagger d_{r,p}.$$

En redéfinissant le zéro d'énergie, le hamiltonien se met sous la forme (\*) :

$$H = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2 E_p} E_p (b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})). \quad (45)$$

Une autre façon d'obtenir (45) à partir de (44) est d'utiliser le produit normal, avec une différence importante par rapport au cas des bosons : quand on fait passer à gauche les opérateurs de création, tous les *anti* commutateurs doivent être omis :

$$:bb^\dagger: = -b^\dagger b$$

(\*) On peut facilement généraliser (45) à une composante quelconque de l'énergie-moment :

$$P_\mu = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2 E_p} P_\mu [b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})].$$

Le point important dans ce calcul du hamiltonien est que les relations d'anticommutation sont indispensables pour obtenir un hamiltonien défini positif. Avec des relations de commutation, le deuxième terme de (44) ne pourrait pas être rendu positif, même si l'on redéfinissait le zéro d'énergie. Ce résultat est un cas particulier du *théorème spin-statistique* : les champs de spin demi-entier ( $1/2, 3/2, \dots$ ) doivent être quantifiés avec des relations d'anticommutation. Inversement les champs de spin entier ( $0, 1, \dots$ ) doivent être quantifiés avec des relations de commutation : dans le cas contraire, on peut montrer que la localité ne serait pas satisfaite. Cette relation spin-statistique est une conséquence profonde — et fascinante — du mariage de la mécanique quantique avec la relativité. Il n'existe pas — à ma connaissance — d'argument intuitif simple pour justifier ce résultat.

Pour terminer l'interprétation physique de notre quantification, reste à calculer la charge :

$$Q = e \int d^3x : \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) : .$$

Le calcul est en tout point analogue au précédent et le résultat en est :

$$Q = e \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})) . \quad (46)$$

On remarquera l'analogie avec l'équation (X.111) obtenue dans le cas du champ scalaire chargé.

Si l'on se souvient que  $b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p})$  et  $d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})$  sont les opérateurs nombre de particules de moment  $\mathbf{p}$  et de spin  $r$ , l'examen de (45) et (46) montre que  $b_r^\dagger(\mathbf{p})$  crée une particule de charge  $e$  et de moment  $\mathbf{p}$ , tandis que  $d_r^\dagger(\mathbf{p})$  crée une particule de charge  $-e$  et de moment  $\mathbf{p}$ . Le champ  $\psi(x)$  crée une charge  $-e(d_r^\dagger(\mathbf{p}))$  ou détruit une charge  $e(b_r(\mathbf{p}))$ ; inversement  $\bar{\psi}(x)$  fait varier la charge de  $+e$ . Une formulation plus générale de cette propriété est donnée à l'exercice (9).

Si *par convention* on appelle la particule de charge  $e$  la « particule », alors celle de charge  $-e$  est l'« antiparticule » : l'exemple classique est celui de l'électron (particule) et du positron (antiparticule). Remarquons que l'on peut aussi définir des charges qui ne sont pas nécessairement la charge électrique : par exemple la charge baryonique distingue le neutron de l'antineutron.

En résumé les quatre degrés de liberté d'un champ de Dirac permettent de décrire une particule possédant deux degrés de liberté de spin, et une antiparticule possédant également deux degrés de liberté de spin.

En choisissant une représentation particulière des matrices de Dirac, la représentation de Majorana, il est possible de décrire commodément

des particules de spin 1/2 qui soient leur propre antiparticule : de telles particules sont appelées « particules de Majorana ». Dans ce cas le champ de Dirac possède seulement deux degrés de liberté (cf. exercice XII.13).

### A.5. Propagateur du champ de Dirac

Nous avons constaté dans les deux chapitres précédents le rôle crucial joué par la valeur moyenne sur le vide du produit- $T$  de deux champs. Il est donc naturel d'étudier le produit- $T$  de deux champs de Dirac. Toutefois, en raison des relations d'anticommutation, il est nécessaire de modifier un signe dans la définition du produit- $T$  de deux champs de Dirac ; on définira :

$$T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) = \theta(x^0 - x'^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \theta(x'^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x). \quad (47)$$

La permutation de deux champs de Dirac induit toujours un signe  $-$ . Evaluons la valeur moyenne sur le vide de ce produit- $T$  en utilisant la représentation de Fourier (40) du champ de Dirac libre :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \times \\ &\times [\theta(t - t') (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} - \theta(t' - t) (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}] . \end{aligned} \quad (48)$$

Pour obtenir cette équation, on a utilisé les relations de fermeture (36). Comme dans le cas du champ de Klein-Gordon, on peut écrire le résultat en utilisant le contour de Feynman (exercice 7) :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle &= [S_F(x - x')]_{\alpha\beta} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \end{aligned} \quad (49)$$

Le propagateur de Feynman  $S_F(p)$  pour le champ de Dirac sera donné dans l'espace de Fourier par :

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} . \quad (50)$$

Il est facile de vérifier directement que ce propagateur est bien une

fonction de Green de l'équation de Dirac :

$$(i\partial - m) S_F(x) = i\delta^{(4)}(x) . \quad (51)$$

On peut également exprimer  $S_F(x - x')$  en fonction de  $\Delta_F(x - x')$  ; en effet d'après (49) :

$$S_F(x - x') = (i\partial_x + m) \Delta_F(x - x') . \quad (52)$$

## B. THÉORÈME DE WICK POUR LES FERMIONS

### B.1. « Oscillateur fermionique » couplé à une source externe

Plutôt que de traiter le cas général, j'expliquerai la méthode à suivre sur un exemple élémentaire. Cet exemple n'est autre que la transposition au cas des fermions du problème de l'oscillateur harmonique couplé à une source classique (cf. IX-C.2). Considérons deux opérateurs  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  tels que :

$$\psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0 ; \quad \{\psi, \bar{\psi}\} = 1 \quad (53)$$

ainsi que le « hamiltonien » d'un « oscillateur fermionique » :

$$H_0 = E\bar{\psi}\psi .$$

Pour coupler  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  à une source externe, on introduit des éléments  $\eta(t)$ ,  $\bar{\eta}(t)$  d'une algèbre de Grassmann (\*), c'est-à-dire des « nombres anticommutants » :  $\eta(t)$  et  $\bar{\eta}(t)$  anticommutent entre eux ainsi qu'avec les  $\psi$  et les  $\bar{\psi}$  :

$$\{\eta(t), \eta(t')\} = \{\eta(t), \bar{\eta}(t')\} = \{\eta(t), \psi\} = \dots = 0 . \quad (54)$$

Le « hamiltonien » complet est :

$$H = E\bar{\psi}\psi - \bar{\eta}(t)\psi - \bar{\psi}\eta(t) . \quad (55)$$

(\*) Algèbre de Grassmann  $\mathcal{A}$  : soit  $N$  variables (générateurs)  $\eta_1 \dots \eta_N$  telles que

- (i)  $\{\eta_i, \eta_j\} = 0$
- (ii) si  $\eta_i \in \mathcal{A} : \lambda \eta_i \in \mathcal{A} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$
- (iii)  $\eta_i, \eta_j \in \mathcal{A} : \lambda \eta_i + \mu \eta_j \in \mathcal{A}$
- (iv)  $\eta_i, \eta_j \in \mathcal{A} : \eta_i \eta_j \in \mathcal{A}$

Alors les  $\eta_i$  engendrent une algèbre de Grassmann.

Soulignons qu'il s'agit d'un problème purement mathématique ; il n'est pas nécessaire que  $H$  soit hermitique, ni que  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  soient hermitiques conjugués. Les seules relations importantes sont (53) et (54). Suivons la méthode du chapitre IX, paragraphe C.2 en introduisant les opérateurs  $\psi_I(t)$  et  $\bar{\psi}_I(t)$  de la représentation interaction :

$$\psi_I(t) = e^{iH_0 t} \psi e^{-iH_0 t} ; \quad \bar{\psi}_I(t) = e^{iH_0 t} \bar{\psi} e^{-iH_0 t} .$$

Comme  $[H_0, \psi] = -E\psi$  et  $[H_0, \bar{\psi}] = E\bar{\psi}$  :

$$\psi_I(t) = e^{-iEt} \psi ; \quad \bar{\psi}_I(t) = e^{iEt} \bar{\psi}$$

et le hamiltonien de la représentation interaction devient :

$$H_I(t) = - [\bar{\eta}(t) e^{-iEt} \psi + \bar{\psi} e^{iEt} \eta(t)] . \quad (56)$$

Le commutateur  $[H_I(t), H_I(t')]$  est indépendant des opérateurs  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  :

$$[H_I(t), H_I(t')] = \bar{\eta}(t) \eta(t') e^{-iE(t-t')} - \bar{\eta}(t') \eta(t) e^{-iE(t'-t)} \quad (57)$$

et comme  $(\bar{\eta} \eta)$  commute avec  $\psi$  et  $\eta$ , on vérifie immédiatement que :

$$[[H_I(t), H_I(t')], H_I(t'')] = 0 .$$

Ceci permet d'utiliser l'identité de l'exercice (IX.10.b) pour écrire  $U_I(t)$  sous la forme :

$$U_I(t) = \exp \left( -i \int^t H_I(t') dt' \right) \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \iint^t dt' dt'' \theta(t' - t'') [H_I(t'), H_I(t'')] \right) . \quad (58)$$

La forme normale de  $U_I(t)$  s'obtient en utilisant à nouveau l'identité :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$$

le résultat final s'écrivant :

$$U_I(t) = : \exp \left( -i \int^t H_I(t') dt' \right) : \times \\ \times \exp \left( -\iint^t dt' dt'' \bar{\eta}(t') \theta(t' - t'') e^{-iE(t' - t'')} \eta(t'') \right) . \quad (59)$$

On remarquera la similitude entre cette équation et (IX.73). Si  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  sont maintenant identifiés à des opérateurs de création et d'annihilation  $a$  et  $a^\dagger$  (cf. 3) :

$$\langle 0 | T(\psi_I(t') \bar{\psi}_I(t'')) | 0 \rangle = \theta(t' - t'') e^{-iE(t' - t'')}$$

le terme d'intégrale double dans (59) vaut également :

$$\iint dt' dt'' \bar{\eta}(t') \langle 0 | T(\psi_I(t') \bar{\psi}_I(t'')) | 0 \rangle \eta(t'').$$

Compte tenu de l'expérience acquise avec les champs de bosons, il n'est pas difficile de deviner la forme du théorème de Wick pour les fermions :

$$\begin{aligned} T \left( \exp \left( i \int d^4x (\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)) \right) \right) &= \\ &= : \exp \left( i \int d^4x (\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)) \right) : \times \\ &\times \exp \left( - \iint d^4x d^4x' \bar{\eta}(x') \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle \eta(x') \right). \end{aligned}$$

(60)

La démonstration suit exactement le canevas qui précède ; elle se trouve à l'exercice 8. Dans l'équation (60), les champs  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , tout comme  $\varphi(x)$  dans (IX.85) sont des champs *libres*. On remarquera que le coefficient de l'intégrale double dans (60) est  $(-1)$ , alors qu'il valait  $(-1/2)$  dans (IX.85) : ceci est simplement dû à la présence de deux charges, ou de deux types de particules. Dans le cas de bosons chargés, on a constaté exactement le même phénomène (cf. X.115).

En développant les exponentielles dans (60) et en identifiant les coefficients de  $\eta$  et  $\bar{\eta}$ , on obtient des identités du type :

$$T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) = : \psi(x) \bar{\psi}(x') : + \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle.$$

Les relations d'anticommutation des sources externes  $\eta(x)$  et  $\bar{\eta}(x)$  donnent automatiquement le signe correct. En pratique il conviendra de faire attention à l'ordre des facteurs : dans l'expression équivalente à (IX.86) pour les fermions, chaque terme devra être multiplié par la signature de la permutation faisant passer de l'ordre initial à l'ordre final des  $\psi$  et des  $\bar{\psi}$ .

### B.2. Formulation fonctionnelle : intégration sur des variables de Grassmann

Il est possible d'écrire une fonctionnelle génératrice des fonctions de Green pour les fermions. Cependant, au lieu d'intégrer sur des nombres comme dans le cas des bosons, il faudra intégrer sur les éléments d'une algèbre de Grassmann. Commençons par le cas d'un seul degré de liberté, en introduisant deux variables de Grassmann  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  :

$$\psi^2 = \bar{\psi}^2 = 0 ; \quad \{\psi, \bar{\psi}\} = 0 \quad (61)$$

(remarquez bien la différence entre (53) et (61) : dans le premier cas on a affaire à un opérateur (de champ), dans le second à un champ classique, ou plus exactement à la généralisation fermionique d'un champ classique). Compte tenu de (61), le polynôme le plus général que l'on peut construire avec  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  est (\*) :

$$P(\psi) = a_0 + a_1 \psi + \bar{a}_1 \bar{\psi} + a_{12} \bar{\psi} \psi . \quad (62)$$

Nous *définirons* l'intégrale sur les variables grassmanniennes par :

$$\begin{aligned} \int d\psi &= 0 ; & \int d\psi \psi &= 1 \\ \int d\bar{\psi} &= 0 ; & \int d\bar{\psi} \bar{\psi} &= 1 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\int d\bar{\psi} d\psi P(\psi) = \int d\bar{\psi} (a_1 - a_{12} \bar{\psi}) = -a_{12} . \quad (63)$$

(En effet  $\int d\psi \bar{\psi} \psi = - \int d\psi \psi \bar{\psi} = -\bar{\psi}$ .) Comme application immédiate de (63) on peut calculer l'intégrale « gaussienne » :

$$\int d\bar{\psi} d\psi e^{-a\bar{\psi}\psi} = a .$$

Essayons de généraliser l'intégrale gaussienne à plusieurs variables en examinant le cas de deux degrés de liberté :

$$\int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 d\bar{\psi}_2 d\psi_2 e^{-\sum_{i,j=1}^2 \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} . \quad (64)$$

(\*) Si  $a_0$  et  $a_{12}$  sont des nombres,  $a_1(\bar{a}_1)$  est une constante de Grassmann par rapport à  $\psi(\bar{\psi})$ . On notera également la propriété :  $d(\lambda \psi) = \lambda^{-1} d\psi$ .

Si l'on développe l'exponentielle, le seul terme donnant une contribution non nulle est celui qui contient en facteur  $\bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2$  ; tenant compte des relations d'anticommutation, le résultat de l'intégrale (64) est :

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = \det A .$$

Il n'est pas difficile de se convaincre du résultat général :

$$\int \prod_{i=1}^N d\bar{\psi}_i d\psi_i e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = \det A . \quad (65)$$

Ce résultat est à comparer avec celui de l'équation (A.12) (pour  $j = 0$  ;  $dx dy = (dz dz^*)/2i$ ) :

$$\int \prod_{i=1}^N \frac{dz_i dz_i^*}{2i\pi} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N z_i^* A_{ij} z_j\right) = (\det A)^{-1} . \quad (66)$$

On note que l'utilisation de variables grassmanniennes a remonté le déterminant de  $A$  du dénominateur au numérateur. Cette propriété se révèle très utile, par exemple dans le cas des théories de jauge non abéliennes, pour écrire des jacobiens sous forme de développements diagrammatiques. Un exemple de ce type d'utilisation est donné à l'exercice 14. Comme dans le cas des variables ordinaires, on peut rajouter des termes linéaires dans l'exponentielle de (65) et définir une intégrale  $I(\eta, \bar{\eta})$  dépendant de sources (grassmanniennes)  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  :

$$I(\bar{\eta}, \eta) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\psi}_i d\psi_i \exp(-\bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j + \bar{\eta}_i \psi_i + \bar{\psi}_i \eta_i) .$$

Le changement de variables :

$$\psi_j = \psi'_j + A_{jk}^{-1} \eta_k ; \quad \bar{\psi}_j = \bar{\psi}'_j + \bar{\eta}_k A_{kj}^{-1}$$

donne la transposition de l'équation (A.12) au cas des variables de Grassmann :

$$I(\bar{\eta}, \eta) = (\det A) \exp(\bar{\eta}_i A_{ij}^{-1} \eta_j) . \quad (67)$$

Cette expression permet d'écrire une fonctionnelle génératrice  $Z(\bar{\eta}, \eta)$  des fonctions de Green :

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \times \\ \times \exp\left(i \int d^4x [\bar{\psi} (i\vec{\partial} - m) \psi + V(\bar{\psi}, \psi) + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta]\right) \quad (68)$$

où la prescription  $m \rightarrow m - i\varepsilon$  assure que le propagateur est  $S_F(p)$ . Retrouvons par exemple l'équivalent du théorème de Wick à partir de  $Z_0(\bar{\eta}, \eta)$  :

$$\begin{aligned} Z_0(\bar{\eta}, \eta) &= \int \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \exp \left( i \int d^4x [\bar{\psi} (i\vec{\partial} - m) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta] \right) = \\ &= \mathcal{N} \exp \left( - \int d^4x d^4x' \bar{\eta}(x) i(i\vec{\partial} - m)^{-1} \eta(x') \right). \quad (69) \end{aligned}$$

D'après l'équation (51), (i)  $(i\vec{\partial} - m)^{-1}$  est bien égal au propagateur  $S_F(x)$ . Suivant les indications données au chapitre précédent, on montre que les fonctions de Green calculées par différentiation fonctionnelle à partir de  $Z(\bar{\eta}, \eta)$  coïncident avec celles que l'on obtient à partir du théorème de Wick.

### C. FORMALISME LAGRANGIEN POUR LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE CLASSIQUE

#### C.1. Equations de Maxwell et potentiel électromagnétique

Dans la formulation élémentaire des équations de Maxwell, on introduit un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  couplés à une densité de charge  $\rho$  et à une densité de courant  $\mathbf{j}$ , aussi appelées *sources* du champ électromagnétique :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (70.a); \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (70.b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (71.a); \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (71.b)$$

(où  $c = 1$  ; la loi de Coulomb avec les conventions (70) est  $\|\mathbf{F}\| = |q_1 q_2|/4 \pi r^2$ ). Les équations (70) impliquent l'équation de continuité pour  $(\rho, \mathbf{j})$ , qui exprime la conservation locale de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (72)$$

Les équations (71), indépendantes de  $(\rho, \mathbf{j})$ , impliquent l'existence d'un potentiel scalaire  $\varphi$  et d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tels que :

$$\mathbf{E} = - \nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (73.a); \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (73.b)$$

Les champs **E** et **B** ne sont pas modifiés par une *transformation de jauge* :

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}; \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda \quad (74)$$

où  $\Lambda(t, \mathbf{x})$  est une fonction arbitraire du temps et de l'espace.

### C.2. Formulation covariante

Les potentiels  $(\varphi, \mathbf{A})$  sont rassemblés en un quadrivecteur (à l'ambiguïté près des transformations de jauge)  $A^\mu(x)$  :

$$A^0(x) = \varphi(t, \mathbf{x}); \quad A^i(x) = (\mathbf{A})_i(t, \mathbf{x})$$

et de même pour  $(\rho, \mathbf{j})$  :

$$j^0(x) = \rho(t, \mathbf{x}); \quad j^i(x) = (\mathbf{j})_i(t, \mathbf{x})$$

$j^\mu(x)$  est le quadrivecteur-courant électromagnétique, qui vérifie la version covariante de l'équation de continuité (72), aussi appelée *équation de conservation du courant*  $j_\mu$  :

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (75)$$

Avec ces notations la transformation de jauge (74) devient :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

où  $\Lambda(x)$  est une fonction arbitraire de  $x$ .

Le tenseur champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  est défini par :

$$\boxed{F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad (76)$$

et s'écrit sous forme matricielle :

$$F^{\mu\nu} = \underset{\downarrow}{\overset{\nu \rightarrow}{\mu}} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur dual  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  se déduit de  $F^{\mu\nu}$  par (cf. équation C.1) :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (77)$$

et correspond à la substitution  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$  qui laisse invariante les équations de Maxwell en l'absence de source  $(\rho, \mathbf{j})$ . Dans cette formulation covariante, les équations de Maxwell deviennent :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad (78)$$

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (79)$$

L'équation (78) est une équation dynamique, faisant intervenir la source  $j^\mu$ , tandis que l'équation (79) est une équation de contraintes.

Les équations de Maxwell se déduisent de la densité de lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (80)$$

qui en termes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \rho \varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (81)$$

On peut arriver à la forme (80) du lagrangien en écrivant l'expression la plus générale, invariante de Lorentz, invariante de jauge et quadratique en  $A_\mu$  et  $\partial_\nu A_\mu$ . Une forme équivalente à (80) est (cf. les remarques suivant l'équation (IX.31.a)) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu (\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu - j^\mu A_\mu. \quad (82)$$

L'équation (78) s'écrit en fonction du potentiel :

$$(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = j_\mu. \quad (83)$$

La *jauge de Lorentz* est définie par  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , et dans ce cas (83) se simplifie en :

$$\Box A^\mu = j^\mu. \quad (84)$$

Il est intéressant de calculer les moments conjugués :

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0$$

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_k)} = F^{k0} = E_k.$$

Le point important est que  $A_0$  n'a pas de moment conjugué !

### C.3. Invariance de jauge et conservation du courant

La conservation du courant (75) est une propriété remarquable qu'il convient d'étudier attentivement.

Il existe une technique générale pour obtenir des courants conservés : c'est celle du *théorème de Noether*, qui relie invariance du lagrangien et conservation d'un courant. Supposons par exemple qu'une densité de lagrangien  $\mathcal{L}$  dépende de  $N$  champs  $\varphi_r(x)$  et soit invariante dans des transformations dépendant d'un paramètre  $\Lambda$  :

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = (e^{-i\Lambda T})_{rs} \varphi_s(x) \quad (85)$$

où  $T$  est une matrice hermitique ; prenons  $\Lambda$  infinitésimal et développons au premier ordre en  $\Lambda$  :

$$\varphi'_r(x) = \varphi_r(x) - i\Lambda T_{rs} \varphi_s(x). \quad (86)$$

La variation du lagrangien est :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \delta (\partial_\mu \varphi_r) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r = \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \delta \varphi_r \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \right) \delta \varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} \delta \varphi_r. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes de la seconde équation se compensent à cause des équations du mouvement, et comme  $\delta \mathcal{L} = 0$  on en déduit :

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \delta \varphi_r \right] = 0. \quad (87)$$

L'expression (87) constitue le théorème de Noether. En reportant (86) dans (87) on obtient le courant conservé :

$$j_\mu(x) = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} T_{rs} \varphi_s; \quad \partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (88)$$

Appliquons ce résultat au lagrangien de Dirac (20) :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\vec{\partial} - m) \psi.$$

Ce lagrangien est invariant dans la *transformation de jauge globale* (pour éviter toute confusion entre  $e = 2, 71 \dots$  et la charge de l'électron, nous désignerons celle-ci par  $q$  jusqu'à la fin du chapitre) :

$$\psi \rightarrow e^{-iq\Lambda} \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{iq\Lambda}. \quad (89)$$

Comme  $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \psi) = i \bar{\psi} \gamma^\mu$ , on retrouve l'expression du courant conservé :

$$j_\mu(x) = q \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) .$$

### Invariance de jauge locale

Supposons maintenant que  $\Lambda$ , au lieu d'être une constante, dépende de  $x$  ; la transformation :

$$\psi \rightarrow e^{-iq\Lambda(x)} \psi(x) ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{iq\Lambda(x)} \quad (90)$$

est appelée *transformation de jauge locale*. Cette transformation de jauge est dite abélienne, car le produit de deux transformations est commutatif. Le lagrangien (20) n'est pas invariant dans cette transformation, car :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi'(x) &= \partial_\mu (e^{-iq\Lambda(x)} \psi(x)) = -iq(\partial_\mu \Lambda) \psi'(x) + \\ &+ e^{-iq\Lambda(x)} (\partial_\mu \psi(x)) \neq e^{-iq\Lambda(x)} (\partial_\mu \psi(x)) . \end{aligned}$$

Pour obtenir un lagrangien invariant par (90), écrivons le lagrangien complet du champ électromagnétique couplé au champ de Dirac, qui n'est autre que *le lagrangien de l'électrodynamique quantique* (QED) (bien que pour le moment nous en soyons toujours aux champs classiques)

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\vec{\partial} - m) \psi - q \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) .$$

(91)

Les deux premiers termes de (91) correspondent respectivement aux lagrangiens libres du champ électromagnétique et du champ de Dirac, tandis que le dernier terme est un terme d'interaction, qui couple ces deux champs entre eux. Nous voyons que le premier terme de  $\partial_\mu \psi'$  est éliminé si nous effectuons, simultanément à (90), une transformation de jauge :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (92)$$

sur le champ électromagnétique. Le lagrangien *complet* (91) est alors invariant par transformation de jauge locale. Inversement, on peut chercher une dérivée  $D_\mu$ , appelée *dérivée covariante*, telle que :

$$D'_\mu \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)} D_\mu \psi(x) .$$

Il est clair que cette dérivée covariante est :

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x). \quad (93)$$

En effet :

$$(\partial_\mu + iqA_\mu + iq(\partial_\mu \Lambda)) e^{-iq\Lambda(x)} \psi(x) = e^{-iq\Lambda(x)} (\partial_\mu + iqA_\mu) \psi(x).$$

Autrement dit  $D_\mu \psi(x)$  se comporte comme  $\psi(x)$  dans une transformation de jauge, d'où le nom de dérivée covariante. Lorsqu'un lagrangien est invariant par une transformation de jauge globale (89), on pourra le rendre invariant par transformation de jauge locale (90), à condition d'introduire un champ *vectoriel*  $A_\mu(x)$  (parfois appelé « champ compensateur ») se transformant suivant (92) et couplé aux champs initiaux par la prescription du couplage minimal :

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (94)$$

Ceci revient à remplacer dans le lagrangien initial les dérivées  $\partial_\mu$  par les dérivées covariantes  $D_\mu$  (93). La même méthode — un peu plus sophistiquée — permettra aussi de transformer une invariance de jauge globale non abélienne en invariance locale (cf. XIII-A.2).

## D. QUANTIFICATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### D.1. Problèmes dans la quantification du champ électromagnétique

Dans les exemples étudiés jusqu'à présent, le nombre de degrés de liberté des champs en un point  $x$  était égal au nombre de degrés de liberté physiques : un pour le champ de Klein-Gordon neutre, deux pour le champ chargé, quatre pour le champ de Dirac (dans le cas du champ vectoriel, la composante supplémentaire est facilement éliminée (cf. X-E.2)). Le problème dans la quantification du champ électromagnétique vient de ce que le nombre de degrés de liberté que l'on doit utiliser est plus grand que le nombre de degrés de liberté physiques : ce dernier est égal à *deux*, car un photon possède seulement deux états de polarisation, par exemple circulaire droite et circulaire gauche (le photon a spin 1, mais l'analyse générale des représentations du groupe de Poincaré permet de montrer qu'une particule de masse nulle et de spin  $j$  ne peut avoir que deux états de spin lorsque ses interactions conservent la parité : la projection du spin sur la direction de propagation, ou *hélicité*, vaut  $\pm j$  ; dans le cas du photon, les états de polarisation circulaire droite (gauche) correspondent à l'hélicité

+ 1 (− 1)). La polarisation d'un photon de moment  $k_\mu = (k_0, 0, 0, k_0)$  et d'hélicité + 1 (− 1) peut être décrite par un quadrivecteur  $\varepsilon_\mu^{(+)}(\varepsilon_\mu^{(-)})$  :

$$\varepsilon_\mu^{(+)} = \left( 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right) ; \quad \varepsilon_\mu^{(-)} = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right) . \quad (95)$$

Les conventions de phase dans (95) sont choisies de façon à respecter les conventions de phase habituelles du moment angulaire <sup>(1)</sup>. On note que  $k^\mu \varepsilon_\mu^{(\pm)} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\pm)} = 0$  : la polarisation du photon est *transverse*.

Le champ électromagnétique  $F^{\mu\nu} (= (\mathbf{E}, \mathbf{B}))$  possède six composantes ; cependant deux d'entre elles seulement sont indépendantes à cause des équations de contraintes (71) ou (79). On pourrait penser à quantifier les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en tenant compte de ces contraintes. Cependant on se heurterait immédiatement à une difficulté de taille : l'interaction électromagnétique écrite en termes de  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  est non locale en mécanique quantique. Un exemple très explicite est donné par l'effet Bohm-Aharonov. Cet effet est obtenu dans une expérience d'interférences d'électrons, du type trous d'Young, en plaçant derrière l'écran  $E_1$  et entre les deux fentes, un solénoïde long et fin, de telle sorte que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde soit nul à une excellente approximation (figure 3).

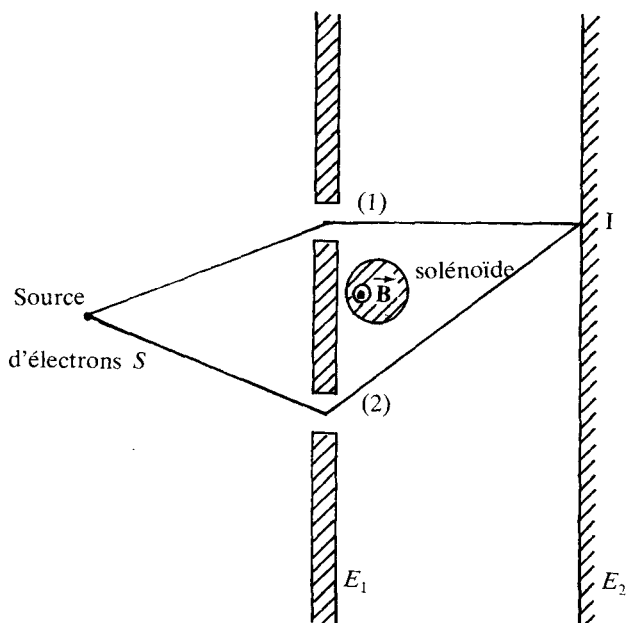


Figure 3. L'expérience de Bohm-Aharonov.

En l'absence du solénoïde, on observe une certaine figure d'interférences sur l'écran  $E_2$  : en effet soit  $a_1(a_2)$  l'amplitude de probabilité pour qu'un électron émis par la source  $S$  arrive au point d'impact  $I$  en choisissant le trajet 1 (2). Ces deux amplitudes de probabilité ont des phases  $\delta_1$  et  $\delta_2$  différentes, et la différence de phase  $\Delta = \delta_1 - \delta_2$  contrôle le phénomène d'interférences (en admettant que  $|a_1| \sim |a_2|$ ). En présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , le lagrangien des électrons est modifié (cf. (81)) :

$$L \rightarrow L' = L + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = L + \delta L$$

ainsi que les phases associées aux deux trajets ; par exemple pour le trajet 1 :

$$\delta_1 \rightarrow \delta'_1 = \delta_1 + \delta S = \delta_1 + \frac{q}{\hbar} \int_{t_{S(1)}}^{t_I} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} dt = \delta_1 + \frac{q}{\hbar} \int_{S(1)}^I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (96)$$

(en effet l'amplitude de probabilité d'un trajet est  $\sim \exp(iS/\hbar)$  : cf. (VIII-2)) :

Le déphasage entre les deux trajets en présence du solénoïde est :

$$\begin{aligned} \Delta' = \delta'_1 - \delta'_2 &= \Delta + \frac{q}{\hbar} \left[ \int_{S(1)}^I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \int_{S(2)}^I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right] \\ &= \Delta + \frac{q}{\hbar} \iint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (97)$$

où  $\Gamma$  est le contour délimité par les deux trajets. Le résultat (97) est invariant de jauge, mais on voit que le champ magnétique influence la propagation des électrons, alors qu'il est nul dans la région où la probabilité de présence de ceux-ci est différente de zéro. Il faudrait donc écrire une interaction non locale entre le champ  $\mathbf{B}$  et les électrons, alors que l'interaction entre ceux-ci et le potentiel  $\mathbf{A}$  est parfaitement locale :  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  est calculé le long du trajet (\*).

Nous ne pouvons pas échapper à la quantification du potentiel (on continuera malgré tout à parler de la quantification du *champ* électromagnétique), ce qui implique une confrontation à l'invariance de jauge : comme les potentiels ne sont pas uniques, il n'est pas étonnant que le nombre de degrés de liberté soit plus élevé que le nombre de degrés de libertés physiques. Les difficultés apparaissent aussi bien dans

(\*) L'importance du rôle des potentiels en mécanique quantique ne devrait pas surprendre : la formulation élémentaire de la mécanique classique (lois de Newton) fait intervenir la force, mais la formulation élémentaire de la mécanique quantique (équation de Schrödinger) fait intervenir l'énergie potentielle.

la quantification canonique que dans la méthode des intégrales de chemin :

— quantification canonique : le moment conjugué de  $A_0$  n'existe pas :  $\pi_0 = 0$ ,

— intégrales de chemin : essayons d'écrire pour le champ électromagnétique une généralisation naïve de la fonctionnelle génératrice du champ scalaire ; l'action dépend du lagrangien libre  $\mathcal{L}_0$  et d'un courant *conservé classique*  $j_\mu(x)$

$$\begin{aligned} Z(j) &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0(A_\mu) - j_\mu A^\mu) \right) \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp (iS[A]) \end{aligned} \quad (98)$$

avec (cf. (82)) :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A^\mu [\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu. \quad (99)$$

On notera le signe dans (99) : dans le cas de la composante de temps, le signe du d'Alembertien est opposé à celui du champ de Klein-Gordon, alors que les signes sont identiques dans le cas des composantes d'espace : une règle mnémotechnique consiste à remarquer que les composantes d'espace de  $A_\mu$  sont les composantes physiques, et que pour ces composantes on doit avoir le même signe que pour le champ scalaire. D'après l'expérience acquise au chapitre X, on serait tenté d'écrire pour le propagateur du photon :

$$D_{\mu\nu}^F = [\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu]^{-1}.$$

Malheureusement l'opérateur  $[\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu]$  n'a pas d'inverse : il donne zéro si on l'applique à  $\partial^\nu A$  ; de façon équivalente, dans l'espace de Fourier,  $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)$  projette sur le sous-espace orthogonal à  $k_\mu$  (au sens de la métrique de Minkowski). Dans le cas du champ vectoriel (X-E.2),  $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/m^2)$  est inversible sauf si  $k^2 = m^2$ .

Pour quantifier  $A_\mu$ , il faut fixer une jauge. Les choix standard sont :

$$(i) \quad \partial^\mu A_\mu(x) = 0 \quad \text{jauge de Lorentz} \quad (100)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0 \quad \text{jauge de Coulomb} \quad (101)$$

$$(iii) \quad n^\mu A_\mu(x) = 0 \quad \text{jauge axiale } (n^2 < 0) \quad (102)$$

La jauge de Lorentz ne fixe pas complètement le potentiel : on peut encore faire des transformations de jauge :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x)$$

à condition que  $\theta(x)$  obéisse à l'équation

$$\square \theta(x) = 0.$$

Au contraire les choix (101) et (102) fixent le potentiel de façon unique, si l'on exige que celui-ci tende vers zéro à l'infini. Cependant la quantification dans la jauge de Coulomb (101) ou dans la jauge axiale (102) brise la covariance formelle de la théorie, et nous nous limiterons à des équations fixant la jauge qui soient explicitement covariantes, bien que la méthode exposée ci-dessous soit générale. Les jauges covariantes conduisent en effet à des calculs beaucoup plus simples que les jauges (101) ou (102) ; elles ont l'inconvénient d'introduire des degrés de liberté non physiques. Lorsqu'il est essentiel de garder uniquement les degrés de liberté physiques, le choix d'une jauge axiale par exemple peut être indispensable.

## D.2. Quantification dans la jauge de Lorentz : fonctionnelle génératrice

Le problème de l'intégrale fonctionnelle (98) vient de ce que l'on intègre sur un nombre de configurations beaucoup trop grand, puisque deux configurations  $A_\mu(x)$  et  $A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$  sont physiquement équivalentes. Au lieu d'intégrer sur toutes les configurations, il faudrait arriver à intégrer seulement sur les classes d'équivalence de configurations, deux configurations étant équivalentes quand elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation de jauge.

La méthode exposée ci-dessous est tout à fait heuristique ; il faudra vérifier qu'elle conduit à des règles de Feynman donnant une théorie unitaire, locale et renormalisable : cette vérification sera l'objet du chapitre suivant. Remarquons simplement que, par rapport à la quantification canonique, cette méthode est incomparablement plus rapide, et a l'avantage de préparer à la quantification des théories de jauge non abéliennes.

L'intégration sur les classes d'équivalence peut être réalisée en fixant la jauge par une condition du type :

$$f(A_\mu) = 0 \tag{103}$$

à condition que (103) fixe de façon unique le représentant dans la classe d'équivalence. Introduisons la notation suivante pour les transformations de jauge :

$$A_\mu^\Lambda(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x). \tag{104}$$

Comme (104) est un simple changement d'origine de  $A_\mu$ , la mesure

d'intégration  $\mathcal{D}A_\mu$  est invariante dans la transformation de jauge (104) :

$$\mathcal{D}A_\mu^\Lambda = \mathcal{D}A_\mu \left( = \prod_{x, \mu} dA_\mu(x) \right) .$$

Définissons ensuite la quantité invariante de jauge  $\Delta_f(A)$  par :

$$\Delta_f(A) \int \prod_x \delta(f(A^\Lambda(x))) d\Lambda(x) = 1 . \quad (105)$$

Cette quantité est bien invariante de jauge car si  $\Lambda_0(x)$  est une fonction fixée :

$$\int \prod_x \delta(f(A^{\Lambda + \Lambda_0}(x))) d\Lambda(x) = \int \prod_x \delta(f(A^\Lambda(x))) d\Lambda(x)$$

d'où  $\Delta_f(A) = \Delta_f(A^{\Lambda_0})$ . On peut maintenant introduire (105) dans l'intégrale de chemin (98), en utilisant la conservation du courant pour montrer que  $S[A] = S[A^\Lambda]$  :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \int \prod_{x, \mu} dA_\mu(x) e^{iS[A]} \Delta_f(A) \prod_x \delta(f(A^\Lambda(x))) d\Lambda(x) \\ &= \int \prod_x d\Lambda(x) \int \prod_{x, \mu} dA_\mu^{-\Lambda}(x) e^{iS[A^{-\Lambda}]} \Delta_f(A^{-\Lambda}) \prod_x \delta(f(A(x))) \\ &= \int \prod_x d\Lambda(x) \int \prod_{x, \mu} dA_\mu(x) e^{iS[A]} \Delta_f(A) \prod_x \delta(f(A(x))) . \end{aligned} \quad (106)$$

Dans la dernière ligne de l'équation (106), on a pu mettre en facteur un « volume »  $\prod_x d\Lambda(x)$ , indépendant des champs, et que l'on peut donc

ignorer : c'est une simple constante multiplicative. Nous arrivons donc au résultat suivant pour  $Z(j)$  :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]} \Delta_f(A) \prod_x \delta(f(A)) . \quad (107)$$

Le calcul de  $\Delta_f(A)$ , donné par :

$$\Delta_f^{-1}(A) = \int \prod_x d\Lambda(x) \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^\Lambda)$$

n'est en principe possible que si la condition  $f(A) = 0$  fixe  $A_\mu$  de façon unique, ce qui n'est pas le cas de la jauge de Lorentz dans l'espace de

Minkowski. Cependant on peut procéder dans l'espace euclidien — en faisant appel au postulat d'eulidicité — auquel cas ce problème ne se pose pas. Evaluons donc  $\Delta_f(A)$  avec comme condition de jauge la condition de Lorentz (100). Grâce à la fonction  $\delta$ , il suffit de considérer des configurations  $A_\mu^\Lambda$  (104) voisines d'une configuration  $\partial^\mu A_\mu = 0$  :

$$\partial^\mu A_\mu^\Lambda \simeq \partial^\mu (\partial_\mu \Lambda) = \square \Lambda .$$

Ceci montre que  $\Delta_f(A)$  est en fait indépendant de  $A$ . Cette propriété ne serait pas vraie avec un choix de jauge plus complexe (cf. exercice 14), ou dans le cas d'une théorie non abélienne, mais dans le cas présent  $\Delta_f(A)$  est une simple constante multiplicative que l'on peut ignorer et  $Z(j)$  est donnée par :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]} \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu) . \quad (108)$$

Cette forme de  $Z(j)$  donnerait le propagateur du photon sous forme transverse ; il est commode de généraliser légèrement l'équation (108), en prenant pour condition de jauge :

$$\partial^\mu A_\mu - c(x) = 0 .$$

Ceci modifie trivialement l'expression (108) pour  $Z(j)$ . On peut ensuite faire une moyenne sur  $c(x)$  avec un poids gaussien dépendant d'un paramètre arbitraire  $\alpha$  :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c(x) \exp \left( -\frac{i}{2\alpha} \int d^4x c^2(x) + iS[A] \right) \times \\ \times \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - c(x))$$

soit :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}A \exp \left( iS[A] - \frac{i}{2\alpha} \int (\partial_\mu A^\mu)^2 d^4x \right) . \quad (109)$$

L'expression (109) montre que l'on peut remplacer le lagrangien initial  $\mathcal{L}_0$  (99) par le *lagrangien de Stüeckelberg* :

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} A^\mu [\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (110)$$

Le terme non invariant de jauge  $(1/2\alpha)(\partial^\mu A_\mu)^2$  dans (110) est appelé « terme fixant la jauge ». Il est maintenant possible d'obtenir le propagateur par inspection, car  $\mathcal{L}_S$  s'écrit aussi :

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} A^\mu \left[ \square g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu = \frac{1}{2} A^\mu K_{\mu\nu} A^\nu .$$

L'opérateur  $K_{\mu\nu}$  est inversible, et il est facile de trouver l'inverse dans l'espace de Fourier (exercice 12) :

$$D_F^{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left( -g^{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right). \quad (111)$$

Pour obtenir  $(k^2 + i\varepsilon)^{-1}$  dans (111), on a rajouté à  $\mathcal{L}$  un terme en  $-i\varepsilon A^\mu A_\mu$ , pour lequel on peut donner la justification heuristique suivante : dans le cas d'un méson vecteur massif, le terme de masse du lagrangien vaut  $m^2 A^\mu A_\mu$ , et la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$  rajoute  $-i\varepsilon A^\mu A_\mu$ . On peut également faire appel au postulat d'eulclidité (X-B.2).

Les cas particuliers  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$  donnent le propagateur dans la « jauge de Feynman » et la « jauge de Landau » respectivement :

$$\alpha = 1 \text{ (Feynman)} : \quad D_F^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (112)$$

$$\alpha = 0 \text{ (Landau)} : \quad D_F^{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left( -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right). \quad (113)$$

Dans la jauge de Landau, le propagateur est transverse :  $k_\mu D_F^{\mu\nu} = 0$ . Le lagrangien de l'électrodynamique que nous avons obtenu grâce aux manipulations qui précèdent est renormalisable (nous le verrons au chapitre suivant), mais cela n'est pas suffisant pour en faire une théorie physiquement satisfaisante. Il faudra encore vérifier l'unitarité de la matrice  $S$  et l'indépendance des quantités physiques par rapport à la condition de jauge, et en particulier par rapport au paramètre  $\alpha$  ; en d'autres termes il faudra vérifier l'indépendance de jauge des quantités physiques. Ceci n'est pas évident car les fonctions de Green dépendent de  $\alpha$ , et plus généralement de la condition de jauge.

Revenons brièvement sur les équations du mouvement du lagrangien de Stueckelberg (110) couplé à un courant conservé  $j^\mu$  ; ces équations s'écrivent :

$$\square A^\mu - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (114)$$

La conservation du courant implique que  $(\partial_\mu A^\mu)$  est un champ libre :

$$\square (\partial_\mu A^\mu) = 0.$$

Classiquement on pourrait imposer  $\partial_\mu A^\mu = 0$  comme condition aux limites à  $t = -\infty$ , et  $\partial_\mu A^\mu$  resterait partout égal à zéro : le terme en  $(-1/2\alpha)(\partial_\mu A^\mu)^2$  n'a pas de conséquences physiques. En théorie

quantique, on ne peut pas prendre  $\partial_\mu A^\mu = 0$  comme condition opératoire ; en effet le moment conjugué de  $A^0$ ,  $\pi^0$  vaut :

$$\pi^0 = -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A^\mu) .$$

On peut simplement exiger que la partie à fréquences positives  $\partial^\mu A_\mu^{(+)}$  donne zéro si on l'applique à un état physique  $|\psi\rangle$  :

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\psi\rangle$$

ce qui assure que  $\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0$ . Comme  $A^0$  possède maintenant un moment conjugué, la quantification canonique peut s'écrire sans problème, à condition d'introduire une métrique indéfinie.

## EXERCICES

1) Démontrer l'identité :

$$\langle \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_N) | \Psi \rangle .$$

(Suggestion : examiner le cas où  $|\Psi\rangle = |n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_i} \dots\rangle$ ).

2) Montrer que  $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$  avec  $j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$ .

$$(a) A_\mu = 0 \quad (b) A_\mu \neq 0 .$$

3) Vérifier les relations d'orthonormalisation (35).

4) Montrer, à l'aide de (19) que  $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$  et  $\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x)$  se transforment respectivement comme un quadrivecteur et un tenseur antisymétrique dans une transformation de Lorentz.

5) Démontrer l'identité de Gordon :

$$\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}') [(p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu] u(\mathbf{p}) .$$

Calculer également  $\bar{v}(\mathbf{p}') \gamma^\mu v(\mathbf{p})$  et  $\bar{v}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p})$ .

En déduire les relations d'orthonormalisation (43).

Vérifier le résultat en utilisant l'expression explicite (34) de  $u$  et  $v$ .

6) Vérifier la relation d'anticommutation (41). (On pourra utiliser les relations de fermeture (36)).

7) Vérifier en détail le passage de (47) à (48) et de (48) à (49). Utiliser la relation d'anticommution (41) pour montrer que  $S_F(x)$  est une fonction de Green de l'équation de Dirac :  $(i\partial - m) S_F(x) = i \delta^{(4)}(x)$ .

8) Terminer la démonstration du théorème de Wick pour les fermions. On pourra, soit procéder directement (cf. Itzykson-Zuber), soit utiliser la méthode du chapitre IX en sommant sur  $\mathbf{p}$  et l'indice de spin  $r$  :

$$\bar{\eta}(t, \mathbf{p}) = \int d^3x e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\eta}(t, \mathbf{x}) ; \quad \eta(t, \mathbf{p}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \eta(t, \mathbf{x}).$$

On notera que  $\bar{\eta}(t, -\mathbf{p})$  est couplé à  $d_r^1(\mathbf{p})$  et  $\eta(t, -\mathbf{p})$  à  $d_r(\mathbf{p})$ , d'où une interversion des rôles de  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  dans ce cas.

9) Démontrer les relations de commutation :

$$[Q, \psi(x)] = -e\psi(x) ; \quad [Q, \bar{\psi}(x)] = e\bar{\psi}(x).$$

Quelle est l'interprétation physique de ces relations ?

10) Retrouver les équations de Maxwell à partir du lagrangien (80).

11) Montrer que l'équation de Schrödinger d'une particule de charge  $q$  dans un champ électromagnétique  $(\varphi, \mathbf{A})$  est invariante par transformation de jauge dans le sens suivant : si  $\varphi \rightarrow \varphi + \partial_0 \Lambda$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \Lambda$ ,  $\psi'(t, \mathbf{x}) = \exp(-iq\Lambda) \times \psi(t, \mathbf{x})$  obéit à l'équation de Schrödinger dans le potentiel  $(\varphi', \mathbf{A}')$ . En déduire l'invariance des probabilités de transition <sup>(2)</sup>.

12) En écrivant  $D_{\mu\nu}^F = \alpha g_{\mu\nu} + \beta k_\mu k_\nu$ , déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  et obtenir la forme (111) du propagateur.

13) (a) Partant du lagrangien d'un méson vecteur de masse  $\lambda$  couplé à un courant  $j^\alpha$  :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\alpha [(\square + \lambda^2) g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta] A^\beta - j_\alpha A^\alpha$$

on rajoute un terme  $-(1/2\alpha)(\partial_\alpha A^\alpha)^2$ . Quelles sont les équations du mouvement ? Montrer que si  $j^\mu$  est un courant conservé,  $\partial_\alpha A^\alpha$  est un champ libre.

(b) Obtenir l'expression du propagateur (régulier si  $\lambda \rightarrow 0$ ) :

$$D_F^{\mu\nu} = \frac{i}{q^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \left[ -g^{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \alpha\lambda^2 + i\varepsilon} \right].$$

(c) Montrer que le lagrangien transformé est invariant par la transformation :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$$

pourvu que  $(\square + \alpha\lambda^2) \theta(x) = 0$ . Montrer que l'on peut rendre  $A_\mu$  transverse ( $\partial^\mu A_\mu = 0$ ) par une transformation de jauge de ce type, et que l'adjonction du terme en  $(-1/2\alpha)(\partial_\mu A^\mu)^2$  ne modifie pas le contenu physique de  $\mathcal{L}$ .

**14)** Quantifier le champ électromagnétique en prenant comme condition de jauge  $f(A) = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} g A_\mu A^\mu = 0$  (cette jauge est sans intérêt en électrodynamique, mais l'exercice constitue une bonne préparation à la quantification des théories de jauge non abéliennes) <sup>(3)</sup>.

(a) Calcul de

$$\Delta_f^{-1}(A) = \int \prod_x d\Lambda(x) \prod_x \delta(f(A^\Lambda(x))).$$

A cause de la forme (107) de  $Z(j)$ , il suffit de calculer  $\Delta_f$  au voisinage d'une configuration  $[A_\mu]$  telle que  $f(A) = 0$

$$f(A^\Lambda_\mu) \simeq f(A_\mu) + \frac{\partial f}{\partial A^\mu} \delta A^\mu = \frac{\partial f}{\partial A^\mu} \partial^\mu \Lambda.$$

En déduire :

$$\Delta_f = \det [(\square_x + g A_\mu(x) \partial_x^\mu) \delta^{(4)}(x - y)].$$

(Suggestion :  $\int \prod_i d\Lambda_i \delta(M_{ij} \Lambda_j) = (\det M_{ij})^{-1}$ ).

