

**INTERROS**

*de Prépas & Deug*

**biblio-scientifique.com**

**MP-PC-PSI**  
**SPÉ**

**Électromagnétisme  
Physique des Ondes**

*Olivier Chenevez*

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure*

Collection dirigée par **Éric MAURETTE**

*Du même auteur, aux Éditions PRÉPAMATH,  
dans la collection «Interros de Prépas et Deug» :*

Mécanique des Systèmes & Mécanique des Fluides – Spé MP-PC-PSI



*Toute ma gratitude à Éric CHENEVEZ, élève à l'École Nationale  
Supérieure des Mines de Paris et dessinateur hors pair de l'inté-  
gralité des figures qui illustrent ce manuel.*

*Je remercie également pour leur précieuse contribution  
Gilbert DE MARÉSCHAL, ancien élève de l'ENS de la rue d'Ulm et  
Cyriaque CHOLET, professeur de physique en classe préparatoire.*



*Coordination éditoriale :*  
Nassim MOKRANE

**biblio-scientifique.com**

I.S.B.N. 2-910350-27-4  
© 1999, PRÉPAMATH Éditions

# Avant-propos

Ce manuel s'adresse à tous les élèves de Math Spé, quelle que soit leur filière (MP, PC, PSI). Il traite des nouveaux programmes de physique tels qu'il ont été fixés dans le Bulletin de l'Éducation Nationale du 18 juillet 1996.

En électromagnétisme, l'*électrostatique*, la *magnétostatique*, l'*électrocinétique* et l'*induction* sont au programme de toutes les filières. Le chapitre sur l'*équilibre électrostatique d'un conducteur* ne s'adresse qu'aux MP et celui sur la *conversion électromagnétique et électromécanique* aux PSI exclusivement.

En physique des ondes, seules les *ondes électromagnétiques dans le vide* concernent les MP. L'intégralité de cette partie est au programme des PC et PSI.

Par souci d'efficacité, l'ouvrage se concentre exclusivement sur des sujets posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques (E.N.S., Polytechnique, concours commun des Mines, Centrale, E.N.S.I.). Par exigence de qualité, il propose un cours approfondi et détaillé plutôt qu'un simple rappel, sans cesse en relation avec les exercices.

En marge du cours et en support des exercices sont intégrés des compléments de cours qui ne sont pas explicitement au programme. De mon point de vue, ils contribuent à une compréhension plus en profondeur des phénomènes physiques étudiés. Pourvu qu'on s'y arrête un peu, ils aideront à éclairer certaines notions du programme.

Les parties cours et exercices ne sont pas faites pour être cloisonnées. Le cours n'a pas seulement pour vocation de précéder la réflexion sur l'exercice. Il doit aussi en accompagner la résolution. L'un et l'autre se répondent : les exercices font explicitement référence au cours et doivent aider à mieux à le comprendre ; réciproquement, les concepts du cours, lorsqu'ils sont compris en profondeur, aident à la résolution de problèmes plus ponctuels. L'intelligence des notions de physique exige de s'y arrêter quelque temps jusqu'à percevoir la logique du cours dans sa globalité. Chaque notion s'intègre dans une logique générale, qu'il faut faire l'effort de percevoir.

J'ai opté pour une présentation thématique des exercices. Les programmes traités sont clairement mentionnés (MP, PC, PSI). Ils ont tous, sans exception, été posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques. Ils sont sélectionnés pour leur complémentarité et pour leur capacité à illustrer au mieux les concepts de physique au programme. Leur résolution est la plus détaillée possible. Plutôt que de multiplier les exercices, j'ai choisi de préciser les solutions, avec méthode. D'expérience de khôlleur, d'enseignant et d'ancien préparateur, il m'apparaît en effet beaucoup plus efficace d'approfondir quelques exercices bien sélectionnés. À condition de suivre la ligne de l'ouvrage : cours, exercices et compléments doivent rester en dialogue permanent.

