mini Manuel de

Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement

Driss Boularas
Daniel Fredon
Daniel Petit

- L1/L2
- PCEM 1
- PH 1

Cours + exos corrigés

DUNOD

mini Manuel de

Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement

Cours + Exos corrigés

Driss Boularas
Maître de conférences en mathématiques à l'université de Limoges.
Daniel Fredon
Ancien maître de conférences en mathématiques à l'université de Limoges.
Daniel Petit
Maître de conférences en biologie des populations à l'université de Limoges.

DUNOD

ISBN 978-2-10-054271-0

Table des matières

Avant-propos

Parmi les nombreux outils (informatique, chimie, statistiques …) dont dispose la biologie pour étudier le vivant, celui des mathématiques devient chaque jour plus important.

Cela s'explique par la complexité des phénomènes observés et l'irruption de nouveaux domaines d'étude comme l'écologie, la biologie moléculaire, la climatologie, la dynamique des populations …

Ils nécessitent tous des méthodes très élaborées de quantification et d'interprétation des résultats. Beaucoup de ces méthodes n'ont d'ailleurs été introduites qu'au siècle dernier.

À côté des caractères de description ou de classification des entités vivantes, la biologie contemporaine s'intéresse à leur naissance ou émergence, leur croissance ou évolution, leur extinction ou disparition.

Pour conduire ces études, divers modèles mathématiques, plus ou moins fiables, ont été élaborés.

Les plus célèbres sont les modèles prédateur-proie ou les matrices de Leslie.

Généralement, ces modèles se répartissent en deux catégories, ceux que l'on qualifie de discrets et qui font appel à la combinatoire, aux suites … et ceux que l'on qualifie de continus et qui utilisent des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, des équations et systèmes différentiels …

Ce livre est issu d'un enseignement transversal mathématiques-biologie de la licence de biologie de l'Université de Limoges.

Il comporte

– les exposés des contenus mathématiques choisis,
– des exemples provenant des sciences de la vie,
– les modèles les plus utilisés,
– et, bien sûr, des exercices corrigés, certains pour vous entraîner, d'autres pour étudier des situations issues de la biologie.

Nous espérons que ce livre sera un outil efficace pour vous aider dans votre travail, qui doit être bien réel et pas seulement modélisé!

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

daniel.fredon@laposte.net driss.boularas@unilim.fr daniel.petit@unilim.fr

CHAPITRE 1

Fonctions d'une variable réelle

PLAN

OBJECTIFS

- Décrire un phénomène par une fonction (observation en continu).
- Revoir les fonctions les plus utilisées en biologie.
- Savoir calculer, utiliser et interpréter une dérivée.
- Étudier divers éléments d'une courbe (tangentes, extrémums, branches infinies).
- Savoir construire une courbe paramétrée.

1.1 FONCTIONS USUELLES

1.1.1 Introduction

La biologie ne s'intéresse pas seulement aux descriptions et classifications des différents organismes ; mais aussi aux dépendances entre les différentes propriétés de ces organismes.

Ces dépendances peuvent être qualitatives (couleur, sexe, état solide, liquide ou gazeux) ou quantitatives. À la base des dépendances quantitatives, se trouvent les fonctions.

De façon générale, une fonction est la donnée de deux ensembles A et B (non vides) et d'une relation f, qui à tout élément x de A, associe un et un seul élément, noté $f(x)$, de B.

Les éléments de A sont appelés des objets, antécédents ou variables et ceux de B, des images ou valeurs de f.

Notations : $f : A \to B$ ou, lorsque A et B sont sous-entendus, $x \mapsto f(x)$.

Dans la première partie, nous nous intéresserons exclusivement aux fonctions réelles de variable réelle, c'est-à-dire à celles dont la variable x et l'image $f(x)$ sont des nombres réels. Nous en rappellons ici les plus importantes.

1.1.2 Fonctions polynomiales

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p \quad \text{avec } a_p \neq 0.$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont des nombres fixés.

Le nombre entier p est appelé degré de la fonction polynomiale f.

Les représentations graphiques des fonctions polynomiales de degré 2 sont des paraboles.

1.1.3 Valeur absolue

Il s'agit de la fonction qui à tout réel x associe le nombre, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| = -x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0\,.$$

Ainsi, par exemple, la fonction $x \mapsto |x-1|$ prend la valeur :

$$|x-1| = x-1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |x-1| = -(x-1) = -x+1 \quad \text{si} \quad x \leqslant 1.$$

1.1.4 Fonctions rationnelles

Elles sont de la forme $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où les fonctions f et g sont polynomiales. Le domaine de définition d'une telle fonction est l'ensemble des x tels que $g(x) \neq 0$.

Par exemple, les fonctions rationnelles définies par :

$$\frac{2x-1}{x^2+1}\ , \quad \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\ , \quad \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

sont définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1.5 Fonctions exponentielles et logarithmiques

• Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est notée ln. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0\,; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot \end{cases}$$

Cette fonction est strictement croissante et

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$).

En outre, la fonction logarithme népérien vérifie les propriétés suivantes :

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b\,; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\,; \quad \ln(a^r) = r\ln a\,.$$

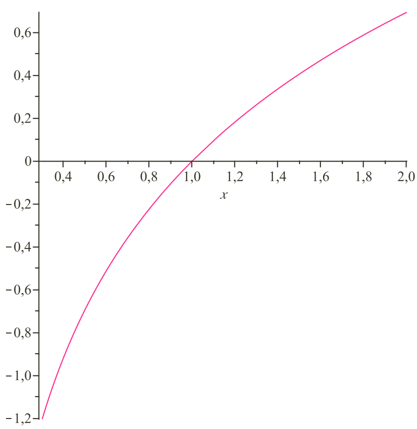


Figure 1.1 Fonction logarithme népérien.

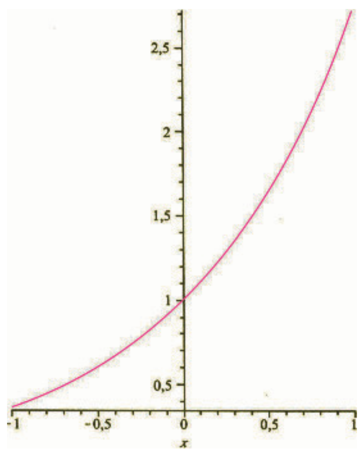


Figure 1.2 Fonction exponentielle.

• Fonction exponentielle

C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est notée exp, ou $x \to \mathrm{e}^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b; \quad \mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r \ ; \quad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}; \quad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}\cdot$$

La fonction exponentielle est strictement croissante.

- **Logarithme de base *a***

La fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$), est définie par :

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\cdot$$

Sa dérivée est : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}\cdot$

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.

Si $a = 10$, $\log_a$ est le logarithme décimal. On le note log.

- **Exponentielle de base *a***

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$), est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$, c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

$$y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \log_a(y).$$

Sa dérivée est : $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Remarquez bien qu'ici, la variable est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction exp.

1.2 LIMITES ET DÉRIVÉES

1.2.1 Limites remarquables d'une fonction

Le calcul des limites des fonctions courantes utilise souvent celles qui suivent (où $m \in \mathbb{N}^*$) :

$$\lim_{x \to +\infty} x^m = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^m} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^m e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} x^m e^{-x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^m \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^m} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^m \ln(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

1.2.2 Dérivée d'une fonction

- **Définition**

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Elle est dérivable en $x_0 \in \left]a,b\right[$ si le quotient :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0.

Cette limite, quand elle existe, est notée $f'(x_0)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Lorsque f est dérivable en tout point x de $]a,b[$, on dit que f est dérivable et on note f' la fonction dérivée ainsi définie sur l'intervalle $]a,b[$.

Dans les sciences expérimentales, la variation h de la variable x est souvent notée Δx.

- **Règles de calcul**

Pour deux fonctions f et g convenablement définies et λ un nombre réel, on a :

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \qquad [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x) \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

- **Signification géométrique de la dérivée**

Rappelons que l'équation de la droite qui passe par deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, avec $a \neq b$, est :

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

En fixant les nombres x_0 et h, l'équation de la droite $\mathcal{D}_h$ qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ est :

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

On remarque alors que lorsque h tend vers 0, la position limite de la droite sécante $\mathcal{D}_h$ est la tangente à ce graphe au point $(a, f(a))$. Elle a donc pour équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- **Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.

➤ Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]a,b\right[$, alors f est croissante sur $[a,b]$;

➤ Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]a,b\right[$, alors f est décroissante sur $[a,b]$;

➤ Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \left]a,b\right[$, alors f est constante sur $[a,b]$.

- **Dérivées successives**

Supposons que la fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable et soit $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$, la fonction dérivée.

➤ Si la fonction f' est continue, on dira que f est continûment dérivable.

➤ Si la fonction f' est dérivable, on dira que f est deux fois dérivable et on note f'' la dérivée seconde : $f'' = (f')'$.
Si de plus f'' est continue, on dira que f est deux fois continûment dérivable.

➤ Ainsi, de proche en proche, on définit la dérivée n-ième de f comme étant la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$. On la note $f^{(n)}$.

1.2.3 Application à l'étude des extrémums

- **Définitions**

➤ La fonction f, définie sur D_f, admet un maximum (resp. minimum) global en $x_0 \in D_f$ si :

$$\text{pour tout } x \in D_f \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

➤ La fonction f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0, tel que :

$$\text{pour tout } x \in I \cap D_f \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit extrémum local.

- **Recherche des maximums et des minimums**

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.

➤ Si la fonction f admet un extrémum en $x_0\in\left]a,b\right[$, alors $f'(x_0)=0$.

➤ Réciproquement, si en un point $x_0\in\left]a,b\right[$, $f'(x_0)=0$ et si la dérivée f' change de signe en passant par x_0, alors la fonction f admet un extrémum en x_0.
Cet extrémum est un minimum si f' est négative avant x_0 et un maximum si f' est positive avant x_0.

➤ Si la dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors la fonction f admet un point d'inflexion.

- **Terminologie**

Lorsque la fonction f traduit mathématiquement l'évolution d'un phénomène (économique, démographique…), on parle de pic ou de creux pour désigner un maximum ou un minimum local de f.

1.2.4 Étude des branches infinies

Pour terminer l'étude d'une fonction, il nous reste à étudier les branches infinies.

La représentation graphique d'une fonction f comporte une branche infinie au voisinage de x_0, fini ou infini, si la distance du point $(x,f(x))$ à l'origine tend vers l'infini lorsque x se rapproche de x_0 :

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x_0^2+f(x)^2}=+\infty.$$

Trois cas peuvent en résulter.

- x_0 est fini et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$; dans ce cas, la droite $x = x_0$ est une asymptote verticale.
- x_0 est infini et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$; dans ce cas, la droite $y = c$ est une asymptote horizontale.
- x_0 est infini et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$; dans ce cas, on doit affiner l'étude.

➤ Si la limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ est finie, alors :

– ou bien, la limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ existe et la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique,

– ou bien, cette limite est infinie et l'on dit alors que la droite d'équation $y=ax$ définit une direction asymptotique.

➤ Si la limite $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, est infinie, alors la branche de la courbe est appelée branche parabolique.

1.3 REPRÉSENTER UN PHÉNOMÈNE BIOLOGIQUE PAR UNE FONCTION

Le vocabulaire de ce paragraphe est celui qui est en usage en statistiques. En particulier, le mot *variable* fait référence à une variable aléatoire et non au vocabulaire des fonctions.

1.3.1 Variable à expliquer et variable explicative

Certaines expériences conduisent à considérer en même temps deux caractères numériques X et Y et à être dans le cas où :

➤ la variable X est contrôlée par l'expérimentateur, c'est-à-dire que ses valeurs x_i sont supposées connues sans erreur, et donc reproductibles à l'identique ;

➤ la variable Y est liée à X et ses valeurs y_i fluctuent quand on reproduit le même x_i.

On dit que Y est la variable à expliquer et X la variable potentiellement explicative, ou susceptible d'expliquer Y.

1.3.2 Ajustement

• Généralités

On considère une famille de couples de points d'origine expérimentale $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. On reporte ces points dans un repère orthonormal.

L'allure du nuage obtenu, ou des considérations sur le phénomène étudié, peuvent suggérer un type de relation fonctionnelle entre x et y, par exemple :

$$y = ax + b \,;\, y = ax^b \,;\, y = a \ln x + b \ldots$$

Après avoir choisi un modèle, une distance entre les points expérimentaux donnés et une courbe du type choisi, on détermine les valeurs des paramètres qui rendent la distance minimum.

• Ajustement par une droite

Quand les points expérimentaux sont à peu près alignés, on retient comme modèle $y = ax + b$.

Dans la méthode des moindres carrés, on choisit de rendre minimum la distance S, somme des carrés des écarts verticaux (voir fig. 1.3).

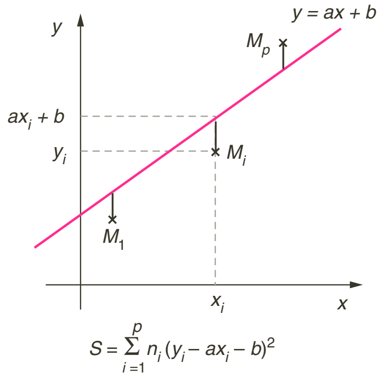


Figure 1.3

La droite d'équation $y = ax + b$ qui rend S minimum est celle qui passe par le point moyen $M(\bar{x}, \bar{y})$ et dont la pente est égale à :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}.$$

Cette droite s'appelle la droite de régression de Y par rapport à X.

La covariance de X et de Y est définie par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}.$$

La deuxième expression se retient par :

moyenne des produits – produit des moyennes.

- **Qualité de l'ajustement**

Après obtention de la droite de régression de Y par rapport à X, on peut écrire :

$$V(Y) = V(aX + b) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(y_i - ax_i - b)^2$$

égalité que l'on interprète par :

variance de Y = variance expliquée + variance résiduelle.

On constate que :

$$\frac{\text{variance expliquée}}{\text{variance totale}} = \frac{V(aX+b)}{V(Y)} = a^2\,\frac{V(X)}{V(Y)} = \frac{(\mathrm{Cov}(X,Y))^2}{V(X)V(Y)} = r^2.$$

Le coefficient de détermination r^2 est une mesure de la qualité de l'ajustement affine. Plus il est proche de 1, meilleur est le modèle affine.

Mais n'oubliez pas qu'un modèle a un domaine de validité biologique limité, à ne pas confondre avec le domaine de définition mathématique de la fonction du modèle.

- **Régressions exponentielles ou logarithmiques**

Le modèle $y = ax^b$ se ramène à $\ln y = \ln a + b \ln x$, soit à une régression affine entre ln x et ln y.

Le modèle $y = \alpha \ln x + \beta$ se ramène à une régression affine entre ln x et y.

Beaucoup de calculatrices contiennent ces modèles.

1.4 COURBES PARAMÉTRÉES DU PLAN

1.4.1 Définition et exemples

- **Définition**

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des points du plan

$$M(t) = (f(t), g(t)) \quad \text{avec} \quad t \in D$$

est appelé courbe paramétrée.

- **Droite dans le plan**

Une droite $\mathcal{D}$ du plan peut être définie par une équation cartésienne

$$ax + by + c = 0$$

où a et b ne sont pas simultanément nuls. Le couple (a,b) est alors un vecteur normal à $\mathcal{D}$ et $(-b,a)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Si (α, β) est un point de $\mathcal{D}$, une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha - bt \\ y(t) = \beta + at \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce même objet géométrique qu'est la droite est donc décrit de deux manières différentes.

Réciproquement, la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 2t \\ y(t) = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

est la droite passant par le point $(-1;0)$ et de vecteur directeur $(2;-1)$.

- **Cercle dans le plan**

Un cercle dans le plan est caractérisé par la donnée de son centre (a,b) et de son rayon r. Une équation cartésienne est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Si l'on pose $x(t)=a+r\cos t$ et $y(t)=a+r\sin t$, on obtient une représentation paramétrée du même cercle.

Réciproquement, la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) & = & -1+2\cos t \\ y(t) & = & 2\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi[$$

est le cercle de centre (–1;0) et de rayon 2.

Dans la représentation graphique d'une courbe paramétrée, on ne tient compte que des variations des coordonnées x et y en fonction du paramètre t, qui est absent du plan.

1.5.2 Tangente en un point

- Soit C la courbe paramétrée définie par $t\mapsto(x(t),y(t))$ sur un intervalle ouvert I. Soit $t_0\in I$ et $M_0=(x(t_0),y(t_0))$ le point correspondant.

Si le couple $(x'(t_0),y'(t_0))$ n'est pas nul, c'est un vecteur directeur de la tangente T à la courbe C en M_0.

Cette tangente admet donc pour équation paramétrée :

$$\begin{cases} X(t) & = & x(t_0)+x'(t_0)(t-t_0) \\ Y(t) & = & y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0) \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

- Par exemple, le cercle centré à l'origine (0;0) et de rayon 1 admet une représentation paramétrée :

$$x(t)=\cos t \quad ; \quad y(t)=\sin t \qquad t\in[0,2\pi[$$

➤ Au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ une équation paramétrée de la tangente est :

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ Y(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire une équation cartésienne de cette tangente en éliminant le paramètre t :

$$X+Y=\sqrt{2}\,.$$

➤ Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0;1)$, une équation paramétrée de la tangente est :

$$\begin{cases} X(t) = -\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ Y(t) = 1 \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire une équation cartésienne de cette tangente :

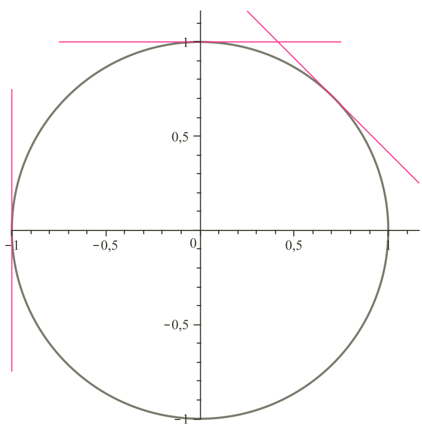
$$Y = 1.$$

➤ Au point $M(\pi) = (-1;0)$, une équation paramétrée de la tangente est :

$$\begin{cases} X(t) = -1 \\ Y(t) = t - \pi \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire une équation cartésienne de cette tangente :

$$X = -1.$$



1.4.3 Branches infinies

L'étude des branches infinies ressemble à celle des graphes des fonctions réelles d'une variable réelle. Ainsi, l'existence d'une asymptote

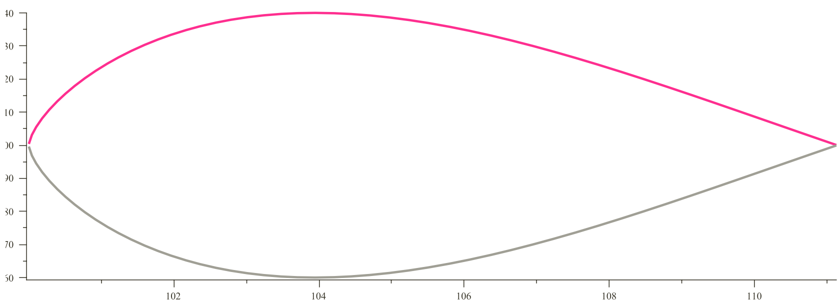
- **horizontale** d'équation $y = k$ correspond à l'existence d'une limite finie k de la fonction $t \mapsto y(t)$ et d'une limite infinie de la fonction $t \mapsto x(t)$;
- **verticale** d'équation $x = k$ correspond à l'existence d'une limite finie k de la fonction $t \mapsto x(t)$ et d'une limite infinie de la fonction $t \mapsto y(t)$;
- **oblique** d'équation $y = ax + b$ si la limite du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$ est égale à a et celle de l'expression $y(t) - ax(t)$ à b.

1.4.4 Simulation de contours de feuilles simples et de fleurs

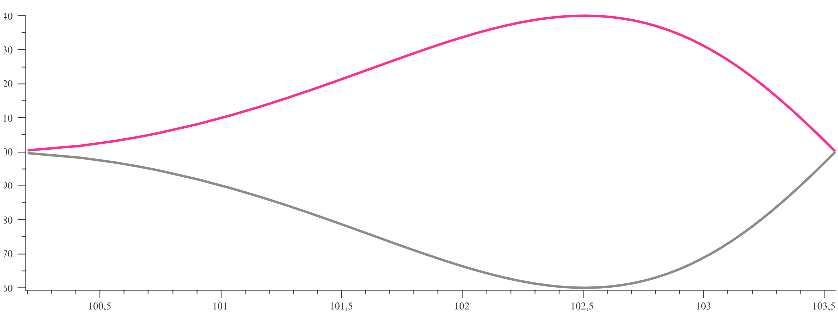
- **Les feuilles simples**

Le principe consiste à faire varier l'abcisse en fonction de t avec une fonction puissance dont l'exposant est entre 0,1 et 5.
Si la puissance est inférieure à 1, la largeur maximale de la feuille est située après la moitié de la longueur. La largeur maximale est d'autant plus proche de la base du limbe que la puissance dépasse 1.
L'ordonnée est donnée par une sinusoïde fonction de t.
Il faut une deuxième courbe $y_2(t)$ symétrique par rapport à l'horizontale du premier tracé.
Voici deux exemples :

$$x = 100 + 2t^{2,4}$$
$$y_1(t) = 200 + 40 \sin t$$
$$y_2(t) = 200 - 40 \sin t$$



$$x = 100 + 2t^{0,5}$$
$$y_1(t) = 200 + 40 \sin t$$
$$y_2(t) = 200 - 40 \sin t$$



- **Les fleurs à symétrie rayonnée**

Pour obtenir une fleur à partir du cercle

$$x = \cos t \quad ; \quad y = \sin t$$

il faut échancrer plus ou moins profondément de manière à obtenir des lobes.

Il est nécessaire de fixer deux paramètres :

a qui varie entre 50 et 300 et qui va réaliser l'échancrure,

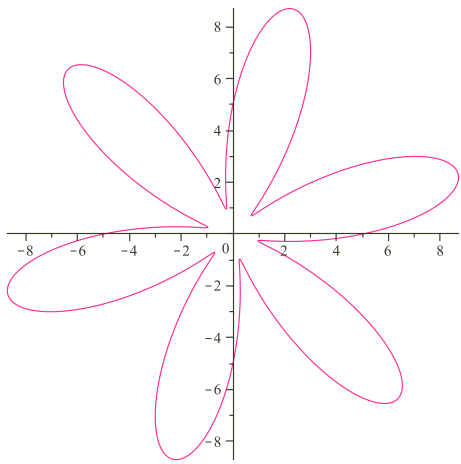
b qui varie entre 3 et 10 et qui indique le nombre de pétales.

La forme générale des représentations paramétrées est :

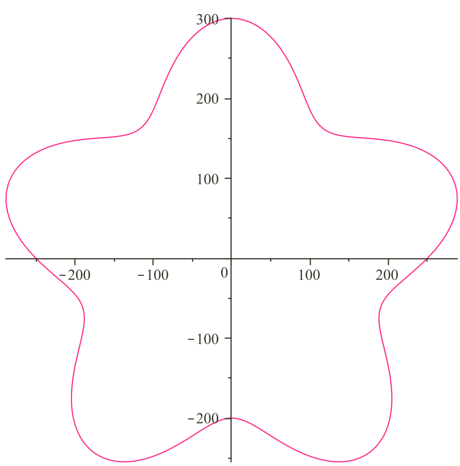
$$\begin{cases} x(t) = [250 + a\sin(bt)]\cos(t) \\ y(t) = [250 + a\sin(bt)]\sin(t) \end{cases}$$

Voici deux exemples :

$a = 220$ et $b = 6$



$a = 50$ et $b = 5$



Vitesses de croissance

Lorsqu'une croissance est très forte, on dit qu'elle est exponentielle et lorsqu'elle est très lente, on dit qu'elle est logarithmique. Cela s'explique par les limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{\ln x} = \infty,$$

c'est-à-dire que la croissance de la fonction exponentielle l'emporte sur celle de toute fonction polynomiale et que la croissance de la fonction polynomiale l'emporte sur celle de la fonction logarithmique.

Il s'ensuit qu'une croissance moyenne, ou intermédiaire, est polynomiale.

MOTS CLEFS

- Fonctions exponentielles et logarithmes
- Dérivée
- Extrémum
- Branche infinie
- Courbe paramétrée

EXERCICES

1.1 Expliciter l'écriture de la fonction : $x \mapsto \left|x^2 - x - 2\right|$.

1.2 Calculer les limites suivantes :

$$\textbf{1. } \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \qquad \textbf{2. } \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \qquad \textbf{3. } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

1.3 Montrer que la fonction continue $x \mapsto |\, x \,|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

1.4 Étudier les variations de la fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \ln x$.

1.5 Pour quelles valeurs des paramètres α et β, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ est-elle croissante ?

1.6 Calculer la dérivée troisième de la fonction $x \mapsto x^m e^x$ où $m \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}.$$

1. Étudiez l'existence et la nature des extrémums de f.
2. Étudiez les branches infinies de f.

1.8 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 9} \\ y(t) = \dfrac{t(t+2)}{t+3} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Étudier les branches infinies de cette courbe.

1.9 Amplitude d'habitat

On a mesuré l'amplitude d'habitat y (c'est-à-dire la variation d'altitude que peut supporter une espèce), ainsi que l'altitude moyenne (x en m) pour des espèces de reptiles dans une zone de moyenne montagne (de 150 m à 950 m).
À partir des résultats observés pour 16 espèces, on a obtenu la courbe d'ajustement polynomial d'ordre 2 :

$$y = -0{,}00108\,x^2 + 1{,}145\,x - 59{,}66.$$

Comme le coefficient de détermination $r^2 \approx 0{,}866$ est assez voisin de 1, ce modèle est acceptable.
Quelle est l'altitude moyenne d'une espèce dont l'amplitude d'habitat est maximale ?

1.10 Mort d'un insecte

L'injection de spores bactériennes dans le corps d'un insecte entraîne une mortalité dont le pourcentage augmente en fonction du temps écoulé.

1. Pour une expérience, le temps étant mesuré en jours à partir de l'instant de l'injection, la mortalité M : a été modélisée par la fonction :

$$M = -0{,}2083t^5 + 3{,}6742t^4 - 21{,}913t^3 + 46{,}25t^2 + 9{,}5455t - 37{,}143$$

avec un coefficient de détermination $r^2 \approx 0{,}9942$ très proche de 1, ce qui permet de valider le modèle sur l'intervalle $[1;6]$. On suppose que, sur cet intervalle, la fonction $t \mapsto M(t)$ est strictement croissante.
Au bout de combien de temps obtient-on une mortalité de 50 % ?

2. Même question pour une autre expérience modélisée (avec $r^2 \approx 0{,}9994$) sur [1;6] par :

$$M = 0{,}25t^5 - 5{,}2652t^4 + 42{,}19t^3 - 160{,}42t^2 + 301{,}91t - 178{,}57,$$

la fonction étant aussi supposée strictement croissante.

1.11 Aire d'échantillonnage

On a quantifié le nombre d'espèces d'insectes sur des surfaces de x m^2 dans une pelouse à Fétuque et dans une pelouse à Brachypode. Les nombres moyens cumulés d'espèces (richesse spécifique) observés sont indiqués dans le tableau suivant :

	nombre cumulé moyen d'espèces d'insectes	
unités de surface	pelouse à Fétuque	pelouse à Brachypode
9	3,25	1,79
18	5,6	3,34
27	7,42	4,72
36	8,79	6,1
45	9,7	7,21
54	10,46	8,21
63	11	9

La relation entre le nombre moyen cumulé d'espèces y et la surface d'échantillonnage x est logarithmique :

$y = 4{,}0898 \ln x - 5{,}9356$ pour la pelouse à Fétuque ;

$y = 3{,}7737 \ln x - 7{,}1206$ pour la pelouse à Brachypode.

1. Calculez la surface nécessaire à échantillonner dans chacune des deux pelouses pour espérer trouver une espèce supplémentaire.

2. Même question pour 5 espèces supplémentaires.

1.12 Croissance bactérienne

On a cultivé la bactérie *Salmonella anatum* dans un bouillon nutritif ordinaire. Avec des comptages au cours des 8 premières heures, on a modélisé l'évolution de l'effectif y (en nombre de bactéries par mL) en fonction du temps x (en heures) par la fonction exponentielle :

$$y = 2240\, e^{1{,}035x}.$$

1. Quel effectif (en nombre de bactéries par mL) pouvez-vous prévoir à 9 h dans l'hypothèse où le milieu n'est pas limitant ?

2. Quelles sont les vitesses de croissance aux temps 3 h ? 5 h ? 8 h ?

1.13 Biodiversité

Un échantillonnage de peuplements d'insectes dans deux milieux A et B a donné les résultats suivants :

	Nombre d'individus dans le milieu *A*	Nombre d'individus dans le milieu *B*
Espèce 1	54	122
Espèce 2	18	35
Espèce 3	5	2

Pour comparer la biodiversité des deux milieux, on utilise l'indice de Shannon qui mesure la « quantité d'information » :

$$H' = -\sum_i \frac{n_i}{N} \log_2 \left(\frac{n_i}{N} \right)$$

où n_i le nombre d'individus de l'espèce i, N le nombre total d'individus et $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$ le logarithme à base 2 de x.
Calculez l'indice de Shannon pour les deux milieux.

1.14 Richesse insulaire

On cherche à savoir si le nombre d'espèces d'oiseaux (richesse insulaire) sur les îles Salomon peut être expliqué par la surface et la distance inter-îles. Les données sont rassemblées dans le tableau suivant :

surface (miles^2)	distance (miles)	nombre d'espèces
0,06	6,7	9
11,8	8,4	37
4,3	12,2	32
28,1	17,8	43
68	28,8	45
1,6	36,4	13
14,3	38,9	29
7,6	97,6	20
264	104,4	42
0,5	108,5	6
3,7	147	9

1. On modélise la richesse insulaire y en fonction de la surface x par une fonction logarithmique :

$$y = 5{,}4933\ln(x) + 15{,}912.$$

Pour observer 50 espèces, quelle est la surface nécessaire prédite par ce modèle ?

2. On appelle résidu de régression la différence entre la richesse prédite par le modèle en fonction de la surface et la richesse réelle.

Pour chaque surface, déterminez le résidu de régression.

Est-il raisonnable d'exprimer le résidu de régression en fonction de la distance inter-îles par un modèle affine ? Si oui, lequel ?

Conclusions ?

1.15 Chats des îles

Plusieurs couples de chats ont été introduits aux îles Kerguelen au début des années 1950 pour éradiquer les lapins introduits auparavant et qui étaient devenus nuisibles pour la végétation locale.

La population des chats a varié selon le tableau suivant (où on a rajouté le logarithme des effectifs) :

années x	effectifs y	$\ln(y)$
1959	10	2,30
1960	15	2,71
1961	23	3,14
1962	36	3,58
1963	56	4,03
1964	86	4,45
1965	132	4,88
1966	203	5,31
1967	313	5,75
1968	480	6,17
1969	740	6,61
1970	1140	7,04

Pouvait-on prévoir l'effectif de 1140 observé réellement en 1970 à partir des données précédentes ?

1.16 Courbes paramétrées et Ammonites

On considère la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) & = & t^b \sin t \\ y(t) & = & t^b \cos t \end{cases}$$

1. Tracez l'arc de courbe correspondant à $t \in [0, 2\pi]$ dans les cas particuliers $b = 1$, $b = 2$ et $b = 5$.

Dans le cas général, pour quelles valeurs de t a-t-on $y = 0$? Calculez les distances à l'origine selon l'axe des abscisses pour chacun des demi-tours.

2. En partant du nouveau système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) & = & a^{bt} \sin t \\ y(t) & = & a^{bt} \cos t \end{cases}$$

reprenez les mêmes questions dans le cas général, après avoir effectué le tracé dans le cas particulier $a = 2$ et $b = 0{,}5$.

3. Chez de nombreuses Ammonites, le rapport entre les diamètres opposés successifs est relativement constant. Parmi les deux systèmes d'équations étudiés dans les questions précédentes, quel est le modèle qui permet la meilleure approximation de cette propriété ?

SOLUTIONS

1.1 Le trinôme $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ a deux racines réelles distinctes. Comme le coefficient de x^2 est positif, il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. En distinguant deux cas, on peut donc expliciter l'écriture de $f(x) = \left|x^2 - x - 2\right|$.

Si $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$, on a : $\quad f(x) = x^2 - x - 2.$

Si $x \in [-1, 2]$, on a : $\quad f(x) = -x^2 + x + 2.$

1.2 On peut obtenir les trois limites demandées avec la seule information $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.

1. On a : $\dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{2}{3}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

2. On a : $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}$ et $\cos 0 = 1$; d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

3. De la formule de trigonométrie $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ on déduit :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} \quad \text{d'où :} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot$$

Vous pouvez retenir les résultats des deux dernières questions.

1.3 Dire que la fonction définie par $f(x) = |x|$ est dérivable en 0, c'est dire que la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe.
Distinguons deux cas : $x < 0$ et $x > 0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1.$$

Comme les limites à gauche et à droite sont différentes, la limite n'existe pas et la fonction n'est pas dérivable en 0.

1.4 La fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Sachant que la fonction exponentielle est strictement croissante, le signe de $f'(x)$ se précise par les équivalences logiques :

$$f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x < e^{-1}$$

Le tableau de variation de f est donc :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f′(x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

Les informations sur f peuvent se compléter par :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad ; f(e^{-1}) = -e^{-1} \approx -0,37 \quad ; f(1) = 0 \quad ; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

1.5 La fonction f est croissante si on a toujours :

$$f'(x) = 3x^2 + \alpha \geqslant 0.$$

Cette condition exige $\alpha \geq 0$, et il n'y a aucune condition sur β.

1.6 On peut calculer les dérivées de proche en proche. Mais il faut discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{N}^*$ car, en dérivant x^m, on ne peut pas obtenir une puissance négative.

➤ Si $m = 1$

$$f'(x) = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = (x+2)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = (x+3)e^x$$

➤ Si $m = 2$

$$f'(x) = (x^2+2x)e^x$$

$$f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = (x^2+6x+6)e^x$$

➤ Si $m \geq 3$

$$f'(x) = [x^m + m\,x^{m-1}]e^x$$

$$f''(x) = [x^m + 2m\,x^{m-1} + m(m-1)\,x^{m-2}]e^x$$

$$f^{(3)}(x) = [x^m + 3m\,x^{m-1} + 3m(m-1)\,x^{m-2} + 3m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}]e^x$$

1.7 **1.** La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Le tableau de variation de f est donc :

x	$-\infty$		-2			-1			0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

La fonction admet

➤ pour $x = -2$ un maximum local avec $f(-2) = -5$;

➤ pour $x = 0$ un minimum local avec $f(0) = -1$.

2. Le tableau ci-dessus montre que $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe C représentative de f.

Il reste à étudier ce qui se passe lorsque x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-1}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x-1}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

La droite d'équation $y = x - 2$ est donc asymptote à C lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.

Le signe de $f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$ donne la position :

– la courbe est au-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$;
– la courbe est au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

Avec $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-2)+1}{x+1}=x-2+\dfrac{1}{x+1}$
on obtient directement toute l'étude précédente.

1.8 • Lorsque t tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\pm\infty}y(t)=\lim_{t\to\pm\infty}t=\pm\infty.$$

Dans les deux cas, la droite $x = 1$ est asymptote à la courbe.
• Lorsque t tend vers 3, on a :

$$\lim_{t\to 3}x(t)=\pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 3}y(t)=\frac{5}{2}\cdot$$

Dans ce cas, la droite $y=\dfrac{5}{2}$ est asymptote à la courbe.