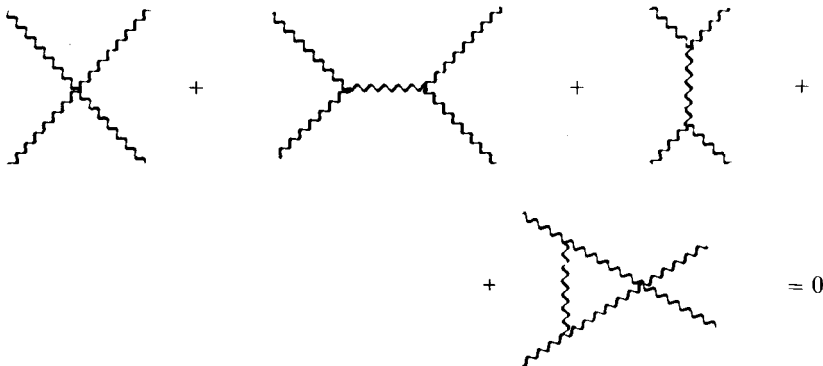
(b) Faire une moyenne sur une fonction  $c(x)$ , comme dans le passage de (108) à (109) et obtenir la fonctionnelle génératrice  $Z(j)$  sous la forme :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \exp \left( i \left[ S[A] - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x (f(A))^2 \right] \right) \times \\ \times \exp \left( -i \int d^4x [\bar{\psi} (\square + g A_\mu \partial^\mu) \psi] \right).$$

(Suggestion : utiliser (65)).

(c) Le lagrangien effectif contient des particules fictives (fantômes de Fadeev-Popov) décrites par les champs  $\psi$  et  $\bar{\psi}$ . Déduire de  $Z(j)$  les règles de Feynman pour l'électrodynamique dans cette jauge (cf. X-E.3).

(d) Montrer que la diffusion photon-photon reste triviale (en l'absence d'électrons) malgré la présence de vertex à 3 et 4 photons :



Montrer également que les corrections au propagateur du photon restent nulles à l'ordre d'une boucle :

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} = 0 \\
 & \text{~~~~~} = \text{photon} \qquad \text{---} \bullet \text{---} = \text{fantôme}
 \end{aligned}$$

(il est nécessaire d'utiliser une régularisation invariante de jauge, comme la régularisation dimensionnelle).

## NOTES ET RÉFÉRENCES

Une référence classique pour le problème à  $N$ -corps est A. Fetter et J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, Mc Graw-Hill (1971). Pour une information complète sur l'équation de Dirac, on pourra consulter Messiah (chapitre 20), Bjorken-Drell (chapitre 2), Itzykson-Zuber (chapitre 2) ou Ramond (chapitre I). L'invariance par rapport au groupe de Poincaré est traitée dans A. S. Wightman, « L'invariance dans la mécanique relativiste » in *Relations de dispersion et particules élémentaires*, Ecole des Houches (1960), ou Gasiorowicz (chapitre 4). Pour l'intégration sur les variables de Grassmann, on pourra se reporter à F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press (1966) ou Ramond (chapitre V). L'expérience de Bohm-Aharonov est discutée dans R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics* Addison-Wesley (1964) Vol. 2, chapitre 15 (Traduction française : Le cours de physique de Feynman, InterEditions, 1979). On pourra également consulter l'article de 'tHooft « Les théories de jauge et les particules élémentaires », *Pour la Science*, **34**, 88 (août 1980). La quantification canonique du champ électromagnétique est traitée dans Itzykson-Zuber, chapitre 3, ou Gasiorowicz, chapitre 3. La quantification par les intégrales de chemin a été adaptée de B. W. Lee, « Gauge Theories » in *Methods in Field Theory*, Ecole des Houches (1975). On pourra également consulter Popov (chapitre 3), Itzykson-Zuber (chapitre 9) ou Ramond (chapitre VII).

<sup>(1)</sup> Messiah, chapitre 13.

<sup>(2)</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Hermann (1973), chapitre 3.

<sup>(3)</sup> 'tHooft-Veltman, section 11.

## CHAPITRE XII

# Electrodynamique quantique

L'électrodynamique quantique, théorie quantique et relativiste de l'interaction des électrons et des photons, est la théorie physique dont les vérifications expérimentales sont — et de très loin — les plus précises. Je me contenterai de détailler un exemple, celui du moment magnétique anormal de l'électron. Toute particule chargée de charge  $e$  et de masse  $m$  possède un moment magnétique  $\mu$ , dont la valeur est donnée en fonction de son spin  $S$  par :

$$\mu = g \frac{e}{2m} S$$

où  $g$  est le facteur gyromagnétique. Classiquement  $g = 1$  : il suffit de calculer le moment magnétique d'une distribution de charges en rotation pour établir ce résultat. L'équation de Dirac prédit  $g = 2$  pour l'électron, en excellent accord avec l'expérience (en fait on sait que cette prédiction n'est pas typique de l'équation de Dirac : les équations d'onde galiléennes pour un spin  $1/2$  conduisent aussi à  $g = 2$  <sup>(1)</sup>). Les *corrections radiatives*, c'est-à-dire les termes de la théorie des perturbations faisant intervenir des diagrammes avec boucles prédisent une modification de la valeur de Dirac, qui, au premier ordre en  $\alpha$  (défini à l'équation (2)) est donnée par :

$$g = 2 \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) .$$

Ce résultat sera établi au paragraphe C. On est allé beaucoup plus loin dans le développement perturbatif : le troisième ordre en  $\alpha$  (72 graphes) a été complètement évalué et l'on dispose d'une évaluation partielle du

quatrième ordre <sup>(2)</sup> (891 graphes !). Ecrivant :

$$g = 2(1 + a_e)$$

la valeur théorique de  $a_e$  est :

$$a_e^{\text{th}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0.328478445 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.1765(13) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + O \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4$$

où le (13) reflète l'incertitude sur les deux derniers chiffres du coefficient de  $(\alpha/\pi)^3$  ; ceci donne :

$$a_e^{\text{th}} = 1159652478(144) \cdot 10^{-12}$$

alors que la valeur expérimentale est <sup>(2)</sup> :

$$a_e^{\text{exp}} = 1159652209(31) \cdot 10^{-12},$$

un accord spectaculaire ! D'autres vérifications très précises sont aussi obtenues pour : le moment magnétique anormal du muon, le déplacement Lamb, la structure fine du positronium etc. Ces vérifications démontrent que les corrections radiatives, et le programme de renormalisation correspondant, ne sont pas une spéculation de théoriciens. Ce chapitre ne donne évidemment qu'une vue très limitée des développements de l'électrodynamique quantique ; néanmoins il permettra, pour la première fois dans ce cours, le calcul d'effets observables dans une théorie quantique des champs.

Le paragraphe A est consacré aux règles de Feynman pour l'électrodynamique ; en pratique la seule difficulté est liée à un problème de signe, dû à la présence de fermions. Le paragraphe B donne deux applications simples de ces règles, faisant intervenir seulement des diagrammes en arbres. Les diagrammes à une boucle sont abordés au paragraphe C avec le calcul des corrections radiatives aux propagateurs du photon et de l'électron et au vertex électron-photon. Enfin l'importante question des identités de Ward est examinée au paragraphe D, qui décrit aussi très schématiquement le programme de renormalisation. On trouvera en D.4 une discussion qualitative de la renormalisation et du groupe de renormalisation de l'électrodynamique, qui peut être lue indépendamment du reste du chapitre.

### A. RÈGLES DE FEYNMAN POUR L'ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

Le lagrangien de départ a été déterminé au chapitre précédent :

$$\mathcal{L}_{QED} = \left[ -\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] + \left[ \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \not{\partial} - m \right) \psi \right] + [-e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu] \quad (1)$$

Le premier crochet correspond au lagrangien  $\mathcal{L}_S$  du champ électromagnétique libre, après la modification de Stüeckelberg. Dans certains calculs intermédiaires, il peut être nécessaire d'attribuer une masse non-nulle  $\lambda$  au photon. Les résultats physiques, lorsque le problème est bien posé, doivent être finis à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . L'exercice (XI.13) montre que l'introduction de cette masse peut se faire sans problème. Le deuxième crochet correspond au lagrangien  $\mathcal{L}_D$  du champ de Dirac libre (XI.20), et le troisième crochet au terme d'interaction  $\mathcal{L}_I$  du champ de Dirac avec le champ électromagnétique, obtenu grâce à la prescription du couplage minimal (XI.94).

La charge  $e$  dans (1) est la charge de l'électron ( $e < 0$ ) ; les résultats physiques sont en général exprimés en fonction de la *constante de structure fine*  $\alpha$ , qui est un nombre sans dimensions :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \left( = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \right) \approx \frac{1}{137} \quad (2)$$

#### A.1. Fonctions de Green dans l'espace de configuration

L'expérience acquise dans le cas du champ scalaire et les résultats établis au chapitre précédent nous permettent d'écrire rapidement les règles de Feynman pour les fonctions de Green, obtenues par différentiation fonctionnelle à partir de la fonctionnelle génératrice :

$$Z(J, \bar{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) \times \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_{QED} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right) \quad (3)$$

Les fonctions de Green  $G^{(2n,m)}$  sont données par :

$$G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(2n,m)}(y_1 \dots y_n; x_1 \dots x_n; z_1 \dots z_m) = \frac{(-i)^{2n+m}}{Z(0)} \times \left. \frac{\delta^{(2n+m)} Z(J, \bar{\eta}, \eta)}{\delta \bar{\eta}(y_1) \dots \delta \bar{\eta}(y_n) \delta \eta(x_1) \dots \delta \eta(x_n) \delta J^{\mu_1}(z_1) \dots \delta J^{\mu_m}(z_m)} \right|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \quad (4)$$

La source  $J_\mu$  (tout comme  $\eta$  et  $\bar{\eta}$ ) est une source auxiliaire mathématique qui sert à obtenir les fonctions de Green ; elle n'a aucune raison d'obéir à  $\partial^\mu J_\mu = 0$ . Le nombre de dérivations par rapport à  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  est le même, car dans le cas contraire l'intégration sur les variables anticommutantes donne zéro, le lagrangien contenant uniquement la combinaison  $\bar{\psi}\psi$ . Pour des raisons de commodité d'écriture, on utilisera parfois la notation opératorielle :

$$G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(2n,m)}(y_1, \dots, y_n; x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) = \langle 0 | T(\psi(y_1) \dots \psi(y_n) \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_m}(z_m)) | 0 \rangle \quad (5)$$

Sous cette forme on retrouve le résultat précédent : la conservation de la charge implique que le nombre de  $\psi$  est égal à celui de  $\bar{\psi}$ .

Le propagateur de l'électron  $S_F$  est représenté par un trait plein *orienté dans le sens de propagation de la charge de l'électron* (dans l'écriture de (6), on rencontre la difficulté habituelle : les réactions sont écrites de gauche à droite (l'électron entre dans le diagramme à gauche) tandis que la multiplication des opérateurs va de droite à gauche) :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ x \xrightarrow{\quad} x \\ x, \alpha \quad y, \beta \end{array} : S_{\beta\alpha}^F(y-x) = \overbrace{\psi_\beta(y) \bar{\psi}_\alpha(x)} \quad (6)$$

L'opérateur  $\bar{\psi}_\alpha(x)$  crée un électron (ou détruit un positron) en  $x$  ; cet électron se propage de  $x$  en  $y$  et est détruit en  $y$  par  $\psi_\beta(y)$  : le flot de charge va de  $x$  vers  $y$ . Le propagateur représente aussi la création d'un positron en  $y$  suivi de sa destruction en  $x$  : l'ordre des temps n'intervient pas dans les règles de Feynman.

Rappelons les définitions des transformées de Fourier :

$$S_{\beta\alpha}^F(y-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(y-x)} \left( \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\beta\alpha} \quad (7.a)$$

$$\left( \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\beta\alpha} = \int d^4(y-x) e^{ip(y-x)} S_{\beta\alpha}^F(y-x) \quad (7.b)$$

On note que les conventions (7) pour les transformées de Fourier sont

bien compatibles avec les conventions utilisées pour définir les fonctions de Green : dans (7.b)  $e^{-ipx}$  correspond à un moment  $p$  entrant dans le diagramme à gauche,  $e^{ipy}$  à un moment  $(-p)$  entrant dans le diagramme à droite. Si nous définissons le propagateur complet  $S(y-x)$  par :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ x, \alpha \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \xleftarrow{p'} \\ y, \beta \end{array} : S_{\beta\alpha}(y-x) = \langle 0 | T(\psi_\beta(y) \bar{\psi}_\alpha(x)) | 0 \rangle \quad (8)$$

d'après nos conventions pour la transformée de Fourier d'une fonction de Green :

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') S_{\beta\alpha}(p', p) = \int d^4x d^4y e^{-i(px+p'y)} S_{\beta\alpha}(y-x) \quad (9)$$

Afin d'éviter toute confusion, il convient de bien distinguer la flèche sur le propagateur, qui indique la direction du flot de charge, de la flèche indiquant le flot de moment.

Le propagateur du photon pose moins de problèmes car il n'est pas orienté : il sera représenté par un trait ondulé (sans orientation) :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ x, \mu \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} y, \nu \end{array} \quad D_{\nu\mu}^F(y-x) = D_{\mu\nu}^F(x-y) = \overline{A_\nu(y)} A_\mu(x) \quad (10)$$

$$D_{\nu\mu}^F(y-x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-iq(y-x)}}{q^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \left[ -g_{\nu\mu} + \frac{(1-\alpha) q_\nu q_\mu}{q^2 - \alpha\lambda^2 + i\varepsilon} \right] \quad (11)$$

Le propagateur complet du photon,  $D_{\nu\mu}(y-x)$  sera :

$$D_{\nu\mu}(y-x) = \langle 0 | T(A_\nu(y) A_\mu(x)) | 0 \rangle \quad (12)$$

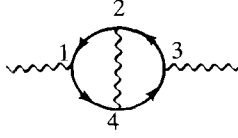
Le vertex électron-photon-électron se lit directement sur le lagrangien (1) : à chaque vertex doit être associé un facteur  $-ie\gamma^\mu$  :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} : -ie\gamma^\mu \quad (13)$$

Le seul point délicat concerne les signes, auxquels il faut faire très attention chaque fois qu'on a affaire à des fermions. A cause de la conservation de la charge, une ligne d'électrons a seulement deux possibilités :

- (i) se refermer sur elle-même : c'est le cas des boucles d'électrons,
- (ii) traverser tout le diagramme, c'est-à-dire entrer en un certain point  $x_i$  et en ressortir en un point  $y_j$ .

Examinons d'abord le cas d'une boucle, par exemple celle de la figure 1 : le développement de l'exponentielle  $e^{iS_1}$ , où  $S_1$  est l'action correspondant au couplage électron-photon dans (1), conduit à :



$$\bar{\psi}(1) \psi(1) \bar{\psi}(2) \psi(2) \bar{\psi}(3) \psi(3) \bar{\psi}(4) \psi(4) \quad (14.a)$$

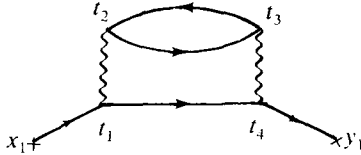
Figure 1. Une boucle fermionique.

où tous les facteurs sans intérêt pour le signe ( $\gamma^\mu, A_\mu, \dots$ ) ont été omis. Notez que l'ordre des  $\bar{\psi}\psi$  est sans importance car deux ( $\bar{\psi}\psi$ ) commutent entre eux. Cependant pour mettre (14.a) sous forme d'un produit de propagateurs, il faut par exemple faire passer  $\psi(4)$  à gauche dans (14.a) ce qui donne, après application du théorème de Wick, la contribution suivante :

$$- \overbrace{\psi(4) \bar{\psi}(1)} \overbrace{\psi(1) \bar{\psi}(2)} \overbrace{\psi(2) \bar{\psi}(3)} \overbrace{\psi(3) \bar{\psi}(4)} \quad (14.b)$$

où le signe  $(-)$  provient de ce que  $\psi(4)$  a anticommuté avec un nombre impair de champs. Le résultat est évidemment le même pour un nombre quelconque de facteurs  $\bar{\psi}\psi$ , et nous aboutissons à la conclusion : à chaque boucle de fermions doit être associé un facteur  $(-1)$ .

En ce qui concerne les lignes traversant le diagramme, examinons par exemple le graphe de la figure 2 : il lui correspondra un facteur :



$$\overbrace{\psi(y_1) \bar{\psi}(t_4)} \overbrace{\psi(t_4) \bar{\psi}(t_1)} \overbrace{\psi(t_1) \bar{\psi}(x_1)} \quad (15.a)$$

Figure 2.

alors que l'on avait au départ :

$$\psi(y_1) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(t_1) \psi(t_1) \bar{\psi}(t_4) \psi(t_4) . \quad (15.b)$$

Il faudra tenir compte pour ce diagramme de deux facteurs de signe :

- un facteur  $(-1)$  associé à la boucle électronique,
- un facteur égal au signe de la permutation faisant passer de l'ordre (15.b) à (15.a) ; ce signe est  $+1$  dans le cas particulier considéré.

Déterminons enfin le facteur de symétrie ; pour les besoins de la démonstration, on décompose chaque vertex en un cercle correspon-

à un facteur  $\psi$  et une croix correspondant à un facteur  $\bar{\psi}$ , de telle sorte que toute ligne de fermion parte d'une croix et arrive à un cercle :

$$\begin{array}{c} x \\ \times \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} y \\ \circ \end{array} = \overbrace{\psi(y) \bar{\psi}(x)}^{\quad}$$

Toute contraction joint obligatoirement une croix à un cercle. Ainsi dans le diagramme de la figure 3, il y a une seule façon de faire les contractions :

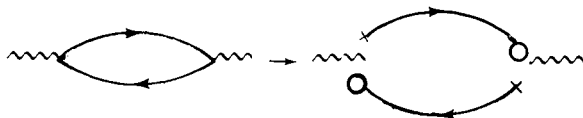


Figure 3.

et l'application du théorème de Wick donne un seul terme. Comme il n'y a pas de  $1/(\text{factorielle})$  dans le lagrangien  $\mathcal{L}_1$ , *tous les diagrammes topologiquement inéquivalents auront un facteur de symétrie égal à 1.*

Remarquez que les diagrammes de la figure 4, contribuant à la diffusion photon-photon sont topologiquement inéquivalents :

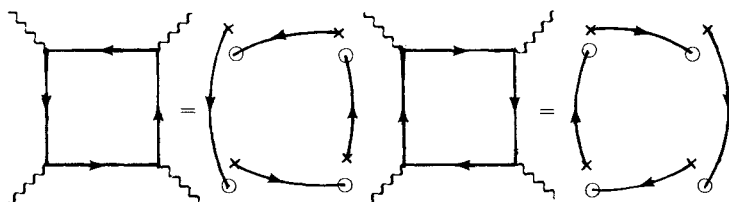


Figure 4. Diagrammes de la diffusion photon-photon.

On peut résumer les règles de Feynman dans l'espace de configuration :

$$1) \text{ Propagateur de l'électron : } \begin{array}{c} \times \longrightarrow \times \\ x, \alpha \qquad y, \beta \end{array} : S_{\beta\alpha}^F(y-x)$$

$$2) \text{ Propagateur du photon : } \begin{array}{c} \times \text{~~~~~} \times \\ x, \mu \qquad y, \nu \end{array} : D_{\nu\mu}^F(y-x)$$



de liberté transverses (physiques) :

$$A_\mu(x) = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \times \\ \times [\varepsilon_\mu^{(s)}(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_\mu^{(s)*}(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}] \quad (16)$$

avec :  $k^\mu \varepsilon_\mu = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ .

Appliquons par exemple ces règles au calcul de l'élément de matrice  $S$  de l'effet Compton :

$$\gamma(\mathbf{k}, s) + e(\mathbf{p}, r) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}', s') + e(\mathbf{p}', r')$$

au premier ordre en  $e^2$ . Il s'agit de calculer :

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle \mathbf{k}', s' ; \mathbf{p}', r' | T(\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \times \\ \times \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y)) | \mathbf{k}, s ; \mathbf{p}, r \rangle \quad (17)$$

où le  $1/2 !$  provient du développement de  $\exp(iS_1)$ . Cependant l'association ( $x \leftrightarrow$  électron  $p$  ;  $y \leftrightarrow$  électron  $p'$ ) donne la même contribution que l'association inverse : on pourra comme d'habitude omettre le  $1/2 !$  à condition de ne pas tenir compte de la permutation des vertex  $x$  et  $y$ . Nous aurons deux diagrammes, donnés à un facteur près par (figure 5).

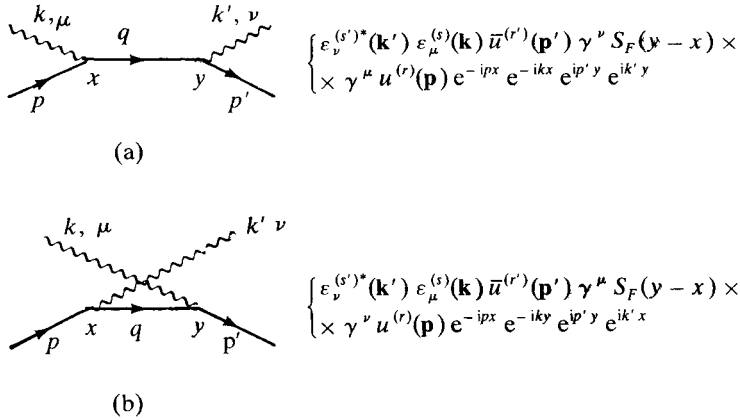


Figure 5. Diagrammes de l'effet Compton à l'ordre  $e^2$ .

Compte tenu de l'expression (7.a) de  $S_F(y-x)$  en fonction de sa transformée de Fourier, on peut effectuer l'intégration sur  $x$  et  $y$  et

obtenir  $S_{fi}^{(2)}$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} = & \varepsilon_{\nu}^{(s')*}(\mathbf{k}') \varepsilon_{\mu}^{(s)}(\mathbf{k}) \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}') \{ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - q) \times \\
 & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - q) (-ie\gamma^{\nu}) \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^{\mu}) \\
 & + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k' - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - k - q) (-ie\gamma^{\mu}) \\
 & \times \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^{\nu}) \} u^{(r)}(\mathbf{p}). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Les règles de Feynman associent un facteur  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\dots)$  à chaque vertex, et un facteur  $1/(2\pi)^4$  à chaque propagateur. Pour calculer l'élément de matrice  $T$ , on doit extraire un facteur  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k)$  étant donné que :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}. \quad (19)$$

Suivant la remarque faite au chapitre V, paragraphe B.5, il est plus commode de tenir compte des facteurs  $(2\pi)^4$  en les associant aux intégrales sur les boucles :  $\int d^4q/(2\pi)^4$ . Résumons les règles de Feynman pour les éléments de matrice  $T$  dans l'espace de Fourier.

1) Tracer tous les diagrammes connexes topologiquement inéquivalents ne contenant pas d'insertion d'énergie propre sur les lignes externes.

2) Associer à chaque ligne électronique *interne* un facteur

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

3) Associer à chaque ligne photonique *interne* un facteur

$$i(-g_{\mu\nu} + (1 - \alpha) k_{\mu} k_{\nu} / (k^2 + i\varepsilon)) / (k^2 + i\varepsilon).$$

Si nécessaire on rétablira la masse  $\lambda$  dans des calculs intermédiaires (cf. (11)).

4) Associer à chaque vertex un facteur  $-ie\gamma^{\mu}$ .

5) Mettre les lignes externes sur couche de masse ( $p^2 = m^2$ ,  $k^2 = 0$ ) et associer à ces lignes les facteurs suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{électron entrant} & : u^{(r)}(\mathbf{p}); & \text{électron sortant} & : \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}) \\
 \text{positron entrant} & : \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p}); & \text{positron sortant} & : v^{(r)}(\mathbf{p}) \\
 \text{photon entrant} & : \varepsilon_{\mu}^{(s)}(\mathbf{k}); & \text{photon sortant} & : \varepsilon_{\mu}^{(s)*}(\mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

6) Multiplier chaque ligne électronique externe par un facteur  $z_2^{1/2}$  et chaque ligne photonique externe par  $z_3^{1/2}$ ;  $z_2$  et  $z_3$  sont reliés aux constantes de renormalisation du champ électronique et du champ photonique (cf. paragraphe C et X.83).

7) Associer un facteur  $(-1)$  à toute boucle d'électrons, et déterminer le signe global du diagramme dépendant de la configuration des lignes externes.

8) Multiplier par un facteur  $-i$  (cf. (19)).

9) Intégrer sur toutes les boucles avec un facteur  $d^4q/(2\pi)^4$ .

Comme les opérateurs de création et d'annihilation des fermions ont la même normalisation que ceux des bosons, les sections efficaces seront données par (X.62). Ces sections efficaces dépendent des indices de polarisation ( $s$ ) du photon, et des indices de spin ( $r$ ) des électrons. Dans de nombreux cas on n'observe pas les spins finaux et les particules initiales ne sont pas polarisées : il faut alors sommer sur les indices de spin finaux et moyenner sur les indices de spin initiaux.

## B. APPLICATIONS

Nous donnerons deux applications simples de ces règles de Feynman en calculant à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations :

- la diffusion d'un électron par un champ coulombien statique,
- la section efficace  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

Dans ces deux exemples, nous aurons affaire uniquement à des diagrammes en arbres, et la question des divergences et de la renormalisation ne se pose pas.

### B.1. Diffusion d'un électron par un champ coulombien

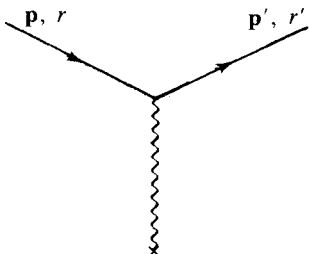
Le lagrangien décrivant la diffusion d'un électron par un champ extérieur  $A_\mu^{(e)}(x)$  est :

$$\mathcal{L}_1 = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu^{(e)}(x). \quad (20)$$

Au premier ordre de la théorie des perturbations, l'élément de matrice  $S$  vaut :

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \langle \mathbf{p}', r' | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | \mathbf{p}, r \rangle A_\mu^{(e)}(x) \quad (21)$$

où  $\mathbf{p}(\mathbf{p}')$  et  $r(r')$  sont les moments et les indices de spin de l'électron initial (final). Le graphe de Feynman correspondant à (21) est dessiné sur la figure 6. Nous nous contenterons de calculer la diffusion par un potentiel coulombien :



$$A_0^{(e)}(x) = \frac{-Ze}{4\pi\|\mathbf{x}\|}; \quad \mathbf{A}^{(e)}(x) = 0. \quad (22)$$

Figure 6. Diffusion par un champ extérieur.

Les équations (20) et (22) décrivent à une bonne approximation la diffusion d'un électron par un noyau lourd de charge  $Z$ , lorsque l'énergie de l'électron est faible par rapport à la masse du noyau : ce dernier peut être considéré comme la source statique du champ  $A_\mu^{(e)}$ . Le noyau absorbe le moment  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  transféré à l'électron : le moment de l'électron ne sera pas conservé, tandis que son énergie sera, elle, conservée. Tout ceci est évidemment très analogue à la diffusion par un potentiel. Lorsque  $Z\alpha \ll 1$ , l'approximation du premier ordre (21) sera a priori une bonne approximation ; lorsque  $Z\alpha$  n'obéit pas à cette condition, le résultat (26) est néanmoins correct grâce aux propriétés particulières du potentiel de Coulomb. Le calcul de  $S_{fi}$  dans (21) est immédiat :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{iZe^2}{4\pi} \bar{u}^{(r')}(\mathbf{p}') \gamma^0 u^{(r)}(\mathbf{p}) \int d^4x e^{i(p'-p)x} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = \\ &= iZ\alpha \, 2\pi \delta(E' - E) \bar{u}^{(r')}(\mathbf{p}') \gamma^0 u^{(r)}(\mathbf{p}) \frac{4\pi}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Pour trouver la section efficace, il faut adapter légèrement la méthode utilisée au chapitre X, paragraphe C.1. Comme seule l'énergie est conservée, on définira, comme en théorie du potentiel :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi) \delta(E_f - E_i) T_{fi}. \quad (24)$$

La section efficace est donnée en fonction de  $T_{fi}$  par :

$$d\sigma = \frac{1}{2\|\mathbf{p}\|} \left( \overline{\sum} |T_{fi}|^2 \right) 2\pi \delta(E' - E) \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}. \quad (25)$$

Les détails de la démonstration de (25) sont renvoyés à l'exercice 1. La notation  $\overline{\sum} = \frac{1}{2} \sum$  indique une sommation sur le spin final et une moyenne sur le spin initial : on suppose l'électron initial non polarisé et on n'observe pas la polarisation de l'électron final. Effectuons cette

sommation :

$$\begin{aligned} \sum |\bar{u}^{(r)}(\mathbf{p}') \gamma^0 u^{(s)}(\mathbf{p})|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p}' + m)] = \\ &= 2(E E' + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2). \end{aligned}$$

D'autre part l'espace de phase dans (25) s'écrit :

$$\frac{2 \pi \delta(E - E') d^3 p'}{(2 \pi)^3 2 E'} = \frac{p d\Omega}{2(2 \pi)^2}$$

où  $\Omega = (\theta, \varphi)$  est l'angle de diffusion de l'électron final. Rassemblant tous les facteurs on obtient la section efficace  $d\sigma/d\Omega$  :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{8 p^4 \sin^4 \theta / 2} (E^2 + m^2 + p^2 \cos \theta). \quad (26)$$

Cette expression constitue la généralisation relativiste de la formule de Rutherford, ou formule de Mott ; elle aurait d'ailleurs pu être obtenue à partir de l'équation de Dirac à 1 particule. A la limite non relativiste ( $p^2/m^2 \rightarrow 0$ ) l'équation (26) devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4 m^2 v^4 \sin^4 \theta / 2}$$

où  $v = p/E$  est la vitesse de l'électron. C'est naturellement la formule classique de Rutherford.

### B.2. Calcul de $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Le lepton  $\mu$ , ou muon, a exactement les mêmes propriétés que l'électron, mis à part sa masse :  $m_\mu \simeq 200 m_e$  ; la réaction

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

qui se produit à un nombre considérable d'exemplaires dans les anneaux de collision  $e^+ e^-$  (Orsay, DESY... et bientôt LEP), est plus simple à calculer que  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$  (ou  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ ) car un seul graphe donne une contribution à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations. Ce graphe est le « graphe d'annihilation », dessiné sur la figure 7, qui définit

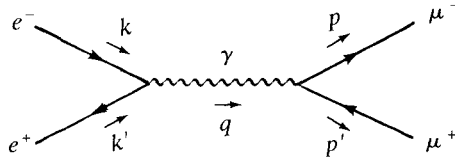


Figure 7. Réaction  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  avec un photon intermédiaire.

aussi la cinématique : l'électron et le positron « s'annihilent » pour donner un photon (virtuel)  $\gamma$ , qui se désintègre et donne la paire  $\mu^+ \mu^-$  finale. Afin de simplifier la cinématique, il est commode de supposer que les énergies en jeu ( $k_0, p_0, k'_0, p'_0$ ) sont très grandes par rapport aux masses  $m_e$  de l'électron et  $m_\mu$  du muon (dans le référentiel où l'on mène le calcul). L'élément de matrice  $T$  correspondant au graphe est :

$$T_{fi} = - \frac{(-ie)^2}{q^2} \bar{v}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u(\mathbf{k}) \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma_\mu v(\mathbf{p}') \quad (27)$$

(on remarque que le terme en  $q_\mu q_\nu$  du propagateur du photon donne — heureusement — une contribution nulle). Comme l'on n'observe pas les polarisations, il faut calculer les sommes sur les indices de spin :

$$\begin{aligned} \sum \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma_\mu v(\mathbf{p}') \bar{v}(\mathbf{p}') \gamma^\nu u(\mathbf{p}) &= \text{Tr} [(\not{p} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}' - m_\mu) \gamma^\nu] \approx \\ &\approx \text{Tr} (\not{p} \gamma_\mu \not{p}' \gamma^\nu) = 4(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) - 4(p \cdot p') g_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (28)$$

On trouve de même dans le cas de l'électron :

$$\sum |\bar{v}(\mathbf{k}') \gamma_\mu u(\mathbf{k})|^2 = \ell_{\mu\nu} \approx 4(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu) - 4(k \cdot k') g_{\mu\nu}.$$

Comme  $q^\mu L_{\mu\nu} = q^\nu L_{\mu\nu} = 0$ , on peut remplacer dans le calcul de  $L_{\mu\nu}$   $\ell^{\mu\nu}$  le facteur  $\ell_{\mu\nu}$  par :

$$\ell'_{\mu\nu} = -8 k_\mu k_\nu - 2 q^2 g_{\mu\nu}$$

ce qui donne (le facteur 1/4 correspond à la moyenne sur les spins initiaux) :

$$\frac{1}{4} \ell_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = 16(p \cdot k)^2 - 16(p \cdot k)(q \cdot k) - 4 q^2(p \cdot q) + 4 q^4.$$

Plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse, qui est aussi celui du laboratoire dans le cas d'un anneau de collision  $e^+ e^-$  :

$$\begin{aligned} q &= (\sqrt{q^2}, 0, 0, 0); & k &= \left( \frac{1}{2} \sqrt{q^2}, 0, 0, \frac{1}{2} \sqrt{q^2} \right); \\ k' &= \left( \frac{1}{2} \sqrt{q^2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \sqrt{q^2} \right); \\ p &= \left( \frac{1}{2} \sqrt{q^2}, \frac{1}{2} \sqrt{q^2} \sin \theta, 0, \frac{1}{2} \sqrt{q^2} \cos \theta \right), \end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction finale du  $\mu^-$  et celle du faisceau. Dans ce référentiel, on obtient :

$$\frac{1}{4} \ell_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = q^4(1 + \cos^2 \theta). \quad (29)$$

Pour obtenir la section efficace on se reporte à (X.66) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4q^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (30)$$

ce qui donne pour la section efficace totale :

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}. \quad (31)$$

### B.3. Application : calcul du rapport $R$

La section efficace  $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$  peut être calculée en chromodynamique quantique : dans cette théorie (cf. XIII-D), les hadrons sont composés de quarks ponctuels  $q_i$  et cette section efficace est simplement donnée par :

$$\sum_i \sigma(e^+ e^- \rightarrow \bar{q}_i q_i)$$

où la somme porte sur toutes les espèces de quarks qui peuvent être « produites » à l'énergie considérée (en réalité la prédiction théorique vaut pour  $q^2 \rightarrow -\infty$ , c'est-à-dire dans la région non physique. On peut montrer que dans la région  $q^2 > 0$ , la prédiction doit être valable en moyenne (cf. XIII-D.4)). Les quarks connus à l'heure actuelle avec leur charge  $e_i$ , mesurées en unités de la charge du proton, sont :

Quark $u$ (up)	: $e = 2/3$	Quark $d$ (down)	: $e = -1/3$
Quark $s$ (strange)	: $e = -1/3$	Quark $c$ (charmed)	: $e = 2/3$
Quark $b$ (beauty)	: $e = -1/3$		

De plus chaque quark existe en trois exemplaires, en raison de la propriété de « couleur » (rien à voir bien sûr avec la couleur ordinaire !).

Les trois premiers quarks sont légers ( $m < \text{masse du proton}$ ). Le quark  $c$  a une masse  $\simeq 1.5 \text{ GeV}$  et le quark  $b$  une masse  $\simeq 5 \text{ GeV}$  : il faut donc une énergie minimale de 3 GeV et 10 GeV respectivement pour les « produire » dans un anneau de collision. Les quarks sont couplés au photon par leur charge, et on pourra écrire sous forme diagrammatique (figure 8) :

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = \frac{\sum_i \left| \begin{array}{c} e^- \\ e^+ \end{array} \right| \begin{array}{c} q_i \\ \bar{q}_i \end{array} \right|^2}{\left| \begin{array}{c} e^- \\ e^+ \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu^- \\ \mu^+ \end{array} \right|^2}$$

Figure 8. Ecriture diagrammatique du rapport  $R$ .

Pour  $q \gg 10$  GeV le rapport  $R$  devrait être égal à :

$$R = 3 \left( \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) = \frac{11}{3}.$$

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec cette prédiction (figure 9). En réalité la chromodynamique quantique prédit que  $R$  doit être un peu plus grand que  $11/3$ , à cause des corrections radiatives (cf. XIII-D.4).

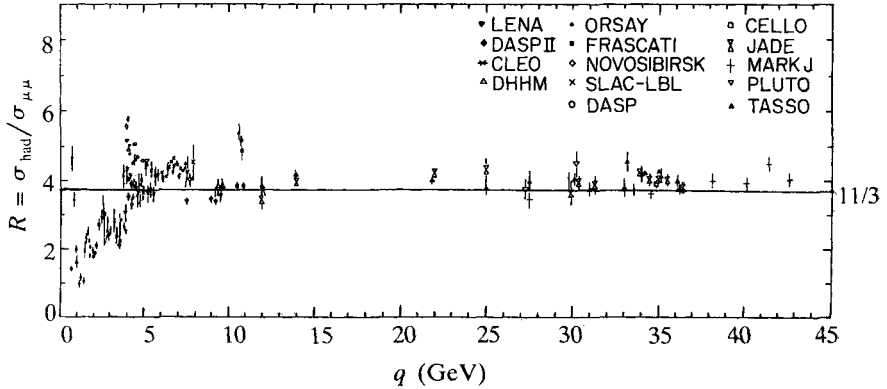


Figure 9. Compilation récente du rapport  $R^{(3)}$ .

On a des raisons théoriques très sérieuses de prévoir l'existence d'un sixième quark, le quark  $t$  (top) de charge  $2/3$ . Au seuil de production de ce quark, le rapport  $R$  devrait sauter de  $11/3$  à  $15/3$ .

Par ailleurs, les hadrons, produits de désintégration de quarks (inobservables), sont très fortement collimés autour de la direction des quarks et antiquarks formés initialement : on a affaire à des « jets » (figure 10) :

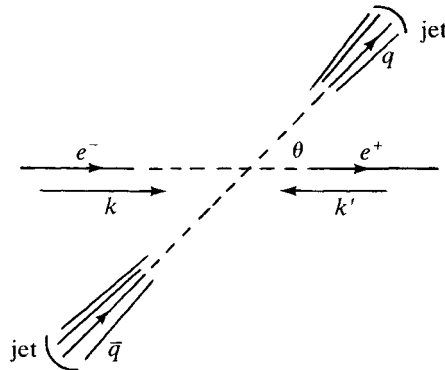


Figure 10. Production d'un jet.

A partir de ces jets, on peut reconstituer (approximativement) la direction du quark et de l'antiquark : on trouve que cette direction suit une loi en  $(1 + \cos^2 \theta)$ , ce qui est en parfait accord avec (30). Ceci confirme que les quarks ont, en accord avec d'autres arguments, un spin  $1/2$ . En effet des quarks de spin zéro, par exemple, auraient une distribution angulaire en  $\sin^2 \theta$  (cf. exercice 8).

## C. DIAGRAMMES A UNE BOUCLE EN ÉLECTRODYNAMIQUE

Dans ce paragraphe nous abordons l'étude de la renormalisation de l'électrodynamique quantique avec le calcul des diagrammes à 1 boucle. Mais il vaut la peine d'étudier au préalable le comptage de puissances, afin de déterminer les diagrammes divergents. Le comptage de puissances est plus compliqué que dans le cas scalaire du chapitre V, à cause du spin des particules. D'autre part certaines propriétés de symétrie, comme la symétrie de jauge, ont pour conséquence de diminuer le degré de divergence de certains diagrammes : le comptage de puissances se révèle trop pessimiste. Un exemple spectaculaire de réduction des divergences est le lagrangien « supersymétrique » de l'exercice 13.

### C.1. Comptage de puissances pour l'électrodynamique

Comme l'action de Dirac :

$$\int d^D x \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \vec{\partial} - m \right) \psi$$

est sans dimension, la dimension  $[\psi]$  du champ de Dirac est :

$$\boxed{[\psi] = \frac{D}{2} - \frac{1}{2}; \quad [\psi] = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad D = 4} \quad (32)$$

Le champ électromagnétique ayant la dimension usuelle  $[A] = \frac{D}{2} - 1$ , la dimension de  $e$  est :

$$[e] = 2 - \frac{D}{2}. \quad (33)$$

La constante de couplage est sans dimension pour  $D = 4$ , ce que nous savions déjà (cf. (2)), et ceci suggère que l'électrodynamique est

renormalisable pour la dimension physique  $D = 4$  de l'espace-temps (\*).

Le propagateur d'un électron a dimension  $(-1)$ , celui d'un photon dimension  $(-2)$  et le degré superficiel de divergence d'un vertex propre  $G$ ,  $\omega(G)$  est donné par (cf. V-F.1) :

$$\omega(G) = 4L - I_F - 2I_B \quad (34)$$

où  $L$  est le nombre de boucles,  $I_F$  le nombre de lignes internes d'électrons (fermions) et  $I_B$  le nombre de lignes internes de photons (bosons). Si  $V$  est le nombre de vertex on a également ( $E_F(E_B)$  = nombre de lignes externes de fermions (bosons)) :






$$2V = 2I_F + E_F; \quad V = 2I_B + E_B; \quad L = I_F + I_B - V + 1 \quad (35)$$

soit :

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B$$

(36)

Cette formule est l'analogue de (V.67) dans le cas de l'électrodynamique. Les fonctions de Green superficiellement divergentes seront a priori :

- |  |   |                 |
|--|---|-----------------|
| (1) le propagateur du photon :         |    | $\omega(G) = 2$ |
| (2) le propagateur de l'électron :     |  | $\omega(G) = 1$ |
| (3) le vertex photon-électron :        |  | $\omega(G) = 0$ |
| (4) le vertex à 3 photons :            |  | $\omega(G) = 1$ |
| (5) la fonction de Green à 4 photons : |  | $\omega(G) = 0$ |

Mais ce comptage de puissances est trop pessimiste. En effet examinons chaque cas plus à fond :

1) L'identité de Ward (cf. D.1) pour le propagateur du photon permet de montrer que les corrections au propagateur libre sont proportionnelles à :

$$-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu$$

(\*) Les idées théoriques récentes suggèrent que la dimension physique de l'espace-temps est supérieure à 4 : 10,26 ou autre. Les dimensions supplémentaires sont heureusement inobservables, à moins d'atteindre des énergies  $\sim 10^{19}$  GeV.

où  $k$  est le moment du photon. On peut donc extraire deux puissances de  $k$  et  $\omega(G) = 0$  au lieu de 2. Naturellement, comme cette propriété est liée à l'invariance de jauge, il sera nécessaire d'utiliser une régularisation qui préserve cette invariance, sous peine de retomber sur  $\omega(G) = 2$ .

2) Ecrivons le propagateur complet inverse  $S^{-1}(p)$  de l'électron sous la forme :

$$iS^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p). \quad (37)$$

L'énergie propre  $\Sigma(p)$  est une matrice dans l'espace de Dirac qui doit s'exprimer en fonction de la matrice unité  $\mathbb{1}$  et de  $\not{p}$  ; le calcul à une boucle (cf. C.3) montre que l'énergie propre  $\Sigma(p)$  est de la forme :

$$\Sigma(p) = m\bar{A}(p^2) \mathbb{1} + (\not{p} - m) B(p^2) \quad (38)$$

où  $\bar{A}$  et  $B$  ont un degré superficiel de divergence  $\omega(G) = 0$ . Dans le cas général, le coefficient  $A(p^2)$  de la matrice unité  $\mathbb{1}$  est également de la forme  $m\bar{A}(p^2)$  ; ceci est dû à l'invariance du lagrangien dans la transformation :

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi$$

lorsque la masse de l'électron est nulle : le contre-terme de masse  $\delta m$  est toujours proportionnel à  $m$  et  $\omega(G) = 0$ .

3) Le résultat brut  $\omega(G) = 0$  reste valable.

4) Ce vertex est exclu par la conjugaison de charge : dans cette transformation  $A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x)$ . Une vérification explicite est fournie par le théorème de Furry (exercice 2) : si un nombre impair de photons est accroché à une boucle électronique, la contribution du diagramme est nulle.

5) Le vertex propre  $\Gamma^{(4)}$  dépend de quatre indices de Lorentz ( $\mu, \nu, \rho, \sigma$ ) correspondant aux quatre moments  $k_1, k_2, k_3, k_4$  ; mais une identité de Ward implique (cf. exercice 10) :

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0.$$

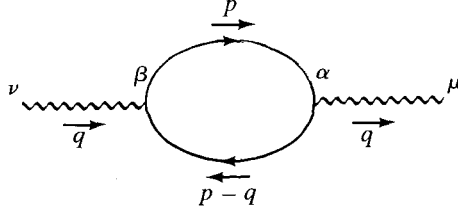
Ceci permet d'extraire quatre puissances de  $k$ , et le degré superficiel de divergence est  $-4$  et non 0.

En résumé, dans l'étude des divergences, on pourra se limiter aux fonctions de Green suivantes :

- propagateur du photon,
- propagateur de l'électron,
- vertex électron-photon.

### C.2. Propagateur du photon et polarisation du vide

La première correction au propagateur  $D_{\mu\nu}$  du photon est donnée par le graphe à une boucle (figure 11) :



**Figure 11.** Correction à une boucle au propagateur du photon.

dont l'expression analytique est :

$$D_F^{\mu\alpha}(q) \Pi_{\alpha\beta}^{(1)}(q) D_F^{\beta\nu}(q)$$

avec

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -e^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr}(\gamma_\alpha(\not{p} + m) \gamma_\beta(\not{p} - \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (39)$$

Dans l'application des règles de Feynman, il ne faut pas oublier le  $(-1)$  dû à la boucle électronique. J'ai adopté une régularisation dimensionnelle avec, comme d'habitude :

$$\varepsilon = 4 - D$$

(ne pas confondre avec  $\varepsilon$  dans les propagateurs) et un facteur  $\mu^\varepsilon$  compense la dimension non-nulle de la constante de couplage lorsque  $D \neq 4$ . Les dénominateurs dans (39) sont combinés grâce à l'identité de Feynman :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}$$

et après un changement de variables  $p \rightarrow p + xq$  destiné à éliminer les termes linéaires en  $p$  au dénominateur, on écrit (39) sous la forme :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -e^2 \mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{N_{\alpha\beta}(p + xq, q)}{(p^2 + x(1-x)q^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}. \quad (40)$$

Le numérateur  $N_{\alpha\beta}$  est donné par le calcul de la trace dans (39) ; on

peut omettre les termes linéaires en  $p$  qui disparaissent dans l'intégration, et remarquer que (cf. équation (B.7)) :

$$\int d^D p p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{1}{D} g_{\mu\nu} \int d^D p p^2 f(p^2)$$

pour obtenir l'expression suivante de  $N_{\alpha\beta}$  :

$$N_{\alpha\beta} = -8x(1-x)[q_\alpha q_\beta - q^2 g_{\alpha\beta}] + 4g_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) p^2 - x(1-x)q^2 + m^2 \right]. \quad (41)$$

L'expression (41) contient une partie transverse, proportionnelle à :

$$d_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \quad (42)$$

et un terme proportionnel à  $g_{\alpha\beta}$ . Pour faire l'intégration sur  $p$  dans (40), nous aurons besoin des deux intégrales (cf. équations (B.4) et (B.5)) :

$$I_0 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{[\mathcal{M}^2 - i\varepsilon]^{2 - D/2}} \quad (43.a)$$

$$I_1 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - \mathcal{M}^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{-i}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{D\Gamma(1 - D/2)}{[\mathcal{M}^2 - i\varepsilon]^{1 - D/2}} \quad (43.b)$$

où les facteurs  $\pm i$  proviennent de la rotation de Wick.

Montrons que le terme en  $g_{\alpha\beta}$  dans (41) donne une contribution nulle après intégration sur  $p$  ; mettant en facteur

$$\frac{4i}{(4\pi)^{D/2}} [m^2 - x(1-x)q^2]^{-(1-D/2)}$$

on trouve pour le coefficient de  $g_{\alpha\beta}$  :

$$\left( \frac{2}{D} - 1 \right) \left( \frac{-1}{2} \right) D\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) + \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = 0.$$

La correction  $\Pi_{\alpha\beta}^{(1)}$  est purement transverse : ceci est en accord avec l'identité de Ward :

$$q^\alpha \Pi_{\alpha\beta} = 0$$

que nous montrerons au paragraphe suivant. Cependant cette propriété de  $\Pi_{\alpha\beta}$  n'est vraie que si l'on utilise une régularisation invariante de jauge, comme la régularisation dimensionnelle : l'invariance de jauge ne dépend pas de la dimension d'espace, parce que l'on peut généraliser

l'algèbre des matrices de Dirac à une dimension  $D$  quelconque... sauf si l'on a besoin de  $\gamma_5$  : heureusement  $\gamma_5$  n'intervient pas en électrodynamique. Une autre régularisation invariante de jauge est celle de Pauli-Villars. Au contraire la régularisation de Schwinger (V.58) ne respecte pas l'invariance de jauge : on trouve des termes quadratiquement divergents proportionnels à  $g_{\alpha\beta}$ , qui donnent une correction à la masse du photon <sup>(4)</sup>.

Rassemblant tous les facteurs on obtient pour  $\Pi_{\alpha\beta}^{(1)}(q)$  à l'ordre d'une boucle :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(1)}(q) = \frac{8 e^2 \mu^\epsilon}{(4 \pi)^{D/2}} i \Gamma \left( 2 - \frac{D}{2} \right) (-q^2 g_{\alpha\beta} + q_\alpha q_\beta) \times \\ \times \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m^2 - i\epsilon - x(1-x)q^2)^{2-D/2}}. \quad (44)$$

Avant d'exploiter cette équation, répétons la manœuvre qui nous a conduit au chapitre V à l'expression du vertex propre  $\Gamma^{(2)}$  :

$$D^{\mu\nu} = D_F^{\mu\nu} + D_F^{\mu\alpha} \Pi_{\alpha\beta} D_F^{\beta\nu} + D_F^{\mu\alpha} \Pi_{\alpha\beta} D_F^{\beta\delta} \Pi_{\delta\rho} D_F^{\rho\nu} + \dots \quad (45)$$

Cette équation est écrite sous forme diagrammatique sur la figure 12 :

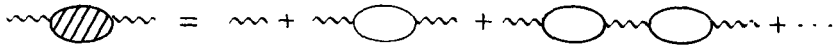


Figure 12. Sommation pour le propagateur.

où les boules non hachurées représentent des graphes 1-particule irréductibles. Ecrivant :

$$D_F^{\mu\nu} = \frac{id^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} - \frac{i a q^\mu q^\nu}{(q^2 + i\epsilon)^2} \quad (46)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = iq^2 d_{\alpha\beta} \bar{\omega}(q^2)$$

et effectuant la sommation de la série géométrique dans (45) on obtient :

$$D^{\mu\nu} = \frac{id^{\mu\nu}}{q^2(1 + \bar{\omega}(q^2))} - \frac{i a q^\mu q^\nu}{(q^2 + i\epsilon)^2}. \quad (47)$$

Le vertex propre  $\Gamma^{(2)}$  peut être défini par le dénominateur de (47)

$$\Gamma^{(2)} = q^2(1 + \bar{\omega}(q^2)). \quad (48)$$

Ce vertex propre obéit à  $\Gamma^{(2)}(q^2 = 0) = 0$  : si la masse du photon est initialement nulle, elle le reste. Mais le terme  $\bar{\omega}(q^2)$  va conduire à une renormalisation du champ électromagnétique  $A_\mu$ , qui sera effectuée en introduisant un contre-terme dépendant de la constante de renormalisation  $Z_3$ .