# Sommaire

pages

<b>I. ÉLECTROMAGNÉTISME.....</b>	<b>I</b>
<b>Chapitre 1. Introduction.....</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 2. Lois fondamentales de         l'électromagnétisme .....</b>	<b>3</b>
1. Densité de charge, densité de courant .....	5
2. Équations de Maxwell dans le vide .....	10
3. Énergie électromagnétique.....	13
<b>Chapitre 3. Électrostatique dans le vide.....</b>	<b>17</b>
1. Propriétés générales.....	17
2. Dipôle électrique.....	29
3. Énergie électrostatique .....	35
<b>Chapitre 4. Compléments d'électrostatique .....</b>	<b>41</b>
1. Autre méthode de détermination de l'énergie de constitution .....	41
2. Localisation de l'énergie de constitution .....	42
3. Pression électrostatique.....	43
<b>Chapitre 5. Exercices d'électrostatique.....</b>	<b>47</b>
1. Disque chargé en surface .....	47
2. Fil infini rectiligne et antisymétriquement chargé.....	51
3. Segment de fil uniformément chargé.....	55
4. Boule uniformément chargée .....	59
5. Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène .....	63
6. Distribution volumique des charges.....	69
7. Distribution quelconque des charges .....	73
8. Sphère non uniformément chargée en surface .....	76
<b>Chapitre 6. Équilibre électrostatique d'un conducteur..</b>	<b>81</b>
1. Définition .....	81
2. Propriétés d'un conducteur en équilibre.....	81
3. Condensateur .....	85
<b>Chapitre 7. Exercices sur les conducteurs.....</b>	<b>91</b>
1. Sphères conductrices en contact .....	91
2. Force exercée par un conducteur sur un autre .....	94
3. Sphère conductrice placée dans un champ uniforme.....	97
4. Dipôle électrique placé au dessus d'un conducteur plan .....	100
5. Sphère conductrice au voisinage d'une charge ponctuelle .....	104
6. Sphère conductrice creuse au voisinage d'une charge ponctuelle.....	110
7. Charge au dessus d'une calotte sphérique.....	102
8. Conducteur en rotation dans un référentiel galiléen .....	116
9. Capacité d'un conducteur ellipsoïde .....	119
10. Condensateurs simples.....	121
11. Autres exemples de calculs de capacités .....	125

# Sommaire

pages

## Chapitre 8. Électrocinétique des courants continus .. 137

1. Loi d'Ohm.....	137
2. Densité de la puissance dissipée par effet Joule .....	139
3. Champ électromoteur et générateur de tension .....	140
4. Résistance d'un récepteur passif.....	142
5. Loi d'Ohm dans un générateur .....	146
6. Loi d'Ohm dans un récepteur.....	148
7. Bilan énergétique dans un circuit .....	149

## Chapitre 9. Magnétostatique dans le vide ..... 151

1. Propriétés générales de magnétostatique .....	151
2. Dipôle magnétique.....	163
3. Effet Hall.....	168
4. Coefficient d'inductance .....	169

## Chapitre 10. Compléments de magnétostatique..... 171

1. Interaction entre deux circuits filiformes.....	171
2. Formule de Newmann.....	173
3. Énergie de déplacement d'un circuit .....	175
4. Généralisation .....	180

## Chapitre 11. Exercices de magnétostatique ..... 183

1. Exemples simples.....	183
2. Solénoïde torique .....	191
3. Mutuelle entre deux spires .....	194
4. Champ créé par une nappe cylindrique infinie.....	196
5. Champ créé par un circuit elliptique en ses foyers.....	198
6. Distribution volumique non uniforme de courant.....	199
7. Câble coaxial .....	201
8. Dipôle et circuit rectiligne.....	204
9. Champ au voisinage du centre d'une spire .....	206
10. Dipôle magnétique au dessus d'un supraconducteur.....	208

## Chapitre 12. Induction électromagnétique dans le cadre de l'AEQS ..... 215

1. Approximation des états quasi-stationnaires.....	215
2. Champ électrique .....	216
3. Champ électromoteur .....	217
4. Loi de Faraday et loi de Lenz .....	220
5. Énergie de constitution électromagnétique .....	223

## Chapitre 13. Compléments d'induction..... 229

1. Roue de Barlow.....	229
2. Conducteur parfait en électromagnétisme .....	232
3. Énergie de constitution d'une distribution volumique de courant.....	233
4. Valeur maximale d'une mutuelle.....	235