• Lorsque t tend vers -3, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini et l'on a :

$$\lim_{t\to -3}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to -3}\frac{t(t+2)}{t+3}\times\frac{(t-3)(t+3)}{t^2}=\lim_{t\to -3}\frac{(t+2)(t-3)}{t}=-2.$$

puis, de $y(t)+2x(t)=\dfrac{t(t+2)}{t+3}+\dfrac{2t^2}{(t-3)(t+3)}=\dfrac{t(t-2)}{t-3}$

on déduit : $\lim\limits_{t\to -3}[y(t)+2x(t)]=-\dfrac{5}{2}$

Dans ce cas, la droite $y=-2x-\dfrac{5}{2}$ est asymptote à la courbe.

1.9 La fonction du modèle a pour dérivée :

$$y'(x)=-0{,}00216\,x+1{,}145.$$

Elle s'annule pour $x = x_0 \approx 530$.

Comme $y'(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $y'(x) < 0$ pour $x > x_0$, il s'agit bien d'un maximum.

L'espèce de reptile dont l'altitude moyenne est de 530 m est celle qui supporte les plus grandes variations d'altitude.

1.10 **1.** On a $M(1) \approx 0,21 < 50$ et $M(6) \approx 93,94 > 50$.

La fonction M est continue et strictement croissante. Il existe donc une valeur de $t \in [1;6]$ unique telle que $M(t) = 50$.

On peut l'obtenir par des encadrements successifs :

$$M(2) \approx 43,77 \quad ; \quad M(3) \approx 63,09 \quad ; \quad M(2,21) \approx 49,98.$$

On peut donc estimer que le temps attendu pour observer 50 % de mortalité est de 2,21 jours.

2. On a $M(1) \approx 0,06 < 50$ et $M(6) \approx 84,41 > 50$.

La fonction M est continue et strictement croissante. Il existe donc une valeur de $t \in [1;6]$ unique telle que $M(t) = 50$.

On peut l'obtenir par des encadrements successifs :

$$M(2) \approx 44,60 \quad ; \quad M(3) \approx 55,94 \quad ; \quad M(2,4) \approx 50,02.$$

On peut donc estimer que le temps attendu pour observer 50 % de mortalité est de 2,40 jours.

1.11 **1.** • Pour espérer trouver une espèce supplémentaire, dans la pelouse à Fétuque, il faut passer de $y = 11$ à $y = 12$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$12 = 4,0898\ln(x) - 5,9356$$

On en déduit : $x = \exp\left(\dfrac{12 + 5,9356}{4,0898}\right) \approx 80,27$

Par précaution (aucun modèle n'est parfait), on échantillonnera donc 81 m^2.

• Pour espérer trouver une espèce supplémentaire, dans la pelouse à Brachypode, il faut passer de $y = 9$ à $y = 10$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$10 = 3,7737\ln(x) - 7,1206$$

On en déduit : $x = \exp\left(\dfrac{10 + 7,1206}{3,7737}\right) \approx 93,39$

Par précaution, on échantillonnera donc 94 m^2.

2. • Pour espérer trouver cinq espèces supplémentaires, dans la pelouse à Fétuque, il faut passer de $y = 11$ à $y = 16$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$16 = 4{,}0898\ln(x) - 5{,}9356$$

On en déduit : $x = \exp\left(\dfrac{16 + 5{,}9356}{4{,}0898}\right) \approx 213{,}47$

Par précaution, on échantillonnera donc 214 m^2.

• Pour espérer trouver cinq espèces supplémentaires, dans la pelouse à Brachypode, il faut passer de $y = 9$ à $y = 14$, soit échantillonner une surface x telle que :

$$14 = 3{,}7737\ln(x) - 7{,}1206$$

On en déduit : $x = \exp\left(\dfrac{14 + 7{,}1206}{3{,}7737}\right) \approx 269{,}54$

Par précaution, on échantillonnera donc 270 m^2.

1.12 1. On va supposer que le modèle, qui a été validé au cours des 8 premières heures, est encore valable à 9 heures. C'est une hypothèse raisonnable si le milieu nutritif est suffisant.

Dans ce cas, en remplaçant x par 9, on obtient :

$$y = 2240\,\mathrm{e}^{1{,}035\times 9} = 24\,871\,451$$

soit environ 25 millions de bactéries par mL.

2. La dérivée de y en fonction de x est :

$$y'(x) = 2240 \times 1{,}035\,\mathrm{e}^{1{,}035x} = 2318{,}4\,\mathrm{e}^{1{,}035x}.$$

Les vitesses de croissance demandées (en bactéries par mL et par heure) sont donc :

$$y'(3) \approx 51722 \quad ; \quad y'(5) \approx 409\,885 \quad ; \quad y'(8) \approx 9\,144\,220.$$

1.13 • Pour le milieu A, l'effectif total est $N = 77$. L'indice de Shannon pour les insectes étudiés dans le milieu A est donc :

$$H_1' = -\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{54}{77}\log\left(\frac{54}{77}\right) + \frac{18}{77}\log\left(\frac{18}{77}\right) + \frac{5}{77}\log\left(\frac{5}{77}\right)\right] \approx 1{,}105.$$

• Pour le milieu B, l'effectif total est $N = 159$. L'indice de Shannon pour les insectes étudiés dans le milieu B est donc :

$$H_2' = -\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{122}{159}\log\left(\frac{122}{159}\right)+\frac{35}{159}\log\left(\frac{35}{159}\right)+\frac{2}{159}\log\left(\frac{2}{159}\right)\right]$$
$$\approx 0{,}853.$$

• Plus l'indice de Shannon est bas, plus la distribution des espèces est déséquilibrée. Les résultats obtenus permettent donc de dire que la biodiversité des insectes étudiés est plus grande dans le milieu A que dans le milieu B.

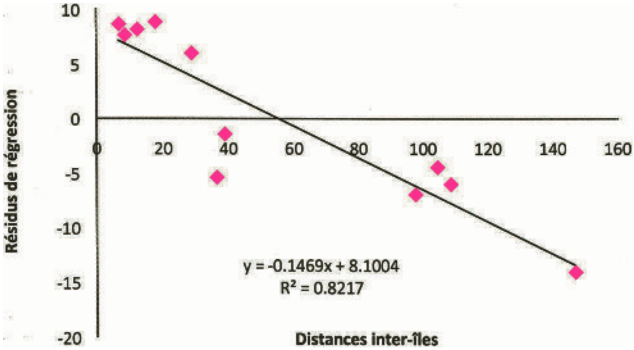
1.14 1. Le modèle fourni dans l'énoncé a été obtenu par ajustement, avec un coefficient de détermination $r^2 \approx 0{,}713$. Il est donc acceptable car assez proche de 1. Mais comme $y = 50$ est en dehors du domaine des valeurs observées, le résultat devra être considéré de façon prudente.
En remplaçant y par 50 dans le modèle, on obtient :

$$\ln x = \frac{50-15{,}912}{5{,}4933} \approx 6{,}2 \quad \text{puis} \quad x \approx 495.$$

2. Pour chaque île, on peut calculer le nombre d'espèces prédit par le modèle (on va retenir des nombres théoriques avec deux décimales, bien que ce ne soit pas possible sur le plan concret) et le résidu de régression qui est la différence entre valeur réelle et valeur fournie par le modèle.

nombre d'espèces observées	nombre d'espèces prédites	résidus
9	0,46	8,54
37	29,47	7,53
32	23,92	8,08
43	34,24	8,76
45	39,09	5,91
13	18,49	–5,49
29	30,53	–1,53
20	27,05	–7,05
42	46,54	–4,54
6	12,10	–6,10
9	23,10	–14,10

En reportant sur un graphique, les distances inter-îles en abscisses et les résidus de régression en ordonnées, on obtient :



Les points paraissent alignés. Il semble donc raisonnable de chercher la droite des moindres carrés qui exprime les résidus y en fonction des distances x.

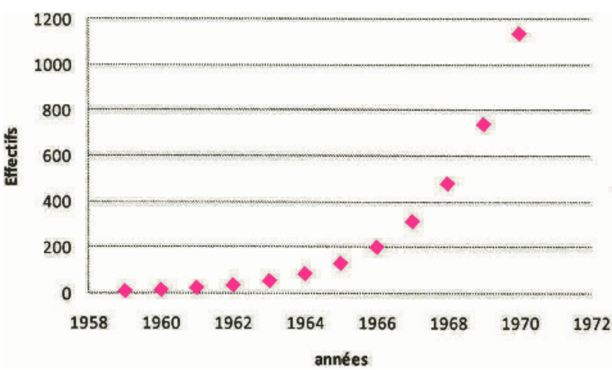
On obtient :

$$y = -0{,}1469x + 8{,}1004$$

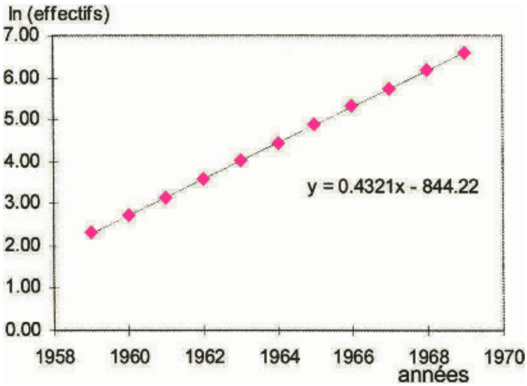
avec un coefficient de détermination $r^2 \approx 0{,}82$ suffisamment proche de 1 pour accepter ce modèle.

En conclusion, la richesse spécifique augmente linéairement avec le logarithme de la surface des îles, et décroît linéairement avec la distance inter-îles une fois que l'effet surface a été enlevé par le calcul des résidus.

1.15 On trace d'abord le graphique avec les années en abscisses et les effectifs en ordonnées.



L'allure de ce graphique suggère une croissance exponentielle des effectifs en fonction de la durée. Pour en avoir une confirmation (au moins visuelle), traçons le graphique avec les années en abscisses et les logarithmes des effectifs en ordonnées.



L'alignement des points désormais obtenus suggère un modèle du type ln $y = ax + b$. La méthode des moindres carrés appliquée à x et ln y donne le modèle :

$$\ln y = 0{,}4321x - 844{,}22.$$

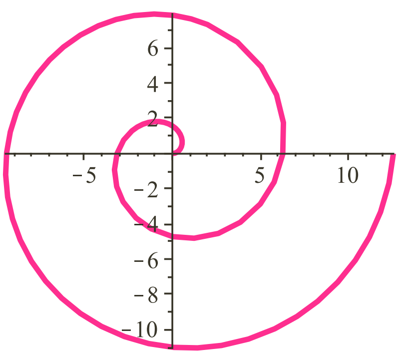
En remplaçant x par 1970 dans ce modèle, on obtient $y \approx 1115$, ce qui est peu différent du nombre observé 1140.

1.16 **1.** On a :

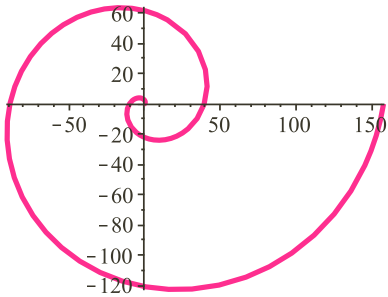
$$x'(t) = b\,t^{b-1}\sin t + t^b\cos t = t^{b-1}(b\sin t + t\cos t)$$
$$y'(t) = b\,t^{b-1}\cos t - t^b\sin t = t^{b-1}(b\cos t - t\sin t)$$

Le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$ quand t varie de 0 à 2π dépend de b.
Pour les valeurs de b indiquées, et avec un traceur de courbes, on obtient :

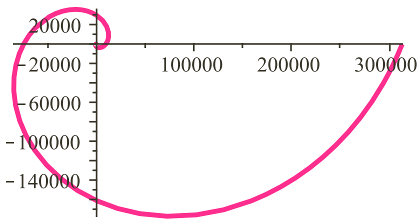
b = 1



b = 2



b = 5



D'une façon générale, on a $y = 0$ (c'est-à-dire que le point correspondant est sur l'axe des abscisses) quand $\cos t = 0$, soit $t_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier.

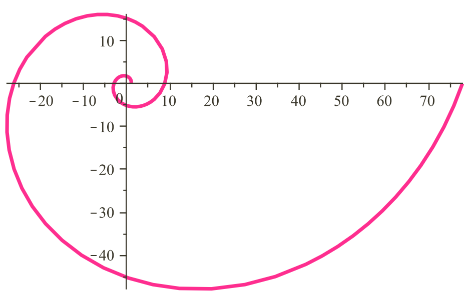
Pour ces valeurs de t, on a $|\sin t| = 1$ et la distance à l'origine est :

$$|x(t_k)| = (t_k)^b.$$

2. On a :

$$x'(t) = b \ln a \, a^{bt} \sin t + a^{bt} \cos t = a^{bt}(b \ln a \sin t + t \cos t)$$
$$y'(t) = b \ln a \, a^{bt} \cos t - a^{bt} \sin t = a^{bt}(b \ln a \cos t - t \sin t)$$

Pour $a = 2$ et $b = 0,5$, on obtient la courbe :



D'une façon générale, on a $y = 0$ (c'est-à-dire que le point correspondant est sur l'axe des abscisses) quand $\cos t = 0$, soit $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier.
Pour ces valeurs de t, on a $|\sin t| = 1$ et la distance à l'origine est :

$$|x(t_k)| = a^{b\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}.$$

3. Calculons les rapports entre les valeurs successives des distances obtenues.
Dans le premier cas, les rapports successifs sont égaux à :

$$\frac{(t_{k+1})^b}{(t_k)^b} = \left(\frac{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right)^b = \left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)^b = \left(1+\frac{2}{2k+1}\right)^b.$$

Cette suite est décroissante et tend vers 1 quand k tend vers l'infini.
Dans le second cas, les rapports successifs sont constants et égaux à $a^{b\pi}$.
C'est donc la deuxième situation qui rend le mieux compte de la forme de l'enroulement des Ammonites.
Dans le cas du Nautile, le rapport observé entre les diamètres successifs est très voisin du nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.
Pour $b = 0{,}5$, une bonne modélisation devrait donc vérifier :

$$a^{0{,}5\pi} = \Phi \iff \ln a = \frac{\ln \Phi}{0{,}5\pi} \iff a \approx 1{,}36$$

CHAPITRE 2

Équations différentielles

PLAN

OBJECTIFS

- Savoir calculer les primitives des fonctions courantes.
- Modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, en reliant les grandeurs et leurs vitesses d'évolution.
- Savoir résoudre des équations différentielles de type courant.

2.1 UN OUTIL : LE CALCUL DE PRIMITIVES

2.1.1 Définition et premières propriétés

• Définition

On appelle primitive d'une fonction continue f toute fonction F dérivable, dont la dérivée est f, soit :

$$F'(t) = f(t)$$

La recherche de primitive est donc l'« opération réciproque » de la dérivation.

• Théorème

Deux primitives de f diffèrent d'une constante. Autrement dit, si F est une primitive de f sur un intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x)+C$ où C est une constante quelconque.

On note $F(t)=\int f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive quelconque de f.

2.1.2 Intégration par parties

• Théorème

u et v étant des fonctions continûment dérivables, on a :

$$\int u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = u(t)\,v(t) - \int u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Cas classiques d'utilisation

P étant un polynôme et $\alpha \neq 0$,

➤ pour $\int P(t)\sin(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t)=P(t)$ et $u'(t)=\sin(\alpha t+\beta)$;

➤ pour $\int P(t)\cos(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t)=P(t)$ et $u'(t)=\cos(\alpha t+\beta)$;

➤ pour $\int P(t)\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t)=P(t)$ et $u'(t)=\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}$;

➤ pour $\int P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t)=\ln t$ et $u'(t)=P(t)$.

➤ pour calculer $I=\int \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ ou $J=\int \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$, on peut faire deux intégrations par parties « sans changer d'avis », c'est-à-dire en posant les deux fois $v(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$, ou les deux fois $v(t)=\cos\beta t$ ou $\sin\beta t$.
Mais il est plus rapide d'utiliser l'exponentielle complexe :

$$I=\mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\right)=\cdots$$

2.1.3 Intégration par changement de variable

Soit u une fonction admettant une dérivée continue. Alors :

$$\int f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

2.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On appelle équation différentielle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$), toute relation du type :

$$R(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (\mathbf{E})$$

qui relie une fonction (inconnue) x dépendant de la variable t, et ses dérivées successives $x', x'', \ldots, x^{(n)}$.

On appelle solution de l'équation différentielle **(E)**, toute fonction x, n fois dérivable sur un intervalle ouvert I et qui vérifie, sur I, la relation (E).

Résoudre (E) dans I, c'est rechercher l'ensemble de ses solutions dans I.

La courbe représentant une solution de (E) est aussi appelée courbe intégrale de (E).

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et de conditions imposées.

2.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

2.3.1 Équations à variables séparables

Elles sont de la forme :

$$g(x(t))\,x'(t) = f(t)$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G. La solution x d'une telle équation vérifie l'égalité :

$$G(x(t)) = F(t) + C.$$

On peut l'expliciter si G admet une fonction réciproque.

2.3.2 Équations linéaires du premier ordre

• Définition

Les équations linéaires du premier ordre sont de la forme :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$$

Elles sont homogènes (ou sans second membre) si $c(t) = 0$. En supposant que $a(t)$ ne s'annule pas sur I, on peut les réécrire sous la forme :

$$x'(t) = \alpha(t)\,x(t) + \beta(t) \qquad \textbf{(E)}$$

où α et β sont des fonctions continues sur I.

• Théorème (principe de superposition)

La solution générale de l'équation différentielle **(E)** est somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée $x'(t) = \alpha(t)\,x(t)$.

• Résolution de l'équation homogène

On note γ une primitive de α et K une constante quelconque.

La solution générale de l'équation homogène $x'(t) = \alpha(t)\, x(t)$ est :

$$x(t) = K\, \mathrm{e}^{\gamma(t)}.$$

• Résolution de l'équation complète

Après avoir résolu l'équation homogène associée, considérons une fonction auxiliaire $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\mathrm{e}^{\gamma(t)}$ soit solution de **(E)**.

En calculant $x'(t)$, en reportant dans l'équation $x(t)$ et $x'(t)$, et en simplifiant, il reste : $K'(t) = \beta(t)\mathrm{e}^{-\gamma(t)}$.

On en déduit $K(t)$ par primitive, puis $x(t)$ en reportant dans la forme de départ.

Remarque

Mettre la constante d'intégration dans le calcul de primitive ci-dessus revient à additionner la solution de l'équation homogène associée. Inutile de faire les deux opérations.

2.3.3 Exemples d'application

• Évolution d'une population de bactéries

On considère une population de bactéries et on désigne par $x(t)$ son effectif à l'instant t.

Lorsqu'elle est isolée, et en milieu nutritif suffisant, cette population a un taux de croissance constant égal à $a > 0$, c'est-à-dire que sa vitesse de croissance est proportionnelle à l'effectif avec le coefficient a.

La présence d'une toxine, en quantité notée $y(t)$, diminue la vitesse de croissance de la population, de façon proportionnelle à la quantité de toxine, avec un coefficient $b > 0$.

L'évolution de l'effectif des bactéries est donc régie par l'équation différentielle :

$$x'(t) = a\, x(t) - b\, y(t).$$

Si l'introduction de la toxine se fait à vitesse constante c, à partir de $t = 0$, on a $y(t) = c\,t$. Vous pouvez alors résoudre l'équation différentielle.

La solution générale est $x(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{at} + \dfrac{bc}{a}\left(\dfrac{1}{a} + t\right)$.

Il reste alors à préciser la constante λ apparue dans la résolution mathématique, en connaissant la quantité initiale $x_0 = x(0)$ de bactéries, soit $\lambda = x_0 - \dfrac{bc}{a^2}\cdot$

• Modèle continu de Verhulst

C'est l'un des premiers modèles qui décrit l'évolution d'une population (bactéries, animaux...). La version simplifiée de ce modèle consiste à considérer les taux de natalité, n, et de mortalité, m, constants.

En notant $x(t)$ le nombre d'individus de la population considérée, à l'instant t, le modèle est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$x'(t) = n\,x(t) - m\,x(t) = (n-m)\,x(t).$$

dont la solution générale est :

$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{(n-m)t}.$$

La prolifération, la constance ou l'extinction de la population dépendent du signe positif, nul ou négatif de la quantité $n - m$.

En fait, ce modèle est un cas particulier d'un modèle plus général où les taux de natalité et de mortalité dépendent de l'effectif de la population $x(t)$ à l'instant t :

$$x'(t) = [n(x(t)) - m(x(t))]x(t).$$

Pierre-François Verhulst (1804-1849) a étudié particulièrement les cas où la fonction n est constante ($n(x) = a$) et la fonction $x \mapsto m(x)$ de la forme : $m(x) = b\,x^p$ avec $p = 1, 2, \ldots$. Lorsque $p = 1$, on obtient l'*équation logistique* :

$$x'(t) = (a - b\,x(t))\,x(t)$$

dont la solution générale est :

$$x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + (K - x(0))\,\mathrm{e}^{-at}} \quad \text{où } K = \frac{a}{b}\cdot$$

Nous remarquons alors, qu'en fonction de la condition initiale $x(0)$ (supérieure, égale ou inférieure au rapport k), la fonction décroît, est constante ou croît.

Dans tous les cas, elle se rapproche de la position stable $x = K$.

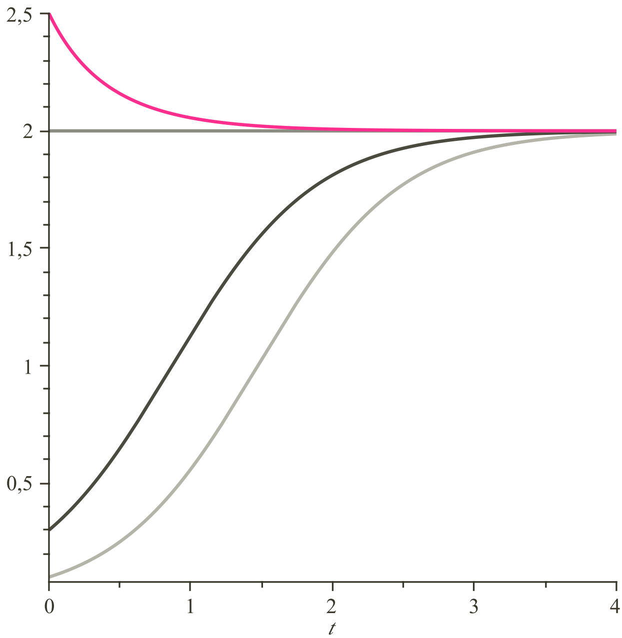


Figure 2.1

• Modèle continu de Gompertz

Au départ, Gompertz (1779-1865) a introduit son modèle pour améliorer celui de Malthus en démographie.

Reprenant le schéma général de la loi d'évolution d'une population :

$$x'(t) = n(x(t)) - m(x(t))x(t),$$

il a considéré la fonction n, constante (comme dans le modèle de Verhulst) et m, une fonction logarithmique :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = r\,x(t)[\ln K - \ln(x(t))] = r\,x(t)\ln\frac{K}{x(t)}$$

où r et k sont des constantes positives.

Sa solution générale est $x(t) = K\exp[-\mathrm{e}^{-rt-C}]$ où C est la constante d'intégration.

Pour expliquer sa démarche, il écrivait en 1825 : « Il est possible que la mort soit la conséquence de deux causes qui généralement coexistent ; l'une, le hasard, sans disposition préalable à la mort ou à la détérioration ; l'autre, une détérioration, ou une inaptitude croissante à résister à la destruction ».

Le modèle de Gompertz est maintenant utilisé dans de nombreux domaines. Il sert à décrire la croissance d'organes, des ailes d'oiseaux, des tumeurs cancéreuses...

2.4 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

2.4.1 Théorèmes généraux

• Définition

Les équations linéaires du second ordre à coefficients constants sont de la forme :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t) \qquad (\mathbf{E})$$

où a, b et c sont des constantes et $a \neq 0$.

Elles sont homogènes (ou sans second membre) si $f(t) = 0$.

• Théorème (principe de superposition)

La solution générale de l'équation différentielle **(E)** est somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

2.4.2 Résolution de l'équation homogène

La fonction $x(t) = \mathrm{e}^{rt}$ (avec $r \in \mathbb{C}$) est solution de :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0 \qquad (\mathbf{E_h})$$

si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Les racines r_1 et r_2 de cette équation du second degré dépendent du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, les racines sont réelles et distinctes. La solution générale de $(\mathbf{E_h})$ est de la forme :

$$x(t) = K_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + K_2\,\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

- Si $\Delta = 0$, la racine r_0 est double. La solution générale de $(\mathbf{E_h})$ est de la forme :

$$x(t) = (K_1 t + K_2)\,\mathrm{e}^{r_0 t}.$$

- Si $\Delta < 0$, les racines $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont complexes et conjuguées. La solution générale de $(\mathbf{E_h})$ est de la forme :

$$x(t) = e^{\alpha t}[K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)]$$

Obtenir une équation différentielle à partir d'observations

Les équations différentielles apparaissent souvent lorsqu'on cherche un modèle mathématique rendant compte d'un phénomène expérimental qui varie dans le temps ou dans l'espace.

Si la variable est le temps mesuré (ou pensé) de façon continue, la dérivée première est une vitesse et la dérivée seconde une accélération. Mais en biologie, seule la vitesse est accessible et on part souvent d'une relation entre la quantité mesurée et sa vitesse d'évolution, ce qui permet d'écrire une équation différentielle.

Si le temps est mesuré à intervalles de temps réguliers, on modélise alors la quantité étudiée par une suite (u_n) qui dépend du temps n (*cf.* chap. 3). On a alors une relation entre les valeurs successives de la suite, ce qui est analogue à une équation différentielle.

Une telle démarche repose sur des réflexions préalables : on dégage les paramètres et les inconnues significatifs, on justifie les approximations et les hypothèses simplificatrices faites et on délimite avec soin le cadre précis de validité du modèle.

Évidemment, les résultats fournis par le modèle mathématique doivent être confrontés aux mesures expérimentales pour valider la démarche.

Un modèle mathématique ne peut que décrire de manière approchée les phénomènes expérimentaux. Son domaine de validité doit être précisé avec soin. Plusieurs modèles peuvent exister pour décrire un même phénomène : ainsi la dynamique newtonnienne décrit correctement les phénomènes mécaniques à l'échelle de la Terre, mais se révèle très insuffisante à l'échelle de l'Univers.

MOTS CLÉS

- Primitive
- Équation différentielle
- Modèle continu de Verhulst
- Modèle continu de Gompertz

EXERCICES

2.1 Calculez $F(t)=\int \frac{1+2t}{(1+t+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(t)=\int \frac{t+2}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

2.2 Calculez $\int t^3 \ln t \,\mathrm{d}t$.

2.3 Calculez $F(t)=\int \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

2.4 **1.** Déterminez les réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \qquad \frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}.$$

2. Utilisez le changement de variable $u=\cos x$ pour calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

2.5 Calculez $F(t)=\int \mathrm{e}^{2t}\cos 3t\,\mathrm{d}t$.

2.6 Résolvez l'équation différentielle $x'(t)=x^2(t)$.

2.7 Résolvez l'équation différentielle $(1+t^2)x'(t)-tx(t)=0$.

2.8 Résolvez l'équation différentielle $x'(t)+x(t)=e^{2t}$.

2.9 Résolvez l'équation différentielle $tx'(t)+x(t)=3t^2$ sur un intervalle ne contenant pas 0.

2.10 Résolvez l'équation différentielle $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=0$.

2.11 Résolvez l'équation différentielle $x''(t)-x'(t)+x(t)=0$.

2.12 Résolvez l'équation différentielle $x''(t)-6x'(t)+9x(t)=0$.

2.13 Modèle continu de Gompertz

Résolvez l'équation différentielle du modèle continu de Gompertz :

$$x'(t)=r\,x(t)\ln\left(\frac{K}{x(t)}\right).$$

2.14 Le sel a dissout (c'est pas cher)

Le sel se dissout dans l'eau en ions Na^+ et Cl^- à une vitesse proportionnelle à sa masse. S'il y avait au départ 25 kg de sel et s'il en restait 15 kg après 10 h :

1. Combien en reste-t-il après 4 h ?

2. Au bout de combien d'heures ne reste-t-il plus que 0,5 kg ?

2.15 Vitesse de refroidissement d'un corps

On admet que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence des températures de ce corps et du milieu ambiant.

Dans une pièce où la température ambiante est maintenue à 20 °C, un objet chauffé à 100 °C voit sa température chuter à 60 °C en dix minutes.

On note $T(t)$ la température (en °C) de l'objet à l'instant t (en min).

1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la fonction T.

2. En combien de temps la température de ce corps atteindra-t-elle 25 °C ?

2.16 Le stress chez les rongeurs

La croissance d'une population de rongeurs se fait avec un taux constant $a > 0$ tant que l'effectif $x(t)$ est en dessous d'un seuil K.

Lorsque l'effectif atteint la valeur K, les femelles sont en situation de stress et on observe une décroissance dont le taux $-A$ (avec $A > 0$) est proportionnel à l'effectif $x(t)$.

Lorsque l'effectif a décru jusqu'à la valeur k, il n'y a plus de stress et le processus de croissance initiale se rétablit.

L'effectif oscille donc entre la valeur maximale K et la valeur minimale k.

1. Établissez les équations différentielles des phases de croissance et de décroissance.

2. Déterminez la période du cycle entre deux moments où l'effectif est k (de k à K, puis de K à k).

2.17 Évolution du taux d'alcoolémie

On suppose que l'évolution du taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'une personne qui a absorbé à l'instant $t = 0$ une quantité x_0 d'alcool peut être modélisée par une fonction $x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui dépend du temps t (exprimé en heures) et qui vérifie l'équation différentielle :

$$x'(t) = -x(t) + a\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \textbf{(E)}$$

où le paramètre a dépend de la personne.

1. Déterminez la solution générale de cette équation différentielle, puis la solution qui vérifie $x(0) = x_0$.

2. Que devient le taux $x(t)$ lorsque le temps est suffisamment grand ?

3. On suppose que $a = 4$ et $x_0 = 2$. Déterminez le taux maximal d'alcoolémie ainsi que le temps au bout duquel il est atteint.

4. On suppose que $a = 1$. Calculez le taux initial x_0 qui permettrait que le taux d'alcoolémie redescende à moins de 0,4 g.L^{-1} au bout de deux heures.

2.18 Effort de pêche

On suppose qu'une population N de poissons croît en fonction du temps t selon l'équation de Verhulst $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\,N(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right)$ où K désigne la quantité de poissons à l'équilibre.

L'effort de pêche est cp où c est une constante, la natalité n et la mortalité naturelle m.

Le coefficient de variation peut s'écrire : $r = n - m - cp$.

Comme la mortalité naturelle est négligeable par rapport aux pertes dues à la pêche, le coefficient r peut s'écrire de façon simplifiée $r = n - cp$. On notera $b = \dfrac{r}{K}$. L'équation de Verhulst devient donc :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (n - cp)(N - \frac{b}{r}N^2).$$

1. a) Quelle relation y a-t-il entre l'effectif à l'équilibre et l'effort de pêche ?

b) À partir de quel effort de pêche y a-t-il risque d'extinction ?

2. On a intérêt à effectuer des prélèvements qui permettent la plus grande vitesse de renouvellement de la population.

a) Quelle est la valeur de N qui maximise $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$?

b) Quelle est la vitesse de prélèvement qui permet d'obtenir un stock stationnaire à partir du moment où l'on a atteint la valeur de N de la question précédente ?

2.19 Catalyse enzymatique

La vitesse de transformation d'un substrat (S) en produit (P) est favorisée par la présence d'une enzyme E qui joue pour des systèmes biochimiques le rôle de catalyseur. Le mécanisme de la catalyse enzymatique se décompose généralement en deux étapes successives.

- La fixation réversible du substrat (S) sur l'enzyme (E) pour former un complexe (ES) :

$$E + S \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} ES$$

où k_1 et k_2 sont les constantes de vitesse des deux réactions élémentaires de cette étape.

➤ La réaction de décomposition du complexe (ES) en produit (P) :

$$ES \xrightarrow{k_3} E + P$$

où k_3 la constante de vitesse de l'étape.

À partir de ce mécanisme, il est possible de déterminer la fonction qui donne la concentration en produit (P) en fonction du temps : $t \mapsto [P](t)$.

Cette fonction vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2[P](t)}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}[P](t)}{\mathrm{d}t} = \mu \qquad \textbf{(CE)}$$

où $\lambda = k_2 + k_3 + k_1[S]_0$ et $\mu = k_1k_3[E]_0[S]_0$.

Ici, $[E]_0$ et $[S]_0$ désignent respectivement les concentrations initiales en substrat et en enzyme.

1. Trouvez une solution particulière (de la forme $p(t)=Ct$, avec C constante) de l'équation différentielle **(CE)**.

2. Exprimez la solution générale de l'équation **(CE)**.

3. Sachant les valeurs initiales $[P]_0 = 0$ et $\left[\frac{\mathrm{d}[P](t)}{\mathrm{d}t}\right]_0 = 0$, trouvez la loi d'évolution de la concentration du produit (P).

2.20 Ordre d'une réaction chimique

Dans une réaction chimique, l'évolution de la concentration $C(t)$ d'une substance, en fonction du temps t, est souvent modélisée par une équation différentielle :

$$C'(t) = -kC^n(t)$$

où k est une constante positive appelée *constante de réaction* et n est un entier égal à 0, 1 ou 2 appelé *ordre de la réaction*.

1. Résolvez cette équation différentielle pour chacune des trois valeurs de n avec une concentration initiale C_0 pour $t = 0$.

2. On considère maintenant la réaction d'hydrolyse du saccharose donnant un mélange de glucose et de fructose en supposant que l'évolution de la concentration de saccharose est modélisée par une équation du type précédent.

Pour déterminer l'ordre de cette réaction, on utilise le fait que la solution de saccharose dévie la lumière polarisée à droite et que le mélange de glucose et de fructose la dévie à gauche.

On mesure la rotation α de la lumière polarisée qui varie d'une valeur α_0 positive pour $t = 0$ à une valeur α_∞ négative quand t tend vers $+\infty$.

On admet que la concentration $C(t)$ en saccharose est proportionnelle à chaque instant t à l'angle $\gamma = \alpha - \alpha_\infty$.
On obtient les résultats suivants, où t est exprimé en minutes et α en degrés :

t	0	7	18	27	37	56	102	∞
α	24,09	21,40	17,73	15,00	12,40	7,80	0,30	−10,74

a) Déterminez les droites de régressions linéaires de $\gamma = \alpha - \alpha_\infty$, de $\ln\gamma$ et de $\dfrac{1}{\gamma}$ par rapport à t.

b) Déduisez-en l'ordre de la réaction et déterminez la constante de réaction k.