Examinons l'expression de  $\bar{\omega}(q^2)$  à l'ordre d'une boucle :

$$\bar{\omega}^{(1)}(q^2) = \frac{8 e^2 \mu^\varepsilon \Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 \frac{dx x(1-x)}{(m^2 - i\varepsilon - x(1-x)q^2)^{\varepsilon/2}}. \quad (49)$$

Comme il fallait s'y attendre, cette expression est divergente en dimension 4. Utilisant :

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma$$

on obtient à l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{(1)}(q^2) = \frac{2\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln C \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \times \\ \times \ln \left( \frac{m^2 - i\varepsilon - x(1-x)q^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

avec  $C = 4\pi e^{-\gamma}$ .

Le terme divergent est  $(2\alpha/3\pi)(1/\varepsilon)$ . Avec une régularisation de type Pauli-Villars, utilisant un cut-off  $\Lambda$ , on aurait :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \simeq \frac{i}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

tandis que :

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4} \simeq \frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\varepsilon}.$$

Pour comparer les parties divergentes dans les deux régularisations, il suffit de remplacer  $2/\varepsilon$  par  $\ln(\Lambda^2/m^2)$  ; naturellement les parties finies sont différentes ; de même cette substitution ne donnerait pas le résultat correct dans un calcul à deux boucles : on pourrait seulement comparer les parties les plus divergentes, en  $1/\varepsilon^2$  et en  $\ln^2(\Lambda^2/m^2)$ . Pour renormaliser l'expression divergente (49), on ajoute au lagrangien (1) un contre-terme :

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3^{(1)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Z_3^{(1)} A^\mu (\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu. \quad (51)$$

A l'ordre d'une boucle  $Z_3 - 1 = Z_3^{(1)}$ , où  $Z_3^{(l)}$  est la contribution à l'ordre de  $l$  boucles :

$$Z_3 = 1 + Z_3^{(1)} + Z_3^{(2)} + \dots + Z_3^{(l)} + \dots$$

Le contre-terme (51), traité perturbativement, conduit à un vertex :

$$\text{~~~~~} = iZ_3^{(1)}(-q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu) \quad (52)$$

qui transforme  $\Gamma^{(2)}$  en  $\Gamma_R^{(2)}$  :

$$\Gamma_R^{(2)} = q^2[(1 + \bar{\omega}(q^2)) + Z_3^{(1)}] \quad (53)$$

(comparez (46) et (52)). On a maintenant plusieurs choix possibles pour la renormalisation ; à l'ordre d'une boucle on obtient par exemple dans le schéma minimal ( $MS$ ) :

$$Z_3^{(1)} = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_{MS}}{\pi \varepsilon} \quad (54.a)$$

tandis que dans le schéma ( $\overline{MS}$ ) :

$$Z_3^{(1)} = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_{\overline{MS}}}{\pi \varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C\right). \quad (54.b)$$

Toutefois, des schémas tels que ( $MS$ ) ou ( $\overline{MS}$ ), bien que parfaitement cohérents, ne sont pas habituels en électrodynamique, car dans cette théorie il existe une limite classique à fréquence nulle. En effet considérons deux sources  $j_\mu^{(1)}$  et  $j_\mu^{(2)}$  du champ électromagnétique ; ces sources vont interagir par échange de photons, soit un terme d'interaction :

$$-ij_\mu^{(1)}(q) D^{\mu\nu}(q) j_\nu^{(2)}(-q) = -j_\mu^{(1)}(q) \frac{1}{q^2(1 + \bar{\omega}(q^2))} j^{\mu(2)}(-q) \quad (55)$$

où l'on a utilisé la conservation du courant  $q_\mu j^\mu(q) = 0$ . A la limite statique  $q_0 = 0$ , l'interaction (55) devient :

$$j_0(\mathbf{q}) \frac{1}{\mathbf{q}^2(1 + \bar{\omega}(-\mathbf{q}^2))} j_0(-\mathbf{q}). \quad (56)$$

$1/\mathbf{q}^2$  étant  $1/(4\pi r)$  (cf. 23). L'examen de (56) pour  $\mathbf{q}^2 \rightarrow 0$  montre que, si nous voulons retrouver la loi de Coulomb à longue distance avec la définition usuelle de la charge électrique, il est nécessaire de renormaliser  $\bar{\omega}(q^2)$  avec la condition  $\bar{\omega}_R(q^2) = 0$ , qui n'est pas vérifiée

dans les schémas  $MS$  ou  $\overline{MS}$ . Il est habituel d'utiliser le schéma sur couche de masse où :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) &= \bar{\omega}^{(1)}(q^2) - \bar{\omega}^{(1)}(0) = \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( 1 - \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right). \quad (57)\end{aligned}$$

Avec ce choix le résidu du pôle à  $q^2 = 0$  dans le propagateur complet du photon est égal à  $id_{\mu\nu}$  ; en d'autres termes la constante  $z_3$  (cf. X.83) est égale à 1. Dans le schéma de renormalisation sur couche de masse, le propagateur complet renormalisé  $D_{\mu\nu}^{(R)}$  s'écrit finalement :

$$D_{\mu\nu}^{(R)} = \frac{id_{\mu\nu}}{(q^2 + i\varepsilon)(1 + \bar{\omega}^{(1)}(q^2) - \bar{\omega}^{(1)}(0))} - \frac{iaq_\mu q_\nu}{(q^2 + i\varepsilon)^2}.$$

L'intégrale sur le paramètre de Feynman  $x$  dans (57) est élémentaire (exercice 4). Limitons-nous à deux remarques :

1) L'intégrale dans (57) est définie sans problème pour  $q^2 < 4m^2$ , l'argument du logarithme étant positif. Comme dans l'exemple étudié au chapitre X, paragraphe D.1,  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  présente une coupure pour  $q^2 \geq 4m^2$  qui est le seuil de production de la paire  $e^+ e^-$  ; la valeur physique est la limite du résultat de l'intégrale pour  $q^2 = q^2 + i\varepsilon$ , en raison

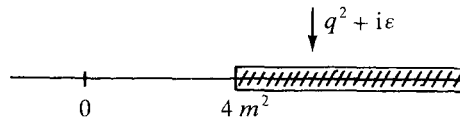


Figure 13. Définition de  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  dans un plan coupé en  $q^2$ .

de la prescription  $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$ . La partie imaginaire de  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  est reliée, grâce aux règles de coupure, au taux de désintégration d'un photon virtuel de masse  $\geq 4m^2$  en deux électrons (exercice 4) :

$$\text{Im } \bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) = \sum \left| \text{diagram} \right|^2.$$

$\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  obéit à une relation de dispersion qui nécessite une soustraction, reflétant la divergence du calcul perturbatif et la nécessité de la renormalisation.

2) A la limite statique  $q^2 = -\mathbf{q}^2$  et pour  $\mathbf{q}^2 \ll m^2$ , on peut développer

(57) en puissances de  $\mathbf{q}^2$  :

$$1 + \bar{\omega}_R^{(1)}(-\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{m^2} \int_0^1 dx [x(1-x)]^2 = 1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}.$$

La loi de Coulomb dans l'espace de Fourier est modifiée de la façon suivante :

$$\frac{1}{\mathbf{q}^2} \rightarrow \frac{1}{\mathbf{q}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right)} \simeq \frac{1}{\mathbf{q}^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{1}{m^2}$$

c'est-à-dire dans l'espace ordinaire :

$$\frac{1}{4\pi r} \rightarrow \frac{1}{4\pi r} + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \delta(\mathbf{r}). \quad (59)$$

Cette modification de la loi de Coulomb affecte les états  $s$  de l'atome d'hydrogène : elle induit par exemple un déplacement de  $-27$  MHz du niveau  $^2s_{1/2}$ , et sépare les niveaux  $^2s_{1/2}$  et  $^2p_{1/2}$  qui sont dégénérés à l'approximation de l'équation de Dirac. Le calcul précédent ne donne qu'une (petite) partie de la séparation  $^2p_{1/2}-^2s_{1/2}$ , qui est de  $+1\,000$  MHz environ. Mais ce calcul montre déjà la réalité des *corrections radiatives*, c'est-à-dire des corrections perturbatives obtenues par des calculs de diagrammes comprenant des boucles.

Les corrections radiatives au propagateur du photon sont souvent appelées corrections de *polarisation du vide* : en effet la production de paires (virtuelles)  $e^+e^-$  entraîne un effet d'écran, et la correction à la loi de Coulomb peut être interprétée par l'existence d'une constante diélectrique du vide. L'effet d'écran entraîne physiquement que la charge à longue distance est plus faible que la charge à courte distance. Ceci est confirmé par un calcul plus complet des corrections à la loi de Coulomb (exercice 5) :

$$\frac{e}{4\pi r} \rightarrow V(r) = \frac{e}{4\pi r} Q(r)$$

$$Q(r) \simeq 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{1}{(mr)^2} - 2\gamma - \frac{5}{3} \right) : mr \ll 1 \quad (60.a)$$

$$Q(r) \simeq 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi} (mr)^{3/2}} e^{-2mr} : mr \gg 1. \quad (60.b)$$

Pour  $mr \gg 1$ , on remarque le facteur  $e^{-2mr}$  dans (60.b) : l'effet étant dû à la production d'une paire  $e^+e^-$  de masse  $\geq 2m$ , sa décroissance à longue distance doit être exponentielle avec une longueur caractéristique  $(2m)^{-1}$  ; il suffit de reproduire l'argument classique de Yukawa : à

la limite statique, l'équation de Klein-Gordon couplée à une source ponctuelle  $\delta(\mathbf{r})$  s'écrit :

$$(\nabla^2 - m^2) \varphi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

et a pour solution :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-mr}}{4\pi r}.$$

Le champ décroît exponentiellement avec une longueur caractéristique  $m^{-1}$ .

Dans le cas  $r \rightarrow 0$ , ou plus précisément lorsque  $mr \ll 1$ , on pourrait penser que la masse de l'électron peut être négligée et que l'électrodynamique devient invariante d'échelle : comme le potentiel a pour dimension 1, il devrait être, d'après l'invariance d'échelle naïve, proportionnel à  $1/r$  à courte distance. Pour des raisons qui ont été discutées au chapitre VII, nous savons qu'il n'en est rien : l'invariance d'échelle est brisée par la nécessité d'introduire une échelle de masse pour la renormalisation. Cependant la présence de la masse de l'électron dans (60.a) provient de la renormalisation sur couche de masse et en général c'est une masse de soustraction  $\mu$  qui remplacera  $m$  : tout ceci sera discuté un peu plus loin, lorsque nous examinerons le groupe de renormalisation de l'électrodynamique.

### C.3. Propagateur de l'électron

Les corrections radiatives au propagateur de l'électron dépendent explicitement de la jauge, et en particulier du paramètre  $\alpha$  fixant la jauge dans la forme covariante du propagateur. Nous allons conserver cette forme complète du propagateur, en calculant dans un premier temps dans la jauge de Feynman, et en rajoutant ensuite la contribution  $q_\mu q_\nu$ . D'autre part il sera nécessaire d'attribuer une masse non-nulle au photon en raison des divergences infrarouges. Suivant la technique exposée plus haut pour le propagateur du photon, on écrira le propagateur complet  $S(p)$  en fonction de l'énergie propre  $\Sigma(p)$  :

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}. \quad (61)$$

$$\Sigma(p) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \not{p} \not{p} - \not{q} \not{p} - \not{p} \not{q} \right] \frac{1}{(\not{p} - \not{q} - m) \not{q}^2}.$$

Dans la jauge de Feynman  $\alpha = 1$  l'expression de  $\Sigma(p)$  est :

$$\Sigma(p) = -ie^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\mu}{(q^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (62)$$

Le calcul utilise exactement les mêmes techniques que celui du propagateur du photon ; on utilise les identités (C.8) et (C.9) avec pour résultat :

$$\Sigma(p) = \frac{e^2 \mu^\varepsilon \Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \times \int_0^1 dx \frac{mD + (2-D)(1-x)\not{p}}{[xm^2 - i\varepsilon + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2]^{\varepsilon/2}}.$$

On développe à l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon} (3m - (\not{p} - m)) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C\right) + \\ & + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -m + (\not{p} - m) - \int_0^1 dx [2m(1+x) - \right. \\ & \left. - 2(1-x)(\not{p} - m)] \ln [f(x, p^2)/\mu^2] \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

avec :

$$f(x, p^2) = xm^2 + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2 - i\varepsilon.$$

L'énergie propre  $\Sigma(p)$  est de la forme :

$$\Sigma(p) = A(p^2) + (\not{p} - m) B(p^2) \quad (64)$$

avec des coefficients divergents  $A(p^2)$  et  $B(p^2)$ . La renormalisation se fait en introduisant un contre-terme de masse et un contre-terme de renormalisation du champ, exprimé en fonction de la constante  $Z_2$  de renormalisation du champ électronique :

$$\delta\mathcal{L} = \delta m^{(1)} \bar{\psi}\psi + Z_2^{(1)} \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \vec{\partial} \psi - m \bar{\psi}\psi \right). \quad (65)$$

Ces contre-termes introduisent deux vertex supplémentaires traités perturbativement :

$$\begin{aligned} \text{---}\times\text{---} & : i \delta m^{(1)} \\ \text{---}\bullet\text{---} & : i Z_2^{(1)} (\not{p} - m) \end{aligned}$$

et donnent l'énergie propre renormalisée :

$$\Sigma_R(p) = A(p^2) - \delta m^{(1)} + (\not{p} - m) [B(p^2) - Z_2^{(1)}]. \quad (66)$$

A nouveau il est facile de déterminer  $\delta m^{(1)}$  et  $Z_2^{(1)}$  par simple inspection de (64) dans les schémas ( $MS$ ) ou ( $\overline{MS}$ ), par exemple dans le schéma  $MS$  :

$$\delta m^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\alpha m}{\pi \varepsilon}$$

$$Z_2^{(1)} = -\frac{\alpha}{2 \pi \varepsilon}.$$

En général on préfère renormaliser sur couche de masse, en exigeant que le propagateur renormalisé se comporte comme  $i(\not{p} - m)^{-1}$  au voisinage du pôle  $\not{p} = m$ . Il faut donc choisir :

$$\delta m^{(1)} = A(m^2) \quad (67.a)$$

$$Z_2^{(1)} = 2mA'(m^2) + B(m^2) = \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m}. \quad (67.b)$$

L'intégrale donnant  $A(m^2)$  est infrarouge-convergente, mais  $Z_2^{(1)}$  pose un problème : en effet nous cherchons à renormaliser juste au seuil d'un état électron-photon, et il n'est pas étonnant que l'on rencontre une divergence infrarouge. Il est nécessaire de garder une masse au photon, ce qui place le seuil  $p^2 = (m + \lambda)^2$  de production de l'état électron-photon au-dessus du point de renormalisation. L'expression (64) permet de calculer  $Z_2^{(1)}$  :

$$\begin{aligned} Z_2^{(1)} = & -\frac{\alpha}{2 \pi \varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C \right) \\ & + \frac{\alpha}{4 \pi} \left\{ 1 + 4m^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x^2)}{x^2 m^2 + (1-x)\lambda^2} \right. \\ & \left. + 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln (x^2 m^2 / \mu^2) \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

On a posé  $\lambda = 0$  dans les intégrales qui sont infrarouge-convergentes. L'intégrale infrarouge-divergente est :

$$I = \int_0^1 dx \frac{x(1-x^2)}{x^2 m^2 + (1-x)\lambda^2}$$

car si  $\lambda = 0$ , elle diverge en  $dx/x$  à  $x = 0$ . Comme le point dangereux est  $x = 0$ , on peut remplacer  $I$ , avec une erreur de l'ordre de  $\frac{\lambda^2}{m^2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2}$  par :

$$I' = \int_0^1 dx \frac{x}{x^2 m^2 + \lambda^2} - \int_0^1 dx \frac{x}{m^2} = \frac{1}{2m^2} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2m^2}.$$

L'expression finale pour  $Z_2^{(1)}$  est :

$$Z_2^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln C\right) + \frac{\alpha}{4\pi} \left(2 \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - 4 + \ln \frac{m^2}{\mu^2}\right). \quad (69)$$

Calculons maintenant la contribution  $\Sigma_a$  due au terme en  $q_\mu q_\nu$  du propagateur :

$$\begin{aligned} \Sigma_a(p) &= ie^2(1-\alpha)\mu^\epsilon \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ \frac{q(p^2 - m^2)}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^2(p-m)}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} - q \right] \frac{1}{(q^2 - \lambda^2 + i\epsilon)(q^2 - \alpha\lambda^2 + i\epsilon)} \\ &= ie^2(1-\alpha)(I_1 - I_2 - I_3). \end{aligned} \quad (70)$$

L'intégrale  $I_3$  est nulle par symétrie. L'intégrale  $I_1$  est ultraviolette-convergente par comptage de puissances, tandis que  $I_2$  est ultraviolette-divergente. Dans le calcul de  $\partial\Sigma_a/\partial p|_{p=m}$ , le contraire sera vrai de la convergence infrarouge : on voit que  $I_2$  a une puissance de  $q$  supplémentaire si  $q \rightarrow 0$ . A cause des facteurs  $(p^2 - m^2)$  dans  $I_1$  et  $(p-m)$  dans  $I_2$ ,  $\Sigma_a$  ne contribue pas à la renormalisation de masse. Ce résultat est d'ailleurs vrai à tous les ordres de la théorie des perturbations :  $\delta m$  est indépendant de la jauge (cette propriété est une conséquence de l'invariance de jauge de  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  : cf. exercice 12.a).

Pour calculer  $\Sigma_a$  il faut combiner trois dénominateurs ; en adaptant l'équation (B.3) au calcul de  $I_1$  on obtient :

$$\frac{\partial I_1}{\partial p} \Big|_{p=m} = \frac{-2im^2}{(4\pi)^2} \int \frac{x_1 dx_1 dx_2 \theta(1-x_1-x_2)}{x_1^2 m^2 - \alpha\lambda^2 x_1 + \alpha\lambda^2 + \lambda^2(1-\alpha)x_2} \quad (71)$$

qui est effectivement infrarouge divergent. Evaluons (71) :

$$\frac{\partial I_1}{\partial p} \Big|_{p=m} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[ \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha - 1 \right]. \quad (72)$$

L'intégrale  $I_2$  se transforme en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial p} \Big|_{p=m} &= \frac{iD\Gamma(\epsilon/2)\mu^\epsilon}{2(4\pi)^{D/2}} \int dx_1 dx_2 \theta(1-x_1-x_2) \times \\ &\times [x_1^2 m^2 + \alpha\lambda^2(1-x_1) + \lambda^2(1-\alpha)x_2]^{-\frac{\epsilon}{2}} - \frac{i\Gamma(3-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \times \\ &\times \int dx_1 dx_2 \theta(1-x_1-x_2) \frac{x_1^2 m^2}{[x_1^2 m^2 + \alpha\lambda^2(1-x_1) + \lambda^2(1-\alpha)x_2]^{1+\frac{\epsilon}{2}}}. \end{aligned}$$

La partie dépendante de jauge  $\partial \Sigma_a / \partial \not{p} \big|_{\not{p}=m}$  est finalement :

$$\frac{\partial \Sigma_a}{\partial \not{p}} \bigg|_{\not{p}=m} = \frac{\alpha (1 - a)}{4 \pi} \left[ \frac{2}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C \right) + \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{a}{1 - a} \ln a + 1 \right]. \quad (73)$$

Rassemblant les résultats de (69) et (73) on obtient pour  $Z_2^{(1)}$ :

$$Z_2^{(1)} = - \frac{\alpha a}{2 \pi \varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C \right) + \frac{\alpha}{4 \pi} \left[ (3 - a) \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + a \ln \frac{a m^2}{\mu^2} - 3 - a \right]. \quad (74)$$

Les termes ultraviolets-divergents ou infrarouges-divergents dépendent tous deux de la jauge ; à *cet ordre* de la théorie des perturbations, les divergences ultraviolettes disparaissent dans la jauge de Landau ( $a = 0$ ), et les divergences infrarouges dans la jauge de Yennie-Fried :  $a = 3$ .

#### C.4. Vertex électron-photon

La normalisation est telle qu'à l'ordre zéro de la théorie des perturbations le vertex propre  $\Gamma_\mu$  est égal à  $\gamma_\mu$ . Nous n'allons pas calculer le vertex complet, mais nous limiter au cas où les deux électrons externes sont sur couche de masse ce qui permettra d'utiliser :

$$\vec{p} = m ; \quad \vec{p}' = m$$

ainsi que l'identité de Gordon (exercice XI.5) :

$$\gamma^\mu = \frac{1}{2m} (p' + p)^\mu + \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu. \quad (75)$$

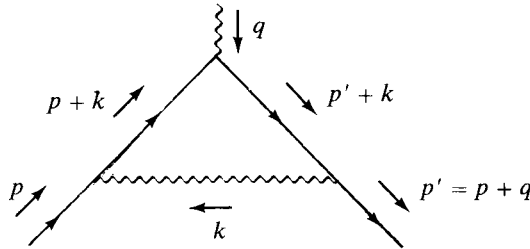


Figure 14. Le vertex électron-photon.

Calculons d'abord dans la jauge de Feynman la contribution à une boucle  $\Lambda^{(1)\mu}$  à  $\Gamma_\mu$  (la figure 14 définit la cinématique) :

$$\Lambda^{(1)\mu} = -ie^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma_\alpha \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon}. \quad (76)$$

Le numérateur  $N_\mu(p, p')$  se simplifie en utilisant l'équation de Dirac et quelques identités de l'appendice C.2 :

$$N^\mu(p', p, k) = \gamma^\mu [4k \cdot (p + p') + 4p \cdot p' - (2 - D)k^2] + \\ + [2(2 - D)k^\mu - 4(p + p')^\mu] k + 4mk^\mu.$$

On adapte l'identité (B.3) au présent calcul, et on remarque que l'on a effectué le changement de variables :

$$k \rightarrow k - x' p' - xp.$$

Après ce changement de variables, les termes linéaires en  $k$  au numérateur peuvent être omis ; d'autre part le dénominateur  $D(x, x'; q^2)$  :

$$D(x, x', q^2) = m^2(x + x')^2 + \lambda^2(1 - x - x') - xx' q^2 - i\epsilon \quad (77)$$

est symétrique en  $x$  et  $x'$  et on peut omettre dans le numérateur tous les termes antisymétriques dans l'échange  $x \leftrightarrow x'$ . Ces simplifications étant faites, le numérateur  $N_\mu$  devient :

$$N^\mu = \gamma^\mu \left\{ \frac{(2 - D)^2}{D} k^2 - q^2 [2(1 - x)(1 - x') - (4 - D)xx'] + \right. \\ \left. + m^2 [4(1 - x - x') + (2 - D)(x + x')^2] \right\} - \\ - im\sigma^{\mu\nu} q_\nu (x + x')(2 + (2 - D)(x + x')). \quad (78)$$

Après ces calculs quelque peu fastidieux, le vertex  $\Lambda_\mu^{(1)}$  devient :

$$\Lambda_\mu^{(1)} = -2ie^2 \mu^\epsilon \int dx dx' \theta(1 - x - x') \times \\ \times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_\mu(p', p, k)}{(k^2 - D(x, x', q^2))^3}. \quad (79)$$

Seul le terme en  $k^2$  dans (78) donne une contribution ultraviolette-divergente. Dans les autres termes, on peut poser  $D = 4$ . D'autre part, il sera commode d'écrire  $\Lambda_\mu$  en fonction de deux *facteurs de forme*

$F_1(q^2)$  et  $F_2(q^2)$  :

$$\Lambda_\mu = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2). \quad (80)$$

On obtient par identification, après avoir effectué l'intégrale sur  $k$  et le développement à l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$\begin{aligned} F_1^{(1)}(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C \right) - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \int dx dx' \theta(1-x-x') \left\{ \ln \frac{D(x, x', q^2)}{\mu^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q^2(1-x)(1-x')}{D(x, x', q^2)} + \frac{m^2[2(1-x-x') - (x+x')^2]}{D(x, x', q^2)} \right\} \right\} \quad (81.a) \\ F_2^{(1)}(q^2) &= \frac{\alpha m^2}{\pi} \int \frac{dx dx' \theta(1-x-x')(x+x')(1-x-x')}{D(x, x', q^2)} \quad (81.b) \end{aligned}$$

Avant de commenter les expressions (81), calculons la partie dépendante de jauge du vertex ; après application de l'équation de Dirac, celle-ci se réduit (cf. exercice 6) à :

$$\begin{aligned} \Lambda_a^\mu(p', p) &= ie^2 \mu^\varepsilon (1-a) \gamma^\mu \times \\ &\quad \times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - a\lambda^2 + i\varepsilon)}. \quad (82) \end{aligned}$$

L'intégrale dans (82) est à la fois infrarouge et ultraviolette divergente : en effet elle vaut  $\int d^D k / [(2\pi)^D k^4]$  si  $\lambda = 0$ , et elle est donc proportionnelle à  $\int dk/k$ , qui diverge logarithmiquement aussi bien pour  $k \rightarrow 0$  que pour  $k \rightarrow \infty$ . Le résultat final s'écrit :

$$\begin{aligned} \Lambda_a^\mu &= \frac{-\alpha(1-a)}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln C \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{a}{1-a} \ln a + 1 \right) \right]. \quad (83) \end{aligned}$$

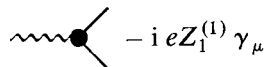
Ce résultat est indépendant de  $q$  et contribue uniquement au facteur de forme  $F_1$ , ce qui était déjà évident sur l'expression initiale (82).

Le facteur de forme  $F_1$  présente à la fois des divergences infrarouges et ultraviolettes, alors que  $F_2$  est convergent dans les deux cas : on

remarque que les divergences infrarouges proviennent de la région  $x, x' \rightarrow 0$ , et que le facteur  $(x + x')$  au numérateur de (81.b) suffit à les éliminer. Pour éliminer les divergences ultraviolettes, on renormalise en ajoutant au lagrangien un contre-terme :

$$\delta \mathcal{L} = -e Z_1^{(1)} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (84)$$

qui conduit au vertex supplémentaire :



$$-i e Z_1^{(1)} \gamma_\mu$$

Calculons  $Z_1^{(1)}$  dans le schéma *MS* par exemple ; l'élimination du pôle à  $\varepsilon = 0$  donne, compte tenu de (81.a) et (83) :

$$Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon} (1 - (1 - \alpha)) = -\frac{\alpha\alpha}{2\pi\varepsilon}. \quad (85)$$

Comparant avec (74), on constate l'égalité des termes en  $1/\varepsilon$  de  $Z_2^{(1)}$  et  $Z_1^{(1)}$  ; ceci n'est évidemment pas un hasard, mais une conséquence de l'identité de Ward pour le vertex (cf. D.1). Lorsque l'on renormalise sur couche de masse,  $Z_1$  va contenir des divergences infrarouges, tout comme  $Z_2$  : la renormalisation sur couche de masse consiste à imposer pour le vertex renormalisé  $F_{1R}(q^2)$  :

$$F_{1R}(q^2 = 0) = 0. \quad (86)$$

Imposer cette condition revient à définir la charge  $e$  de l'électron de la façon suivante : l'amplitude de probabilité pour l'absorption (ou l'émission) d'un photon de fréquence nulle est égale à  $e\gamma^\mu$ . Cette condition donne pour  $Z_1^{(1)}$  :

$$Z_1^{(1)} = -F_1(q^2 = 0) \quad (87)$$

où  $F_1(q^2 = 0)$  est donné dans la jauge de Feynman  $\alpha = 1$  par (cf. (81.a)) :

$$\begin{aligned} F_1(q^2 = 0) = & \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln C \right) - \\ & - \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \int dx dx' \theta(1 - x - x') [\ln(m^2(x + x')^2/\mu^2) + \right. \\ & \left. + \frac{m^2[2(1 - x - x') - (x + x')^2]}{m^2(x + x')^2 + \lambda^2(1 - x - x')}] \right\}. \end{aligned}$$

Les intégrales sur  $x$  et  $x'$  se calculent en posant :

$$u = x + x' ; \quad v = x - x' ; \quad \int dx dx' \theta(1 - x - x') f(u) = \int_0^1 u f(u) du \quad (88)$$

et l'on trouve :

$$F^{(1)}(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln C \right) - \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 2 \right]. \quad (89)$$

Rajoutant le terme dépendant de jauge (83) on obtient pour  $Z_1^{(1)}$  :

$$Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha a}{2\pi\epsilon} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln C \right) + \frac{\alpha}{4\pi} \left[ (3 - a) \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + a \ln \frac{am^2}{\mu^2} - 3 - a \right]. \quad (90)$$

On remarque l'égalité  $Z_1^{(1)} = Z_2^{(1)}$ , lorsque  $Z_2^{(1)}$  est calculé dans le cadre de la renormalisation sur couche de masse (cf. (74)). Cette égalité est une conséquence de l'identité de Ward (114). En réalité cette identité impose que  $F_1^R(0) = 0$  si l'on choisit  $\partial \Sigma_R / \partial \not{p} |_{p=m} = 0$  (exercice 11).

On peut être légitimement inquiet de l'apparition des divergences infrarouges. En fait elles disparaissent dans tout problème qui est physiquement bien posé : si l'on dispose d'une résolution expérimentale en énergie  $\Delta E$ , il est impossible de séparer un électron isolé d'un électron accompagné de photons de faible énergie, et dont l'énergie totale est  $< \Delta E$ . Si l'on tient compte de cette résolution expérimentale, les  $\ln \lambda^2$  vont se traduire dans le calcul de la section efficace par des  $\ln \Delta E$  : la masse du photon introduite dans les calculs intermédiaires disparaît du résultat physiquement observable. Un autre exemple d'élimination des divergences infrarouges est donné au chapitre XIII, paragraphe D.

### C.5. Moment magnétique anormal de l'électron

Tous ces problèmes sont absents dans le cas du facteur de forme  $F_2(q^2)$ . Calculons-le pour  $q^2 = 0$  :

$$F_2^{(1)}(0) = \frac{\alpha m^2}{\pi} \int \frac{dx dx' \theta(1 - x - x')(x + x')(1 - x - x')}{m^2(x + x')^2}.$$

Le changement de variables (88) donne immédiatement le résultat :

$$F_2^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 du (1-u) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\boxed{F_2^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{2\pi}} \quad . \quad (91)$$

Ce terme peut être interprété comme une *correction radiative au facteur gyromagnétique de l'électron* ; on l'appelle souvent « moment magnétique anormal ».

Examinons en effet la diffusion d'un électron par un champ extérieur, en tenant compte des corrections à une boucle calculées précédemment. Les diagrammes que l'on doit considérer au 1<sup>er</sup> ordre en  $Z\alpha$  sont (figure 15 — il faut évidemment y rajouter les contre-termes) :

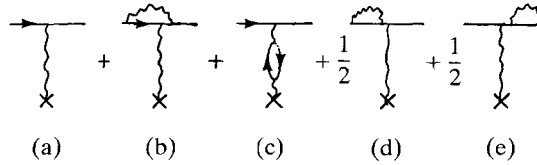


Figure 15. Corrections radiatives à la diffusion par un champ extérieur.

mais si la renormalisation est faite sur couche de masse, les diagrammes (d) et (e) ne contribuent pas : la constante  $z_2$  (cf. X.83) est égale à 1. La contribution des diagrammes (a) + (b) + (c) est :

$$-iZe^2 A_\mu^{(e)} (\gamma^\mu + \Lambda_R^{(1)\mu} + \Pi_R^{(1)\mu\nu} D_{\nu\sigma}^F \gamma^\sigma) .$$

Limitons-nous au cas où le transfert de moment  $q = p' - p$  est faible :  $q^2 \ll m^2$ . On pourra remplacer  $F_{1R}^{(1)}(q^2)$  par  $q^2 F_{1R}'^{(1)}(q^2 = 0)$  ce qui donne pour l'expression précédente :

$$-iZe^2 A_\mu^{(e)} \left[ \gamma^\mu \left( 1 + q^2 \left( F_{1R}'^{(1)}(0) - \frac{\alpha}{15\pi m^2} \right) \right) + \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2^{(1)}(0) \right]$$

où le facteur  $-\alpha/(15\pi m^2)$  vient du diagramme (c) (cf. (59)). Passant dans l'espace de configuration et utilisant l'identité de Gordon, on obtient l'expression du hamiltonien d'un électron dans un champ

extérieur lentement variable :

$$H = e \int d^3x \left\{ \frac{i}{2m} \bar{\psi}(x) \vec{\partial}_\mu \psi(x) (1 - (F_1^{(1)}(0) - \alpha/15 \pi m^2) \square) \times \right. \\ \left. \times A^{\mu(e)}(x) + (1 + F_2^{(1)}(0)) \frac{1}{4m} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) F^{\mu\nu(e)} \right\} \quad (92)$$

avec (cf. XI.76) :

$$F^{12} = -B_3 \quad F^{23} = -B_1 \quad F^{31} = -B_2$$

et compte tenu de la représentation de Dirac des matrices  $\sigma_{\mu\nu}$  (appendice C), le deuxième terme de (92) se met sous la forme :

$$-B \left[ \frac{e}{2m} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) 2 \int d^3x \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \psi(x) \right]. \quad (93)$$

En l'absence de corrections radiatives, on reconnaît le facteur gyromagnétique  $2(e/2m)$  de l'équation de Dirac. La correction relative à ce facteur est bien  $\alpha/2\pi \sim 10^{-3}$ .

En résumé, on peut dégager les deux points importants de ce paragraphe :

- (i) L'addition au lagrangien (1) des contre-termes (51), (65) et (84) a permis de rendre finis les calculs à une boucle.
- (ii) Les corrections radiatives ont des conséquences physiques observables, et sont en accord avec les résultats expérimentaux.

## D. IDENTITÉS DE WARD, UNITARITÉ, RENORMALISATION

### D.1. Identités de Ward

Les identités de Ward sont une conséquence de la conservation du courant :  $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ . Nous les démontrerons en utilisant la méthode qui semble la plus rapide, sinon la plus naturelle, en rajoutant au lagrangien  $\mathcal{L}_{QED}$  (1) celui d'un champ scalaire  $\varphi$  de  $(\text{masse})^2 = \alpha\lambda^2$ , découplé des photons et des électrons :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_\varphi; \quad \mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} \varphi (\square + \alpha\lambda^2) \varphi. \quad (94)$$

L'équation (94) paraîtra sans doute quelque peu « parachutée » ; une démonstration plus naturelle, mais un peu plus longue, fondée sur les équations du mouvement, est proposée à l'exercice (9), et cette démonstration montre pour quelles raisons on est amené à (94). Le champ  $\varphi$  est utilisé pour faire des transformations de jauge locales,

dépendant d'un paramètre infinitésimal  $\omega$  :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \omega \partial_\mu \varphi(x) \quad (95.a)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - ie\omega \psi(x) \varphi(x) \quad (95.b)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) + ie\omega \varphi(x) \bar{\psi}(x) . \quad (95.c)$$

Soit  $S[A, \psi, \bar{\psi}]$  l'action correspondant au lagrangien (1) et  $\omega \Delta S$  sa variation au premier ordre en  $\omega$  dans (95) :

$$S[A', \psi', \bar{\psi}'] \simeq S[A, \psi, \bar{\psi}] + \omega \Delta S \quad (96)$$

et soit  $X(A, \psi, \bar{\psi})$  un produit de champs pris en des points  $(y_1, \dots, y_n)$  notés collectivement  $y$  :

$$X'(y) = X(A', \psi', \bar{\psi}') \simeq X(A, \psi, \bar{\psi}) + \omega \Delta X(y) . \quad (97)$$

Comme la mesure d'intégration est invariante dans la transformation (95), et que  $\varphi$  est un champ libre, nous obtenons l'identité :

$$\langle 0 | T(X(y) \varphi(z)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(X'(y) \varphi(z)) | 0 \rangle = 0 . \quad (98)$$

La deuxième fonction de Green dans (98) est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(X'(y) \varphi(x)) | 0 \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}, \varphi) \exp \{ iS[A, \psi, \bar{\psi}] + \\ &\quad + i\omega \Delta S + iS_\varphi \} [X(y) \varphi(z) + \omega \Delta X(y) \varphi(z)] . \end{aligned}$$

Le développement de cette équation au premier ordre en  $\omega$  donne ( $\Delta \mathcal{L}(x)$  est la variation du lagrangien) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A, \psi, \bar{\psi}, \varphi) [\Delta X(y) \varphi(z) + \\ + i \int d^4x \Delta \mathcal{L}(x) X(y) \varphi(z)] e^{iS[A, \psi, \bar{\psi}]} e^{iS_\varphi} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\Delta X(y) \varphi(z)) | 0 \rangle &= \\ &= -i \int d^4x \langle 0 | T(\Delta \mathcal{L}(x) X(y) \varphi(z)) | 0 \rangle . \quad (99) \end{aligned}$$

Seule la partie non invariante de jauge de  $\mathcal{L}$  :

$$-\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 A_\mu A^\mu$$

est affectée par la transformation (95), ce qui permet d'écrire immédiatement  $\Delta\mathcal{L}$  (après une intégration par parties) :

$$\Delta\mathcal{L}(x) = - [\partial_\mu A^\mu(x)] \left[ \left( \frac{1}{\alpha} \square + \lambda^2 \right) \varphi(x) \right]. \quad (100)$$

Cette équation montre bien que *la forme des identités de Ward dépend du choix du terme fixant la jauge dans le lagrangien*. Les identités de Ward obtenues à partir de la jauge de l'exercice (XI.14) seraient différentes de celles que nous allons écrire dans la jauge de Lorentz, et elles seraient beaucoup plus compliquées (cf. XIII, exercice 5).

Dans les identités qui vont suivre, *on doit considérer que toutes les dérivations sont à l'extérieur du produit-T*, même si je les écris à l'intérieur afin d'améliorer la lisibilité des équations (cf. la discussion suivant X.50). En reportant l'équation (100) dans (99), on obtient l'identité :

$$\begin{aligned} \int \langle 0 | T(\partial_\mu A^\mu(x) X(y) (\square_x + \alpha \lambda^2) \varphi(x) \varphi(z)) | 0 \rangle d^4x = \\ = -i\alpha \langle 0 | T(\Delta X(y) \varphi(z)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (101)$$

Si l'on tient compte du fait que  $\varphi(x)$  est un champ libre de masse  $\alpha \lambda^2$  :

$$(\square_x + \alpha \lambda^2) \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(z)) | 0 \rangle = -i \delta^{(4)}(x - z)$$

on déduit de (101) la forme générale des identités de Ward :

$$\boxed{\langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu(x) X(y)) | 0 \rangle = \alpha \langle 0 | T(\varphi(x) \Delta X(y)) | 0 \rangle} \quad (102)$$

Nous allons maintenant illustrer ce résultat sur deux cas particuliers, celui du propagateur du photon (cf. (12)) :

$$D_{\mu\nu}(x - y) = \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle$$

et celui du vertex électron-photon :

$$V_\mu(x, y, z) = \langle 0 | T(A_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle. \quad (103)$$

Dans le premier cas on choisit :

$$X(y) = A_\nu(y); \quad \Delta X(y) = \frac{\partial}{\partial y^\nu} \varphi(y)$$

et l'équation (102) donne :

$$\langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = \alpha \langle 0 | T\left(\varphi(x) \frac{\partial}{\partial y^\nu} \varphi(y)\right) | 0 \rangle$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} D_{\mu\nu}(x-y) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Delta_F(x-y). \quad (104)$$

On peut également écrire l'identité de Ward en appliquant l'opérateur de Klein-Gordon  $(\square_x + \alpha\lambda^2)$  aux deux membres de l'équation (104) :

$$(\square_x + \alpha\lambda^2) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = i\alpha \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^{(4)}(x-y). \quad (105)$$

Dans le cas du vertex (103) on choisit :

$$\begin{aligned} X(y, z) &= \psi(y) \bar{\psi}(z) \\ \Delta X &= -ie\psi(y) \varphi(y) \bar{\psi}(z) + ie\psi(y) \varphi(z) \bar{\psi}(z) \end{aligned}$$

et l'équation (102) donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\mu(x, y, z) = -ie\alpha [\Delta_F(x-y) - \Delta_F(x-z)] S(y-z) \quad (106)$$

où  $S(y-z)$  est le propagateur électronique complet (8). Appliquons à nouveau l'opérateur de Klein-Gordon aux deux membres de l'équation (106) :

$$\begin{aligned} (\square_x + \alpha\lambda^2) \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\mu(x, y, z) &= \\ &= -e\alpha [\delta(x-y) - \delta(x-z)] S(y-z). \end{aligned} \quad (107)$$

Les équations (105) et (107) sont des équations du mouvement pour l'opérateur  $\partial^\mu A_\mu(x)$ , et elles expriment que ce champ est un champ libre de  $(\text{masse})^2 = \alpha\lambda^2$  :

$$(\square_x + \alpha\lambda^2) \partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

identité qui se déduit des équations du mouvement *classiques* : cf. exercice XI.13. On remarquera en effet que les membres de droite de (105) et (107) ont la forme des membres de droite des équations (X.50) et (X.51), lorsque l'interaction est nulle. Cette propriété apparaît de façon beaucoup plus transparente dans la démonstration de l'exercice (9).

Pour écrire la forme explicite des identités de Ward, il est commode de passer à l'espace de Fourier. Considérons une fonction de Green

$G^{(2n,m)}$  (cf. (14)) ; dans l'espace de Fourier,  $\partial/\partial x^\mu$  donne un facteur  $iq_\mu$  où  $q$  est la variable conjuguée de  $x$  : le moment  $q$  quitte le vertex  $x$ . Si nous effectuons une variation sur un opérateur  $A_\nu(y)$  dans le membre de droite de (102), nous obtenons dans l'espace de Fourier un facteur :

$$\frac{\alpha q_\nu}{q^2 - \alpha \lambda^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+k)$$

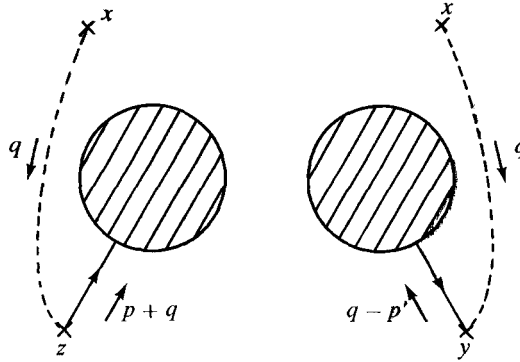
où  $k$  est la variable conjuguée de  $y$ .

Soit maintenant une ligne électronique entrant avec un moment  $p$  dans le diagramme, correspondant à un opérateur de champ  $\bar{\psi}(z)$ . Le membre de droite de (102) donne alors un facteur :

$$ie\alpha \Delta_F(x-z) \langle 0 | T(\bar{\psi}(z) \dots) | 0 \rangle$$

correspondant dans l'espace de Fourier (cf. figure 16) à :

$$\frac{-e\alpha}{q^2 - \alpha \lambda^2} G^{(2n,m-1)}(\dots; p+q, \dots).$$



**Figure 16.** Représentation graphique du membre de droite de (102) pour des lignes électroniques entrantes et sortantes.

Enfin pour un électron sortant du diagramme avec un moment  $p'$ , il suffira de changer le signe du résultat précédent :

$$\frac{e\alpha}{q^2 - \alpha \lambda^2} G^{(2n,m-1)}(\dots; -p' + q, \dots)$$

(rappelons que par convention tous les moments entrent dans le diagramme). On obtient donc la forme générale des identités de Ward,

pour une fonction de Green arbitraire (il est commode d'inclure le facteur  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}$  (cf. X.28) dans la définition de  $G^{(2n,m)}$ ) :

$$\begin{aligned} q^\mu G_{\mu, \nu_1, \dots, \nu_m}^{(2n, m+1)}(q, k_1, \dots, k_m; p_1, \dots, p_n; -p'_1, \dots, -p'_n) = \\ = \frac{-i\alpha}{q^2 - \alpha\lambda^2} \{ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + k_1) \times \\ \times q_{\nu_1} G_{\nu_2, \dots, \nu_m}^{(2n, m-1)}(k_2, \dots; \dots; \dots) + \text{Perm.} \\ - e G_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(2n, m)}(\dots; p_1 + q, \dots; \dots) + \text{Perm.} \\ + e G_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(2n, m)}(\dots; \dots; -p'_1 + q, \dots) + \text{Perm.} \} . \quad (108) \end{aligned}$$

Appliquons maintenant cette équation dans deux cas particuliers :

(a) Propagateur du photon :  $n = 0, m = 1$  :

$$\boxed{q^\mu D_{\mu\nu}(q) = -\frac{i\alpha q_\nu}{q^2 - \alpha\lambda^2}} . \quad (109)$$

Cette équation est évidemment la transformée de Fourier de (104) : (notez que  $G_{\mu\nu}^{(0,2)}$  diffère de  $D_{\mu\nu}$  par un facteur  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}$ ). Mais le propagateur libre  $D_{\mu\nu}^F$  (11) vérifie :

$$q^\mu D_{\mu\nu}^F(q) = \frac{-i\alpha q_\nu}{q^2 - \alpha\lambda^2} . \quad (110)$$

La comparaison de (109) et (110) montre que *les corrections radiatives au propagateur du photon sont purement transverses* :

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0 \quad (111)$$

résultat que nous avons vérifié à l'ordre d'une boucle par un calcul explicite.

(b) Vertex électron-photon :  $n = 1, m = 0$ .

L'équation (108) donne dans ce cas la transformée de Fourier de (106) :

$$q^\mu V_\mu(q, p, p') = \frac{ie\alpha}{q^2 - \alpha\lambda^2} [S(p + q) - S(p' - q)] \quad (112)$$

où les notations sont celles du paragraphe C.4 (figure 14). Il est commode de transformer cette relation en utilisant le vertex propre  $\Gamma_\mu$  :

$$V_\mu = D_{\mu\nu}(q) S(p') (-ie\Gamma^\nu) S(p)$$

et l'identité (109) met le résultat final sous la forme (\*) :

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p') = i[S^{-1}(p') - S^{-1}(p)] . \quad (113)$$

Il est instructif de vérifier que les signes sont corrects à l'ordre de zéro boucle, où :

$$\Gamma_\nu = \gamma_\nu ; \quad iS_F^{-1}(p) = (\not{p} - m) .$$

La limite  $q \rightarrow 0$  de (113) donne aussi une identité utile :

$$\Gamma_\mu(p, p) = i \frac{\partial S^{-1}}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} . \quad (114)$$

## D.2. Unitarité

Le rôle fondamental des identités de Ward est de préserver l'unitarité de l'électrodynamique (\*\*). En effet l'unitarité dépend de la validité des règles de coupure : les états intermédiaires dans les règles de coupure doivent donner une contribution identique à celle des états physiques. Examinons par exemple une diffusion photon-électron avec un état intermédiaire à un électron et deux photons, cas qui contient tous les ingrédients de la démonstration générale (figure 17) :

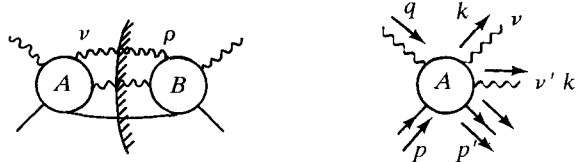


Figure 17. Etat intermédiaire à un électron et deux photons.

(\*) Le facteur (i) dans le membre de droite de (113) provient de la définition du propagateur (comme les facteurs  $(4\pi)$  en électrostatique, les facteurs  $i$  éjectés de certaines formules finissent toujours par refaire surface).

(\*\*) Dans les théories de jauge non abéliennes, il peut arriver qu'un courant correspondant à une invariance de jauge locale, conservé au niveau classique, ne puisse plus l'être après renormalisation : c'est le problème des « anomalies », qui, pour les mêmes raisons qu'en électrodynamique, peut constituer une menace mortelle pour l'unitarité.

Pour fixer les idées et simplifier les notations, on se place dans le cas de la masse nulle et de la jauge de Feynman. Le propagateur coupé du photon de moment  $k$  dans l'état intermédiaire est :

$$-g_{\rho\nu} \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \theta(k^0) \delta(k^2) \quad (115)$$

alors que la somme sur les polarisations d'un photon physique ne donne pas  $-g_{\rho\nu}$ , mais :

$$\sum_s \varepsilon_\rho^{(s)}(k) \varepsilon_\nu^{(s)*}(k) = -g_{\rho\nu} + \frac{k_\rho n_\nu + k_\nu n_\rho}{k \cdot n} \quad (116)$$

où  $n_\mu$  est le vecteur  $(k_0, -\mathbf{k})$  si  $k_\mu = (k_0, \mathbf{k})$  : le membre de droite de (116) est le projecteur sur le sous-espace orthogonal à  $k_\mu$  et à  $n_\mu$ . L'unitarité perturbative ne sera vérifiée que si la contribution de (115) est identique à celle de (116). Ce résultat est une conséquence d'une identité de Ward, que nous écrirons sous forme diagrammatique pour la fonction de Green correspondant à l'amplitude de diffusion  $A$ , en calculant  $k^\nu G_{\nu\nu';\mu}^{(2,3)}$  (figure 18) :

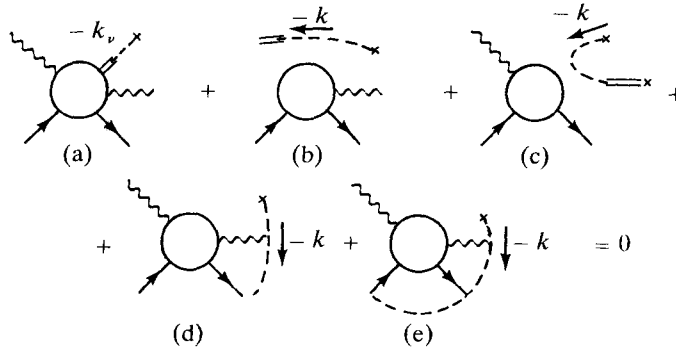


Figure 18. Identité de Ward pour  $G^{(2,3)}$ .

La contribution (b) est nulle car le photon initial est un photon physique :  $q^\mu \varepsilon_\mu^{(s)}(q) = 0$ . Il est nécessaire de montrer que la contribution (c) est nulle, même si la polarisation du photon  $k'$  n'est pas physique : la condition  $k + k' = 0$  étant incompatible avec les fonctions  $\theta(k^0)$  et  $\theta(k'^0)$  du propagateur coupé, on obtient le résultat souhaité.