# Sommaire

pages

5. Forces magnétiques agissant sur un circuit.....	236
6. Puissance électromagnétique exercée sur un circuit .....	239
7. Énergie potentielle électromagnétique .....	241
8. Énergie de constitution de deux distributions.....	243
9. Analogie entre les énergies magnétiques et électrostatiques.....	244

## **Chapitre 14. Exercices d'induction ..... 245**

1. Déplacement d'un cadre dans un champ extérieur.....	245
2. Force électromotrice induite dans une spire.....	247
3. Mouvement relatif de deux tiges.....	249
4. Mouvement d'une barre.....	252
5. Circuit électrique fermé par une barre métallique mobile.....	255
6. Spire en rotation dans un champ uniforme .....	258
7. Dipôle magnétique au dessus d'une spire .....	261
8. L'expérience de Feynman .....	264
9. Circuit électrique contenant deux roues de Barlow .....	266
10. Circuit constitué d'une spire reliée à une roue de Barlow .....	271
11. Petit disque en lévitation au dessus d'un solénoïde.....	277
12. Fil infini au dessus d'un conducteur parfait .....	281
13. Sphère conductrice placée dans un champ oscillant .....	287
14. Cylindre conducteur placée dans un champ magnétique oscillant... ..	289
15. Cylindre conducteur en rotation dans champ magnétique uniforme. ....	291
16. Cylindre conducteur fixe dans un champ tournant.....	294
17. Dipôle dans la cavité cylindrique d'un conducteur .....	298
18. Décharge d'une sphère chargée en surface.....	301

## **Chapitre 15. Conversion électromagnétique et électromécanique ..... 305**

1. Transformateur monophasé.....	305
2. Conversion électromécanique. Exemple des rails de Laplace .....	310
3. Les moteurs électriques .....	313
4. Les générateurs tournants .....	317
5. Étude détaillée d'un moteur asynchrone .....	318

## **II. PHYSIQUE DES ONDES..... 323**

### **Chapitre 1. Introduction ..... 325**

### **Chapitre 2. Concepts généraux sur les ondes..... 327**

1. Équations de propagation .....	327
2. Polarisation d'une onde vectorielle .....	328
3. Solution de l'équation de d'Alembert.....	328
4. Généralisation aux équations de propagation.....	333
5. Paquet d'ondes.....	336

# Sommaire

pages

## **Chapitre 3. Ondes mécaniques ..... 339**

- 1. Milieux continus ..... 339
- 2. Oscillateurs couplés ..... 368

## **Chapitre 4. Ondes sonores ..... 399**

- 1. Ondes acoustiques dans un fluide parfait ..... 399
- 2. ondes sonores sphériques ..... 413
- 3. Ondes sonores dans un tuyau de section variable ..... 416
- 4. Ondes sonores dans un tuyau souple ..... 420
- 5. Absorption du son ..... 423

## **Chapitre 5. Lignes électriques ..... 435**

- 1. Introduction ..... 435
- 2. Ondes stationnaires dans une ligne ..... 436
- 3. Propagation sur une ligne avec perte ..... 440

## **Chapitre 6. Ondes électromagnétiques dans le vide. . 443**

- 1. Retour sur l'AEQS ..... 443
- 2. Équation de propagation des champs et des potentiels ..... 443
- 3. Ondes planes ..... 447
- 4. Retour sur l'énergie électromagnétique ..... 452

## **Chapitre 7. Exercices sur les ondes électro- magnétiques dans le vide ..... 455**

- 1. Onde progressive non plane ..... 455
- 2. Superposition de deux OPPHs ..... 460
- 3. Guide d'onde plan ..... 464
- 4. Guide d'onde cylindrique ..... 467
- 5. Modes dans une cavité conductrice ..... 469
- 6. Rayonnement d'un dipôle ..... 473
- 7. Rayonnement d'un dipôle tournant ..... 480
- 8. Effet de peau dans un fil conducteur ..... 485
- 9. Mode propre d'un plasma ..... 488
- 10. Excitation d'un conducteur par une OPPH en incidence normale ... 491
- 11. Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait ..... 497
- 12. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un conducteur ..... 500
- 13. Onde électromagnétique dans un supraconducteur ..... 507
- 14. Énergie électromagnétique stockée dans un condensateur ..... 510
- 15. Rayonnement d'une distribution dipolaire oscillante ..... 513