SOLUTIONS

2.1 • Avec $u(t) = 1 + t + t^2$, on reconnaît la forme $\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$ qui est la dérivée de $-\dfrac{1}{u(t)}\cdot$ Par conséquent :

$$F(t) = \int \frac{1+2t}{(1+t+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+t+t^2}\cdot$$

• On peut écrire : $\dfrac{t+2}{t+1} = 1 + \dfrac{1}{t+1}$ ce qui entraîne :

$$G(t) = \int \frac{t+2}{t+1}\,\mathrm{d}t = t + \ln|t+1|.$$

2.2 Effectuons une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln t \\ v'(t) &= t^3 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v(t) &= \frac{1}{4}t^4 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int t^3 \ln t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 \ln t - \frac{1}{4}\int t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 \ln t - \frac{1}{16}t^4.$$

2.3 Si vous n'avez pas oublié que $\dfrac{1}{\cos^2 t}$ est la dérivée de tan t, alors vous savez qu'une intégration par parties va réussir :

$$u(t) = t \qquad \qquad u'(t) = 1$$
$$v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad \text{soit} \qquad v(t) = \tan t$$

On a donc :

$$F(t) = t\tan t - \int \tan t \,\mathrm{d}t = t\tan t - \int \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t = t\tan t + \ln|\cos t|.$$

2.4 1. En multipliant les deux membres par $x + 1$, puis en remplaçant x par -1, on obtient $a = -\dfrac{1}{2}\cdot$

En multipliant les deux membres par $x - 1$, puis en remplaçant x par 1, on obtient $b = \dfrac{1}{2}\cdot$ Donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}.$$

2. Commençons par un calcul formel (comme si on écrivait au brouillon) :

$$\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}.$$

Retrouvons du sens mathématique :

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1}\\ &= -\frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\ln|u-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|.\end{aligned}$$

2.5 • Avec deux intégrations par parties

Un premier calcul :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = e^{2t} & & u'(t) = 2e^{2t} \\ v'(t) = \cos 3t & \text{soit} & v(t) = \frac{1}{3}\sin 3t \end{array}$$

donne : $F(t) = \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t - \frac{2}{3}\int e^{2t}\sin 3t\,dt$.

Un second calcul :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = e^{2t} & & u'(t) = 2e^{2t} \\ v'(t) = \sin 3t & \text{soit} & v(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t \end{array}$$

donne : $\int e^{2t}\sin 3t\,dt = -\frac{1}{3}e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}\int e^{2t}\cos 3t\,dt$.

On obtient en reportant : $F(t) = \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t + \frac{2}{9}e^{2t}\cos 3t - \frac{4}{9}F(t)$,

et donc :

$$F(t) = \frac{3}{13}e^{2t}\sin 3t + \frac{2}{13}e^{2t}\cos 3t.$$

• Avec l'exponentielle complexe

$e^{2t}\cos 3t$ est la partie réelle de $e^{(2+3i)t}$ dont une primitive est $\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}$. On a donc :

$$F(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{2-3i}{13}e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)\right] = e^{2t}\left[\frac{2}{13}\cos 3t + \frac{3}{13}\sin 3t\right].$$

2.6 Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, à variables séparables, qui peut s'écrire :

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1.$$

En intégrant, on obtient :

$$-\frac{1}{x(t)} = t + K \quad \text{soit} \quad x(t) = -\frac{1}{t+K}$$

où K est une constante réelle quelconque. La valeur de K ne peut s'obtenir qu'avec une information supplémentaire, par exemple la valeur initiale $x(0)$.

2.7 Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire et homogène. On peut l'écrire sous la forme :

$$x'(t) = \frac{t}{1+t^2}\,x(t).$$

Avec les notations du cours, on a $\alpha(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ qui admet pour primitive $\gamma(t) = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)$.

La solution générale de l'équation proposée est donc :

$x(t) = k\mathrm{e}^{\gamma(t)} = K\sqrt{1+t^2}$ où K est une constante réelle quelconque.

2.8 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée :

$$x'(t) + x(t) = 0$$

a pour solution générale : $x(t) = K\mathrm{e}^{-t}$ où K est une constante réelle quelconque.

Considérons une fonction auxiliaire $x(t)$ telle que $x(t) = K(t)\mathrm{e}^{-t}$ soit solution de l'équation complète. On a alors $x'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{-t} - K(t)\mathrm{e}^{-t}$, puis en reportant dans l'équation différentielle proposée :

$$K'(t)\mathrm{e}^{-t} - K(t)\mathrm{e}^{-t} + K(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{2t}$$

soit $K'(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{2t}$ puis $K'(t) = \mathrm{e}^{3t}$.

En intégrant, on obtient : $K(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t} + K$ et en reportant dans $x(t)$, la solution générale est :

$$x(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + K\mathrm{e}^{-t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

2.9 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée :

$$tx'(t) + x(t) = 0$$

s'écrit sur un intervalle ne contenant pas $t = 0$:

$$x'(t) = -\frac{1}{t}x(t)$$

La fonction $\alpha(t) = -\frac{1}{t}$ admet pour primitive : $\gamma(t) = -\ln|t| = \ln\frac{1}{|t|}\cdot$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$x(t) = K\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{|t|}} = \frac{A}{t}$$

où $A = K$ ou $A = -K$ suivant l'intervalle, est une constante réelle quelconque.

Considérons une fonction auxiliaire $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\frac{1}{t}$ soit solution de l'équation complète. On a alors $x'(t) = K'(t)\frac{1}{t} - K(t)\frac{1}{t^2}$, puis en reportant dans l'équation différentielle proposée :

$$K'(t) = 3t^2 \text{ puis } K(t) = t^3 + K.$$

La solution générale de l'équation proposée est donc :

$$x(t) = t^2 + \frac{K}{t} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

2.10 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$x(t) = K_1\,\mathrm{e}^t + K_2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

2.11 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique

$$r^2 - r + 1 = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right].$$

2.12 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

admet une racine réelle double $r_0 = 3$.
La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$x(t) = (K_1 t + K_2)\mathrm{e}^{3t}.$$

2.13 L'équation du modèle peut s'écrire :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r\left[\ln\left(\frac{K}{x(t)}\right)\right] = r[\ln K - \ln(x(t))]$$

En considérant la nouvelle fonction inconnue $u(t) = \ln(x(t))$, l'équation devient :

$$u'(t) = r[\ln K - u(t)] \qquad \text{soit} \qquad \frac{u'(t)}{\ln K - u(t)} = r$$

puis, par calcul de primitives :

$$-\ln\left|\ln K - u(t)\right| = rt + C.$$

D'après l'équation différentielle du modèle, $\ln K - u(t)$ est du signe de $x'(t)$, donc positif puisque la population est croissante. On a donc :

$$\ln K - u(t) = \mathrm{e}^{-(rt+C)} \qquad \text{d'où } \ln(x(t)) = u(t) = \ln K - \mathrm{e}^{-(rt+C)} \text{ puis :}$$

$$x(t) = K\exp[\mathrm{e}^{-(rt+C)}].$$

2.14 Soit $x(t)$ la quantité de sel (en kg) à l'instant $t \geqslant 0$. Comme le sel se dissout dans l'eau à une vitesse proportionnelle à sa masse, on a :

$$x'(t) = -k\,x(t) \quad \text{avec } k > 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle est $x(t) = K\,\mathrm{e}^{-kt}$; et on a les informations :

$$x(0) = K = 25 \quad ; \quad x(10) = K\,\mathrm{e}^{-10k} = 15,$$

ce qui donne $K = 25$ et :

$$e^{-10k} = \frac{15}{25} \Leftrightarrow -10k = \ln(0,6) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}\ln(0,6) \approx 0,051.$$

1. On demande :

$$x(4) = 25\,e^{-4k} \approx 20,4.$$

2. On demande t tel que :

$$x(t) = 25\,e^{-kt} = 0,5 \Leftrightarrow kt = -\ln\left(\frac{0,5}{25}\right) \Leftrightarrow t \approx 76,6.$$

2.15 **1.** Dans une pièce où la température ambiante est maintenue à 20 °C, les hypothèses formulées s'écrivent :

$$(\mathbf{E}) \qquad T'(t) = -k[T(t) - 20] \quad \text{avec } k > 0$$

et on sait que :

$$T(0) = 100 \qquad \text{et} \qquad T(10) = 60.$$

2. Il faut d'abord résoudre l'équation différentielle **(E)** qui peut s'écrire :

$$T'(t) + kT(t) = 20\,k.$$

Elle est linéaire. L'équation homogène associée

$$T'(t) + kT(t) = 0$$

a pour solution générale $T(t) = K\,e^{-kt}$ et il existe une solution particulière constante égale à 20.
La solution générale de **(E)** est donc :

$$T(t) = K\,e^{-kt} + 20.$$

Les conditions connues donnent :

$$\begin{cases} 100 = T(0) = K + 20 \\ 60 = T(10) = K\,e^{-10k} + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 80 \\ e^{-10k} = \dfrac{1}{2} \quad \text{soit} \quad k = \dfrac{1}{10}\ln 2 \end{cases}$$

On cherche t tel que $T(t) = 25$, soit :

$$80\,e^{-10k} + 20 = 25 \Leftrightarrow e^{-10k} = 0,0625 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{k}\ln(0,0625) = 40$$

Selon le modèle utilisé, la température du corps atteindra donc 25 °C au bout de 40 minutes.

2.16 **1.** Dans la phase de croissance, on a l'équation : $x'(t) = a\,x(t)$, à condition que $x(t) \leqslant K$.
Dans la phase de décroissance, on a l'équation : $x'(t) = -A\,x(t)$, à condition que $K \leqslant x(t) \leqslant k$.

2. • L'équation différentielle de la phase de croissance a pour solution générale $x(t) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{at}$.
L'effectif varie entre la valeur k à l'instant t_0 et la valeur K à l'instant t_1. On a donc :

$$k = \lambda_1\,\mathrm{e}^{at_0} \quad \text{et} \quad K = \lambda_1\,\mathrm{e}^{at_1}.$$

On en déduit :

$$\ln\left(\frac{k}{\lambda_1}\right) = at_0 \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{K}{\lambda_1}\right) = at_1.$$

d'où :

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{K}{\lambda_1}\right) - \ln\left(\frac{k}{\lambda_1}\right)\right] = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{K}{k}\right).$$

• L'équation différentielle de la phase de décroissance a pour solution générale $x(t) = \lambda_2\,\mathrm{e}^{-At}$.
L'effectif varie entre la valeur K à l'instant t_1 et la valeur k à l'instant t_2. On a donc :

$$K = \lambda_2\,\mathrm{e}^{-At_1} \quad \text{et} \quad k = \lambda_2\,\mathrm{e}^{-At_2}.$$

On en déduit :

$$\ln\left(\frac{K}{\lambda_2}\right) = -At_1 \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{k}{\lambda_2}\right) = -At_2.$$

d'où :

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{A}\left[\ln\left(\frac{k}{\lambda_2}\right) - \ln\left(\frac{K}{\lambda_2}\right)\right] = -\frac{1}{A}\ln\left(\frac{k}{K}\right).$$

• La durée de temps correspondant à un cycle complet est donc :

$$t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A}\right)\ln\left(\frac{K}{k}\right).$$

2.17 1. • L'équation différentielle **(E)** étant linéaire, on considère d'abord l'équation homogène associée

$$x'(t) = -x(t)$$

dont la solution générale est $x(t) = K\,\mathrm{e}^{-t}$ avec K réel quelconque.
Pour résoudre l'équation proposée, considérons une fonction auxiliaire $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\mathrm{e}^{-t}$ soit solution. On a alors :

$$x'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{-t} - K(t)\mathrm{e}^{-t}$$

puis, en reportant et en simplifiant : $K'(t) = a$ soit $K(t) = at + K$.
La solution générale de **(E)** est donc :

$$x(t) = (at + K)\mathrm{e}^{-t}.$$

• En situation expérimentale, on n'a pas une infinité de solutions, mais une seule obtenue avec une (ou des) condition. Ici, on connaît $x_0 = x(0) = K$. La solution cherchée est donc définie par :

$$x(t) = (at + x_0)\mathrm{e}^{-t}.$$

2. Lorsque t tend vers l'infini, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t} = 0$; ce qui entraîne que $x(t)$ tend vers 0.

Ce résultat est conforme à l'observation : avec le temps, l'effet d'une absorption unique d'alcool finit par disparaître.

3. Avec $a = 4$ et $x_0 = 2$, la fonction s'écrit :

$$x(t) = (4t + 2)\mathrm{e}^{-t}.$$

La dérivée $x'(t) = (-4t + 2)\mathrm{e}^{-t}$ est positive pour $0 \leqslant t < 0,5$, nulle pour $t = 0,5$, négative pour $t > 0,5$. La fonction passe donc par un maximum pour $t = 0,5$, dont la valeur est :

$$x(0,5) = 4\,\mathrm{e}^{-0,5} \approx 2,4.$$

4. Avec $a = 1$, la fonction s'écrit :

$$x(t) = (t + x_0)\mathrm{e}^{-t}.$$

On veut $x(2) = 0,4 = (2 + x_0)\mathrm{e}^{-2}$, ce qui donne la valeur initiale :

$$x_0 = 0,4 \times \mathrm{e}^{-2} - 2 \approx 0,96 \text{ g.L}^{-1}.$$

2.18 1. a) Comme on a $r = n - cp = bK$, on en déduit :

$$K = \frac{n - cp}{b} = -\frac{cp}{b} + \frac{n}{b}\cdot$$

La relation liant la densité d'équilibre et l'effort de pêche est donc linéaire et décroissante.

b) Il y a extinction, théoriquement, avec $K = 0$, ce qui donne $p = \dfrac{n}{c}\cdot$

En fait, on n'observe pas souvent d'extinction pour un tel effort de pêche. Il existe d'autres modèles dans lesquels la relation entre K et p est une fonction exponentielle décroissante.

2. a) En dérivant l'équation de Verhulst, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}t^2} = (n - cp)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{2b}{r}N(t)\right).$$

La vitesse de renouvellement de la population est maximale quand cette dérivée est nulle (en étant positive avant et négative après), soit pour :

$$N(t) = \frac{r}{2b} = \frac{K}{2}\cdot$$

C'est donc lorsque l'effectif de la population est égal à la moitié de la capacité d'accueil K que la vitesse de renouvellement est la plus forte.

b) On se situe au niveau d'effectif optimum pour le renouvellement de la population, c'est-à-dire à l'instant t_1 tel que $\dfrac{K}{2}\cdot$

Le stock sera stationnaire pour $t \geqslant t_1$ si la vitesse de prélèvement est égale à la vitesse de croissance de la population en l'absence de prélèvement, c'est-à-dire en reportant dans dans la première écriture de l'équation de Verhulst :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t_1) = r\frac{K}{2}\left(1 - \frac{K}{2}\frac{1}{K}\right) = r\frac{K}{4}\cdot$$

Cette quantité s'appelle MSY (*maximum sustainable yield*).
En fait, on serait mal avisé de récolter au niveau du MSY, car de faibles fluctuations pourraient entraîner l'extinction.
Il faut en outre éviter que l'exploitation ne porte sur des classes non encore matures, ce qui pourrait altérer le potentiel de reproduction de l'espèce.

2.19 1. Considérons une fonction de la forme $p(t) = Ct$ où C est une constante. On a alors $C'(t) = C$ et $C''(t) = 0$.

Cette fonction est donc solution de l'équation différentielle **(CE)** si, et seulement si, $\lambda C = \mu$.

L'équation **(CE)** admet donc pour solution particulière :

$$p(t) = \frac{\mu}{\lambda} t.$$

2. L'équation **(CE)** étant linéaire, cherchons la solution générale de l'équation homogène associée :

$$\frac{d^2[P](t)}{dt^2} + \lambda \frac{d[P](t)}{dt} = \mu$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On considère donc l'équation caractéristique :

$$r^2 + \lambda r = 0$$

qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -\lambda$.

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$K_1 + K_2 \, e^{-\lambda t} \text{ (avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ constantes)}$$

et la solution générale de l'équation complète **(CE)** :

$$[P](t) = K_1 + K_2 \, e^{-\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda} t.$$

3. Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$\begin{cases} 0 = [P](0) = K_1 + K_2 \\ 0 = \dfrac{d[P]}{dt}(0) = -K_2\lambda + \dfrac{\mu}{\lambda} \end{cases}$$

ce qui donne successivement :

$$K_2 = \frac{\mu}{\lambda^2} \qquad \text{puis} \qquad K_1 = -\frac{\mu}{\lambda^2}.$$

La loi d'évolution de la concentration du produit (P) est donc :

$$[P](t) = -\frac{\mu}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda} t.$$

2.20 **1.** L'équation différentielle du premier ordre :

$$C'(t) = -k \, C^n(t)$$

peut aussi s'écrire :

$$\frac{C'(t)}{C^n(t)} = -k$$

ce qui permet de calculer les primitives de chacun des deux membres.

• **Cas n = 0**

L'équation $C'(t) = -k$ conduit à $C(t) = -kt + K$ où K est un constante quelconque.

Connaissant la concentration initiale $C_0 = C(0) = K$, on a donc :

$$C(t) = -kt + C_0$$

• **Cas n = 1**

L'équation $\dfrac{C'(t)}{C(t)} = -k$ conduit à : $\ln[C(t)] = -kt + K$

puis à : $C(t) = \mathrm{e}^K \, \mathrm{e}^{-kt}$.

Connaissant la concentration initiale $C_0 = C(0) = \mathrm{e}^K$, on a donc :

$$C(t) = C_0 \, \mathrm{e}^{-kt}.$$

• **Cas n = 2**

L'équation $\dfrac{C'(t)}{C^2(t)} = -k$ conduit à : $-\dfrac{1}{C(t)} = -kt + K$

puis à : $C(t) = \dfrac{1}{kt - K}$

Connaissant la concentration initiale $C_0 = C(0) = -\dfrac{1}{K}$, on a donc :

$$C(t) = \frac{1}{kt + \dfrac{1}{C_0}}\cdot$$

2.

Pour la régression linéaire, c'est-à-dire la problématique, la détermination de la droite des moindres carrés, la méthode de calcul avec une calculatrice, la mesure de la qualité du modèle à l'aide du coefficient de corrélation r ou du coefficient de détermination r^2, voir :

– dans ce livre chap. 1, paragraphe 3.2

– dans le Mini-manuel *Probabilités et statistique* (F. Couty, J. Debord, D. Fredon) chap. 2, paragraphe 2.3.

Dans chacun des cas étudiés dans la question précédente, on peut écrire une expression affine :

$n = 0$ $\qquad C(t) = -kt + C_0$

$n = 1$ $\qquad \ln[C(t)] = -kt + \ln(C_0)$

$n = 2$ $\qquad \dfrac{1}{C(t)} = kt + \dfrac{1}{C_0}$

Comme $C(t)$ est proportionnelle à γ, la régression sera linéaire (on devrait dire affine)

de γ par rapport à t dans le cas n = 0 ;
de ln γ par rapport à t dans le cas n = 1 ;
de $\dfrac{1}{\gamma}$ par rapport à t dans le cas n = 2.

Les calculs préliminaires donnent :

t	0	7	18	27	37	56	102
γ	34,83	32,14	28,47	25,74	23,14	18,54	11,04
$\ln \gamma$	3,55	3,47	3,35	3,25	3,14	2,92	2,40
$\dfrac{1}{\gamma}$	0,0287	0,0311	0,0351	0,0389	0,0432	0,0540	0,0906

Pour la droite de régression de γ par rapport à t, on obtient :

$$\gamma = -0{,}2307\,t + 32{,}9843 \qquad \text{avec} \quad r^2 \approx 0{,}9707.$$

Pour la droite de régression de ln γ par rapport à t, on obtient :

$$\ln \gamma = -0{,}0113\,t + 3{,}5517 \qquad \text{avec} \quad r^2 \approx 0{,}9999.$$

Pour la droite de régression de $\dfrac{1}{\gamma}$ par rapport à t, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma} = 6{,}05 \times 10^{-4}\,t + 0{,}0246 \qquad \text{avec} \quad r^2 \approx 0{,}9710.$$

b) Les valeurs de r^2 sont toutes voisines de 1. Mais la meilleure est celle qui correspond à $n = 1$.

Par identification, on obtient alors la constante de réaction : $k = 0{,}0113$.

CHAPITRE 3

Suites réelles

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Décrire un phénomène par une suite (observation à intervalles de temps réguliers).
- ➤ Connaître les diverses propriétés mathématiques d'une suite.
- ➤ Étudier des exemples de modélisation discrète de croissances.

3.1 GÉNÉRALITÉS

3.1.1 Définition et exemples

- **Définition**

Les observations sur des caractères biologiques sont souvent accompagnées de prises de mesure, à intervalles de temps réguliers ou non.

À ces instants, lorsqu'on mesure un paramètre quantitatif, on obtient des valeurs u_0, u_1, u_2, ..., et de façon générale la valeur u_n à l'instant n.

On dit qu'on a défini une suite numérique car à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ on a associé un nombre u_n unique.

On note (u_n), sans omettre les parenthèses, la suite de terme général u_n.

- **Exemples et terminologie**

➤ La suite est stationnaire si on a $u_{n+1} = u_n$ à partir d'un certain rang.

➤ Soit a et r deux nombres réels. La suite $(a + nr)$ est appelée suite arithmétique de raison r et de premier terme a.
Elle est caractérisée par le fait que la différence de deux termes consécutifs est constante et égale à r.

➤ Soit a et r deux nombres réels. La suite (ar^n) est appelée suite géométrique de raison r et de premier terme a.
Elle est caractérisée par le fait que si $r \neq 0$, le rapport de deux termes consécutifs est constant et égal à r.

3.1.2 Convergence des suites numériques

➤ La suite (u_n) est dite convergente s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l est appelé limite de la suite (u_n) et on note : $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Cette définition signifie que lorsque n croît, le terme général de la suite s'approche aussi près que l'on veut du nombre l.

➤ La suite (u_n) tend ou diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si :

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n > A \text{ (respectivement } u_n < -A).$$

3.1.3 Opérations sur les suites convergentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers u et v ; alors :

➤ la suite somme $(u_n + v_n)$ converge vers la somme des limites $u + v$;

➤ la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers le produit des limites uv ;

➤ si les nombres v_n et v ne sont pas nuls, la suite quotient $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers le quotient $\dfrac{u}{v}$ ·

➤ pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers λu.

3.1.4 Suites bornées

➤ On dit que la suite (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre M (resp. m) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant M$ (resp. $m \leqslant u_n$).
Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

➤ Une suite (u_n) est bornée si, et seulement si, il existe une constante positive C telle que $|u_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

➤ Toute suite convergente est bornée.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie puisque la suite $(-1)^n$ est bornée sans être convergente.

3.1.5 Monotonie et convergence des suites numériques

- **Définitions**

La suite (u_n) est dite croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ et décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

- **Théorème**

Une suite croissante et majorée est convergente.

Une suite décroissante et minorée est convergente.

3.1.6 Comparaison des suites convergentes

- **Ordre**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ; alors, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Attention, le passage à la limite transforme l'inégalité stricte en inégalité large.

- **Théorème d'encadrement**

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ pour tout n.

Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (w_n) converge et a pour limite l.

- **Suites adjacentes**

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$(u_n) \text{ est croissante;} \quad (v_n) \text{ est décroissante;} \quad \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors ces suites convergent vers des limites l_1 et l_2 qui vérifient $l_1 \leqslant l_2$.
Si de plus $l_1 = l_2$, elles sont adjacentes.

3.1.7 Suites extraites

- **Définition**

Une suite (v_n) est dite extraite d'une suite (u_n) si elle est définie par $v_n = u_{h(n)}$ où h est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Par exemple, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (u_n), les fonctions d'extraction étant respectivement définies par $h(n) = 2n$ et $h(n) = 2n+1$.

- **Propriété**

Si une suite (u_n) converge vers la limite l, alors toute suite extraite est aussi convergente et converge vers l.

Cette propriété entraîne que si deux suites extraites de (u_n) ont des limites distinctes, alors (u_n) ne converge pas.

En revanche, si deux suites extraites d'une suite (u_n) ont la même limite l, on ne peut en général rien dire de la nature de (u_n) sauf si leurs valeurs recouvrent tous les u_n ; auquel cas, (u_n) converge vers l.

3.2 SUITES RÉCURRENTES D'ORDRE 1 DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

3.2.1 Généralités

- **Définition**

Une suite (u_n) est récurrente d'ordre p si la connaissance du terme u_n dépend des p termes précédents.

En particulier, une suite récurrente d'ordre 1 est la donnée du premier terme u_0 et d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes ses valeurs. On considère alors la fonction f de I dans I.

- **Limite éventuelle**

Si (u_n) converge vers l et si la fonction f est continue en l, alors $f(l) = l$.

- **Cas où la fonction *f* est croissante**

Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone. Elle est croissante ou décroissante selon les cas où $u_0 \leqslant u_1$ ou $u_0 \geqslant u_1$.

- **Cas où la fonction *f* est décroissante**

Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante, l'autre décroissante.

Cherchez à étudier si elles sont adjacentes ou non ...

3.2.2 Exemples de modélisation à l'aide de suites récurrentes

• Déplacement d'un animal à vitesse constante sur une ligne droite

Si un animal se déplace dans un espace représenté par une droite, et que la distance parcourue entre deux relevés consécutifs est toujours a, alors :

$$u_{n+1} = u_n + a.$$

La fonction f est définie par $f(x) = x + a$, et les u_n sont les termes d'une suite arithmétique de raison a.

• Marquage d'animaux

On considère une population de N individus et à chaque étape n, on marque k individus qu'on relâche ensuite. Si l'on désigne par u_n le nombre d'individus marqués jusqu'à l'étape n, ce nombre est approché par la loi :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = k + u_n\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Nous n'avons pas $u_{n+1} = u_n + k$ car parmi les individus capturés à l'étape n, il peut y en avoir de déjà marqués.

La fonction associée à cette suite récurrente est définie par :

$$f(x) = k + x\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

• Croissance exponentielle d'une population

Considérons une population de bactéries dont l'effectif double tous les jours. Si u_n désigne la taille de la population au jour n, on a $u_{n+1} = 2u_n$ et $f(x) = 2x$.

Plus généralement, pour étudier l'accroissement d'une population, on considère le taux d'accroissement $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$

Dans l'exemple des bactéries, ce taux est constant et égal à 1.

En général, si le taux est constant et égal à a, la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = (1 + a)u_n$.

C'est donc une suite géométrique de raison $1 + a$.

• Croissance d'une population avec facteur limitant (modèle discret logistique)

Ici, l'accroissement de la population entre deux relevés est encore proportionnel à la taille de la population (supposée reproductrice en totalité), mais s'annule lorsqu'une valeur d'équilibre, K, appelée capacité du milieu, est atteinte. Cet accroissement est positif tant que la taille de la population est inférieure à la capacité K, négatif si la population dépasse en nombre la capacité du milieu.

Le modèle le plus simple décrit la situation où le taux de fertilité est proportionnel à la différence entre la population effective et la population maximale permise par l'habitat K, soit : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = a\dfrac{K-u_n}{K}$.

D'où : $u_{n+1}-u_n = a\,u_n\left(1-\dfrac{u_n}{K}\right)$, et :

$$u_{n+1} = u_n\left(1+a-a\frac{u_n}{K}\right).$$

relation qui correspond à la fonction : $f(x) = x\left(1+a-\dfrac{ax}{K}\right)$.

- **Croissance d'une population avec facteur limitant (modèle discret de Gompertz)**

L'idée est la même que dans le modèle logistique ; on cherche ici un paramètre positif a tel que :

$$u_{n+1}-u_n = a\,u_n \ln\frac{K}{u_n}.$$

La présence du logarithme exprime l'effet de tassement du taux d'accroissement $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ lorsqu'on s'approche de la taille maximale K.

La relation $u_{n+1} = u_n\left(1+a\ln\dfrac{K}{u_n}\right)$ correspond à la fonction :

$$f(x) = x\left(1+a\ln\frac{K}{x}\right).$$

3.3 SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2

3.3.1 Généralités

Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n = 0$$

(où $a \neq 0$, b, $c \neq 0$ sont des constantes réelles), et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

Pour déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1), on considère l'équation caractéristique :

$$ar^2+br+c=0 \qquad (E)$$

équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = b^2-4ac$.

3.3.2 Forme générale des solutions

- Si $\Delta > 0$, (E) a deux racines distinctes r_1 et r_2. Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n.$$

Les constantes K_1 et K_2 s'expriment ensuite en fonction de u_0 et u_1.

- Si $\Delta = 0$, (E) a une racine double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = (K_1 + K_2 n) r_0^n.$$

Les constantes K_1 et K_2 s'expriment ensuite en fonction de u_0 et u_1.

- Si $\Delta < 0$, (E) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ que l'on écrit sous forme trigonométrique $r_1 = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = \rho^n (K_1 \cos n\theta + K_2 \sin n\theta) = \rho^n A \cos(n\theta - \varphi).$$

Les constantes (K_1 et K_2, ou A et φ), s'expriment ensuite en fonction de u_0 et u_1.

Suites arithmétiques et suites géométriques dans l'histoire

• C'est en cherchant à transformer les suites arithmétiques en suites géométriques que le baron écossais John Napier, ou Neper, (1550-1617) invente les logarithmes dits népériens.

Il conseille le mathématicien Henry Briggs pour établir les premières tables de logarithmes décimaux. Ces tables ont eu un tel succès que l'astronome Johannes Kepler a dédié un de ses livres à Napier.

• L'anglais Thomas Robert Malthus (1766-1834) a marqué l'histoire de la pensée économique. En 1798, il développe dans son livre *Essai sur le principe de population* sa doctrine connue sous le mot de malthusianisme.

Il pose le principe que la population croît selon une progression géométrique et les ressources selon une progression arithmétique.

Comme une suite géométrique croissante est plus rapide qu'une suite arithmétique croissante, cela entraînerait un déséquilibre qui conduirait l'humanité vers la famine. Il évoque le rétablissement de l'équilibre par des moyens destructifs (épidémies, guerres) et préventifs (contrôle des naissances).

La suite de l'histoire n'a pas validé le modèle!

MOTS CLEFS

- Suite convergente
- Suite récurrente
- Modélisation discrète

EXERCICES

3.1 Étudiez la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p} \cdot$

3.2 Étudiez la convergence, et la limite éventuelle, de la suite définie par : $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ où a et b sont des réels donnés strictement positifs.

3.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot$

En raisonnant par l'absurde et en considérant les deux suites extraites (S_n) et (S_{2n}), montrez que la suite (S_n) est divergente.

3.4 Soit u_0 et v_0 deux nombres réels tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot$$

Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, puis exprimez leur limite en fonction de u_0 et de v_0.

3.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1. Montrez que la suite (I_n) est décroissante et convergente.

2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$ et déduisez-en $\lim_{n \to \infty} I_n$.

3.6 Suite de Fibonacci

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{et} \quad u_0 = u_1 = 1.$$

On considère également les suites $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{u_{n+2}}{u_n} \cdot$

Calculez les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) quand n tend vers l'infini.

3.7 Les couples de lapins

Un couple de lapins produit chaque mois un nouveau couple qui ne devient productif qu'à partir du deuxième mois de son existence.
En supposant une fidélité des couples et pas de mortalité, combien obtient-on de couples de lapins au bout d'un an en partant d'un couple ?

3.8 Croissance logistique

Soit u_n l'effectif d'une population à la génération n. Cette population suit une croissance logistique si le passage de la génération n à la génération suivante obéit à une formule du type :

$$u_{n+1} = a\,u_n\left(1-\frac{u_n}{K}\right).$$

1. Interprétez les constantes a et K lorsque l'effectif est très inférieur à K, ou au contraire très voisin de K.
2. Qu'arrive-t-il si u_n devient double de K ? Même question si $u_n = 1{,}5K$?
3. En partant de $u_1 = 100$ et en choisissant $K = 1000$, visualisez et commentez l'évolution de la population suivant diverses valeurs de a :

$$a = 1{,}2 \quad ; \quad a = 1{,}8 \quad ; \quad a = 2{,}2 \quad ; \quad a = 2{,}8.$$

4. Avec $K = 100$ et $u_1 = 10$, représentez la génération des premières valeurs de u_n en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction f du modèle :
a) avec $a = 1{,}2$;
b) avec $a = 2{,}8$.

SOLUTIONS

3.1 Pour tout p de 1 à n, on a :

$$\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+p} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

ce qui entraîne pour tout n :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Les suites définies par $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $w_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ sont convergentes et ont la même limite 1.

D'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) est donc convergente et tend vers 1.

3.2 Supposons $a \geqslant b$. Dans la somme $a^n + b^n$, nous allons mettre a^n en facteur, qui est le terme dominant si $a > b$.

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\ln(a^n + b^n) = \frac{1}{n}\ln\left[a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right] = \ln a + \frac{1}{n}\ln\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$$

Comme $a \geqslant b$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right] = 0$. On en déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln a$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

3.3 Supposons que la suite (S_n) converge vers l. Alors les deux suites extraites (S_n) et (S_{2n}) convergent vers l et, par conséquent, $(S_{2n} - S_n)$ converge vers 0. On a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\cdot$$

Chacun des n termes de cette somme est minoré par $\frac{1}{2n}\cdot$

On a donc $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est incompatible avec la convergence de $(S_{2n} - S_n)$ vers 0. La suite (S_n) est donc divergente.

Comme (S_n) est croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

3.4 Par une récurrence immédiate, on obtient $u_n > 0$ et $v_n > 0$; la suite (v_n) est donc bien définie puisque le dénominateur de u_{n+1} ne s'annule pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$$

ce qui prouve que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n ;

puis $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geqslant 0$ ce qui prouve que (u_n) est croissante ;

puis $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$ ce qui prouve que (v_n) est décroissante.

Comme (u_n) est majorée par v_0, elle converge vers une limite l_1.

Comme (v_n) est minorée par u_0, elle converge vers une limite l_2.

D'après les opérations algébriques sur les suites convergentes, on en déduit alors :

$$l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \text{soit} \quad l_1 = l_2 = l.$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}\, v_{n+1} = u_n\, v_n = \cdots = u_0\, v_0.$$

On a donc $l^2 = u_0\, v_0$, soit $l = \sqrt{u_0\, v_0}$ puisque $l \geqslant 0$.

Attention à ne pas dire que (u_n) est majorée par v_n. Un majorant d'une suite doit en majorer tous les termes.

3.5 **1.** Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ on a $\tan x \in [0,1]$, ce qui entraîne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \qquad 0 \leqslant (\tan x)^{n+1} \leqslant (\tan x)^n$$

et par conséquent :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+1}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\, \mathrm{d}x.$$

Ces inégalités montrent que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tan x)^{n+2} + (\tan x)^n]\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n (1 + \tan^2 x)\, \mathrm{d}x.$$

Si on pose $u(x) = \tan x$, on a $u'(x) = 1 + \tan^2 x$ et l'intégrale précédente s'écrit :

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [u(x)]^n u'(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} [I_{n+2} + I_n] = 0$.

Comme (I_{n+2}) est une suite extraite de (I_n), on a $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, ce qui permet de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

3.6 • La suite (u_n) est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Son équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$$

Toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$$

est donc de la forme $u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$.

Les conditions initiales permettent de calculer K_1 et K_2 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = K_1 + K_2 \\ u_1 = 1 = K_1 r_1 + K_2 r_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1 = \dfrac{1-r_1}{r_2-r_1} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ K_2 = \dfrac{r_2-1}{r_2-r_1} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

La suite (u_n) est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Comme $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \approx |-0,6| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0.$

Comme $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty.$

On obtient donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

D'après ce qui précède, on a :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{K_1 r_1^{n+1} + K_2 r_2^{n+1}}{K_1 r_1^n + K_2 r_2^n}\cdot$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = 0$, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

Cette valeur est un nombre irrationnel, noté Φ (lire phi) par référence au sculpteur et architecte grec Phidias, encore appelé nombre d'or.

Le rapport des longueurs Φ est aussi appelé « divine proportion » et se retrouve dans de nombreuses constructions architecturales.

• On a $w_n = \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \times \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \Phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\Phi$.

3.7 Au premier mois, il y a naissance du couple fondateur ; le nombre de couples est donc 1.

Au deuxième mois, le couple fondateur n'est pas encore adulte ; le nombre de couples est donc 1.