Le cas des électrons est un peu plus compliqué : rappelons que l'élément de matrice  $S$  se calcule en multipliant la fonction de Green par les propagateurs complets inverses afin d'obtenir la fonction de Green amputée de ses propagateurs complets :

$$\bar{G}_{\nu,\nu';\mu}^{(2,3)}(k, k', p'; q, p).$$

Dans cette opération, le terme (e) de la figure 18 devient :

$$G_{\nu'; \mu}^{(2,2)}(k', p'; q, p - k) S(p - k) S^{-1}(p).$$

Lorsque l'on prend la limite sur couche de masse  $p = m$ ,  $S^{-1}(p)$  s'annule et il en est de même de (e) ; un raisonnement analogue montre que si l'électron ( $p'$ ) est sur couche de masse, le terme (d) donne zéro. En résumé, pour des électrons externes sur couche de masse, on obtient l'identité de Ward pour la fonction de Green connexe, amputée de ses propagateurs complets :

$$k^\nu \bar{G}_{\nu, \nu'; \mu}^{(2,3)}(k, k', p'; q, p) = 0. \quad (117)$$

Ceci est évidemment un résultat général, valable pour toute fonction de Green  $\bar{G}_{\mu, \dots}^{(2n, m)}$ .

L'identité (117) montre que le projecteur (116) sur les états physiques peut être remplacé par  $-g_{\rho\nu}$  : grâce à l'identité de Ward, seuls les états physiques contribuent aux règles de coupure.

### D.3. Renormalisation

Notre discussion était pour le moment quelque peu formelle car elle ignorait les divergences, et il nous faut attaquer les problèmes de renormalisation. Comme au chapitre VI, il ne s'agit pas de donner ici une preuve complète, mais de mettre la renormalisabilité de l'électrodynamique au même niveau de plausibilité que celle de la théorie en  $\varphi^4$ . Pour fixer les idées, nous utiliserons le schéma minimal en définissant la constante de renormalisation  $Z_m$  par :  $m_0 = Z_m m$ . A l'ordre d'une boucle, et rassemblant les contre-termes (51), (65) et (84) nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \\ & + \bar{\psi} \left( i \frac{\vec{\partial}}{2} - m \right) \psi - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - (Z_2 Z_m - 1) m \bar{\psi} \psi + (Z_2 - 1) \bar{\psi} i \frac{\vec{\partial}}{2} \psi \\ & - e (Z_1 - 1) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu. \end{aligned} \quad (118)$$

Si nous voulons que les fonctions de Green renormalisées obéissent aux identités de Ward, il est nécessaire que les versions renormalisées de (109) et de (114) soient correctes. En ce qui concerne (109), ceci

implique qu'il n'y a pas de contre-termes en  $A_\mu A^\mu$  et en  $(\partial_\mu A^\mu)^2$ . Examinons maintenant (114) : dans la renormalisation :

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p, p') &\rightarrow \Gamma_{\mu, R}(p, p') = \Gamma_{\mu, \text{reg}}(p, p') + Z_1^{(1)} \gamma_\mu \\ iS^{-1}(p) &\rightarrow iS_R^{-1}(p) = iS_{\text{reg}}^{-1}(p) + Z_2^{(1)}(p - m)\end{aligned}$$

où  $\Gamma_{\mu, \text{reg}}(p, p')$  et  $S_{\text{reg}}(p)$  ont été calculés avec une régularisation dimensionnelle. Comme cette régularisation préserve l'invariance de jauge (d'où son intérêt)

$$\Gamma_{\mu, \text{reg}}(p, p) = i \frac{\partial S_{\text{reg}}^{-1}(p)}{\partial p^\mu}$$

et si nous voulons la même identité pour les fonctions renormalisées, il est nécessaire que :

$$Z_1^{(1)} = Z_2^{(2)}. \quad (119.a)$$

Cette identité est automatique dans le schéma minimal, étant donné que les parties divergentes du vertex et du propagateur sont nécessairement identiques. En jouant sur les parties finies des contre-termes, on pourrait prendre  $Z_1 \neq Z_2$ , mais un tel choix serait fatal à l'unitarité.

Introduisons maintenant champs et constantes nues en écrivant :

$$A_0^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu \quad (120.a) ; \quad \psi_0 = Z_2^{1/2} \psi \quad (120.d)$$

$$e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e = Z_3^{-1/2} e \quad (120.b) ; \quad m_0 = Z_m m \quad (120.e)$$

$$\lambda_0^2 = Z_3^{-1} \lambda^2 \quad (120.c) ; \quad a_0 = Z_3 a. \quad (120.f)$$

Le lagrangien (118) s'écrit en fonction de ces quantités nues :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_0^{\mu\nu} F_{0\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_0^2 A_{0\mu} A_0^\mu - \frac{1}{2a_0} (\partial_\mu A_0^\mu)^2 + \\ & + \bar{\psi}_0 \left( \frac{i}{2} \vec{\partial} - m_0 \right) \psi_0 - e_0 \bar{\psi}_0 \gamma_\mu \psi_0 A_0^\mu \quad (121)\end{aligned}$$

ce qui montre que la structure du lagrangien est préservée par la renormalisation. Le rôle de l'identité  $Z_1 = Z_2$  est crucial pour préserver cette structure ; en effet :

$$\partial_\mu + ie A^\mu \rightarrow \partial_\mu + iZ_1^{-1} Z_2 e_0 A_0^\mu = \partial_\mu + ie_0 A_0^\mu \quad (122)$$

et le couplage minimal est bien préservé. Dans le cas général, on procédera par récurrence. Supposons que l'on ait calculé les fonctions de Green renormalisées et les contre-termes à l'ordre de  $l$ -boucles. On calcule les fonctions de Green régularisées à l'aide du lagrangien (121),

où  $e_0, m_0, \dots$  sont des fonctions de  $\varepsilon$  présentant des pôles en  $\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-l}$ . En raison de la structure du lagrangien (121), les fonctions de Green régularisées obéiront aux identités de Ward. La procédure examinée ci-dessus à l'ordre d'une boucle pourra être reprise pour définir les contre-termes à l'ordre de  $(l+1)$ -boucles, tout en préservant l'identité (114) pour les fonctions de Green renormalisées, si l'on choisit  $Z_1^{(l+1)} = Z_2^{(l+1)}$ . On aura donc de façon générale la relation :

$$\boxed{Z_1 = Z_2} . \quad (119.b)$$

Les fonctions de Green nues à l'ordre de  $(l+1)$  boucles, obéiront à l'identité de Ward générale (108), étant donné qu'elles ont été calculées avec le lagrangien (121), où les paramètres sont évalués à l'ordre de  $l$  boucles (rappelons que mis à part  $G^{(0,2)}$ ,  $G^{(2,0)}$  et  $G^{(2,1)}$  qui ont été examinées ci-dessus, les fonctions de Green sont superficiellement convergentes). Les identités de Ward pour les fonctions de Green renormalisées se déduisent de la structure multiplicative de la renormalisation :

$$G_R^{(2n,m)} = Z_2^{-n} Z_3^{-m/2} G_0^{(2n,m)}$$

et des identités (cf. 120) :

$$\alpha_0 \lambda_0^2 = \alpha \lambda^2 ; \quad Z_3^{-1} \alpha_0 = \alpha ; \quad Z_3^{-1/2} \alpha_0 e_0 = \alpha e$$

où  $\alpha, \lambda$  et  $e$  sont les quantités renormalisées.

En résumé, l'électrodynamique renormalisée est bien unitaire et locale (cette dernière propriété étant conséquence de la construction de Bogolioubov). Il resterait à montrer que les quantités physiques, comme les éléments de matrice  $S$ , sont indépendantes de jauge. Il est possible, par exemple, de s'assurer que les éléments de matrice  $S$  sont indépendants de  $\alpha$ , ce qui n'est pas évident a priori, car cette indépendance résulte d'une compensation entre le facteur  $z_2(\alpha)$  (cf. X.83) et la dépendance en  $\alpha$  des fonctions de Green. Le fait que les quantités physiques soient indépendantes de  $\alpha$  montre que l'on peut prendre la limite  $\alpha \rightarrow \infty$  dans le propagateur (11) ; on retombe alors sur la forme naïve du propagateur d'un champ vectoriel massif (X.121) qui donne une théorie manifestement unitaire. Malgré les divergences sévères dues au facteur  $m^{-2}$  dans les fonctions de Green, le lagrangien d'un champ vectoriel massif (couplé à un courant conservé) est renormalisable, si l'on calcule seulement les quantités physiques ; ce lagrangien est équivalent physiquement à celui modifié par Stüeckelberg.

#### D.4. Groupe de renormalisation pour l'électrodynamique

Avant de passer aux résultats formels, il vaut la peine de donner une description intuitive de la variation de la charge électrique, ou de  $\alpha$ , en fonction de la distance, qui permet une description élémentaire de la

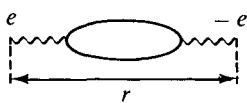


Figure 19.

renormalisation et du groupe de renormalisation. Considérons deux charges statiques (infiniment lourdes)  $+e$  et  $-e$  placées à une distance  $r \ll m^{-1}$ ; l'énergie potentielle de ces deux charges est, à l'ordre de zéro boucle,  $-\alpha_0/r$ . Cette énergie potentielle est corrigée par l'effet d'écran des paires virtuelles  $e^+e^-$  (figure 19) ou, en d'autres termes, par la polarisation du vide; nous obtiendrons l'effet de cette polarisation en intégrant sur les fluctuations de longueur d'onde  $\lambda$  du champ électromagnétique créé par la paire  $e^+e^-$ :

$$\alpha(r) = \alpha_0 - d\alpha_0^2 \int_{\Lambda^{-1}}^r \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (123)$$

où la forme  $d\lambda/\lambda$  est imposée par l'analyse dimensionnelle;  $d$  est une constante positive (car l'effet d'écran réduit l'énergie potentielle),  $\Lambda$  un cut-off ultraviolet et  $r$  le cut-off infrarouge: en effet si  $\lambda \gtrsim r$ , la fluctuation ne distingue pas entre les deux charges. Le résultat de l'intégration dans (123) est:

$$\alpha(r) = \alpha_0 - d\alpha_0^2 \ln(\Lambda r). \quad (124)$$

Soit maintenant  $R$  une distance de référence, qui définit la charge  $\alpha(R)$  à distance  $R$ ; exprimons  $\alpha_0$  en fonction de  $\alpha(R)$ :

$$\alpha_0 = \alpha(R) + d\alpha^2(R) \ln(\Lambda R)$$

et reportons dans (124):

$$\alpha(r) = \alpha(R) \left( 1 - d\alpha(R) \ln \frac{r}{R} \right). \quad (125)$$

Cette opération a fait disparaître la charge nue  $\alpha_0$  au profit de la charge de référence à distance  $R$ , en éliminant du même coup le cut-off  $\Lambda$ : nous venons de renormaliser la charge. Cette renormalisation a introduit une échelle de longueur  $R$  qui brise l'invariance d'échelle naïve de l'électrodynamique: celle-ci prédit que pour  $mr \ll 1$ ,  $\alpha(r) \rightarrow \text{Cte}$ , ce qui n'est manifestement pas le cas. Par analyse dimensionnelle,  $\alpha(r)$  est de la forme:

$$\alpha(r) = F\left(\alpha(R), \frac{r}{R}\right)$$

et en dérivant par rapport à  $r$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\alpha(r)}{d \ln r} \right|_{r=R} &= F'(\alpha(r), 1) = -\beta(\alpha(r)) \\ &= -d\alpha^2(r) + O(\alpha^3(r)). \end{aligned} \quad (126)$$

L'équation (126) définit la variation de la charge en fonction de la distance, ou, ce qui revient au même, en fonction d'une masse  $\mu \sim 1/r$ . On reconnaît dans (126) la définition de la fonction  $\beta$  de Callan-Symanzik. L'équation (126) montre que, pour  $\alpha$  suffisamment petit, la charge augmente quand la distance diminue : quand  $r \rightarrow 0$ , on se rapproche de la valeur « vraie » (infinie) de la charge.

Revenons maintenant aux calculs plus formels en utilisant les résultats du chapitre VII. Comme la constante de structure fine a les mêmes dimensions que la constante de couplage  $g$  de la théorie scalaire, on pourra utiliser les formules du chapitre VII en remplaçant  $g$  par  $\alpha$  (si l'on travaillait avec  $e$  au lieu de  $\alpha$ , il faudrait remplacer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ ). La relation entre  $\alpha_0$  et  $\alpha$  est :

$$\alpha_0 = Z_3^{-1} \alpha. \quad (127)$$

La constante de renormalisation  $Z_3$  a été calculée au paragraphe C.2 ; sa partie divergente est à l'ordre d'une boucle (cf. 54) :

$$Z_3^{(1)} = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\pi \varepsilon}.$$

Grâce à l'équation (VII-81) (et en se souvenant que la relation entre  $g_0$  et  $g$  est  $g_0 = Zg$ ) on obtient immédiatement la fonction  $\beta(\alpha)$  au premier ordre en  $\alpha$  :

$$\boxed{\beta(\alpha) = \mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{\pi} + O(\alpha^3)} \quad (128)$$

La constante  $d$  dans (126) vaut  $2/3 \pi$ .

Toujours à l'ordre d'une boucle on peut calculer  $\alpha(q^2)$  en fonction de  $\alpha(\mu^2)$  :

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha(\mu^2)}{\pi} \ln \left( \frac{q^2}{\mu^2} \right)}. \quad (129)$$

La constante de couplage croît avec  $q^2$ , ou, ce qui revient au même, décroît avec la distance, ce qui confirme la discussion heuristique précédente.

Le signe du terme en  $\alpha^2$  montre que l'électrodynamique n'est pas asymptotiquement libre. Comme la théorie en  $\varphi^4$ , l'électrodynamique n'est vraisemblablement pas définie de façon non triviale en dimension 4 comme limite d'une théorie à cut-off. Cependant la valeur de  $q^2$  pour laquelle  $\alpha(q^2)$  devient  $\simeq 1$  est astronomique. Comme on pense aujourd'hui que l'électrodynamique doit être incluse dans une théorie de jauge non abélienne plus vaste, ce problème de « non-liberté asymptotique » n'a probablement aucune importance et ne remet pas en cause les succès du programme de renormalisation.

Un mot enfin sur la définition de la charge électrique : en électrodynamique l'existence d'une limite classique à fréquence nulle donne une définition naturelle de la charge électrique. Lorsque la renormalisation est faite sur couche de masse, la limite de basse énergie de la diffusion Compton est donnée à tous les ordres de la théorie des perturbations par le résultat classique de la diffusion d'une onde électromagnétique par une charge ponctuelle (formule de Thomson)

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2. \quad (130)$$

Ce résultat est établi grâce à l'identité de Ward pour l'effet Compton (exercice 10). Si  $\alpha$  désigne la valeur de la constante de structure fine dans le schéma sur couche de masse et  $\alpha_{MS}$  sa valeur dans le schéma  $MS$  (par exemple), il est facile de trouver le lien entre les deux définitions de  $\alpha$  :

$$\alpha_{MS} = \frac{Z_3^{MS}}{Z_3} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi} \ln \left( \frac{C\mu^2}{m^2} \right) + O(\alpha^3). \quad (124)$$

La relation dépend bien évidemment de l'échelle de masse  $\mu$  utilisée dans le schéma minimal. L'avantage d'un schéma tel que  $MS$  est qu'il permet de prendre sans problème la limite  $m \rightarrow 0$  de l'électrodynamique. Dans le schéma sur couche de masse, ceci n'est pas possible en raison des divergences infrarouges. Un bon exemple est fourni par la formule (60.a) donnant le potentiel  $V(r)$  à courte distance : même si  $mr \rightarrow 0$ , il n'est pas possible de prendre la limite  $m = 0$ , alors que dans ce domaine la masse de l'électron n'est plus pertinente. Cette difficulté est uniquement conséquence du schéma de renormalisation, et ne se produit pas par exemple dans le schéma  $MS$ .

## EXERCICES

1) En adaptant le calcul du paragraphe (X-C.1) au cas de la diffusion d'une particule (relativiste) par un potentiel, démontrer la relation (25).

## 2) Théorème de Furry

(a) Utiliser l'unicité des représentations irréductibles des relations d'anticommutation (XI.11) des matrices  $\gamma_\mu$  pour montrer l'existence d'une matrice  $C$  (appelée matrice de conjugaison de charge) telle que :

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T.$$

(b) En déduire :  $C S_F(x-y) C^{-1} = [S_F(y-x)]^T$ .

(c) Soit une boucle électronique à laquelle s'attache un nombre impair de photons. Montrer que l'expression analytique du graphe correspondant est nulle.

3) Photoproduction de mésons- $\pi^0$ 

On se propose de calculer la section efficace de production de mésons  $\pi^0$  dans la réaction de photoproduction :

$$\gamma(k) + \text{proton}(p) \rightarrow \text{méson } \pi^0(q) + \text{proton}(p')$$

à partir du lagrangien d'interaction phénoménologique :

$$\mathcal{L}_1(x) = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu - iG \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi.$$

(Ce lagrangien ne doit pas être pris au sérieux ; il donne de très mauvais résultats, sauf au seuil de production. L'objectif de l'exercice est avant tout de donner un exemple de calcul de section efficace qui ne présente pas trop d'algèbre fastidieuse.)

Dans  $\mathcal{L}_1(x)$ ,  $\psi$  est le champ du proton,  $\varphi$  celui du méson  $\pi^0$ ,  $e$  la charge du proton et  $G$  une constante de couplage telle que  $G^2/4 \approx 15$ .

(a) Dessiner les graphes de Feynman contribuant à la réaction à l'ordre  $eG$  et donner leur expression analytique. Vérifier que la somme  $\mathcal{M}_\mu$  de ces deux graphes obéit bien à la condition  $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$  quand les protons  $p$  et  $p'$  sont sur couche de masse ( $p^2 = p'^2 = m^2$ ).

(b) Calculer la section efficace  $d\sigma/d\Omega$  de la photoproduction pour des photons et des protons non polarisés, à l'ordre  $(eG)^2$ . Calculer numériquement et dessiner  $d\sigma/d\Omega$  en fonction de  $\theta$  dans le référentiel du centre de masse, pour une énergie  $E_\gamma = 300$  MeV dans le référentiel du laboratoire. Comparer avec les résultats expérimentaux et commenter.

Suggestion : utiliser  $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$  pour remplacer la somme sur les polarisations du photon par  $-g_{\mu\nu}$ .

Réponse :

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |e_\mu^{(s)} \mathcal{M}^\mu|^2 = e^2 G^2 \left[ 2 m^2 \mu^2 \left( \frac{1}{(s-m^2)^2} + \frac{1}{(u-m^2)^2} \right) - \frac{(t-\mu^2)^2 + 2 \mu^2 (t-2m^2)}{(s-m^2)(u-m^2)} \right]$$

où  $\mu$  est la masse du méson  $\pi^0$ ,  $m$  celle du proton,  $s = (p+k)^2$ ,  $u = (p'-k)^2$  et  $t = (q-k)^2$ .

#### 4) Etude du propagateur du photon <sup>(5)</sup>

(a) Effectuer l'intégration sur  $x$  dans l'expression (57) de  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  et obtenir le résultat final sous la forme ( $q^2 < 4m^2$ ) :

$$\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{8}{3} - X^2 - \frac{1}{2} (3 - X^2) X \ln \left| \frac{1+X}{1-X} \right| \right]$$

avec  $X = (1 - 4m^2/q^2)^{1/2}$ . On pourra utiliser le changement de variables  $y = 1 - 2x$ .

(b) Lorsque  $q^2 \geq 4m^2$ ,  $\bar{\omega}_R^{(1)}$  acquiert une partie imaginaire. En intégrant par parties et en utilisant le changement de variables  $s = 4m^2/(1-y^2)$ , mettre  $\bar{\omega}_R^{(1)}$  sous la forme :

$$\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) = \frac{\alpha q^2}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{1}{s - q^2 + i\varepsilon} \left( 1 + \frac{2m^2}{s} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

et en déduire que  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  obéit à une relation de dispersion avec une soustraction, tandis que sa partie imaginaire est donnée par :

$$\frac{1}{\pi} \text{Im } \bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \theta(q^2 - 4m^2).$$

(c) Relier  $\text{Im } \bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  au « taux de désintégration »  $\Gamma(q^2)$  d'un photon virtuel de masse  $q^2$  en une paire électron-positron (cf. X-63) :

$$\sqrt{q^2} \text{Im } \bar{\omega}_R^{(1)}(q^2) = \Gamma(q^2).$$

#### 5) Corrections de polarisation du vide au potentiel de Coulomb <sup>(6)</sup>

(a) On se propose de calculer le potentiel  $V(r)$  en tenant compte de la correction de polarisation du vide à l'ordre d'une boucle, dans les limites  $mr \ll 1$  et  $mr \gg 1$ . On doit donc calculer la transformée de Fourier de  $\bar{\omega}_R^{(1)}(q^2)$  à la limite statique  $q^2 = -\mathbf{q}^2$ . En déformant le contour d'intégration le long de l'axe imaginaire positif, montrer que la correction  $\delta V(r)$  au potentiel de Coulomb peut s'écrire :

$$\delta V(r) = \frac{e}{4\pi r} \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty dx e^{-2mrx} \left( 1 + \frac{1}{2x^2} \right) \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}.$$

(b) Démontrer les expressions (60.a) et (60.b) dans les cas limites  $mr \ll 1$  et  $mr \gg 1$ . Dans le premier cas, on introduira un paramètre  $x_1$  tel que  $(mr)^{-1} \gg x_1 \gg 1$  et on décomposera l'intégrale en  $\int_1^{x_1} + \int_{x_1}^\infty$ .

6) (a) Démontrer l'identité (souvent utile)

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} - \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m}.$$

(b) En utilisant cette identité sous la forme :

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \not{k} = 1 - \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} (\not{p} - m)$$

ainsi que l'équation de Dirac, démontrer l'équation (82) donnant la partie dépendante de jauge du vertex électron-proton.

### 7) Comportement à grand $q^2$ du facteur de forme $F_1(q^2)$

On se propose de déterminer le comportement pour  $q^2 \rightarrow \pm \infty$  du facteur de forme  $F_{1R}(q^2)$ . Afin de simplifier les calculs, on se placera dans le cas  $m = 0$  (pour le cas  $m \neq 0$ , cf. Itzykson-Zuber, chapitre 7). On étudie d'abord la limite  $q^2 \rightarrow -\infty$ , avec  $q^2 = -Q^2$  et on renormalise sur couche de masse :  $F_{1R}(q^2 = 0) = 0$ .

(a) Montrer que l'on peut prendre la limite  $m = 0$  dans (81.a), ce qui simplifie la formule donnant  $F_{1R}(q^2)$  :

$$F_{1R}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int dx dx' \left\{ -\ln \frac{xx' Q^2 + \lambda^2(1-x-x')}{\lambda^2(1-x-x')} - \frac{Q^2(1-x)(1-x')}{xx' Q^2 + \lambda^2(1-x-x')} \right\}.$$

(b) En déduire :

$$F_{1R}(Q^2) = \frac{2\alpha}{3\pi} \left[ -\frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + \frac{3}{2} \ln \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{3} + O \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \right].$$

Comment doit-on modifier ce résultat pour  $q^2 \rightarrow +\infty$  ?

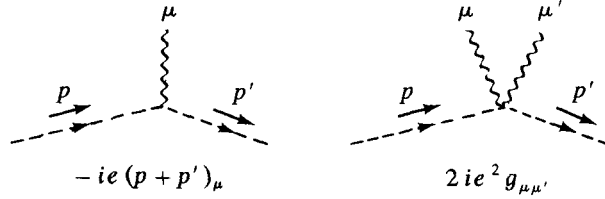
### 8) Electrodynamique des particules scalaires

(a) Partant du lagrangien libre du champ scalaire chargé :

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

obtenir le lagrangien d'un champ scalaire chargé couplé au champ électroma-

gnétique ainsi que les règles de Feynman :



(b) Calculer dans le laboratoire la section efficace différentielle de l'effet Compton sur un méson  $\pi^+$  à l'ordre  $e^4$ , en supposant les photons initiaux non polarisés :

$$\gamma(k) + \pi^+(p) \rightarrow \gamma(k') + \pi^+(p') .$$

On admettra (ce qui n'est pas le cas) que les mésons- $\pi$  sont couplés de façon ponctuelle au photon.

(Suggestion : choisir  $\varepsilon_\mu^{(s)} \varepsilon_\mu'^{(s')}$  de telle sorte que  $\varepsilon \cdot p = \varepsilon' \cdot p = 0$ .)

(c) Calculer la section efficace de la réaction :

$$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

à l'ordre  $e^4$ , en supposant que les électrons initiaux ne sont pas polarisés ; montrer que :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8q^2} \sin^2 \theta .$$

Quel serait la valeur du rapport  $R$  (cf. B.3) si les quarks avaient un spin zéro ?

(d) Calculer la correction à une boucle au propagateur du photon. Vérifier que le résultat est bien transverse.

(e) Examiner la renormalisabilité de l'électrodynamique des particules scalaires. Montrer en particulier que l'on doit introduire un contre-terme en  $(\varphi^\dagger \varphi)^2$ . Evaluer la partie divergente de ce contre-terme à l'ordre d'une boucle.

### 9) Identités de Ward et équations du mouvement <sup>(7)</sup>

(a) Montrer que les équations du mouvement (X.51) peuvent s'écrire :

$$\int \mathcal{D}B e^{iS[B]} \left( \frac{\delta S}{\delta B(x)} X - i \frac{\delta X}{\delta B(x)} \right) = 0$$

où  $B$  désigne un des champs  $(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$  et  $X$  un produit de champs :  $B(y_1) \dots B(y_n)$ . Il faudra toutefois faire attention aux relations d'anticommuation des variables de Grassmann.

(b) En utilisant l'équation donnant  $\delta S / \delta A_\mu$  ainsi que :

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} \psi - \bar{\psi} \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} = -i \partial_\mu [\bar{\psi} \gamma_\mu \psi]$$

établir la relation :

$$\partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \left( \frac{1}{a} \square + \lambda^2 \right) (\partial_\mu A^\mu) - ie \frac{\delta S}{\delta \psi} \psi + ie \bar{\psi} \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}}.$$

(c) En écrivant les équations du mouvement pour  $\langle 0 | T((\partial_\mu A^\mu) X) | 0 \rangle$  puis pour  $\langle 0 | T\left(\frac{\delta S}{\delta \psi} \psi X\right) | 0 \rangle$ , démontrer la forme générale des identités de Ward :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{a} \square_x + \lambda^2 \right) \langle 0 | T(\partial_\mu A^\mu(x) X) | 0 \rangle &= \\ &= i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T\left(\frac{\delta X}{\delta A_\mu(x)}\right) | 0 \rangle - e \langle 0 | T\left(\bar{\psi}(x) \frac{\delta X}{\delta \bar{\psi}(x)}\right) | 0 \rangle \\ &\quad + e \langle 0 | T\left(\psi(x) \frac{\delta X}{\delta \psi(x)}\right) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

(d) Montrer que cette relation est bien identique à (102).

#### 10) Identités de Ward pour le vertex à 4 photons et l'effet Compton <sup>(8)</sup>

(a) En appliquant l'identité (108) au cas  $n = 0$ ,  $m = 3$ , et en utilisant (109), démontrer l'identité de Ward pour le vertex propre à quatre photons :

$$k_1^{\mu_1} \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{(0,4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$$

(Ne pas oublier les termes disconnectés de  $G^{(0,4)}$ .)

(b) On applique maintenant l'identité (108) au cas  $n = 1$ ,  $m = 2$ , correspondant à l'effet Compton (ou à la production d'une paire  $e^+ e^-$  par deux photons). Soit  $G_{c, \mu\mu'}^{(2,2)} = \mathbb{C}_{\mu\mu'}$  la fonction de Green connexe amputée de ses propagateurs externes (figure 20). Démontrer la relation :

$$\begin{aligned} k^\mu \mathbb{C}_{\mu\mu'}(k, -k'; p, -p') &= \\ &= ie^2 \Gamma_{\mu'}(p+k, p') S(p+k) S^{-1}(p) - \\ &- ie^2 S^{-1}(p') S(p'-k) \Gamma_\mu(p, p'-k) \end{aligned}$$

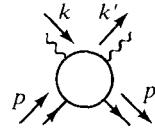


Figure 20.

L'amplitude Compton.

où  $\Gamma_\mu$  est le vertex propre électron-photon (cf. 113). Vérifier cette identité à l'approximation en arbres.

(c) Montrer que pour  $k \rightarrow 0$ , l'amplitude Compton vers l'avant ( $k = k'$ ) s'exprime uniquement en fonction de l'énergie propre  $\Sigma(p)$ .

11) On écrit le propagateur inverse et le vertex propre à transfert nul et sur couche de masse ( $\not{p} = m$ ) sous la forme :

$$iS^{-1}(p) = \not{p} - m - A(p^2) - (\not{p} - m) B(p^2)$$

$$\Gamma_\mu(p, p)|_{\not{p}=m} = \gamma_\mu (1 + F_1(0) + F_2(0)) - \frac{\not{p}_\mu}{m} F_2(0).$$

Utiliser l'identité (114) pour relier  $F_1(0)$  et  $F_2(0)$  à  $A'(m^2)$  et  $B(m^2)$ . En déduire que la renormalisation sur couche de masse et la condition  $Z_1 = Z_2$  imposent  $F_{1R}(0) = 0$ .

## 12) Dépendance de jauge de $Z_2$ (9)

(a) Résultats préliminaires :

(i) Montrer que la fonction de Green  $\langle 0 | T(F_{\mu\nu}^0(x) F_{\delta}^{\mu\nu}(y)) | 0 \rangle$  est indépendante du paramètre de jauge  $\alpha_0$  (on pourra revenir à l'argument du chapitre XI, paragraphe D.2). En déduire qu'il en est de même pour la partie transverse du propagateur  $D_{\mu\nu}^0$ , et utiliser ce résultat pour montrer que  $Z_3$  est indépendant de  $\alpha$ .

(ii) Supposons que le lagrangien dépende d'un paramètre  $\alpha$ . Montrer que la dépendance en  $\alpha$  des fonctions de Green est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle 0 | T(X) | 0 \rangle = i \left[ \langle 0 | T \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} X \right) | 0 \rangle - \langle 0 | T(X) | 0 \rangle \times \langle 0 | \frac{\partial S}{\partial \alpha} | 0 \rangle \right] = i \langle 0 | T \left( : \frac{\partial S}{\partial \alpha} : X \right) | 0 \rangle$$

où le symbole  $:$  indique que l'on soustrait la valeur moyenne sur le vide.

(iii) Montrer que l'insertion  $\int d^4x : \varphi(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} :$  compte le nombre de lignes externes des fonctions de Green. Plus précisément :

$$[Z(0)]^{-1} \int d^4x \int \mathcal{D}\varphi : \varphi(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) e^{iS} = -iN \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_N)) | 0 \rangle .$$

(b) On se place pour simplifier dans le cas où la masse de l'électron est égale à zéro ( $m = 0$ ) et on utilise le schéma de soustraction minimal. Démontrer l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle 0 | T(X) | 0 \rangle = \frac{i}{2} \int d^4x \langle 0 | T(: \varphi^2(x) : \Delta^2 X) | 0 \rangle - N_\psi \langle 0 | T(X) | 0 \rangle \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \alpha}$$

où  $\Delta X$  est la variation de  $X$  dans une transformation de jauge (cf. (102)) et  $N_\psi$  le nombre de champs  $\psi$  dans  $X$ .

(c) En prenant  $X = \psi(y) \bar{\psi}(z)$  démontrer l'identité, écrite sous forme graphique (figure 21) :

The figure shows a diagrammatic equation for the derivative of the two-point function with respect to the gauge parameter  $\alpha$ . The equation is:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle 0 | T(\psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}$$

Diagram 1: A horizontal line with a shaded blob in the middle. A dashed line labeled 'i' connects point 'z' on the left to point 'y' on the right, passing over the blob. The line starts with a factor of 'ie' and ends with a factor of '-ie'.

Diagram 2: A horizontal line with a shaded blob in the middle. A dashed loop labeled 'i' is attached to the top of the blob. The line starts with a factor of '(ie)^2'.

Diagram 3: A horizontal line with a shaded blob in the middle. A dashed loop labeled '(-ie)^2' is attached to the bottom of the blob. The line ends with a factor of 'd ln Z2 / d alpha'.

Diagram 4: A horizontal line with a shaded blob in the middle.

Figure 21. Equation pour  $\frac{\partial \ln Z_2}{\partial \alpha}$ .

Remarquant que l'intégrale donnant le premier graphe est convergente, en déduire dans le schéma *MS* :

$$Z_2(a) = Z_2(a=0) \exp \left[ \frac{-\alpha a}{2\pi\epsilon} \right].$$

Vérifier ce résultat à l'ordre d'une boucle (cf.(74)).

### 13) Fermions de Majorana et lagrangien supersymétrique <sup>(10)</sup>

(a) La matrice de conjugaison de charge  $C$  définie à l'exercice 2 permet de relier les solutions d'énergie positive et négative de l'équation de Dirac :

$$u(\mathbf{p}, s) = C \bar{v}^T(\mathbf{p}, s); \quad v(\mathbf{p}, s) = C \bar{u}^T(\mathbf{p}, s).$$

Vérifiez-le dans le cas de la représentation de Dirac où  $C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Noter les conventions de phase pour les spineurs lorsque  $\mathbf{p} = 0$ .

(b) On écrit la décomposition de Fourier d'un champ de Majorana  $\lambda(x)$  sous la forme :

$$\lambda(x) = \sum_s \int d\tilde{p} [b_s(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}, s) e^{ipx}].$$

Vérifier que  $\lambda(x)$  est égal à son conjugué de charge  $\lambda^c(x)$  :

$$\lambda(x) = \lambda^c(x) = C \bar{\lambda}^T(x).$$

Le champ  $\lambda(x)$  a seulement deux degrés de liberté, et non quatre : les fermions de Majorana sont identiques aux antifermions.

(c) On se propose d'établir les règles de Feynman pour un champ de Majorana couplé à un champ scalaire :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (i\vec{\partial} - m) \lambda - \frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + g (\bar{\lambda} \Gamma \lambda) \varphi$$

où  $\Gamma = 1$  ou  $i\gamma_5$ . Etablir les règles suivantes pour les contractions :

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\ y \quad \quad \quad x \end{array} & \overline{\lambda(x) \lambda(y)} = S_F(x-y) \\ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\ y \quad \quad \quad x \end{array} & \overline{\lambda(x) \lambda(y)} = -S_F(x-y) C \\ \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\ y \quad \quad \quad x \end{array} & \overline{\bar{\lambda}(x) \bar{\lambda}(y)} = C^{-1} S_F(x-y) \end{array}$$

Calculer l'amplitude de probabilité pour la désintégration d'un méson virtuel en deux fermions :

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{p}_1, s_1 \\ \quad \quad \quad \text{p}_2, s_2 \end{array} = -2ig \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1) \Gamma v(\mathbf{p}_2, s_2) = -2ig \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1) \Gamma C \bar{u}^T(\mathbf{p}_2)$$

(à une ambiguïté de signe près).

Montrer que dans le calcul de la boucle de la figure 22, on peut associer au vertex un facteur  $(-2ig)$ , à condition de tenir compte d'un facteur de symétrie égal à  $1/2$ .



Figure 22. Correction d'énergie propre au propagateur du méson.

(d) Soit le lagrangien supersymétrique <sup>(11)</sup> :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 (A^2 + B^2) + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (i \not{\partial} - m) \lambda - \\ - g m A (A^2 + B^2) - \frac{1}{2} g^2 (A^2 + B^2)^2 - g \bar{\lambda} (A - i \gamma_5 B) \lambda$$

où  $A$  ( $B$ ) est un champ scalaire (pseudoscalaire). Etablir les règles de Feynman suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad A \end{array} & = -12 ig^2 & \begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ B \quad B \end{array} = -4 ig^2 \\ \\ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{---} A & = -2 ig & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{---} B = -2 g \gamma_5 \end{array}$$

Montrer que la correction  $\delta m$  au propagateur d'un méson présente seulement une divergence logarithmique. (On utilisera une régularisation avec cut-off : pourquoi ?) Montrer qu'il suffit d'une renormalisation du champ pour rendre la théorie finie à l'ordre d'une boucle. Ces résultats se généralisent à un nombre de boucles quelconque <sup>(11)</sup>.

## NOTES ET RÉFÉRENCES

On lira avant toute chose le petit livre de R. Feynman, *Q.E.D.*, Princeton University Press (1985) (Traduction française : *Lumière et matière, une étrange histoire*, InterEditions, 1987.) Les règles de Feynman ainsi que leur application classique à l'effet Compton sont discutées par Bjorken-Drell (chapitre 7) et par Itzykson-Zuber (chapitres 5 et 6). On pourra comparer les calculs à une boucle de Bjorken-Drell (chapitre 8) et de Itzykson-Zuber (chapitre 7), qui utilisent une régularisation avec cut-off, à ceux du présent exposé. Un exemple de traitement des divergences infrarouges est donné par L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie quantique relativiste*, Editions Mir (1973), paragraphe 118. L'article classique sur les divergences infrarouges en électrodynamique est de D. Yennie,

S. Frautschi et H. Suura, *Ann. Phys.*, **13**, 379 (1961). La renormalisabilité de l'électrodynamique est examinée par Itzykson-Zuber (chapitres 7 et 8) et Collins (chapitre 12). La discussion des identités de Ward est adaptée de 'tHooft et Veltman, section 11. Une référence utile est également E. de Rafael, *Lectures on Quantum Electrodynamics*, Université de Barcelone (1976).

<sup>(1)</sup> J. M. Lévy-Leblond, *Comm. Math. Phys.*, **6**, 286 (1967).

<sup>(2)</sup> P. Schwinger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 1679 (1981) ; T. Kinoshita, *Phys. Rev.*, **D27**, 867 (1983).

<sup>(3)</sup> D. Duke et R. Roberts, *Phys. Reports*, **120**, 276 (1985).

<sup>(4)</sup> Bogolioubov-Chirkov, chapitre 4.

<sup>(5)</sup> de Rafael, chapitre 7.

<sup>(6)</sup> Landau-Lifschitz, paragraphe 112.

<sup>(7)</sup> Collins, chapitre 12.

<sup>(8)</sup> de Rafael, chapitre 6.

<sup>(9)</sup> Collins, chapitre 12. B. Lautrup, *Nuclear Physics*, **B105**, 23 (1976).

<sup>(10)</sup> Cf. par exemple H. Haber et G. Kane, *Physics Reports*, **117**, 75 (1985) (appendice D).

<sup>(11)</sup> Ce lagrangien est connu sous le nom de lagrangien de Wess-Zumino : J. Wess et B. Zumino, *Phys. Lett.*, **131B**, 52 (1974). Cf. également Haber et Kane, appendice E et J. Iliopoulos et B. Zumino, *Nucl. Phys.*, **B76**, 310 (1974).



## CHAPITRE XIII

# **Théories de jauge non abéliennes**

Les théories de jauge non abéliennes étaient, en 1986, à la base du « modèle standard » de la physique des particules élémentaires ; ce « modèle standard » comporte deux volets :

- (i) le modèle de Glashow-Salam-Weinberg (GSW) qui unifie les interactions électromagnétiques et faibles en interactions électro-faibles ;
- (ii) la chromodynamique quantique (QCD) qui, selon l'expression consacrée, est la « théorie présumée des interactions fortes ».

On a tenté de rassembler le modèle GSW et la chromodynamique quantique dans des théories unifiées des interactions faibles, électromagnétiques et fortes ; ces théories dites de « grande unification » ont aussi comme ingrédient de base des théories de jauge non abéliennes. Cependant il n'existe pas à l'heure actuelle de consensus sur une telle grande unification, car le modèle le plus simple ( $SU(5)$ ) est en désaccord avec les données expérimentales sur la stabilité du proton.

La complexité des théories de jauge non abéliennes est supérieure par un ordre de grandeur au moins à celle de l'électrodynamique quantique : il a fallu une bonne vingtaine d'années après leur découverte initiale par Yang et Mills <sup>(1)</sup> en 1954 pour que l'on arrive à bien les contrôler en théorie des perturbations, et il reste encore nombre de problèmes ouverts dans le domaine non perturbatif. De plus le champ d'application de ces théories est très vaste. Il n'est donc pas question de donner en un seul chapitre autre chose qu'une introduction très succincte ; un exposé un peu approfondi exigerait sans doute un volume équivalent à ce livre. L'objectif poursuivi dans ce chapitre est double :

- (i) donner une première approche élémentaire qui permette au

lecteur d'aborder plus facilement les exposés spécialisés cités en référence ;

(ii) détailler un certain nombre de calculs fondamentaux (phénomène de Higgs, fonction  $\beta(g)$ , équation d'Altarelli-Parisi), ce qui pourra servir d'introduction aux articles consacrés plus spécifiquement à la physique des particules.

Ce chapitre débute par un exposé de la théorie classique (paragraphe A), suivi d'une discussion de la quantification (paragraphe B). Cependant l'invariance de jauge et la renormalisation sont traitées de façon très schématique. Le paragraphe C traite du modèle GSW, restreint au cas des leptons : l'objectif est avant tout de montrer comment une symétrie brisée permet, à travers le phénomène de Higgs, la construction d'une théorie renormalisable de bosons vectoriels massifs. Le paragraphe D est consacré à la chromodynamique quantique : on détaille le calcul de la fonction  $\beta(g)$  à l'ordre d'une boucle, ce qui permet de montrer la propriété cruciale de liberté asymptotique. L'exemple de l'annihilation  $e^+e^-$  à l'ordre  $\alpha_s$  est également étudié en détail. Enfin le paragraphe E donne un bref aperçu des tentatives actuelles pour passer dans le domaine non perturbatif à l'aide de calculs sur réseau. Les paragraphes C et E sont largement indépendants du paragraphe B, et peuvent être abordés immédiatement après la lecture du paragraphe A.

## A. CHAMPS DE JAUGE NON ABÉLIENS : THÉORIE CLASSIQUE

Les théories de jauge non abéliennes utilisent comme ingrédient fondamental les groupes de Lie compacts ; afin de donner une introduction élémentaire, nous résumerons brièvement les propriétés du groupe de Lie non trivial le plus simple, le groupe  $SU(2)$ . Cet exemple permettra d'introduire les notions (générateurs infinitésimaux...) dont nous aurons besoin par la suite. Le lecteur familier de la théorie des groupes de Lie peut sauter directement au paragraphe A.2 après un coup d'œil sur les notations.

### A.1. Le groupe $SU(2)$

Considérons le groupe formé des matrices  $2 \times 2$ , unitaires et de déterminant 1, que nous pouvons écrire en fonction de quatre nombres

complexes  $a, b, c, d$  (en tout huit paramètres) :

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ces nombres  $a, b, c, d$  vérifient les relations :

$$ad - bc = 1 \quad (2)$$

ainsi que :

$$a = d^* ; \quad b^* = -c. \quad (3)$$

Il reste finalement trois paramètres indépendants ; le nombre de paramètres indépendants est appelé *dimension* du groupe de Lie : la dimension de  $SU(2)$  est égale à 3. Combinant (2) et (3) on obtient aussi l'identité :

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

qui implique que le domaine de variation de  $a$  et  $b$  est fini et fermé : les paramètres  $a$  et  $b$  prennent leurs valeurs dans un domaine compact, d'où la dénomination : groupe de Lie compact.

Examinons maintenant la matrice  $U$  au voisinage de l'identité en écrivant :

$$U = \mathbb{1} - i\xi ; \quad U^\dagger = \mathbb{1} + i\xi^\dagger. \quad (4)$$

Les conditions  $UU^\dagger = \mathbb{1}$  et  $\det U = 1$  montrent que la matrice  $\xi$  est hermitique et de trace nulle :

$$\xi = \xi^\dagger ; \quad \text{Tr } \xi = 0. \quad (5)$$

Toute matrice obéissant à (5) peut s'écrire en fonction des matrices de Pauli  $\tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$  :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

en introduisant trois paramètres réels  $\Lambda_a$  (infinitésimaux pour le moment, mais qui pourront ultérieurement prendre des valeurs finies) :

$$\xi = \Lambda_a (\tau_a / 2) ; \quad \Lambda_a = \text{Tr } (\xi \tau_a) \quad (7)$$

(rappelons l'identité vérifiée par les matrices de Pauli :

$$\tau_a \tau_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc} \tau_c. \quad (8)$$

L'ensemble des paramètres  $\Lambda_a$  permet de définir un vecteur unitaire  $\hat{n}$  par :

$$\Lambda_a = \varepsilon \hat{n}_a ; \quad \varepsilon = (\Lambda_a \Lambda_a)^{1/2}$$

où  $\varepsilon \ll 1$ . Un élément du groupe  $SU(2)$  peut s'écrire comme produit de  $N$  éléments infinitésimaux à la limite  $N \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} U_{\hat{n}}(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ U_{\hat{n}} \left( \frac{\theta}{N} \right) \right]^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i}{2} \frac{\theta}{N} \hat{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \right)^N = e^{-i\theta(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\tau})/2} \end{aligned} \quad (9)$$

et inversement il est facile de montrer que tout élément du groupe peut se mettre sous la forme (9). La matrice  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{n}$  est appelée *générateur infinitésimal* des transformations suivant la direction  $\hat{n}$  ; il y a évidemment autant de générateurs infinitésimaux indépendants que de paramètres, soit trois générateurs infinitésimaux  $\tau_a$  dans le cas de  $SU(2)$ . Les relations de commutation de ces générateurs infinitésimaux :

$$\left[ \frac{1}{2} \tau_a, \frac{1}{2} \tau_b \right] = i \varepsilon_{abc} \frac{1}{2} \tau_c \quad (10)$$

constituent l'*algèbre de Lie* du groupe. Il convient à ce point d'être un peu plus précis sur la terminologie. Le groupe  $SU(2)$  existe indépendamment de sa réalisation (ou représentation) par des matrices ; il est défini par une certaine loi de composition donnant la multiplication de deux éléments ainsi que l'inverse d'un élément. On peut faire correspondre à tout élément  $g$  de  $SU(2)$  une matrice  $D(g)$  agissant dans un espace à  $n$  dimensions telle que :

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) . \quad (11)$$

L'ensemble de ces matrices forme une *représentation* de dimension  $n$  du groupe de Lie ; si la correspondance est biunivoque, on a une représentation fidèle, et si les matrices  $D$  sont unitaires, une représentation unitaire. En fait ce que l'on vient de décrire ci-dessus n'est autre que la représentation *fondamentale*. Il existe évidemment une représentation triviale de dimension 1, qui à tout élément  $g$  fait correspondre le nombre 1. Une autre représentation bien connue (non fidèle) est obtenue à l'aide des matrices de rotation dans un espace à trois dimensions, qui forment le groupe  $SO(3)$ . Les groupes  $SU(2)$  et  $SO(3)$  sont homomorphes : à chaque élément de  $SO(3)$  correspondent deux éléments de  $SU(2)$ .

Montrons rapidement ces propriétés classiques : soit  $\mathbf{x}$ , de composantes  $x_a$ , un vecteur de l'espace à trois dimensions et construisons la matrice  $2 \times 2$  hermitique et de trace nulle :

$$X = \frac{1}{2} x_a \tau_a . \quad (12)$$

Définissons la matrice  $X_{\mathbf{n}}(\theta)$  et le vecteur  $\mathbf{x}_{\mathbf{n}}(\theta)$  par les équations :

$$X_{\mathbf{n}}(\theta) = U_{\mathbf{n}}(\theta) X U_{\mathbf{n}}^{\dagger}(\theta) = \frac{1}{2} x_{\mathbf{n}a}(\theta) \tau_a . \quad (13)$$

En utilisant (10) on montre que  $\mathbf{x}_{\mathbf{n}}(\theta)$  vérifie la relation :

$$\frac{d\mathbf{x}_{\mathbf{n}}(\theta)}{d\theta} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{n}}(\theta) \quad (14)$$

qui implique que  $\mathbf{x}_{\mathbf{n}}(\theta)$  se déduit de  $\mathbf{x}$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\hat{\mathbf{n}}$ . Ceci établit la correspondance entre les éléments de  $SU(2)$  et les rotations à trois dimensions, et de plus l'équation (14) donne les générateurs infinitésimaux de la représentation de dimension 3 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (15)$$

Les matrices  $T_a$  ont la même loi de commutation que les matrices  $\frac{1}{2} \tau_a$  :

$$[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c . \quad (16)$$

D'autre part les éléments de matrice  $(T_a)_{bc}$  sont donnés explicitement par :

$$(T_a)_{bc} = -i \varepsilon_{abc} . \quad (17)$$

Enfin, prenant  $\theta = 2\pi$  on constate qu'à la rotation identité correspondent deux matrices distinctes de  $SU(2)$ , les matrices  $+\mathbb{1}$  et  $-\mathbb{1}$ .

Nous venons de construire explicitement trois représentations de  $SU(2)$ , de dimension 1, 2 et 3 ; la théorie usuelle du moment angulaire nous apprend qu'il en existe une infinité, de dimension 1, 2, 3, 4, ...,  $(2j+1)$ , ... correspondant à la description d'un moment angulaire 0,  $1/2$ , 1,  $3/2$ , ...,  $j$ , ... Dans un espace de dimension  $(2j+1)$ , les générateurs de l'algèbre de Lie seront représentés par des matrices  $(2j+1) \times (2j+1)$  vérifiant les relations de commutation (16). Par abus de langage, on appelle souvent « élément de la représentation de

dimension  $(2j + 1)$  » un vecteur de base de l'espace vectoriel, alors qu'en toute rigueur les éléments de la représentation sont des matrices.

Dans le cas d'un groupe de Lie  $G$  de dimension  $r$ , on aura  $r$  générateurs infinitésimaux  $t_a$  vérifiant une algèbre :

$$[t_a, t_b] = i f_{abc} t_c \quad (18.a)$$

où les  $f_{abc}$ , qui généralisent les  $\varepsilon_{abc}$  de  $SU(2)$ , sont appelées *constantes de structure* du groupe (ou de l'algèbre) de Lie. Ces constantes de structure sont réelles et antisymétriques pour toute permutation impaire de deux indices :

$$f_{abc} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba} = f_{bca} = f_{cab} . \quad (19)$$

On utilisera uniquement les représentations unitaires  $U(g)$  du groupe  $G$  (d'ailleurs pour un groupe de Lie compact toute représentation est équivalente à une représentation unitaire) ; sauf mention explicite du contraire, on supposera toujours qu'il s'agit de représentations irréductibles (cf. références pour la définition). Dans une telle représentation, les générateurs infinitésimaux seront représentés par des matrices hermitiques  $T_a$  vérifiant les relations de commutation :

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c . \quad (18.b)$$

Dans la *représentation adjointe* du groupe de Lie, les générateurs infinitésimaux sont représentés par des matrices  $r \times r$  données par (cf. (17)) :

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc} . \quad (20)$$

Dans la représentation adjointe, les générateurs infinitésimaux sont donc représentés par des matrices imaginaires pures, et les matrices  $U(g)$  sont réelles et orthogonales. Dans le cas de  $SU(2)$ , les matrices de la représentation adjointe de dimension 3 ne sont autres que les matrices de rotation, qui sont bien réelles et orthogonales.