## **Chapitre 8. Ondes électromagnétiques dans les milieux ..... 519**

- 1. Introduction aux milieux diélectriques ..... 519
- 2. Introduction aux milieux aimantés ..... 528
- 3. Équation de Maxwell dans un milieu diélectrique et aimanté ..... 535
- 4. Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques linéaires et isotropes 536

# Sommaire

pages

## **Chapitre 9. Compléments sur les ondes électro-magnétiques dans les milieux..... 545**

- 1. Charges de polarisation ..... 545
- 2. Courants équivalents ..... 547

## **Chapitre 10. Exercices sur les ondes électro-magnétiques dans les milieux ..... 549**

- 1. Interaction entre deux circuits filiformes ..... 549
- 2. Formule de Newmann ..... 558
- 3. Énergie de déplacement d'un circuit ..... 561
- 4. Généralisation ..... 564
- 5. Énergie de déplacement d'un circuit ..... 570
- 6. Généralisation ..... 572

## **III. ANNEXES ..... 581**

### **Chapitre 1. Quelques unités ..... 583**

### **Chapitre 2. Constantes physiques..... 585**

### **Chapitre 3. Opérateurs différentiels ..... 587**

- Coordonnées cartésiennes..... 587
- Coordonnées cylindriques ..... 588
- Coordonnées sphériques ..... 589

### **Chapitre 4. Relations utiles..... 591**

- Relations différentielles..... 591
- Relations intégrales..... 591
- Autres relations ..... 592



**Première partie**

**Electromagnétisme**



# Chapitre 1

## Introduction

### L'interaction électromagnétique, une interaction parmi d'autres

La nature est régie par quatre types d'interactions, l'interaction gravitationnelle qui nous est la plus familière, l'interaction électromagnétique et les interactions nucléaires faible et forte.

Les deux interactions nucléaires ont une portée très courte, de l'ordre du Fermi ( $1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$ , ordre de grandeur des dimensions d'un noyau).

- L'*interaction forte* assure la cohésion des noyaux atomiques en soudant entre eux neutrons et protons. Son intensité est très élevée, beaucoup plus élevée que celle de l'interaction électromagnétique qui tend au contraire à éloigner deux protons l'un de l'autre. Mais son effet devient négligeable sur des distances supérieures aux dimensions caractéristiques du noyau atomique.
- L'*interaction faible* se manifeste entre certaines particules non chargées, de masse nulle et insensibles à l'interaction forte. Son intensité est si faible que ces éléments peuvent traverser plusieurs mètres de tôle sans être déviés. C'est cette interaction qui est responsable de la désintégration des noyaux d'atomes (phénomène de radioactivité).

Quant aux interactions électromagnétique et gravitationnelle, elles sont de longue portée.

- A l'échelle de l'atome, l'*interaction électromagnétique* domine largement. Elle assure la cohésion du nuage atomique autour du noyau. Au niveau microscopique, la masse des particules est si faible que l'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électromagnétique.
- A l'échelle macroscopique en revanche (vous, moi, la lune...), comme la nature est globalement neutre, la *gravitation* devient l'interaction dominante. Les masses en jeu sont telles que cette interaction a en outre une intensité très élevée. Non contente de nous retenir sur la Terre, elle maintient les planètes en rotation autour du Soleil et regroupe les quelques cent milliards d'étoiles de la Voie lactée.

A chaque interaction son domaine de prédilection. L'interaction forte domine à l'échelle nucléaire et assure la cohésion du noyau atomique. A l'échelle moléculaire, c'est l'interaction électromagnétique qui prend le dessus pour assurer la cohésion de la matière. Elle est relayée à l'échelle macroscopique par l'interaction gravitationnelle qui, elle, assure la cohésion de l'univers.