Au troisième mois, on a le couple fondateur et le premier couple de descendants ; le nombre de couples est donc 2.

Au quatrième mois, on a les mêmes et le deuxième couple de descendants du couple fondateur ; le nombre de couples est donc 3.

Au cinquième mois, on a les mêmes, le troisième couple de descendants du couple fondateur et le premier couple de descendants issus du couple né le troisième mois ; le nombre de couples est donc 5.

On retrouve ainsi la série de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... Au bout de douze mois, il y aura 144 couples.

Cet énoncé a été publié en 1202 par Fibonacci.

3.8 **1.** • Lorsque l'effectif u_n de la population est très inférieur à la capacité limite K, le rapport $\dfrac{u_n}{K}$ devient négligeable. Il en résulte que la variation devient $u_{n+1} - u_n = a\,u_n$. Cela revient à une croissance exponentielle et signifie que a est la différence : natalité – mortalité.

• Lorsque l'effectif de la population est très voisin de K, la quantité $1 - \dfrac{u_n}{K}$ devient proche de 0. Il en résulte que $u_{n+1} - u_n$ devient proche de 0 ; et donc que la population est stabilisée à un effectif de K.

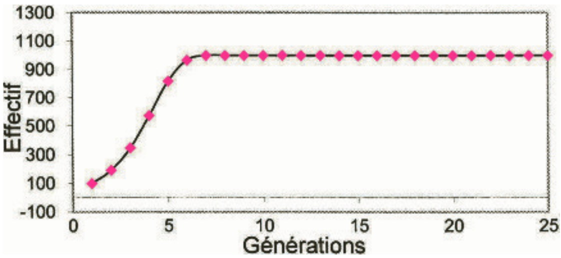
2. • Si u_n est double de K, la variation $u_{n+1} - u_n$ devient égale à $-a u_n$. Si le facteur a est peu différent de 1, la population disparaît à la génération suivante.

• Si $u_n = 1{,}5K$, la variation $u_{n+1} - u_n$ devient égale à $-a\dfrac{u_n}{2}$.

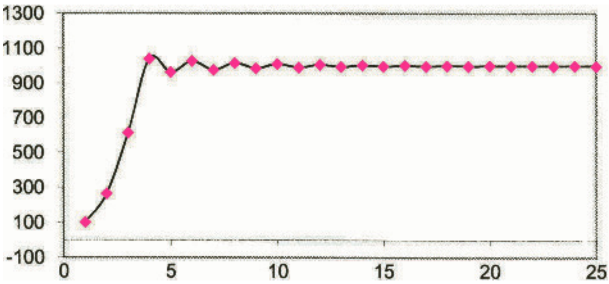
Si a est peu différent de 1, l'effectif de la population est divisé par 2.

Si a est peu différent de 2, la population disparaît.

3. • Pour $a = 1{,}2$, la population se stabilise à 1000 individus en moins de 10 générations.

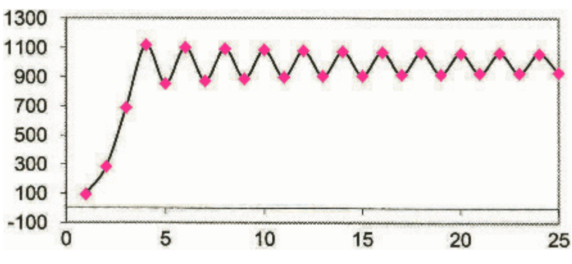


• Pour $a = 1{,}8$, la population atteint rapidement la valeur K, en moins de 5 générations, mais avec de légères oscillations qui s'amortissent.

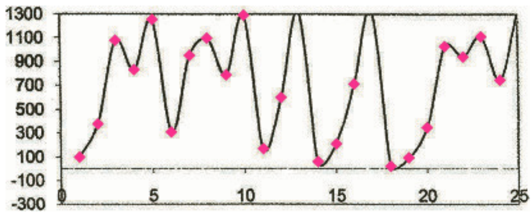


• Pour $a = 2{,}2$, on a des oscillations autour de K, qui s'amortissent très lentement. L'interprétation est que le milieu d'accueil est endommagé par un effectif trop important, ce qui entraîne une surmortalité temporaire. L'effectif étant inférieur à K, le milieu peut se régénérer, ce qui permet à la population de reprendre. En dépassant à nouveau K, le milieu est à nouveau endommagé, et ainsi de suite.

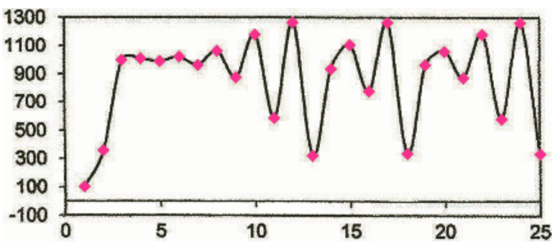
Les ajustements entre effectif maximum et milieu se font toujours avec un décalage du fait que le temps mesuré ici est une variable discrète (valeurs séparées).



• Pour a = 2,8, les fluctuations deviennent chaotiques. Ce régime ne se confond pas avec un régime aléatoire dans lequel il n'y a aucune prévisibilité. Ici, les chutes d'effectif sont d'autant plus violentes que la population a dépassé K, et a donc épuisé les ressources. Le risque d'extinction de la population est très fort, comme dans la génération 18.



Dans le graphe suivant, a est inchangé mais l'effectif initial est 99. On voit que de légères modifications initiales ont des répercussions profondes dans un régime chaotique.

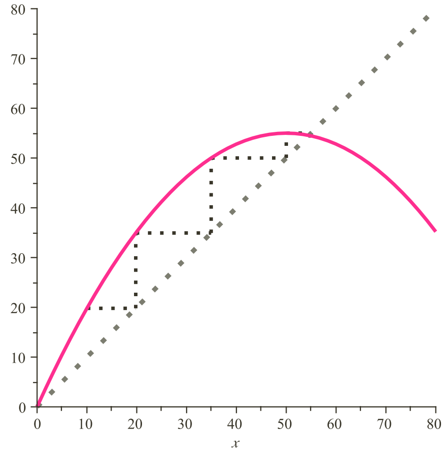


4. Avec K = 100, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définie par :

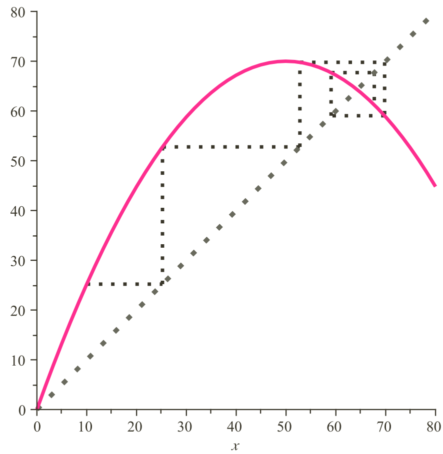
$$f(x) = a\,x\left(1 - \frac{x}{100}\right).$$

On reporte sur l'axe des abscisses u_1 = 10. La valeur $u_2 = f(u_1)$ est l'ordonnée du point correspondant sur la courbe.
L'horizontale $y = u_2$ coupe la première bissectrice d'équation $y = x$ en un point d'abscisse u_2. On revient ainsi sur l'axe des abscisses, et on recommence.

a) Pour $a = 1{,}2$, on obtient :



b) Pour $a = 2{,}8$, on obtient :



CHAPITRE 4

Fondements du calcul matriciel

PLAN

OBJECTIFS

- Acquérir des notions de base de calcul matriciel.
- Utiliser le calcul matriciel dans la dynamique des populations.

Les représentations vectorielles et le calcul matriciel s'appliquent à de nombreux domaines de la biologie. C'est le cas, par exemple, de la dynamique des populations (matrices de Leslie), la biochimie (propriétés géométriques de certaines molécules), l'analyse des données statistiques et la résolution des systèmes différentiels linéaires.

4.1 ESPACES VECTORIELS USUELS

4.1.1 Espaces vectoriels

• Notion

Un espace vectoriel est un ensemble non vide où l'on a défini une « addition » et une « multiplication par un nombre » réel (ou complexe). On ne donne pas la définition mathématique rigoureuse car elle sort largement du cadre de ce manuel.

On appelle vecteur tout élément d'un espace vectoriel et scalaires les nombres par lesquels on peut multiplier les vecteurs.

• Exemples fondamentaux

➤ Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur est un couple et dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur est un triplet. De manière générale, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, un vecteur est un n-uplet et les opérations définies sur cet ensemble sont :

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n),\\ \lambda(x_1,\ldots,x_n) &= (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).\end{aligned}$$

En biologie, plusieurs situations peuvent être modélisées par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ainsi :

– Lorsque l'on veut suivre les variations de la population d'une espèce (ours, hannetons, …), on décompose cette dernière en 2, 3, …, ou n classes d'âge qui définissent alors, un couple, un triplet et de manière générale, un n-uplet.

– Les molécules évoluent dans un espace de dimension trois et pour repérer ses atomes, on utilise les trois coordonnées de l'espace.

– Selon les études ou relevés statistiques dans des enquêtes, nous manipulons des vecteurs avec autant de composantes que de paramètres quantifiés.

➤ L'ensemble $F(I,\mathbb{R})$ des fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles $f+g$ et λf.

Les fonctions considérées comme vecteurs se rencontrent souvent dans la résolution des équations et systèmes différentiels.

4.1.2 Sous-espaces vectoriels

• Définition

Soit E un espace vectoriel ; une partie *non vide* F de E est un sous-espace vectoriel si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall u,v\in F \qquad \forall \lambda,\mu\in K \ \text{ alors } \ \lambda u+\mu v\in F.$$

• Premiers exemples

➤ Dans tout espace vectoriel E, $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

➤ Dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2x-3y=0\}$ est un sous-espace vectoriel alors que la droite $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;2x-3y=1\}$ ne l'est pas.

➤ Dans $\mathbb{R}^2$, une parabole ne peut pas définir un sous-espace vectoriel.

4.1.3 Bases d'un espace vectoriel, dimension

• Combinaisons linéaires

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $v_1,\ldots,v_p$ de l'espace vectoriel E tout vecteur de E de la forme $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont des scalaires.

On note $\operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(v_1,\ldots,v_p)$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

• Bases d'un espace vectoriel

➤ Une famille de vecteurs $(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ est une base de l'espace vectoriel E si *tout* vecteur de E s'écrit de *façon unique* comme combinaison linéaire de cette famille.

➤ Par exemple, la famille de vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• Dimension d'un espace vectoriel

➤ Si $(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ est une base de l'espace vectoriel E, l'entier naturel p est appelé dimension de E.
Par convention, l'espace vectoriel $\{0\}$ a pour dimension 0.

➤ Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n ; les solutions d'une équation différentielle homogène du second ordre dont le coefficient de y'' ne s'annule pas sur un intervalle I forment un espace vectoriel de dimension 2.

4.2 MATRICES

4.2.1 Généralités

• Définition

Une matrice à n lignes et m colonnes est un tableau

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

dont les éléments (ou coefficients) sont des nombres. Dans la notation du coefficient a_{ij}, le premier indice est le numéro de la ligne et le deuxième indice, celui de la colonne.

On dit que la matrice est de format (n, m). L'ensemble des matrices de ce même format se note $\mathcal{M}_{nm}$.

• Matrices particulières

➤ Une matrice est nulle si tous ses coefficients sont nuls.
➤ Une matrice est carrée si elle a autant de lignes que de colonnes.
➤ Une matrice carrée est diagonale si les éléments qui sont en dehors de la diagonale principale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
Pour simplifier, on la note : $\text{diag}\,(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.
➤ Une matrice carrée est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si les éléments qui sont en dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale principale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (respectivement $i > j$).
➤ Une matrice colonne possède une seule colonne ($m = 1$) et une matrice ligne possède une seule ligne ($n = 1$).

• Représentation d'un vecteur dans une base

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ une base. Pour tout vecteur x de E, il existe n scalaires uniques $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

On appelle représentation matricielle du vecteur x dans la base v, la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nous verrons plus loin comment sont reliées deux représentations matricielles d'un même vecteur par rapport à deux bases.

4.2.2 Opérations sur les matrices

• Transposition d'une matrice

➤ Définition

On appelle transposée d'une matrice A la matrice, notée ${}^tA$, et obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Ainsi, si la matrice A a m lignes et n colonnes, la matrice ${}^tA$ a n lignes et m colonnes.

➤ Exemples

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} $$

La transposée d'une matrice colonne (respectivement ligne) est une matrice ligne (respectivement colonne) : ${}^t(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

• Somme et multiplication par un scalaire

➤ Somme de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même format (n, m). La somme $C = A + B$ est la matrice de format (n, m) définie par :

$$ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j. $$

➤ Multiplication d'une matrice par un réel

Soit A une matrice de format (n, m) et λ un réel. La matrice $B = \lambda A$ est la matrice de format (n, m) définie par :

$$ b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j. $$

• Produit de deux matrices

➤ Introduction

Considérons un système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$ \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 & = & b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 & = & b_2 \end{cases} $$

La régularité de son écriture nous suggère de la simplifier en introduisant les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et la matrice :

$$ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. $$

En convenant du mode d'écriture du système de départ :

$$ AX = B, $$

on définit la multiplication de A par X.

Cette écriture sous forme de tableaux fut introduite pour la première fois par Carl Friedrich Gauss (1777-1855) lorsqu'il étudia les transformations linéaires. Elle est indissociée de l'opération qui en résulte, c'est-à-dire du produit de deux matrices que nous allons définir.

➤ Définition

Pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nm}$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{mp}$, on définit le produit $AB=C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{np}$ par :

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

Le produit de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

➤ Exemples

– Pour les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 7\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$ les deux produits AB et BA sont possibles :

$$AB=\begin{pmatrix}13 & 2 & -7\\ -23 & -14 & -2\\ -21 & -2 & 13\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad BA=\begin{pmatrix}20 & -7\\ -20 & -8\end{pmatrix}.$$

– Le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne donne une matrice à une ligne et une colonne :

$$(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1\,y_1+\cdots+x_n\,y_n).$$

– Le produit de deux matrices diagonales de même format est une matrice diagonale :

$$\text{diag}\,(a_{11},\ldots,a_{nn})\times\text{diag}\,(b_{11},\ldots,b_{nn})=\text{diag}\,(a_{11}\,b_{11},\ldots,a_{nn}\,b_{nn}).$$

➤ Propriétés

Comme pour les nombres et quand les produits sont définis, on a :

– $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B,\quad A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$;

– Si 0 est la matrice nulle (avec les dimensions adéquates), alors quelle que soit la matrice A, $A0=0$ et $0A=0$.

– Pour deux matrices quelconques A et B telles que le produit AB soit possible, on a : ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

➤ Remarques

À la différence des nombres :

– Si A et B sont deux matrices carrées de même format, en général, $AB \neq BA$ (on dit que le produit matriciel n'est pas commutatif) ;

– Il est faux de croire que si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

• Formule du binôme

À la condition que $AB = BA$, on a (comme pour les nombres) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\, B^{n-k}.$$

• Matrices inversibles

➤ Matrice unité

On appelle matrice unité d'ordre n, la matrice diagonale ne comportant que des 1, notée : $I_n = \text{diag}\,(1,\ldots,1)$.

Quelle que soit la matrice A, carrée d'ordre n, on a : $I_n A = A I_n = A$. On retrouve la propriété du nombre 1 pour les nombres.

Remarquons aussi que si X est une matrice colonne de n lignes, $I_n X = X$.

➤ Matrice inversible

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n$. S'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = CA = I_n$, la matrice C est unique et est appelée l'inverse de A. On la note $C = A^{-1}$.

Reprenons le système d'équations linéaires déjà rencontré $AX = B$.

Si A est inversible, ce système devient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire, $I_2 X = X = A^{-1}B$ et la résolution est achevée.

Nous verrons plus loin (*cf.* déterminants) comment caractériser le fait que A est inversible. Dans ce cas, le calcul de A^{-1} se fait en résolvant un système linéaire, comme ci-dessus.

➤ Propriétés des matrices inversibles

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad ; \quad ({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \quad ; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

➤ Cas d'une matrice diagonale

Une matrice diagonale $D = \text{diag}\,(d_{11},\ldots,d_{nn})$ est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls et alors :

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_{11}},\ldots,\frac{1}{d_{nn}}\right).$$

4.2.3 Un exemple en dynamique des populations : les matrices de Leslie

Pour étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans un territoire déterminé, on décompose cette dernière en classes d'âge et périodiquement (tous les jours, tous les mois ou tous les ans…), on compte le nombre d'individus femelles dans chaque classe.

Prenons l'exemple des ours. Ils vivent en moyenne entre 14 et 20 ans, et ils sont matures (prêts à la reproduction) à 4 ans. On décompose cette population en cinq classes d'âge, et on note avec la même lettre le nombre d'individus dans les âges correspondants :

B (bébés) : de 0 à 1 an ; N (nourrissons) : de 1 à 2 ans ; J (juvéniles) : de 2 à 3 ans ; I (immatures) : de 3 à 4 ans et A (adultes) : au-delà de 4 ans.

La répartition de la population est représentée par un vecteur colonne de 5 lignes. La somme des composantes $B+N+J+I+A$ donne l'effectif total de la population des ours dans le territoire considéré.

Supposons que les taux de survie (soit 1–taux de mortalité) des nourrissons, bébés, juvéniles, immatures et adultes sont respectivement de 0,89, 0,73, 0,56, 0,76 et 0,92 et que le taux de fécondité est de 0,38 environ. On suppose aussi qu'approximativement, il y a autant de mâles que de femelles.

Étudions maintenant l'évolution de cette population, à intervalles de temps réguliers (tous les ans, dans notre cas).

Supposons qu'à l'instant initial $t=0$, la population existante se répartit selon le quintuplet :

$$V_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ B_0 \\ J_0 \\ I_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

À l'instant $t = 1$ an, on a :

$$V_1 = \begin{pmatrix} N_1 \\ B_1 \\ J_1 \\ I_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38A_0 \\ 0{,}89N_0 \\ 0{,}73B_0 \\ 0{,}56J_0 \\ 0{,}76I_0 + 0{,}92A_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}38 \\ 0{,}89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}73 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}76 & 0{,}92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ B_0 \\ J_0 \\ I_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = AV_0.$$

où A est la matrice carrée d'ordre 5 ci-dessus.

À l'instant $t = 2$ ans le vecteur de répartition est :

$$V_2 = \begin{pmatrix} N_2 \\ B_2 \\ J_2 \\ I_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = AV_1 = A^2V_0.$$

D'année en année, on définit, par récurrence, une suite de vecteurs (V_n) par la donnée de la distribution initiale V_0 et la relation $V_n = AV_{n-1} = A^nV_0$.

Nous verrons plus loin une méthode d'analyse de l'évolution des puissances de la matrice A.

4.3 DÉTERMINANTS

4.3.1 Déterminants d'ordres 2 et 3

• Déterminants d'ordre 2

Le déterminant d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

C'est aussi le déterminant des deux vecteurs colonnes (ou vecteurs lignes).

• Déterminants d'ordre 3

➤ Définition

Le déterminant d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est le nombre calculé selon la formule suivante :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

C'est aussi le déterminant des trois vecteurs colonnes (ou vecteurs lignes).

➤ Propriétés des déterminants d'ordres 2 et 3

– Un déterminant change de signe lorsqu'on permute deux colonnes ou deux lignes.

Cela entraîne qu'un déterminant est nul lorsque deux vecteurs sont égaux.

– La valeur du déterminant ne change pas si on écrit les vecteurs en lignes ou en colonnes, c'est-à-dire :

$$\det A = \det({}^t A).$$

– Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer en déterminants d'ordre 2 suivant la première, la deuxième ou la troisième ligne, selon la règle de signes suggérée par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = +x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= -x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= +x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

4.3.2 Déterminants d'ordre *n*

Les propriétés énoncées au paragraphe précédent peuvent servir à généraliser par récurrence la notion de déterminant à une famille quelconque de n vecteurs (pris dans $\mathbb{R}^n$) ou à une matrice carrée d'ordre n.

• Définition

On appelle déterminant d'une matrice carrée $A = (\alpha_{ij})$, le nombre noté det A et obtenu par récurrence sur l'ordre n, de la manière suivante :

– si $n = 1$: la matrice $u = (\alpha)$ a un seul coefficient et son déterminant est égal à α ;

– pour $n > 1$ on pose :

$$\det A = \alpha_{11}\,\Delta_{11} + \cdots + (-1)^{1+j}\,\alpha_{1j}\,\Delta_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}\,\alpha_{1n}\,\Delta_{1n}$$

où Δ_{1j} désigne le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue à partir de A en supprimant la première ligne et la j-ième colonne.

Cette formule de calcul est le développement par rapport à la première ligne.

• Notation

Le déterminant de la matrice A est noté :

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

• Transposée

$$\det A = \det({}^t A).$$

Les propriétés concernant les colonnes de A s'appliquent donc aussi aux lignes. Dans les deux cas, on parlera de rangées.

• Opérations sur les rangées

➤ On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

Cette propriété est très utilisée pour faire apparaître des 0 sur une colonne (resp. ligne).

➤ Multiplier une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire, c'est multiplier le déterminant par ce scalaire. On utilise surtout cette propriété pour factoriser un terme dans une rangée.

➤ Pour n'importe quelle rangée, on a la propriété de linéarité (donnée ici sur la première colonne) :

$$\det(C_1 + C'_1, C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \det(C'_1, C_2, \ldots, C_n)$$

➤ L'échange de deux lignes (ou de deux colonnes) transforme $\det A$ en $-\det A$.

➤ Le calcul d'un déterminant peut se faire en développant par rapport à n'importe quelle rangée.

• Autres propriétés

➤ Si deux rangées sont proportionnelles, le déterminant est nul.

➤ Le déterminant du produit de deux matrices carrées A et B, d'ordre n est égal au produit de leurs déterminants :

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

➤ Une matrice A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

➤ Si A est une matrice inversible, alors : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

➤ Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base si, et seulement si, son déterminant est non nul.

➤ Le système linéaire $AX = 0$ (où A est une matrice carrée d'ordre n et X, une matrice colonne de n lignes) admet des solutions X non nulles si, et seulement si, $\det A = 0$.

Les matrices de fabrication (pour comprendre le produit de matrices)

Supposons un atelier qui utilise quatre facteurs de production : du travail t, de l'énergie e, et des matières premières a et b.

Il sort de l'atelier trois produits semi-finis A, B, C.

On peut déterminer les quantités de facteurs nécessaires pour la fabrication d'une unité de A, de B, de C, et reporter ces valeurs en ligne. On obtient ainsi, par exemple, la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} t & e & a & b \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1000 & 200 & 50 & 80 \\ 1500 & 100 & 50 & 60 \\ 800 & 250 & 60 & 70 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

On peut y lire que la production d'une unité de A nécessite 1 000 unités de travail, 200 unités d'énergie, 50 unités de a, 80 unités de b, et de même pour B et C.

La matrice introduite s'appelle matrice de fabrication, ou matrice des coefficients techniques. Ses coefficients représentent les rapports entre les quantités de facteurs de production employées et les quantités produites. Ils restent fixes tant que la technique de production reste inchangée.

Pour comprendre le produit de deux matrices, supposons qu'un deuxième atelier utilise les produits semi-finis A, B, C pour fabriquer des produits finis α, β, γ selon la matrice des coefficients techniques :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ N = & \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 3 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \end{array}$$

Il est facile de répondre directement au problème : quelles quantités de facteurs primaires t, e, a, b, entrent dans la fabrication d'une unité de α, de β, de γ ?

Les calculs correspondent au produit matriciel NM, dans cet ordre.

$$\begin{tikzcd} \text{facteurs primaires} \arrow[r, "N"] \arrow[rr, bend right, "NM"'] & \text{produits semi-finis} \arrow[r, "N"] & \text{produits finis} \end{tikzcd}$$

Comme dans la composée $f \circ g$ de deux fonctions f et g, on effectue d'abord g, puis f.

Par exemple, dans une unité de α, il intervient :

4 unités de A qui comportent 4×1000 unités de travail,

et 10 unités de B qui comportent 10×1500 unités de travail,

et 8 unités de C qui comportent 8×800 unités de travail.

Dans une unité de α, on a donc :

$$4 \times 1000 + 10 \times 1500 + 8 \times 800$$

unités de travail.

Dans le produit matriciel NM, on a ainsi multiplié la première ligne de la matrice N par la première colonne de la matrice M.

Vous pouvez vérifier que le calcul des autres termes de la matrice de fabrication qui relie les entrées t, e, a, b et les sorties α, β, γ correspond bien au produit matriciel NM tel qu'il a été défini dans le cours.

MOTS CLÉS

- Espace vectoriel
- Matrice
- Matrice de Leslie
- Déterminant

EXERCICES

4.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Peut-on effectuer les opérations : $A+B$? AB ? BA ?
Si oui, calculez le résultat.

4.2 Si $A \neq 0$, l'égalité $AB = AC$ entraîne-t-elle $B = C$?

4.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculez A^n pour $n \in \mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser la formule du binôme, ou un raisonnement par récurrence).

4.4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Démontrez que A est inversible en calculant son déterminant.

2. Calculez A^{-1}, puis A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

4.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et déduisez-en A^{-1}.

4.6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) (définies par récurrence) telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Calculez ensuite les valeurs de α_n et de β_n.

4.7 Montrez, sans le développer, que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

4.8 On considère le déterminant $P(x)=\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & -3 \\ 2 & x & -3 & 1 \\ 1 & -3 & x & 2 \\ -3 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$.

Utilisez les propriétés des déterminants pour obtenir $P(x)$ sous la forme d'un produit.

4.9 En utilisant les propriétés des déterminants, écrivez sous forme d'un produit la valeur de :

$$D=\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Vous pouvez introduire les matrices colonnes :

$$A=\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

4.10 La vie des insectes

Une certaine espèce d'insectes se comporte de la manière suivante.

En moyenne, la moitié d'entre eux meurent à la fin de la première année de vie.

Parmi ceux qui survivent, les $\dfrac{2}{3}$ meurent au bout de la deuxième année de vie.

Ceux qui survivent encore meurent au bout de leur troisième année de vie, mais auparavant chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 individus femelles de la même espèce.

L'année 2008 + n (avec $n \in \mathbb{N}$), on note :

x_n le nombre d'individus dans leur première année de vie,

y_n le nombre d'individus dans leur deuxième année de vie,

z_n le nombre d'individus dans leur troisième année de vie.

1. Déterminez la matrice carrée A telle que :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

2. Calculez A^2 et A^3. Que pouvez-vous dire sur l'évolution de la population de ces insectes à partir de ces premiers calculs ?

4.11 Cycle annuel de la cigogne blanche d'Alsace (Lebreton 1980)

À l'année n, on structure la population en désignant par Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 les effectifs des femelles d'un an, de deux ans, de trois ans, et d'au moins quatre ans.

Les individus de moins de trois ans ne se reproduisent pas. Parmi les Z_3 femelles, une fraction u_3 se reproduit. À partir de quatre ans, tous les individus se reproduisent.

Le nombre de poussins produits par couple est a, et on supposera que le sex-ratio est équilibré (égalité des nombres de mâles et de femelles).

Avant la mauvaise saison, on a cinq classes d'âge A_i où A_1 désigne le nombre de nouveau-nés. Les chances de survie des A_i jusqu'à l'année $n + 1$ sont désignées par q_i.

1. Représentez le diagramme du cycle de vie de l'année n à l'année $n + 1$ en enchaînant la préreproduction, la reproduction et la mauvaise saison.

2. Écrivez, en fonction de u_3, de a et des q_i, la matrice de Leslie qui représente le passage d'une année à l'année suivante.

4.12 Mammifères domestiques

Une population de mammifères domestiques est élevée en liberté sur une propriété de plusieurs hectares. La reproduction a lieu une fois par an.

Aucune des femelles nées dans l'année ne se reproduit.

La survie des nouveau-nés est de 80 %.

Parmi les femelles de deux ans, $\frac{2}{3}$ ont une portée d'un petit, le reste n'en a pas. Ces femelles ont un taux de survie de 90 %.

À partir de trois ans, toutes les femelles se reproduisent et ont en moyenne 2,2 petits par portée. Leur survie est également de 90 %.

1. Établissez la matrice de Leslie correspondante.

2. Pour une population initiale de 300 individus femelles (150 de l'année, 70 de 1 an et 80 de 2 ans au moins), tracez le graphique des variations de la structure de la population des femelles au cours des dix premières années.

3. Quel est le taux d'accroissement annuel ?

4. Quel est le taux d'accroissement annuel si aucune femelle ne se reproduit à l'âge d'un an ?

SOLUTIONS

4.1 • Les matrices A et B ne sont pas de même format. Leur somme est donc impossible.

• Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le produit AB existe donc et on a :

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 32 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \\ -5 & -13 & 15 \end{pmatrix}$$

• Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A. Le produit BA existe donc et on a :

$$BA = \begin{pmatrix} -10 & -13 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

4.2 Si A est inversible, on a bien :

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow B = C.$$

Mais il est possible d'avoir $A \neq 0$ et A non inversible, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Si } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

on a alors $AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bien que $B \neq C$.

4.3 On peut décomposer :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = I_2 + B,$$

et observer que $B^2 = 0$.

Comme $I_2 B = BI_2$, on peut appliquer la formule du binôme, ce qui donne pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = I_2 + nB = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, la formule est encore vraie.

Vous pouvez aussi utiliser un raisonnement par récurrence.

4.4 **1.** On a : $\det A = \begin{vmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

On peut calculer directement ce déterminant d'ordre 3 avec la règle de Sarrus. On peut aussi commencer par simplifier son écriture avec des transformations qui ne changent pas sa valeur.

Si on remplace C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$, le déterminant est inchangé.

Si on remplace C_2 par $-C_2$ et C_3 par $-C_3$, le déterminant change deux fois de signe, donc est inchangé. On a donc :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 0 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 96 - 84 - 48 = -1.$$

Comme le déterminant de A n'est pas nul, la matrice A est inversible.

2. On peut calculer A^{-1} en résolvant un système, ce qui correspond à :

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}Y$$

$$\begin{cases} 13\,x_1 - 8\,x_2 - 12\,x_3 = y_1 \\ 12\,x_1 - 7\,x_2 - 12\,x_3 = y_2 \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 - 5\,x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 13\,x_1 - 8\,x_2 - 12\,x_3 = y_1 \\ 5\,x_2 - 12\,x_3 = -12\,y_1 + 13\,y_2 \\ 4\,x_2 - 7\,x_3 = 6\,y_1 - 13\,y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 13\,x_1 - 8\,x_2 - 12\,x_3 = y_1 \\ 5\,x_2 - 12\,x_3 = -12\,y_1 + 13\,y_2 \\ 13\,x_3 = 78\,y_1 - 52\,y_2 - 65\,y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13\,y_1 - 8\,y_2 - 12\,y_3 \\ x_2 = 12\,y_1 - 7\,y_2 - 12\,y_3 \\ x_3 = 6\,y_1 - 4\,y_2 - 5\,y_3 \end{cases}$$

On obtient ainsi la matrice A^{-1} et l'on s'aperçoit que $A^{-1} = A$, ce qui entraîne que $A^2 = I_3$.

Il est alors facile d'en déduire A^n avec $n \in \mathbb{N}$ car :
si n est pair ($n = 2p$), alors $A^n = (A^2)^p = I_3$,
si n est impair ($n = 2p+1$), alors $A^n = (A^2)^p A = I_3 A = A$.

4.5 On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$.

On en déduit $A^2 - A = 2I_3$, puis $A\left(\dfrac{A - I_3}{2}\right) = I_3$.

A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{A - I_3}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.6 On calcule successivement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

et on observe que $A^3 = -2A + 3A^2$.

La relation annoncée est donc vérifiée : pour $n = 1$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$; pour $n = 2$ avec $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = 1$ et pour $n = 3$ avec $\alpha_3 = -2$ et $\beta_3 = 3$.

Pour $n \geqslant 1$, supposons que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\,A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A^3 = \alpha_n A^2 + \beta_n\left(-2A + 3A^2\right) \\ &= -2\beta_n\, A + (\alpha_n + 3\beta_n)\, A^2. \end{aligned}$$

Les suites (α_n) et (β_n) sont donc bien définies par les valeurs initiales déjà citées et les relations de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = -2\beta_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = \alpha_n + 3\beta_n.$$

On obtient un système analogue à un système différentiel que l'on peut résoudre avec diverses méthodes (*cf.* chap. 5). Ici, nous allons utiliser une méthode de substitution.

$$\alpha_{n+2} = -2\beta_{n+1} = -2(\alpha_n + 3\beta_n) = -2\alpha_n - 6\left(\frac{\alpha_{n+1}}{-2}\right) = -2\alpha_n + 3\alpha_{n+1}.$$

Pour étudier les suites qui vérifient la relation de récurrence

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

on considère l'équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0 = (r-1)(r-2)$, qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
La solution générale de l'équation de récurrence est $u_n = K_1 1^n + K_2 2^n$.
L'utilisation des conditions initiales donne :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 = K_1 + 2K_2 \\ 0 = \alpha_2 = K_1 + 4K_2 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient donc : $\alpha_n = 2 - 2^{n-1}$ puis $\beta_n = 2^{n-1} - 1$.

4.7 En remplaçant la ligne L_3 par $L_3 + L_2$, la valeur du déterminant est inchangée. On obtient ainsi :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

La première ligne et la troisième ligne sont proportionnelles. Le déterminant est donc nul.

4.8 On remarque d'abord que la somme des termes de chaque ligne est constante. On peut donc penser à remplacer la colonne C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & -3 \\ x & x & -3 & 1 \\ x & -3 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

puis à mettre en facteur x dans la première colonne :

$$P(x) = x\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & x & -3 & 1 \\ 1 & -3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

On peut utiliser la colonne de 1 pour faire apparaître des 0 en retranchant la première ligne à chacune des autres :

$$P(x)=x\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -3\\ 0 & x-2 & -4 & 4\\ 0 & -5 & x-1 & 5\\ 0 & -1 & 1 & x+3\end{vmatrix}$$

puis développer par rapport à la première colonne :

$$P(x)=x\begin{vmatrix}x-2 & -4 & 4\\ -5 & x-1 & 5\\ -1 & 1 & x+3\end{vmatrix}$$

On additionne la dernière colonne à chacune des autres, avec l'idée de faire apparaître des 0 :

$$P(x)=x\begin{vmatrix}x+2 & 0 & 4\\ 0 & x+4 & 5\\ x+2 & x+4 & x+3\end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur $x+2$ dans la première colonne et $x+4$ dans la deuxième colonne :

$$P(x)=x(x+2)(x+4)\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & x+3\end{vmatrix}$$

Pour aligner des 0, on retranche la première ligne à la dernière :

$$P(x)=x(x+2)(x+4)\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & x-1\end{vmatrix}$$

Le développement par rapport à la première colonne permet de conclure :

$$P(x)=x(x+2)(x+4)(x-6).$$

4.9 En introduisant les matrices colonnes indiquées, le déterminant s'écrit :

$$D=\det(A+B,B+C,C+A).$$

Si on développe ce déterminant en utilisant la linéarité par rapport à chaque colonne, on obtient D comme somme de 8 déterminants.

Mais un déterminant est nul lorsqu'il a deux colonnes proportionnelles. Il ne reste donc que deux déterminants :

$$D = \det(A,B,C) + \det(B,C,A).$$

Quand on permute deux colonnes, un déterminant est changé de signe ; donc il est inchangé si l'on effectue deux permutations. On obtient ainsi :

$$D = 2\det(A,B,C).$$

$$\det(A,B,C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

en mettant a en facteur dans la première colonne ...