En physique des particules élémentaires, les groupes les plus utilisés sont du type  $SU(N)$  : ce sont les groupes de matrices  $N \times N$  unitaires et de déterminant 1. Ce sont des groupes à  $(N^2 - 1)$  paramètres ; en dehors du cas  $N = 2$ , il existe *deux* représentations fondamentales de dimension  $N$ , notées  $N$  et  $\bar{N}$ . Les générateurs infinitésimaux des représentations fondamentales sont en général normalisés par la relation :

$$\text{Tr} (T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} . \quad (21)$$

## A.2. Transport parallèle et dérivation covariante

Revenons sur le cas de l'électromagnétisme traité au chapitre XI en prenant pour exemple la mécanique quantique élémentaire. Soit  $\varphi(\mathbf{x})$  la fonction d'onde d'une particule chargée, par exemple un électron ; il est possible de modifier de façon globale, c'est-à-dire de façon identique en tout point d'espace, la fonction d'onde de la particule sans modifier les résultats physiques. Il n'est pas possible de le faire localement : modifier de  $180^\circ$  la phase de la fonction d'onde au voisinage d'un des deux trous dans une expérience de trous d'Young bouleverse la figure d'interférences. Cependant, ainsi que nous l'avons déjà vu, une telle modification locale est possible si les particules sont couplées à un champ électromagnétique. En effet, le propagateur de l'équation de Schrödinger (cf. VIII-B.1)  $F_0(2, 1)$  en l'absence de champ :

$$F_0(2, 1) = \langle \mathbf{x}_2 | U(t_2, t_1) | \mathbf{x}_1 \rangle$$

est modifié en présence du champ : si l'on calcule ce propagateur à l'aide d'une intégrale de chemin, le poids statistique de chaque trajet  $C$  entre les points (1) et (2) doit être multiplié par le facteur :

$$R(C ; \mathbf{A}) = e^{i \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}} \quad (22)$$

(la charge a été prise égale à l'unité afin d'alléger les notations). Une transformation de jauge :

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda$$

transforme  $R(C ; \mathbf{A})$  en  $R(C ; \mathbf{A}')$  :

$$R(C ; \mathbf{A}') = e^{-i\Lambda(\mathbf{x}_2)} R(C ; \mathbf{A}) e^{i\Lambda(\mathbf{x}_1)} \quad (23)$$

ce qui absorbe un changement local de la phase :

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi'(\mathbf{x}) = e^{-i\Lambda(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}) \quad (24)$$

et laisse invariantes les amplitudes de probabilité :

$$\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \psi^*(\mathbf{x}_2) F(2, 1) \varphi(\mathbf{x}_1).$$

Dans le langage de la géométrie différentielle (\*), le facteur

(\*) Le lecteur habitué à la géométrie différentielle reconnaîtra aussi en  $\mathbf{A}$  une connexion et en  $F_{\mu\nu}$  (paragraphe A.3) un tenseur de courbure.

$R(C ; A)$  effectue un « transport parallèle » de la fonction d'onde entre les points  $x_1$  et  $x_2$  : il permet une comparaison des phases entre ces deux points. Limitons-nous maintenant à un déplacement infinitésimal :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x} ; & \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x} + d\mathbf{x} \\ R(C ; A) &= 1 + iA \cdot d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (25)$$

Le transport parallèle de la fonction d'onde  $\varphi(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  a pour résultat  $\varphi'(\mathbf{x})$  :

$$\varphi'(\mathbf{x}) = (1 + iA \cdot d\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) . \quad (26)$$

La dérivée covariante  $D\varphi$  sera définie, non pas à l'aide de  $[\varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})]$ , mais à l'aide de  $[\varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x})]$  :

$$\varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot D\varphi . \quad (27)$$

Par construction  $\varphi'(\mathbf{x})$  se transforme comme  $\varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$  dans une transformation de jauge, ce qui assure que  $D\varphi$ , contrairement à  $\nabla\varphi$ , se transforme comme  $\varphi$  :

$$D' \varphi'(\mathbf{x}) = (\nabla - iA') \varphi'(\mathbf{x}) = e^{-iA(\mathbf{x})} D\varphi(\mathbf{x}) . \quad (28)$$

Les transformations de jauge (24) sont appelées abéliennes, car le produit de deux transformations commute. Le groupe de jauge est le groupe de Lie  $U(1)$ , paramétré par les nombres réels  $A$  dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

Nous allons maintenant généraliser ce qui précède au cas non abélien. Soit un groupe de Lie  $G$  compact, semi-simple et dont l'algèbre de Lie est définie par des constantes de structure  $f_{abc}$  : ce groupe sera appelé *groupe de jauge* de la théorie non abélienne. Nous utiliserons uniquement des représentations unitaires du groupe  $G$ , où les générateurs infinitésimaux sont représentés par des matrices hermitiques  $T_a$  vérifiant :

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c . \quad (18.b)$$

Un élément quelconque de la représentation s'écrira en fonction de paramètres réels  $\Lambda_a$ , sous la forme :

$$U(g) = e^{-i\Lambda_a T_a} . \quad (29)$$

Considérons un ensemble de champs classiques  $\{\varphi_i(x)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (on se place à nouveau dans l'espace de Minkowski) se transformant à l'aide d'une représentation de dimension  $n$  du groupe  $G$  :

$$[U(g) \varphi]_i(x) = [e^{-i\Lambda_a T_a}]_{ij} \varphi_j(x) . \quad (30)$$

L'indice  $i$  est un indice de symétrie interne, dont il n'est pas nécessaire de préciser la signification physique pour le moment. L'équation (30) définit une transformation de jauge globale non abélienne pour les champs  $\varphi_i$ , qui généralise la transformation de phase (XI.89) du cas abélien. Il est facile d'écrire des interactions invariantes par une telle transformation. Par exemple si  $G = SU(2)$ , si  $\varphi_i$  appartient à la représentation de dimension 2 et  $A_i^\mu$  à celle de dimension 3 (le champ  $\varphi_i$  est supposé scalaire de Lorentz ; on pourrait aussi bien prendre des exemples construits avec un champ spinoriel), les interactions :

$$\varphi_i^\dagger(x) \square \varphi_i(x) \quad \text{ou} \quad \varphi_j^\dagger(x) (\tau_i)_{jk} (\partial_\mu \varphi_k(x)) A_i^\mu(x)$$

sont manifestement invariantes par (30). Il n'en est plus de même si nous permettons à la transformation de jauge (30) de devenir *locale*, avec des paramètres  $\Lambda$  dépendant de  $x$  :

$$[U(g(x)) \varphi]_i(x) = [e^{-i\Lambda_a(x)T_a}]_{ij} \varphi_j(x). \quad (31)$$

Afin de pouvoir écrire des interactions invariantes, il faudra, comme dans le cas abélien, introduire un *champ de jauge*  $A_a^\mu(x)$ , dépendant de l'indice de symétrie interne  $a$  ; dans une représentation donnée on définira  $\mathcal{A}^\mu(x)$  par :

$$\mathcal{A}^\mu(x) = T_a A_a^\mu(x). \quad (32)$$

Le champ  $\mathcal{A}^\mu(x)$ , qui prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe, permet d'effectuer le transport parallèle ; dans le cas d'un trajet infinitésimal nous généralisons (25) par :

$$R(x + dx, x ; A) = 1 - i dx_\mu \mathcal{A}^\mu(x) \quad (33)$$

mais pour un trajet fini il faut prendre garde au fait que les  $\mathcal{A}^\mu(x)$  ne commutent pas entre eux. Le problème est exactement le même que celui de l'opérateur d'évolution (cf. chapitre IX) : au lieu de découper l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  intervalles  $T/N$ ,  $N \rightarrow \infty$ , on découpe le trajet  $C$  en  $N$  trajets infinitésimaux  $dx^\mu(l)$  (figure 1), et on définit  $R(C ; A)$  par

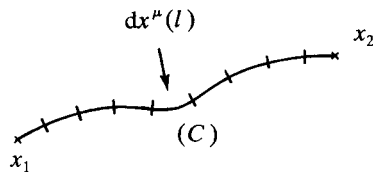


Figure 1.

la limite :

$$\begin{aligned} R(C ; A) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^N (1 - i \, dx^\mu(l) \, \mathcal{A}_\mu(l)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^N e^{-i \, dx^\mu(l) \, \mathcal{A}_\mu(l)} . \end{aligned}$$

Le résultat peut s'écrire formellement :

$$R(C ; A) = P \left( e^{-i \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{A}_\mu(x) \cdot dx^\mu} \right) \quad (34)$$

où le symbole  $P$  joue exactement le rôle du symbole  $T$  dans l'équation (IX.69). Comme dans le cas abélien, la connexion  $\mathcal{A}_\mu$  aura pour rôle de compenser les changements de phase locaux :

$$R(C ; A') = U(g(x_2)) R(C ; A) U^{-1}(g(x_1)) . \quad (35)$$

Afin de déduire de (35) la loi de transformation de  $\mathcal{A}^\mu$ , il suffit de prendre pour  $C$  un trajet infinitésimal :

$$\begin{aligned} 1 - i \, dx_\mu \mathcal{A}'^\mu &= U(g(x + dx)) (1 - i \, dx_\mu \mathcal{A}^\mu) U^{-1}(g(x)) = \\ &= 1 - i \, dx_\mu [i(\partial^\mu U) U^{-1} + U \mathcal{A}^\mu U^{-1}] \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{A}'_\mu = U(g) \mathcal{A}_\mu U^{-1}(g) + i[\partial_\mu U(g)] U^{-1}(g)} . \quad (36)$$

La loi de transformation (36) généralise la transformation de jauge (XI.92) du champ électromagnétique ; par la suite on écrira souvent  $\mathcal{A}_\mu^g$  au lieu de  $\mathcal{A}_\mu$ .

La loi de transformation (36) fait intervenir les matrices  $U(g)$  d'une représentation déterminée, et il semble a priori que cette loi dépende de la représentation considérée, ce qui serait fort ennuyeux : il faudrait introduire un champ  $A_a^\mu$  pour chaque représentation. Heureusement il n'en est rien, car la loi de transformation ne dépend que de l'algèbre de Lie du groupe ; on le voit aisément en prenant la forme infinitésimale de (36) :

$$\begin{aligned} U(g) &= \mathbb{1} - i\Lambda_a T_a \\ T_a \delta A_a^\mu &= -i\Lambda_a [T_a, T_b] A_b^\mu + (\partial_\mu \Lambda_a) T_a . \end{aligned}$$

Comme les générateurs  $T_a$  sont linéairement indépendants, on obtient :

$$\delta A_a^\mu = f_{abc} A_b A_c^\mu + \partial^\mu \Lambda_a \quad . \quad (37)$$

Lorsque  $A$  est indépendant de  $x$  (transformation de jauge globale) cette équation montre que  $A_a^\mu$  se transforme suivant la représentation adjointe du groupe  $G$  puisque dans cette représentation  $(T_a)_{bc} = -if_{abc}$ . Contrairement au cas abélien, le champ  $A_a^\mu$  n'est pas neutre pour la symétrie interne considérée : le champ électromagnétique ne transporte pas de charge, mais le champ  $A_a^\mu$  transporte les nombres quantiques associés à la symétrie considérée. C'est cette propriété qui rend les théories de jauge non abéliennes non linéaires dès le niveau classique : le principe de superposition n'y est plus valable.

La discussion qui précède peut paraître un peu longue, mais elle a l'avantage de donner directement le transport parallèle et la dérivation covariante ; dans un transport parallèle :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = R(x + dx, x; A) \varphi(x) \\ &= \varphi(x) - i(dx_\mu \mathcal{A}^\mu) \varphi(x) . \end{aligned}$$

Par construction (cf. (35)),  $\varphi'(x)$  se transforme comme  $\varphi(x + dx)$  dans (31), et on peut comparer valablement  $\varphi(x + dx)$  et  $\varphi'(x)$  ; en particulier on peut calculer immédiatement la dérivée covariante :

$$\varphi(x + dx) - \varphi'(x) = dx^\mu [\partial_\mu \varphi + i\mathcal{A}_\mu \varphi] = dx^\mu (D_\mu \varphi)$$

soit :

$$D^\mu = \partial^\mu \mathbb{1} + i\mathcal{A}^\mu = \partial^\mu \mathbb{1} + iT_a A_a^\mu \quad (38)$$

ou en rétablissant les indices :

$$D_{ij}^\mu = \partial^\mu \delta_{ij} + i(T_a)_{ij} A_a^\mu \quad . \quad (39.a)$$

La dérivée covariante vérifie par construction la propriété fondamentale :

$$D'_\mu \varphi'(x) = U(g(x)) D_\mu \varphi(x) \quad (40)$$

ce qui permet d'écrire immédiatement des interactions invariantes de jauge. On notera également que dans la représentation adjointe la

dérivée covariante s'écrit :

$$D_{ab}^{\mu} = \partial^{\mu} \delta_{ab} + f_{abc} A_c^{\mu} . \quad (39.b)$$

### A.3. Tenseur $F^{\mu\nu}$ et lagrangien

Afin d'établir la forme du tenseur  $F_a^{\mu\nu}$ , généralisation non abélienne du tenseur champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$ , nous allons écrire l'équivalent de la formule de Stokes en électromagnétisme :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

où  $\bar{C}$  est une courbe fermée. Considérons un contour infinitésimal rectangulaire  $\bar{C}$ , centré en un point  $x$ , et dont les côtés sont

$\delta a_{\mu}$  et  $\delta b_{\mu}$ . Les points 1, 2, 3 et 4 sont choisis au milieu des quatre côtés du rectangle (figure 2). Nous allons calculer  $R(\bar{C}; A)$  pour ce contour :

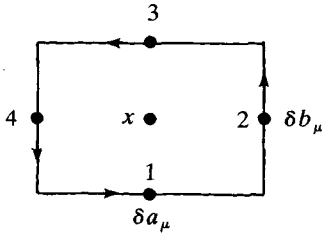


Figure 2.

$$R(\bar{C}; A) = e^{i \delta b_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(4)} e^{i \delta a_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(3)} \times \\ \times e^{-i \delta b_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(2)} e^{-i \delta a_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(1)} .$$

Les valeurs de  $\mathcal{A}^{\mu}(i)$  sont obtenues par un développement limité autour de  $x$ , par exemple :

$$\mathcal{A}^{\mu}(1) = \mathcal{A}^{\mu}(x) - \frac{1}{2} \delta b_{\nu} \partial^{\nu} \mathcal{A}^{\mu}(x) .$$

Si les  $\mathcal{A}^{\mu}$  étaient des nombres, comme en électromagnétisme, on obtiendrait simplement :

$$R(\bar{C}; A) = e^{-i \int_C A^{\mu} dx_{\mu}} \simeq e^{-i \delta a_{\mu} \delta b_{\nu} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu})} \\ = e^{-i \int d\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad (41)$$

où  $d\sigma^{\mu\nu} = \delta a^{\mu} \wedge \delta b^{\nu}$  est l'élément d'aire orienté. Lorsque  $\mathcal{A}^{\mu}$  est une matrice, on doit rajouter un terme provenant de la non-commutativité, qui est donné par :

$$e^{i \delta b_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(x)} e^{i \delta a_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(x)} e^{-i \delta b_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(x)} e^{-i \delta a_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(x)} . \quad (42)$$

L'identité classique en théorie des groupes de Lie :

$$e^{i\varepsilon h} e^{i\varepsilon' g} e^{-i\varepsilon h} e^{-i\varepsilon' g} \simeq 1 - \varepsilon \varepsilon' [h, g] \simeq e^{-\varepsilon \varepsilon' [h, g]}$$

permet d'évaluer (42) :

$$e^{\delta a_\mu \delta b_\nu [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]}.$$

Combinant ce dernier résultat avec (41), on constate que  $R(\bar{C}; A)$  se met sous la forme :

$$R(\bar{C}; A) = \exp \left( -i \int d\sigma_{\mu\nu} \{ \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + i [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu] \} \right). \quad (43)$$

Contrairement au cas abélien, qui conduit au théorème de Stokes, on ne peut pas généraliser cette équation au cas d'un contour fini. L'équation (43) nous conduit à définir le tenseur  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  par :

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu + i [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu] \quad (44)$$

ou, en rétablissant les indices :

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu. \quad (45)$$

Revenons à l'interprétation du calcul que nous venons d'effectuer : la quantité  $R(\bar{C}; A)$  a une signification précise, elle donne la « rotation » de la phase du champ pour un trajet fermé, et cette rotation a des effets observables, par exemple dans une expérience du type Aharonov-Bohm : cette rotation est liée au flux de  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ . Cependant, dans une transformation de jauge,  $R(\bar{C}; A)$  se transforme suivant :

$$R(\bar{C}; A') = U(g(x)) R(\bar{C}; A) U^{-1}(g(x)),$$

et n'est donc pas invariant de jauge, contrairement au cas abélien.

Comme  $d\sigma^{\mu\nu}$  et  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  sont tous deux antisymétriques dans l'échange  $\mu \leftrightarrow \nu$ ,  $\mathcal{F}'^{\mu\nu}$  doit être donné par une loi de transformation identique :

$$\mathcal{F}'^{\mu\nu} = U(g(x)) \mathcal{F}^{\mu\nu} U^{-1}(g(x)) \quad (46)$$

ce qui donne pour une transformation infinitésimale :

$$\delta F_a^{\mu\nu} = f_{abc} \Lambda_b F_c^{\mu\nu}. \quad (47)$$

Cette équation montre d'une part que  $F_a^{\mu\nu}$  se transforme suivant la représentation adjointe, et d'autre part que la loi de transformation ne fait pas intervenir  $\partial_\mu A_a$  ; cependant, contrairement au cas de l'électromagnétisme, cela ne suffit pas pour rendre  $F^{\mu\nu}$  invariant de jauge. Néanmoins l'équation (46) suggère une généralisation de l'action du champ électromagnétique, qui soit invariante de Lorentz, invariante de jauge et se réduise à (XI.80) dans le cas d'un groupe abélien (on utilise (21) pour passer de la première à la seconde forme de  $S$ ) :

$$S = - \frac{1}{2\bar{g}^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) = \frac{-1}{4\bar{g}^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu a} . \quad (48)$$

Dans l'équation (48),  $\bar{g}$  est une constante de couplage ; ultérieurement on fera un changement d'échelle  $A_\mu \rightarrow \bar{g}A_\mu$  sur les champs, ce qui éliminera le  $1/\bar{g}^2$  en facteur dans l'action. L'expression (48) conduit à des couplages à trois et à quatre particules de jauge, puisque  $F^{\mu\nu}$  est quadratique en  $A^\mu$ . C'est cette propriété qui rend les champs de jauge non abéliens hautement non triviaux, même en l'absence d'autres particules, alors que le champ électromagnétique en l'absence d'électrons est un champ libre.

Pour déterminer les équations du mouvement, on couple  $A^\mu$  à un courant  $j_a^\mu$  appartenant à la représentation adjointe du groupe de jauge :

$$S = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2\bar{g}^2} \operatorname{Tr} (\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) + \frac{1}{\bar{g}} j_a^\mu A_{\mu a} \right] . \quad (49)$$

Avant de passer à la généralisation des équations de Maxwell, on notera l'identité :

$$[D_\mu, D_\nu] = i\mathcal{F}_{\mu\nu} \quad (50)$$

qui donne en particulier :

$$D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} (= (D_\mu D_\nu)_{ab} F_b^{\mu\nu}) = 0 . \quad (51)$$

Le principe variationnel appliqué à l'action  $S$  (49) donne les équations du mouvement (exercice 1) :

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \bar{g}j^\nu \quad (52)$$

et, à cause de (51), l'équation de continuité pour  $j^\nu$  s'écrit :

$$D_\nu j^\nu = 0 . \quad (53)$$

On notera que cette équation fait intervenir la dérivée covariante, c'est-à-dire le champ  $A_\mu$ . En fait il fallait s'y attendre car le champ  $A_\mu$  transporte les nombres quantiques de la symétrie interne, et il est aussi sa propre source. On montre également l'analogie des identités de Bianchi en géométrie différentielle (exercice 2) :

$$D_\sigma F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\sigma} + D_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (54)$$

Enfin (exercice 3), on notera que la condition  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$  au voisinage d'un point implique que  $\mathcal{A}_\mu$  est, dans ce voisinage, de la forme :

$$\mathcal{A}_\mu(x) = i[\partial_\mu U(g)] U^{-1}(g) \quad (55)$$

que l'on appelle aussi « champ de pure jauge ».

Pour conclure ce paragraphe, résumons les différences essentielles, au niveau classique, entre champs de jauge abéliens et non abéliens. Dans le cas non abélien :

- (i) le tenseur  $F^{\mu\nu}$  n'est pas invariant de jauge ;
- (ii) même au niveau classique, il est impossible de formuler la théorie sans faire appel aux potentiels (cf. (52)-(54)) ;
- (iii) enfin les champs de jauge non abéliens possèdent des propriétés topologiques non triviales. Dans le cas abélien,  $F^{\mu\nu} = 0$  est équivalent à  $A^\mu = \partial^\mu \Lambda$ , et on peut passer continûment de cette valeur à  $A^\mu = 0$ . Ceci n'est pas possible dans le cas non abélien. Par exemple si l'on choisit la jauge  $A^0 = 0$ , le champ de pure jauge :

$$A = i(\nabla U(g)) U^{-1}(g), \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} U(g(x)) = \mathbb{1}$$

est caractérisé par un nombre topologique qui prend des valeurs entières. Les solutions classiques des équations de Yang-Mills possèdent des propriétés fascinantes, mais leur étude sort du cadre de cet exposé.

## B. QUANTIFICATION DES THÉORIES DE JAUGE NON ABÉLIENNES

### B.1. Fonctionnelle génératrice

Nous allons adapter à une situation plus complexe la méthode exposée au chapitre XI paragraphe D, en suivant la même approche heuristique. Il s'agit d'arriver à intégrer uniquement sur les classes d'équivalence de configurations  $[A_\mu]$ , au lieu d'intégrer sur toutes les

configurations : deux configurations appartiennent à la même classe d'équivalence si elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation de jauge (36). Il est nécessaire de fixer la jauge par une condition du type :

$$f_a(A_b^\mu) = 0 .$$

La transformation de jauge (36) est, en un point  $x$  fixé, une transformation unitaire suivie d'un changement d'origine : elle laisse invariante la mesure d'intégration :

$$\mathcal{D}A_\mu = \mathcal{D}A_\mu^g \left( = \prod_{x, a, \mu} dA_a^\mu(x) \right) .$$

L'action  $S$  est également invariante par transformation de jauge. Définissons la quantité  $\Delta_f(A)$  par (afin d'éviter une prolifération d'indices, j'omettrai en général l'indice de Lorentz et parfois l'indice de groupe) :

$$\Delta_f^{-1}(A) = \int \prod_x dg(x) \prod_{x, a} \delta(f_a(A^g(x))) . \quad (56)$$

Il est facile de vérifier que  $\Delta_f(A)$  est invariant de jauge en utilisant l'invariance de la mesure de Haar (la mesure de Haar est la mesure invariante pour l'intégration sur les paramètres du groupe ; on peut montrer que cette mesure est unique, à un facteur multiplicatif près) :

$$dg = d(g_0 g)$$

où  $g_0$  est un élément fixe du groupe. Ecrivons maintenant la « fonction de partition »  $Z$  sous la forme :

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{x, a} dA_a(x) e^{iS[A]} \Delta_f(A) \prod_{x, a} \delta(f_a(A^g(x))) \prod_x dg(x) \\ &= \int \prod_x dg(x) \int \prod_{x, a} dA_a^{g^{-1}}(x) e^{iS[A^{g^{-1}}]} \Delta_f(A^{g^{-1}}) \prod_{x, a} \delta(f_a(A(x))) . \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est indépendante de  $g$ , ce qui permet de factoriser le produit des intégrales sur le volume du groupe en chaque point. Divisant par ce facteur (infini, mais constant) nous arrivons à l'expression suivante de  $Z$  :

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \Delta_f(A) \prod_{x, a} \delta(f_a(A(x))) . \quad (57)$$

Il s'agit maintenant d'évaluer  $\Delta_f(A)$  dans l'équation (56) ; grâce à la fonction  $\delta$ , il suffit d'intégrer sur les configurations  $[A]$  voisines de

celles qui vérifient la condition de jauge. Partant d'une configuration  $[A]$  telle que  $f_a(A) = 0$ , on effectue une transformation de jauge infinitésimale (37) ; afin de simplifier la discussion je me limite à la jauge de Lorentz  $\partial_\mu A_a^\mu = 0$ , mais l'argument est général (cf. également l'exercice XI.14) :

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_a^{\mu g} &= \partial_\mu A_a^\mu + \partial_\mu [\partial^\mu \Lambda_a + f_{abc} \Lambda_b A_c^\mu] \\ &= \square \Lambda_a + f_{abc} A_c^\mu \partial_\mu \Lambda_b.\end{aligned}$$

Ecrivons ce résultat sous la forme :

$$\partial_\mu A_a^{\mu g} = \int d^4 y [M_f(x, y)]_{ab} \Lambda_b(y)$$

avec

$$[M_f(x, y)]_{ab} = (\square \delta_{ab} + f_{abc} A_c^\mu \partial_\mu) \delta^{(4)}(x - y). \quad (58)$$

Avec ces notations  $\Delta_f(A)$  devient (cf. exercice (XI.14.a))

$$\Delta_f(A) = \det M_f$$

car

$$\prod_x dg(x) = \prod_{x, a} d\Lambda_a(x).$$

Pour que ce déterminant soit praticable, il faut le transformer en série perturbative en l'écrivant sous forme d'une intégrale sur des variables de Grassmann  $\eta(x)$  et  $\bar{\eta}(x)$  grâce à (XI.65) :

$$\det M_f = \int \mathcal{D}(\eta, \bar{\eta}) \exp \left( -i \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}_a(x) [M_f(x, y)]_{ab} \eta_b(y) \right)$$

(les variables  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  ne doivent pas être confondues avec les sources  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  de XI-B.2, malgré l'identité des notations). Ceci permet d'écrire, en ignorant des constantes multiplicatives, la fonctionnelle génératrice sous la forme :

$$Z = \int \mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta}) \exp \left( i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \right) \prod_{x, a} \delta(\partial_\mu A_a^\mu(x)) \quad (59.a)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = & -\frac{1}{4\bar{g}^2} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu a} - \bar{\eta}_a(x) [\square \delta_{ac} - \\ & - f_{abc} A_b^\mu \partial_\mu] \eta_c(x). \quad (59.b)\end{aligned}$$

Le lagrangien (59.b) fait intervenir des champs fermioniques fictifs

$\bar{\eta}_a(x)$  et  $\eta_a(x)$ , appelés « fantômes de Fadeev-Popov » ; ces champs n'apparaissent évidemment jamais comme particules externes dans les éléments de matrice  $S$ , mais seulement sous forme de lignes internes. Notez que ces « fermions » sont des particules de spin zéro ; s'ils apparaissaient comme particules externes, ils violeraient le théorème spin-statistique. Comme ce sont des champs de fermions, il ne faut pas oublier un facteur  $-1$  chaque fois qu'ils forment une boucle dans un graphe. Il reste maintenant à répéter sans modifications les étapes menant de l'équation (XI.108) à l'équation (XI.109). Le lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)$  à utiliser dans (59.a) comprendra finalement : un lagrangien du champ de jauge  $\mathcal{L}_G$ , un terme fixant la jauge  $\mathcal{L}_{GF}$  et un terme  $\mathcal{L}_{FP}$  correspondant aux fantômes de Fadeev-Popov. On peut également rajouter un terme de couplage à des fermions que l'on prendra dans la représentation de générateurs infinitésimaux  $T_a$  : sauf mention explicite du contraire, on se limitera au cas où les générateurs  $T_a$  sont ceux des représentations fondamentales. Enfin il sera commode de faire le changement d'échelle suivant sur les champs de jauge et de noter  $g$  (au lieu de  $\bar{g}$ ) la constante de couplage :

$$A_a^\mu \rightarrow g A_a^\mu .$$

Reste à résumer les résultats (en effectuant une intégration par parties sur  $\mathcal{L}_{FP}$ ) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F \quad (60.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu) (\partial_\mu A_{\nu a} - \\ - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{ade} A_{\mu d} A_{\nu e}) \end{aligned} \quad (60.b)$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 \quad (60.c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= (\partial^\mu \bar{\eta}_a) (\partial_\mu \delta_{ac} - g f_{abc} A_{\mu b}) \eta_c \\ &= (\partial^\mu \bar{\eta}_a) (D_\mu \eta)_a \end{aligned} \quad (60.d)$$

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_i [i\gamma_\mu (\partial^\mu \delta_{ij} + ig A_a^\mu (T_a)_{ij}) - m \delta_{ij}] \psi_j . \quad (60.e)$$

## B.2. Règles de Feynman

Les règles de Feynman se lisent directement sur les équations (60), en se souvenant qu'à un terme  $\partial_\mu \varphi(x)$  dans le lagrangien correspond dans l'espace de Fourier un facteur  $-iq_\mu$ , où  $q_\mu$  est le moment entrant dans le vertex. Donnons d'abord l'expression des propagateurs :

(i) Champ de jauge :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{~~~~~} \\ \nu, b \quad \mu, a \end{array} \quad \frac{i \delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right) \quad (61.a)$$

(ii) F-P

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \cdots \cdots \cdots \\ b \quad a \end{array} \quad \frac{i \delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (61.b)$$

(iii) Fermion :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \cdots \cdots \cdots \\ l \quad j \end{array} \quad \frac{i \delta_{jl}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i \delta_{jl} (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (61.c)$$

Nous admettons sans démonstration la prescription  $k^2 \rightarrow k^2 + i\varepsilon$  pour le propagateur (61.b) ; on peut montrer que cette prescription est la seule compatible avec l'unitarité et la causalité. Les fantômes de Fadeev-Popov sont d'ailleurs essentiels pour assurer l'unitarité via les règles de coupure.

Etudions ensuite le vertex à trois particules de jauge : un terme du lagrangien (60.b) contribuant à ce vertex sera par exemple :

$$\frac{g}{4} f_{abc} \partial^\nu A_a^\mu A_{\nu b} g_{\mu\rho} A_c^\rho.$$

Par application du théorème de Wick, ce terme donnera une contribution du type :

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad \nearrow q \quad \nu, b \\ \mu, a \quad \text{~~~~~} \\ \xrightarrow{p} \quad \searrow r \quad \rho, c \end{array} \quad \frac{g}{4} f_{abc} p^\nu g_{\mu\rho}$$

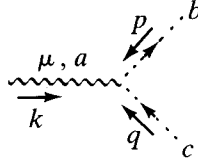
Il y a en fait  $3! = 6$  contributions au théorème de Wick et quatre termes dans le lagrangien (60.b). Le vertex complet s'écrira :

$$-g f_{abc} [g_{\mu\nu} (p - q)_\rho + g_{\nu\rho} (q - r)_\mu + g_{\rho\mu} (r - p)_\nu]. \quad (62.a)$$

On trouve de même l'expression du vertex à quatre particules de jauge :

$$\begin{array}{c} \mu, a \quad \nu, b \\ \text{~~~~~} \quad \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \quad \text{~~~~~} \\ \sigma, d \quad \rho, c \end{array} \quad \begin{aligned} & -ig^2 [f_{eab} f_{ecd} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \\ & + f_{eac} f_{edb} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) \\ & + f_{ead} f_{ebc} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu})] \end{aligned} \quad (62.b)$$

Le couplage entre les gluons et les fantômes est donné par le lagrangien (60.d). Calculons le vertex :



Le terme de (60.d) contribuant à ce vertex peut s'écrire :

$$g f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_b) A_a^\mu \eta_c$$

et donne la contribution :

$$g f_{abc} p^\mu. \quad (62.c)$$

Enfin le vertex gluon-fermion se déduit de (60.d)

$$-ig\gamma^\mu (T_a)_{lj} \quad (62.d)$$

Ces règles sont évidemment plus compliquées que celles de l'électrodynamique quantique. Dans le calcul d'un graphe de Feynman, il sera en général conseillé de commencer par le calcul du « facteur de groupe » provenant des  $f_{abc}$  et des  $(T_a)_{ij}$ . Les règles générales pour le calcul de ce facteur de groupe ont été données par Cvitanovic <sup>(2)</sup>. Contentons-nous de donner ci-dessous les facteurs de groupe intervenant dans les calculs de diagrammes à une boucle les plus simples. On utilisera les identités suivantes, valables pour une représentation  $R$  (exercice 4) :

$$\text{Tr} (T_a T_b) = T(R) \delta_{ab} \quad (63.a)$$

$$\sum_a (T_a)^2 = C(R) \mathbb{1}. \quad (63.b)$$

Soit  $r$  la dimension du groupe et  $n$  la dimension de la représentation des fermions (en général  $N$  pour  $SU(N)$ ) ; on déduit de (63) la relation :

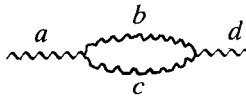
$$nC(R) = rT(R). \quad (64)$$

On note en général  $C_F$  la valeur de  $C(R)$  pour la représentation des fermions ; dans le cas de  $SU(N)$  nous obtenons pour la représentation fondamentale :

$$C(R) = C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (SU(N)). \quad (65)$$

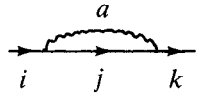
Dans le cas de la représentation adjointe,  $n = r$  et  $C(R) = T(R) = C_A$  ( $C_A = N$  pour  $SU(N)$ ). Examinons quelques cas importants de diagrammes à une boucle :

(i) Energie propre de particules de jauge :



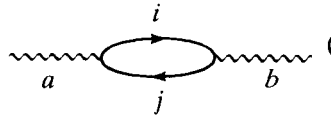
$$: f_{abc} f_{dbc} = (T_a)_{bc} (T_d)_{cb} = C_A \delta_{ad} \\ = N \delta_{ad} \quad (SU(N)) \quad (66.a)$$

(ii) Energie propre d'un fermion appartenant à la représentation fondamentale de  $SU(N)$  :



$$: (T_a)_{kj} (T_a)_{ji} = C_F \delta_{ik} \\ = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ik} \quad (SU(N)) \quad (66.b)$$


(iii) Boucle de fermions contribuant à l'énergie propre des particules de jauge :



$$(T_b)_{ij} (T_a)_{ji} = T_F \delta_{ab} \\ = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (\text{cf. 21}) \quad (66.c)$$

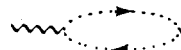
Le lecteur vérifiera sans difficulté ces résultats dans le cas du groupe  $SU(2)$ . D'autres exemples sont donnés à l'exercice 4.

On procède ensuite comme dans une théorie des champs usuelle, en intégrant sur les boucles etc. Il faut prendre garde à ne pas oublier les facteurs de symétrie :



$$: \text{Facteur de symétrie } 1/2$$

ainsi que le facteur  $(-1)$  associé aux boucles de F-P :





$$: \text{Facteur } (-1)$$


### B.3. Renormalisation et identités de Ward


Les règles de Feynman énoncées précédemment vont naturellement conduire à des intégrales divergentes, et il est nécessaire de renormaliser. Un bon exercice (mais qui demande une certaine persévérance) consiste à calculer tous les diagrammes divergents à l'ordre d'une boucle et à en déduire les constantes de renormalisation. Afin de maintenir l'invariance de jauge tout au long du calcul, il est conseillé d'utiliser une régularisation dimensionnelle, et de déterminer les constantes de renormalisation à l'aide du schéma minimal. Le lecteur courageux qui veut se lancer dans ce calcul trouvera quelques indications supplémentaires au paragraphe D.


Le comptage de puissances détermine les diagrammes primitivement divergents ; comme il s'agit de fonctions de Green, les fantômes peuvent parfaitement apparaître comme particules externes dans les diagrammes, puisqu'il sera par exemple nécessaire de renormaliser leur propagateur. D'autre part, en raison de la transversité du propagateur du champ de jauge et de la factorisation de  $p_\mu$  dans l'énergie propre des fantômes, il n'apparaît ni contre-terme de masse, ni contre-terme en  $(\partial_\mu A^\mu)^2$ . Compte-tenu de ces remarques, il est facile de faire le décompte des diagrammes à évaluer (entre parenthèses la constante de renormalisation) :

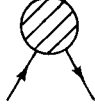
(a) Energie propre des particules de jauge :  ( $Z_3$ )

(b) Energie propre des fantômes :  ( $\tilde{Z}_3$ )

(c) Energie propre des fermions :  ( $Z_2$ )

(d) Vertex à 3 particules de jauge :  ( $Z_1$ )

(e) Vertex particule de jauge-fantôme :  ( $\tilde{Z}_1$ )

(f) Vertex fermion-particule de jauge :  ( $Z_{1F}$ )

(g) Vertex à 4 particules de jauge :



(Z<sub>4</sub>)

Procédant comme au chapitre VI, on rajoute les contre-termes au lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  (60), obtenant pour résultat (les indices et facteurs de groupe ne sont pas écrits explicitement et la masse des fermions a été prise égale à zéro) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \\ & + \frac{g}{2} Z_1 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) A_\mu A_\nu - \frac{1}{4} g^2 Z_4 A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu \\ & - \frac{1}{2a} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \tilde{Z}_3 (\partial_\mu \bar{\eta}) (\partial^\mu \eta) - g \tilde{Z}_1 (\partial^\mu \bar{\eta}) A_\mu \eta \\ & + Z_2 \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - Z_{1F} g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu. \end{aligned} \quad (67)$$

Les champs et paramètres nus sont définis par :

$$\begin{aligned} A_0 &= Z_3^{1/2} A ; & \eta_0 (\bar{\eta}_0) &= \tilde{Z}_3^{1/2} \eta (\bar{\eta}) ; & \psi_0 &= Z_2^{1/2} \psi \\ g_0 &= Z_1 Z_3^{-3/2} g ; & a_0 &= Z_3 a ; & g_{0F} &= Z_{1F} Z_3^{-1/2} Z_2^{-1} g. \end{aligned} \quad (68)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$  peut être considéré comme le lagrangien initial  $\mathcal{L}(A_0, \eta_0, \psi_0, a_0, g_0, g_{0F} = g_0)$  à condition que les identités suivantes soient satisfaites :

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2}. \quad (69)$$

Ces identités, qui généralisent la relation  $Z_1 = Z_2$  de l'électrodynamique quantique, sont vérifiées explicitement dans le calcul à l'ordre d'une boucle. Dans le cas général, elles peuvent être démontrées, comme en électrodynamique, à l'aide de la généralisation des identités de Ward aux théories non abéliennes, qui sont appelées identités de Slavnov-Taylor. Cependant les identités de Slavnov-Taylor sont beaucoup plus complexes que celles de la théorie abélienne. La façon la plus élégante et la plus compacte de démontrer ces identités utilise la transformation de Becchi, Rouet et Stora (BRS) qui est exposée par exemple dans Itzykson-Zuber (cf. également l'exercice 5). Nous nous bornerons à indiquer brièvement où réside la difficulté.

Rappelons que pour quantifier le champ de jauge, nous avons dû

« fixer la jauge » par une condition  $f(A) = 0$ . Ceci a introduit dans le lagrangien effectif deux termes :

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (f(A))^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{FP}$$

qui ne sont pas invariants de jauge. Si l'on essaie de répéter l'argument de XII-D.1, en rajoutant un champ  $\varphi_a$  appartenant à la représentation adjointe du groupe de jauge, qui sert à effectuer la transformation de jauge infinitésimale ( $\omega \ll 1$ ) :

$$\delta A_a^\mu = \omega f_{abc} \varphi_b A_c^\mu + \omega (\partial_\mu \varphi_a) \quad (70)$$

généralisant (XII.98), les termes  $\mathcal{L}_{GF}$  et  $\mathcal{L}_{FP}$  vont engendrer des interactions du type  $\varphi AA$ ,  $\varphi A\eta$ ,  $\varphi \bar{\eta} A\eta$ , en plus du terme (XII.100). Ceci rend l'écriture d'une identité du type (XII.102) beaucoup plus complexe. En électrodynamique, la simplicité de la jauge de Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$  vient de ce que les fantômes de F-P sont en principe présents, mais ils sont découplés et on peut les ignorer. Il n'en est pas de même dans la jauge  $\partial_\mu A^\mu + g/2 A_\mu A^\mu = 0$  de l'exercice XI.14 : dans cette jauge on doit écrire des identités du type Slavnov-Taylor (exercice 5). On retiendra de cette discussion schématique les relations de dépendance entre la condition de jauge, le lagrangien des fantômes de F-P et les identités de Ward-Slavnov-Taylor.

### C. MODÈLE DES INTERACTIONS ÉLECTRO-FAIBLES

Dans le cas d'une théorie de jauge abélienne avec couplage à un courant conservé, on peut introduire un terme de masse pour le boson de jauge sans détruire la renormalisabilité de la théorie : en effet le terme dangereux du propagateur massif :

$$k_\mu k_\nu / m^2$$

qui introduit une « constante de couplage »  $m^{-2}$  de dimension  $-2$ , est contrôlé par la conservation du courant, du moins pour les quantités physiques. Il n'en est pas de même dans les théories non abéliennes, où l'introduction brutale d'un terme de masse détruit la renormalisabilité. Si l'on souhaite donner une masse aux particules de jauge, ce qui est indispensable pour décrire des forces à courte portée comme les interactions faibles, il est nécessaire de passer par une construction utilisant une brisure (spontanée) de symétrie.

### C.1. Bosons de Goldstone et phénomène de Higgs

Lorsqu'une symétrie continue est spontanément brisée, il apparaît des particules de masse nulle appelées *bosons de Goldstone*. Un modèle très simple pour expliquer ce phénomène est fourni par la théorie de Ginzburg-Landau avec un paramètre d'ordre de dimension  $n = 2$ . L'action effective  $\Gamma(\varphi)$  sera écrite pour une théorie euclidienne :

$\mu = 1, 2, 3, 4$  ;  $(\partial_\mu \varphi)^2 = \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu \varphi)^2$ . La disposition des indices

( $A_\mu A_\mu$  au lieu de  $A_\mu A^\mu$ ) permettra de distinguer la théorie euclidienne de celle de l'espace de Minkowski. A l'approximation en arbres, cette action effective est donnée par :

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \right]. \quad (71)$$

Le coefficient de  $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$  est négatif, ce qui correspond à une température inférieure à la température critique :  $T < T_c$ . La constante de couplage  $\lambda$  doit être positive.

Le potentiel effectif  $V(\varphi_1, \varphi_2)$  que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) &= \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[ (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^2 + \\ &\quad + \text{Cte} \quad (72) \end{aligned}$$

présente un minimum pour

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Dans le plan  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , ce minimum se trouve donc situé sur un

cercle (figure 3). La forme du potentiel est dessinée sur la figure 4. Suivant le mécanisme habituel de brisure de symétrie, on choisit un état fondamental particulier (un vide en théorie des champs) ; dans le langage du magnétisme, on choisit une direction d'aimantation particulière. Un choix possible est :

$$\varphi_1 = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}; \quad \varphi_2 = 0 \quad (73)$$

$v$  est la « valeur moyenne sur le vide » du champ  $\varphi_1$ .

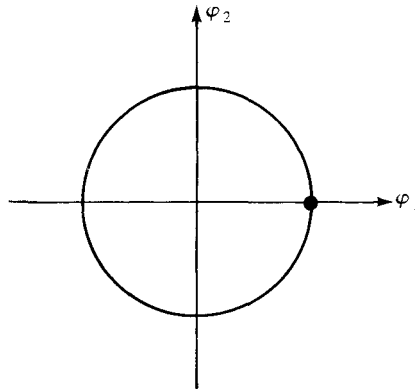


Figure 3.

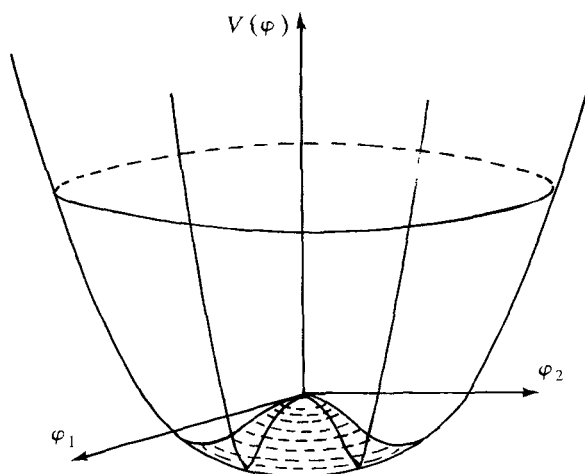


Figure 4.

Les fluctuations de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  autour de l'état fondamental (73) seront décrites par  $\varphi_2$  et un champ  $\eta$  :

$$\eta = \varphi_1 - v. \quad (74)$$

Reportant cette expression dans le potentiel effectif (72) on obtient :

$$V(\eta, \varphi_2) = \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta (\eta^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\eta^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (75)$$

Cette forme du potentiel effectif montre que l'on est en présence d'une particule ( $\eta$ ) massive, de masse  $\sqrt{2} \mu$ , et d'une particule ( $\varphi_2$ ) de masse nulle, qui est le boson de Goldstone. Ces particules sont couplées entre elles, avec des couplages cubique et quartique. L'existence du boson de Goldstone est facile à interpréter : les fluctuations autour de l'état fondamental dans une direction perpendiculaire à l'axe  $\varphi_1$  ne coûtent aucune énergie, alors que les fluctuations le long de cet axe se font dans un potentiel harmonique.

On peut démontrer sans difficulté le résultat suivant (exercice 6) : soit  $H$  le sous-groupe du groupe de symétrie  $G$  de l'action effective qui laisse invariant l'état fondamental. Si  $G$  a  $N$  générateurs indépendants et  $H$  en a  $M$ , il existe  $(N - M)$  bosons de Goldstone. Dans l'exemple précédent  $N = 1$  ( $G = U(1)$ ) et  $M = 0$ .

L'introduction d'un champ de jauge couplé au champ  $\varphi$  a pour effet de faire disparaître le boson de Goldstone, qui se retrouve comme composante longitudinale d'un champ de jauge massif : c'est le phénomène de Higgs. Reprenons l'action effective (71) en rajoutant un

champ de jauge (abélien)  $A_\mu$ . Il est commode d'introduire les champs chargés  $\varphi$  et  $\varphi^*$  :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2) ; \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2) \quad (76)$$

et la dérivée covariante :

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - iqA_\mu \varphi .$$

L'action effective devient :

$$\Gamma = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) + \lambda \left( \varphi^* \varphi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 \right] . \quad (77)$$

On choisit à nouveau l'état fondamental :

$$\varphi_1 = v ; \quad \varphi_2 = 0 ; \quad \varphi = \frac{v}{\sqrt{2}} .$$

Au lieu des champs  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , utilisons les champs réels  $(\xi, \eta)$  en écrivant :

$$\varphi(x) = e^{i\xi(x)/v} \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} .$$

En l'absence du champ  $A_\mu$ , et en se limitant aux termes quadratiques en  $\eta, \xi$ , l'action effective (77) s'écrirait :

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} (2\mu^2) \eta^2 + O(\eta (\partial_\mu \xi)^2, \eta^3, \dots) \right] .$$

On voit que le champ  $\xi$  est de masse nulle : c'est le boson de Goldstone. Cependant nous sommes dans le cadre d'une théorie de jauge, ce qui nous permet de faire des transformations de jauge ; choisissons la transformation particulière :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{-i\xi(x)/v} \varphi(x) \quad (78.a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi(x) . \quad (78.b)$$

L'action effective (77) est invariante dans cette transformation ; comme :

$$\varphi'(x) = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}}$$

on peut reporter cette valeur dans (77) en écrivant  $(A_\mu, \varphi)$  au lieu de  $(A'_\mu, \varphi')$  :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta + iq A_\mu (v + \eta)) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\partial_\mu \eta - iq A_\mu (v + \eta)) + \frac{\lambda}{4} \left[ (v + \eta)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^2 \right] \\
 &= \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A_\mu + q^2 \eta v A_\mu A_\mu \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} q^2 \eta^2 A_\mu A_\mu + \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 \right]. \quad (79)
 \end{aligned}$$

Le contenu physique se lit directement sur l'équation (79) ; on obtient :

- un champ vectoriel massif de masse carrée  $m^2 = q^2 v^2 = q^2 \mu^2 / \lambda$  ;
- un champ scalaire  $\eta$  de masse carrée  $2 \mu^2$ .

Ces deux champs sont couplés entre eux par des interactions cubiques et quartiques. La transformation de jauge a fait disparaître le champ de masse nulle  $\xi$ , qui se retrouve en fait comme composante longitudinale d'un champ vectoriel massif  $A_\mu$  : le nombre de degrés de liberté est bien conservé. Au départ on disposait de deux degrés de liberté pour le champ de jauge et de deux pour les champs scalaires ; à l'arrivée on trouve trois degrés de liberté pour un champ vectoriel massif et un pour le champ scalaire.

Nous venons donc de donner un exemple du phénomène de Higgs : un champ de jauge de masse nulle acquiert une masse en se propageant dans le vide des champs scalaires, appelés pour cette raison « champs de Higgs ». Le même phénomène se produit dans le cas de théories de jauge non abéliennes. Le phénomène de Higgs permet aux bosons de jauge d'acquérir une masse, tout en préservant la renormalisabilité : en effet le lagrangien initial est renormalisable (le couplage des champs de Higgs ne contient que des termes renormalisables), et on peut montrer que la brisure de symétrie préserve la renormalisabilité. Après la transformation de jauge (78), on tombe sur une théorie manifestement unitaire, puisque dans le cas d'un boson vectoriel massif le propagateur coupé ne fait intervenir que des états physiques.

Ceci permet de conclure — et une analyse complète du problème confirme cette conclusion — que l'on peut construire de cette façon une théorie unitaire et renormalisable de bosons massifs dans le cadre d'une théorie de jauge non abélienne (et c'est la seule façon de le faire !).

### C.2. Théorie de Fermi des interactions faibles

La théorie des interactions faibles, connue sous le nom de « théorie de Fermi », a en réalité été mise au point à la fin des années 50, en modifiant la théorie proposée par Fermi une vingtaine d'années auparavant. Cette théorie peut être caractérisée de la façon suivante :

- (i) c'est une théorie courant-courant,
- (ii) elle conduit à une interaction effective non renormalisable à quatre fermions,
- (iii) elle viole la parité de façon maximale.