## Les champs électromagnétiques

Une distribution de particules chargées *au repos* dans un référentiel galiléen exerce sur une charge  $q$  placée en un point  $M$  une *force électrostatique*  $\vec{F}$  proportionnelle à  $q$  :

$$\vec{F} = q\vec{E}_s(M)$$

Le champ de vecteur  $\vec{E}_s(M)$  ainsi défini est indépendant de la charge électrique  $q$ . Il ne dépend que de la distribution de particules chargées et s'avère analogue au champ gravitationnel. On l'appelle *champ électrostatique* et, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un champ  $\vec{E}_s(M)$  dans tout l'espace.

Une distribution de particules chargées *en mouvement* dans un référentiel galiléen exerce sur une particule de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$  dans ce même référentiel et placée en un point  $M$  une *force électromagnétique*  $\vec{F}$  proportionnelle à  $q$  :

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M)]$$

Les champs de vecteur  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{B}(M)$  ainsi définis sont indépendants de la charge  $q$ . Il ne dépendent, eux aussi, que de la distribution de particules chargées. On les appelle respectivement *champ électrique* et *champ magnétique*. L'ensemble de ces deux champs constitue le *champ électromagnétique*. Si le mouvement de la charge  $q$  s'arrêtait, le champ électrique tendrait vers le champ électrostatique et le champ magnétique s'annulerait. Ici aussi, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un *champ électromagnétique*  $(\vec{E}, \vec{B})$  dans tout l'espace.

Les deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne dépendent que des charges et des vitesses de l'ensemble des particules qui les créent. Ils vérifient quatre équations différentielles fonctions de ces charges et de ces vitesses, les *équations de Maxwell*. Ce sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme.

## Chapitre 2

# Lois fondamentales de l'électromagnétisme

### 2.1 Densité de charge, densité de courant

#### 2.1.1 Définitions

##### Densité volumique de charge

La charge électrique d'une particule élémentaire est indépendante de sa vitesse et du référentiel choisi pour décrire son mouvement. C'est une donnée qui lui est intrinsèque. Notons  $d^3q$  la quantité totale de charge située dans le volume élémentaire  $d^3\tau$  situé autour du point  $M$  à l'instant  $t$ . On définit la *densité volumique de charge*  $\rho(M, t)$  en  $M$  à l'instant  $t$  de la façon suivante :

$$\rho(M, t) = \frac{d^3q}{d^3\tau}$$

$\rho$  est une quantité de charge par unité de volume. C'est une charge volumique, l'analogue pour les charges électriques de la masse volumique.

##### Densité volumique de courant

##### Même vitesse pour toutes les charges

Lorsque les charges situées dans le volume  $d^3\tau$  ont toutes la même vitesse  $\vec{v}(M, t)$  à l'instant  $t$ , le *courant de charge*  $d^2I$  qui passe à travers la surface élémentaire  $d^2S$  parallèle à  $\vec{v}$  est la quantité de charge qui traverse cette surface par unité de temps, c'est-à-dire le flux de charge à travers  $d^2S$ .

La *densité volumique de courant*  $\vec{j}(M, t)$  en  $M$  et à l'instant  $t$  est le vecteur colinéaire à  $\vec{v}$  défini de la façon suivante :

$$d^2I = \vec{j}(M, t) \cdot d^2\vec{S}$$

D'où

$$\vec{j}(M, t) = \rho_v(M, t)\vec{v}(M, t)$$

où  $\rho_v(M, t)$  représente la *densité de charge en mouvement* à la vitesse  $\vec{v}$ .

$\vec{j}$  représente donc le flux de charge par unité de surface perpendiculaire à la vitesse des charges. C'est l'analogue pour les charges de la quantité de mouvement volumique  $\mu\vec{v}$ .

### Une seule espèce de charge

Lorsque les charges sont de même espèce mais ont des vitesses différentes, l'expression précédente devient

$$\vec{j}(M, t) = \rho_v(M, t) \langle \vec{v} \rangle (M, t)$$

où  $\langle \vec{v} \rangle (M, t)$  représente la vitesse moyenne des charges situées en  $M$  à l'instant  $t$ .