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix}$$

en remplaçant C_2 par $C_2 - C_1$ et C_3 par $C_3 - C_1$

$$= abc\,(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

en mettant $b - a$ en facteur dans la deuxième colonne ...

$$= 2abc\,(a-b)(b-c)(c-b).$$

4.10 1. Les informations fournies sur la population permettent d'écrire :

$$x_{n+1} = 6z_n \quad ; \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \quad ; \quad z_{n+1} = \frac{1}{3}y_n.$$

La matrice demandée est donc :

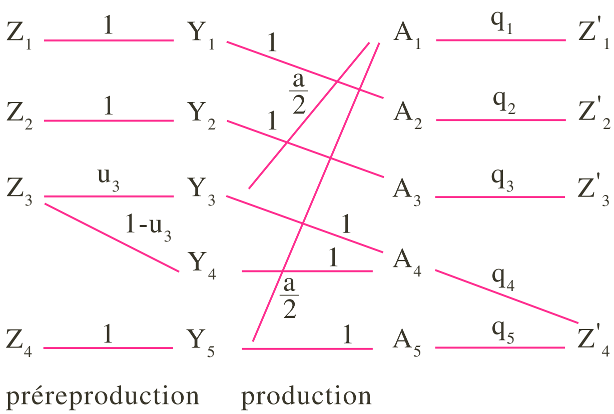
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le produit de matrices donne successivement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = I_3$, cela signifie qu'au bout de trois ans, on est revenu au point de départ. L'effectif de la population, et sa répartition, se répète donc avec un cycle de trois ans.

4.11 **1.** Le diagramme du cycle de vie de l'année n à l'année $n + 1$ peut se représenter par un arbre avec les transitions possibles et leurs fréquences :



2. Chaque stade du diagramme précédent se représente par une matrice, soit pour la préreproduction :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}$$

Pour les femelles en reproduction nous avons :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix}$$

Enfin, la mortalité peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ Z'_3 \\ Z'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & q_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix}$$

En reportant successivement les matrices colonnes et en effectuant le produit des matrices, on obtient la matrice de Leslie :

$$\begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ Z'_3 \\ Z'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_3\, q_1 \frac{a}{2} & q_1 \frac{a}{2} \\ q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & q_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}$$

4.12 1. Désignons respectivement par p_1 et p_2 les nombres de femelles produites par les animaux de deux ans, et de trois ans ou plus.

La survie des individus est $q_1 = 0{,}8$ pour les nouveau-nés, et $q_2 = q_3 = q_4 = 0{,}9$ pour les individus de un an, deux ans, trois ou plus.

Désignons par r la fraction des individus de deux ans qui ont une portée.

La matrice de Leslie est :

$$\begin{pmatrix} 0 & r\, p_1\, q_1 & p_2\, q_2 \\ q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3(1-r) & q_4 \end{pmatrix}$$

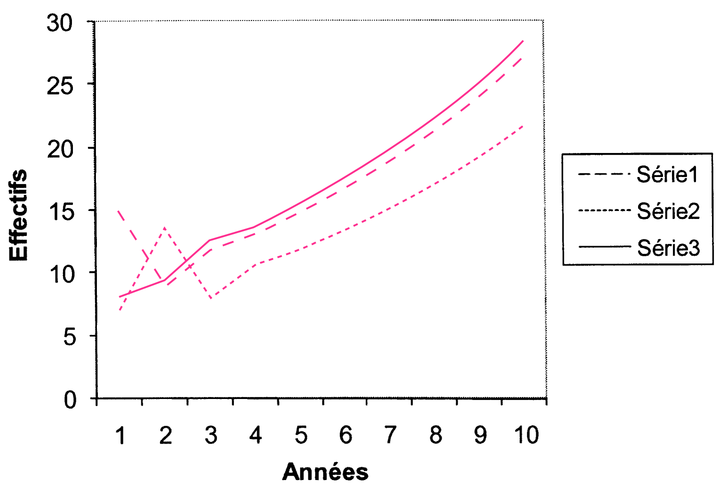
soit, en remplaçant par les valeurs numériques :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0,267 & 0,882 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

2. En appliquant la matrice de Leslie L à la structure initiale de la population, on obtient successivement pour le nombre de femelles :

Années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 an	150	89	118	131	148	167	189	213	241	272
2 ans	70	135	80	106	118	133	150	170	192	217
3 ans et plus	80	93	124	136	154	174	196	222	251	283
Total	300	317	322	373	420	474	535	605	683	771

ce qui donne le graphique :



À partir de l'année 5, la structure de la population devient stable. On observe alors une croissance exponentielle.

3. Le taux d'accroissement annuel s'obtient en calculant le rapport des effectifs totaux entre deux années consécutives. Il est préférable de prendre les deux dernières années pour obtenir la meilleure stabilité, ce qui donne 1,129.

On peut remarquer que ce taux d'accroissement est proche de la plus grande valeur propre positive de la matrice de Leslie qui est 1,123.

Voir le chapitre 5 pour la notion de valeur propre et la signification de la plus grande valeur propre positive d'une matrice de Leslie.

4. Si aucune femelle de deux ans ne se reproduit, on a $r = 0$ et la matrice devient :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}882 \\ 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

La valeur propre réelle de cette matrice est 1,097. La population devient donc presque stationnaire.

CHAPITRE 5

Réduction des matrices

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Simplifier une représentation matricielle.
- ➤ Étudier l'évolution dans le temps d'un phénomène décrit par une matrice (cas discret) ou par un système différentiel linéaire (cas continu).

Reprenons l'exemple des ours vu dans le chapitre précédent. Nous avons représenté la distribution de leur population en cinq classes d'âge par un vecteur de dimension 5 et la répartition de cette population à l'année n est définie par $V_n = A^n V_0$ où V_0 est la distribution initiale et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,38 \\ 0,89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,73 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0,92 \end{pmatrix}$$

Les questions que nous nous posons lorsqu'on étudie la population d'une espèce sont relatives à son devenir : va-t-elle s'éteindre ? va-t-elle proliférer ? va-t-elle vers une position d'équilibre ? existe-t-il une distribution initiale qui assurerait sa pérennité ?

Le calcul direct des puissances n-ièmes de la matrice A ne permet pas de répondre à ces questions.

Dans ce chapitre, nous allons développer un outil d'analyse efficace. Il est fondé sur les valeurs et vecteurs propres. D'ailleurs, ce même outil se retrouve dans d'autres domaines mathématiques (statistiques, configurations géométriques, résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ...) sollicités aussi bien par la biologie que par d'autres sciences.

5.1 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

5.1.1 Définitions

Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On dit que le scalaire λ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur X non nul dans $\mathbb{K}^n$ tel que $MX = \lambda X$.

On appelle vecteur propre de la matrice M associé à la valeur propre λ, tout vecteur X non nul tel que $MX = \lambda X$.

L'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres associés à une même valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ. On le note E_λ.

5.1.2 Polynôme caractéristique

Comment trouver toutes les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée M d'ordre n ?

Soit λ une valeur propre de M. Par définition, il existe un vecteur non nul X tel que $MX = \lambda X$. Si l'on désigne par I_n la matrice unité d'ordre n, cette égalité devient :

$$(M - \lambda I_n)X = 0.$$

On obtient ainsi un système linéaire de n équations et n inconnues (composantes de X).

On sait alors qu'un tel système admet une solution non nulle si, et seulement si, le déterminant de la matrice correspondante $M - \lambda I_n$ est nul.

En développant ce déterminant, on obtient un polynôme de degré n dont la valeur propre λ est une racine.

Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de la matrice M :

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I_n).$$

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée M est donc égal à l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique.

Exemple générique

Le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

5.2 MATRICES DIAGONALISABLES

5.2.1 Matrices de passage

- **Passage d'une base *B* à une base *B'***

Dans l'espace vectoriel E de dimension n, on considère deux bases

$$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ et } B' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n).$$

Chaque vecteur $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ se décompose de façon unique dans la base B :

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}\, e_1 + p_{21}\, e_2 + \cdots p_{n1} e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= p_{1n}\, e_1 + p_{2n}\, e_2 + \cdots p_{nn}\, e_n \end{aligned}$$

On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Passage d'une base *B'* à une base *B***

Soit P la matrice de passage de la base B à la base B' et Q, la matrice de passage de la base B' à la base B. Alors, les deux matrices sont inversibles et $Q = P^{-1}$.

5.2.2 Changement de base et représentations matricielles

- **Transformation des coordonnées d'un vecteur**

Soit v un vecteur de E et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ses représentations matricielles dans les bases B et B'.

Alors : $\quad X' = P^{-1}X \quad$ et $\quad X = PX'$.

- **Matrices semblables**

Reprenons l'exemple des matrices de Leslie qui décrivent la loi (approximée) d'évolution d'une population partagée en p classes d'âge. En notant X_n, la répartition de la population au temps n en p classes d'âge, on a :

$$X_{n+1} = AX_n$$

où A est une matrice carrée d'ordre p.

En fait, X représente un vecteur de $\mathbb{R}^p$ écrit dans la base canonique B. Si l'on change de base et que l'on représente par X' le même vecteur dans une nouvelle base B', alors

$$X = PX'$$

où P est la matrice de passage de B à B'. De l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, on déduit :

$$PX'_{n+1} = APX'_n \quad \Longleftrightarrow \quad X'_{n+1} = P^{-1}APX'_n$$

Dans la nouvelle base B', la loi d'évolution est donc décrite par la matrice $A' = P^{-1}AP$.

Nous obtenons ainsi une règle de transformation des représentations matricielles sous l'effet d'un changement de base.

Les matrices A et A' sont dites semblables.

- **Propriétés**

Si A et A' sont deux matrices semblables, alors leurs polynômes caractéristiques sont identiques.

Les valeurs propres d'une loi linéaire d'évolution ou de transformation ne dépendent pas de la base dans laquelle est donnée sa représentation matricielle. On dit qu'elles sont invariantes.

- **Matrice diagonalisable**

On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Cette condition est équivalente à l'existence d'une base formée de vecteurs propres de A.

- **Condition suffisante pour que *A* soit diagonalisable**

Si les valeurs propres d'une matrice A sont distinctes, alors cette matrice est diagonalisable.

5.3 RETOUR AUX MATRICES DE LESLIE

5.3.1 Construction du modèle

Le modèle de Leslie permet donc de décrire la dynamique de populations structurées en classes d'âge. Ces modèles reposent sur trois hypothèses fortes :

- Le temps est subdivisé en intervalles égaux (semaine, mois, année …) en fonction de la population (fécondité, gestation, migrations …). Cet intervalle est l'unité de temps. On dit que le temps est discrétisé.

  Dans les modèles à temps continu, les mesures sont instantanées.
- L'âge, noté ici x, est un palier correspondant à un certain nombre d'unités de temps (1, 2 …). En général, ces paliers sont inégaux puisqu'ils peuvent dépendre de la fécondité, du temps de gestation, de l'espérance de vie à différentes époques. Ce sont eux-mêmes des intervalles de la forme $]x_i, x_{i+1}]$.

La population de femelles se répartit en classes d'âge, c'est-à-dire, en nombre d'individus possédant tel ou tel âge. Ces classes d'âge sont numérotées de 1 à n ; le nombre x_p correspond au nombre d'individus d'âge p.

- Le pas du temps est exactement égal à la durée de chacune des classes d'âge, ce qui implique que de t à $t + 1$ tous les individus passent de la classe d'âge i à la classe d'âge $i + 1$.

Si l'on désigne par $n_i(t)$ le nombre d'individus de la classe d'âge i au temps t, et par $N(t)$ le vecteur population au temps t, alors :

$$n_i(t+1) = f[n_i(t)] \quad \text{et} \quad N(t+1) = MN(t).$$

La matrice M est une matrice de Leslie, et nous allons voir maintenant comment en définir les coefficients.

5.3.2 Représentation graphique

Le cycle de vie se schématise simplement en représentant chaque classe d'âge par un noeud, et les transferts d'individus d'une classe d'âge à l'autre par des flèches. On obtient alors un schéma comme celui présenté ci-après pour une population subdivisée en trois classes d'âge de femelles, les bébés (B), les juvéniles (J) et les adultes (A), les adultes étant les seuls à se reproduire.

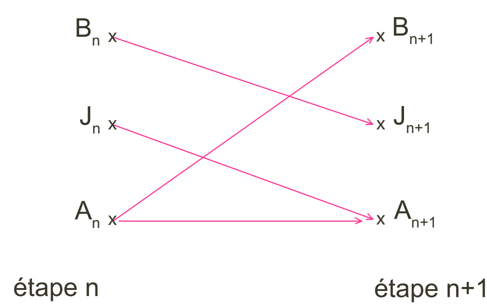


Figure 5.1

5.3.3 Valeurs propres d'une matrice de Leslie

- **Théorème de Perron-Frobenius**

Si une matrice réelle carrée de dimension $n \times n$, $A = (a_{ij})$, a tous ses coefficients strictement positifs, alors elle admet une valeur propre strictement positive λ^* telle que :

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leqslant \lambda^* \leqslant \max_i \sum_j a_{ij}$$

et dont l'espace propre associé à λ^* est de dimension 1.

De plus, il existe un vecteur propre, V^*, associé à cette valeur propre dont tous les coefficients sont strictements positifs.

En fait, concernant la propriété de positivité stricte des coefficients de la matrice considérée, il suffit de l'exiger pour une puissance de cette matrice. Une telle matrice est dite régulière.

Ainsi, dans l'exemple des rongeurs (*cf.* exercice 5.9),

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 2{,}4 & 5{,}0 & 0 \\ 0{,}0 & 2{,}4 & 4{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 2{,}0 & 14{,}4 & 24{,}0 \\ 0{,}96 & 2{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}2 & 2{,}0 \end{pmatrix} \qquad R^4 = \begin{pmatrix} 5{,}76 & 24{,}0 & 20{,}0 \\ 0{,}80 & 5{,}76 & 9{,}6 \\ 0{,}48 & 1{,}0 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} 9{,}600 & 44{,}56 & 57{,}6 \\ 2{,}304 & 9{,}60 & 8{,}0 \\ 0{,}400 & 2{,}88 & 4{,}8 \end{pmatrix}$$

la puissance cinquième de R est à coefficients strictement positifs.

- **Deux conséquences du théorème de Perron-Frobenius**

Quelle que soit la répartition initiale $X_0 = {}^t(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, en posant $X_k = A^k X_0$ pour tout entier naturel n, on a :

– si $x_0^1 + x_0^2 + \dots + x_0^n = 1$ (répartition en taux), alors :

$$\lim_{k \to +\infty} A^k X_0 = V^*.$$

– $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\qquad \lim_{k \to +\infty} \dfrac{X_{k+1}^i}{X_k^i} = \lambda^*.$

- **Interprétation de la valeur propre maximale λ^***

Si la valeur propre λ^* est telle que :
– $\lambda^* > 1$, la population croît en effectif et vers la direction de V^*,
– $\lambda^* = 1$, la population tend vers un état stationnaire,
– $\lambda^* < 1$, la population décroît en effectif et vers la direction de V^*.

- **Comportement d'une population au cours du temps**

Lorsqu'on applique n fois le produit matriciel au vecteur initial de la population, l'effectif global augmente (ou diminue) de manière grossièrement exponentielle en fonction du temps.

Plus en détail, on constate en général des fluctuations dans la proportion des effectifs des différentes classes d'âge, fluctuations qui s'estompent pour converger vers des proportions stables.

De même le taux d'accroissement entre les populations successives varie dans le temps, mais converge progressivement vers une valeur stable.

La stabilité de la proportion des classes d'âge et du taux d'accroissement trouvent une explication dans les propriétés d'une matrice de Leslie.

En effet, la plus grande valeur propre positive d'une telle matrice correspond au taux d'accroissement entre deux populations successives.

Par ailleurs, un vecteur propre correspondant à cette dernière valeur propre correspond à la proportion stable des différentes classes d'âge (structure stable de la population, à un facteur multiplicatif près).

- **Exemple**

Considérons la matrice de Leslie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1{,}2 & 2 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Avec un ordinateur, on obtient pour cette matrice la valeur propre positive :

$\lambda = 1{,}404\,035\,459$ avec comme vecteur propre associé :

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}867\ 185\ 915 \\ 0{,}308\ 819\ 093 \\ 0{,}175\ 960\ 851 \\ 0{,}348\ 793\ 829 \end{pmatrix}$$

Considérons deux populations d'effectif total 200 chacune, dont la structure diffère au départ.

Dans la population 1, les effectifs sont équilibrés et comptent 50 individus par classe.

Dans la population 2, il n'y a que des individus de la première classe.

En fonction du temps, le taux d'accroissement varie selon la figure 5.2 et converge bien vers la plus grande valeur propre positive λ.

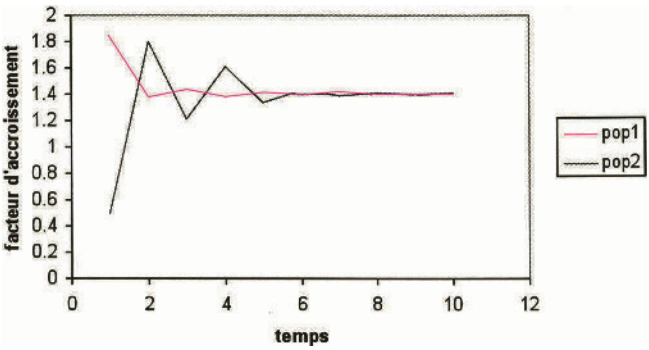


Figure 5.2

Pour chaque population, le graphique suivant montre que l'effectif total augmente de manière exponentielle en fonction du temps. Mais la population 2, très déséquilibrée au départ, s'accroît moins vite.

Cette croissance exponentielle s'explique par le caractère non limitant du milieu.

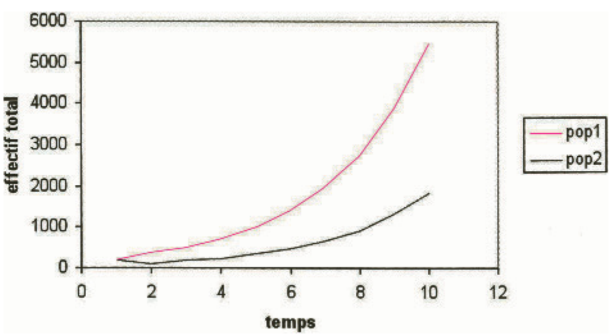


Figure 5.3

Au bout de 10 cycles de reproduction environ, la structure des populations tend vers une distribution stationnaire dans laquelle les effectifs relatifs dans chaque classe d'âge restent constants. Vous pouvez vérifier la proportionnalité entre les effectifs des classes d'âge et les composantes du vecteur propre *V*, avec la structure des populations au temps 10 :

classes d'âge	population 1	population 2	vecteur propre
1	33917,0	1319,3	0,867 185 915
2	1395,5	468,3	0,308 819 093
3	794,3	268,7	0,175 960 851
4	1576,1	529,2	0,348 793 829

5.3.4 Le retour des ours

Reprenons l'exemple introductif des ours.

Pour l'étude complète du problème posé, il est intéressant de disposer d'une matrice semblable à la matrice *A* et qui soit plus simple. Compte-tenu de la taille de la matrice, les calculs nécessitent un logiciel adapté, et nous allons seulement donner les résultats ainsi obtenus.

Le polynôme caractéristique de la matrice *A* est :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1,0)(\lambda^2 + 0,79\lambda + 0,28)(\lambda^2 - 0,70\lambda + 0,37).$$

Il admet une racine réelle et quatre racines complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = 1\,;\, \lambda_2 = -0,40 - 0,35\,\mathrm{i}\,;\, \lambda_3 = \overline{\lambda_2}\,;\, \lambda_4 = 0,35 - 0,50\,\mathrm{i}\,;\, \lambda_5 = \overline{\lambda_4}.$$

Les valeurs propres étant distinctes, il existe une base de vecteurs propres de $\mathbb{C}^5$.

Le changement de base défini par la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} 0,07 & 0,2 & 0,2 & 0,2-0,05\,\mathrm{i} & 0,2+0,05\,\mathrm{i} \\ 0,06 & -0,3+0,3\,\mathrm{i} & -0,3-0,3\,\mathrm{i} & 0,3+0,2\,\mathrm{i} & 0,3-0,2\,\mathrm{i} \\ 0,04 & 0,05-0,5\,\mathrm{i} & 0,05+0,5\,\mathrm{i} & -0,07+0,4\,\mathrm{i} & -0,07-0,4\,\mathrm{i} \\ 0,02 & 0,3+0,5\,\mathrm{i} & 0,3-0,5\,\mathrm{i} & -0,3+0,2\,\mathrm{i} & -0,3-0,2\,\mathrm{i} \\ -0,2 & -0,2-0,2\,\mathrm{i} & -0,2+0,2\,\mathrm{i} & 0,2-0,3\,\mathrm{i} & 0,2+0,3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

permet de diagonaliser la matrice *A* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,40-0,35\,\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,40+0,35\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,35-0,50\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,35+0,50\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Pour analyser la dynamique de la population des ours, l'écriture diagonale de la matrice n'est pas commode car d'une part, elle contient des nombres complexes difficiles à interpréter et d'autre part, la base de diagonalisation est aussi complexe, donc aussi difficile à représenter géométriquement.

Pour surmonter ces difficultés, choisissons une base où le rôle des parties réelles et imaginaires des vecteurs et valeurs propres soit visible et facile à exploiter.

Pour chacun des deux couples de valeurs propres et de vecteurs propres complexes conjugués, on peut écrire :

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \quad \text{et} \quad V = V_1 + \mathrm{i}V_2$$

où α et β sont des nombres réels et V_1 et V_2 des vecteurs réels.

En réécrivant l'égalité :

$$AV = A(V_1 + \mathrm{i}V_2) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(V_1 + \mathrm{i}V_2) = (\alpha V_1 - \beta V_2) + \mathrm{i}(\beta V_1 + \alpha V_2),$$

on déduit :

$$AV_1 = \alpha V_1 - \beta V_2 \qquad \text{et} \qquad AV_2 = \beta V_1 + \alpha V_2.$$

On obtient ainsi une base de $\mathbb{R}^5$ formée des vecteurs :

$$V_1\begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,02 \\ 0,20 \end{pmatrix} \quad V_2\begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,3 \\ 0,05 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad V_3\begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,3 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad V_4\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ -0,07 \\ -0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad V_5\begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

dans laquelle la forme réduite de la matrice A s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,40 & -0,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0,35 & -0,40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,35 & -0,50 \\ 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,35 \end{pmatrix}$$

5.4 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Une des multiples applications de la diagonalisation des matrices est la résolution des systèmes différentiels linéaires. Avant de traiter cette question, rappelons la notion de fonction vectorielle.

5.4.1 Fonctions vectorielles

• Définition

Une fonction vectorielle à variable réelle est une application d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

La donnée d'une telle fonction vectorielle φ équivaut à celle de n fonctions réelles $f_1, f_2, \dots, f_n$ définies dans I.

• Exemples

➤ Les fonctions vectorielles f et g, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (\cos t, \cos^2 t) \quad ; \quad g(t) = (e^{-t}, te^{-t})$$

représentent respectivement un arc parabolique et le graphe de la fonction $x \mapsto -x \ln x$.

➤ Les fonctions vectorielles f et g, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (\cos t, 1 + \sin t) \quad ; \quad g(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$$

représentent respectivement le cercle de centre (0,1) et de rayon 2 et une spirale.

➤ La fonction vectorielle $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ où :

$$h(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$$

représente une hélice infinie suivant l'axe des z et dont la projection sur le plan de coordonnées x et y est un cercle de centre l'origine et de rayon 2.

5.4.2 Généralités

• Définition

Un système différentiel linéaire à coefficients constants est de la forme :

$$(S)\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{11}\, x_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\, x_n(t) & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}\, x_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\, x_n(t) & + & b_n(t) \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions (inconnues) réelles à variable réelle, a_{ij} (avec i et j entiers entre 1 et n) des constantes réelles, et b une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Ses solutions sont des fonctions vectorielles dont les composantes vérifient les équations différentielles données.

- **Écriture matricielle**

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

(S) s'écrit :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

Dans ce système, on supposera que $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sont les coordonnées d'un point $M(t)$ de $\mathbb{R}^n$ à l'instant t par rapport à la base canonique.

- **Systèmes homogènes**

Si $B(t) = 0$, le système est dit homogène, sinon il est non homogène.

Le système $X'(t) = AX(t)$ est le système homogène associé à (S).

- **Solutions**

On appelle solution du système différentiel (S) toute fonction vectorielle $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, dérivable sur I, qui vérifie les équations du système.

Résoudre (S) consiste à trouver (et exprimer) toutes les solutions de ce système.

Si f est une solution particulière de (S), alors toute solution de (S) s'écrit comme somme de la solution f et d'une solution du système homogène associé. L'ensemble des solutions du système homogène possède une structure d'espace vectoriel de dimension n.

5.4.3 Résolution des systèmes différentiels linéaires

Reprenons le système différentiel :

$$(S) \qquad X'(t) = AX(t) + B(t)$$

et limitons-nous au cas où la matrice A est diagonalisable.

Il existe alors une matrice diagonale D et une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$. En multipliant par la matrice inversible P^{-1} les deux membres du système (S), on obtient un système équivalent :

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t).$$

En considérant les fonctions vectorielles définies par $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, ce système devient :

$$Y'(t) = DY(t) + C(t).$$

Nous sommes ramenés à la résolution de n équations différentielles scalaires vue dans le chapitre 2.

Connaissant la solution générale $Y(t)$ de ce système, on en déduit la solution générale de (S) :

$$X(t) = PY(t).$$

Équations aux différences finies

Par des observations à intervalles de temps réguliers, on passe du temps continu au temps discret. Les fonctions deviennent des suites. Mais comment obtient-on des suites récurrentes à la place des équations différentielles et des systèmes différentiels ?

On introduit des différences dites finies :

$$\begin{array}{ll} \text{d'ordre 1 :} & \Delta Q(t) = Q(t+1) - Q(t) \\ \text{d'ordre 2 :} & \Delta^2 Q(t) = \Delta Q(t+1) - \Delta Q(t) \\ \text{d'ordre p :} & \Delta^p Q(t) = \Delta^{p-1} Q(t+1) - \Delta^{p-1} Q(t) \end{array}$$

La modélisation du phénomène conduit à une relation entre ces différences finies.

On a $\Delta^2 Q(t) = [Q(t+2) - Q(t+1)] - [Q(t+1) - Q(t)]$.

Cela veut dire que, si le modèle est linéaire et s'arrête à l'ordre 2 et si on note $Q(t) = u_n$, $Q(t+1) = u_{n+1}$ et $Q(t+2) = u_{n+2}$, il existe deux constantes α et β telles que $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$ et on obtient une équation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Vous pouvez aussi remarquer que,

- dans le cas continu, la forme de référence des solutions de l'équation différentielle $x'' = \alpha x' + \beta x$ est e^{-kt} et leur comportement, lorsque t tend vers l'infini, dépend de la comparaison de k à 0 ;
- dans le cas discret, la forme de référence des solutions de la relation de récurrence $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$ est k^n et leur comportement, lorsque n tend vers l'infini, dépend de la comparaison de k à 1.

MOTS CLEFS

- Valeur propre
- Vecteur propre
- Système différentiel linéaire

EXERCICES

5.1 Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5.2 Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -16 & 16 & -14 \\ 1 & -1 & 1 \\ 25 & -25 & 23 \end{pmatrix}$$

5.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Utilisez la diagonalisation de A pour calculer A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

5.4 On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) = 8x(t) - y(t) - 15 \end{cases}$$

Déterminez la solution qui, pour $t = 0$, prend les valeurs $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

5.5 Résolvez le système différentiel :

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - y \end{cases}$$

lorsque x, y, z sont des fonctions inconnues de la variable réelle t.

5.6 Déterminez, en fonction de n et des valeurs initiales u_0, v_0 et w_0 les suites qui vérifient le système (S) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

5.7 Compartiments et systèmes différentiels linéaires

1. On considère deux lacs, de volumes V_1 et V_2, qui communiquent par un ruisseau ayant un débit d. On suppose que le débit et les volumes des lacs sont constants pendant la durée de l'étude.

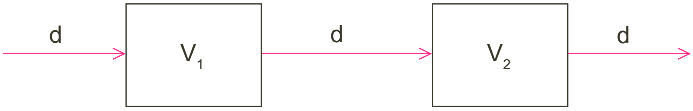


Figure 5.4

Si une quantité q de pesticide (négligeable par rapport à V_1) est déversée dans le premier lac, écrivez les équations différentielles qui expriment les variations des quantités de pesticide $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ présentes dans les deux lacs en fonction du temps t.

2. On considère trois compartiments, de volumes respectifs (constants) V_1, V_2 et V_3, connectés par des liaisons dont les débits (constants) sont indiqués sur la figure :

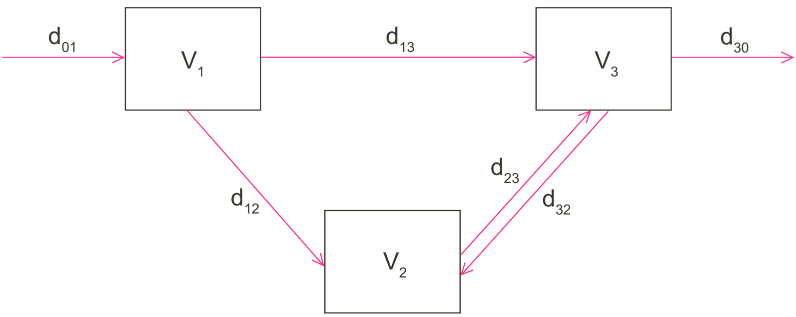


Figure 5.5

Au temps t_0, on injecte, dans le compartiment 1, un traceur, en quantité q négligeable par rapport aux volumes des compartiments.

Écrivez les équations différentielles qui expriment les variations des quantités de colorant $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ et $Q_3(t)$ présentes dans les trois compartiments en fonction du temps t.

5.8 Lecture d'une matrice de Leslie

On considère la matrice de Leslie relative aux femelles d'une population animale :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1,2 & 2 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,95 \end{pmatrix}$$

Pour cette matrice, la plus grande valeur propre positive est : $\lambda = 1,404\,035\,459$ avec comme vecteur propre associé :
$$\begin{pmatrix} 0,867\ 185\ 91 \\ 0,308\ 819\ 09 \\ 0,175\ 960\ 85 \\ 0,348\ 793\ 83 \end{pmatrix}$$

1. Combien y a-t-il de classes d'âges ?

2. Combien de femelles sont produites par chaque classe d'âge ?

3. Quel est le taux de survie de chaque classe d'âge ?

4. Soit deux populations d'effectif total 200 chacune, dont la structure diffère au départ.

Dans la population 1, les effectifs sont équilibrés et comptent 50 individus par classe.

Dans la population 2, il n'y a que des individus de la première classe.

Comment varie le taux d'accroissement en fonction du temps ?

Montrez que ce taux converge bien vers la plus grande valeur propre positive dans les deux cas.

5. Montrez que la structure de la population à l'année 10 est proportionnelle au vecteur propre réel.

5.9 Les rongeurs de Leslie

On considère une population de rongeurs qui ont une durée de vie de trois ans et on suppose que le sexe ratio est équilibré.

Les femelles ne sont pas fécondes la première année et chacune des femelles en vie donne 10 naissances durant sa deuxième année et 18 durant sa troisième année.

Le taux de survie d'un rongeur est de 40 % la première année et de 65 % la deuxième année.

1. Établissez la matrice de Leslie M de cette population.

2. Si la population initiale de femelles est constituée de 50 jeunes, 30 de deux ans et de 45 de trois ans, calculez l'effectif des différentes classes d'âge de femelles au cours des quatre ans à venir, ainsi que l'effectif total.

3. Quel est le taux d'accroissement attendu de cette population ?

4. Si un pesticide étendu dans l'environnement diminue la fécondité de 20 % pour chacune des classes d'âge, comment varie le taux d'accroissement ?

5.10 Population de poissons

Dans une population de poissons, on subdivise les femelles en classes d'âges : les jeunes de première année (alevins), les juvéniles de deuxième année sans reproduction, les adultes reproductrices d'au moins deux ans.

On suppose que le taux de survie est de 0,005 pour la première classe, de 0,60 pour la deuxième et de 0,65 pour la plus âgée.

Chaque femelle de la classe reproductrice produit en moyenne 10 000 alevins femelles par an.

1. Établissez la matrice de Leslie de cette population.

Calculez sa valeur propre réelle. Que pouvez-vous en déduire du point de vue de la variation de l'effectif total ?

2. Si dans la population de départ on a 1000 individus dans chaque classe d'âge, calculez les effectifs successifs de ces classes au cours de quatre ans.

3. Mêmes questions si toutes les femelles âgées de plus de deux ans meurent après leur reproduction.

4. Comment évoluerait la population face à une pollution chronique qui entraînerait une fécondité divisée par 5 (avec des femelles vivant trois ans au plus) ?

SOLUTIONS

5.1 • Le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Les valeurs propres de M sont donc 1 et 3.

• L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs $X=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système $MX = X$, soit :

$$\begin{cases} \quad\;\; 3y = x \\ -x + 4y = y \end{cases} \iff x=3y$$

E_1 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• L'espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est l'ensemble des vecteurs $X=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système $MX=3X$, soit :

$$\begin{cases} \quad\;\; 3y = 3x \\ -x + 4y = 3y \end{cases} \iff x=y.$$

E_3 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.2 • Le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -16-\lambda & 16 & -14 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 25 & -25 & 23-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 16\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda+2)(\lambda-8)$$

Les valeurs propres de M sont donc 0, –2 et 8.

• L'espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $MX = 0X$, soit :

$$\begin{cases} -16x & +16y & -14z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ 25x & -25y & +23z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

E_0 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• L'espace propre E_{-2} associé à la valeur propre –2 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $MX = -2X$, soit :

$$\begin{cases} -16x & +16y & -14z & = & -2x \\ x & -y & +z & = & -2y \\ 25x & -25y & +23z & = & -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

E_{-2} est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• L'espace propre E_8 associé à la valeur propre 8 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $MX = 8X$, soit :

$$\begin{cases} -16x & +16y & -14z & = & 8x \\ x & -y & +z & = & 8y \\ 25x & -25y & +23z & = & 8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -11y \\ z = 20y \end{cases}$$

E_8 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$.

5.3 • Le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 2\\ 0 & -3-\lambda & -2\\ 0 & 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (double) et –1.

• L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs $X=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $MX=X$, soit :

$$\begin{cases}4y & +2z & = & 0\\ -4y & -2z & = & 0\\ 4y & +2z & = & 0\end{cases} \iff 2y+z=0$$

E_1 est donc un plan.

On peut donc trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M (deux dans le plan E_1 et un dans la droite E_{-1}) ;

• La matrice M est donc diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage P telle que $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

On a alors $A^n=PD^nP^{-1}$ avec $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}$.

Si n est pair, on a $D^n=I_3$, puis $A^n=I_3$.

Si n est impair, on a $D^n=D$, puis $A^n=A$.

5.4 • **Méthode de substitution**

Dérivons la première équation par rapport à t, puis substituons successivement la première équation, puis la seconde :

$$\begin{aligned}x''(t)&=x'(t)+y'(t)\\ &=x'(t)+8\,x(t)-y(t)-15\\ &=x'(t)+8\,x(t)-[x'(t)-x(t)+3]-15.\end{aligned}$$

On obtient après simplification :

$$x''(t)-9\,x(t)=-18 \qquad \textbf{(E)}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

L'équation caractéristique $r^2 - 9 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 3$ et $r_2 = -3$.
Comme, de plus, la fonction constante $x(t) = 2$ est solution, l'équation **(E)** admet pour solution générale :

$$x(t) = K_1 \, e^{3t} + K_2 \, e^{-3t} + 2.$$

En reportant dans la première équation du système **(S)**, on obtient :

$$y(t) = x'(t) - x(t) + 3 = 2K_1 \, e^{3t} - 4K_2 \, e^{-3t} + 1.$$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} x_0 = K_1 + K_2 + 2 \\ y_0 = 2K_1 - 4K_2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{6}(4x_0 + y_0 - 9) \\ K_2 = \dfrac{1}{6}(2x_0 - y_0 - 3) \end{cases}$$

On obtient ainsi la solution :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{6}(4x_0 + y_0 - 9)\,e^{3t} + \dfrac{1}{6}(2x_0 - y_0 - 3)\,e^{-3t} + 2 \\ y(t) = \dfrac{1}{3}(4x_0 + y_0 - 9)\,e^{3t} - \dfrac{2}{3}(2x_0 - y_0 - 3)\,e^{-3t} + 1 \end{cases}$$

• **Méthode par diagonalisation de la matrice**

En notant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

le système différentiel (S) s'écrit matriciellement :

$$X'(t) = A\,X(t) + B.$$

Déterminons les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 9.$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$. Elle est donc diagonalisable.
L'espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système $AX = 3X$, soit :

$$\begin{cases} x + y = 3x \\ 8x - y = 3y \end{cases} \iff \quad 2x - y = 0$$

E_3 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

L'espace propre E_{-3} associé à la valeur propre -3 est l'ensemble des vecteurs $X=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient le système $AX=-3X$, soit :

$$\begin{cases} x+y=-3x \\ 8x-y=-3y \end{cases} \iff \quad 4x+y=0$$

E_3 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_2\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique (e_1,e_2) à la nouvelle base (V_1,V_2) est :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Sa matrice inverse P^{-1} peut se calculer en résolvant un système linéaire :

$$\begin{cases} x+y &= a \\ 2x-4y &= b \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{1}{6}(4a+b) \\ 2y &= \dfrac{1}{6}(2a-b) \end{cases} \text{soit : } P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

On peut écrire alors $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

Et le système (S) devient :

$$X'(t)=PDP^{-1}X(t)+B \iff (P^{-1}X)'(t)=D(P^{-1}X)(t)+P^{-1}B$$

En posant $P^{-1}X=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, comme $P^{-1}B=\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, le système se réduit à :

$$\begin{cases} z'_1(t)=3z_1(t)-\dfrac{9}{2} \\ z'_2(t)=-3z_2(t)+\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(t)=K_1\,\mathrm{e}^{3t}+\dfrac{3}{2} \\ z_2(t)=K_2\,\mathrm{e}^{-3t}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Puis on revient aux fonctions de départ :

$$X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_1\,\mathrm{e}^{3t}+\dfrac{3}{2}\\ K_2\,\mathrm{e}^{-3t}+\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_1\,\mathrm{e}^{3t}+K_2\,\mathrm{e}^{-3t}+2\\ 2K_1\,\mathrm{e}^{3t}-4K_2\,\mathrm{e}^{-3t}+1\end{pmatrix}$$

La détermination de K_1 et de K_2 avec les conditions initiales x_0 et y_0 se fait comme dans la méthode précédente.

• Méthode des combinaisons linéaires indépendantes

Après avoir déterminé les valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$ de la matrice A avec son polynôme caractéristique, considérons ces valeurs l'une après l'autre.

Avec λ_1, nous pouvons transformer le système (S) :

$$\begin{cases} x'(t) - 3x(t) & = & -2x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) - 3y(t) & = & 8x(t) - 4y(t) - 15 \end{cases}$$

Avec la combinaison linéaire $4L_1 + L_2$, on en déduit :

$$(4x + y)' - 3(4x + y) = -27$$

équation facile à résoudre pour obtenir $4x + y$.

Avec λ_2, nous pouvons transformer le système (S) :

$$\begin{cases} x'(t) + 3x(t) & = & 4x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) + 3y(t) & = & 8x(t) + 2y(t) - 15 \end{cases}$$

Avec la combinaison linéaire $2L_1 - L_2$, on en déduit :

$$(2x - y)' + 3(2x - y) = 9$$

équation facile à résoudre pour obtenir $2x - y$.

Connaissant $4x + y$ et $2x - y$, on en déduit x et y, et on termine comme dans les autres méthodes.

5.5 *Par rapport à l'exercice précédent, comme il y a trois fonctions inconnues au lieu de deux, seule la méthode algébrique de diagonalisation se prolonge.*

En notant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

le système différentiel (S) s'écrit matriciellement :

$$X'(t) = A\,X(t).$$

Déterminons les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)^2 - 1 - 1 - (2-\lambda) + \lambda - (2-\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda-2)^2 + 3(\lambda-2) = (\lambda-2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-3).$$

La matrice A admet trois valeurs propres distinctes –1, 2, 3. Elle est donc diagonalisable. On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et P va s'écrire en juxtaposant des vecteurs propres associés aux valeurs propres, dans le même ordre que celui adopté pour écrire D.

L'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre –1 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $AX = -X$, soit :

$$\begin{cases} 2x + y + z = -x \\ x + 2y - z = -y \\ x - y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}z \\ y = \dfrac{1}{2}z \end{cases}$$

E_{-1} est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $AX = 2X$, soit :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2x \\ x + 2y - z = 2y \\ x - y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

E_2 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $AX = 3X$, soit :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3x \\ x + 2y - z = 3y \\ x - y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

E_3 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

On peut donc choisir : $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Le système différentiel (S) peut alors s'écrire :

$$X'(t)=PDP^{-1}X(t) \Longleftrightarrow (P^{-1}X)'(t)=D(P^{-1}X)(t).$$

En posant $Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ le système devient :

$$\begin{cases} y_1(t)=-y_1(t)\\ y_2(t)=2y_2(t)\\ y_3(t)=3y_3(t)\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1(t)=K_1\,\mathrm{e}^{-t}\\ y_2(t)=K_2\,\mathrm{e}^{2t}\\ y_3(t)=K_3\,\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$$

On revient aux fonctions cherchées avec $X(t)=PY(t)$, soit :

$$\begin{cases} x(t) &= -K_1\,\mathrm{e}^{-t}+K_2\,\mathrm{e}^{2t}+K_3\,\mathrm{e}^{3t}\\ y(t) &= K_1\,\mathrm{e}^{-t}-K_2\,\mathrm{e}^{2t}+K_3\,\mathrm{e}^{3t}\\ z(t) &= 2K_1\,\mathrm{e}^{-t}+K_2\,\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$$

5.6 *Cet exercice est analogue à la résolution d'un système différentiel, mais avec le temps pensé en discret et non en continu.*

Notons $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Le système (S) s'écrit : $X_{n+1}=AX_n$. Comme la matrice A ne dépend pas de n, on passe d'un indice au suivant en multipliant toujours par A. On obtient donc $X_n=A^nX_0$, et nous sommes conduit à calculer A^n. Déterminons les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{avec } C_1 + C_2 + C_3 \text{ mis en } C_1$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{avec } 1-\lambda \text{ mis en facteur dans } C_1$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{avec } C_2 - C_1 \text{ en } C_1 \text{ et } C_3 - C_1 \text{ en } C_3$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

La matrice A admet donc les valeurs propres 1 (simple) et –2 (double).

• Méthode par diagonalisation de A

L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $AX = X$, soit :

$$\begin{cases} -x + y + z = x \\ x - y + z = y \\ x + y - z = z \end{cases} \iff x = y = z$$

E_1 est donc la droite admettant pour base le vecteur propre $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_{-2} associé à la valeur propre –2 est l'ensemble des vecteurs $X = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient le système $AX = -2X$, soit :

$$\begin{cases} -x + y + z = -2x \\ x - y + z = -2y \\ x + y - z = -2z \end{cases} \iff x + y + z = 0$$

E_{-2} est donc un plan, ce qui prouve que A est diagonalisable puisque l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 2.

Ce plan admet pour base les vecteurs propres $V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On peut donc choisir : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice A peut alors s'écrire : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En effectuant ce produit de matrices et en reportant dans $X_n = A^n X_0$, on obtient :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \dfrac{(-2)^n}{3}(2u_0 - v_0 - w_0) \\ v_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \dfrac{(-2)^n}{3}(-u_0 + 2v_0 - w_0) \\ w_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \dfrac{(-2)^n}{3}(-u_0 - v_0 + 2w_0) \end{cases}$$

• **Méthode par suites auxiliaires**

Après avoir déterminé les valeurs propres de A, on peut utiliser une variante.

Considérons la valeur propre 1 et transformons l'écriture de (S) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} - u_n = -2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} - v_n = u_n - 2v_n + w_n \\ w_{n+1} - w_n = u_n + v_n - 2w_n \end{cases}$$

On en déduit par addition que :

$$(u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1}) - (u_n + v_n + w_n) = 0$$

c'est-à-dire que la suite auxiliaire $u_n + v_n + w_n$ est constante, soit :

$$u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0.$$

Considérons la valeur propre –2 et transformons l'écriture de (S) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} + 2u_n & = & u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} + 2v_n & = & u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} + 2w_n & = & u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On en déduit par soustraction que :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = (-2)(u_n - v_n)$$

c'est-à-dire que la suite auxiliaire $u_n - v_n$ est géométrique de raison –2, soit :

$$u_n - v_n = (u_0 - v_0)(-2)^n,$$

et de la même manière :

$$u_n - w_n = (u_0 - w_0)(-2)^n.$$

Des trois égalités obtenues, on déduit les expressions de u_n, v_n et w_n.

5.7 1. Si le mélange du pesticide dans les eaux du premier lac est instantané, la concentration du pesticide est $\dfrac{Q_1(t)}{V_1}$.

On peut en déduire que la quantité de pesticide perdue par le premier lac se fait à la vitesse :

$$Q_1(t) = -d\,\frac{Q_1(t)}{V_1}.$$

Vérifions la cohérence des unités :
$Q_1(t)$ est en g ; t est en h ; d est en L.h^{-1} ; V_1 est en L.
Le second membre est donc en : (L.h^{-1}).(L^{-1}).g = g.h^{-1},
ce qui est bien l'unité de $Q_1(t) \approx \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta t}$.

Pour le second compartiment, l'évolution de $Q_2(t)$ dépend positivement de l'entrée et négativement de la sortie, soit :

$$Q'_2(t) = d\,\frac{Q_1(t)}{V_1} - d\,\frac{Q_2(t)}{V_2}.$$

On obtient donc le système différentiel linéaire à coefficients constants, avec des conditions initiales :

$$\begin{cases} Q_1'(t) = -\dfrac{d}{V_1} Q_1(t) \\ Q_2'(t) = \dfrac{d}{V_1} Q_1(t) - \dfrac{d}{V_2} Q_2(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} Q_1(0) &= q \\ Q_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

2. Comme dans la question précédente, en examinant pour chaque compartiment les sorties et les entrées provenant des autres compartiments, on obtient le système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} Q_1'(t) = -\left(\dfrac{d_{12}}{V_1} + \dfrac{d_{13}}{V_1}\right) Q_1(t) \\ Q_2'(t) = \dfrac{d_{12}}{V_1} Q_1(t) - \dfrac{d_{23}}{V_2} Q_2(t) + \dfrac{d_{32}}{V_3} Q_3(t) \\ Q_3'(t) = \dfrac{d_{13}}{V_1} Q_1(t) + \dfrac{d_{23}}{V_2} Q_2(t) - \dfrac{d_{32}}{V_3} Q_3(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$Q_1(0) = q \quad ; \quad Q_2(0) = 0 \quad ; \quad Q_3(0) = 0.$$

Remarquons par ailleurs que, pour que les volumes des compartiments restent constants,les débits doivent vérifier les conditions :

$$d_{01} = d_{13} + d_{12} \quad ; \quad d_{12} + d_{32} = d_{23} \quad ; \quad d_{13} + d_{23} = d_{30}$$

5.8 1. Comme la matrice est carrée d'ordre 4, il y a 4 classes d'âge.

2. Les femelles de première année ne se reproduisent pas, celles de deuxième année produisent 1 femelle, celles de troisième année 1, 2 femelles et celles de 4 ans et plus, 2 femelles.

3. Les taux de survie sont de :

50 % pour les femelles de première année,

80 % pour les femelles de deuxième année,

90 % pour les femelles de troisième année,

95 % pour les femelles de quatre ans et plus.

4. Le taux d'accroissement s'obtient en calculant le rapport entre l'effectif de l'année $n + 1$ et l'effectif de l'année n.

Pour obtenir la répartition de la population (et donc l'effectif par addition) à l'année 2, il suffit de faire le produit matriciel de la matrice de Leslie M par la matrice colonne des effectifs à l'année 1.

Puis on multiplie à nouveau par M la matrice colonne obtenue pour avoir la répartition lors de l'année suivante.

On obtient ainsi les résultats :

année	effectifs 1	taux accr. 1	effectifs 2	taux accr. 2
1	200		200	
2	367,5	1,838	590	2,950
3	506,9	1,379	760,5	1,289
4	725,4	1,431	1082,5	1,423
5	997,2	1,375	1464,4	1,353
6	1409,6	1,414	2091,9	1,429
7	1975,2	1,401	2925,7	1,399
8	2777,8	1,406	4118,5	1,408
9	3896,8	1,403	5772,4	1,402
10	5472,9	1,404	8110	1,405

Vous pouvez observer que, dans les deux cas, le taux d'accroissement devient très proche de la valeur propre λ.

5. L'année 10, les effectifs des deux populations par classes d'âges (et le vecteur propre réel) sont :

effectifs 1	effectifs 2	vecteur propre
2791,0	4136,7	0,867 185 91
992,9	1470,0	0,308 819 09
567,2	841,6	0,175 960 85
1121,7	1661,7	0,348 793 83

Il est facile de vérifier que les rapports entre les effectifs des classes d'âge et les composantes du vecteur propre sont presque constants au bout de la dixième année, ce qui montre que les structures des populations sont stables : les proportions des différentes classes d'âge ne varient plus.

5.9 1. Dans la mesure où le sex-ratio est équilibré, pour chaque femelle en vie, il y a 5 naissances de femelles la deuxième année et 9 la troisième année. La matrice de Leslie de la population des femelles s'écrit donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En effectuant le produit matriciel de M par les matrices colonnes successives, on obtient :

âges	année 1	année 2	année 3	année 4	année 5
1	50	555	275,5	1227	1849,7
2	30	20	222	110,2	490,8
3	45	19,5	13	144,3	71,6

3. Le polynôme caractéristique de la matrice M est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 5 & 9 \\ 0,4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,65 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda + 2,34.$$

Ses racines sont les valeurs propres de M. L'étude des variations de la fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ montre qu'il n'y a qu'une valeur propre réelle $\lambda \approx 1,81$, les autres étant complexes conjuguées.

D'après la signification de cette valeur propre dans le cas des matrices de Leslie, le taux d'accroissement annuel va devenir voisin de λ.

4. Avec l'hypothèse sur la baisse de fécondité, la matrice de Leslie devient :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7,2 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique devient :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 1,6\lambda + 1,872.$$

La plus grande valeur propre positive devient $\lambda \approx 1,653$, ce qui est le nouveau taux annuel d'accroissement attendu au bout de quelques années.

Bien entendu, vous observez une baisse du taux d'accroissement attendu, puisqu'il y a eu baisse de la fécondité.

5.10 **1.** La matrice de Leslie de cette population de poissons s'écrit :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10\,000 \\ 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,65 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 10\,000 \\ 0,005 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,65-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+0,65\lambda^2+30.$$

Il est facile de vérifier qu'il n'y a qu'une valeur propre réelle et qu'elle est positive.

Le signe de la dérivée $P'(\lambda)=-3\lambda^2+1,3\lambda=\lambda(-3\lambda+1,3)$ permet de dresser le tableau de variation :

λ		0		$\frac{1,3}{3}$	
P'	–	0	+	0	–
P	$+\infty$ ↘	30	↗		↘ $-\infty$

La fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ s'annule bien une seule fois en une valeur positive. Par encadrement, on obtient $\lambda = 3,34$.

S'agissant d'une matrice de Leslie, ce résultat entraîne que l'effectif sera croissant, avec un taux d'accroissement qui se rapproche progressivement de 3,34.

2. On passe de la matrice colonne X_n des effectifs à l'année n à la matrice colonne X_{n+1} des effectifs à l'année $n+1$ en calculant le produit matriciel $X_{n+1}=MX_n$.

On obtient ainsi successivement :

	année 1	année 2	année 3	année 4
classe 1	1000	10 000 000	12 500 000	8 155 000
classe 2	1000	5	50 000	62 500
classe 3	1000	1250	815,5	30 530

3. Si toutes les femelles âgées de 2 ans et plus meurent après leur reproduction, la matrice de Leslie devient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10\,000 \\ 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a une seule valeur propre réelle positive qui est 3,12. Dans ce cas, la population devrait croître (pas forcément de façon régulière).
Comme dans la question précédente, on obtient les effectifs pour les premières années :

	année 1	année 2	année 3	année 4
classe 1	1000	10 000 000	6 000 000	30 000
classe 2	1000	5	50 000	30 000
classe 3	1000	600	3	30 000

4. Si la fécondité est divisée par 5, la nouvelle matrice de Leslie a 1,82 comme valeur propre positive. Les effectifs pour les premières années deviennent :

	année 1	année 2	année 3	année 4
classe 1	1000	2 000 000	1200 000	6 000
classe 2	1000	5	10 000	6 000
classe 3	1000	600	3	6 000

CHAPITRE 6

Fonctions de plusieurs variables

PLAN

OBJECTIFS

- ➤ Savoir calculer des dérivées partielles.
- ➤ Calculer un gradient et en connaître les significations.
- ➤ Comprendre la dérivée directionnelle d'une fonction dans le cas d'un milieu tourmenté.
- ➤ Chercher (si elles existent) les valeurs minimale et maximale d'une fonction.

6.1 MOTIVATIONS ET EXEMPLES BIOLOGIQUES

6.1.1 Motivations

La notion de fonction d'une ou de plusieurs variables est à la base de la plupart des modèles mathématiques utilisés dans les sciences expérimentales.

C'est le cas, par exemple, du volume d'un gaz qui dépend de la pression et de la température, de l'impact d'un champ magnétique ou électrique sur les cellules (fonctions de trois composantes dépendant des trois coordonnées de l'espace x, y et z).

En biologie, on utilise :

– des configurations spatiales : les enzymes peuvent être vus comme des agents intelligents effectuant des opérations complexes ; l'ADN avec ses positions relatives dans les régions codantes/régulatrices ; la circulation des molécules et la signalisation au sein de la cellule ou dans le milieu inter-cellulaire,

– des configurations spatio-temporelles : comportement des entités ; communication entre les agents ; interactions.

6.1.2 Exemples biologiques

– Dans une chaîne métabolique, les différents enzymes impliqués ne sont pas présents en quantités équivalentes.

La quantité d'un produit *A* dépend de la quantité des enzymes en amont et en aval. Elle augmente si l'enzyme en amont est produit normalement et si l'enzyme agissant strictement en aval se trouve en quantité limitante.

– L'épaisseur d'humus dans un sol forestier dépend à la fois de la vitesse de dégradation et de recyclage par la flore microbienne et de la quantité des feuilles produites par chaque arbre chaque automne.

Elle est faible si la vitesse de dégradation est plus rapide que la vitesse d'accumulation des feuilles.

– Le nombre d'espèces d'oiseaux sur une île dépend de sa surface et de la distance par rapport aux autre îles ou par rapport au continent.

Plus le continent est proche, plus la probabilité de coloniser l'île est importante, ce qui pourra compenser une destruction de population.

D'autre part, plus l'île est grande, plus petite est la probabilité qu'une espèce disparaisse à la suite d'une perturbation. Le nombre d'espèces est donc le résultat d'un équilibre entre des immigrations et des disparitions d'espèces.

6.2 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Nous développerons les contenus mathématiques seulement pour les fonctions de deux, parfois trois, variables, tout en sachant que ces mêmes contenus pourraient s'appliquer pour plus de variables.

6.2.1 Généralités

Une fonction numérique *f* de deux variables réelles fait correspondre à tout élément de $D \subset \mathbb{R}^2$ un réel unique :

$$\begin{array}{cccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

L'ensemble $G_f = \{(x, y, f(x,y)) \quad ; \quad (x,y) \in E\}$ est le graphe de *f*, Sa représentation graphique est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Pour la visualiser, on a parfois besoin de la notion de courbe de niveau.

On appelle courbe de niveau k de la fonction f l'ensemble :

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x, y) = k\}.$$

À tout point (x, y) d'une zone géographique, on peut associer son altitude $f(x, y)$. Les courbes de même altitude tracées sur les cartes sont alors des lignes de niveau, d'où la dénomination.

Ainsi par exemple, pour les fonctions :

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = xy,$$

les courbes de niveau sont des cercles (pour f) et des hyperboles (pour g).

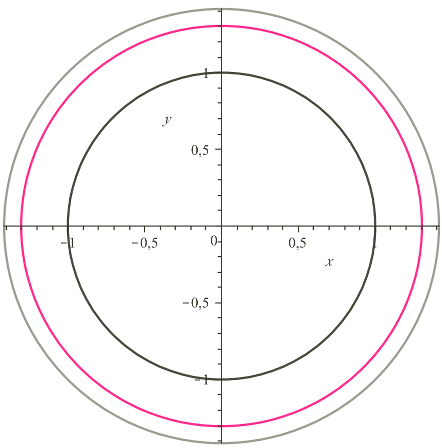


Figure 6.1

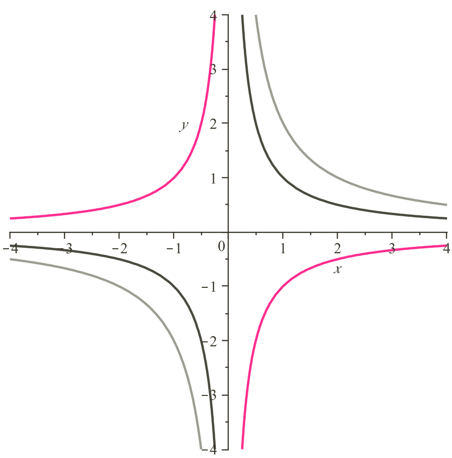


Figure 6.2

6.2.2 Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1

On appelle dérivée partielle de la fonction f par rapport à la première variable x, au point (x_0, y_0), le nombre (s'il existe) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

De même, on définit la dérivée partielle par rapport à la seconde variable y, en (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

La définition d'une dérivée partielle repose sur l'accroissement d'une seule variable. C'est donc une dérivée simple par rapport à cette variable, l'autre restant fixe.

Par conséquent, toutes les techniques de calcul des dérivées ordinaires s'appliquent aux dérivées partielles.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, on peut définir des dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 pour les fonctions de plusieurs variables. Les notations les plus utilisées sont :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}.$$

En général, l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est vraie.

6.3 DIFFÉRENTIELLE

6.3.1 Cas d'une fonction à une variable

Revenons aux fonctions réelles d'une variable réelle. On peut interpréter la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)$ en x_0 comme étant un nombre $f'(x_0)$ tel que le rapport :

$$R(h) = \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|}$$

tende vers 0 lorsque h tend vers 0.

Cela veut dire que le numérateur tend vers 0 plus vite que h.

Si l'on remplace $f(x_0+h)$ par $f(x_0)$, l'erreur commise sur la valeur de $f(x_0+h)$, est égale à $\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$.

En négligeant la quantité $R(h)h$, et en introduisant la notation $\Delta x = h$, l'erreur $\Delta f(x_0)$ peut donc être estimée par $f'(x_0)h$.

La fonction définie par $h \mapsto f'(x_0)h$ est appelée différentielle de f au point x_0. On la note :

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0)h.$$

Si l'on introduit la notation $\mathrm{d}x(h) = h$, l'égalité précédente se transforme en égalité de fonctions $\mathrm{d}f_{x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

6.3.2 Cas d'une fonction à deux variables

Une fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est différentiable en (x_0, y_0) si les dérivées partielles $\alpha = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ et $\beta = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ existent et vérifient la condition :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \alpha h - \beta k|}{|h|+|k|} = 0.$$

La fonction, notée $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}$ et définie par :

$$(h,k) \mapsto \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k$$

est appelée différentielle de f en (x_0, y_0).

La différentielle de f en (x_0, y_0) est souvent notée :

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

où dx et dy sont les applications définies par $dx(h, k) = h$ et $dy(h, k) = k$.

De façon analogue, dans le cas d'une fonction de trois variables

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z),$$

sa différentielle en (x_0, y_0, z_0) est :

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

6.3.3 Application au calcul approché

Notons Δx et Δy les écarts (supposés petits) des variables x et y au voisinage de x_0 et y_0. Alors l'écart $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ a pour valeur approchée :

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Cette approximation se généralise à trois variables. Elle est utilisée dans des calculs d'incertitude.

6.4 GRADIENT ET SES APPLICATIONS

6.4.1 Cas de deux variables

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point (x_0, y_0). On appelle gradient de f au point (x_0, y_0) le vecteur :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Le gradient de f au point (x_0, y_0) est orthogonal à la courbe de niveau passant par le point (x_0, y_0).

Si le gradient f au point (x_0, y_0) est un vecteur non nul, l'équation cartésienne de la tangente à la courbe de niveau $f(x_0, y_0)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

6.4.2 Cas de trois variables

Dans le cas de trois variables, le gradient de f au point (x_0, y_0, z_0) est le vecteur :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right).$$

Il est orthogonal à la surface de niveau passant par le point (x_0, y_0, z_0).

Si le gradient de f au point (x_0, y_0, z_0) est un vecteur non nul, l'équation cartésienne du plan tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface $f(x, y, z) = 0$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

6.4.3 Vitesse de variation dans une direction

La dérivée de f en (x_0, y_0, z_0) dans la direction du vecteur $u(\alpha, \beta, \gamma)$, unitaire (c'est-à-dire de norme $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$) est :

$$D_u f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Lorsque f est différentiable, cette limite existe et vaut :

$$\begin{aligned} D_u f(x_0, y_0, z_0) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \cdot u \\ &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Cette dérivée directionnelle est maximum dans la direction du gradient et vaut alors $\left\| \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \right\|$.

Sur les cartes d'état-major, le gradient indique la ligne de plus grand pente. Il est orthogonal aux lignes de niveau.

6.5 OPTIMISATION D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

6.5.1 Généralités

• Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

f admet un maximum (resp. minimum) global en $(x_0, y_0) \in D$ si

$$\forall (x,y) \in D \qquad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \quad (\text{resp. } f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0))$$

f admet un maximum (resp. minimum) local en $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe une boule de rayon non nul $B((x_0,y_0),r) \subset D$ telle que :

$$\forall (x,y) \in B \qquad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \quad (\text{resp. } f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0))$$

• Exemple

Dans le cadre d'une modélisation, on peut être amené à introduire une famille de fonctions qui dépendent de paramètres, par exemple :

$$t \mapsto f(a,b,c,t)$$

où a, b, c sont les paramètres du modèle et t la variable.

On dispose par ailleurs de n points expérimentaux (t_i, y_i) et on cherche les valeurs des paramètres qui rendent minimum la distance entre le graphe de $f(a, b, c,.)$ et l'ensemble des points.

Il s'agit d'un problème de minimisation.

Si on prend comme mesure de l'écart :

$$E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(a,b,c,t_i))^2$$

c'est la méthode des moindres carrés. Mais d'autres mesures de l'écart sont possibles.

6.5.2 Extrémum local

• Condition nécessaire d'extrémum local

Si f présente un extrémum local en (x_0, y_0) et possède des dérivées partielles en ce point, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0,y_0) = \vec{0}.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point critique, ou point stationnaire, de f.

• Condition suffisante d'extrémum local

En un point critique (x_0, y_0) où f admet des dérivées partielles secondes, posons :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

On a alors :

- si $S^2 - RT < 0$, f présente un extrémum local en (x_0, y_0) ; il s'agit d'un maximum si $R < 0$ et d'un minimum si $R > 0$;
- si $S^2 - RT > 0$, f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extrémum ;

Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extrémum du paysage.
Le mot selle vient de l'image d'une selle de cheval.

- si $S^2 - RT = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

• Étude directe

Après avoir déterminé un point critique (x_0, y_0), on peut aussi étudier directement le signe de la différence

$$D(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour h et k voisins de 0, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $D < 0$, un minimum si $D > 0$). Sinon, il s'agit d'un point-col.

Mieux, si le signe est constant sur tout le domaine de définition de f, alors l'extrémum est global.

• Graphiques

– un minimum :

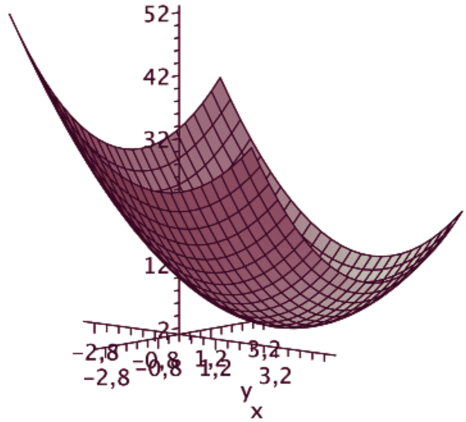


Figure 6.3

– un maximum :

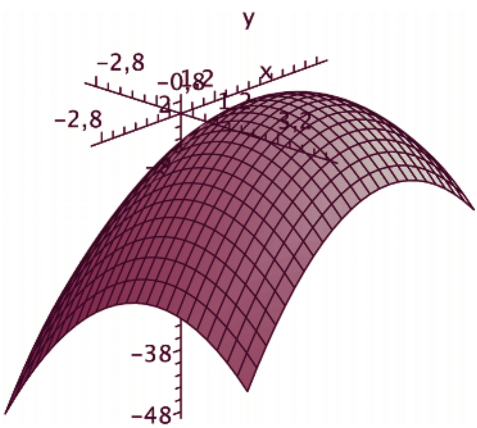


Figure 6.4

– un point-col :

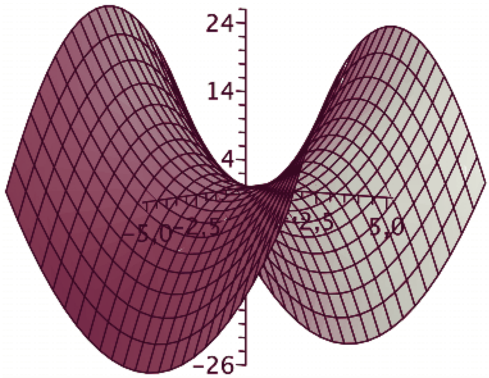


Figure 6.5

– un paysage tourmenté :

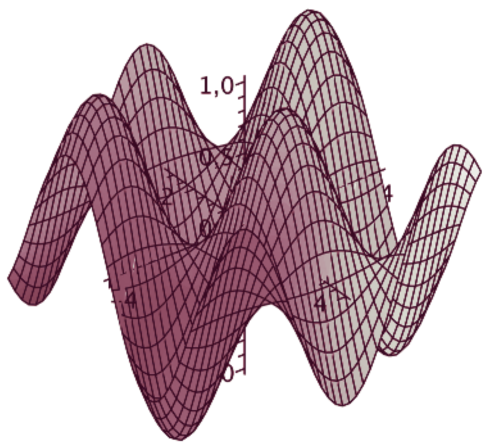


Figure 6.6

Exemple de courbes de niveau en biologie

Dans le bioclimagramme d'Emberger, la fréquence en Algérie du criquet migrateur *Locusta migratoria* est représentée par les courbes de niveau ci-dessous.

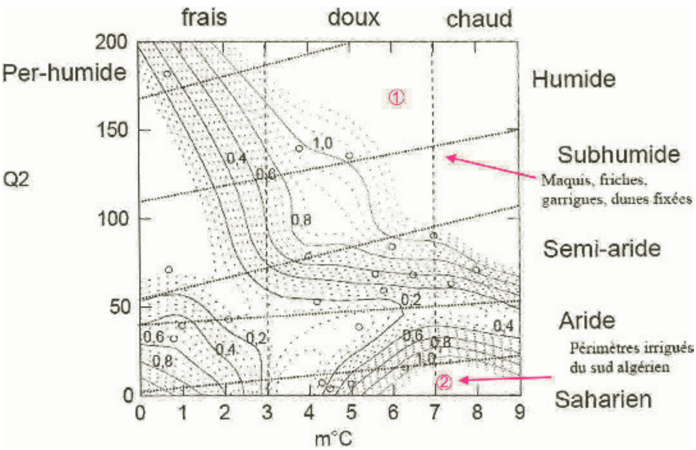


Figure 6.7

La variable x est le minimum de la température en janvier ; la variable y est un coefficient qui dépend des précipitations ; la fonction $f(x, y)$ est la fréquence de la présence de l'animal définie par des valeurs numériques observées.

La courbe de niveau 1,0 (soit 100 % de présence) délimite deux zones.

La zone ❶ correspond au nord de l'Algérie. Le criquet vit dans les milieux naturels et il a besoin de suffisamment d'humidité.

La zone ❷ correspond au sud algérien, dans le Sahara Central. L'humidité est très faible. On trouve le criquet seulement dans les zones qui sont irriguées à partir de nappes profondes.

MOTS CLÉS

- Dérivées partielles
- Différentielle
- Gradient
- Extrémum

EXERCICES

6.1 Calculez les dérivées partielles premières des fonctions définies par :

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\ ; \quad g(x,y) = \sin x \cos y.$$

6.2 Calculez les dérivées partielles premières des fonctions définies par :

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad g(x,y,z) = xyz.$$

6.3 Reprenez les fonctions de l'exercice 6.1 et calculez les dérivées partielles secondes.

6.4 Soit T une fonction de la position (x, y) des points du plan selon l'expression :

$$T = 0{,}2\,x\,y^2.$$

Calculez la vitesse de variation de T au point $A(2{,}2)$ lorsque l'on se déplace dans la direction du point $B(1{,}5)$.

6.5 Déterminez et étudiez les éventuels extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

6.6 Déterminez les extrémums éventuels de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x \sin y}.$$

6.7 Une propriété φ d'une préparation pharmaceutique est fonction de deux variables η et k selon l'expression :

$$\varphi = k^3 - k\eta + \eta.$$

Existe-t-il des valeurs de k et η pour lesquelles φ présenterait un extrémum ?

6.8 Densité urbaine

Le centre d'une ville étant l'origine des coordonnées, la densité d'une population urbaine en un point $M(x,y)$ est donnée par l'expression :

$$D(x,y) = 3\exp\left[-5\sqrt{x^2 + 2y^2}\right].$$

En un point $M_0(x_0, y_0)$, déterminez la direction dans laquelle la densité de population croît le plus vite.

6.9 Ajustement d'une parabole à des points expérimentaux

Déterminez la parabole d'équation :

$$y = a + bx + cx^2$$

passant au plus près des points

$$(-2, 1), (-1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$$

au sens des moindres carrés. *On admet que le minimum existe.*

6.10 Des insectes et leur habitat

Des espèces d'insectes ont été inventoriées dans plusieurs milieux sur une colline calcaire, selon une échelle de dynamique végétale v depuis la pelouse sèche écorchée (valeur : 1) jusqu'au-sous bois (valeur : 6), et la hauteur h (en cm) de la végétation herbacée (entre 5 et 40 cm).

Le nombre *NBI* d'espèces d'insectes peut être modélisé par la fonction définie par :

$$NBI = -0{,}466\,5\,v^2 + 2{,}960\,9\,v - 0{,}006\,55\,h^2 + 0{,}346\,25\,h + 1{,}087\,25.$$

1. Représentez cette fonction à l'aide d'un graphe en 3D.

2. Quelle est la valeur du milieu (combinaison de la valeur de l'échelle de dynamique végétale et de la hauteur) où l'on attend la plus grande richesse (le plus grand nombre d'espèces) ?

3. Quelle est cette richesse maximale ?

4. En un point quelconque $M(v, h)$, quelle est la direction dans laquelle la fonction *NBI* varie le plus vite (ou direction de plus grande pente) ?

Quelle est la valeur $f(v, h)$ de cette variation maximale (ou valeur de la plus grande pente) ?

5. Étudiez les extrémums de la fonction f définie dans la question précédente.

6.11 Le retour des oiseaux

Dans l'exercice **1.14**, nous nous sommes déjà intéressés aux oiseaux des îles Salomon. Avec les mêmes données, on peut modéliser le nombre d'espèces d'oiseaux *NBO* par la fonction définie par :

$$NBO = 5{,}811 \ln S - 0{,}148 D + 23{,}515$$

où S est la surface en miles^2 et D la distance en miles.

1. Tracez le diagramme en 3D de l'enveloppe des *NBO* trouvés selon la taille des îles et leurs distances inter-îles.

2. En un point quelconque $M(S, D)$, quelle est la direction dans laquelle la fonction *NBO* varie le plus vite (ou direction de plus grande pente) ?
Quelle est la valeur de cette variation maximale (ou valeur de la plus grande pente) ?

SOLUTIONS

6.1 • La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}\cdot$$

• La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos x \cos y \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\sin x \sin y.$$

6.2 • La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^3$ et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\cdot$$

• La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^3$ et l'on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = yz \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = xz \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy.$$

6.3 On a :

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cos y) = -\sin x \cos y$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sin x \sin y) = -\cos x \sin y$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-\sin x \sin y) = -\sin x \cos y$$

6.4 On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10}$. La direction de A vers B est donc orientée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, en calculant les dérivées partielles premières, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, T(x,y) = \begin{pmatrix} 0,2y^2 \\ 0,4xy \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, T(2,2) = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

La vitesse de variation de T au point $A(2,2)$ lorsque l'on se déplace dans la direction du point $B(1,5)$ est donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, T(2,2) \cdot \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{10}} \approx 1,2649.$$

6.5 Les conditions nécessaires de premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc seul le point critique (0,3) est susceptible d'être un extrémum de f.

On peut étudier sa nature avec les dérivées partielles secondes.

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) = 2 \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,3) = 1 \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3) = 2.$$

On a donc $S^2 - RT = -3 < 0$, ce qui montre que le point critique est un extrémum ; et il s'agit d'un minimum car $R > 0$. Sa valeur est $f(0,3) = -9$.

On peut aussi étudier le point critique obtenu en considérant la différence :

$$f(0+h,3+k) - f(0,3) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2.$$

Comme cette différence est positive, c'est une autre démonstration que le point (0,3) est un minimum.

Mieux : comme aucun terme n'a été négligé dans le calcul de la différence, le minimum est global.

6.6 • Conditions nécessaires de premier ordre

Si la fonction f admet un extrémum en (x, y), on a nécessairement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y \, \mathrm{e}^{x \sin y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos y \, \mathrm{e}^{x \sin y} = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ x \cos y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$, il suffit d'étudier f au voisinage des points $A(0, 0)$ et $B(0, \pi)$.

• **Étude au voisinage de** $A(0, 0)$

Étudions le signe de la différence :

$$\Delta(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = \mathrm{e}^{h \sin k} - 1.$$

lorsque h et k sont voisins de 0.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, on a $\Delta(h,k) \approx h \sin k$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on a $\Delta(h,k) \approx h\,k$.

Si $h = k$, on a $h^2 > 0$; si $h = -k$, on a $-h^2 < 0$.

La différence $\Delta(h,k)$ n'est donc pas de signe constant au voisinage de (0,0).

Le point $A(0, 0)$ n'est pas un extrémum de f.

• Étude au voisinage de $B(0, \pi)$

$$\Delta(h,k) = f(0+h,\pi+k) - f(0,\pi) = e^{-h\sin k} - 1 \approx -hk$$

Là encore, la différence $\Delta(h,k)$ n'est pas de signe constant au voisinage de (0, 0). Le point $B(0, \pi)$ n'est pas un extrémum.

6.7 Les conditions nécessaires de premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial k} = 3k^2 - \eta \\ 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \eta = 3 \end{cases}$$

Donc seul le point critique (1, 3) est susceptible d'être un extrémum de φ.

On peut étudier sa nature avec les dérivées partielles secondes.

En un point quelconque, on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2} = 6k \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial \eta} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Au point critique, on a :

$$R = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k^2}(1,3) = 6 \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial \eta}(1,3) = -1 \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}(1,3) = 0.$$

On a donc $S^2 - RT = 1 > 0$, ce qui montre que le point critique n'est pas un extrémum ; c'est un point-col.

6.8 En un point M_0, la vitesse de variation de la densité D est maximum dans la direction du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, D(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial D}{\partial x}(x_0, y_0) = 3\exp\left[-5\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}\right] \dfrac{-5x_0}{x_0^2 + 2y_0^2} \\ \dfrac{\partial D}{\partial y}(x_0, y_0) = 3\exp\left[-5\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}\right] \dfrac{-10y_0}{x_0^2 + 2y_0^2} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est colinéaire au vecteur plus simple : $\begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$.

6.9 Il s'agit de déterminer les coefficients a, b, c qui minimisent la fonction :

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)^2.$$

Si l'on admet que ce minimum existe, on sait qu'il vérifie les conditions nécessaires du premier ordre : $\overrightarrow{\text{grad}} f(a,b,c)=\vec{0}$, qui s'écrivent ici :

$$\begin{cases} 5a & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) b & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) c & = & \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) a & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) b & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^3\right) c & = & \sum_{i=1}^{5} x_i\, y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) a & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^3\right) b & + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^4\right) c & = & \sum_{i=1}^{5} x_i^2\, y_i \end{cases}$$

Les coefficients de ce système se déterminent avec une calculatrice ou avec un tableur :

						sommes
x_i	–2	–1	0	1	2	0
x_i^2	4	1	0	1	4	10
x_i^3	–8	–1	0	1	8	0
x_i^4	16	1	0	1	16	34
y_i	1	0	0	1	2	4
$x_i\, y_i$	–2	0	0	1	4	3
$x_i^2\, y_i$	4	0	0	1	8	13

et on obtient :

$$\begin{cases} 5a & & +10c & = & 4 \\ & 10b & & = & 3 \\ 10a & & +34c & = & 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{3}{35} \\ b=\dfrac{3}{10} \\ c=\dfrac{5}{14} \end{cases}$$

La parabole demandée a donc pour équation :

$$y=\frac{3}{35}+\frac{3}{10}x+\frac{5}{14}x^2.$$

Sur le plan expérimental, l'utilisation de la méthode des moindres carrés signifie que l'on considère les mesures x_i comme exactes et les mesures y_i comme pouvant fluctuer. C'est pour ça que l'on recherche un modèle qui ne passe pas forcément par les points expérimentaux.

6.10 **1.** À l'aide d'un logiciel, on obtient la représentation graphique suivante :

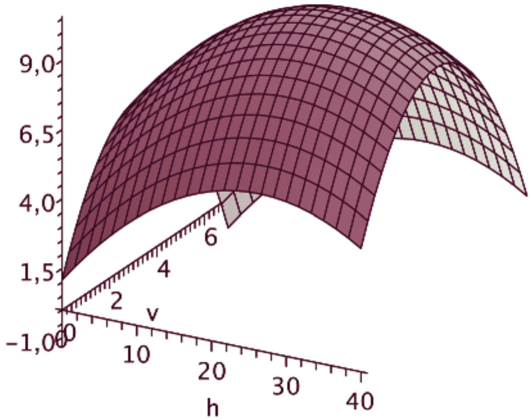


Figure 6.8

Si nécessaire, vous pouvez vous procurer un logiciel gratuit sur le site PAST.exe
PAST : Paleontological Statistics Package for Education and data Analysis.
Logiciel réalisé par Hammer, Harper et Ryan.

2. Il s'agit de chercher à maximiser la fonction *NBI*. Les conditions nécessaires de premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial NBI}{\partial v} = -0{,}933\,v + 2{,}960\,9 = 0 \\ \dfrac{\partial NBI}{\partial h} = -0{,}013\,1\,h + 0{,}346\,25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \approx 3{,}17 \\ h \approx 26{,}4 \end{cases}$$

Étudions le point critique obtenu avec les dérivées secondes :

$$R = \frac{\partial^2 NBI}{\partial v^2} = -0{,}933 \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 NBI}{\partial v \partial h} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 NBI}{\partial h^2} = -0{,}0131$$

On a : $S^2 - RT \approx -0{,}012 < 0$, avec $R < 0$.
Il s'agit bien d'un maximum, comme la représentation graphique l'avait suggéré.

3. En reportant dans l'expression de la fonction les valeurs obtenues pour v et h, on obtient :

$$NBI_{max} = 11{,}35 \text{ espèces.}$$

Les chiffres après la virgule n'ont pas de signification, mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'une modélisation.

4. En un point $M\,(v,\ h)$, la direction dans laquelle la fonction *NBI* varie le plus vite (direction de plus grande pente) est dirigée par le vecteur gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(NBI)(v,h)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(NBI)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial(NBI)}{\partial h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,933\,v+2,960\,9\\ -0,013\,1\,h+0,346\,25\end{pmatrix}$$

La valeur maximale de cette variation directionnelle (valeur de la plus grande pente) est :

$$f(v,h)=\left\|\overrightarrow{\text{grad}}(NBI)(v,h)\right\|$$

$$=\sqrt{(-0,933\,v+2,960\,9)^2+(-0,013\,1\,h+0,346\,25)^2}$$

5. Les conditions nécessaires de premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial v}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial h}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,933\,v+2,960\,9=0\\ -0,013\,1\,h+0,346\,25=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v\approx 3,17\\ h\approx 26,4\end{cases}$$

L'étude de ce point critique avec les dérivées partielles secondes peut vous faire peur. Mais en remarquant que ce point est tel que $f\,(v,\ h)=0$ et que la fonction f est à valeurs positives, il s'agit d'un minimum, et même d'un minimum global.

Le résultat que nous venons de démontrer correspond bien à l'intuition visuelle : c'est au sommet que la pente varie le moins vite.

6.11 **1.** À l'aide d'un logiciel, on obtient la représentation graphique suivante :

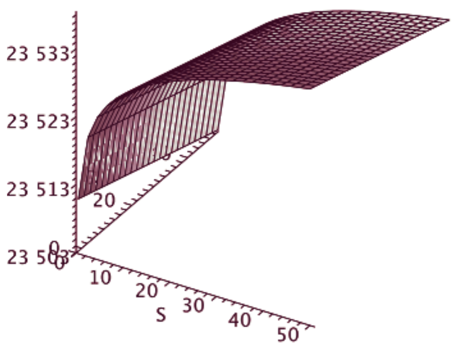


Figure 6.9

2. En un point $M\,(S, D)$, la direction dans laquelle la fonction NBO varie le plus vite (direction de plus grande pente) est dirigée par le vecteur gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(NBO)(S,D)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(NBO)}{\partial S}\\ \dfrac{\partial(NBO)}{\partial D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{5{,}811}{S}\\ -0{,}148\end{pmatrix}$$

La valeur maximale de cette variation directionnelle (valeur de la plus grande pente) est :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(NBO)(S,D)\right\|=\sqrt{\left(\frac{5{,}811}{S}\right)^2+(0{,}148)^2}\,.$$

CHAPITRE 7

Systèmes différentiels

PLAN

OBJECTIFS

- Modéliser des phénomènes biologiques par des systèmes dynamiques
- Représenter les solutions d'un système simple
- Comprendre les notions d'équilibre et de stabilité

7.1 DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

7.1.1 Exemple introductif : le modèle prédateur-proie

- **Conditions d'utilisation du modèle**

Le modèle le plus connu est celui du prédateur-proie. Soit X et Y deux espèces animales, la première servant de proies pour la seconde. On note $x(t)$ et $y(t)$ leurs nombres d'individus à l'instant t.

En supposant que les deux espèces vivent dans un milieu fermé, le modèle simplifié qui décrit leurs effectifs à tout instant t repose sur les observations suivantes :

- Le nombre de naissances de l'espèce X est proportionnel à l'effectif de l'espèce.
- Le nombre de morts naturels ou par prédation de l'espèce X est proportionnel à la fois aux effectifs de X et de Y.
- Le milieu nourricier de l'espèce X est illimité.
- Le nombre de naissances de l'espèce Y est proportionnel à la fois aux effectifs de X et de Y.

- Le nombre de morts naturels de l'espèce Y est proportionnel à l'effectif de Y.
- Les fonctions inconnues sont positives.

• Modèle

On en déduit un système différentiel (ou système dynamique) de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & x(a-by) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & y(cx-d) \end{cases}$$

où a, b, c et d sont les différents coefficients de proportionalité, tous positifs et les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ désignent leurs taux (vitesses) d'accroissement.

Partant d'une donnée initiale $(x(0), y(0))$ des espèces X et Y, ce modèle nous permet de prédire l'évolution de leurs populations à tout instant t.

Ainsi, par exemple, si $(x(0), y(0)) = (0,0)$ ou $(x(0), y(0)) = \left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{b}{a}\right)$, les effectifs ne varient pas et restent égaux aux effectifs de départ.

Dans ce modèle, la vitesse de croissance de l'effectif x de l'espèce X dépend positivement de l'effectif x de l'espèce X et négativement de l'effectif y de l'espèce Y.

À l'opposé, la vitesse de croissance de y dépend positivement de x et négativement de y.

En fait, ce modèle décrit une compétition entre deux entités dans un milieu fermé ; cela pourrait être des plantes, des valeurs économiques à la bourse ...

• Méthodes d'étude

Pour étudier ces systèmes différentiels et bien d'autres, nous disposons de différentes méthodes que l'on peut regrouper en trois catégories ; celles qui relèvent :

- du calcul de solutions exactes (à l'aide des fonctions élémentaires),
- du calcul approché des solutions (algorithmes de résolution, calcul numérique),
- et enfin, d'une analyse qualitative sur le comportement des trajectoires.

7.1.2 Définitions de base

- **Notations**

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de quelques définitions qui portent sur le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = & f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = & f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

où x est un vecteur à n composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $f_1, f_2, \dots, f_n$, des fonctions scalaires qui dépendent de $n+1$ variables réelles.

On convient de le noter sous forme vectorielle :

$$(S)\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x).$$

- **Sur les formes du système**

➤ Le système différentiel (S) est dit autonome si le temps t est absent du second membre :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x).$$

Ainsi, le modèle prédateur-proie de l'exemple introductif définit un système différentiel autonome.

➤ Le système différentiel (S) est linéaire s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x + a(t),$$

où A et a sont des fonctions respectivement matricielle et vectorielle définies sur un ouvert I de $\mathbb{R}$.

Si a est identiquement nulle, le système correspondant est dit linéaire homogène.

Un système linéaire est autonome s'il est de la forme : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + a$

où A est une matrice constante et a un vecteur fixe.

➤ On remarque que les équations différentielles de la forme :

$$x^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

peuvent se ramener à un système différentiel de la forme (S).

Pour cela, on introduit de nouvelles fonctions :

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad \ldots, \quad x_n(t) = x^{(n-1)}(t).$$

Ces fonctions vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = & g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right.$$

- **Sur les solutions**

➤ Une solution d'un système différentiel (S) est une fonction vectorielle $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, dérivable qui vérifie les équations du système.

Dans l'exemple du système prédateur-proie, les fonctions vectorielles $t \mapsto (0, y_0 \mathrm{e}^{-dt})$ et $t \mapsto (x_0 \mathrm{e}^{at}, 0)$ sont des solutions.

➤ On appelle problème de Cauchy, la donnée d'un système différentiel et d'une donnée initiale (t_0, x_0).

La solution du problème de Cauchy est une solution du système différentiel considéré qui vérifie la condition initiale : $x(t_0) = x_0$.

➤ On appelle point d'équilibre (ou stationnaire, ou singulier) du système différentiel autonome tout point $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ de l'espace qui vérifie $f(u) = 0$.

Le système prédateur-proie admet deux points singuliers, (0,0) et $\left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{b}{a}\right)$.

➤ On appelle trajectoire d'une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points $\varphi(t)$ de $\mathbb{R}^n$, où t parcourt l'intervalle I. C'est donc une courbe paramétrée.

➤ On appelle courbe intégrale d'une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points $(t, \varphi(t))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, où t parcourt l'intervalle I. C'est donc la représentation graphique de la solution φ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

➤ Une solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est périodique s'il existe une constante $T > 0$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t+T) = \varphi(t).$$

La trajectoire d'une telle solution est fermée (c'est une boucle).

➤ On appelle intégrale première du système différentiel (S), toute fonction

$$(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(t, x)$$

qui vérifie l'égalité :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x) f_1(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x) f_2(t,x) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(t,x) f_n(t,x) = 0.$$

Cette égalité signifie que la fonction composée :

$$t \mapsto (t, x(t)) \mapsto F(t, x(t)) = U(t)$$

est constante sur les courbes intégrales.

Dans le cas des systèmes autonomes, l'intégrale première F ne dépend pas de t. Ainsi, dans l'exemple du système prédateur-proie, la fonction :

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = \frac{a}{c} x + \frac{b}{a} y - \frac{d}{a} \ln x - \ln y$$

est une intégrale première ; les trajectoires du système se trouvent sur les courbes de niveau de F.

- **Théorème 1**

Les trajectoires d'un système différentiel autonome sont confondues, ou n'ont aucun point d'intersection.

- **Théorème 2**

Si les parties réelles des valeurs propres du système linéarisé au voisinage du point singulier (S_1, I_1) ne sont pas nulles, les trajectoires de ce système ont le même comportement qualitatif que celles du système initial au voisinage du même point d'équilibre.

- **Exemple**

Pour le système

$$\begin{cases} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

la figure 7.1 représente les trajectoires, et la figure 7.2 les courbes intégrales.

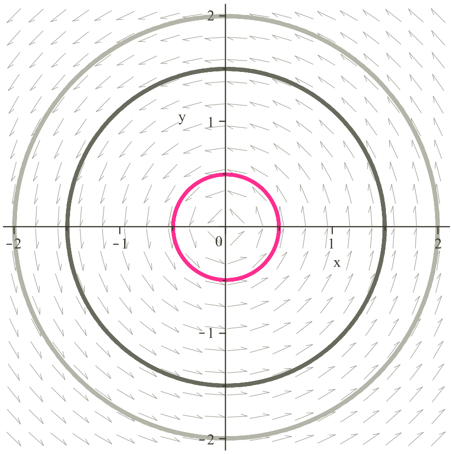


Figure 7.1

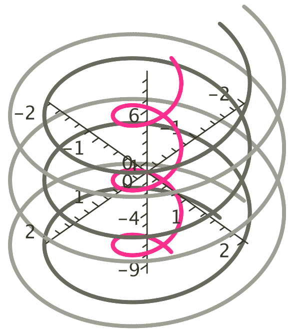


Figure 7.2

7.2 REPRÉSENTATION DES TRAJECTOIRES DES SYSTÈMES LINÉAIRES HOMOGÈNES CONSTANTS 2 × 2

7.2.1 Introduction

On se propose, ici, d'étudier le comportement des trajectoires des systèmes différentiels linéaires :

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$

où les coefficients a, b, c et d sont réels.

La classification des points singuliers dépend des propriétés algébriques de la matrice associée. Rappelons que ces systèmes linéaires sont autonomes et, par conséquent, les trajectoires différentes sont nécessairement disjointes.

Le polynôme caractéristique de la matrice A associée au système est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$

L'étude repose sur le discriminant Δ de ce trinôme.

7.2.2 Cas $\Delta = 0$: la valeur propre est double

L'espace propre associé à cette valeur propre peut être soit le plan $\mathbb{R}^2$ entier (la matrice A est alors diagonalisable), soit une droite (la matrice A est alors non diagonalisable).

• La matrice *A* est diagonalisable

La matrice A est donc scalaire. Si λ désigne la valeur propre double, la solution générale est de la forme :

$$\varphi(t) = (K_1 U + K_2 V)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

où (U, V)est une base de $\mathbb{R}^2$ et K_1 et K_2 des réels quelconques.

Si $\lambda = 0$, tous les points du plan sont des points singuliers.

Sinon, le seul point singulier est $(0, 0)$ et les autres trajectoires sont des rayons « ouverts » qui émanent de $(t \to -\infty)$ ou aboutissent à $(t \to +\infty)$ à l'origine.

La figure 7.3 représente le cas $\lambda < 0$, la figure 7.4 le cas $\lambda = 0$, la figure 7.5 le cas $\lambda > 0$.

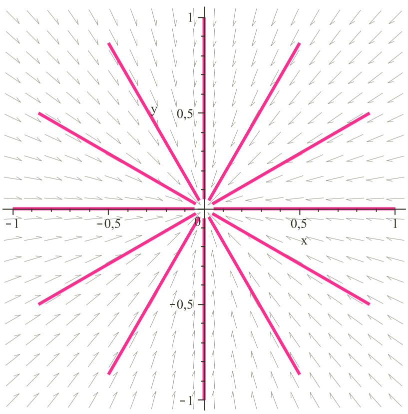


Figure 7.3

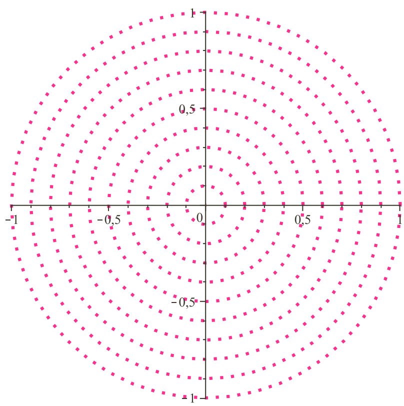


Figure 7.4

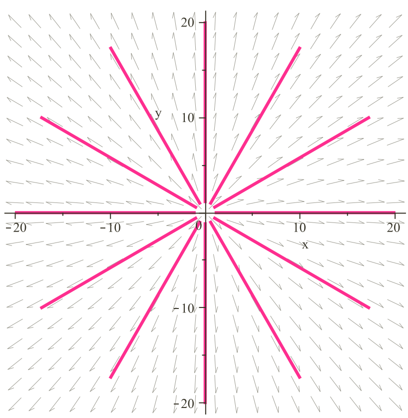


Figure 7.5

- **La matrice *A* n'est pas diagonalisable**

Elle est alors semblable à :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et la solution générale s'écrit sous la forme :

$$\varphi(t) = [(K_1 + K_2\, t)U + K_2\, V]\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$$

où U est un vecteur propre de A et V un vecteur tel que (U,V) soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Si $\lambda = 0$, les points de la droite vectorielle de direction U sont des points singuliers.

Le cas $\lambda < 0$ est représenté sur la figure 7.6 ; le cas $\lambda = 0$ sur la figure 7.7 ; le cas $\lambda < 0$ sur la figure 7.8.

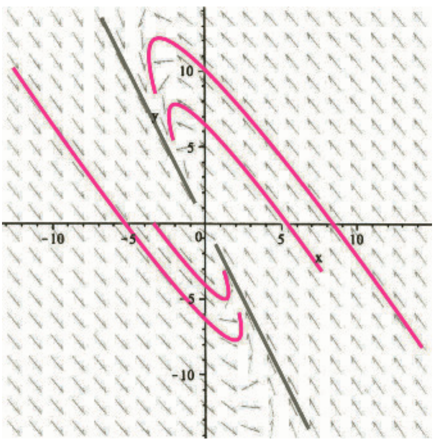


Figure 7.6

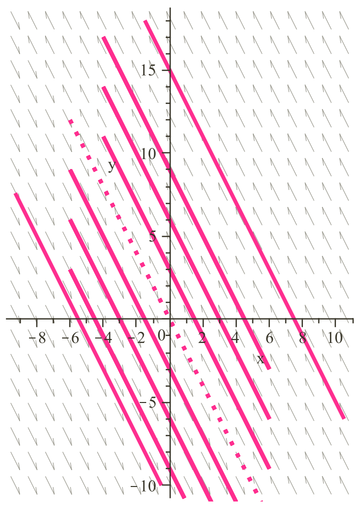


Figure 7.7

7.2.3 Cas $\Delta > 0$: les valeurs propres sont réelles et distinctes

Si λ_1 et λ_2 désignent les valeurs propres, la matrice A est alors diagonalisable, et la solution générale s'écrit sous la forme :

$$\varphi(t) = K_1\, U\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2\, V\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

où U et V sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, et K_1 et K_2 des réels quelconques.

La discussion porte sur le signe des valeurs propres.

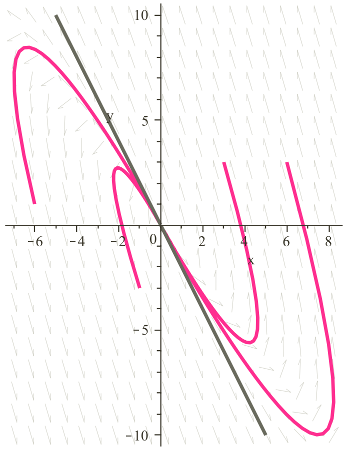


Figure 7.8

- **Les valeurs propres sont de même signe**

Dans ce cas, le point singulier (0,0) est un *nœud stable* si le signe est négatif (fig.7.9) ; un *nœud instable* si le signe est positif (fig.7.10).

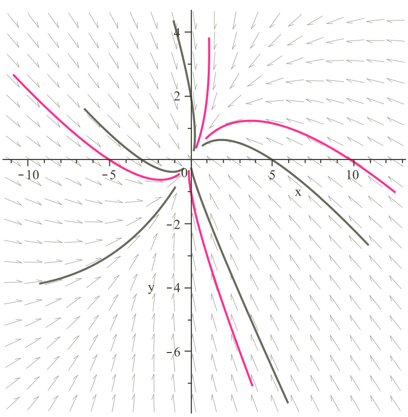


Figure 7.9

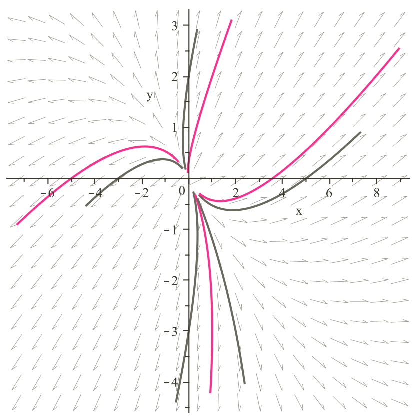


Figure 7.10

- **Une valeur propre est nulle**

La solution générale s'écrit sous la forme : $\varphi(t) = K_1 U + K_2 V e^{\lambda t}$ où λ est l'autre valeur propre.

L'ensemble des points singuliers est la droite vectorielle de direction U.

Les trajectoires sont représentées par la figure 7.11 dans le cas $\lambda < 0$ et par la figure 7.12 dans le cas $\lambda > 0$.

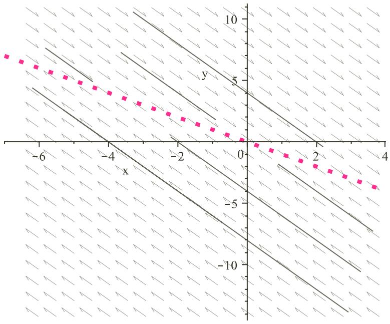


Figure 7.11

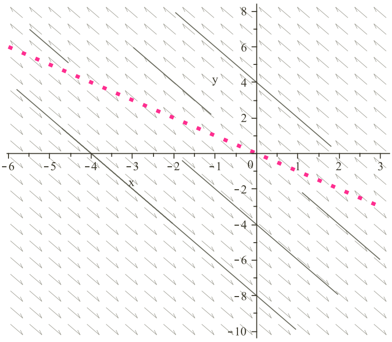


Figure 7.12

- **Les valeurs propres sont de signes différents et non nuls**

Dans ce cas, les trajectoires sont des branches d'hyperboles. Le point singulier (0,0) est appelé *point-selle* ou *point-col*.

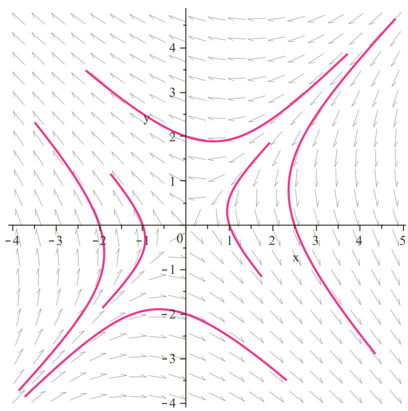


Figure 7.13

7.2.4 Cas $\Delta < 0$: les valeurs propres sont complexes conjuguées

On les note $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$. Dans ce cas les solutions réelles sont de la forme :

$$\varphi(t) = [K_1 U \cos(\beta t) + K_2 V \sin(\beta t)]e^{\alpha t}.$$

où U et V sont les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre.

La partie réelle α influe sur l'éloignement ou le rapprochement du point $M(t)$ de la trajectoire par rapport à l'origine, tandis que β indique le sens de rotation de ce point.

La discussion porte sur la partie réelle α des valeurs propres.

Lorsque $\alpha = 0$, le point singulier (0,0) est appelé *centre* (voir la figure 7.14).

Lorsque $\alpha < 0$, le point singulier (0,0) est appelé *foyer stable* (voir la figure 7.15).

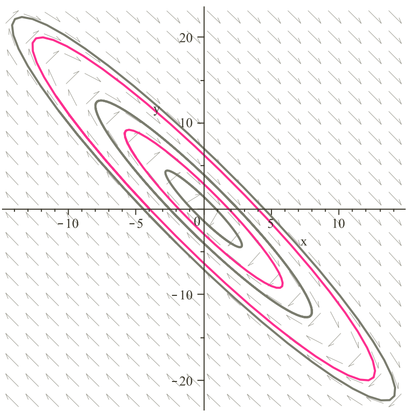


Figure 7.14

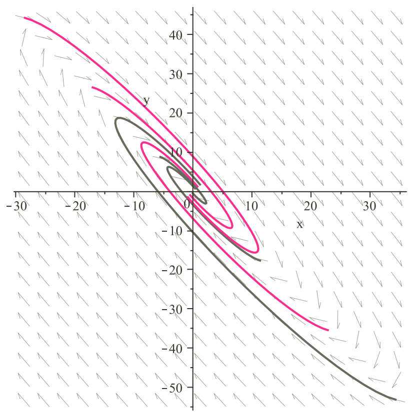


Figure 7.15

Lorsque $\alpha > 0$, le point singulier (0,0) est appelé *foyer instable* (voir la figure 7.16).

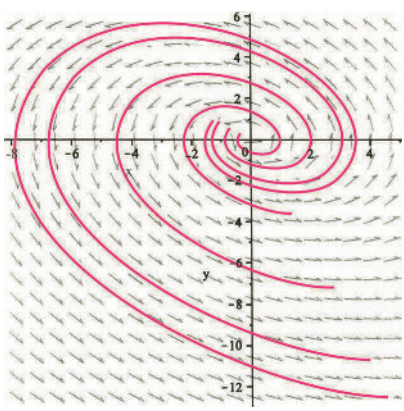


Figure 7.16

7.3 ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DE LA STABILITÉ

7.3.1 Observation d'exemples

Comme pour l'évolution des classes d'âge d'une population donnée, modélisées par les matrices de Leslie, le devenir des effectifs à plus ou moins long terme, constitue une question importante de l'analyse qualitative des systèmes différentiels.

Observons différents cas du modèle prédateur-proie.

- **Premier exemple**

Les trajectoires du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(0{,}1 - 0{,}0001y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(4\times10^{-5}x - 0{,}04) \end{cases}$$

sont représentées sur le graphique ci-dessous.

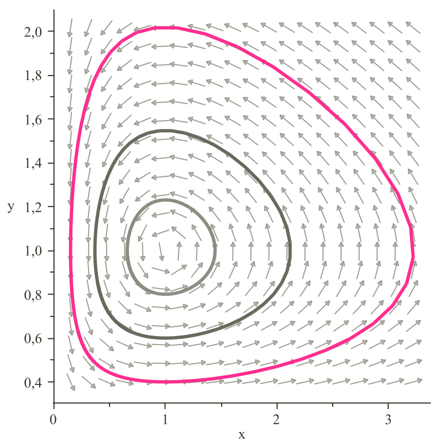


Figure 7.17

On constate que les trajectoires sont fermées et, quelle que soit la répartition initiale des prédateurs et des proies, les deux espèces vont s'engager dans un processus oscillatoire où, périodiquement, elles reviennent à leurs effectifs initiaux. Par conséquent, aucune ne disparaît.

On dira que la position d'équilibre (100,1000) est stable.

- **Deuxième exemple**

Imaginons les comportements suivants des trajectoires. Dans le premier cas, on remarque que les trajectoires s'éloignent de la position d'équilibre et, dans le second, elles s'en approchent.

Le premier cas s'apparente à de l'instabilité, et le second à de la stabilité, plus forte que celle du premier exemple, appelée stabilité asymptotique.

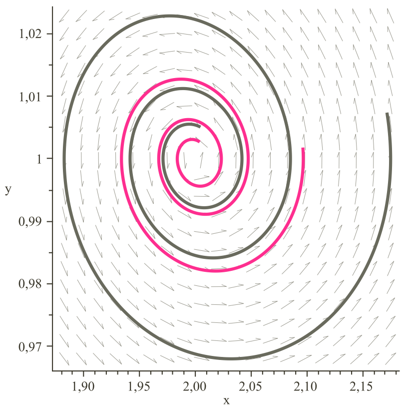


Figure 7.18

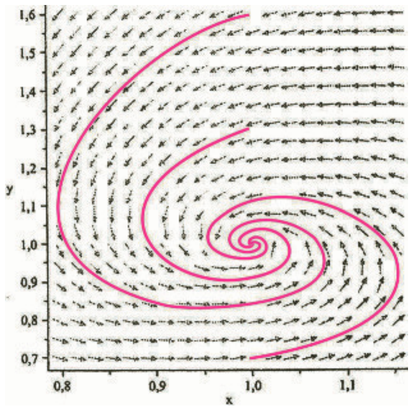


Figure 7.19

La situation suivante nous montre que si la position d'équilibre (1,1) est instable, il s'est formé une trajectoire fermée vers laquelle s'approchent asymptotiquement toutes les autres (à l'exception de celle du point d'équilibre (1,1)). La solution qui décrit cette trajectoire est asymptotiquement stable.

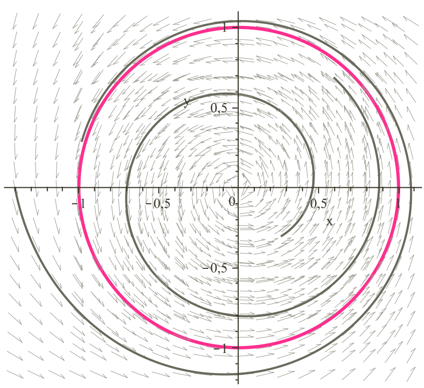


Figure 7.20

7.3.2 Définition intuitive de la stabilité

Le meilleur exemple pour comprendre la stabilité est donné par celui du pendule sans frottement régi par l'équation :

$$x''(t) + \sin(x(t)) = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin x \end{cases}$$

où $x(t)$ désigne l'angle que forme la tige du pendule avec la verticale.

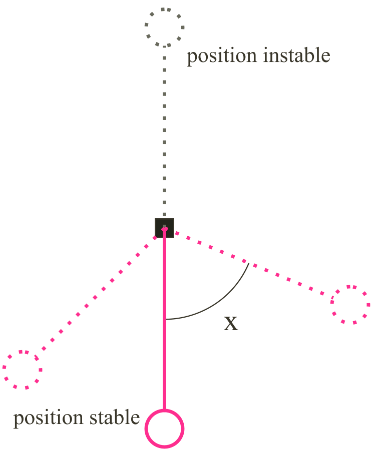


Figure 7.21

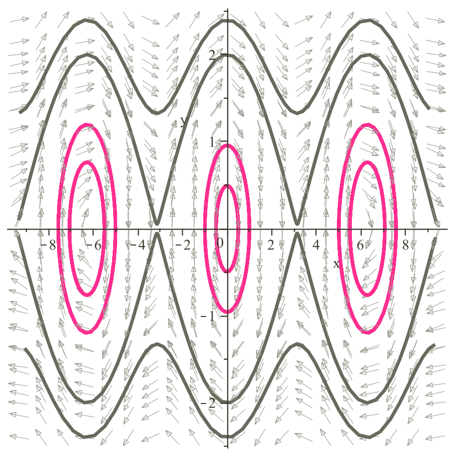


Figure 7.22

Les positions d'équilibre résultent de l'annulation du second membre, c'est-à-dire $(x, y) = (k\pi, 0)$ que nous interprétons comme des positions égales à 0 ou π (modulo 2π) avec une vitesse initiale nulle ($y = 0$).

On montre que, si l'on approxime le système différentiel au voisinage de (0,0) par son linéarisé (soit $\sin x \approx x$ pour x petit) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x \end{cases}$$

on obtient une position stable, puisque, lorsqu'on le perturbe, pour tous les temps postérieurs, son amplitude ne dépasse pas celle de la perturbation.

Ses valeurs propres sont à partie réelle nulle. Le théorème 2 (*cf.* §1.2) ne nous permet pas de conclure.

Cependant, en tenant compte du fait que la fonction : $(x, y) \mapsto \cos x - \frac{1}{2} y^2$ est une intégrale première et que, pour x et y suffisamment petits, ses courbes de niveau sont fermées, les trajectoires du système initial au voisinage de $(0,0)$ sont aussi fermées.

En revanche, au voisinage de $(0,\pi)$ le système différentiel approximé par :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases}$$

présente un équilibre $(0,\pi)$ qui n'est pas stable car, dès qu'on le perturbe un peu, le pendule quitte le voisinage de la position et tombe.

7.4 ÉTUDE DÉTAILLÉE D'UN MODÈLE D'ÉPIDÉMIOLOGIE

7.4.1 Modélisation

Pour étudier la propagation d'une maladie contagieuse, on distingue trois catégories d'individus en fonction de leur susceptibilité vis-à-vis de la maladie : les susceptibles (S) qui sont sains et qui peuvent être contaminés, les infectés (I) et les remis (R) qui retrouvent le statut des susceptibles. En représentant cette situation par le schéma :

$$\boxed{\quad S \quad} \longrightarrow \boxed{\quad I \quad} \longrightarrow \boxed{\quad R \quad}$$

on aboutit au modèle mathématique :

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -\beta I S + \gamma R \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta I S - \nu I \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= \nu I - \gamma R \end{cases}$$

où les coefficients β, γ et ν sont dans l'intervalle $]0, 1[$.

En outre,

– le terme $\beta I S$ quantifie le nombre d'individus susceptibles qui sont infectés par unité de temps dt,

– le terme νI, la quantité d'individus infectés qui guérissent par unité de temps dt,
– le terme γR, la quantité d'individus immunisés et qui perdent leur immunité par unité de temps dt.

Pour étudier un tel système différentiel, on commence par situer les positions d'équilibre, c'est-à-dire des points (S,I,R) qui annulent le second membre :

$$-\beta I S + \gamma R = \beta I S - \nu I = \nu I - \gamma R = 0.$$

On trouve deux infinités de points.

La première est $I = 0$, $R = 0$ et S quelconque. Ils signifient qu'en l'absence d'infectés et de remis, la population considérée est constituée seulement de sains, et le restera.

La deuxième catégorie de points d'équilibre est définie par :

$$I = \frac{\gamma R}{\nu} \quad \text{et} \quad S = \frac{\nu}{\beta} \quad \text{avec le nombre } R \text{ arbitraire.}$$

On remarque que ce système admet une intégrale première $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où :

$$F(S,I,R) = S + I + R.$$

Cela signifie que les trajectoires se trouvent entièrement dans des plans d'équations : $S + I + R = C$ (constante).

Cette intégrale première va nous aider à réduire la dimension du modèle.

En effet, partant d'une population composée de S_0 susceptibles, de I_0 infectés et de R_0 remis, la somme de ces individus $N_0 = S_0 + I_0 + R_0$ reste constante dans la dynamique du système (S) qui se réduit alors au nouveau système:

$$(S_r) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta I S + \gamma (N_0 - I - S) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta I S - \nu I \end{cases}$$

dont les points d'équilibre sont:

$$(S_1, I_1) = (N_0, 0) \qquad \text{et} \qquad (S_2, I_2) = \left(\frac{\nu}{\beta} \, \frac{\gamma (N_0 \beta - \nu)}{\beta(\nu \quad \gamma)} \right).$$

La suite de l'étude passe, dans la majeure partie des cas, par celle de la nature des points d'équilibre, plus précisément, par les systèmes linéarisés au voisinage de chaque point singulier.

7.4.2 Étude du système (*S*) au voisinage du point d'équilibre $(S_1, I_1) = (N_0, 0)$

On pose $X_1 = S - N_0$ et $Y_1 = I$. Le système obtenu est:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} & = & -\gamma X_1 - (\gamma + \beta N_0) Y_1 - \beta X_1 Y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t} & = & (\beta N_0 - \nu) Y_1 + \beta X_1 Y_1 \end{cases}$$

dont la partie linéaire:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} & = & -\gamma X_1 - (\gamma + \beta N_0) Y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t} & = & (\beta N_0 - \nu) Y_1 \end{cases}$$

est appelée le linéarisé du système initial.

Les valeurs propres de la matrice associée au linéarisé sont égales à $-\gamma$ et $\beta N_0 - \nu$. Pour appliquer le théorème 2 (*cf.* §1.2), on suppose qu'elles ne sont pas nulles. Par conséquent,

- si $-\gamma$ et $\beta N_0 - \nu$ sont de signes contraires, le point (S_1, I_1) est un point-selle,
- si $-\gamma$ et $\beta N_0 - \nu$ sont de même signe, le point d'équilibre (S_1, I_1) est un nœud stable si ce signe est négatif, instable sinon.

7.4.3 Étude du système (*S*) au voisinage du point d'équilibre $(S_2, I_2) = \left(\dfrac{\nu}{\beta}\ ;\ \dfrac{\gamma(N_0\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}\right)$

On pose $X_2 = S - \dfrac{\nu}{\beta}$ et $Y_2 = I - \dfrac{\gamma(N_0\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}$.

Le système obtenu est:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} & = & -\dfrac{\gamma(\gamma + \beta N_0)}{\gamma + \nu} X_2 - (\gamma + \nu) Y_2 - \beta X_2 Y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t} & = & \dfrac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\gamma + \nu} X_2 + \beta X_1 Y_1 \end{cases}$$

dont la partie linéaire est:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} & = & -\dfrac{\gamma(\gamma + \beta N_0)}{\gamma + \nu} X_2 - (\gamma + \nu) Y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}t} & = & \dfrac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\gamma + \nu} X_2 \end{cases}$$

Si les nombres $\dfrac{\gamma(\gamma+\beta N_0)}{\gamma+\nu}$ et $\gamma(\beta N_0-\nu)$ sont négatifs, le point (S_2, I_2) est stable.

Systèmes chaotiques et attracteur de Lorenz (1917-2008)

Dans le cadre des systèmes dynamiques (déterministes), l'apparition de phénomènes chaotiques signifie avant tout une très forte sensibilité des solutions (trajectoires) par rapport aux conditions initiales. On les rencontre dans différentes sciences comme la physique, l'économie, la biologie ...

En biologie par exemple, certains aspects des migrations de populations, les arythmies cardiaques, l'activité des neurones, certains actes de surveillance chez les proies, relèvent du chaos.

Par ailleurs, l'interprétation de ce chaos peut varier d'une situation à une autre: elle peut signifier une grande aptitude d'adaptation (battement de cœur) ou la présence d'une anormalité comme chez la plupart des schizophrènes qui ne peuvent pas suivre du regard une cible en mouvement (le mouvement des yeux est quasi-périodique).

Bien que l'idée d'existence de mouvements chaotiques remonte à Poincaré (1854-1912), ce fut Edward N. Lorenz, météréologue américain et disciple du fondateur des systèmes dynamiques G. Birkhoff qui, en 1963, construisit un système différentiel en dimension trois où l'on observe le phénomène. Ce système, simple d'écriture, est:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s(y-x) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = rx-y-xz \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy-bz \end{cases}$$

où b, r et s sont des paramètres réels.

Avec $s = 10$, $r = 28$ et $b = \dfrac{8}{3}$ on obtient les graphiques suivants :

– pour les fonctions: $t \mapsto x(t)$ (fig.7.23), $t \mapsto y(t)$ (fig.7.24), $t \mapsto z(t)$ (fig.7.25);

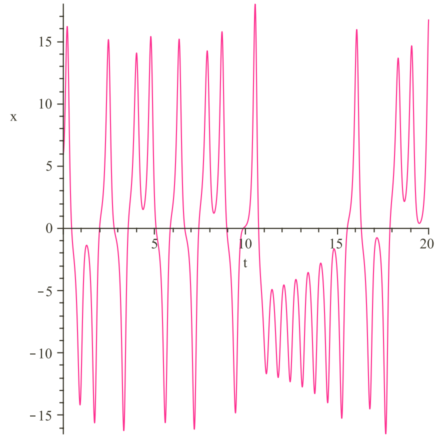


Figure 7.23

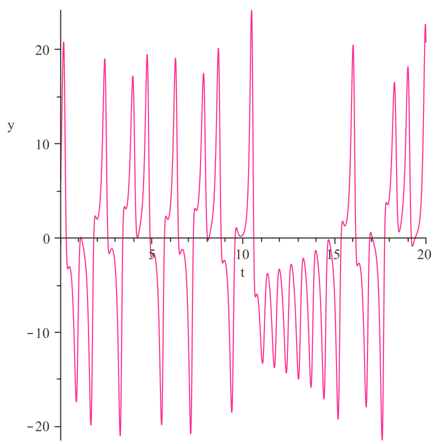


Figure 7.24

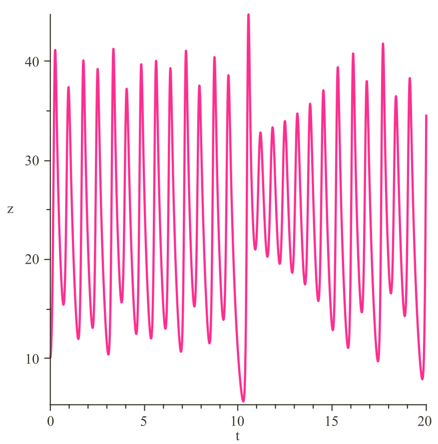


Figure 7.25

– et des trajectoires: $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ (fig.7.26)

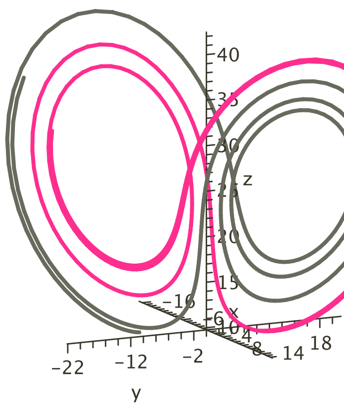


Figure 7.26

Grâce à des calculs très détaillés sur ordinateur, il a remarqué que des variations extrêmement petites sur les conditions initiales engendrent des comportements très différents et des trajectoires très éloignées les unes des autres. Cela pose un grand problème car, en général, les données numériques sont entâchées d'erreurs.

La dynamique de ce système est complexe et les variations des fonctions coordonnées:

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

ne peuvent pas être contrôlées. Ce phénomène porte le nom d'« effet papillon »: un battement d'aile de papillon au dessus de l'Amazonie peut provoquer des typhons en Asie.

Revenant aux trajectoires du système différentiel, on remarque qu'elles ne cessent de « tourner » autour de deux régions de l'espace, avec, à chaque fois, un nombre variable de tours. Ces régions forment ce que l'on appelle des « attracteurs de Lorenz ».

Ce n'est que dans les années 1970 que des groupes de scientifiques se sont intéressés au modèle de Lorenz.

Il ne faut pas confondre Edward N. Lorenz avec Konrad Lorenz, zoologiste autrichien (1903-1989), prix Nobel de médecine, qui a été un des fondateurs de l'éthologie (science du comportement) en prenant comme objet d'étude les oiseaux et particulièrement l'oie cendrée.

MOTS CLEFS

- Épidémiologie
- Équilibre
- Stabilité
- Trajectoire

EXERCICES

7.1 Attention aux contacts

On considère une maladie transmissible par contact entre deux individus. Notons $x(t)$ le nombre d'individus sains et non porteurs de la maladie (les réceptifs) et $y(t)$ les contagieux (porteurs ayant déclaré ou non la maladie).

Nous supposerons que la somme $x(t)+y(t)=N$ est constante, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de naissance, pas de mortalité, pas de déplacement d'individus.

Au cours d'un intervalle de temps dt, lorsqu'il y a contact entre un réceptif et un contagieux, la probabilité que le réceptif devienne contagieux est β.

1. Écrivez le système différentiel qui décrit les vitesses de variation de $x(t)$ et de $y(t)$.

2. Écrivez l'équation différentielle vérifiée par y lorsque y peut augmenter jusqu'à N. Quand la variation de y atteint-elle son maximum?

3. Déterminez deux réels a et b tels que:

$$\frac{1}{(N-y)y}=\frac{a}{N-y}+\frac{b}{y}\cdot$$

4. Résolvez l'équation différentielle vérifiée par y.

7.2 Modèle de Kermack et Mac Kendrick (1927)

On considère une maladie transmissible par contact entre deux individus. Notons $x(t)$ le nombre d'individus réceptifs (sains non porteurs), $y(t)$ le nombre d'individus contagieux (porteurs malades ou non) et $z(t)$ le nombre d'individus guéris et immunisés.

Nous supposerons que la somme $x(t)+y(t)+z(t)=N$ est constante, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de naissance, pas de mortalité, pas de déplacement d'individus.

Au cours d'un intervalle de temps dt, lorsqu'il y a contact entre un réceptif et un contagieux, la probabilité que le réceptif devienne contagieux est β, et la probabilité qu'un contagieux devienne immunisé ou meure est notée γ.

1. Écrivez le système différentiel qui décrit les vitesses de variation de $x(t)$, de $y(t)$ et de $z(t)$.

2. Avec les valeurs initiales $x_0 = 489$, $y_0 = 10$ et $z_0 = 1$, tracez, à l'aide d'un grapheur, les courbes de variation des fonctions x, y et z :

a) dans le cas $\beta = 0{,}001$ et $\gamma = 0{,}1$;

b) dans le cas $\beta = 0{,}005$ et $\gamma = 0{,}5$.

3. Montrez qu'il existe une intégrale première. Déduisez-en un système différentiel vérifié seulement par les fonctions x et y.

4. Trouvez les points d'équilibre de ce dernier système, et interprétez-les.

7.3 Encore une épidémie

Dans le cas d'une maladie contagieuse non mortelle, on note $x(t)$ le nombre d'individus réceptifs, $y(t)$ le nombre d'individus contagieux et $z(t)$ le nombre d'individus immunisés à cause de la maladie.

Dans ce modèle, l'immunisation n'est pas définitive et un certain nombre d'individus du troisième groupe peuvent contracter à nouveau la maladie.

Au cours d'un intervalle de temps dt, on appelle β la probabilité qu'un réceptif contracte la maladie au contact d'un contagieux, γ la probabilité qu'un individu du troisième groupe devienne immunisé après avoir contracté la maladie, et δ la probabilité qu'un individu du troisième groupe redevienne réceptif.

1. Écrivez le système différentiel qui décrit les vitesses de variation de $x(t)$, de $y(t)$ et de $z(t)$.

2. Avec les valeurs initiales $x_0 = 489$, $y_0 = 10$ et $z_0 = 1$, tracez, à l'aide d'un grapheur, les courbes de variation des fonctions x, y et z, dans le cas $\beta = 0{,}001$, $\gamma = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}1$.

7.4 La lutte pour la vie

Deux espèces A et B, d'effectifs respectifs $x(t)$ et $y(t)$, sont en compétition pour les mêmes ressources alimentaires.

On suppose que leur croissance est logistique, c'est-à-dire en milieu limitant et en temps continu, et que l'abondance de chacune d'elles représente un surcroît de limitation pour l'autre.

On peut alors modéliser la situation par le système différentiel (où tous les coefficients sont strictement compris entre 0 et 1) :

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) - b\,x^2(t) - c\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) = d\,y(t) - e\,y^2(t) - f\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

1. Si l'une des deux espèces est absente, décrivez les trajectoires de l'autre (points d'équilibre ...).
2. Trouvez les points d'équilibre du système différentiel. On note A celui qui est en dehors des axes.
3. On choisit $a = 0{,}5$, $b = 0{,}8$, $c = 0{,}3$, $d= 0{,}2$, $e = 0{,}9$, $f = 0{,}2$.
Construisez le linéarisé du système au voisinage de A.
Étudiez la stabilité du point d'équilibre A.

SOLUTIONS

7.1 **1.** Pendant l'intervalle de temps dt, il apparaît $\beta x(t)\, y(t)$ nouveaux cas de contagieux (proportionnalité avec le nombre d'individus pouvant être en contact et la probabilité de contamination).
Le nombre d'individus sains diminue de la même quantité puisque la population totale est constante.
On obtient donc le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\beta x(t)\, y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta x(t)\, y(t) \end{cases}$$

2. Si on remplace $x(t)$ par $N - y(t)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta(N - y(t))\, y(t)$$

Pour que la variation de y soit maximum, il faut que $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0.$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \beta\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}[N - 2y(t)]$, cette condition entraîne que $y(t) = \dfrac{N}{2}\cdot$

Il s'agit bien d'un maximum puisque $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} > 0$ pour $y < \dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < 0$ pour $y > \dfrac{N}{2}\cdot$

En conclusion, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ augmente progressivement jusqu'à ce que l'effectif des contagieux soit égal à la moitié de l'effectif total, puis diminue au fur et à mesure qu'il reste de moins en moins de sujets sains.
3. En multipliant les deux membres de l'égalité par $N - y$, puis en remplaçant y par N, on obtient $a = \dfrac{1}{N}\cdot$

En multipliant les deux membres de l'égalité par y, puis en remplaçant y par 0, on obtient $b = \frac{1}{N}\cdot$

On a donc :

$$\frac{1}{(N-y)y} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{N-y} + \frac{1}{y}\right].$$

4. L'équation vérifiée par y peut s'écrire : $y'(t)\dfrac{1}{(N-y(t))\,y(t)} = \beta$

ou encore, avec la question précédente :

$$\frac{1}{N}\left[\frac{y'}{N-y} + \frac{y'}{y}\right] = \beta.$$

Par calcul de primitives, on a donc :

$$\frac{1}{N}[-\ln(N-y) + \ln y] = \beta t + \text{cte}.$$

soit $\ln\left(\dfrac{y}{N-y}\right) = N\beta t + \text{cte}$, puis $\dfrac{y}{N-y} = K\,\mathrm{e}^{N\beta t}$, et en définitive :

$$y(t) = \frac{N}{1 + K\,\mathrm{e}^{-N\beta t}}\cdot$$

Pour déterminer la constante K, il faut connaître la situation initiale, au début de l'épidémie.

7.2 1. Le nombre $x(t)$ diminue pendant un intervalle de temps dt d'une quantité proportionnelle aux nombres $x(t)$ et $y(t)$ d'individus sains et contagieux pouvant être en contact et à la probabilité β de transmission de la maladie.

Le nombre $z(t)$ d'individus sortis de l'épidémie (par guérison ou décès) est proportionnel au nombre $y(t)$ d'individus contagieux et à la probabilité de sortie γ.

Le nombre $y(t)$ d'individus contagieux augmente de ceux qui contractent la maladie et diminue de ceux qui en sortent.

On obtient ainsi le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\beta\,x(t)\,y(t) \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta\,x(t)\,y(t) - \gamma\,y(t) \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma\,y(t) \end{cases}$$

2. a) Dans le cas $\beta = 0{,}001$ et $\gamma = 0{,}1$, on obtient à l'aide d'un tableur :

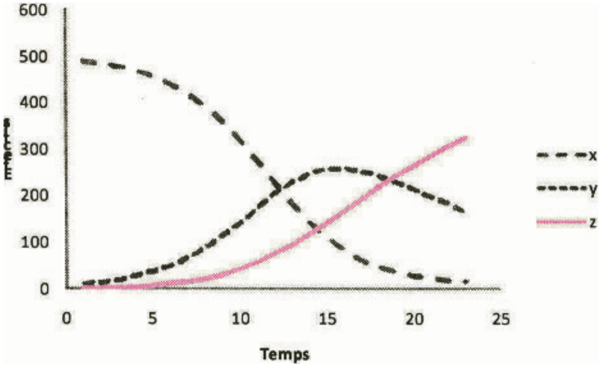


Figure 7.27

Les individus infectieux se maintiennent longtemps dans la population.

b) Dans le cas $\beta = 0{,}005$ et $\gamma = 0{,}5$, on obtient à l'aide d'un tableur :

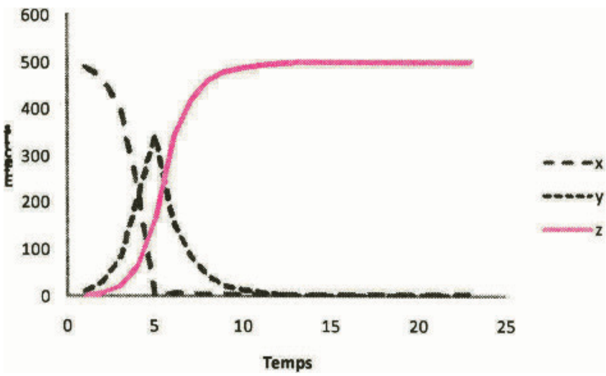


Figure 7.28

Dans ce cas, il y a disparition assez rapide des individus réceptifs.

3. La fonction définie par $F(x, y, z) = x + y + z$ est une intégrale première.

Vous pouvez facilement vérifier que cette fonction convient. L'idée vient de l'observation que la somme des seconds membres du système est nulle.

Notons N_0 l'effectif total de la population.

On a alors $z(t) = N_0 - x(t) - y(t)$ et le problème se réduit à la recherche de x et y qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -\beta\, x(t)\, y(t) \\ y'(t) = (\beta\, x(t) - \gamma)\, y(t) \end{cases}$$

4. Les points d'équilibre de ce dernier système sont de la forme $(x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}_+$. À l'équilibre, on a donc $y = 0$, ce qui signifie que :

– le nombre de contagieux est nul,
– les nombres de sains et de guéris ne changent pas.

7.3 1. Le nombre $x(t)$ diminue pendant un intervalle de temps dt d'une quantité proportionnelle aux nombres $x(t)$ et $y(t)$ d'individus sains et contagieux pouvant être en contact et à la probabilité β de transmission de la maladie. En même temps, il augmente de la fraction $\delta\, z(t)$ des individus du troisième groupe qui perdent leur immunité.
Le nombre $y(t)$ d'individus contagieux varie comme dans l'exercice précédent.
Enfin, le nombre $z(t)$ d'individus immunisés augmente à la vitesse $\gamma\, y(t)$ pour ceux qui sortent de la maladie, mais diminue à la vitesse $\delta\, z(t)$ pour ceux qui redeviennent réceptifs.
On obtient ainsi le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & -\beta\, x(t)\, y(t) + \delta\, z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & \beta\, x(t)\, y(t) - \gamma\, y(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} & = & \gamma\, y(t) - \delta\, z(t) \end{cases}$$

2. Avec les valeurs indiquées pour les paramètres, on obtient les courbes suivantes :

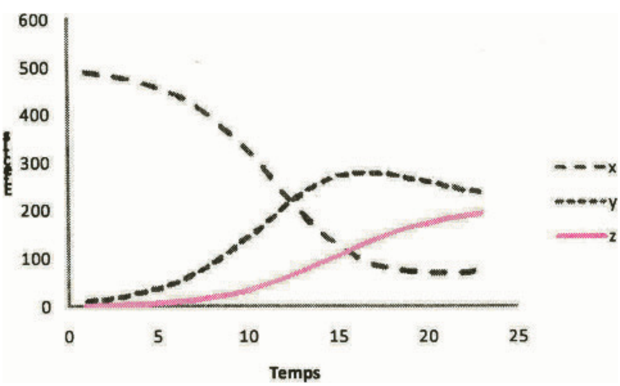


Figure 7.29

La proportion d'individus réceptifs augmente donc moins que dans le cas **a)** de l'exercice précédent.

7.4 1. Supposons que la première espèce soit absente, c'est-à-dire $x = 0$.

Dans ce cas, la fonction $(0, y(t))$ avec $y'(t) = (d - e\,y(t))y(t)$ est solution du système différentiel considéré.

Cette équation différentielle admet deux points singuliers $y_1 = 0$ et $y_2 = \frac{d}{e}\cdot$

Le linéarisé de cette équation en $y_1 = 0$ est $Y = dY$ et en y_2 : $Y = -dY$.
Comme $d > 0$, on en déduit que y_1 est un point d'équilibre instable et y_2 un point d'équilibre stable.
L'étude est la même pour $y = 0$.
2. En résolvant le système algébrique :

$$\begin{cases} a\,x - b\,x^2 - c\,x\,y = 0 \\ d\,y - e\,y^2 - f\,x\,y = 0 \end{cases}$$

on trouve quatre points d'équilibre :

$(0,0)$, $\left(0, \frac{d}{e}\right)$, $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, et $A = \left(\frac{ae - cd}{be \quad cf}, \frac{bd - af}{be \quad cf}\right)$ si $be - cf \neq 0$.

3. Avec les valeurs numériques de l'énoncé, le système devient :

$$\begin{cases} x'(t) = 0{,}5\,x(t) - 0{,}8\,x^2(t) - 0{,}3\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) = 0{,}2\,y(t) - 0{,}9\,y^2(t) - 0{,}2\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Le point d'équilibre à étudier est $A\left(\frac{0{,}65}{11}, \frac{1}{11}\right)$.

Le linéarisé du système différentiel au voisinage de A est obtenu en faisant le changement de variables :

$$X = x - \frac{0{,}65}{11} \quad ; \quad Y = y - \frac{1}{11}$$

en ne gardant que les termes de degré 1 dans le système obtenu, ce qui donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \dfrac{4{,}16}{11} X - \dfrac{0{,}195}{11} Y \\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{0{,}2}{11} X + \dfrac{0{,}27}{11} Y \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice associée est :

$$\lambda^2 - \frac{4,43}{11}\lambda + \frac{1,0842}{121}.$$

Le discriminant Δ est > 0 ; les valeurs propres sont donc réelles.

Le produit des racines est $\frac{1,0842}{121} > 0$; elles sont donc de même signe.

La somme des racines est $\frac{4,43}{11} > 0$; elles sont donc positives.

Le point A est donc un équilibre stable.

Pour d'autres valeurs des paramètres du modèle, le point A peut être un équilibre instable.
Dans ce cas, une petite perturbation éloigne de A et conduit à l'un des équilibres stables $\left(0, \frac{d}{e}\right)$ ou $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$. Il y a donc alors disparition d'une espèce.

Glossaire

Un peu d'histoire

• **Benjamin Gompertz** (1779-1865) est un mathématicien anglais londonien, membre de la Royal Society.

Il est surtout connu pour être l'auteur d'une loi de démographie, appelée loi de mortalité de Gompertz.

Cette loi est utilisée actuellement pour modéliser la croissance des tumeurs : pendant la première partie, la croissance est exponentielle, puis le taux relatif de croissance décroît exponentiellement avec le temps.

La courbe diffère de la courbe logistique par sa dissymétrie en raison du point d'inflexion situé plus tôt.

Son expertise sur l'espérance de vie et les tables de mortalité lui a valu une reconnaissance au plus haut niveau, notamment de la part du gouvernement britannique et du bureau de médecine de l'armée.

• **Pierre-François Verhulst** (1804-1849) est un mathématicien belge qui a occupé la première chaire d'analyse mathématique de l'École royale militaire de Belgique.

Il a étendu les travaux de Malthus aux cas où le développement d'une population est freiné par un facteur limitant. La croissance de la courbe, qu'il appelle logistique, est exponentielle jusqu'au point d'inflexion qui est centre de symétrie. Au-delà, la croissance est d'autant plus faible que l'effectif de la population est proche de son maximum.

Ses travaux ont été publiés entre 1838 et 1847 et lui ont permis de prévoir la population seuil de la Belgique. Ils tomberont dans l'oubli, avant d'être remis en lumière vers 1920 pour leur intérêt en chimie.

• **D'Arcy Thompson** (1860-1948) est un zoologiste diplômé de l'Université d'Oxford. Il a été professeur de biologie au Collège Universitaire de Dundee, puis d'histoire naturelle à l'Université de St-Andrew en Écosse. Il a été membre de la Société Royale d'Edimbourg en 1885 et de la Société Royale en 1916.

Il a traduit des auteurs grecs comme Aristote, mais il est passé à la postérité avec son livre *On growth and form* paru en 1917 et réactualisé en 1942.

Dans cet ouvrage, il développe une approche mathématique, essentiellement géométrique, de lois de croissance des organismes.

On lui doit notamment l'application de la suite de Fibonacci à la phyllotaxie (étude de la disposition des feuilles sur un axe). En ce sens, il a été le premier biomathématicien, si l'on excepte les aspects des mathématiques portant sur la dynamique des populations développés par Malthus, Gompertz et Verhulst.

• Brève histoire des matrices de Leslie

Le recours aux matrices pour étudier l'évolution des populations remonte aux années 1940 avec les travaux de Bernardelli (1941), de Lewis(1942) et de Leslie (1945 et 1948).

La méthode s'est par la suite diversifiée avec les contributions de Léonard Lefkovitch (1965) qui a remplacé les classes d'âge par les stades de développement, puis de Usher (1966) qui a classifié la population selon les tailles…

Le premier exemple que Leslie a traité concerne les rongeurs qui ont un cycle de reproduction de trois ans (*cf.* exercice 5.9).

Des concepts de base

• Dynamique des populations

Sur le plan biologique, une population est un groupe d'animaux, de plantes, de micro-organismes ou autres êtres vivants d'une même espèce qui vivent dans un espace arbitrairement délimité.

La question fondamentale à laquelle s'intéresse la dynamique des populations est l'évolution dans l'espace et le temps de leurs effectifs.

Pour répondre à cette question, on utilise des mesures expérimentales ou d'observation portant sur la natalité et la mortalité, les migrations, les classes d'âge, la fécondité, l'alimentation, la prédation…

Selon le caractère, la périodicité et la précision des mesures prises, on utilise telle ou telle démarche (déterministe ou aléatoire) ou tel ou tel modèle mathématique (continu ou discret).

Ainsi, les matrices de Leslie relèvent d'une démarche déterministe et le modèle qui en résulte est discret puisque le temps y est subdivisé en intervalles égaux (jours, années…). Le modèle de Verhulst vu au chapitre 3 est déterministe et continu.

La démarche aléatoire apparaît lorsque les événements mesurés sont entachés d'incertitude (mesures fluctuantes selon les individus), ou lorsque la population est inaccessible dans sa totalité (poissons dans l'océan, bactéries dans un milieu confiné…).

• Épidémiologie

C'est la science qui se rapporte à l'étude de la répartition, de la fréquence et de la gravité des états pathologiques dans les populations humaines ou animales.
Par exemple, on peut chercher à comparer la fréquence d'une maladie au sein d'un groupe d'individus exposés à un agent suspect à celle d'un groupe d'individus non exposés.

• Modélisation

Modéliser un phénomène expérimental, c'est le représenter de façon simplifiée. On utilise souvent des représentations mathématiques, des équations avec des fonctions ou des suites.
Mais d'autres outils sont possibles. Par exemple, on a utilisé dans le passé des maquettes pour étudier le régime fluvial d'un fleuve et ses affluents.
Avant d'utiliser un modèle, il faut vérifier qu'il correspond assez bien à la réalité, dans un certain domaine de validité (à ne pas confondre avec le domaine de définition d'une expression mathématique).
On se sert alors du modèle pour pronostiquer des comportements, des évolutions de populations, des réponses à des situations possibles.
Par exemple, si on a modélisé le régime d'un fleuve, on peut répondre à des questions du type :

– que se passerait-il si on construisait un barrage ?
– que se passerait-il si une prochaine année était très humide ou très sèche ?
– que se passerait-il si on développait telle culture ?

Il vaut mieux avoir un outil pour anticiper une décision.

• Système proie-prédateur ou hôte-parasite

C'est un système dans lequel il y a interaction entre deux espèces dont l'une a une forte spécificité sur l'autre. Ce système est constitué, soit d'un prédateur qui ne se nourrit que d'une proie, soit d'un parasite qui ne colonise qu'un hôte.
En ce qui concerne le prédateur, la situation est peu fréquente dans la nature : le plus souvent, le prédateur exerce ses talents sur plusieurs proies.
Par contre, cette situation est plus fréquente pour le parasite.

• Temps continu ou temps discret

– On considère le temps comme une grandeur continue lorsque la reproduction se fait de façon régulière, avec souvent des générations qui se chevauchent.

Exemples : l'espèce humaine, les souris, les bactéries…
On modélise alors en utilisant des fonctions, des équations différentielles.
– On considère le temps comme une grandeur discrète (valeurs possibles isolées) lorsqu'il existe une saison de reproduction, les générations pouvant être séparées ou non.
Exemples : les chèvres, les cerfs, les oiseaux de nos régions…
On modélise alors en utilisant des suites, des suites récurrentes.

Index

MINI MANUEL

Driss BOULARAS
Daniel FREDON
Daniel PETIT

Mini Manuel de Mathématiques
pour les sciences de la vie et de l'environnement

Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les démarches avant de les mettre en application ?

Conçus pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, les Mini Manuels proposent **un cours concis et richement illustré** pour vous accompagner jusqu'à l'examen. Des **exemples**, des **mises en garde** et des méthodes pour éviter les pièges et connaître les astuces, ainsi que des **exercices tous corrigés** complètent le cours.

Cet ouvrage couvre le programme d'enseignement des mathématiques en Licence 1 et 2 de Sciences de la Vie et en PCEM1, sous la forme d'un cours concis, suivi d'exercices appliqués aux sciences de la vie et de l'environnement et d'annales du concours PCEM corrigées.

Contenu :
• Fonctions d'une variable réelle • Équations différentielles • Suites réelles • Fondements du calcul matriciel • Réduction des matrices • Fonctions de plusieurs variables • Systèmes différentiels.

DRISS BOULARAS
Maître de conférences
en mathématiques
à l'université de Limoges.

DANIEL FREDON
Ancien maître
de conférences
en mathématiques
à l'université de Limoges.

DANIEL PETIT
Maître de conférences
en biologie des populations
à l'université de Limoges.

Public :
- **L1/L2**
- **PCEM1**
- **PH1**

ISBN 978-2-10-054271-0

DUNOD
www.dunod.com