Examinons rapidement ces trois points, en renvoyant par exemple au livre de Gasiorowicz pour des détails complémentaires. Nous nous limiterons aux interactions faibles des leptons  $e^\pm$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$  (neutrino et antineutrino électroniques),  $\mu^\pm$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$  (neutrino et antineutrino muoniques). Rappelons que les neutrinos sont électriquement neutres (d'où leur nom), ont un spin 1/2 et une masse compatible avec zéro. Le lagrangien de Fermi s'écrit en fonction du courant faible  $J_\lambda(x)$  et d'une constante de couplage  $G_F$  (constante de Fermi) sous la forme :

$$\mathcal{L}(x) = - \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda(x) J^{\lambda\dagger}(x) \quad (80)$$

où  $J_\lambda$  comprend une partie électronique  $J_\lambda^{(e)}$  et une partie muonique  $J_\lambda^{(\mu)}$  (ainsi qu'une partie associée au lepton  $\tau$  et une partie hadronique que nous n'étudierons pas ici) :

$$J_\lambda(x) = J_\lambda^{(e)}(x) + J_\lambda^{(\mu)}(x) \quad (81)$$

avec :

$$J_\lambda^{(e)}(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}(x) \quad (82.a)$$

et

$$J_\lambda^{(\mu)}(x) = \bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}(x). \quad (82.b)$$

Dans l'équation (82), les champs  $\psi_e$ ,  $\psi_{\nu_e}$ ,  $\psi_\mu$  et  $\psi_{\nu_\mu}$  sont les champs de Dirac associés aux quatre types de particules. Le lagrangien (80) décrit par exemple la désintégration du muon (exercice 7) :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

ou les diffusions élastiques  $\nu_e e^-$ ,  $\bar{\nu}_e e^-$  (exercice 8).

La constante de Fermi  $G_F$  a pour dimension  $-2$  (les champs de fermions ont une dimension 3/2). Elle vaut :

$$G_F \simeq 1.16 \times 10^{-5} (\text{GeV})^{-2}.$$

Comme il n'y a pas de symétrie particulière susceptible de réduire le degré de divergence, la théorie de Fermi est non renormalisable.

Enfin le facteur  $(1 - \gamma_5)$  dans (82) conduit à une violation maximale de la parité : si les neutrinos ont une masse nulle, ils ont toujours une hélicité  $-1$  (= polarisation circulaire gauche), tandis que les antineutrinos ont toujours une hélicité  $+1$  (= polarisation circulaire droite). Il est commode d'introduire les projecteurs sur les états d'hélicité  $\pm 1$  (dans le cas de la masse nulle, la *chiralité* = valeur propre de  $\gamma_5$ , coïncide avec l'hélicité) :

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) ; \quad P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) . \quad (83)$$

Enfin on peut (pour le moment de façon purement formelle) mettre le neutrino et l'électron gauches dans un doublet (représentation de dimension 2) d'un groupe  $SU(2)$ , appelé  $SU(2)_L$ , et procéder de la même façon pour le muon et son neutrino :

$$\chi_L(e) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L ; \quad \chi_L(\mu) = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L ; \quad e_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_e . \quad (84)$$

Le courant  $J_\lambda^{(e)}$  par exemple s'écrira :

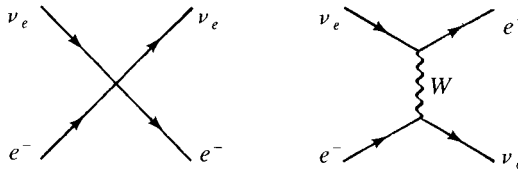
$$J_\lambda^{(e)} = 2 \bar{\chi}_L(e) \gamma_\mu \tau^- \chi_L(e) \quad (85)$$

avec :

$$\tau^- = \frac{1}{2} (\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Cette écriture suggère une symétrie interne décrite par un groupe  $SU(2)_L$  et appelée isospin faible (à ne pas confondre avec l'isospin des interactions fortes). Cependant il n'y a pas encore véritablement de symétrie, car le courant neutre faible ne correspond pas à la matrice  $\tau_3$  : il ne suffit pas de remplacer  $\tau^-$  dans (85) par  $\tau_3$  pour avoir l'expression de ce courant neutre.

D'autre part on cherche à remplacer la théorie de Fermi, qui possède le défaut majeur de ne pas être renormalisable, par une théorie où l'interaction faible est transportée par un boson vectoriel massif chargé noté  $W$  (figure 5) :



**Figure 5.** La diffusion  $\nu_e - e^-$  (a) dans la théorie de Fermi, (b) dans une théorie avec échange de boson vectoriel massif  $W$ .

Si l'on souhaite disposer d'une théorie renormalisable, il est nécessaire que ces bosons soient les particules de jauge d'une théorie de jauge non abélienne, rendues massives grâce au phénomène de Higgs. On ne peut pas prendre comme groupe de jauge  $SU(2)_L$ , pour les raisons expliquées ci-dessus. Il est donc naturel d'introduire dans le problème un autre courant neutre, celui de l'électromagnétisme, ce qui mène à l'unification des interactions électromagnétiques et faibles. A l'époque où le modèle a été élaboré, on ne connaissait pas grand chose des courants neutres et deux possibilités étaient ouvertes :

(i) identifier le courant neutre avec le courant électromagnétique et se contenter de trois bosons de jauge : deux bosons massifs  $W^+$  et  $W^-$  transportant l'interaction faible et un photon ( $\gamma$ ). Ceci est possible au prix de leptons supplémentaires. Dans ce modèle, dû à Georgi et Glashow, il n'y a pas de courant neutre faible.

(ii) Introduire *deux* courants neutres, l'un électromagnétique, l'autre faible. Il faut donc quatre bosons de jauge,  $W^\pm$ ,  $Z^0$  et  $\gamma$  et quatre générateurs infinitésimaux pour le groupe de jauge : c'est le modèle GSW.

Le modèle de Georgi-Glashow est mathématiquement plus élégant que celui de GSW, car il repose sur un groupe de Lie simple ( $SO(3)$ ), ce qui a l'avantage d'expliquer la quantification de la charge électrique. Cependant ce n'est pas lui qui a été choisi par la nature.

### C.3. Modèle de Glashow-Salam-Weinberg (GSW)

Donnons maintenant quelques détails techniques sur le modèle GSW, qui est à l'heure actuelle très largement confirmé par les données expérimentales. Le groupe de jauge  $G$  est le produit d'un groupe  $SU(2)$  par un groupe  $U(1)$ , ce qui donne bien quatre générateurs :

$$G = SU(2)_L \times U(1)_Y.$$

L'indice  $L$  désigne l'isospin faible des leptons gauches, et l'indice  $Y$  l'hypercharge faible, définie ci-dessous. Il est nécessaire de se donner deux constantes de couplage,  $g$  pour  $SU(2)_L$  et  $g'$  pour  $U(1)_Y$ .

Les représentations de  $SU(2)_L$  sont étiquetées par l'isospin faible  $I$ , qui peut prendre les valeurs 0, 1/2, 1, 3/2, ... (en pratique seules les 3 premières valeurs interviennent). Les éléments d'une représentation sont étiquetés par la composante 3 de l'isospin :  $I_3 = -I, -I + 1, \dots, I$ . Le couplage d'une particule au boson de jauge de  $U(1)_Y$  est  $g' Y/2$ , où le facteur 1/2 est conventionnel. Comme le groupe est abélien, la valeur de  $Y$  est arbitraire, et doit être déterminée a poste-

riori. Les leptons gauches sont rangés dans des doublets (représentations d'isospin  $I = 1/2$ ) de  $SU(2)_L$  :

$$\chi_L(e) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L ; \quad \chi_L(\mu) = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad (86)$$

et leur hypercharge vaut  $Y_L$  ; le neutrino correspond à  $I_3 = 1/2$ , l'électron (ou le muon) à  $I_3 = -1/2$ . Les leptons droits qui ne participent pas aux interactions faibles décrites par des courants chargés sont rangés dans des singlets ( $I = 0$ ) de  $SU(2)_L$  et on leur attribue une hypercharge  $Y_R$ . On notera  $\chi_R(e) = e_R^-$ ,  $\chi_R(\mu) = \mu_R^-$ .

Les champs de jauge de  $SU(2)_L$  seront notés  $W_a^\mu$  ( $a = 1, 2, 3$ ) et celui de  $U(1)_Y$ ,  $B^\mu$ . Au départ tous ces champs ont une masse nulle. Il en est de même pour les leptons, puisque l'électron et le neutrino doivent avoir la même masse en l'absence de brisure de symétrie. Nous allons commencer par ce cas, en renvoyant à une étape ultérieure l'étude de cette brisure.

Ecrivons le lagrangien  $\mathcal{L}_l$  des fermions, obtenu à partir du lagrangien de Dirac à l'aide du couplage minimal (38) ; dans le cas du groupe  $SU(2)$ , il est commode d'utiliser une notation vectorielle :  $W_a^\mu$  peut être considéré comme la composante  $a$  d'un vecteur  $\vec{W}^\mu$  d'un espace à trois dimensions, car il se transforme suivant la représentation de dimension 3 de  $SU(2)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l = & \bar{\chi}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{i}{2} g' Y_R B_\mu \right) \chi_R + \\ & + \bar{\chi}_L i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu + \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \chi_L. \end{aligned} \quad (87)$$

Ecrivons le couplage des fermions aux champs de jauge neutres  $B^\mu$  et  $W_3^\mu$ , en omettant les facteurs multiplicatifs sans importance pour l'argument qui va suivre :

$$g' Y_R j_\mu^R B^\mu + g' Y_L j_\mu^L B^\mu + g j_\mu^L \tau_3 W_3^\mu$$

où  $j_\mu^R$  et  $j_\mu^L$  sont proportionnels à  $(1 - \gamma_5)$  et  $(1 + \gamma_5)$  respectivement. Ceci donne pour les neutrinos ( $Y_R = 0$ ,  $I_3 = +1/2$ ) et pour les électrons ( $I_3 = -1/2$ ) :

$$\nu : g' Y_L j_\mu^L B^\mu + g j_\mu^L W_3^\mu \quad (88.a)$$

$$e : g' [Y_R j_\mu^R + Y_L j_\mu^L] B^\mu - g j_\mu^L W_3^\mu. \quad (88.b)$$

Nous allons maintenant effectuer une transformation canonique sur les champs  $B^\mu$  et  $W_3^\mu$ , en introduisant deux champs  $A^\mu$  et  $Z^\mu$ , tels que  $A^\mu$  ne soit pas couplé au neutrino et soit couplé aux électrons avec

conservation de la parité : autrement dit  $A^\mu$  a toutes les propriétés du champ électromagnétique. Soit donc :

$$B^\mu = -\sin \theta Z^\mu + \cos \theta A^\mu \quad (89.a)$$

$$W_3^\mu = \cos \theta Z^\mu + \sin \theta A^\mu. \quad (89.b)$$

L'angle  $\theta$  est appelé *angle de Weinberg* ; il est souvent noté  $\theta_W$ . Reportant (89) dans (88) on obtient pour le couplage du champ  $A^\mu$  :

$$\begin{aligned} \nu &: [g' Y_L j_\mu^L \cos \theta + g j_\mu^L \sin \theta] A^\mu \\ e &: [g' Y_R j_\mu^R \cos \theta + (g' Y_L \cos \theta - g \sin \theta) j_\mu^L] A^\mu. \end{aligned}$$

Afin que  $A^\mu$  ait les propriétés du champ électromagnétique nous devons exiger que la charge du neutrino soit nulle :

$$g' Y_L \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

et que le couplage du photon soit proportionnel à  $\gamma^\mu$ , c'est-à-dire à  $j_\mu^L + j_\mu^R$  :

$$g' Y_R \cos \theta = g' Y_L \cos \theta - g \sin \theta.$$

Ces deux équations donnent pour  $Y_L$  et  $Y_R$  :

$$Y_L = -\frac{g}{g'} \operatorname{tg} \theta ; \quad Y_R = 2 Y_L.$$

On peut toujours choisir la normalisation de  $g'$  de telle sorte que  $Y_L = -1$  (et donc  $Y_R = -2$ ) ;  $g$  et  $g'$  sont alors reliés par :

$$\boxed{g' = g \operatorname{tg} \theta}. \quad (90)$$

Pour relier  $g$  à la charge électrique  $e$ , écrivons le couplage des électrons en rétablissant les facteurs multiplicatifs :

$$\begin{aligned} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L &= \frac{1}{2} \bar{\psi}(e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(e) \\ \bar{\psi}(e) \left\{ -\frac{1}{2} g' \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \cos \theta - \frac{1}{4} (g' \cos \theta + g \sin \theta) \gamma_\mu \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \gamma_5) \right\} \psi(e) = -g \sin \theta \bar{\psi}(e) \gamma_\mu \psi(e) A^\mu \end{aligned}$$

d'où l'identification :

$$\boxed{e = g \sin \theta}. \quad (91)$$

Il est facile de terminer le calcul pour déterminer le couplage des électrons et des neutrinos au boson  $Z^\mu$  (exercice 9). On trouve par exemple dans le cas des électrons :

$$\mathcal{L} = \frac{-g}{\cos \theta} \bar{\psi}(e) \gamma_\mu (C_V - C_A \gamma_5) \psi(e) Z^\mu \quad (92.a)$$

avec :

$$C_V = -\frac{1}{4} + \sin^2 \theta ; \quad C_A = -\frac{1}{4}. \quad (92.b)$$

Notre théorie des interactions faibles présente pour le moment un défaut majeur : on sait que ces interactions sont à très courte portée et doivent donc être transmises par des bosons vectoriels massifs. Il est nécessaire de trouver un mécanisme qui donne une masse aux bosons  $W^\pm$  et  $Z_0$ , tout en préservant la masse nulle du photon. Le lecteur ne sera pas surpris que l'on fasse maintenant appel au mécanisme de Higgs pour fabriquer ces masses. Compte-tenu du théorème de l'exercice (6.b), il est nécessaire qu'aucun générateur de  $SU(2)_L$  ne laisse le vide invariant si l'on veut que les bosons  $W^\pm$  et  $Z_0$  deviennent massifs. Au contraire la combinaison linéaire :

$$A^\mu = \sin \theta W_3^\mu + \cos \theta B^\mu$$

doit conserver une masse nulle ; comme cette combinaison linéaire est couplée à la charge électrique  $Q$ , il est nécessaire que  $Q$  laisse le vide invariant. Remarquons que les valeurs trouvées précédemment pour  $Y_L$  et  $Y_R$  permettent d'écrire :

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y \quad (93)$$

et la solution la plus économique consiste à introduire deux doublets  $(h^+, h^0)$  et  $(h^0, h^-)$  de particules de Higgs, décrits par des champs complexes  $\varphi_c : (h^+, h^-)$  et  $\varphi_0 : (h^0, \bar{h}^0)$  (en tout quatre degrés de liberté) :

$$\begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix} : I = \frac{1}{2}, \quad Y = 1 ; \quad \begin{pmatrix} \bar{h}^0 \\ h^- \end{pmatrix} : I = \frac{1}{2}, \quad Y = -1.$$

L'opérateur  $Q$  est représenté par une matrice

$$Q = e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour le doublet  $(h^+, h^0)$ . Si l'on choisit de briser la symétrie en donnant

à  $\varphi_0$  une valeur moyenne sur le vide non nulle, en écrivant :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi_0 \end{pmatrix} ; \quad \langle \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (94)$$

on obtient un état fondamental qui n'est invariant, ni par  $SU(2)_L$ , ni par  $U(1)_Y$ , mais qui est bien invariant dans une transformation de jauge correspondant à la charge électrique :  $Q$  est une combinaison linéaire convenable de générateurs infinitésimaux de  $SU(2)_L$  et de  $U(1)_Y$ . Ecrivons explicitement le couplage des bosons de Higgs aux champs de jauge, en utilisant la prescription du couplage minimal :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s = & \left[ \left( \partial_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu + \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \varphi \right]^\dagger \times \\ & \times \left[ \left( \partial^\mu + \frac{i}{2} g' B^\mu + \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{W}^\mu \right) \varphi \right]. \quad (95) \end{aligned}$$

Suivant la méthode exposée au paragraphe C.1, on introduit, au lieu des champs  $\varphi$  et  $\varphi^\dagger$ , trois champs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  et un champ  $\eta$  :

$$\varphi = e^{i\vec{\tau} \cdot \xi / 2v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = U^{-1}(\xi) \varphi$$

et on effectue la transformation de jauge de  $SU(2)_L$  :

$$\begin{aligned} \varphi' &= U(\xi) \varphi ; & \chi'_L &= U(\xi) \chi_L ; & \chi'_R &= \chi_R \\ B'_\mu &= B_\mu ; & \vec{W}'_\mu &= U(\xi) \vec{W}_\mu U^{-1}(\xi) + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) (U^{-1}) . \end{aligned}$$

Cette transformation a pour effet de transformer les champs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , qui seraient des bosons de Goldstone en l'absence de particules de jauge, en composantes longitudinales de bosons vectoriels. Il reste un champ scalaire : le boson de Higgs. Dans cette opération, qui suit exactement le même schéma que celui décrit dans le cas abélien au paragraphe C.1, le lagrangien des scalaires devient :

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) + \frac{(v + \eta)^2}{8} \chi_-^\dagger (g' B + g \vec{\tau} \cdot \vec{W})^2 \chi_- \quad (96)$$

où  $\chi_-$  est l'élément  $(0, 1)$  du doublet de  $SU(2)_L$ . Calculons le terme quadratique en  $W$  et  $B$ , qui va donner l'information sur les masses, en exprimant  $g'$  à l'aide de (90) :

$$\mathcal{L}_s \rightarrow \frac{1}{8} v^2 [g^2 (W_1^2 + W_2^2) + g^2 (W_3^2 + \text{tg}^2 \theta B^2 - 2 \text{tg} \theta W_3 B)] . \quad (97)$$

Cette expression montre que les bosons  $W_1$  et  $W_2$ , ou les combinaisons chargées :

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1 \pm iW_2)$$

ont une masse  $m_W = \frac{1}{2} g v$ . Pour obtenir la masse des bosons neutres, il faut diagonaliser la deuxième parenthèse de (97) grâce à la transformation (89), ce qui donne en fin de compte pour la partie quadratique de  $\mathcal{L}_s$  :

$$\mathcal{L}_s \rightarrow \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{4} g^2 v^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu. \quad (98)$$

Comme promis le champ  $A^\mu$  reste de masse nulle. On identifie la masse du boson  $Z_0$  :

$$m_Z = \frac{g v}{2 \cos \theta}$$

En résumé le mécanisme de Higgs a transféré trois degrés de liberté des champs de Higgs à des composantes longitudinales de trois bosons de jauge massifs ; les masses sont données en fonction de la valeur moyenne sur le vide  $v$  du champ de Higgs et de l'angle de Weinberg  $\theta$  :

$$m_W = \frac{1}{2} g v ; \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta} = \frac{1}{2} v (g^2 + g'^2)^{1/2} . \quad (99)$$

Le lagrangien total comprend encore un terme d'interaction des champs de Higgs entre eux et des champs de Higgs avec les fermions :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 - g_l [\bar{\chi}_R (\varphi^\dagger \chi_L) + \text{h.c.}] . \quad (100)$$

Les deux premiers termes de  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  donnent une masse  $\sqrt{2} \mu$  à la particule de Higgs neutre qui survit à la brisure de symétrie. Le troisième donne une masse aux électrons et aux muons ( $l = e$  ou  $\mu$ ) :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow -\frac{g_l v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(l) \psi(l) ; \quad m_l = \frac{g_l v}{\sqrt{2}} . \quad (101)$$

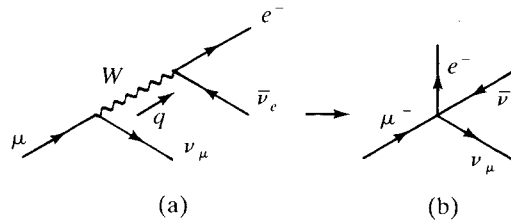
En résumé, le lagrangien complet du modèle GSW s'écrit (cf. (87)), (95) et (100) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (102)$$

où  $\vec{F}_{\mu\nu}$  est le tenseur associé au champ de jauge  $\vec{W}_\mu$  et  $f_{\mu\nu}$  celui associé au champ de jauge (abélien)  $B_\mu$ .

A la limite où les énergies en jeu sont faibles par rapport à la masse du  $W$ , on retrouve la théorie de Fermi, par exemple pour la désintégration du muon (figure 6) :

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{(2\sqrt{2})^2} \bar{u}(\nu_\mu) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u(\mu) \left[ \frac{-g^{\lambda'\lambda} + q^{\lambda'} q^\lambda / m_W^2}{q^2 - m_W^2} \right] \times \\ & \times \bar{u}(e) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v(\nu_e) \rightarrow \frac{g^2}{8 m_W^2} (\bar{u}(\nu_\mu) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u(\mu)) \times \\ & \times (\bar{u}(e) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) v(\nu_e)). \end{aligned}$$



**Figure 6.** Désintégration du muon dans GSW (a) et dans la théorie de Fermi (b).

Ceci permet de faire l'identification :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2} = \frac{1}{2 v^2}. \quad (103)$$

Cette relation permet de calculer la valeur moyenne sur le vide  $v$  :

$$v \simeq 246 \text{ GeV}$$

tandis que (99) donne la masse des bosons  $W$  et  $Z$  en fonction de l'angle de Weinberg,  $G_F$  et  $e$  :

$$\boxed{m_W^2 = \frac{e^2}{4 \sqrt{2} G_F \sin^2 \theta} ; \quad m_Z^2 = \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta}} \quad (104)$$

Expérimentalement  $m_W = 82 \pm 2 \text{ GeV}$  et  $m_Z = 93 \pm 2 \text{ GeV}$ .

Le test principal du modèle GSW consiste à vérifier l'identité des valeurs de  $\sin \theta$  mesurées dans différentes expériences. Pour résumer la situation, on peut dire que  $\sin \theta$  apparaît dans trois types de données :

$$(i) \quad \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4 \sqrt{2} G_F m_W^2} = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F m_W^2}$$

$$(ii) \quad \sin^2 \theta = 1 - m_W^2/m_Z^2$$

(iii)  $\sin^2 \theta$  est déterminé par le couplage des courants neutres dans les diffusions  $\nu N$ ,  $eD$ , etc... Ces quantités sont en général différentes dans tout modèle non minimal (c'est-à-dire comprenant plus de bosons de jauge, ou de bosons de Higgs, etc.). Cependant, avant de tester l'identité de ces trois types de détermination, on doit tenir compte des corrections radiatives<sup>(3)</sup>. Il est nécessaire de se fixer un schéma de renormalisation, et le plus populaire consiste à utiliser (ii) comme *définition* de  $\sin^2 \theta$ . Dans ce cas les corrections radiatives seront présentes pour les déterminations (i) et (iii). La valeur acceptée en 1986 pour les déterminations du type (iii) (corrections radiatives incluses) est :

$$\sin^2 \theta \simeq 0.23 \pm 0.01$$

ce qui est en bon accord avec la valeur déduite de la définition (ii) :

$$\sin^2 \theta \simeq 0.21 \pm 0.02 .$$

En ce qui concerne (i), on peut écrire les corrections radiatives sous la forme :

$$\sin^2 \theta = \left( \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F m_W^2} \right) \frac{\alpha(m_W)}{\alpha} (1 + \varepsilon)$$

où  $\varepsilon$  ne contient pas de grands logarithmes, du type  $\ln(m_W/m_e)$ . La correction la plus importante vient du passage de  $\alpha$  ( $\alpha^{-1} \simeq 137$ ) à  $\alpha(m_W)$  ( $\alpha^{-1}(m_W) \simeq 128$ ), car ce passage fait précisément intervenir des grands logarithmes ; cette discussion montre que les constantes de couplage variables avec l'échelle de masse ne sont pas une vue de l'esprit. La détermination (i) de  $\sin^2 \theta$  donne  $0.22 \pm 0.02$ . En résumé l'accord est très bon entre le modèle GSW et l'expérience. Des tests plus décisifs pourront être effectués quand on disposera de mesures très précises de la masse des bosons  $W$  et  $Z$ .

Le modèle GSW a donc permis de prédire avec succès deux phénomènes qui n'avaient a priori rien d'évident :

- (i) l'existence de courants neutres,
- (ii) l'existence de deux bosons massifs dont la masse était supérieure par deux ordres de grandeur à celles des particules connues en 1970.

Il faut y rajouter la prédiction du quark charmé, dont je n'ai pas pu parler, ayant laissé de côté le cas des hadrons.

Malgré ces succès, il faut reconnaître les points faibles de ce modèle :

- le « secteur de Higgs » est très peu contraint ; en particulier la masse du boson de Higgs qui survit à la brisure de symétrie et les masses des leptons sont tout à fait arbitraires ( $g_l$  dans (101) est arbitraire) ;
- le modèle n'est pas asymptotiquement libre, en raison du groupe de jauge  $U(1)_Y$  et du couplage en  $\varphi^4$  des bosons de Higgs ;
- le groupe de jauge est un produit direct, ce qui introduit deux constantes de couplage ; d'autre part le groupe  $U(1)_Y$  est abélien, et la quantification de la charge électrique n'est pas expliquée.

## D. CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE

La « théorie présumée des interactions fortes » est la chromodynamique quantique ( $QCD$ ). Cette théorie repose sur une symétrie interne appelée — de façon tout à fait arbitraire — symétrie de *couleur*. Le groupe de symétrie est  $SU(3)$  et les constituants élémentaires des hadrons, à savoir les quarks et antiquarks, sont rangés respectivement dans les représentations fondamentales  $3$  et  $\bar{3}$  de  $SU(3)$ . Rappelons qu'un groupe  $SU(N)$  a deux représentations inéquivalentes de dimension  $N$ , les représentations fondamentales  $N$  et  $\bar{N}$ . Cependant dans le cas  $N = 2$ , ces deux représentations sont équivalentes. Les vecteurs de base de ces représentations sont, dans le cas de  $SU(3)$ , étiquetés par la couleur, par exemple :

$$|\text{bleu}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |\text{rouge}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |\text{vert}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En plus de la couleur, les quarks se différencient par leur saveur (flavour) : comme on l'a vu au chapitre précédent, on connaît cinq types de quarks : up ( $u$ ), down ( $d$ ), strange ( $s$ ), charmed ( $c$ ), beauty ( $b$ ), et il en existe vraisemblablement un sixième, le quark top ( $t$ ). Il ne faut pas confondre la symétrie  $SU(3)$  de couleur avec la symétrie  $SU(3)$  de saveur découverte par Gell-Mann et Neeman : celle-ci est une symétrie des saveurs ( $u, d, s$ ), et commute avec la symétrie de couleur : chaque saveur existe en trois couleurs. La symétrie de saveur est approchée (par exemple les quarks  $u, d, s$  ont des masses

différentes) alors que la symétrie de couleur est exacte. De plus, et c'est là le plus important, la symétrie de couleur est aussi une symétrie *locale*, et elle est à la base d'une théorie de jauge non abélienne qui est précisément la chromodynamique quantique. Comme  $SU(3)$  a 8 ( $= 3^2 - 1$ ) générateurs, il y aura huit bosons de jauge appelés *gluons*.

En résumé, les interactions fortes sont décrites par une théorie de jauge non abélienne dont le groupe de jauge est  $SU(3)$  ; les particules de matière (spin 1/2) sont les quarks et antiquarks, appartenant aux représentations 3 et  $\bar{3}$  de  $SU(3)$ . Les particules de jauge (spin 1) sont les gluons, appartenant à la représentation de dimension 8 de  $SU(3)$ . Les hadrons observés dans la nature sont de deux types : les fermions, aussi appelés baryons (proton, neutron, ...) et les bosons, qui sont les mésons (méson- $\pi$ , méson-K, ...). Les baryons sont formés de trois quarks dont la fonction d'onde est un singlet de  $SU(3)$ , et les mésons sont formés d'une paire quark-antiquark dont la fonction d'onde appartient également à la représentation de dimension 1 de  $SU(3)$  : *les hadrons sont des singlets de couleur*. L'hypothèse selon laquelle on ne peut observer que des singlets de couleur est appelée hypothèse de *confinement*.

Si l'hypothèse de confinement est correcte, on remarque que la condition asymptotique (X.7) ne peut pas être valable pour les champs de quarks  $\psi$  et  $\bar{\psi}$ , puisqu'il n'existe pas de quarks libres. On suppose que l'origine de cette propriété réside dans les divergences infrarouges très sévères de la chromodynamique. Seules des combinaisons qui sont des singlets de couleur comme  $\bar{\psi}_i \psi_i$  ou  $\varepsilon_{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k$  peuvent correspondre à des états asymptotiques.

### D.1. Liberté asymptotique

La propriété la plus importante de  $QCD$  est la liberté asymptotique (qui est une propriété des théories de jauge non abéliennes). C'est cette propriété qui permet de calculer perturbativement certaines réactions à haute énergie, comme l'annihilation  $e^+ e^-$  que nous verrons au paragraphe D.2. Pour démontrer la propriété de liberté asymptotique, nous devons obtenir la relation entre la constante de couplage nue  $g_0$  et la constante de couplage renormalisée  $g$  :

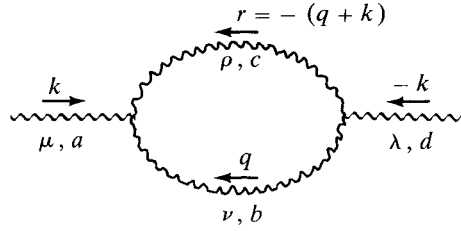
$$g_0 = Zg .$$

Compte tenu des identités de Ward (69), il y a plusieurs façons de mener ce calcul ; la plus simple est probablement d'utiliser le couplage gluon-quark (cf. equation (68)) :

$$g_0 = Z_{1F} Z_3^{-1/2} Z_2^{-1/2} g ; \quad Z = Z_{1F} Z_3^{-1/2} Z_2^{-1} . \quad (105)$$



Commençons par la boucle de gluons (figure 7) :



**Figure 7.** Contribution des gluons à l'énergie propre du gluon.

L'expression du graphe de la figure 7 est :

$$\Pi_{\lambda\mu;ad}^{(G)}(k) = \frac{1}{2} g^2 \delta_{ad} C_A \int \frac{N_{\lambda\mu} d^D q}{(2\pi)^D q^2 (q+k)^2} \quad (108)$$

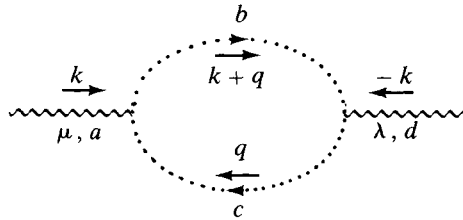
où  $1/2$  est le facteur de symétrie,  $C_A$  le facteur de groupe (cf. equation (66.a)) et  $N_{\lambda\mu}$  est donné par :

$$N_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} (5k^2 + 2q \cdot k + 2q^2) + 2q_\lambda q_\mu (2D - 3) + k_\lambda k_\mu (D - 6) + (q_\lambda k_\mu + k_\lambda q_\mu) (2D - 3).$$

Après avoir utilisé l'identité de Feynman pour combiner les dénominateurs, on effectue le changement de variables  $q = q' - xk$  en conservant seulement les termes pairs en  $q$ , et on intègre sur  $q$  à l'aide des identités de l'appendice B, avec pour résultat :

$$\Pi_{\lambda\mu;ad}^{(G)} = \frac{g^2 C_A \delta_{ad} \Gamma(2 - D/2) B\left(\frac{D}{2} - 1; \frac{D}{2} - 1\right)}{4(4\pi)^{D/2} (k^2)^{2-D/2} (D-1)} \times [(6D-5)k^2 \delta_{\lambda\mu} - (7D-6)k_\lambda k_\mu]. \quad (109)$$

Le calcul de la boucle de F-P est plus simple (figure 8) :



**Figure 8.** Contribution de la boucle de F-P à l'énergie propre du gluon.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\lambda\mu;ad}^{(FP)} &= -g^2 C_A \delta_{ad} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\lambda (q+k)_\mu}{q^2 (q+k)^2} = \\
 &= \frac{g^2 C_A \delta_{ad} \Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2} (k^2)^{2-D/2}} \frac{B\left(\frac{D}{2}-1; \frac{D}{2}-1\right)}{4(D-1)} [k^2 \delta_{\lambda\mu} + \\
 &\quad + (D-2) k_\lambda k_\mu]. \quad (110)
 \end{aligned}$$

La somme des deux contributions (109) et (110) est *transverse* (on vérifie ainsi une identité de Ward : cf. exercice 5.c) :

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\lambda\mu;ad} &= \frac{g^2 C_A \delta_{ad} \Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2} (k^2)^{2-D/2}} \frac{B\left(\frac{D}{2}-1; \frac{D}{2}-1\right)}{2(D-1)} \times \\
 &\quad \times (3D-2) [k^2 \delta_{\lambda\mu} - k_\lambda k_\mu] \quad (111)
 \end{aligned}$$

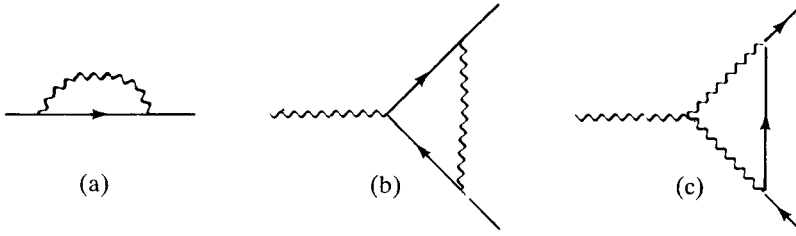
et on en déduit le terme divergent :

$$\Pi_{\lambda\mu;ad}^{(\text{div})} = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A \delta_{ad} \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) (k^2 \delta_{\lambda\mu} - k_\lambda k_\mu) \quad (112)$$

où, par analogie avec l'électrodynamique, on a introduit la constante de couplage forte  $\alpha_s = g^2/4\pi$ . Il n'est pas nécessaire de faire le calcul de la boucle de quarks, qui est identique à celui de la polarisation du vide en électrodynamique, mis à part un facteur de groupe (66.c). Si  $n_f$  est le nombre de saveurs, on obtient à partir de (XII.54) le résultat suivant pour  $Z_3$  dans le schéma *MS* :

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{5}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F n_f \right) \frac{2}{\varepsilon}. \quad (113)$$

Il faut ensuite calculer les graphes contribuant à  $Z_{1F}$  et à  $Z_2$  (figure 9) :



**Figure 9.** Graphes contribuant à  $Z_2$  et  $Z_{1F}$ .

Les graphes (a) et (b) de la figure 9 sont, à part un facteur de groupe, identiques à ceux de l'électrodynamique. Ces facteurs sont respectivement :

$$\text{(a)} : C_F \text{ (cf. 66.c)} ; \quad \text{(b)} : C_F - \frac{1}{2} C_A \text{ (exercice 4.a)} .$$

Les facteurs  $C_F$  de (a) et (b) se compensent dans le calcul de  $Z$  et il reste une contribution effective :

$$Z_2^{-1} Z_{1F}^{(a+b)} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} C_A \right) \frac{2}{\epsilon}. \quad (114)$$

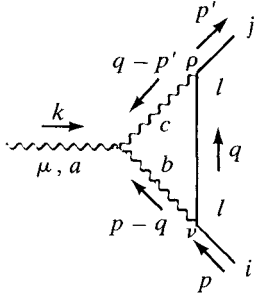
Reste le graphe (c), dont le calcul exact est assez long ; heureusement nous pouvons nous contenter de sa partie divergente. La contribution du graphe (c) contient en facteur (figure 10) :

$$ig^3 f_{abc} \left( \frac{1}{2} \lambda_c \right)_{jl} \left( \frac{1}{2} \lambda_b \right)_{li}$$

où  $\frac{1}{2} \lambda_a$  est un générateur infinitésimal de la représentation fondamentale.

D'après l'exercice (4.b), ce facteur multiplicatif vaut :

$$\frac{1}{2} g^3 C_A \left( \frac{1}{2} \lambda_a \right)_{ji}. \quad (115)$$



Ecrivons maintenant le numérateur dans le calcul de la boucle (figure 10) :

$$N_\mu = [\delta_{\mu\nu} (k - p + q)_\rho + \delta_{\nu\rho} (p + p' - 2q)_\mu + \delta_{\rho\mu} (q - p' - k)_\nu] \gamma_\rho (-\not{q}) \gamma_\nu.$$

Figure 10. Evaluation du graphe c.

Comme nous cherchons uniquement le terme divergent, il suffit de conserver le terme quadratique en  $q$  :

$$N_\mu \rightarrow 2q^2 \gamma_\mu + 4q_\mu \not{q} \rightarrow 3q^2 \gamma_\mu$$

et après une intégration triviale sur  $q$  on obtient la partie divergente du graphe :

$$\Gamma_{\mu, ji}^{(\text{div})} = \left[ \frac{1}{2} g (\lambda_a)_{ji} \gamma_\mu \right] \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{2} C_A \right) \left( 3 \times \frac{2}{\epsilon} \right)$$

ce qui donne une contribution  $Z_{1F}^{(c)}$  à  $Z_{1F}$  :

$$Z_{1F}^{(c)} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{3}{2} C_A \right) \frac{2}{\epsilon}. \quad (116)$$

Rassemblant les résultats (113), (114) et (116) on déduit l'expression de  $Z$  en les reportant dans (105) (les quantités  $Z_3$ ,  $Z_{1F}$  et  $Z_2$  dépendent de la jauge, c'est-à-dire de  $a$  ; cependant  $Z$ , du moins dans le schéma MS, est indépendant du paramètre de jauge : exercice 12) :

$$Z = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[ \frac{11}{6} C_A - \frac{2}{3} T_F n_f \right] \frac{2}{\epsilon}. \quad (117)$$

La fonction  $\beta(\alpha_s)$  se lit immédiatement sur (117) ( $C_A = N$ ,  $T_F = 1/2$ ), en utilisant (VII-81) et  $\alpha_s^0 = Z^2 \alpha_s$  :

$$\beta(\alpha_s) = \mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{\alpha_s^2}{2\pi} \left( \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right) + O(\alpha_s^3) \quad (118)$$

Le terme en  $\alpha_s^2$  dans (118) est négatif si  $n_f < \frac{11}{2} N$ , et dans ce cas la chromodynamique est asymptotiquement libre.

Dans la littérature on se sert souvent de la constante de couplage  $\alpha_s(q^2)$ , dépendant d'une masse  $q$  caractéristique du processus étudié : le choix de  $\alpha_s(q^2)$  permet de faire de la théorie des perturbations améliorée par le groupe de renormalisation. Intégrons l'équation différentielle :

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln q^2} = -4 \pi \beta_0 \alpha_s^2$$

avec

$$\beta_0 = \frac{1}{16 \pi^2} \left( \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right) \quad (119)$$

(le choix de la normalisation de  $\beta_0$  est expliqué à l'équation (121)), sous la forme :

$$\int_{\alpha_s(q^2)}^{\infty} \frac{d\alpha_s}{4 \pi \beta_0 \alpha_s^2} = \ln \frac{q^2}{\Lambda^2}$$

où  $\Lambda$  est une constante d'intégration. Le résultat est :

$$\alpha_s(q^2) = \frac{1}{4 \pi \beta_0 \ln (q^2/\Lambda^2)} \quad (120)$$

La constante de couplage décroît comme  $(\ln q^2)^{-1}$ . Il faut bien comprendre la signification physique de (120) : au lieu de se donner un point de renormalisation  $\mu^2$  et une constante de couplage  $\alpha_s(\mu^2)$ , on fixe l'intensité du couplage par un paramètre dimensionné  $\Lambda$ , qui est une constante d'intégration de l'équation différentielle de renormalisation : cette procédure a été appelée « transmutation dimensionnelle ». Elle ne se limite évidemment pas au premier ordre en  $\alpha_s$  ; écrivant :

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + O(g^7) \quad (121)$$

où les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont universels (cf. VII-A.5), et  $\beta_1$  est donné par <sup>(4)</sup> :

$$\beta_1 = \left( \frac{1}{16\pi^2} \right)^2 \left( \frac{34}{3} N^2 - \frac{10}{3} N n_f - \frac{n_f(N^2 - 1)}{N} \right) \quad (122)$$

on obtient, avec un choix convenable de la constante d'intégration (exercice 11) :

$$\alpha_s(q^2) = \frac{1}{4\pi\beta_0 \ln \frac{q^2}{\Lambda^2}} \times \left[ 1 - \frac{\beta_1 \ln \ln q^2/\Lambda^2}{\beta_0^2 \ln q^2/\Lambda^2} + O \left( \frac{\ln \ln^2 q^2/\Lambda^2}{\ln^2 q^2/\Lambda^2} \right) \right]. \quad (123)$$

Le paramètre  $\Lambda$  dépend du schéma de renormalisation. La valeur acceptée pour  $\Lambda_{\overline{MS}}$  (cf. note page 263) était en 1986 :

$$50 \text{ MeV} \leq \Lambda_{\overline{MS}} \leq 200 \text{ MeV}.$$

L'importance du paramètre  $\Lambda$  est qu'il fixe l'échelle de masse de la théorie, indépendamment de la masse des quarks, c'est-à-dire même si la masse des quarks est nulle ou même si les quarks sont absents. Ceci sera revu sous un autre angle au paragraphe E.3.

## D.2. Annihilation $e^+ e^-$ : cinématique

Nous nous proposons maintenant de préciser le calcul du rapport  $R$  fait au chapitre XII, paragraphe B.3, en évaluant la correction d'ordre  $\alpha_s$  à ce rapport et en discutant la validité de l'approche théorique. Au passage nous aurons l'occasion de découvrir des phénomènes intéressants comme les singularités infrarouges et colinéaires, et d'écrire une équation très importante, l'équation d'Altarelli-Parisi, dans un cas particulier.

Supposons que nous observions dans l'annihilation  $e^+ e^-$  en hadrons, un hadron de type particulier  $H$  (par exemple un méson  $\pi^+$ ), de moment  $p_H$  dans le référentiel du centre de masse  $e^+ e^-$  ; l'énergie  $p_{0H}$  de ce hadron sera comprise entre  $m_H$  et  $q/2$ . Négligeant la masse du hadron ( $m_H \ll q/2$ , où  $q$  est la masse du photon virtuel), il est naturel d'introduire la variable  $z_H$  comprise entre 0 et 1 :

$$z_H = \frac{2p_{0H}}{q} = \frac{2p_H \cdot q}{q^2}; \quad 0 \leq z_H \leq 1. \quad (124)$$

On peut mesurer la section efficace  $d\sigma/dz_H$  de production d'un hadron de moment  $z_H q/2$ , et définir la *fonction de fragmentation*  $D_H(z_H)$  par :

$$D_H(z_H) = \frac{1}{\sigma_T} \frac{d\sigma}{dz_H} \quad (125)$$

où  $\sigma_T$  est la section efficace totale  $e^+e^- \rightarrow$  hadrons.

Donnons d'abord une description cinématique du processus. La réaction :

$$e^+e^- \rightarrow H(p_H) + X$$

est représentée sur la figure 11 ;  $X$  représente l'ensemble des particules non observées.

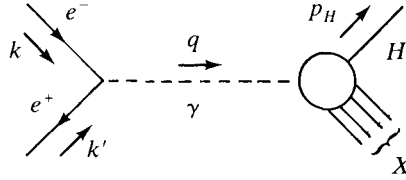


Figure 11. La réaction  $e^+ - e^- \rightarrow H(p_H) + X$ .

Définissons le tenseur  $W_{\mu\nu}^H$  à l'aide des éléments de matrice du courant électromagnétique  $j_\mu$  (le facteur  $(4\pi)^{-1}$  est conventionnel) :

$$W_{\mu\nu}^H = \frac{1}{4\pi} \int d\Phi^{(X)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_H - p_X) \times \\ \times \langle p_H, X | j_\mu(0) | 0 \rangle \langle 0 | j_\nu(0) | p_H, X \rangle \quad (126)$$

où  $d\Phi^{(X)}$  est l'espace de phase. La section efficace  $d\sigma$  s'écrit en fonction de  $W_{\mu\nu}^H$  et du tenseur leptonique  $l_{\mu\nu}$  :

$$l_{\mu\nu} = 4(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu) - 2q^2 g_{\mu\nu}$$

sous la forme :

$$d\sigma = \frac{e^4}{8q^2 q^4} \frac{d^3 p_H}{(2\pi)^3 2p_{0H}} 4\pi l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^H. \quad (127)$$

La conservation du courant  $j_\mu$  permet d'écrire le tenseur  $W_{\mu\nu}^H$  en fonction de deux invariants de Lorentz  $W_1^H$  et  $W_2^H$ , également appelés

fonctions de structure, qui dépendent uniquement de  $z_H$  et de  $q^2$ :

$$W_{\mu\nu}^H = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1^H + \left( p_{\mu H} - \frac{q_\mu (p_H \cdot q)}{q^2} \right) \left( p_{\nu H} - \frac{q_\nu (p_H \cdot q)}{q^2} \right) W_2^H \quad (128)$$

et l'on trouve :

$$\frac{d\sigma}{dz_H d\cos\theta_H} = \frac{\pi\alpha^2 z_H}{q^4} l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^H = \frac{\pi\alpha^2 z_H}{q^2} \left[ W_1^H + \frac{q^2 z_H^2}{8} \sin^2\theta_H W_2^H \right] \quad (129)$$

où  $\theta_H$  est l'angle entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{p}_H$ . Si l'on ne s'intéresse pas à la distribution angulaire, on peut intégrer sur  $\cos\theta_H$  avec pour résultat :

$$\frac{d\sigma}{dz_H} = \frac{2\pi\alpha^2 z_H}{q^2} \left[ W_1^H + \frac{q^2 z_H^2}{12} W_2^H \right] = \frac{4\pi\alpha^2 z_H}{3q^2} W^H \quad (130)$$

où l'on a défini  $W^H$  par :

$$W^H = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^H. \quad (131)$$

### D.3. Equation d'Altarelli-Parisi

L'équation (131) termine l'étude cinématique, et nous passons maintenant à la dynamique. La chromodynamique quantique nous apprend que le processus fondamental est la production de quarks, d'antiquarks et de gluons, et que les hadrons ne se forment qu'ultérieurement, par le mécanisme — pour le moment imparfaitement connu — du confinement. Ignorant pour le moment le confinement, nous allons étudier la production d'un quark, en définissant pour ce quark les quantités  $z$ ,  $W_{\mu\nu}$  et  $W$ , analogues de  $z_H$ ,  $W_{\mu\nu}^H$  et  $W^H$ . Le processus le plus simple (ordre  $(\alpha_s)^0$  en QCD) est la réaction  $e^+e^- \rightarrow q - \bar{q}$ , étudiée au chapitre XII. Dans ce cas la fonction de fragmentation vaut  $\delta(1-z)$  et la section efficace  $d\sigma/dz$  (cf. XII.31 ;  $e_q$  est la charge du quark en unités de la charge du proton) :

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e_q^2 \delta(1-z) \quad (132)$$

soit (cf. (130) et (131)) :

$$W = \delta(1-z). \quad (133)$$

La correction d'ordre  $\alpha_s$  est donnée par le processus :

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + g$$

où  $g$  représente un gluon. Les deux graphes contribuant à cette réaction sont dessinés sur la figure 12 qui définit aussi la cinématique :

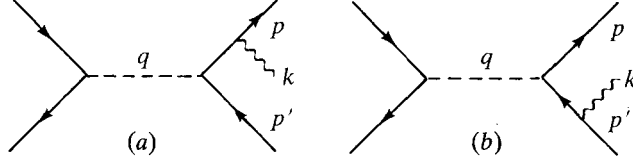


Figure 12. La réaction  $e^+ - e^- \rightarrow q\bar{q}g$  à l'ordre  $\alpha_s$ .

Comme nous supposons  $q \gg 1$  GeV, nous pouvons négliger la masse des quarks. Dans ces conditions l'élément de matrice de la réaction  $\gamma^*(q) \rightarrow q(p) + q(p') + g(k)$  s'écrit :

$$\mathcal{M}_\mu = (-ig)(-ie_q) \bar{u}(p) \left[ \not{\epsilon} \frac{\lambda_a}{2} \frac{i}{\not{p} + \not{k}} \gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{i}{\not{p}' + \not{k}} \not{\epsilon} \frac{\lambda_a}{2} \right] v(p') \quad (134)$$

où  $\epsilon_\mu$  est la polarisation du gluon. Prenant le carré de l'élément de matrice, sommant sur les spins finaux et saturant avec  $g^{\mu\nu}$ , nous obtenons, après un calcul de traces de matrices  $\gamma$  sans aucune difficulté (exercice 13) :

$$|\mathcal{M}|^2 = -g^{\mu\nu} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}_\nu^* = 8 C_F e_q^2 g^2 \frac{u^2 + s^2 + 2tq^2}{us} \quad (135)$$

où nous avons introduit les variables de Mandelstam  $s$ ,  $t$  et  $u$  :

$$s = (p' + k)^2; \quad t = (p + p')^2; \quad u = (p + k)^2 \quad (136)$$

tandis que  $C_F = 4/3$  ( $= (N^2 - 1)/2N$  avec  $N = 3$ ). Les variables  $z$  et  $z'$  s'expriment en fonction de  $s$ ,  $u$  et  $q^2$  :

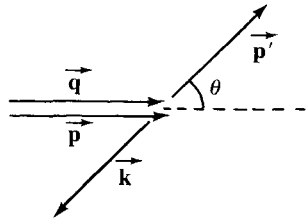
$$z = \frac{2p \cdot q}{q^2} = 1 - \frac{s}{q^2}; \quad z' = \frac{2p' \cdot q}{q^2} = 1 - \frac{u}{q^2} \quad (137)$$

et permettent de récrire  $|\mathcal{M}|^2$  :

$$|\mathcal{M}|^2 = 8 C_F e_q^2 g^2 X(z, z') = 8 C_F e_q^2 g^2 \frac{z^2 + z'^2}{(1-z)(1-z')} \quad (138)$$

Arrêtons-nous un instant sur l'expression (138) ; supposons d'abord  $z \neq 1$  : la quantité  $X(z, z')$  est singulière lorsque  $z' \rightarrow 1$ . Dans ce cas le gluon et le quark ont leurs moments parallèles et de même sens : on dit aussi qu'ils sont colinéaires (\*). Pour traiter la singularité correspondante il est nécessaire, dans une étape intermédiaire, de se donner une régularisation. La méthode la plus correcte consiste à travailler dans un espace à  $4 + \varepsilon$  dimensions (exercice 14). Cependant, à l'ordre de la théorie des perturbations où nous travaillons, il est aussi possible de donner une masse  $\lambda \neq 0$  au gluon sans violer la conservation du courant. Comme l'interprétation physique est plus claire, j'utiliserai cette « régularisation infrarouge ». Nous verrons dans un instant que les configurations colinéaires  $z \neq 1$ ,  $z' \rightarrow 1$  et  $z' \neq 1$ ,  $z \rightarrow 1$  donnent des contributions en  $\ln q^2/\lambda^2$ , singulières à la limite  $\lambda \rightarrow 0$  : ce sont les *singularités colinéaires*, également appelées *singularités de masse*. La région  $z \rightarrow 1$ ,  $z' \rightarrow 1$  correspond à l'émission d'un gluon de moment très faible, appelé pour cette raison *gluon infrarouge* ou *gluon mou*. Cette région donne une *singularité infrarouge* en  $\ln^2(q^2/\lambda^2)$ , caractéristique d'une théorie de jauge. En effet une théorie renormalisable ordinaire, comme la théorie en  $\varphi^3$  à six dimensions, ne donne que des singularités de masse.

Evaluons maintenant de façon précise la quantité  $W = -1/2 g_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$  ; d'après (126) nous devons intégrer sur les moments  $p'$  et  $k$  de l'antiquark et du gluon. Cette intégration se fait commodément dans le référentiel du centre de masse de ces deux particules :  $\mathbf{p}' + \mathbf{k} = 0$  (figure 13) :



$$W = \frac{1}{64 \pi^2} \frac{\|\mathbf{p}'\|}{\sqrt{s}} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta |\mathcal{M}|^2. \quad (139)$$

Un petit exercice de cinématique relativiste donne :

**Figure 13.** Cinématique dans le référentiel  $\mathbf{p}' + \mathbf{k} = 0$ .

$$q_0 = \frac{s + q^2}{2 \sqrt{s}}; \quad p_0 = \|\mathbf{p}\| = \frac{q^2 - s}{2 \sqrt{s}}; \\ p'_0 = \|\mathbf{p}'\| = \frac{s - \lambda^2}{2 \sqrt{s}}. \quad (140)$$

Au lieu d'intégrer sur  $\cos \theta$  dans (139), nous allons intégrer sur la variable

(\*) On serait tenté d'attribuer la singularité au graphe (a) de la figure 12. Cependant la contribution de chaque graphe n'est pas invariante de jauge. Il est facile de trouver des jauges (exercice 15) où le graphe (a) donne une contribution nulle.

$z'$  reliée à  $\cos \theta$  par :

$$z' = \frac{\|\mathbf{p}'\|}{q^2 \sqrt{s}} [(q^2 + s) - (q^2 - s) \cos \theta] = \frac{s - \lambda^2}{2sq^2} [(q^2 + s) - (q^2 - s) \cos \theta] \quad (141)$$

soit :

$$\left| \frac{dz'}{d \cos \theta} \right| = \frac{z \|\mathbf{p}'\|}{\sqrt{s}}$$

et :

$$W = \frac{1}{64 \pi^2 z} \int_{z'_m}^{z'_M} dz' |\mathcal{M}|^2. \quad (142)$$

L'équation (141) donne également les limites d'intégration en  $z'$  :

$$z'_m = 1 - z - \frac{\lambda^2}{q^2} \leq z' \leq 1 - \frac{\lambda^2}{q^2(1-z)} = z'_M. \quad (143)$$

D'autre part nous devons corriger l'élément de matrice carré  $|\mathcal{M}|^2$  dans (138) pour tenir compte de la masse  $\lambda$  du gluon :

$$X(z, z') \rightarrow X(z, z') - \frac{\lambda^2}{q^2} \left( \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-z')^2} \right). \quad (144)$$

Enfin il est commode d'utiliser pour  $(1-z)^{-1}$  une définition du type valeur principale ; comme  $0 \leq z \leq 1 - \frac{\lambda^2}{q^2}$  nous écrivons :

$$\int_0^{1-\lambda^2/q^2} \frac{dz f(z)}{1-z} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z} - f(1) \ln \frac{q^2}{\lambda^2} + O\left(\frac{\lambda^2}{q^2}\right) \quad (145)$$

ou en termes de la distribution  $(1-z)_+^{-1}$  :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)_+} + \delta(1-z) \ln \frac{q^2}{\lambda^2}. \quad (146)$$

On définit de même la distribution  $[\ln(1-z)/(1-z)]_+$  :

$$\left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right) = \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - \frac{1}{2} \delta(1-z) \ln^2 \frac{q^2}{\lambda^2}. \quad (147)$$

Nous voyons émerger les termes singuliers  $\ln(q^2/\lambda^2)$  et  $\ln^2(q^2/\lambda^2)$  annoncés. Après cette préparation, nous sommes enfin en mesure d'intégrer sur  $z'$  ; les termes qui tendent vers zéro à la limite  $\lambda^2 \rightarrow 0$ , par exemple  $(\lambda^2/q^2) \ln(q^2/\lambda^2)$  seront omis.

$$\int_{z'_m}^{z'_M} dz' X(z, z') = \frac{1+z^2}{1-z} \int_{z'_m}^{z'_M} \frac{dz'}{1-z'} + \frac{1}{1-z} \int_{z'_m}^{z'_M} \frac{(z'^2-1) dz'}{1-z'} = I_1(z) + I_2(z).$$

Le résultat de l'intégration est :

$$I_1(z) = \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \ln \frac{q^2}{\lambda^2} + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ + \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + \delta(1-z) \ln^2(q^2/\lambda^2)$$

$$I_2(z) = -\frac{3}{2(1-z)_+} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z - \delta(1-z) \left( \frac{3}{2} \ln \frac{q^2}{\lambda^2} - \frac{7}{4} \right).$$

Le deuxième terme de (144) donne les contributions suivantes :

$$\frac{\lambda^2}{q^2(1-z)^2} \rightarrow \frac{1}{2} \delta(1-z); \quad \frac{\lambda^2}{q^2(1-z')^2} \rightarrow 1-z.$$

Rassemblant tous ces résultats on obtient pour  $W$  :

$$W = \frac{2\alpha_s e_q^2}{3\pi z} \left[ (1+z^2) \left[ \frac{\ln(q^2/\lambda^2)}{(1-z)_+} + \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ + \frac{\ln z}{1-z} \right] - \frac{3}{2(1-z)_+} + \frac{1}{2}(1+z) + \delta(1-z) \left[ \ln^2 \frac{q^2}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \ln \frac{q^2}{\lambda^2} + \frac{5}{4} \right] \right]. \quad (148)$$

Cette expression exhibe, comme prévu, des singularités infrarouges et colinéaires. Cependant notre calcul de  $W$  n'est pas complet. En effet, nous devons

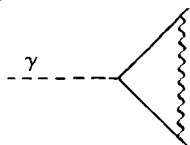


Figure 14. Echange d'un gluon virtuel dans  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ .

ajouter le graphe correspondant à une correction radiative au vertex photon-quark (figure 14) qui est du même ordre en  $\alpha_s$ ; cette contribution est appelée « virtuelle » (le gluon dans la figure 14 étant virtuel), par opposition à la contribution (148) qui est appelée « réelle ».

La contribution à  $W$  du graphe de la figure 14 s'obtient simplement en multipliant celle du graphe d'ordre  $(\alpha_s)^0$  (cf. (133)) par  $2 \operatorname{Re} F_1(q^2)$ , où  $F_1(q^2)$  est le facteur de forme évalué au chapitre XII (équation (81.a)). Cette expression permet de montrer que la contribution du graphe de la figure 14 à  $W$  est donnée par (exercice XII.7 ; il ne faut pas oublier le prolongement analytique  $q^2 < 0 \rightarrow q^2 > 0$ ) :

$$-\frac{2\alpha_s}{3\pi} e_q^2 \delta(1-z) \left[ \ln^2 \frac{q^2}{\lambda^2} - 3 \ln \frac{q^2}{\lambda^2} + \frac{7}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (149)$$

La renormalisation étant faite sur couche de masse, il n'y a pas de corrections dues aux lignes externes.

Additionnant (133), (148) et (149), nous obtenons  $d\sigma/dz$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dz} = & \frac{4\pi\alpha_s^2}{3q^2} e_q^2 \left\{ \delta(1-z) \left[ 1 + \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{9}{4} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left[ P_{qq}(z) \ln \frac{q^2}{\lambda^2} + (1+z^2) \left[ \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ + \frac{\ln z}{1-z} \right] - \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2(1-z)_+} + \frac{1}{2}(1+z) \right] \right\} \quad (150) \end{aligned}$$

où  $P_{qq}(z)$  est la fonction d'Altarelli-Parisi :

$$P_{qq}(z) = \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) = \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ . \quad (151)$$

L'addition des graphes réels et virtuels a fait disparaître les singularités infrarouges. Le mécanisme de cette compensation est connu sous le nom de « mécanisme de Bloch-Nordsieck ». Il reste dans (150) uniquement les singularités de masse, qui sont proportionnelles à la fonction  $P_{qq}(z)$ . Essayons maintenant d'interpréter cette équation ; évidemment une interprétation directe comme section efficace n'est pas possible, car le résultat dépend de la masse  $\lambda$  du gluon, qui est seulement un intermédiaire de calcul. De plus le résultat dépend de la régularisation infrarouge utilisée. Cependant, nous pouvons tirer de (150) l'équation suivante pour la fonction de fragmentation  $D(z, q^2)$ , valable à l'ordre  $\alpha_s$ , et qui ne dépend plus de  $\lambda^2$  :

$$\frac{dD(z, q^2)}{d \ln q^2} = \alpha_s \int_z^1 \frac{dx}{x} P_{qq} \left( \frac{z}{x} \right) D(x, q^2) + O(\alpha_s^2) \quad (152)$$

(dans le membre de droite de (152),  $D(x, q^2) = \delta(1-x)$  est calculé à l'ordre  $(\alpha_s)^0$ ). Cette équation suggère l'équation d'évolution suivante pour la fonction  $D_H(z_H, q^2)$ , ou *équation d'Altarelli-Parisi* :

$$\frac{dD_H(z_H, q^2)}{d \ln q^2} = \int_{z_H}^1 \frac{dx}{x} \mathcal{P} \left( \frac{z_H}{x} \right) D_H(x, q^2) \quad (153)$$

où

$$\mathcal{P}(z) = \frac{2\alpha_s(q^2)}{3\pi} P_{qq}(z) + O(\alpha_s^2) . \quad (154)$$

Il est effectivement possible de prouver une telle équation d'évolution, mais sa démonstration sort du cadre de ce livre.

#### D.4. Correction d'ordre $\alpha_s$ au rapport $R$

Après ce long détour, qui nous a cependant fait voir nombre de propriétés intéressantes, revenons à notre objectif initial qui était le calcul du rapport  $R$ . Notons que l'intégrale sur  $z$  de  $d\sigma/dz$  est simplement la section efficace totale  $\sigma_T$ , car un seul quark est produit dans l'état final. En utilisant les identités

$$\int_0^1 dz (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ = \frac{7}{4}$$

$$\int_0^1 dz \frac{1+z^2}{1-z} \ln z = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{4}$$

on obtient à partir de (150) :

$$\sigma_T = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (155)$$

soit pour le rapport  $R$  :

$$R = 3 \sum_i (e_q^{(i)})^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s(q^2)}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right) \quad (156)$$

Comme la seule échelle de masse dans le problème est  $q$ , nous avons utilisé la constante de couplage  $\alpha_s(q^2)$ . Il y a trois remarques importantes à faire :

(i) aux énergies les plus élevées accessibles aujourd'hui,  $\alpha_s(q^2)/\pi \lesssim 0.1$  : le calcul perturbatif est donc justifié, quoique sa précision reste très inférieure à celle de l'électrodynamique, où  $\alpha/\pi \sim 10^{-3}$ .

(ii) l'intégration sur tous les états finaux dans (155) a fait disparaître toutes les singularités, infrarouges et colinéaires. Nous venons de vérifier sur cet exemple un théorème dû à Kinoshita, Lee et Nauenberg (théorème KLN) <sup>(5)</sup>.

(iii) On peut montrer que le confinement ne modifie pas le résultat (156) quand  $q^2 \rightarrow \infty$ . En effet le temps de formation de l'état final quark-gluon est de l'ordre de  $1/q$ , alors que le temps de confinement doit être de l'ordre de  $1 \text{ (GeV)}^{-1}$ , compte tenu des échelles d'énergie caractéristiques des deux processus. On peut imaginer une expérience théorique effectuée à un temps  $t$  tel que  $q^{-1} \ll t \ll 1 \text{ (GeV)}^{-1}$ . Cette

expérience mesurerait la section efficace (156). Une fois cette section efficace construite, le confinement ne peut plus la modifier.

Ce paragraphe D ne donne qu'un aperçu très limité du vaste champ d'applications de la chromodynamique perturbative : annihilation  $e^+e^-$ , mais aussi diffusion profondément inélastique d'électrons, production de paires de leptons, production de bosons  $W$  et  $Z$ , de jets, diffusion à grand moment transverse, etc. Le lecteur intéressé est renvoyé à la littérature citée dans les références.

### E. THÉORIES DE JAUGE SUR RÉSEAU

La chromodynamique quantique perturbative ignore le problème du confinement ; les prédictions ne sont possibles que pour certains processus de haute énergie : plus exactement il est nécessaire d'avoir dans la réaction considérée un transfert de moment  $q$  tel que  $q^2 \gg \Lambda^2$ , où  $\Lambda$  est le paramètre caractérisant la constante de couplage de  $QCD$ ,  $\alpha_s(q^2)$  (cf. équation (120)). Ce paramètre  $\Lambda$  est de l'ordre de 0.1 GeV et sa valeur correspond bien à une échelle d'énergie caractéristique du confinement. La chromodynamique perturbative ne permet pas de calculer les quantités physiques reliées au confinement : fonction de fragmentation  $D_H(z_H, q_0^2)$  (condition initiale dans l'équation d'évolution (153)), masses des hadrons, sections efficaces totales hadroniques, etc. Toutes ces quantités doivent être calculées avec des techniques non perturbatives, c'est-à-dire à l'heure actuelle avec des techniques numériques.

L'idée la plus fructueuse consiste à « mettre la théorie sur réseau », c'est-à-dire à écrire une action (appelée hamiltonien dans la première partie : cf. X-B.3) qui, à la limite où le pas du réseau  $a \rightarrow 0$ , redonne l'action (48) de la théorie continue. Afin de nous ramener à un problème de mécanique statistique classique, nous partirons de l'action euclidienne à quatre dimensions, et nous calculerons des énergies libres, des fonctions de corrélation, etc. Ainsi, avec ce dernier paragraphe, nous avons « bouclé la boucle » : partis de la mécanique statistique classique, nous l'avons abandonnée pour une longue excursion en théorie quantique des champs, et nous y revenons avec les théories de jauge sur réseau.

Avant de passer à des exemples, une remarque préliminaire s'impose : dans la théorie sur réseau, le seul paramètre dimensionné est  $a$  ; si nous souhaitons calculer par exemple une masse  $m$ , celle-ci sera proportionnelle à  $a^{-1}$  :  $m = (\xi a)^{-1}$ , où  $\xi$  est la longueur de corrélation

en unités du pas du réseau. Comme  $m$  doit rester finie à la limite  $a \rightarrow 0$ , il est nécessaire que  $\xi \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que l'on se trouve à un point critique de la théorie considérée. Ainsi que nous l'avons déjà vu (chapitres VI et VII), la construction d'une théorie renormalisée implique l'existence d'un point critique. Dans le cas de la chromodynamique, un point critique (on espère que c'est le seul) se trouve à  $g_0 = 0$ , étant donné que  $g_0 = 0$  est un point fixe : la limite continue sera telle que  $g_0(a) \rightarrow 0$ . Notez que la constante de couplage est ici la constante de couplage *nue* : en effet le réseau sert à régulariser la théorie, et  $g_0$  est la constante de couplage de la théorie régularisée.

### E.1. Modèle de Wegner

Afin d'introduire les théories de jauge sur réseau dans un cas élémentaire, nous décrirons d'abord le modèle de Wegner à deux dimensions. Considérons un réseau carré à deux dimensions comportant  $N$  sites ( $N \gg 1$ ), où des spins d'Ising  $S_i = \pm 1$  sont placées sur les *liens* (et non aux nœuds) du réseau (figure 15) :

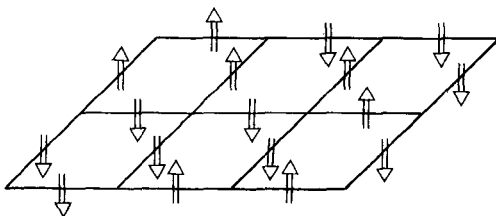
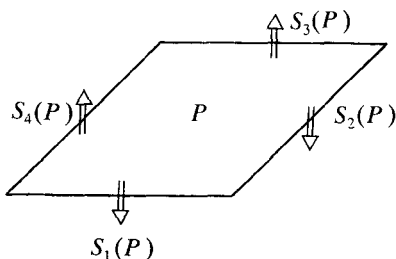


Figure 15. Le modèle de Wegner à deux dimensions.

Le hamiltonien (ou action) est donné par la somme de produits de quatre spins le long d'un carré, ou plaquette ( $P$ ) (figure 16),



$$H = -J \sum_P S_1(P) S_2(P) \times S_3(P) S_4(P) \quad (157)$$

la sommation portant sur les  $N$  plaquettes. La fonction de partition  $Z$  vaut :

Figure 16. Une plaquette.

$$Z = \sum_{[S_i]} e^{-\beta H}. \quad (158)$$

Soit  $G(x)$  la transformation qui renverse tous les spins situés sur les liens partant du point  $x$  (qui est un nœud du réseau (figure 17)) et

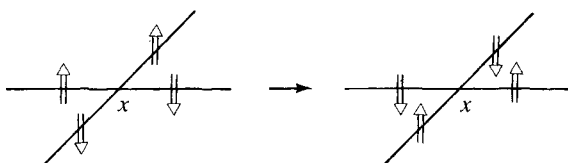


Figure 17. La transformation de jauge locale  $G(x)$ .

laisse inchangés les autres spins. Cette transformation laisse invariant le hamiltonien (157), et elle peut être interprétée comme une transformation de jauge locale : à chaque point  $x$  est associé un référentiel permettant de définir l'orientation des quatre spins sur les liens partant de  $x$ . L'invariance de  $H$  montre que l'orientation relative de deux référentiels  $(x)$  et  $(x')$  est arbitraire. Le groupe de jauge, qui est le groupe dont les éléments permettent de relier deux référentiels au même point  $x$  entre eux est ici le groupe à deux éléments  $\{+1, -1\}$ , appelé groupe  $Z_2$ .

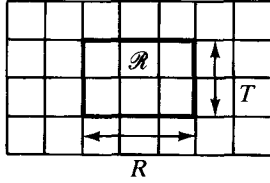
Le modèle de Wegner se généralise à une dimension  $D$  quelconque, et il possède une transition de phase pour  $D \geq 3$ . On peut se poser la question du paramètre d'ordre : est-il possible que dans une phase basse température  $\langle S_i \rangle$  soit différent de zéro ? Il est facile de voir qu'il n'en est rien : en effet, plaçant le système de spins dans un champ magnétique infinitésimal  $B$ , on constate que les hamiltoniens de deux configurations de spins reliées par une transformation de jauge locale  $G(x)$  diffèrent d'une quantité infinitésimale (exercice 16). Au contraire dans le cas du modèle d'Ising ordinaire, renverser tous les spins coûte une énergie  $NB$ . L'argument peut être généralisé et rendu rigoureux pour tout système de spins présentant une symétrie de jauge locale (théorème d'Elitzur). Il nous faut donc trouver un autre type de paramètre d'ordre, qui sera en fait non local.

La fonction de partition  $Z$  est facile à évaluer lorsque  $D = 2$  : en effet il suffit de développer l'exponentielle dans (158) en utilisant l'identité :

$$e^{\beta J S_1(P) \dots S_4(P)} = \text{ch}(\beta J) + S_1(P) \dots S_4(P) \text{sh}(\beta J).$$

Pour que la somme sur les configurations soit non nulle, il faut (par un

argument analogue à celui de I-B.2) que l'on ait zéro plaquette, ou bien que les plaquettes recouvrent l'ensemble du réseau (avec des conditions aux limites périodiques). Le résultat final est ( $N \gg 1$ ) :



$$Z = [4 \operatorname{ch}(\beta J)]^N.$$

**Figure 18.** La boucle de Wilson. Considérons maintenant sur le réseau un rectangle  $\mathcal{R}$  de côtés  $T$  et  $R$  (figure 18), et la « boucle de Wilson »  $W(\mathcal{R})$  :

$$W(\mathcal{R}) = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_l\}} \left( \prod_{\mathcal{R}} S_l \right) e^{-\beta H} \quad (159)$$

où  $\prod_l S_l$  représente le produit de tous les spins situés sur les liens définissant le contour du rectangle. Il est facile de montrer les deux propriétés suivantes :

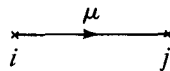
- (i)  $W(\mathcal{R})$  est invariant dans une transformation de jauge locale ;
- (ii)  $\ln W(\mathcal{R}) = (\ln \operatorname{th} \beta J) TR$  :  $\ln W(\mathcal{R})$  est proportionnel à l'aire du rectangle  $\mathcal{R}$  (il suffit de remarquer que les plaquettes doivent recouvrir intégralement le rectangle  $\mathcal{R}$ ).

Le modèle de Wegner à deux dimensions rappelle manifestement le modèle d'Ising à 1 dimension, et il n'est pas difficile de montrer l'équivalence des deux modèles (exercice 17).

La quantité  $W(\mathcal{R})$  est le paramètre d'ordre (non local) recherché ; elle est invariante de jauge, et lorsque  $D \geq 3$ , la transition de phase se signale de la façon suivante :  $\ln W$  cesse d'être proportionnel à l'aire du rectangle, et devient proportionnel à son périmètre. La « loi d'aire »  $\ln W \sim TR$  est obtenue par un développement haute température, valable lorsque  $\beta \rightarrow 0$ , et la « loi de périmètre »  $\ln W \sim (T + R)$  par un développement basse température, valable lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ .

## E.2. Action de Wilson et couplage fort

Venons-en maintenant à des théories plus réalistes ; soit  $G$  un groupe de Lie compact,  $SU(N)$  pour fixer les idées, et soient sur un réseau cubique deux sites voisins  $i$  et  $j$ . Nous désignons par  $\mu$  le vecteur joignant  $i$  et  $j$  selon un sens déterminé



Définissons maintenant un élément de l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathcal{A}_\mu$ , fonction du point  $y$  milieu du lien  $(i, j)$ , par :

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} \lambda_b A_{\mu, b}$$

où les matrices  $\frac{1}{2} \lambda_b$  sont les générateurs infinitésimaux de  $G$  dans la représentation fondamentale, et soit  $U_{ij}$  la matrice ( $a$  désigne le pas du réseau) :

$$U_{ij} = e^{-ig_0 a \mathcal{A}_\mu}. \quad (160)$$

Dans cette équation,  $g_0$  est la constante de couplage *nue*, correspondant à l'utilisation d'une régularisation sur réseau.

La matrice  $U_{ij}^{-1} = U_{ji}$ , et on utilise souvent la notation  $U_{x, \mu}$  au lieu de  $U_{ij}$  :

$$\begin{array}{c} \mu \\ \xrightarrow{\quad} \\ x \qquad \qquad x + \mu \end{array} \quad U_{x, \mu} = U_{x+\mu, -\mu}^{-1}$$

Une transformation de jauge locale  $g_i$  agit de la façon suivante :

$$U_{ij} \rightarrow g_i U_{ij} g_j^{-1} \quad (161)$$

où  $g_i$  et  $g_j$  sont des matrices associées aux sites  $i$  et  $j$ . Il est clair (cf. (35)) que la matrice  $U_{ij}$  est l'analogue sur réseau de la quantité  $R(C; A)$  du paragraphe A.2. La méthode utilisée au paragraphe A.3 suggère une forme de l'action invariante de jauge :

$$S = \sum_P S_P \quad (162)$$

avec

$$S_P = \beta \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} (U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li}) \right) \quad (163)$$

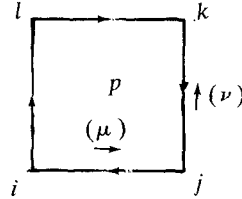


Figure 19. Contour pour (163).

où le produit des matrices  $U$  est pris le long du contour limitant une plaquette (figure 19). On peut répéter le calcul menant à l'expression (43) lorsque  $a \rightarrow 0$  :

$$S_P = \beta \left( 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} (\exp(-ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} + O(a^4))) \right).$$

Développant l'exponentielle, utilisant  $\text{Tr } \lambda_a = 0$  et sommant sur les plaquettes on obtient à la limite  $a \rightarrow 0$  :

$$S = \frac{\beta g_0^2}{2N} \frac{1}{2} \int d^4x [\text{Tr} (\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) + O(a^2)]$$

et comparant avec (48) après le changement d'échelle  $A_\mu \rightarrow g A_\mu$  on peut faire l'identification :

$$\beta = \frac{2N}{g_0^2}. \quad (164)$$

L'action définie par (162) et (163) est appelée *action de Wilson*. Ce n'est pas la seule à donner (48) à la limite continue. On peut la modifier par des termes en  $a^2$ ,  $a^4$ , etc., qui s'annulent à la limite continue (du moins à l'approximation en arbres). Ces termes sont, du point de vue du point fixe à  $g_0 = 0$ , des champs inessentiels. Cependant ils peuvent être utilisés en pratique pour améliorer la convergence vers la limite continue. A ce stade, il conviendrait de rajouter des fermions. Cependant, les fermions sur réseau posent un certain nombre de problèmes, aussi bien théoriques que numériques, et je m'en tiendrai dans cet exposé aux champs de jauge purs.

Comme dans le cas du modèle de Wegner, on introduira un paramètre d'ordre non local, la boucle de Wilson pour un contour  $C$  :

$$W(C) = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}g \left( \text{Tr} \prod_C U_{kl} \right) e^{-S}. \quad (165)$$

Dans (165), le produit des matrices  $U_{kl}$  est pris le long d'un contour fermé  $C$  formé de liens sur le réseau :  $W(C)$  est manifestement invariant de jauge. La mesure d'intégration  $\mathcal{D}g$  est un produit de mesures de Haar pour chacun des liens. Compte tenu du caractère compact du volume d'intégration, il n'est pas nécessaire de factoriser un volume infini en fixant une jauge.

Etudions maintenant l'interprétation physique de la boucle de Wilson ; à la limite continue le produit des matrices  $U_{kl}$  dans (165) devient (cf. 34) :

$$\prod_C U_{kl} \rightarrow P \left( e^{ig_0 \oint_C \mathcal{A}_\mu dx_\mu} \right)$$

et représente l'interaction du champ  $A_\mu$  avec une source ponctuelle. Prenons pour  $C$  un contour rectangulaire dont un côté ( $T$ ) est parallèle à l'axe du temps (euclidien), et l'autre ( $R$ ) parallèle à un axe de coordonnées ; nous supposons  $T \gg R$ . La source ponctuelle est alors

une paire quark-antiquark statiques créés à une distance  $R$  à  $T = 0$ , et s'annihilant au temps  $T$ . La quantité  $W(C)$  peut être interprétée comme le rapport de deux fonctions de partition, l'une en présence d'une source  $J$ , et l'autre avec  $J = 0$  :

$$W(C) = \frac{Z(J)}{Z(0)} = e^{-[F(J) - F(0)]}.$$

Pour  $T \gg R$ ,  $[F(J) - F(0)]$  est proportionnel à  $T$ , l'énergie libre  $F$  étant extensive ; d'autre part nous avons vu au chapitre VIII que la densité d'énergie libre pouvait être identifiée avec l'énergie de l'état fondamental ; comme la paire quark-antiquark est statique, cette énergie est purement potentielle et égale à  $V(R) T$ . Par conséquent :

$$W(C) \sim e^{-V(R)T}. \quad (166)$$

Supposons (nous allons le montrer dans un instant lorsque  $g_0$  est grand) que l'on trouve, comme dans le modèle de Wegner, une « loi d'aire » :

$$V(R) T = \sigma (TRa^2) \quad (167)$$

où  $\sigma$  est une constante ; le potentiel quark-antiquark serait alors linéaire, et nous aurions confinement : il faudrait fournir une énergie infinie pour éloigner le quark et l'antiquark à l'infini. La constante  $\sigma$  est appelée « tension de la corde ».

Pour montrer (167) à la limite haute température (cf. 164)  $g_0 \rightarrow \infty$ , on utilise un développement haute température. On peut montrer que le terme dominant s'obtient en pavant la boucle avec des plaquettes (figure 20). En effet les intégrales sur un lien vérifient les propriétés :

$$\begin{aligned} \int dg &= 1 \quad \int dg U_{ij} U_{kl}^{-1} = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk} \\ \int dg U &= \int dg U^\dagger = \int dg UU = \\ &= \int dg U^\dagger U^\dagger = 0. \end{aligned} \quad (168)$$

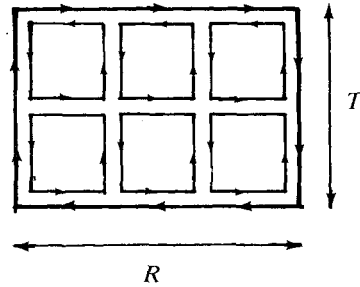


Figure 20.

Le principe de la démonstration est identique à celui de la preuve utilisée par exemple au chapitre IV dans le développement haute température du modèle  $X - Y$ . Pour  $N = 3$ , qui est le cas physiquement

intéressant on obtient :

$$W(T, R) \xrightarrow{g_0 \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta}{18} \right)^{TR}$$

ce qui donne pour la tension de la corde :

$$\boxed{\sigma = a^{-2} \ln(3 g_0^2)} \quad (169)$$

Il est possible de montrer que le développement haute température a un rayon de convergence fini, et par conséquent la théorie vérifie bien la propriété de confinement pour  $g_0^2$  assez grand. Malheureusement cette théorie à grand  $g_0^2$  a très peu de rapport avec une théorie continue (par exemple l'invariance de Lorentz est grossièrement violée) et il nous faut faire le lien avec les petites valeurs de  $g_0$ , qui, ainsi que nous l'avons vu, correspondent à la limite continue.

### E.3. Couplage faible et invariance d'échelle asymptotique

Supposons que nous voulions calculer une quantité ayant les dimensions d'une masse, par exemple la racine carrée de la tension de la corde,  $\sigma^{1/2}$  ; par analyse dimensionnelle  $\sigma^{1/2}$  doit s'écrire :

$$\sigma^{1/2} = \frac{1}{a} f(g_0) \quad (170)$$

Lorsque  $a \rightarrow 0$ , ce qui correspond à un cut-off en  $k$  tendant vers l'infini,  $\sigma^{1/2}$  doit devenir indépendant de  $a$  :

$$a \frac{d}{da} \sigma^{1/2} = 0$$

ce qui donne une équation différentielle pour  $f(g_0)$  :

$$f(g_0) + f'(g_0) \bar{\beta}(g_0) = 0 \quad (171)$$

avec :

$$\bar{\beta}(g_0) = -a \frac{d}{da} g_0(a) \quad (172)$$

L'équation différentielle (171) s'intègre sans difficulté si l'on utilise le développement (121) de  $\bar{\beta}(g_0)$  (on a montré au chapitre VII, paragraphe A.5, que les coefficients  $\beta_0$  et  $\beta_1$  étaient identiques pour

$\beta(g)$  et  $\bar{\beta}(g_0)$  :

$$\bar{\beta}(g_0) = -\beta_0 g_0^3 - \beta_1 g_0^5 + O(g_0^7).$$

Le choix d'une constante d'intégration particulière dans la solution de (171) définit un paramètre dimensionné  $\Lambda_L$  ( $L$  pour lattice = réseau) :

$$\sigma^{1/2} = c_\sigma \Lambda_L \quad (173.a)$$

$$\Lambda_L = a^{-1} e^{-1/(2\beta_0 g_0^2)} (\beta_0 g_0^2)^{-\beta_1/2\beta_0^2} (1 + O(g_0^2)). \quad (173.b)$$

On remarquera le comportement non analytique en  $g_0$  quand  $g_0 \rightarrow 0$ , analogue à celui trouvé en IV-C. Cette propriété montre qu'un calcul perturbatif de  $\sigma$  est a priori impossible.  $\Lambda_L$  est indépendant du cut-off  $a^{-1}$ , et fixe l'échelle de masse de la théorie : on retrouve le phénomène de « transmutation dimensionnelle ». Toutes les quantités ayant dimension d'une masse s'expriment en fonction de  $\Lambda_L$  :

$$m_i = c_i \Lambda_L \quad (174)$$

et les rapports  $m_i/m_j$ ,  $m_i/\sigma^{1/2}$  etc. sont universels : ils ne dépendent que du groupe de jauge  $G$ . Naturellement l'équation (174) ne sera valable que si  $a$  est suffisamment petit, de sorte que l'on se trouve dans le régime continu : dans ce régime, la propriété d'invariance d'échelle est satisfaite. L'invariance d'échelle asymptotique est une exigence plus forte : on demande que la dépendance par rapport à  $g_0$  soit donnée par (173.b), c'est-à-dire contrôlée par les termes  $\beta_0$  et  $\beta_1$  de la fonction  $\bar{\beta}(g_0)$ .

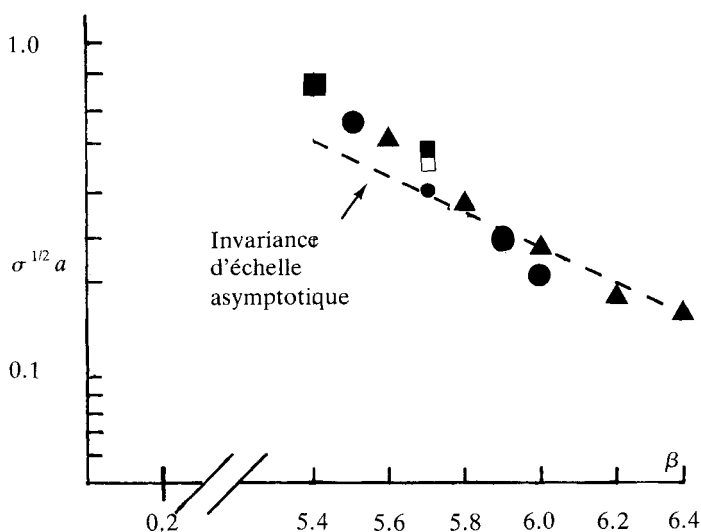
Comme le réseau est une régularisation, on peut relier  $g_0$  à la constante de couplage renormalisée  $g$  par  $g_0 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_3^{-3/2} g$ , en calculant les constantes de renormalisation  $\bar{Z}_1$  et  $\bar{Z}_3$ . D'autre part, on peut aussi utiliser un schéma de régularisation dimensionnel, et relier  $g_0$  et  $g$  dans le schéma  $\overline{MS}$ , par exemple. La comparaison de  $g_0$  (réseau) et  $g_0(\overline{MS})$  pour une même valeur de  $g$  permet de relier  $\Lambda$  (défini perturbativement) et  $\Lambda_L$  ; on trouve pour  $SU(3)$  :

$$\Lambda_{\overline{MS}} \simeq 29 \Lambda_L.$$

Si  $\Lambda_{\overline{MS}}$  était bien connu expérimentalement (ce qui n'est pas le cas), on pourrait fixer  $\Lambda_L$  sans ambiguïté, et par conséquent l'échelle de masse sur le réseau.

De nombreux calculs numériques utilisant la méthode de Monte-Carlo ont été effectués au cours des cinq dernières années. Je renvoie

aux articles spécialisés cités en référence pour une revue détaillée ; comme ces résultats numériques sont susceptibles d'évoluer rapidement (avec le développement des ordinateurs spécialisés) je me borne à donner un exemple de résultats pour la tension de la corde (figure 21) <sup>(6)</sup> :



**Figure 21.** Une compilation récente pour la tension de la corde  $\sigma^{1/2}$ . Les résultats numériques suggèrent que l'invariance d'échelle asymptotique est satisfaite pour  $\beta \geq 5.8$ .

Une tension de la corde différente de zéro depuis la région de couplage fort jusqu'à la région où l'invariance d'échelle asymptotique est valable, sans indication pour une transition de phase dans une région intermédiaire, serait un argument très fort en faveur d'une théorie unique des interactions fortes, confinant les quarks à grande distance et asymptotiquement libre à courte distance : dans ce cas — et il n'y a pour le moment aucune indication pour penser le contraire — la chromodynamique quantique serait vraiment *la* théorie des interactions fortes.

Cette brève revue des théories de jauge sur réseau n'a décrit qu'une partie infime des travaux consacrés à ce problème. J'espère simplement avoir montré que ces théories reposent sur une synthèse remarquable de l'ensemble des idées exposées dans ce livre.

## EXERCICES

- 1) (a) Démontrer les identités (50) et (51).  
 (b) Démontrer les équations du mouvement (52) ainsi que l'équation de continuité (53).

- 2) (a) Démontrer l'identité :

$$[D^\mu, \mathcal{F}^{\nu\rho}] = (D_{ab}^\mu F_b^{\nu\rho}) T_a.$$

- (b) En utilisant cette identité ainsi que (50), montrer l'identité de Bianchi (54).

- 3) Montrer que si  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0$  dans le voisinage d'un point  $x$ , alors :

$$\mathcal{A}_\mu(x) = i[\partial_\mu U(g(x))] U^{-1}(g(x))$$

dans ce voisinage et réciproquement.

- 4) (a) Démontrer les équations (63).

- (b) Déterminer les facteurs de groupe pour les graphes de la figure 22.

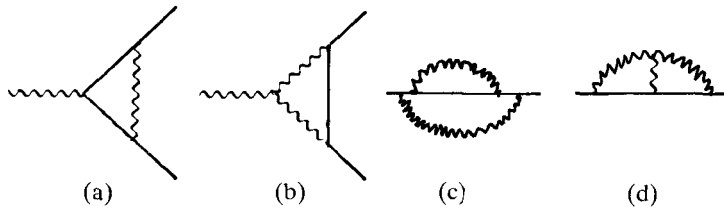


Figure 22.

Réponse :

$$(a) C_F - \frac{1}{2} C_A; \quad (b) -\frac{1}{2} C_A; \quad (c) = C_F^2; \quad (d) \frac{1}{2} C_A C_F.$$

### 5) La transformation de Becchi-Rouet-Stora (BRS)

- (a) Examinons d'abord l'électrodynamique, lorsque la jauge a été fixée de façon générale par la condition  $f(A) = 0$ . (Pour fixer les idées, on pourra se référer à la « jauge pédagogique »  $\partial^\mu A_\mu + \frac{g}{2} A_\mu A^\mu = 0$  de l'exercice XI.14).

On doit ajouter au lagrangien un terme de fantômes (désignés par  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  au lieu de  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  dans l'exercice XI.14) :

$$\mathcal{L}_{FP} = - \int d^4y \bar{\eta}(x) M_f(x, y) \eta(y)$$

où :

$$M_f(x, y) = \frac{\delta f(A^\Lambda(x))}{\delta \Lambda(y)} \Big|_{\Lambda=0}.$$

On définit la transformation BRS par :

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= (\partial_\mu \eta(x)) \delta \zeta ; & \delta \psi(x) &= -ie\psi(x) \eta(x) \delta \zeta \\ \delta \bar{\eta}(x) &= \frac{1}{\alpha} f(A) \delta \zeta ; & \delta \bar{\psi}(x) &= ie\bar{\psi}(x) \eta(x) \delta \zeta \\ \delta \eta(x) &= 0 \end{aligned}$$

où  $\delta \zeta$  est une variable de Grassmann anticommutant avec  $\eta$  et  $\bar{\eta}$  ;  $\delta X / \delta \zeta$  sera défini en faisant passer  $\delta \zeta$  à droite et en divisant  $\delta X$  par  $\delta \zeta$  :  $\delta A_\mu / \delta \zeta = \partial_\mu \eta$ . On remarquera que la loi de transformation de  $A_\mu$  est une transformation de jauge où  $\Lambda(x) = \eta(x) \delta \zeta$ . Montrer que le lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (f(A))^2 + \mathcal{L}_{FP}$$

est invariant dans la transformation BRS :  $\delta \mathcal{L} / \delta \zeta = 0$ . Montrer également l'invariance de la mesure  $\mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta})$ . En examinant la variation de la fonction de Green :

$$\langle 0 | T(X(y) \bar{\eta}(x)) | 0 \rangle$$

où  $X(y)$  est un produit de champs  $A_\mu$ ,  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  (mais ne comportant pas de  $\eta$  et  $\bar{\eta}$ ) démontrer l'identité de Ward-Slavnov-Taylor :

$$\langle 0 | T(X(y) f(A)) | 0 \rangle = \alpha \langle 0 | T\left(\frac{\delta X}{\delta \zeta} \bar{\eta}(x)\right) | 0 \rangle.$$

Retrouver (XII.102) dans le cas de la jauge de Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$ .

(b) Revenons aux théories non abéliennes, où la transformation BRS est définie par :

$$\begin{aligned} \delta A_a^\mu(x) &= D_{ab}^\mu \eta_b(x) \delta \zeta \\ \delta \bar{\eta}_a(x) &= \frac{1}{\alpha} f_a(A) \delta \zeta \\ \delta \eta_b(x) &= -\frac{g}{2} f_{abc} \eta_b(x) \eta_c(x). \end{aligned}$$

Montrer que  $\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{GF}$  est invariant BRS (l'introduction des fermions ne présente aucune difficulté). Montrer l'invariance de la mesure d'intégration  $\mathcal{D}(A, \eta, \bar{\eta})$ .

(c) Résultat préliminaire : établir l'équation du mouvement donnant :

$$\langle 0 | T \left( \frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}_a(x)} \bar{\eta}_b(x) \right) | 0 \rangle .$$

(On se restreindra au cas de la jauge de Lorentz  $\partial_\mu A_a^\mu = 0$ .) En écrivant :

$$\frac{\delta}{\delta \xi} \langle 0 | T(\partial_\mu A_a^\mu(x) \bar{\eta}_b(x)) | 0 \rangle = 0$$

montrer que le propagateur du champ de jauge vérifie l'équation (XII.104) : comme en électrodynamique, les corrections radiatives au propagateur sont transverses.

### 6) Théorème de Goldstone et phénomène de Higgs dans le cas général<sup>(1)</sup>

(a) Soient  $n$  champs réels  $\varphi_i$  se transformant suivant une représentation réelle de générateurs  $T^a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) d'un groupe  $G$  de dimension  $N$ ; l'action effective est donnée par :

$$\Gamma = \int d^4x (\partial_\mu \varphi_i \partial_\mu \varphi_i + V(\varphi_i)) .$$

Soit  $v_i$  la valeur de  $\varphi_i$  minimisant  $V$  :

$$(\partial V / \partial \varphi_i) \Big|_{\varphi_i = v_i} = 0 .$$

Montrer que  $V \approx \frac{1}{2} M_{ij}^2 (\varphi - v)_i (\varphi - v)_j$  au voisinage de ce point, et que  $M_{ij}^2 T_{jk}^a v_k = 0$ .

Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$ , de dimension  $M$ , qui laisse le vide invariant :  $T^a v = 0$  si  $T^a$  est un générateur de  $H$ . En déduire que la matrice  $M^2$  a  $(N - M)$  valeurs propres nulles.

(b) Si l'on se place dans le cadre d'une théorie de jauge, montrer que  $(N - M)$  bosons de jauge deviennent massifs grâce au phénomène de Higgs.

### 7) Vie moyenne du muon

Montrer que dans la théorie de Fermi, la vie moyenne  $\tau$  du muon est donnée par :

$$\tau = \frac{192 \pi^3}{G_F^2 m_\mu^5} .$$

Montrer que la forme de ce résultat peut être prévue par des considérations dimensionnelles.

### 8) Diffusion $\nu_e e$ et $\bar{\nu}_e e$ dans la théorie de Fermi

Calculer la section efficace différentielle de la diffusion élastique  $\nu_e e$  et  $\bar{\nu}_e e$  dans le référentiel du centre de masse, en utilisant la théorie de Fermi.

Montrer que les sections efficaces totales sont données par :

$$\sigma(\nu_e e) = \frac{4 G_F^2}{\pi} E_\nu^2$$

$$\sigma(\bar{\nu}_e e) = \frac{4 G_F^2}{3 \pi} \frac{3 E_e^2 + E_\nu^2}{(E_e + E_\nu)^2} E_\nu^2$$

où  $E_e$  et  $E_\nu$  sont les énergies de l'électron et du neutrino dans le référentiel du centre de masse.

### 9) Couplage aux courants neutres

(a) Montrer que le couplage du boson  $Z^0$  aux leptons peut s'écrire :

$$-\frac{e}{\sin \theta \cos \theta} \bar{\psi}(l) \left[ \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) I_3 - \gamma_\mu Q \sin^2 \theta \right] \psi(l)$$

où  $I_3$  est la composante 3 de l'isospin et  $Q$  la charge du lepton considéré.

(b) Recalculer les sections efficaces neutrino-électron et anti-neutrino électron de l'exercice (8) en tenant compte des courants neutres. On pourra se limiter au cas où  $E_e \gg m_e$  et utiliser l'identité de Fierz :

$$(\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e)(\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu) = (\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu)(\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e).$$

Montrer que les sections efficaces sont maintenant :

$$\sigma(\nu_e e) = \frac{G_F^2 s}{4 \pi} \left[ (1 + 2 \sin^2 \theta)^2 + \frac{4}{3} \sin^4 \theta \right]$$

$$\sigma(\bar{\nu}_e e) = \frac{G_F^2 s}{4 \pi} \left[ 4 \sin^4 \theta + \frac{1}{3} (1 + 2 \sin^2 \theta)^2 \right]$$

avec  $s = (E_e + E_\nu)^2 \ll m_W^2$ .

### 10) Production de bosons W et Z

Dans les anneaux de collision du CERN, la production de bosons  $W$  et  $Z$  s'effectue par « fusion » d'une paire quark-antiquark (figure 23).

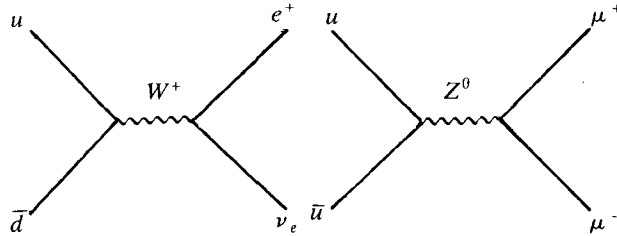


Figure 23.

On écrit les couplages des bosons aux leptons et aux quarks sous la forme :

$$\bar{v}(p')(C_V \gamma_\mu - C_A \gamma_\mu \gamma_5) u(p) \quad (\text{quarks})$$

$$\bar{u}(k')(C'_V \gamma_\mu - C'_A \gamma_\mu \gamma_5) v(k) \quad (\text{leptons})$$

et on définit :

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{Re} C_V C_A^*}{|C_V|^2 + |C_A|^2}; \quad \alpha' = \frac{2 \operatorname{Re} C'_V C_A'^*}{|C_A'|^2 + |C_V'|^2}.$$

Montrer que la section efficace pour observer un lepton faisant un angle  $\varphi$  avec la direction du boson, dans le référentiel au repos de ce dernier, est proportionnelle à :

$$(1 + \cos^2 \varphi) + 2 \alpha \alpha' \cos \varphi.$$

Pour les couplages au  $W$ ,  $C_A = C_V$  et la distribution angulaire est en  $(1 + \cos \varphi)^2$ .

### 11) Définition de $\Lambda$

La constante de couplage  $\alpha_s$  vérifie l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_s}{d \ln Q^2} &= -4 \pi \beta_0 \alpha_s^2(Q^2) - 4 \pi \beta_1 \alpha_s^3(Q^2) + \dots \\ &= -\beta_0 \alpha_s^2(Q^2) (1 + \bar{\beta}_1 \alpha_s(Q^2) + \dots). \end{aligned}$$

En intégrant cette équation sous la forme :

$$\int_{\alpha_s(Q^2)}^x \frac{dx}{x^2(1 + \bar{\beta}_1 x)} = \bar{\beta}_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \text{Cte}$$

montrer que l'on peut écrire :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\bar{\beta}_0 y} \left( 1 + \frac{c}{y} + \frac{d \ln y}{y} + \varepsilon \right)$$

avec  $y = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ . Déterminer  $c, d$ , ainsi que l'ordre de grandeur de  $\varepsilon$ , et en déduire que l'on peut poser  $c = 0$  par un choix convenable de la constante d'intégration. Retrouver ainsi l'équation (123).

### 12) Indépendance de jauge de $Z$ <sup>(8)</sup>

On se propose de montrer que la constante de renormalisation  $Z$  (définie par  $g_0 = \mu^{\epsilon/2} Z g$ ) est indépendante du paramètre de jauge  $\alpha$  dans le schéma minimal.

(a) Soit  $\hat{G}$  une charge invariante (cf. VII-A.2) formée avec des fonctions de

Green d'opérateurs invariants de jauge. Montrer que :

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{g_0, \varepsilon} \hat{G}(g, \alpha, \mu) = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \rho(g, \alpha) \right) \hat{G}(g, \alpha, \mu) = 0.$$

$$\text{où } \rho(g, \alpha) = \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right|_{g_0, \varepsilon}.$$

(b) Utiliser le fait que  $\rho(g, \alpha)$  est indépendant de  $\varepsilon$  ainsi que le développement (VII.77) de  $Z$  dans le schéma minimal pour montrer que  $Z$  est indépendant de  $\alpha$ . Pourquoi ce résultat n'est-il pas valable en général ?

13) Démontrer l'équation (135).

14) Régularisation dimensionnelle des singularités infrarouges

On se place dans le cas  $m = 0$ .

(a) Calcul du vertex

Calculer l'expression du vertex de la figure 14 (à l'ordre d'une boucle) en partant de (XII.78) et en intégrant sur la variable de boucle :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu = & \frac{e_q^2 g^2 C_F}{(4\pi)^{D/2}} \gamma_\mu ((4\pi)^{-1} \mu^2 e^\gamma)^{\varepsilon/2} \int dx_1 dx_2 \theta(1-x_1-x_2) \\ & \times \left\{ \frac{(2-D)^2 \Gamma(2-D/2)}{2} (x_1 x_2 Q^2)^{\frac{D}{2}-2} - Q^2 \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \times \right. \\ & \left. \times [2(1-x_1)(1-x_2) + (D-4)x_1 x_2] (x_1 x_2 Q^2)^{\frac{D}{2}-3} \right\} \end{aligned}$$

où  $\varepsilon = 4 - D$  et  $Q^2 = -q^2 > 0$ . Le premier terme est U-V divergent et sera renormalisé dans le schéma  $\overline{MS}$  (cf. le facteur  $(\mu^2 e^\gamma / (4\pi))^{\varepsilon/2}$ ). Après soustraction du pôle U-V en  $1/\varepsilon$ , le résultat est prolongé analytiquement à des valeurs de  $\varepsilon < 0$ ,  $\varepsilon = -2\omega$ . Montrer que  $\Lambda_{R,\mu}$  s'écrit (la formule B.9 est très utile) :

$$\Lambda_{R,\mu} = -\frac{\alpha_s \gamma_\mu C_F}{4\pi} e_q^2 \left[ \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^\omega \left( \frac{2}{\omega^2} - \frac{4}{\omega} + 8 - \frac{\pi^2}{6} \right) + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right].$$

Montrer également que la correction d'énergie propre aux lignes de quarks externes vérifie, après soustraction du pôle U-V et prolongement analytique pour  $p^2 < 0$  à des valeurs de  $\varepsilon$  négatives :

$$\left. \frac{\partial \Sigma_R}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=0} = -\frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \frac{1}{\omega}.$$

(b) Calcul de l'émission de gluons : montrer que (135) doit être remplacé par :

$$8 C_F e_q^2 g^2 \left( \frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^{-\omega} (1+\omega) \left[ \frac{u^2 + s^2 + 2tq^2}{us} + \omega \frac{(u+s)^2}{us} \right]$$

et que (139) devient (en incluant un facteur  $z^{2\omega}$  dû à (130)) :

$$W = \frac{\|\mathbf{p}'\|^{2\omega}}{8(4\pi)^{D/2} \Gamma(1+\omega)} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (\sin \theta)^{2\omega} |\mathcal{M}|^2.$$

En déduire l'expression de  $W$  pour des gluons réels :

$$W = \frac{2\alpha_s e_q^2}{3\pi z} \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^\omega \left\{ \delta(1-z) \left( \frac{2}{\omega^2} - \frac{3}{2\omega} + \frac{7}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{\omega} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ + 2 \frac{1+z^2}{1-z} \ln z - \frac{3}{2(1-z)_+} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} z \right\}.$$

(c) En rajoutant le graphe virtuel (a) ainsi que les corrections dues aux lignes externes, obtenir l'équivalent de (150) dans le cadre de la régularisation dimensionnelle. Vérifier l'élimination des divergences IR en  $1/\omega^2$  entre le terme « réel » et le terme « virtuel », et identifier les singularités colinéaires. Intégrer sur  $z$  et retrouver la valeur (156) du rapport  $R$ .

### 15) Approximation infrarouge et jauge planaire

(a) On suppose que l'on utilise un référentiel où  $k_0$ ,  $\|\mathbf{k}\| \rightarrow 0$  dans le calcul de l'élément de matrice (134). Montrer que dans ces conditions :

$$\mathcal{M}_\mu = -ie_q g \frac{\lambda_a}{2} \left[ \frac{\varepsilon \cdot p}{p \cdot k} - \frac{\varepsilon \cdot p'}{p' \cdot k} \right] \pi(p) \gamma_\mu v(p').$$

(b) On utilise une jauge axiale telle que  $n^\mu A_\mu = 0$ , où  $n_\mu$  est un vecteur fixé. Montrer que la somme sur les polarisations du gluon s'effectue en saturant avec le tenseur  $d_{\mu\nu}$  :

$$d_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} - \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2}.$$

Calculer  $|\mathcal{M}|^2$  en utilisant  $n_\mu = ap_\mu + bp'_\mu$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Montrer que le terme d'interférence des deux graphes de la figure 12 s'annule, et que l'on peut trouver des choix de jauge où l'un des deux graphes de la figure 12 s'annule.

### 16) Théorème d'Elitzur <sup>(9)</sup>

Considérons le modèle de Wegner dans une dimension  $D$  arbitraire, et soit  $S(n, \mu)$  un spin  $S$  situé sur le lien  $\mu$  partant du site  $n$ . On place le système dans un champ magnétique extérieur  $B$  et on calcule la valeur moyenne de  $S(n, \mu)$  :

$$\langle S(n, \mu) \rangle_B = \frac{\sum_{[S(n, \mu)]} S(n, \mu) \exp \left[ \beta J \sum_P SSSS + B \sum_{n, \mu} S(n, \mu) \right]}{\sum_{[S(n, \mu)]} \exp \left[ \beta J \sum_P SSSS + B \sum_{n, \mu} S(n, \mu) \right]}.$$

Soit  $\{l_n\}$  l'ensemble des liens partant du site  $n$  et  $S'(l)$  le transformé de jauge de  $S(l)$  dans la transformation de jauge qui renverse les spins sur les liens  $l_n$  :

$$\begin{aligned}\delta S(l) &= S'(l) - S(l) = -2S(l) \quad \text{si } l \in \{l_n\} \\ \delta S(l) &= 0 \quad \text{si } l \notin \{l_n\} .\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables  $S \rightarrow S'$ , démontrer la relation :

$$\langle S(n, \mu) \rangle_B = \left\langle -S(n, \mu) \exp \left[ -B \sum_{l \in \{l_n\}} \delta S(l) \right] \right\rangle$$

et en déduire :

$$2|\langle S(n, \mu) \rangle| \leq |e^{4DB} - 1| \rightarrow 0 \quad \text{si } B \rightarrow 0 .$$

**17) Equivalence du modèle de Wegner  $D = 2$  et du modèle d'Ising  $D = 1$ ,**  
(<sup>9</sup>)

Dans le réseau à deux dimensions de la figure 15, on choisit deux axes  $\tau$  et  $x$  parallèles aux deux directions des liens. Montrer que par une suite de transformations de jauge locales on peut, en négligeant les effets de bord, se ramener au cas où tous les spins situés sur les liens parallèles à l'axe  $\tau$  sont égaux à  $+1$  :  $S(n, \tau) = 1$ . En déduire que la fonction de partition est un produit de fonctions de partition de modèles d'Ising à une dimension. En utilisant le résultat (I.9) donnant la fonction de corrélation du modèle d'Ising  $D = 1$ , retrouver la « loi d'aire » pour  $W(\mathcal{R})$  (cf. (159)).

## NOTES ET RÉFÉRENCES

La littérature sur les théories de jauge non abéliennes est très vaste, et les références données ci-dessous ne représentent qu'un choix (personnel) très limité. Une référence classique pour les groupes de Lie est L. Pontryagin, *Topological Groups*, Gordon and Breach (1966). Un exposé adapté à la physique des particules est celui de H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin (1982). Des références générales sur les théories de jauge non abéliennes sont Abers et Lee, Itzykson-Zuber (chapitre 12), J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press (1976) et Ramond, chapitres VI, VII et VIII. L'invariance BRS est exposée dans Itzykson-Zuber, Collins (chapitre 2), et Taylor (chapitre 12). Pour un traitement complet de la renormalisation des théories de jauge, on pourra se référer à Itzykson-Zuber ou à Collins (chapitre 12). Le modèle GSW est exposé dans Abers et Lee et dans Taylor. L'exposé de la chromodynamique quantique par G. Altarelli, *Phys. Rep.*, **81**, 1 (1982) est particulièrement accessible ; on pourra aussi se reporter au livre de F. Yndurain, *Quantum Chromodynamics*, Springer Verlag (1983). Des calculs détaillés sont donnés par E. de

Rafaël, *Cours de Gif-sur-Yvette* (1978) et M. Le Bellac, *ibid* (1981). Enfin pour les théories de jauge sur réseau, on pourra consulter le livre de M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press (1983), ainsi que Kogut (section VIII) et *Rev. Mod. Phys.*, **55**, 775 (1983).

<sup>(1)</sup> C. Yang et R. Mills, *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954).

<sup>(2)</sup> P. Cvitanovic, *Phys. Rev.*, **D 14**, 1536 (1976).

<sup>(3)</sup> A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **D 22**, 971 (1980). W. Marciano et A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **D 22**, 2695 (1980).

<sup>(4)</sup> W. Caswell, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 244 (1974).

<sup>(5)</sup> T. Kinoshita, *Journ. Math. Phys.*, **3**, 650 (1962). T. Lee et M. Nauenberg, *Phys. Rev.*, **B 133**, 1549 (1964).

<sup>(6)</sup> G. Schierholz, Prétirage CERN TH 4139 (1985).

<sup>(7)</sup> Abers-Lee, sections 2 et 3.

<sup>(8)</sup> D. Gross in *Methods in Field Theory*, Ecole des Houches (1975), section 5.

<sup>(9)</sup> Kogut, section V.



## APPENDICE A

# Transformées de Fourier Intégration gaussienne

### A.1. TRANSFORMÉES DE FOURIER

Toutes les démonstrations seront faites uniquement à une dimension ( $D = 1$ ), la généralisation à un nombre arbitraire de dimensions étant triviale.

#### Diagonalisation d'une matrice invariante par translation

Considérons une matrice (réelle)  $A_{st}$ ,  $0 \leq s, t \leq N - 1$  telle que  $A_{st}$  ne dépende que de la différence  $(s - t)$ . On suppose également des conditions aux limites cycliques :  $p + N \equiv p$  pour tout entier  $p$ .

**Théorème :** La matrice  $A_{st}$  est diagonalisée par une transformation de Fourier sur réseau, correspondant à la transformation unitaire  $U_{sq} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iqx_s}$  avec :

$$x_s = sa ; \quad q = \frac{2 \pi p}{Na}$$

où  $s$  et  $p$  sont des entiers compris entre 0 et  $N - 1$  et  $a$  est le pas du réseau.

Ce résultat est bien connu, par exemple de la théorie des modes de vibration normaux. Redémontrons-le rapidement :

$$\begin{aligned} A_{q'q} &= \frac{1}{N} \sum_{s,t} e^{iq'x_s} A_{st} e^{-iqx_t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_s e^{-i(q-q')x_s} \sum_t A(s-t) e^{-iq(x_t - x_s)} . \end{aligned}$$

La somme sur  $t$  est indépendante de  $s$ , grâce à la condition  $q = 2 \pi p / Na$  et aux conditions aux limites cycliques ; appelons-la  $\tilde{A}(q)$  :

$$A_{q'q} = \delta_{qq'} \tilde{A}(q) . \quad (1)$$

En général  $A(s - t)$  ne dépend que de  $|s - t|$ , et  $\tilde{A}(q)$  est réel. Par invariance de la trace dans une transformation de similarité :

$$\text{Tr } A_{st} = \sum_q \tilde{A}(q) . \quad (2)$$

### Passage à la limite continue

Pour passer à la limite continue, il est commode de définir  $\tilde{A}(q)$  par :

$$\tilde{A}(q) = a \sum_t A(s-t) e^{-iq(x_t-x_s)} \rightarrow \int dx A(x) e^{iqx} \quad (3)$$

par passage d'une somme de Riemann à une intégrale. De même, la somme sur  $q$  peut être remplacée par une intégrale en utilisant :

$$\sum_q \rightarrow \frac{Na}{2\pi} \int dq \quad (4)$$

l'intervalle entre deux valeurs successives de  $q$  étant  $\frac{2\pi}{Na}$ . D'autre part, au lieu des limites  $0 \leq q \leq \frac{2\pi}{a}$ , il est en général plus commode de choisir :

$$-\frac{\pi}{a} \leq q \leq \frac{\pi}{a}. \quad (5)$$

Dans ces conditions, la transformation de Fourier inverse est donnée par :

$$A(x) = \frac{1}{Na} \sum_q e^{-iqx} \tilde{A}(q) \rightarrow \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dq}{2\pi} \tilde{A}(q) e^{-iqx} \quad (6)$$

et la relation sur la trace devient :

$$\text{Tr } A_{st} = N \int \frac{dq}{2\pi} \tilde{A}(q). \quad (7)$$

A  $D$ -dimensions les relations précédentes se généralisent en :

$$\tilde{A}(\mathbf{q}) = \int d^D x e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} A(\mathbf{x}) \quad (8.a)$$

$$A(\mathbf{x}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \tilde{A}(\mathbf{q}). \quad (8.b)$$

### Produit de deux matrices

Une relation utile peut être obtenue en examinant le produit de deux matrices. Cherchons la transformée de Fourier de  $\sum_t A_{st} B_{tw} = \sum_{t,u} A_{st} \delta_{tu} B_{uw}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\substack{t,u \\ s,v}} e^{iq'x_s} A_{st} \delta_{tu} B_{uv} e^{-iqx_v} &= \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{t,u \\ s,v}} \sum_k e^{iq'x_s} A_{st} e^{-ikx_t} e^{ikx_u} B_{uv} e^{-iqx_v} \\ &= \sum_k \delta_{q'k} \tilde{A}(q') \delta_{qk} \tilde{B}(q) = \delta_{qq'} \tilde{A}(q) \tilde{B}(q). \end{aligned}$$

La transformée de Fourier du produit matriciel est le produit des transformées de Fourier. Ceci n'est pas étonnant, le produit matriciel n'étant pas autre

chose qu'une convolution grâce à la propriété d'invariance par translation des matrices  $A$  et  $B$ . Il est également intéressant de remarquer que la transformée de Fourier de  $A_{\pi}^{-1}$  est  $1/\tilde{A}(q)$ .

## A.2. INTÉGRALES GAUSSIENNES

### Cas d'une variable

Considérons la quantité  $Z(j)$  :

$$Z(j) = \int dx e^{-\frac{1}{2}Ax^2 + jx}$$

$$Z(0) = \int dx e^{-\frac{1}{2}Ax^2} = \sqrt{2\pi/A}.$$

Pour calculer  $Z(j)$  on effectue le changement de variables :  $x = x' + j/A$

$$-\frac{1}{2}xAx + jx = -\frac{1}{2}x'Ax' + \frac{1}{2}j\frac{1}{A}j$$

$$Z(j) = e^{\frac{1}{2}j\frac{1}{A}j} Z(0). \quad (9)$$

### Cas de $N$ variables

$$Z(j) = \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^N j_i x_i \right)$$

où  $A_{ij}$  est une matrice *symétrique (\*)* et *strictement positive*. Pour alléger les notations on pose ( $T$  = transposé) :

$$\sum_{i,j=1}^N x_i A_{ij} x_j = x^T A x ; \quad \sum_{i=1}^N j_i x_i = j^T x$$

où  $x$  et  $j$  sont les vecteurs colonnes  $(x_1 \dots x_N)$  et  $(j_1 \dots j_N)$ ,  $x^T$  et  $j^T$  des vecteurs lignes. Effectuons le changement de variables :

$$x = x' + A^{-1}j,$$

(la matrice  $A^{-1}$  existe car  $A$  est supposée positive) :

$$-\frac{1}{2}x^T A x + j^T x = -\frac{1}{2}x'^T A x' + \frac{1}{2}j^T A^{-1}j$$

(\*) Si  $A_{ij}$  comportait une partie antisymétrique, celle-ci donnerait un résultat nul dans  $\sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j$ .

d'où :

$$\boxed{Z(j) = e^{\frac{1}{2}j^T A^{-1}j} Z(0)} \quad (10)$$

Dans de nombreux cas, l'équation (10) est suffisante (par exemple pour le calcul d'une fonction de corrélation où  $Z(0)$  s'élimine). Il n'est pas très compliqué de calculer  $Z(0)$  :

$$Z(0) = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\frac{1}{2}x^T A x}.$$

Soit  $R$  une transformation orthogonale ( $RR^T = \mathbb{1}$ ) diagonalisant  $A$  :

$$A = R^T D R; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_N \end{pmatrix}; \quad d_i > 0 \quad \forall i.$$

Effectuons le changement de variables de jacobien unité :

$$x' = R x; \quad (\det R = 1)$$

$$\int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-\frac{1}{2}x^T A x} = \int \prod_{i=1}^N dx'_i e^{-\frac{1}{2}x'^T D x'}.$$

La dernière intégrale est un produit de  $N$  intégrales gaussiennes indépendantes et vaut :

$$(2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N (d_i)^{-1/2} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}}$$

$$\boxed{Z(0) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}}} \quad (11)$$

Démontrons enfin un corollaire des équations (10) et (11) ; considérons d'abord une seule variable complexe  $z = x + iy$  et l'intégrale :

$$I = \int d^2z e^{-z^* A z + z^* j + z j^*} = \int dx dy e^{-A(x^2 + y^2) + 2j_1 x + 2j_2 y}$$

où  $j = j_1 + ij_2$  et  $A = a_1 + ia_2$ , avec  $a_1 > 0$ . Le calcul de  $I$  est immédiat :

$$I = \frac{\pi}{A} e^{j^* A^{-1} j}.$$

Passons au cas de  $N$  variables complexes  $z_i$  :

$$I = \int \prod_{i=1}^N d^2 z_i e^{-z^\dagger A z + z^\dagger j + j^\dagger z}$$

où la conjugaison hermitique remplace la transposition. On suppose que  $A$  peut être diagonalisée par une transformation unitaire  $U$  :

$$A = U^\dagger D U$$

où  $D$  est une matrice diagonale dont les éléments  $d_i$  ont une partie réelle positive. Ecrivons :

$$U = R + iS$$

où  $R$  et  $S$  sont des matrices réelles ; la relation  $U^\dagger U = \mathbb{1}$  donne :

$$RR^T + SS^T = \mathbb{1}; \quad RS^T - SR^T = 0.$$

La transformation  $z' = Uz$  équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -S \\ S & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et la matrice faisant passer de  $(x, y)$  à  $(x', y')$  est orthogonale, et donc de déterminant 1. Le jacobien de la transformation est 1, ce qui permet d'obtenir le résultat :

$$\int \prod_{i=1}^N d^2 z_i e^{-z^\dagger A z + z^\dagger j + j^\dagger z} = \frac{\pi^N}{\det A} e^{j^\dagger A^{-1} j} \quad (12)$$

### A.3. INTÉGRALES EN DIMENSION $D$

En coordonnées polaires l'élément de volume en dimension  $D$  est :

$$d^D x = r^{D-1} dr \sin^{D-2} \theta_{D-1} d\theta_{D-1} \sin^{D-3} \theta_{D-2} d\theta_{D-2} \dots d\theta_1$$

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi \quad k \neq 1.$$

Très souvent, l'intégrand est indépendant des angles et il suffit de connaître la surface  $S_D$  de la sphère à  $D$  dimensions :

$$d^D x \rightarrow S_D r^{D-1} dr.$$

Celle-ci s'obtient aisément en calculant de deux manières l'intégrale

$$J = \int d^D x e^{-(x_1^2 + \dots + x_D^2)} = \pi^{D/2}$$

$$J = S_D \int_0^\infty r^{D-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} S_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

d'où :

$$S_D = \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} . \quad (13)$$

Exemples :  $D = 1$ ,  $S_2 = 2 \pi$  ;  $D = 3$ ,  $S_3 = 4 \pi$  ;  $D = 4$ ,  $S_4 = 2 \pi^2$ .

En général la mesure d'intégration est  $d^D x / (2 \pi)^D$  et il est utile de définir :

$$K_D = \frac{S_D}{(2 \pi)^D} = \frac{2}{(4 \pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \quad (14)$$

avec en particulier :

$$K_4 = \frac{1}{8 \pi^2} . \quad (15)$$

Les expressions (13) et (14) peuvent être prolongées analytiquement à des valeurs non entières de  $D$ .

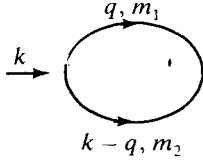
## APPENDICE B

# Intégrales de Feynman en régularisation dimensionnelle (cas euclidien)

Combinaison des dénominateurs :

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \times \\ \times x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} [x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}. \quad (\text{B.1})$$

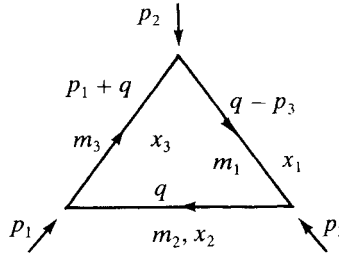
Boucle à deux lignes internes :  $q' = q - xk$



$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \times$$

$$\times [q'^2 + x(1-x)k^2 + xm_2^2 + (1-x)m_1^2]^{-2}. \quad (\text{B.2})$$

Boucle à trois lignes internes :  $q' = q - x_1 p_3 + x_3 p_1$



$$= 2 \int \prod_{i=1}^3 dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 x_i\right) \int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q'^2 + D]^3} \quad (\text{B.3})$$

$$D = x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2 + x_3 m_3^2 + x_2 x_3 p_1^2 + x_1 x_3 p_2^2 + x_1 x_2 p_3^2.$$

Intégrales sur  $q$  :

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)^N} = \frac{\Gamma(N - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(N)} \frac{1}{(m^2)^{N - D/2}} \quad (\text{B.4})$$

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{(q^2 + m^2)^N} = \frac{\Gamma(N - 1 - D/2)}{2(4\pi)^{D/2} \Gamma(N)} \frac{D}{(m^2)^{N - 1 - D/2}} \quad (\text{B.5})$$

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_i q_j}{(q^2 + m^2)^N} = \frac{\Gamma(N - 1 - D/2)}{2(4\pi)^{D/2} \Gamma(N)} \frac{\delta_{ij}}{(m^2)^{N - 1 - D/2}} \quad (\text{B.6})$$

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q_i q_j f(q^2) = \frac{\delta_{ij}}{D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^2 f(q^2). \quad (\text{B.7})$$

Développement de la fonction  $\Gamma$  :

$$\Gamma\left(N - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \Gamma(N) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \psi(N) + O(\varepsilon^2)\right) \quad (\text{B.8})$$

$$\psi(N) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j} - \gamma = S_{N-1} - \gamma; \quad S_0 = 0, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = \frac{3}{2}, \quad S_3 = \frac{11}{6}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} \gamma + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \gamma + \frac{\pi^2}{48} \varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon). \quad (\text{B.10})$$

Développement de la fonction  $B$  :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (\text{B.11})$$

$$B\left(N - \frac{\varepsilon}{2}, 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{N} \left(1 + \varepsilon S_N - \frac{\varepsilon}{2} S_{N-1} + O(\varepsilon^2)\right) \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} B\left(N - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{N(N+1)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} S_{N-1} - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon S_{N+1} + O(\varepsilon^2)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

## APPENDICE C

# Formulaire

### C.1. GROUPE DE LORENTZ

Quadrivecteur :

$$V^\mu = (V^0, V^i) = (V^0, \vec{V}) = (V_t, V_x, V_y, V_z) .$$

Tenseur métrique :

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -1, -1) .$$

Transformation de Lorentz :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu ; \quad \Lambda^T g \Lambda = g .$$

Groupe propre :

$$\Lambda_0^0 \geq 1 , \quad \det \Lambda = 1 .$$

Groupe orthochrone :

$$\Lambda_0^0 \geq 1 , \quad \det \Lambda = \pm 1 .$$

Gradient :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = (\partial_0, \nabla) .$$

Produit scalaire :

$$\begin{aligned} x^\mu y_\mu &= x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ \partial^\mu V_\mu &= \partial^0 V^0 + \nabla \cdot \mathbf{V} . \end{aligned}$$

Tenseur complètement antisymétrique :

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{cases} 1 & \text{si la permutation } 0123 \rightarrow \mu\nu\rho\sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si la permutation } 0123 \rightarrow \mu\nu\rho\sigma \text{ est impaire} \\ 0 & \text{dans les autres cas .} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Opérateur 4-moment :

$$p^\mu = i \partial^\mu = (i \partial^0, -i \nabla).$$

D'Alembertien :

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2.$$

## C.2. MATRICES DE DIRAC

Définitions :

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1} \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]; \quad \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \frac{-i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \end{aligned}$$

Equation de Dirac :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = (i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - m) \psi = 0.$$

Spineur conjugué :

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0; \quad \bar{\psi} (i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m) = 0.$$

Conjugaison hermitique :

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0; \quad \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5.$$

Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux spineurs de Dirac et  $\Gamma$  une matrice  $4 \times 4$  :

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2)^* = \bar{\psi}_2 (\gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0) \psi_1. \quad (\text{C.2})$$

Matrice de conjugaison de charge :

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T; \quad C \gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T. \quad (\text{C.3})$$

Dans les représentations usuelles :

$$C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C. \quad (\text{C.4})$$

Matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Représentation de Dirac :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Représentation chirale :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Identités utiles en dimension  $D(\not{a} = \gamma_\mu a^\mu)$  :

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2 a \cdot b$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = D \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -2 \not{a} + (4 - D) \not{a} \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu = 4 a \cdot b - (4 - D) \not{a} \not{b} \quad (\text{C.10})$$

$$\gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a} + (4 - D) \not{a} \not{b} \not{c} \quad (\text{C.11})$$

Identités sur les traces :

$$\text{Tr } \mathbb{1} = 4$$

$$\text{Tr } \not{a} \not{b} = 4 a \cdot b$$

$$\text{Tr } \gamma_5 \gamma_\mu = 0$$

$$\text{Tr } (\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4 [(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \quad (\text{C.12})$$

$$\text{Tr } (\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = -4 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma \quad (\text{C.13})$$

$$\text{Tr } (\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n-1}) = 0; \quad \text{Tr } (\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n}) = \text{Tr } (\not{a}_{2n} \dots \not{a}_1) \quad (\text{C.14})$$

$$\text{Tr } (\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n}) = (a_1 \cdot a_2) \text{Tr } (\not{a}_3 \dots \not{a}_{2n}) - (a_1 \cdot a_3) \text{Tr } (\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_{2n}) + \dots \\ + (a_1 \cdot a_{2n}) \text{Tr } (\not{a}_2 \not{a}_3 \dots \not{a}_{2n-1}). \quad (\text{C.15})$$

Solutions de l'équation de Dirac :

$$\text{Energie positive : } (p - m) u(\mathbf{p}) = 0; \quad \bar{u}(\mathbf{p})(p - m) = 0$$

$$\text{Energie négative : } (p + m) v(\mathbf{p}) = 0; \quad \bar{v}(\mathbf{p})(p + m) = 0.$$

Normalisation :

$$\bar{u}(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) = -\bar{v}(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}) = 2m$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}) = \bar{v}(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) = 0.$$

Normalisation des densités :

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^0 u(\mathbf{p}) = \bar{v}(\mathbf{p}) \gamma^0 v(\mathbf{p}) = 2 E_{\mathbf{p}}$$

$$\bar{u}(-\mathbf{p}) \gamma^0 v(\mathbf{p}) = \bar{v}(-\mathbf{p}) \gamma^0 u(\mathbf{p}) = 0.$$

Projecteurs :

$$\sum_{r=1}^2 u_\alpha^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\mathbf{p}) = (\Lambda_+)_{\alpha\beta} = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\ - \sum_{r=1}^2 v_\alpha^{(r)}(\mathbf{p}) \bar{v}_\beta^{(r)}(\mathbf{p}) = (\Lambda_-)_{\alpha\beta} = (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}.$$

Spineurs d'hélicité  $\lambda$  déterminée (représentation de Dirac) :

$$\begin{aligned} u_\lambda(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} (E_{\mathbf{p}} + m) R \chi_\lambda \\ 2 p_\lambda R \chi_\lambda \end{pmatrix} ; \\ v_\lambda(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} + m}} \begin{pmatrix} -2 p_\lambda R i \sigma_2 \chi_\lambda \\ (E_{\mathbf{p}} + m) R i \sigma_2 \chi_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p \sin \theta, 0, p \cos \theta) ; \quad R = \exp \left( -\frac{i}{2} \sigma_2 \theta \right) ; \\ \chi_{1/2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Identités de Gordon :

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}) [(p+q)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p-q)_\nu] u(\mathbf{q}) \quad (\text{C.17})$$

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} \bar{u}(\mathbf{p}) [(p-q)^\mu \gamma_5 + i \sigma^{\mu\nu} (p+q)_\nu \gamma_5] u(\mathbf{q}) \quad (\text{C.18})$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}) \gamma^\mu v(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2m} \bar{v}(\mathbf{p}) [(p+q)^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p-q)_\nu] v(\mathbf{q}) \quad (\text{C.19})$$

$$\bar{v}(\mathbf{p}) \gamma^\mu \gamma_5 v(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2m} \bar{v}(\mathbf{p}) [(p-q)^\mu \gamma_5 + i \sigma^{\mu\nu} (p+q)_\nu \gamma_5] v(\mathbf{q}) . \quad (\text{C.20})$$

### C.3. SECTIONS EFFICACES

Normalisation des états ( $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ) :

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi)^3 2 \omega_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') .$$

Matrice  $S$  :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} .$$

Section efficace  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \dots + N'$  :

$$d\sigma = \frac{1}{4F} |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2 \omega'_1} \dots \frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3 2 \omega'_N} \frac{1}{\mathcal{S}}$$

$$F = [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} ;$$

$\mathcal{S}$  = facteur dû à l'identité des particules.

Taux de désintégration :  $1 \rightarrow 1' + 2' + \dots + N'$  :

$$d\Gamma = \frac{1}{2M_1} |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2 \omega'_1} \dots \frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3 2 \omega'_N} \frac{1}{\mathcal{S}} .$$

Section efficace  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$  dans le référentiel du centre de masse :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64 \pi^2 s} \frac{\|\mathbf{k}'\|}{\|\mathbf{k}\|} |T(s, \cos \theta)|^2; \quad s = (p_1 + p_2)^2$$

$$\|\mathbf{k}\| = \frac{1}{2\sqrt{s}} [(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}. \quad (\text{C.21})$$

Théorème optique :

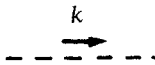
$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2\sqrt{s}\|\mathbf{k}\|} \text{Im } T(s, \theta = 0). \quad (\text{C.22})$$

#### C.4. RÈGLES DE FEYNMAN

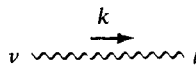
Règles de Feynman pour une fonction de Green connexe sans lignes externes  $G_c^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$  où les moments  $p_i$  entrent dans le diagramme et :

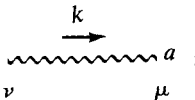
$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) G_c^{(N)}(p_i) = \int \left( \prod_{i=1}^N d^4x_i e^{-ip_i x_i} \right) G_c^{(N)}(x_i).$$

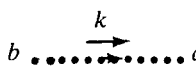
- (i) Tracer tous les diagrammes topologiquement inéquivalents.
- (ii) Associer à chaque ligne interne un propagateur :

spin 0 :  :  $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$

spin 1/2 :  :  $\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

spin 1 :  :  $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right)$

particule de jauge :  :  $\frac{i \delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{(1 - \alpha) k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$

Fantôme de  
Faddeev-Popov :  :  $\frac{i \delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon}$

(iii) Associer à chaque vertex un facteur déterminé par le lagrangien d'interaction, conserver le moment à chaque vertex. Un facteur  $-ik_\mu$  est associé à  $\partial_\mu$ , où  $k_\mu$  est le moment entrant dans le vertex.

(iv) Intégrer sur toutes les boucles avec un facteur  $d^4q/(2\pi)^4$ . Associer un facteur  $-1$  à toute boucle fermionique.

(v) Multiplier par un facteur de symétrie et un signe global associé à la configuration des lignes de fermions externes.

Relation fonction de Green-matrice  $S$  : soit  $T_{fi}$  l'élément de matrice  $T$  connexe de la réaction

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_N \rightarrow p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_M.$$

Si l'on suppose toutes les particules de spin zéro et de masse  $m$  :

$$T_{fi} = -i(z_3)^{(N+M)/2} \lim_{p_i^2 \rightarrow m^2} \lim_{p_i'^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1}^N \theta(p_{i0}) \prod_{j=1}^M \theta(p'_{j0}) \times \\ \times \bar{G}_{c,R}^{(N+M)}(-p'_1, \dots, -p'_M; p_1, \dots, p_M)$$

où  $\bar{G}_{c,R}^{(N+M)}$  est une fonction de Green connexe renormalisée amputée de ses propagateurs externes complets et  $iz_3$  le résidu du propagateur renormalisé au pôle  $k^2 = m^2$ .

Facteurs associés aux particules externes (spin 1/2 et spin 1).

Fermion entrant :  $z_2^{1/2} u^{(r)}(\mathbf{p})$  ; Fermion sortant :  $z_2^{1/2} \bar{u}^{(r)}(\mathbf{p})$ .

Antifermion entrant :  $z_2^{1/2} \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p})$  ; Antifermion sortant :  $z_2^{1/2} v^{(r)}(\mathbf{p})$ .

Particule de spin 1 : facteur  $z_3^{1/2} \varepsilon_\mu^{(s)}(z_3^{1/2} \varepsilon_\mu^{(s)*})$

pour une particule entrante (sortante) ; si  $\mathbf{k} \parallel Oz$  :

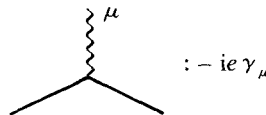
$$\begin{aligned} \text{hélicité } +1 : \varepsilon_\mu^{(+)} &= \left( 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \text{hélicité } 0 : \varepsilon_\mu^{(0)} &= \left( \frac{\|\mathbf{k}\|}{m}, 0, 0, \frac{k_0}{m} \right) \\ \text{hélicité } -1 : \varepsilon_\mu^{(-)} &= \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Règles pour les vertex :

(a) Théorie en  $\varphi^4$  :



(b) Electrodynamique :



(c) Electrodynamique scalaire :

$$: -ie(k + k')_\mu$$

$$: 2ie^2 g_{\mu\nu}$$

(d) Théories de jauge non abéliennes :  $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$

$$: -gf_{abc} [g_{\mu\nu}(p - q)_\rho + g_{\nu\rho}(q - r)_\mu + g_{\rho\mu}(r - p)_\nu]$$

$$: -ig^2 [f_{eab} f_{ecd} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) +$$

$$+ f_{eac} f_{edb} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) +$$

$$+ f_{ead} f_{ebc} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu})]$$

$$: gf_{abc} p^\mu$$

$$: -ig\gamma_\mu (T_a)_{ij}$$

Couplage à des bosons de spin zéro :

$$: -ig(T_a)_{ij} (p + p')_\mu$$
(C.24)

$$: ig^2 g_{\mu\nu} \{T_a, T_b\}_{ij}$$
(C.25)

(e) Modèle Glashow-Salam-Weinberg :

$$\begin{aligned} e &= g \sin \theta ; \quad \operatorname{tg} \theta = g' / g \\ B^\mu &= \cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu \\ W^\mu &= \sin \theta A^\mu + \cos \theta Z^\mu . \end{aligned}$$

Couplage du  $Z^0$  aux fermions :

$$- \frac{e}{\sin \theta \cos \theta} \bar{\psi}(f) \left[ \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) I_3 - \gamma_\mu Q \sin^2 \theta \right] \psi(f) \quad (\text{C.26})$$

$I_3$  = composante 3 de l'isospin,  $Q$  = charge du fermion  $f$ .

# Index

## A

Action : 331, 354.  
Action effective : 206.  
Action euclidienne : 322, 341.  
Aimantation spontanée : 27.  
Altarelli-Parisi (équation d') : 597.  
Amplitude de probabilité : 319.  
Amplitude vide-vide : 335.  
Analyse dimensionnelle : 80, 120, 274.  
Anisotropie cubique : 148.  
Annihilation (opérateur d') : 348, 360, 450, 459.  
Anomalie : 240, 527.  
Anticommutation (relations d') : 450, 459.  
Arbres (approximation en) : 214.  
Asymptotiquement libre (théorie) : 279, 589.

## B

Baryon : 584.  
Becchi-Rouet-Stora (BRS ; transformation de) : 567, 609.  
Bloch-Nordsieck (mécanisme de) : 597.  
Blocs de spin : 92, 110.  
Bogolioubov (construction de) : 394, 422.  
Bogolioubov-Hepp-Parasiuk-Zimmermann (BPHZ ; schéma) : 251.  
Bohm-Aharonov (effet) : 474.  
Boson : 449.  
Boson  $W$  : 447, 578, 581.  
Boson  $Z^0$  : 447, 578, 581.  
Boucle : 200.  
Brisure de symétrie : 27, 36, 68, 569.

## C

Callan-Symanzik (C-S ; équations de) : 285, 292, 298, 311.  
Causalité : 390, 394.  
Champ : 61, 447.  
Champ classique : 357, 363, 452.  
Champ moyen : 34.  
Champs  $\varphi_{\text{in}}$  et  $\varphi_{\text{out}}$  : 378, 389, 391.  
Champ scalaire chargé : 434.  
Champ vectoriel massif : 437.  
Charge invariante : 275.  
Chiralité : 574.  
Chromodynamique quantique (QCD) : 448, 583.  
Classique (approximation) : 214.  
Coleman-Weinberg (potentiel de) : 269, 315.  
Commutation (relations de — canoniques ; RCC) : 321, 356, 358, 366.  
Comptage de puissances : 223, 501.  
Compton (effet) : 493, 534, 539.  
Condition asymptotique : 391, 417.  
Cône de lumière : 370.  
Confinement : 584, 605.  
Connexe (diagramme) : 201.  
Connexe (fonction de corrélation) : 44, 201, 204.  
Connexion : 551.  
Constante de couplage : 29, 93, 95, 178.  
Constante de couplage nue : 236, 240, 600.  
Constante de couplage renormalisée : 242.  
Constantes de structure : 550.  
Constante de structure fine : 487.

Contre-terme : 247, 250, 507, 529.  
 Corrections radiatives : 485, 510.  
 Corrélation (fonction de) : 32, 43, 73, 181, 184, 194.  
 Corrélation (longueur de) : 33, 47, 246, 327, 599.  
 Couleur : 499, 583.  
 Couplage dérivatif : 387, 440.  
 Couplage fort : 602.  
 Couplage faible : 606.  
 Coupure (règles de) : 428, 527.  
 Courant conservé : 435, 455, 462.  
 Courant neutre : 574.  
 Covariance de Lorentz : 364, 454.  
 Covariante (dérivée) : 472, 552, 555.  
 Création (opérateur de) : 348, 360, 450, 459.  
 Critique (température) : 55, 80.  
 Critiques (exposants ou indices) : 41, 47, 74, 110, 299, 310.  
 Cumulant : 112, 202.  
 Cut-off : 69, 215, 218, 239.

### D

Degré superficiel de divergence : 223, 237, 502.  
 Densité de lagrangien : 357, 387, 454, 470.  
 Développement basse température : 155.  
 Développement  $\varepsilon$  : 128.  
 Développement haute température : 31, 153, 605.  
 Développement en nombre de boucles : 79, 213.  
 Développement perturbatif : 121, 184, 397.  
 Diagramme vide-vide : 187, 398.  
 Dilatation (facteur de) : 53, 89, 92, 95.  
 Dimension anormale : 120, 272, 290.  
 Dimension canonique (ou normale) : 120, 290.  
 Dimension d'un groupe de Lie : 547.  
 Dimension du paramètre d'ordre : 29, 131, 183.  
 Dirac (champ de) : 458.  
 Dirac (équation de) : 452.

Dirac (matrices de) : 453, 628.  
 Dyson (équation de) : 373.

### E

Echelle (champ d') : 103.  
 Echelle (invariance d') : 51, 53, 106, 290, 300.  
 Echelle (loi d') : 49, 58, 110.  
 Electrodynamique quantique (QED) : 447, 472, 485.  
 Elitzur (théorème d') : 601, 615.  
 Energie libre : 49, 108.  
 Energie propre : 207, 399, 503.  
 Equations du mouvement : 354, 357, 364, 480 ; (pour les fonctions de Green) : 408.  
 Essentiel (champ ou opérateur) : 103.  
 Etat cohérent : 377, 385.  
 Etats in et out : 374, 389.  
 Euclidicité (postulat d') : 408.  
 Euclidien (prolongement) : 340, 345, 407.  
 Euclidienne (région) : 405, 406.  
 Euclidienne (théorie) : 405, 585.  
 Euler-Lagrange (équation d') : cf. équations du mouvement.

### F

Facteur de flux : 412.  
 Facteur de forme : 516.  
 Facteur de symétrie : 190, 192, 491.  
 Fadeev-Popov (fantôme de) : 562.  
 Fermi (constante de) : 573.  
 Fermi (théorie de) : 573.  
 Fermion : 449.  
 Feynman (contour de) : 339, 369.  
 Feynman (diagrammes ou graphes de) : 186.  
 Feynman (identité de) : 215, 232.  
 Feynman (règles de) : 189, 200, 398, 491, 494, 562, 585.  
 Flot de renormalisation : 98.  
 Fluctuation-dissipation (théorème) : 45.  
 Fluctuation du vide (diagramme de) : 187.  
 Fock (espace de) : 362, 449.

Fonction  $\beta(g)$  : 137, 170, 280, 285, 291, 533, 589.  
 Fonctions de corrélation nues : 244, 253 ; renormalisées : 244, 253.  
 Fonctions de corrélation une-particule irréductibles (1-PI) : 205, 399.  
 Fonction génératrice : 44, 178.  
 Fonctionnelle : 69.  
 Fonctionnelle (dérivation ou dérivée) : 69.  
 Fonctionnelle (intégration ou intégrale) : 70, 319.  
 Fonctionnelle génératrice :  
 — des fonctions de corrélation : 181,  
 — des diagrammes connexes : 202, 204,  
 — des produits- $T$  (ou fonctions de Green) : 335, 397, 467, 487, 561,  
 — des vertex propres : 206, 399.  
 Fragmentation (fonction de) : 591.

### G

Gaussien (modèle) : 79, 118.  
 Gaussienne (intégration ou intégrale) : 78, 621.  
 Gell-Mann et Low (formule de) : 396.  
 Générateur infinitésimal : 548.  
 Ginzburg (critère de) : 75.  
 Ginzburg-Landau (hamiltonien de) : 66, 68, 115, 131, 181, 183.  
 Gluon : 448, 584.  
 Gluon mou (ou infrarouge) : 594.  
 Goldstone (boson de) : 85, 569.  
 Gordon (identité de) : 481, 630.  
 Grassmann (algèbre de) : 463.  
 Grassman (variable de) : 466.  
 Green (fonction de) : 337, 340, 368.  
 Groupe de renormalisation : 89, 100, 302, 305, 532.

### H

Hamiltonien : 355, 357.  
 Hamiltonien (densité de) : 181, 247.  
 Heisenberg (modèle de) : 29, 167.  
 Hélicité : 473, 574, 630, 632.  
 Higgs (boson de) : 448, 579.

Higgs (phénomène de) : 572.  
 Hyperboloïde de masse : 364.  
 Hypercharge faible : 575.

### I

Inessential (champ ou opérateur) : 103, 276, 301.  
 Infrarouge (divergence) : 81, 215, 226, 283, 519.  
 Insertion de masse : 257.  
 Intégrale de chemin : 319, 324, 331, 353, 401.  
 Interaction : 182, 387.  
 Invariance d'échelle naïve : 106, 120, 532.  
 Ising (modèle d') : 28, 325.  
 Isospin faible : 574, 575.

### J

Jauge :  
 — axiale : 476, 615,  
 — (champ de) : 447, 553,  
 — de Coulomb : 476,  
 — de Feynman : 480,  
 — (groupe de) : 552,  
 — (invariance globale de) : 471,  
 — (invariance locale de) : 472,  
 — de Landau : 480,  
 — de Lorentz : 470,  
 — (transformation de) : 469, 472, 551, 554, 557,  
 — (transformation globale de) : 471, 553,  
 — (transformation locale de) : 472, 553.

### K

Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN ; théorème de) : 598.  
 Klein-Gordon (équation de) : 363.  
 Klein-Gordon (champ de) : 366.

### L

Lagrangien : 331, 355,  
 — (densité de) : 357, 387, 470, 472, 487, 561,  
 — euclidien : 341, 407,  
 — d'interaction : 387,  
 — libre : 387.

Landau (approximation de) : 62, 67.  
 Landau (théorie de) : 71.  
 Largeur de la région critique : 106, 107.  
 Legendre (transformation de) : 49, 206.  
 Liberté asymptotique : 295, 584.  
 Lie (groupe de) : 546.  
 Lie (algèbre de) : 548.  
 Ligne physique : 97.  
 Localité : 368, 390.  
 Logarithmes dominants : 279, 304.  
 Longueur de corrélation : 33, 47, 246, 327, 599.

### M

Marginal (champ, opérateur ou variable) : 103, 132.  
 Masse nue : 236, 240.  
 Masse renormalisée : 242.  
 Matrice  $S$  : 376, 389, 393, 409, 414, 419.  
 Matrice  $T$  : 410.  
 Matrice de transfert : 328.  
 Méson : 584.  
 Métastabilité : 72.  
 Minimal ( $MS$  ; schéma de soustraction) : 261, 307, 508, 587.  
 Modèle :  
   — gaussien : 79, 118,  
   — de Heisenberg : 29, 167,  
   — d'Ising : 28, 325,  
   —  $\sigma$ -non linéaire : 167,  
   — de Villain : 159,  
   — de Wegner : 600,  
   —  $XY$  : 153.  
 Modes normaux : 121, 352, 358.  
 Moment : 21, 178, 367.  
 Moment conjugué : 355, 358.  
 Moment magnétique anormal : 485, 520.  
 Muon : 497.

### N

Noether (théorème de) : 471.  
 Nombre d'occupation : 361, 450.  
 Normalisation (conditions de) : 245, 254, 260, 400.

### O

Opérateur composé : 236, 255.  
 Opérateur d'évolution : 323, 372.  
 Onde de spin : 158, 162.

### P

Paquet d'ondes : 365.  
 Paramètre d'ordre : 27.  
 Pauli (matrices de) : 547, 628.  
 Perturbatif (développement) : 121, 184, 397.  
 Phonon : 361.  
 Plaquette : 93, 600.  
 Point fixe : 98, 287, 292.  
   — gaussien : 125,  
   — infrarouge stable : 293,  
   — non gaussien : 126,  
   — ultraviolet stable : 294.  
 Poisson (formule de sommation de) : 161.  
 Polarisation : 439, 473.  
 Polarisation du vide : 510, 532.  
 Potentiel effectif : 212.  
 Potentiel thermodynamique (ou de Gibbs) : 49.  
 Produit normal : 362.  
 Produit- $T$  : 327, 333, 370, 462.  
 Propagateur : 189, 370, 462, 479, 488, 489.

### Q

Quantification :  
   — d'un champ classique : 352,  
   — du champ de Dirac : 458,  
   — du champ électromagnétique : 473,  
   — du champ de Klein-Gordon : 366,  
   — des théories de jauge non abéliennes : 559,  
   — des vibrations élastiques : 359.  
 Quark : 448, 499, 583.

### R

Réduction (formules de) : 417.  
 Relations de dispersion : 426.

Régularisation : 239,  
 — dimensionnelle : 215, 240, 403, 504, 585,  
 — de Schwinger : 218, 239,  
 — sur réseau : 240, 603.

Renormalisables, non renormalisables, super-renormalisables (théories) : 238.

Renormalisation :  
 — du champ : 243,  
 — (constante de) : 244,  
 — de la constante de couplage : 242,  
 — sur couche de masse : 400,  
 — de l'électrodynamique : 529,  
 — (équations différentielles de) : 126,  
 — (groupe de) cf. groupe,  
 — de la masse : 241,  
 — des opérateurs composés : 258,  
 — des théories de jauge non abéliennes : 566.

Représentation :  
 — adjointe : 550,  
 — fondamentale : 548, 550,  
 — d'un groupe : 548.

Représentation interaction : 373, 392.

## S

Saveur : 583.  
 Schwinger (régularisation de) : 218, 239.  
 Section efficace : 412, 630.  
 Singularité infrarouge : 594.  
 Singularité de masse (ou colinéaire) : 594.  
 Source (du champ) : 181, 334, 363, 377, 467, 488.  
 Soustraction (point de) : 254, 400.  
 Spin-statistique (théorème) : 461.  
 Structure (constante de) : 550.  
 Structure (fonctions de) : 592.

Stuëckelberg (lagrangien de) : 479.  
 Susceptibilité magnétique : 39.  
 Surface critique : 97.  
 Symétrie brisée : cf. brisure de symétrie.  
 Symétrie  $O(n)$  : 184.

## T

Tadpole : 214, 398.  
 Taux de désintégration : 412, 630.  
 Tension de la corde : 605.  
 Transformation du groupe de renormalisation (TGR) : 90, 92, 117.  
 Transmutation dimensionnelle : 589.  
 Transport parallèle : 552, 555.  
 Tricritique (point) : 103.

## U

Ultraviolette (divergence) : 215, 223.  
 Unitarité : 377, 390, 423, 527.  
 Universalité : 52, 107.

## V

Valeur moyenne sur le vide : 569.  
 Variable essentielle, marginale, inessentielle : cf. champ —.  
 Vertex : 186, 189, 399, 489.  
 Vertex propre : 205, 399.  
 Vide : 333, 361, 388, 569.  
 Villain (modèle de) : 159.  
 Vortex : 157.

## W

Ward (identité de) : 523, 566, 610.  
 Wegner (modèle de) : 600.  
 Weinberg (angle de) : 577, 580.  
 Weinberg (théorème de) : 229.  
 Wick (rotation de) : 405.  
 Wick (théorème de) : 180, 379, 465.  
 Wilson (action de) : 604.  
 Wilson (boucle de) : 602, 604.

## XYZ

$XY$  (modèle) : 153.



Michel LE BELLAC

## Des phénomènes critiques aux champs de jauge

Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs.

Au cours de ces vingt dernières années, la théorie quantique des champs a progressé de façon spectaculaire, principalement dans le domaine des phénomènes critiques et celui des particules élémentaires. Ce livre, qui s'appuie sur un enseignement donné pendant plusieurs années dans des DEA de physique théorique et physique de la matière condensée, est une introduction à ces progrès récents. Il s'adresse aux étudiants de troisième cycle et aux chercheurs non spécialistes, et a pour objectif d'exposer de façon progressive, en partant du niveau de la maîtrise, un sujet complexe comportant de nombreuses ramifications. Son originalité consiste à traiter dans un langage cohérent des applications à la physique statistique et à la physique quantique. On trouvera dans cet ouvrage un exposé des méthodes et concepts fondamentaux (diagrammes de Feynman, renormalisation et groupe de renormalisation, théories de jauge abéliennes et non-abéliennes, etc.), ainsi que des applications à la physique des phénomènes critiques : développement  $\epsilon$ , modèle XY... et à la physique des particules élémentaires : électrodynamique quantique, interactions électrofaibles, chromodynamique perturbative et sur réseau.

**Michel Le Bellac** est professeur de physique à l'Université de Nice ; il a également séjourné trois ans au CERN. Ses travaux portent sur la physique théorique des particules élémentaires.

**SAVOIRS ACTUELS**

Collection dirigée par Michèle LEDUC

 CNRS EDITIONS

 EDP  
SCIENCES

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.



9 782868 833594

ISBN 2 86883 359 4  
ISBN 2 271 06023 0

© CNRS EDITIONS - EDP Sciences 2004