### Deux espèces

La densité de charge en mouvement  $\rho_v(M, t)$  n'est pas forcément égale à la densité volumique de charge du milieu  $\rho(M, t)$ . Dans un conducteur métallique par exemple, les électrons se déplacent quasiment librement alors que les charges positives (noyaux des atomes) sont fixes par rapport au support. La vitesse moyenne de ces ions, notée  $\vec{v}_{ion}$ , est nulle. Le courant est donc assuré uniquement par les électrons :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec}$$

et, comme la charge volumique totale d'un conducteur est généralement nulle,

$$\rho = \rho_{elec} + \rho_{ion} \simeq 0$$

Si, par contre, les ions sont eux aussi en mouvement, la densité de courant devient :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec} + \rho_{ion}\vec{v}_{ion}$$

### Cas général

Lorsque plusieurs espèces  $i$  de densité de charge  $\rho_i(M, t)$  et de vitesse moyenne  $\vec{v}_i(M, t)$  à l'instant  $t$  sont présentes dans le milieu, les densités de courant et de charge s'écrivent respectivement :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$$

et

$$\rho(M, t) = \sum_i \rho_i(M, t)$$

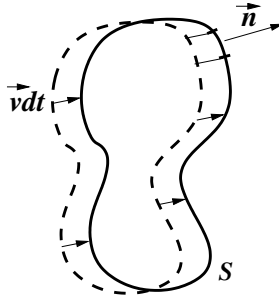
## 2.1.2 Equation de conservation de la charge

### Une seule espèce de charge

Soit  $V$  un volume de contrôle fixe et quelconque tracé dans un milieu de charge volumique  $\rho(M, t)$  de vitesse  $\vec{v}(M, t)$ . La charge électrique est une quantité qui se conserve. Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , la variation  $dQ$  de la quantité de charge  $Q$  située à l'intérieur de  $V$  est donc égale à la quantité de charge qui entre dans  $V$  pendant  $dt$  :

$$dQ = \iint_S \rho(M, t)(-\vec{v}(M, t)dt \cdot \vec{n}) d^2S$$

où  $S$  représente la surface fermée qui entoure  $V$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface  $S$  et dirigé vers l'extérieur.



En divisant par  $dt$ , on obtient

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_S \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} d^2S$$

Comme  $V$  est un volume de contrôle fixe,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(M, t) d^3\tau = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\tau$$

D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d^2S = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) d^3\tau$$

D'où

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d^3\tau = 0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume  $V$ , on en déduit que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Soit

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

### Cas général

Lorsque plusieurs espèces  $i$  sont présentes dans le milieu, la relation de conservation précédente reste valable pour chacune des espèces  $i$  :

$$\operatorname{div}(\rho_i \vec{v}_i) + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0$$

En sommant ces égalités sur  $i$ , il vient :

$$\operatorname{div}\left(\sum_i \rho_i \vec{v}_i\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_i \rho_i\right) = 0$$

Soit

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

### Régime stationnaire

Lorsque le régime est stationnaire,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Dans ce cas, l'équation de conservation de la charge devient

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Intégrons cette relation sur un volume de contrôle  $V$  quelconque :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\tau = 0$$

Notons  $S$  la surface qui entoure  $V$ . D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\tau = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S$$

où  $\vec{n}$  représente le vecteur unitaire normal à la surface  $S$  et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur. On en déduit que

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S = 0$$

En régime stationnaire, la densité de courant est donc à flux conservatif.

### Loi des noeuds

Considérons en particulier un noeud  $O$  quelconque dans un circuit. On note  $I_i$  le courant qui parcourt de  $O$  vers le reste du circuit le fil  $i$  de section  $S_i$ . L'expression précédente devient

$$\sum_i \iint_{S_i} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S = 0$$

On en déduit la *loi des noeuds* :

$$\boxed{\sum_i I_i = 0}$$

Dans cette expression, les courants sont algébriques. Ils sont positifs lorsqu'ils quittent le noeud et négatifs sinon.

La loi des noeuds affirme donc que la somme des courants qui arrivent en un point quelconque d'un circuit électrique est égale à la somme des courants qui le quittent.

La loi des noeuds n'est valable que lorsque le régime est stationnaire ou le terme  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  négligeable. Ce n'est pas toujours le cas.



### 2.1.3 Densités surfaciques, densités linéiques

#### Densités surfaciques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés dans un volume infiniment mince constitué par une pellicule de très faible épaisseur, on modélise leur distribution par une *nappe de charge ou de courant d'épaisseur nulle*.

Notons  $d^2q$  la charge d'un élément de surface  $d^2S$  de cette nappe. On définit la *densité surfacique de charges*  $\sigma$  (charge par unité de surface) de la façon suivante :

$$\sigma(M, t) = \frac{d^2q}{d^2S}$$

Si  $h$  représente l'épaisseur réelle de la nappe et  $\langle \rho \rangle_h$  sa densité volumique de charge moyennée sur l'épaisseur de la nappe, alors  $d^2q = \langle \rho \rangle_h (hd^2S)$ . D'où

$$\sigma = h \langle \rho \rangle_h$$

Notons  $dI$  le courant qui traverse un segment  $\vec{dl}$  de cette surface. On définit la *densité surfacique de courant*  $\vec{j}_s$  comme suit :

$$dI = \vec{j}_s \cdot \vec{dl}$$

Comme, par ailleurs,  $dI = \langle \vec{j} \rangle_h \cdot (h\vec{dl})$ , on en déduit que :

$$\vec{j}_s = h \langle \vec{j} \rangle_h$$

#### Densités linéiques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés sur une courbe ou dans un tube de section infiniment faible, on modélise leur distribution par une *ligne chargée ou une ligne de courant de section nulle*.

Notons  $dq$  la charge d'un élément de longueur  $dl$  de cette ligne chargée. On définit la *densité linéique de charge*  $\lambda$  (charge par unité de longueur) de la façon suivante :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Si on note  $s$  la section réelle du tube et  $\langle \rho \rangle_s$  la densité de charge moyennée sur cette section, alors  $dq = \langle \rho \rangle_s (sdl)$ . D'où

$$\lambda = s \langle \rho \rangle_s$$

La *densité linéique de courant* n'est autre que le courant  $I = s \langle j \rangle_s$  qui passe à travers le tube.

#### Remarque importante

Insistons bien sur le fait que les distributions surfaciques et linéiques ne sont que des modèles qui facilitent le calcul des champs qu'elles créent. Elles n'ont en effet rien de réel. Nous verrons dans la suite que le champ électrostatique et le champ magnétique sont discontinus à la traversée d'une distribution surfacique. *On ne peut donc pas définir de champ sur cette surface*. Pour calculer la force électromagnétique qui s'exerce sur une telle distribution, il convient de revenir à la distribution volumique réelle.

## 2.2 Equations de Maxwell dans le vide

Les champs électriques et magnétiques qui permettent de déterminer les forces électromagnétiques vérifient quatre équations différentielles fonctions des densités volumiques de charge et de courant qui créent ces champs. Ce sont les *équations de Maxwell*.

En électromagnétisme, le mouvement des charges peut induire des forces qui *dependent non seulement de la position de la particule chargée* sur laquelle s'appliquent ces forces *mais aussi de sa vitesse* via le champ magnétique. Les équations de Maxwell sont donc plus compliquées qu'en gravitation. Nous constaterons cependant qu'au repos, les équations vérifiées par le champ électrostatique sont analogues à celles que vérifie le champ gravitationnel.

### 2.2.1 Enoncé

- $\vec{E}$  : champ électrique
- $\vec{B}$  : champ magnétique
- $\rho$  : densité volumique de charge
- $\vec{j}$  : densité volumique de courant
- $\varepsilon_0$  : permittivité électrique
- $\mu_0$  : permittivité magnétique
- $c$  : vitesse de la lumière

[biblio-scientifique.com](http://biblio-scientifique.com)

Dans un milieu *non magnétique et non diélectrique* (mêmes caractéristiques que le vide), les équations de Maxwell ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

On supposera que lorsque les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$  sont données, la solution  $(\vec{E}, \vec{B})$  de ce système d'équation est *unique*. Par conséquent, lorsque deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient ce système d'équations, ce sont les champs électriques et magnétiques réels créés par la distribution de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ .

Les deux équations  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$  sont indépendantes de  $\rho$  et de  $\vec{j}$ . Elles établissent des relations sur  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .