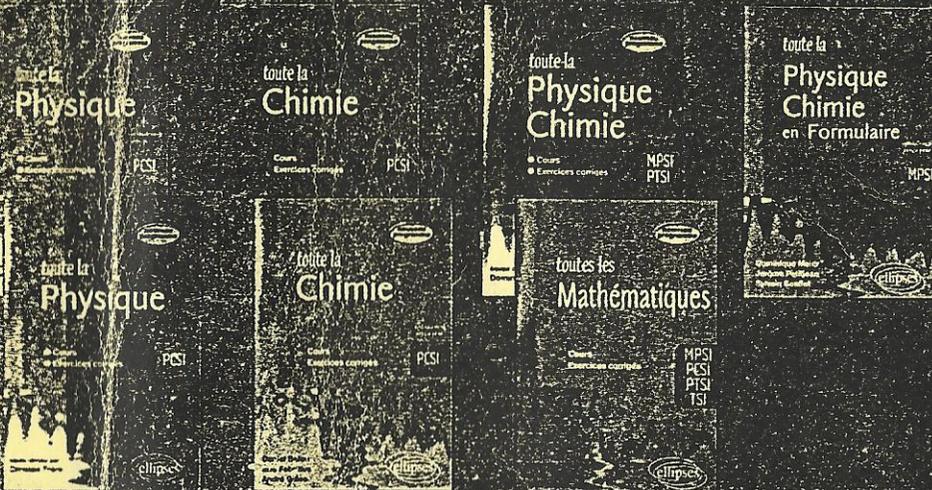
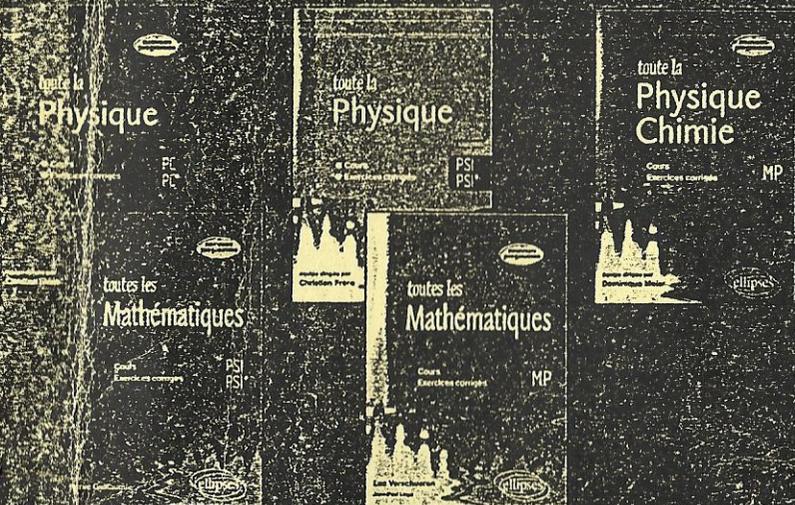


Pour les CPGE scientifiques, la collection qui couvre l'intégralité du programme :

**1<sup>re</sup> année : PCSI, MPSI, PTSI, TSI**



**2<sup>e</sup> année : PC, PC\*, PSI, PSI\*, MP**



08PHC/2/97827298-3790-7  
231.30 DH



www.editions-ellipses.fr

toute la Physique Chimie en Formulaire

# toute la Physique Chimie en Formulaire

Rappels MPSI

spécialement  
conçu pour

## bibliothèque électronique des classes prepa

MP-MP\*

Dominique Meier



*2.12.08*

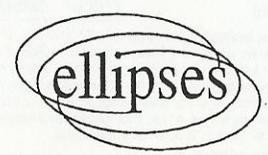
# toute la Physique-Chimie en Formulaire

MP-MP\*

Dominique Meier



Illustrations et dessins de Sat



CE LIVRE EST EN VENTE  
à la Librairie Livre Service  
2007 - 2008  
032 26 70 72 / 22 47 30 89  
32 29 95 42 - CASMEL/INCA

Dans la même collection :

- Chimie PCSI - 1<sup>re</sup> période
- Chimie PCSI - 2<sup>e</sup> période
- Physique PCSI - 1<sup>re</sup> période
- Physique PCSI - 2<sup>e</sup> période
- Physique-Chimie MPSI-PTSI
- Physique-Chimie en Formulaire - MPSI
- Mathématiques MPSI-PTSI-PTSI-TSI

- Physique-Chimie MP
- Physique PC-PC\*
- Physique PSI-PSI\*
- Physique en Problèmes de synthèse - PC-PC\*-PSI-PSI\*
- Mathématiques MP
- Mathématiques PSI-PSI\*

Site Internet des ouvrages : [www.toutelaphysique.fr](http://www.toutelaphysique.fr)

ISBN 978-2-7298-3790-7

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2008  
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

## TABLE DES MATIÈRES

<b>OUTILS MATHÉMATIQUES</b> .....	<b>1</b>
1. Éléments d'analyse vectorielle .....	1
1.1. Coordonnées cartésiennes .....	1
1.2. Opérateurs différentiels et relations intégrales .....	1
1.3. Propriétés et relations entre opérateurs .....	2
1.4. Coordonnées cylindriques .....	2
1.5. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques .....	3
1.6. Coordonnées sphériques .....	4
1.7. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées sphériques .....	5
2. Relations intégrales .....	5
2.1. Définitions .....	5
2.2. Relations entre formulations intégrales .....	6
3. Notions d'analyse de Fourier .....	6
3.1. Généralités .....	6
3.2. Décompositions en série de Fourier de fonctions usuelles .....	7
4. Formules trigonométriques et hyperboliques .....	8
4.1. Définitions .....	8
4.2. Propriétés .....	8
5. Développements limités usuels au voisinage de 0 .....	9
6. Primitives usuelles .....	10
<b>DESCRIPTION DU MOUVEMENT ET PARAMÉTRAGE D'UN POINT</b> .....	<b>11</b>
1. Espace et temps d'un observateur .....	11
2. Vecteurs vitesse et accélération .....	11
<b>DYNAMIQUE DU POINT EN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN</b> .....	<b>13</b>
1. Définitions et lois de Newton .....	13
1.1. Masse inerte et masse grave. Quantité de mouvement .....	13
1.2. Première loi de Newton ou principe de l'inertie .....	13
1.3. Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique .....	13
1.4. Troisième loi de Newton ou principe des actions mutuelles .....	13
2. Lois de force .....	14
3. Puissance et travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique .....	15
3.1. Puissance d'une force .....	15
3.2. Travail d'une force .....	15
3.3. Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique .....	15
<b>PROBLÈMES À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ</b> .....	<b>16</b>
1. Énergie potentielle .....	16
1.1. Force conservative .....	16
1.2. Énergie potentielle .....	16
2. Exemples usuels d'énergies potentielle .....	17
3. Énergie mécanique. Intégrale première de l'énergie .....	17
3.1. Système conservatif .....	17
3.2. Intégrale première de l'énergie .....	17
4. Équilibres et stabilité .....	18
4.1. Recherche des positions d'équilibre .....	18
4.2. Stabilité des positions d'équilibre .....	18
4.3. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable .....	18
5. Approche du portrait de phase .....	19
5.1. Systèmes conservatifs .....	19
5.2. Systèmes dissipatifs .....	20

**OSCILLATEUR HARMONIQUE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ** ..... 21

1. Oscillateur harmonique ..... 21

1.1. Equation différentielle et solution générale..... 21

1.2. Conservation de l'énergie et equipartition de l'énergie..... 21

2. Oscillations libres d'un système linéaire soumis à un terme dissipatif de type visqueux ..... 22

3. Oscillations forcées d'un système linéaire soumis à un terme dissipatif de type visqueux ..... 23

3.1. Equation différentielle et réponse du système..... 23

3.2. Résonances du système..... 23

Résonance d'amplitude ..... 23

Réponse en vitesse. Résonance de vitesse ..... 24

Résonance de puissance ..... 24

4. Oscillations entretenues des systèmes du second ordre : cycle limite ..... 25

4.1. Régime transitoire ..... 25

4.2. Oscillateurs harmoniques en régime sinusoïdal forcé ..... 25

4.3. Oscillateurs paramétriques ..... 26

4.4. Oscillateurs auto-entretenus ..... 26

**THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE** ..... 27

1. Définitions et théorème du moment cinétique ..... 27

1.1. Définitions ..... 27

1.2. Théorème du moment cinétique..... 27

2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe ..... 27

**MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES CONSERVATIVES** ..... 28

1. Aspect cinématique des mouvements à force centrale ..... 28

2. Mouvements d'un point matériel dans un champ newtonien ..... 29

2.1. Lois de conservation ..... 29

2.2. Energie potentielle effective. Discussion qualitative du mouvement ..... 29

3. Trajectoires dans un champ de force newtonien ..... 30

3.1. Équation des trajectoires ..... 30

3.2. Les différentes trajectoires possibles ..... 30

4. Mouvement des planètes, lois de Képler ..... 32

4.1. Lois de Képler ..... 32

4.2. Vitesse de libération ou vitesses cosmiques ..... 32

4.3. Applications : satellite géostationnaire ..... 32

**CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS** ..... 32

1. Cinématique ..... 32

2. Dynamique et théorèmes ..... 34

2.1. Forces d'inertie..... 34

2.2. Énergie potentielle centrifuge ..... 34

2.3. Théorème de l'énergie cinétique ..... 34

3. Caractère galiléen approché de quelques référentiels usuels ..... 34

3.1. Le référentiel de Copernic ..... 34

3.2. Le référentiel héliocentrique..... 35

3.3. Référentiel géocentrique ..... 35

3.4. Référentiel terrestre local..... 35

3.5. Approximation du référentiel galiléen ..... 35

**SYSTÈME FORMÉ DE DEUX POINTS MATÉRIELS** ..... 36

1. Définitions ..... 36

1.1. Éléments cinétiques ..... 36

1.2. Centre d'inertie et référentiel barycentrique..... 36

2. Les théorèmes généraux ..... 36

2.1. Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique)..... 37

2.2. Théorème du moment cinétique..... 37

2.3. Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique ..... 37

3. Réduction du problème à deux corps ..... 38

3.1. Réduction à un problème à un corps..... 38

3.2. Lois de conservation ..... 39

**MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE POINTS ET DU SOLIDE** ..... 39

1. Cinématique d'un solide..... 39

1.1. Relation fondamentale de la cinématique du solide ..... 39

1.2. Axe de rotation d'un solide et mouvements d'un solide ..... 39

1.3. Roulement et glissement d'un solide ..... 40

2. Éléments cinétiques ..... 41

Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe..... 42

3. Référentiel barycentrique ..... 42

3.1. Propriétés ..... 42

3.2. Théorèmes de Koenig ..... 42

4. Les actions mécaniques ..... 43

5. Théorèmes de la mécanique des systèmes ..... 43

5.1. Théorème du centre de masse ..... 43

5.2. Théorème du moment cinétique..... 44

5.3. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe  $\Delta$  : ..... 44

5.4. Théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe..... 44

6. Théorème de l'énergie cinétique ..... 45

6.1. Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de points... 45

6.2. Expression de l'énergie cinétique et de la puissance pour un solide..... 45

7. Cas de plusieurs solides..... 46

8. Contact de deux solides ; lois de Coulomb ..... 46

8.1. Liaison rotule et liaison pivot, liaisons parfaites..... 46

8.2. Lois de Coulomb ..... 47

8.3. Puissance des actions de contact..... 47

**LOIS GÉNÉRALES DANS LE CADRE DE L'APPROXIMATION DES RÉGIMES QUASI-STATIONNAIRES** ..... 48

1. Lois générales dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire ..... 48

1.1. Approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.) ..... 48

1.2. Intensité du courant électrique ..... 48

1.3. Loi des nœuds..... 48

1.4. Loi des mailles ..... 48

2. Le dipôle électrocinétique ..... 49

2.1. Conventions d'orientation ..... 49

2.2. Puissance reçue par un dipôle ..... 49

2.3. Dipôles passifs linéaires ..... 49

2.4. Dipôles actifs linéaires, les générateurs..... 49

2.5. Association de dipôles ..... 50

3. Outils usuels permettant la simplification de l'étude des circuits ..... 51

**CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME TRANSITOIRE**..... 52

1. Régime transitoire d'un circuit RC ..... 52

1.1. Réponse libre d'un circuit RC ..... 52

1.2. Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. Réponse indicielle ..... 53

2. Régime transitoire d'un circuit RL (réponse à un échelon de tension) ..... 54

3. Régime transitoire d'un circuit RLC série ..... 54

Réponse libre d'un circuit RLC série..... 55

<b>CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ</b> .....	<b>57</b>
1. Signaux sinusoïdaux .....	57
1.1. Fonctions sinusoïdales .....	57
1.2. Utilisation de la notation complexe .....	57
2. Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé .....	58
2.1. Réponse en intensité – Résonance d'intensité .....	58
2.2. Réponse en charge – Résonance de tension aux bornes du condensateur .....	59
3. Impédances et admittances complexes .....	59
3.1. Dipôles passifs linéaires R, L et C .....	59
3.2. Dipôles actifs linéaires en régime sinusoïdal forcé : générateurs .....	60
4. Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé .....	61
4.1. Loi des nœuds .....	61
4.2. Loi des mailles .....	61
4.3. Association de dipôles linéaires .....	61
5. Puissance en régime sinusoïdal forcé .....	62
5.1. Puissance instantanée, puissance moyenne. Facteur de puissance .....	62
5.2. Adaptation d'impédance – Notion de charge adaptée .....	63
6. Filtres du premier ordre et du second ordre .....	63
6.1. Définitions .....	63
6.2. Fonction de transfert (ou transmittance) d'un quadripôle linéaire .....	63
6.3. Filtre linéaire .....	63
6.4. Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre .....	66
<b>CIRCUITS AVEC AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL</b> .....	<b>69</b>
1. Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire .....	69
2. Montages classiques en régime linéaire .....	69
<b>OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE</b> .....	<b>70</b>
1. Bases de l'optique géométrique .....	70
2. Objets, images réels et virtuels .....	70
3. Stigmatisme, aplanétisme et plans focaux .....	71
4. Miroirs sphériques dans l'approximation de Gauss .....	72
5. Lentilles minces dans l'approximation de Gauss .....	73
<b>OPTIQUE ONDULATOIRE</b> .....	<b>75</b>
1. Généralités .....	75
1.1. Conditions d'obtention d'interférences .....	76
1.2. Émission de la lumière .....	76
1.3. Expression du déphasage .....	77
2. Dispositif à division de front d'onde – Les trous d'Young .....	77
3. Autres dispositifs interférentiels à division de front d'onde .....	79
4. Dispositif à division d'amplitude – L'interféromètre de Michelson .....	80
4.1. Réglage en lame d'air, franges d'égale inclinaison .....	81
4.2. Coin d'air, franges d'égale épaisseur .....	83
5. Interférences à deux ondes en lumière polychromatique et pour une source étendue — Localisation des interférences .....	84
5.1. Cas d'une source ponctuelle mais polychromatique — cohérence temporelle de la source .....	84
5.2. Cas d'une source monochromatique mais étendue — cohérence spatiale de la source .....	85
6. Diffraction des ondes lumineuses .....	86
6.1. Le principe de Huygens-Fresnel .....	86
6.2. Diffraction de Fraunhofer d'une onde incidente plane .....	87
6.3. Diffraction par une pupille de phase ou d'amplitude .....	87
6.4. Diffraction de Fraunhofer d'une onde plane par une ouverture rectangulaire .....	87
6.5. Diffraction par un trou circulaire : .....	88

7. Interférences à l'infini entre N ondes cohérentes .....	89
7.1. Réseau plan .....	89
7.2. Interférences créées par une lame .....	90
<b>ÉLECTROSTATIQUE</b> .....	<b>92</b>
1. Interaction de deux charges ponctuelles, champ électrostatique .....	92
1.1. Loi de Coulomb .....	92
1.2. Champ électrostatique et expressions .....	92
2. Éléments de symétrie et conséquences .....	93
3. Théorème de Gauss .....	93
3.1. Flux du champ électrostatique .....	93
3.2. Théorème de Gauss .....	93
3.3. Analogie avec le champ de gravitation .....	94
4. Potentiel électrostatique .....	94
4.1. Définition .....	94
4.2. Circulation du vecteur champ électrique .....	94
4.3. Expressions du potentiel électrostatique .....	94
5. Dipôle électrostatique .....	95
5.1. Modèle du doublet .....	95
5.2. Potentiel et champ à grande distance du doublet .....	95
5.3. Action d'un champ électrostatique uniforme sur un dipôle .....	96
6. Formulation locale des lois de l'électrostatique .....	97
Équations locales .....	97
7. Conducteur en équilibre électrostatique .....	97
7.1. Définition .....	97
7.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique .....	97
7.3. Théorème de Coulomb .....	98
7.4. Champ dans une cavité vide de charge .....	98
7.5. Théorème des éléments correspondants .....	98
7.6. Théorème de superposition des états d'équilibre .....	98
7.7. Théorème d'unicité .....	98
7.8. Capacité propre d'un conducteur .....	98
7.9. Énergie d'un ensemble de conducteurs .....	99
8. Étude des condensateurs .....	99
8.1. Influence totale, condensateur .....	99
8.2. Capacité et énergie d'un condensateur .....	99
8.3. Quelques capacités usuelles .....	100
<b>MAGNÉTOSTATIQUE</b> .....	<b>100</b>
1. Relation de Biot et Savart .....	100
2. Propriétés des lignes de champ magnétique .....	100
3. Propriétés de symétrie ou d'antisymétrie .....	101
4. Théorème d'Ampère .....	101
5. Le champ magnétique est un champ à flux conservatif .....	102
6. Tableau comparatif des propriétés des champs électrique et magnétiques .....	103
7. Equations locales et intégrales du champ magnétique en régime permanent .....	104
8. Potentiel vecteur. Jauge de Coulomb .....	105
9. Champ magnétique et potentiel vecteur créé par une distribution de courant .....	105
9.1. Orientation relative du champ magnétique et du potentiel vecteur .....	106
9.2. Champ magnétique et potentiel vecteur créé par des distributions classiques .....	106
9.3. Effet Hall .....	106
9.4. Force de Laplace .....	107
10. Dipôle magnétique .....	107
10.1. Moment magnétique d'un circuit .....	107
10.2. Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un moment magnétique .....	108
10.3. Actions subies par un dipôle magnétique et énergie potentielle .....	108
10.4. Analogie dipôle électrostatique – dipôle magnétique .....	108

<b>ÉQUATIONS DE MAXWELL</b> .....	109
1. Équations de Maxwell.....	109
1.2. Signification physique des équations de Maxwell.....	109
1.3. Cas particulier de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).....	110
Transformation des champs dans la limite électrique non relativiste.....	110
2. Relations champs-potentiels.....	111
2.1. Potentiel vecteur.....	111
2.2. Potentiel scalaire.....	111
2.3. Champ électrique.....	111
2.4. Choix de jauge.....	111
3. Relations de passage.....	111
3.1. Modèle d'une distribution surfacique de charges et de courants.....	111
3.2. Continuité et discontinuité des composantes des champs.....	112
<b>INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE</b> .....	112
1. Le cadre de l'étude.....	112
2. Le phénomène d'induction.....	112
2.1. Courant induit.....	112
2.2. Loi de Lenz.....	112
3. Cas d'induction de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable.....	113
3.1. Force électromotrice induite et flux magnétique.....	113
3.2. Champ électromoteur de Neumann (complément).....	113
4. Cas d'induction de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétique constant.....	113
4.1. Loi d'Ohm dans un conducteur en mouvement.....	113
4.2. Champ électromoteur de Lorentz.....	114
4.3. F.e.m. induite dans le circuit.....	114
5. Cas général : circuit filiforme mobile dans un champ variable.....	114
5.1. Loi de Faraday.....	114
5.2. Modélisation électrocinétique d'une portion de circuit.....	114
6. Calculs de flux pour des circuits filiformes.....	114
6.1 Inductance propre.....	114
6.2. Coefficients d'inductance mutuelle de deux circuits filiformes.....	115
7. Énergie magnétique de deux circuits.....	115
7.1. Énergie associée au champ magnétique.....	115
7.2. Énergie magnétique et coefficients d'inductance.....	116
8. Circuits couplés par mutuelle.....	116
<b>PROPAGATION DANS LE VIDE ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE</b> .....	117
1. Propagation d'une onde plane dans le vide.....	117
1.1. Équations de propagation.....	117
1.2. Surface d'onde et onde plane.....	117
1.3. Onde progressive harmonique (OPH).....	118
2. Structure de l'onde plane progressive harmonique.....	118
2.1. Expression du champ électromagnétique d'une OPPH.....	118
2.2. Équations de Maxwell pour une OPPH dans le vide.....	119
2.3. Structure de l'onde plane progressive harmonique.....	119
2.4. Onde plane progressive (OPP).....	119
3. Aspect énergétique.....	119
3.1. Puissance cédée aux porteurs de charge.....	119
3.2. Densité volumique d'énergie électromagnétique.....	120
3.3. Vecteur de Poynting.....	120
3.4. Cas de l'OPPH.....	120
3.5. Bilan d'énergie.....	120
3.6. Vitesse de transport de l'énergie.....	121
4. États de polarisation d'une OPPH.....	121
4.1. Définitions.....	121
4.2. Description de l'état de polarisation.....	121

<b>PROPAGATION AVEC DISPERSION</b> .....	122
1. Absorption et dispersion.....	122
1.1. Cas général d'un milieu absorbant.....	122
1.2. Paquet d'ondes. Vitesse de phase et vitesse de groupe.....	123
2. Propagation dans un plasma.....	123
2.1. Conduction dans un plasma.....	123
2.2. Propagation d'une OPPH dans un plasma. Relation de dispersion.....	124
3. Réflexion sur un conducteur plan parfait.....	125
3.1. Hypothèse du conducteur parfait.....	125
3.2. Réflexion sous incidence normale d'une OPPH.....	125
3.3. Expression de l'onde réfléchie.....	125
3.4. Réflexion d'une OPPH.....	126
4. Onde stationnaire.....	127
5. Propagation guidée.....	128
5.2. Guide d'onde infini à section rectangulaire.....	128
5.3. Propagation guidée entre deux plans conducteurs parallèles.....	129
<b>CHAMP RAYONNÉ PAR UN DIPÔLE OSCILLANT</b> .....	129
1. Dipôle oscillant.....	129
2. Champ rayonné.....	130
2.1. Potentiel vecteur.....	130
2.2. Champ magnétique.....	131
2.3. Champ et potentiel électrique.....	131
2.4. Structure de l'onde émise.....	132
3. Puissance rayonnée.....	132
3.1. Intensité rayonnée.....	132
3.2. Indicatrice de rayonnement.....	133
3.3. Puissance totale rayonnée.....	133
<b>THERMODYNAMIQUE DES FLUIDES</b> .....	134
1. Théorie cinétique des gaz.....	134
2. Éléments de statique des fluides.....	135
2.1. Champ de pression et force pressante.....	135
2.2. Théorème d'Archimède.....	136
2.3. Équation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme.....	136
2.4. Loi fondamentale de la statique des fluides dans le cas général.....	137
3. Variables d'état.....	138
<b>PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE</b> .....	139
1. Postulat d'existence de la fonction d'état énergie interne. Premier principe.....	139
1.1. Énoncé du premier principe.....	139
1.2. Formes d'énergies comprises dans l'énergie interne.....	139
2. Formulation mathématique du premier principe. Travail et transfert thermique.....	140
2.1. Les deux formes d'échange d'énergie avec le milieu extérieur.....	140
2.2. Travail des forces de pression.....	140
2.3. Formulation mathématique du premier principe.....	141
3. Fonction enthalpie. Bilan énergétique d'un système en écoulement.....	141
3.1. Fonction enthalpie H.....	141
3.2. Bilan énergétique d'un système en écoulement.....	142
4. Coefficients calorimétriques.....	142
<b>SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE</b> .....	144
1. Énoncé du second principe et hypothèse fondamentale.....	144
2. Identité thermodynamique et couples de variables.....	144
3. Bilans entropiques.....	145
3.1. Terme d'échange et terme de production d'entropie.....	145

3.2. Relation de Carathéodory .....	146
4. Entropie des systèmes thermodynamiques usuels .....	146
4.1. Cas du gaz parfait .....	146
4.2. Cas de la matière condensée .....	146
4.3. Cas d'un thermostat .....	147
<b>MACHINES THERMIQUES .....</b>	<b>147</b>
1. Bilan énergétique. Les différents diagrammes .....	147
1.1. Rappels du premier principe .....	147
1.2. Diagramme de Watt. Travail de transvasement .....	148
2. Les moteurs thermiques .....	149
2.1. Inégalité de Clausius-Carnot. Énoncés de Kelvin et de Carnot .....	149
2.2. Cycles dithermes .....	149
<b>CHANGEMENT D'ÉTAT D'UN CORPS PUR .....</b>	<b>150</b>
1. Définitions. Les différents diagrammes .....	150
1.1. Définitions .....	150
1.2. Les différents diagrammes .....	151
2. Transferts énergétiques .....	153
2.1. Enthalpie et entropie de changement d'état .....	153
2.2. Enthalpie et entropie massique d'un système diphasé .....	153
2.3. Relation de Clapeyron .....	154
2.4. Etats métastables .....	154
<b>TRANSFERTS THERMIQUES EN THERMODYNAMIQUE .....</b>	<b>154</b>
1. Les différents modes de transfert de l'énergie .....	154
2. La notion de température locale .....	154
3. Vecteur densité de courant d'énergie .....	155
4. Etude de la conduction et loi de Fourier .....	155
5. Equation dite de la « chaleur » .....	155
5.1. Modèle unidirectionnel .....	155
5.2. Cas général .....	156
6. Transport conducto-convectif .....	156
7. Régime permanent, régime quasi-permanent et modèles électrocinétiques .....	156
7.1. Résistance thermique .....	156
7.2. Association série .....	157
7.3. Association parallèle .....	158
8. Transfert par rayonnement .....	158
8.1. Le corps noir .....	158
8.2. Loi de Planck .....	158
8.3. Loi de Wien (1880) .....	159
8.4. Loi de Kirchhoff .....	159
8.5. Loi de Stefan - Boltzmann (1879) .....	159
<b>ATOMES ET MOLÉCULES .....</b>	<b>160</b>
1. Quantification de l'énergie dans l'atome d'hydrogène .....	160
2. Structure électronique de l'atome .....	160
3. Les orbitales .....	160
4. Règles de remplissage des orbitales .....	161
5. La classification périodique .....	161
6. Formules de Lewis des molécules .....	161
7. Géométrie des édifices polyatomiques - VSEPR .....	163
<b>CINÉTIQUE CHIMIQUE .....</b>	<b>164</b>
1. Système fermé en réaction chimique .....	164
1.1. Coefficients stœchiométriques algébriques .....	164
1.2. Avancement d'une réaction .....	164

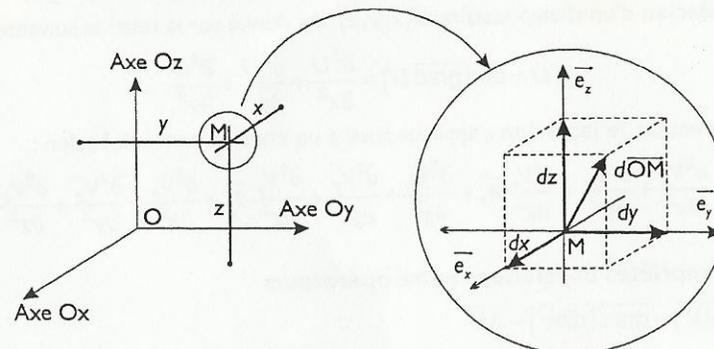
2. Vitesses en cinétique chimique .....	164
2.1. Vitesses de formation et de disparition .....	164
2.2. Vitesse de réaction .....	164
3. Facteurs influençant la vitesse d'une réaction .....	164
3.1. Influence des concentrations .....	164
3.2. Influence de la température .....	164
4. Résultats de cinétique formelle .....	165
5. Mécanismes réactionnels .....	165
5.1. Processus élémentaire .....	165
5.2. Intermédiaires réactionnels .....	165
5.3. Approximation de l'état quasi stationnaire (A.E.Q.S.) ou principe de Bodenstein .....	165
5.4. Différents types de mécanismes .....	165
<b>THERMODYNAMIQUE DES SYSTÈMES CHIMIQUES .....</b>	<b>166</b>
I. Enthalpie libre .....	166
Relation de Gibbs-Helmholtz .....	166
2. Potentiel chimique .....	166
2.1. Définition .....	166
2.2. Évolution du potentiel chimique en fonction de p et T .....	167
2.3. Expression du potentiel chimique .....	167
2.4. Potentiel chimique d'un gaz parfait pur .....	167
2.5. Cas d'un mélange idéal .....	168
2.6. Solution idéale .....	168
2.7. Solutions diluées .....	168
2.8. Solutions quelconques .....	168
2.9. Cas de phases solides .....	168
3. Grandeurs standard .....	169
3.1. Grandeurs standard relatives à un constituant .....	169
3.2. Grandeurs de réaction .....	171
3.3. Influence de la température .....	172
4. Affinité chimique ; évolution et équilibre chimique .....	173
4.1. Affinité chimique .....	173
4.2. Critère thermodynamique d'évolution spontanée .....	173
5. Expression de l'affinité chimique, de l'enthalpie libre de réaction et de la constante d'équilibre .....	174
5.1. Constante d'équilibre standard .....	174
5.2. Expression de l'enthalpie libre de réaction et de l'affinité .....	174
5.3. Équilibre, relation de Guldberg et Waage .....	175
5.4. Relation de Van't Hoff .....	175
5.5. Lois de déplacement des équilibres .....	175
<b>RÉACTIONS EN SOLUTION AQUEUSE .....</b>	<b>177</b>
1. Équilibres acido-basiques .....	177
2. Complexes de coordination .....	178
3. Précipités .....	179
<b>RÉACTIONS D'OXYDORÉDUCTION .....</b>	<b>179</b>
I. Réactions d'oxydoréduction .....	179
2. Nombre d'oxydation .....	180
3. Piles électrochimiques .....	180
3.1. Anode / Cathode : .....	180
3.2. Pile électrochimique : .....	180
4. Formule de Nernst .....	181
4.1. Force électromotrice .....	181
4.2. Potentiel de Nernst .....	181
4.3. Electrodes de référence .....	181

5. Classification rédox – Règle du gamma .....	182
5.1. Relation entre l'affinité et les potentiels de Nernst .....	182
5.2. Règle du « gamma » .....	182
<b>OXYDO-RÉDUCTION EN PHASE « SÈCHE » DIAGRAMMES D'ELLINGHAM</b> .....	<b>183</b>
1. Construction du diagramme d'Ellingham .....	183
2. Domaines d'existence et de stabilité .....	184
2.1. Cas d'un métal et son oxyde à l'état liquide ou solide .....	184
2.2. Cas du carbone .....	184
2.3. Exploitation - Prévion de réactions .....	185
<b>DIAGRAMMES E-PH ET CORROSION</b> .....	<b>186</b>
1. Elaboration d'un diagramme potentiel-pH .....	186
2. Exploitation du diagramme .....	187
2.1. Diagramme potentiel-pH de l'eau .....	187
2.2. Stabilité des solutions aqueuses .....	187
Phénomènes de corrosion .....	188
3. Présentation des courbes intensité-potentiel .....	188
4. Electrolyse .....	189
5. La corrosion .....	190
5.1. Définition .....	190
5.2. Corrosion uniforme .....	190
6. Utilisation du zinc pour la protection du fer .....	191
<b>STRUCTURE DE LA MATIÈRE CONDENSÉE</b> .....	<b>195</b>
1. Définitions .....	195
2. Empilements compacts .....	195
3. Empilement CC .....	196
4. Cristaux ioniques .....	197
5. Cristaux moléculaires .....	198
6. Cristaux covalents .....	198
<b>DIAGRAMMES BINAIRES ÉQUILIBRES LIQUIDE(S)-VAPEUR</b> .....	<b>199</b>
1. Généralités .....	199
1.1. Notion de phase .....	199
1.2. Equilibres liquide-vapeur pour les mélanges binaires .....	199
2. Diagrammes binaires avec miscibilité totale à l'état liquide .....	199
Cas d'une solution liquide idéale et de gaz parfaits .....	199
3. Diagrammes binaires dans le cas de deux liquides non miscibles .....	203
3.1. Un gaz et deux liquides en équilibre .....	203
3.2. Deux phases en présence .....	203
3.3. Diagramme isobare .....	204
3.4. Changement d'état .....	204
4. Application : Distillation fractionnée .....	205
4.1. Mélange sans azéotrope .....	205
4.2. Mélange avec azéotrope .....	206
<b>CONSTANTES PHYSIQUES</b> .....	<b>208</b>
<b>INDEX</b> .....	<b>209</b>

## OUTILS MATHÉMATIQUES

### I. Éléments d'analyse vectorielle

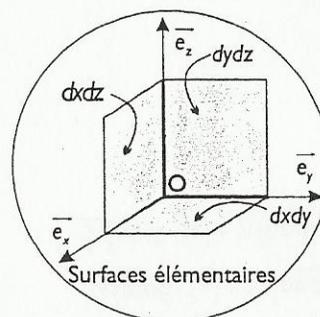
#### I.1. Coordonnées cartésiennes



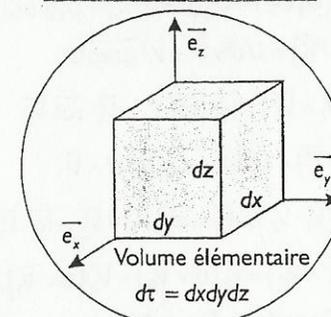
M est l'intersection de trois lignes de coordonnées :  $\overrightarrow{OM} = xe_x + ye_y + ze_z$

Déplacements élémentaires sur le trièdre local :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z$$



Découpage des surfaces élémentaires.



Volume élémentaire.

#### I.2. Opérateurs différentiels et relations intégrales

Le **gradient** d'un champ scalaire  $U(x, y, z)$  est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \overrightarrow{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \overrightarrow{e}_z$$

Avec  $dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \overrightarrow{dr}$ .

L'opérateur **divergence** d'un champ vectoriel,

$\overrightarrow{V} = V_x(x, y, z)\overrightarrow{e}_x + V_y(x, y, z)\overrightarrow{e}_y + V_z(x, y, z)\overrightarrow{e}_z$  est donné par la relation suivante :

$$\text{div } \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur rotationnel d'un champ vectoriel,

$\vec{V} = V_x(x, y, z)\vec{e}_x + V_y(x, y, z)\vec{e}_y + V_z(x, y, z)\vec{e}_z$  est donné par la relation suivante :

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[ \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Le laplacien d'un champ scalaire  $U(x, y, z)$  est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Par extension, le laplacien s'applique aussi à un champ vectoriel selon :

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \vec{e}_z$$

**1.3. Propriétés et relations entre opérateurs**

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

$$\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{V}) = 0$$

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_2 \text{grad}(U_1) + U_1 \text{grad}(U_2)$$

$$\text{div}(U \vec{V}) = U \text{div } \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{grad } U$$

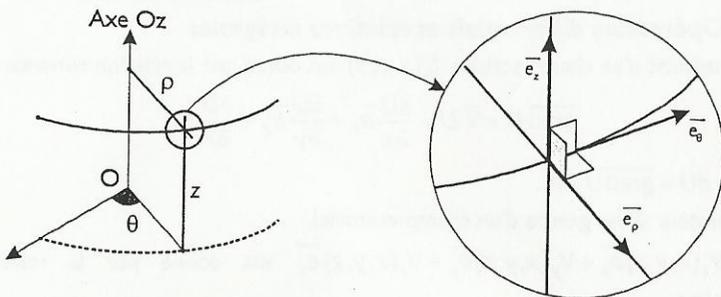
$$\text{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \text{rot } \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \text{rot } \vec{V}_2$$

$$\text{rot}(U \vec{V}) = U \text{rot } \vec{V} + \text{grad } U \wedge \vec{V}$$

$$\text{grad}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \wedge \text{rot } \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \wedge \text{rot } \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 \cdot \text{grad}) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \cdot \text{grad}) \vec{V}_2$$

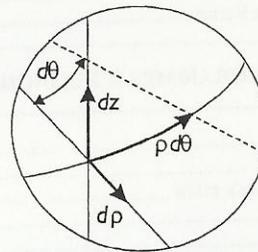
$$\text{rot}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1(\text{div } \vec{V}_2) - \vec{V}_2(\text{div } \vec{V}_1) - (\vec{V}_1 \cdot \text{grad}) \vec{V}_2 + (\vec{V}_2 \cdot \text{grad}) \vec{V}_1$$

**1.4. Coordonnées cylindriques**

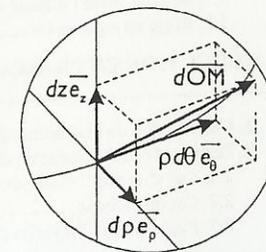


M est l'intersection de 3 lignes de coordonnées.  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$

Définition du trièdre orthonormé local.

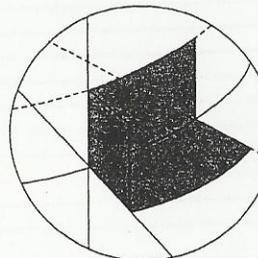


Déplacements élémentaires sur les lignes de coordonnées.

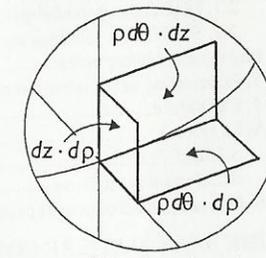


Déplacements élémentaires sur le trièdre local :

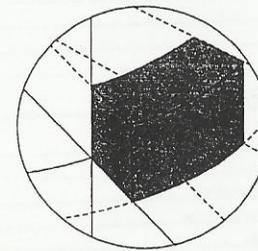
$$d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$



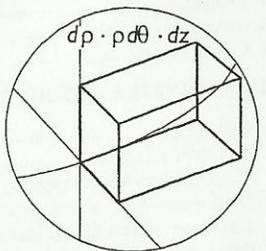
Découpage des surfaces élémentaires.



Valeur approchée des aires des surfaces élémentaires.



Découpage des volumes.



Valeur approchée du volume élémentaire.

**1.5. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques**

Le gradient d'un champ scalaire  $U(\rho, \theta, z)$  est donné par la relation suivante :

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

L'opérateur divergence d'un champ vectoriel,

$V_\rho(\rho, \theta, z)\vec{e}_\rho + V_\theta(\rho, \theta, z)\vec{e}_\theta + V_z(\rho, \theta, z)\vec{e}_z$  est donné par la relation suivante :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur rotationnel d'un champ vectoriel,

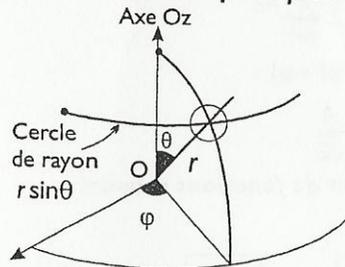
$V_\rho(\rho, \theta, z)\vec{e}_\rho + V_\theta(\rho, \theta, z)\vec{e}_\theta + V_z(\rho, \theta, z)\vec{e}_z$  est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \vec{V} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_\rho + \left[ \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right] \vec{e}_\theta + \dots \\ &\dots + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

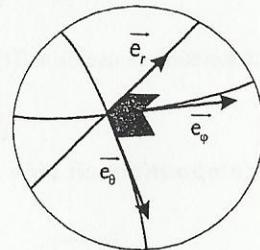
L'opérateur **laplacien** d'un champ scalaire  $U(\rho, \theta, z)$  est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

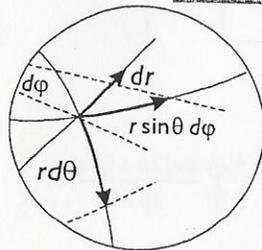
### 1.6. Coordonnées sphériques



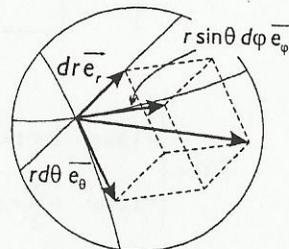
M est l'intersection de trois lignes de coordonnées :  $\overline{OM} = r \vec{e}_r$ .



Définition du trièdre orthonormé local.

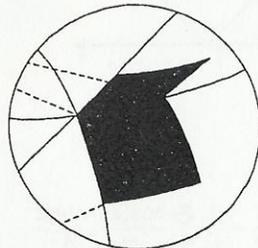


Déplacements élémentaires sur les lignes de coordonnées.

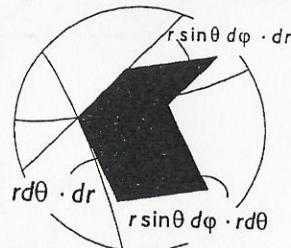


Déplacements élémentaires sur le trièdre local :

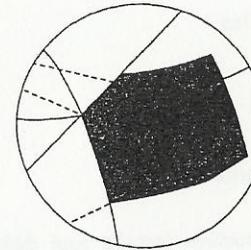
$$d\overline{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$



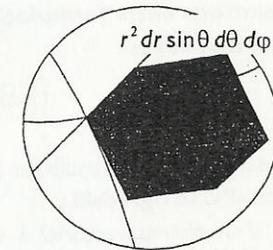
Découpage des surfaces.



Valeur approchée des aires des surfaces élémentaires.



Découpage des volumes.



Valeur approchée du volume élémentaire.

### 1.7. Expression des opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

Le **gradient** d'un champ scalaire  $U(r, \theta, \phi)$  est donné par la relation suivante :

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

L'opérateur **divergence** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(r, \theta, \phi) \vec{e}_r + V_\theta(r, \theta, \phi) \vec{e}_\theta + V_\phi(r, \theta, \phi) \vec{e}_\phi$  est donné par la relation suivante :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right\}$$

L'opérateur **rotationnel** d'un champ vectoriel,

$V_\rho(r, \theta, \phi) \vec{e}_r + V_\theta(r, \theta, \phi) \vec{e}_\theta + V_\phi(r, \theta, \phi) \vec{e}_\phi$  est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \vec{V} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\sin \theta V_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial V_r}{\partial \sin \theta} - \frac{\partial (r V_\phi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

L'opérateur **laplacien** d'un champ scalaire  $U(r, \theta, \phi)$  est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

## 2. Relations intégrales

### 2.1. Définitions

Circulation  $\mathcal{C}$  d'un champ de vecteurs le long d'un contour orienté  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Flux  $\Phi$  d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée  $\vec{S} = S \vec{n}$  :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

## 2.2. Relations entre formulations intégrales

Relation de Stokes :

$$\iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{d\ell}$$

Le contour orienté  $C$  s'appuie sur la surface orientée  $S$ .

Relation d'Ostrogradski :

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (qui délimite un volume Vol.) s'exprime en fonction de l'intégrale (sur ce volume) de la divergence de ce champ par la **relation d'Ostrogradski** selon :

$$\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\text{Vol.}} \text{div } \vec{V} \, d\tau$$

## 3. Notions d'analyse de Fourier

### 3.1. Généralités

Le nombre complexe  $j$  est tel que  $j^2 = -1$ .

Toute fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$  (satisfaisant aux conditions de Dirichlet) peut se décomposer sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

avec,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega t) \, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega t) \, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  représente la pulsation du mode fondamental, les multiples portent le nom d'harmoniques.

Une fonction paire ne présente pas de terme en sinus.

Une fonction impaire ne présente pas de terme en cosinus.

Dans le domaine symbolique la fonction  $f(t)$  associée à  $\underline{f}(t)$  se décompose sous la forme :

$$\underline{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t}$$

Les coefficients  $\underline{c}_n$  sont donnés par :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} \, dt \quad n \in \mathbb{N}$$

Le tracé du module des coefficients  $|\underline{c}_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  en fonction des pulsations  $n\omega$  représente le spectre en fréquence de la fonction.

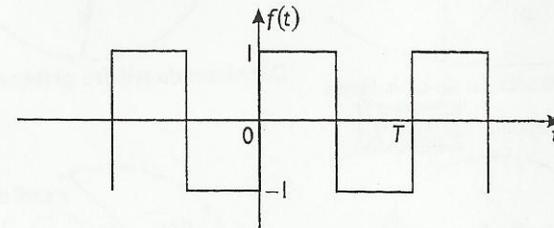
La valeur efficace d'un signal  $f(t)$  est donné par :

$$\sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=+\infty} c_n^2}$$

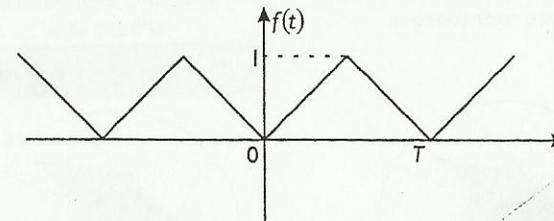
Cas d'une fonction sinusoïdale  $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  :

$$\sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

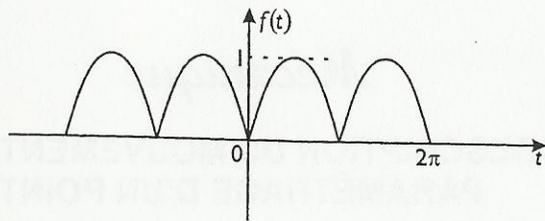
### 3.2. Décompositions en série de Fourier de fonctions usuelles



$$f(t) = \begin{cases} +1 \text{ pour } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 \text{ pour } -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \quad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$$



$$f(t) = \begin{cases} +\frac{2}{T}t \text{ pour } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{2}{T}t \text{ pour } -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases} \quad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}$$



$$f(t) = |\sin t| \quad f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos 2pt}{(2p+1)(2p-1) \dots}$$

### 4. Formules trigonométriques et hyperboliques

#### 4.1. Définitions

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

#### 4.2. Propriétés

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x$$

$$\frac{1}{\sinh^2 x} = \cotanh^2 x - 1$$

$$(\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx$$

$$(\cosh x + j \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\tanh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{1 + \cosh 2x}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cosh p - \cosh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sinh p + \sinh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sinh p - \sinh q = 2 \sinh \frac{p-q}{2} \cosh \frac{p+q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tanh p + \tanh q = \frac{\sinh(p+q)}{\cosh p \cosh q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tanh p - \tanh q = \frac{\sinh(p-q)}{\cosh p \cosh q}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \cosh a \cosh b = \frac{1}{2}(\cosh(a+b) + \cosh(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) \quad \sinh a \sinh b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad \sinh a \cosh b = \frac{1}{2}(\sinh(a+b) + \sinh(a-b))$$

### 5. Développements limités usuels au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$\sinh x = 1 + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\text{Argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\text{Argsinh}(x) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{4!}{2^4(2!)^2} \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{4!}{2^4(2!)^2} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

## 6. Primitives usuelles

Fonctions	Primitives
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cotan(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\tanh(x)$	$\ln \cosh(x)$
$\cotanh(x)$	$\ln  \sinh(x) $
$\tan(x)$	$-\ln  \cos(x) $
$\cotan(x)$	$\ln  \sin(x) $
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$
$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\cotanh(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\text{Argtanh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{Argsinh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{Argcosh}(x)$

## Mécanique

DESCRIPTION DU MOUVEMENT ET  
PARAMÉTRAGE D'UN POINT

## 1. Espace et temps d'un observateur

La cinématique a pour objet la description des mouvements des systèmes matériels, indépendamment des causes qui les produisent. Elle s'appuie sur deux notions fondamentales, celles de solide invariable et de temps.

- A un **solide** invariable pris comme **référence** est attaché un système d'axes de coordonnées. Ce système d'axe de coordonnées muni d'un repère chronologique va définir le **référentiel d'étude**  $\mathcal{R}$ . On attache à ce **solide de référence** la notion d'**observateur** fixe lié à ce solide.

- Un repère est l'ensemble formé d'un point, pris comme origine, et d'une base de projection  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Un même mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  peut être décomposé selon des repères différents  $(O_1, \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1})$  ou  $(O_2, \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_{z2})$ . Il existe de ce fait une infinité de repères possibles pour un même référentiel.

- Le repère chronologique permet de déterminer si deux événements sont simultanés ou se succèdent dans le temps. L'intervalle de **temps** marquant un événement physique est **indépendant** du référentiel considéré en mécanique Newtonienne. On dit qu'il y a **universalité du temps**.

- On appelle trajectoire d'un point P relative à un référentiel  $\mathcal{R}$  l'ensemble des points fixes de  $\mathcal{R}$  avec lesquels le point P vient en coïncidence dans la succession des événements. La trajectoire dépend du référentiel considéré.

- La mesure du temps, comme celle des distances, est conditionnée par le choix d'une unité de mesure. L'unité internationale de mesure des durées est la seconde, celle des distances est le mètre.

La seconde est définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes du rayonnement électromagnétique entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133. Le mètre correspond à la distance parcourue par la lumière en  $1/c$  seconde,  $c$  représentant la célérité de la lumière dans le vide, avec  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 2. Vecteurs vitesse et accélération

## 2.1. Définitions

Le point matériel P coïncide à l'instant  $t$  considéré avec un point M de l'espace et à un instant  $t + \Delta t$  avec un point M',  $\overline{OP}(t) = \overline{OM}$  et  $\overline{OP}(t + \Delta t) = \overline{OM}'$ . Lorsque l'intervalle de temps  $\Delta t$  tend vers zéro le point M' tend vers M et l'arc  $\overline{MM}'$  se confond avec la tangente à la courbe en M.

- Vecteur vitesse de P dans  $(\mathcal{R})$  :

$$v_{P/\mathcal{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM}'}{\Delta t} = \frac{d\overline{OP}}{dt}$$

- Vecteur accélération de P dans (R) :

$$\vec{a}_{P/R} = \left( \frac{d\vec{v}_{P/R}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d^2 \overline{OP}}{dt^2} \right)_R$$

**Remarques :**

- Les vecteurs vitesse et accélération du point considéré dépendent de l'observateur donc du référentiel d'étude.
- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.

- Un mouvement est rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant.

Le mouvement est dit uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.

- Le vecteur vitesse étant défini comme le rapport entre une distance et un temps, son unité dans le Système International (S.I.) est le mètre par seconde ( $m \cdot s^{-1}$ ).

- Souvent le mouvement est dit accéléré si la norme du vecteur vitesse augmente au cours du temps, ce qui se traduit par  $\vec{a}_{P/R} \cdot \vec{v}_{P/R} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{P/R}^2}{2} \right) > 0$ .

Souvent il est dit décéléré si elle diminue au cours du temps, ce qui se traduit par  $\vec{a}_{P/R} \cdot \vec{v}_{P/R} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{P/R}^2}{2} \right) < 0$ . Dans le cas particulier d'une accélération normale,  $\vec{a}_{P/R} \cdot \vec{v}_{P/R} = 0$ .

- Un mouvement rectiligne uniforme correspond à un vecteur accélération nul.

**2.2. Les différents systèmes de coordonnées**

Coordonnées	Vitesse	Accélération
Cartésiennes	$\vec{v}_{P/R} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	$\vec{a}_{P/R} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
Cylindriques	$\vec{v}_{P/R} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z$	$\vec{a}_{P/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z$
Sphériques	$\vec{v}_{P/R} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi$	$\vec{a}_{P/R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta + (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{e}_\phi$

# DYNAMIQUE DU POINT EN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

## I. Définitions et lois de Newton

### 1.1. Masse inerte et masse grave. Quantité de mouvement

La masse inerte  $m_i$  caractérise la résistance d'un corps à la modification de son mouvement. Plus cette masse est importante, plus il faudra une force importante pour accélérer l'objet.

Par définition, on appelle quantité de mouvement d'un corps M de masse  $m_i$ , **relativement à un référentiel R** la quantité  $\vec{p}_{M/R} = m_i \vec{v}_{M/R}$ .

La masse grave  $m_g$  est celle qui intervient dans l'expression de la force de gravitation. Si un objet est soumis à un champ gravitationnel  $\vec{A}$ , s'exerce sur celui-ci la force de gravitation  $\vec{F}_g = m_g \vec{A}$ .

Il se trouve expérimentalement que le rapport  $m_g/m_i$  est le même pour tous les corps (expérience de R.H. Dicke, précision  $\approx 10^{-11}$ ). Un choix naturel d'unités permet donc d'identifier  $m_g$  et  $m_i$ . Dans le système international,  $m_g = m_i$ , et l'on parlera simplement de masse  $m$  du corps.

### 1.2. Première loi de Newton ou principe de l'inertie

**1ère loi :** il existe au moins un référentiel  $R_g$  par rapport auquel tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme. Un tel référentiel est dit galiléen.

**Remarque :** ce principe postule l'existence des référentiels galiléens et donne un moyen expérimental de les tester (le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme).

**Relativité galiléenne :** tout référentiel  $R'_g$  animé par rapport à  $R_g$  d'un mouvement de translation rectiligne uniforme est lui-même galiléen.

Il n'y a donc pas de référentiel galiléen absolu ou privilégié.

### 1.3. Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique

**2ème loi :** dans un référentiel galiléen  $R_g$ , la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel M par unité de temps est égale à la résultante

des forces s'appliquant sur ce point :  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \left( \frac{d\vec{p}_{M/R_g}}{dt} \right)_{R_g}$

Cette relation s'écrit encore :  $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_{M/R_g}$ .

### 1.4. Troisième loi de Newton ou principe des actions mutuelles

**3ème loi :** si  $\vec{F}_{B \rightarrow A}$  est la force que le point B exerce sur le point A et  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  la force que le point A exerce sur le point B, alors  $\vec{F}_{A \rightarrow B} + \vec{F}_{B \rightarrow A} = \vec{0}$ , et les deux forces ont pour support la droite (AB).

Notons que ce principe reste valable en mécanique newtonienne **quel que soit le mouvement des points A et B**. L'unité de la force est le Newton [N]

## 2. Lois de force

### Force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{(M)} + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_{(M)})$$

Force s'exerçant sur une particule de charge électrique  $q$  placée en M, animée par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  de la vitesse  $\vec{v}_{M/R}$  et soumise à un champ électrique  $\vec{E}_{(M)}$  et à un champ magnétique  $\vec{B}_{(M)}$ .

### Force électrostatique

$$\vec{F}_{el}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{AB}$$

La constante  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide et vaut :  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Force de gravitation

$$\vec{F}_g^{A \rightarrow B} = -G \frac{m_A m_B}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{AB}$$

La masse  $m_A$  en A crée, au point B, le champ gravitationnel  $\vec{A}_{(B)} = -G \frac{m_A}{r^3} \vec{r}$ .

### Poids

$$\vec{p} = m\vec{g}$$

$\vec{F}_{el}^{A \rightarrow B}$  = force électrostatique que la charge  $q_A$  exerce sur la charge  $q_B$ .

La force est attractive si les charges sont de signe opposé, répulsive dans le cas contraire.

$\vec{F}_g^{A \rightarrow B}$  = force gravitationnelle que la masse  $m_A$  exerce sur la masse  $m_B$ .  $G$  est la constante universelle de la gravitation de valeur  $G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\vec{p}$  = poids s'exerçant sur la masse  $m$  soumise au champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

Ne pas confondre poids et force de gravitation, le champ de pesanteur et le champ de gravitation sont deux grandeurs distinctes.

### Force élastique ou de rappel

**Loi de Hooke** : un ressort étiré exerce à ses deux extrémités une force de rappel proportionnelle à son allongement.

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{masse vers ressort}}$$

La force de rappel a pour norme :

$$F_r = k|\Delta\ell| = k|\ell - \ell_0|$$

$\ell$  = la longueur du ressort

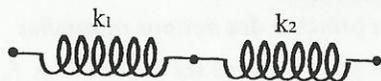
$\ell_0$  = longueur à vide du ressort

$\Delta x = \ell - \ell_0$  = écart par rapport à la position d'équilibre

$k$  = constante de raideur du ressort

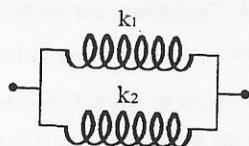
**Lois d'association des ressorts** : on note  $k_1$  et  $k_2$  les constantes de raideur de deux ressorts différents et  $k$  la constante de raideur du ressort équivalent.

Association série



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Association parallèle



$$k = k_1 + k_2$$

Ces lois d'associations sont généralisables à une association quelconque de ressorts.

### Force résistante de type visqueux

Une force résistante est dite de type visqueux si elle est proportionnelle à la vitesse du corps sur lequel elle s'exerce,  $\alpha$  = constante positive.

$$\vec{F}_r = -\alpha \vec{v}_{M/R}$$

## 3. Puissance et travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique

### 3.1. Puissance d'une force

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la puissance  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})$  de la force  $\vec{F}$ , exercée sur un point matériel M, est définie comme le produit scalaire de cette force par la vitesse  $\vec{v}_{M/R}$  du point M dans ce référentiel  $\mathcal{R}$  :

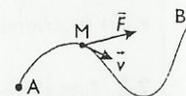
$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/R}$$

- La puissance d'une force  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})$  dépend du référentiel.
- La puissance d'une force s'exprime en watt de symbole W.

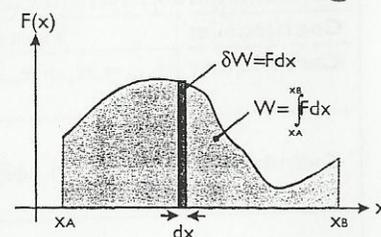
### 3.2. Travail d'une force

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le travail d'une force  $\vec{F}$  exercée sur un point M qui se déplace du point A au point B, le long d'un chemin ( $\Gamma$ ) est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{\Delta t(A \rightarrow B)} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(t) dt = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}_{M/R}}_{\frac{d\vec{\ell}}{dt}} dt = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$



- Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel, le travail de la force entre les points A et B est égal à l'aire sous la courbe représentative de la force  $F(x)$ .



- Le travail d'une force dépend, en général, du chemin ( $\Gamma$ ) suivi par le point M.

Si la force  $\vec{F}$  est constante (en norme, sens et direction) au cours du trajet de A vers B, alors le travail de celle-ci est égal à :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Remarquons que l'expression de ce travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, quel que soit le trajet effectué entre ces deux points.

Le travail d'une force s'exprime en joule de symbole J.

### 3.3. Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

#### Énergie cinétique

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , l'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse  $m$  et animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/R}$ , est la grandeur définie par la relation  $E_c = \frac{1}{2} m v_{M/R}^2$ . Elle s'exprime en joule (J). L'énergie cinétique dépend du référentiel choisi.

### Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel M de masse  $m$  est égale à la puissance de la résultante des forces  $\vec{F}$  s'exerçant sur ce point matériel :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F})$$

### Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la variation d'énergie cinétique d'un point matériel M de masse  $m$  est égale au travail de la résultante des forces  $\vec{F}$  s'exerçant sur M, travail évalué sur le trajet ( $\Gamma$ ) suivi par M de A à B :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

Pour les théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique, notons que :

- si le référentiel n'est pas galiléen, il faut tenir compte de la puissance des forces d'inertie (cf. Changements de référentiels).
- Ces théorèmes ne sont valables que si le système est de masse constante.

## PROBLÈMES A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

### 1. Énergie potentielle

#### 1.1. Force conservative

Soit une force  $\vec{F}$  qui dépend uniquement de la position de son point d'application. Cette force est dite conservative si son travail, entre deux points, ne dépend pas du chemin suivi.

#### 1.2. Énergie potentielle

A une force conservative  $\vec{F}$ , on peut associer une fonction scalaire  $E_p(\vec{r})$  définie à une constante additive près et telle que sa variation entre deux points soit égale à l'opposé du travail de la force  $\vec{F}$  entre ces points :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{A \rightarrow B} dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Nous disons que la force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p(\vec{r})$ .

Une force dérivant d'une énergie potentielle est conservative.

Si une force  $\vec{F}$  dérive d'une énergie potentielle, son travail élémentaire peut alors s'exprimer comme la différentielle d'une fonction de position qui s'identifie alors à  $-E_p(\vec{r})$  à une constante près :

$$\delta W_p = -dE_p(\vec{r})$$

**Relation force - énergie potentielle :** la force  $\vec{F}$  qui dérive d'une énergie potentielle  $E_p(\vec{r})$  peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = -\text{grad}(E_p(\vec{r}))$$

### 2. Exemples usuels d'énergies potentielle

<b>Energie potentielle de pesanteur</b> $E_p^{pes} = mgz + cte$	$z$ = altitude de la masse $m$ pour la verticale ascendante $g$ = intensité du champ de pesanteur
<b>Energie potentielle élastique</b> $E_p^{elas} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte$	$\ell$ = longueur du ressort $\ell_0$ = longueur à vide du ressort $k$ = cte de raideur du ressort
<b>Energie potentielle de gravitation</b> $E_p^{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r} + cte$	$m_1, m_2$ = masses des corps $r$ = distance entre les deux corps $G$ = constante de gravitation
<b>Energie potentielle d'interaction électrostatique</b> $E_p^{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + cte$	$q_1, q_2$ = charges des corps $r$ = distance entre les deux corps $\epsilon_0$ = permittivité du vide

### 3. Energie mécanique. Intégrale première de l'énergie

#### 3.1. Système conservatif

Le travail élémentaire  $\delta W$  de la résultante des forces s'exerçant sur le point matériel peut s'écrire :  $\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$ .

$\delta W_c$  = travail élémentaire des forces conservatives.

$\delta W_{nc}$  = travail élémentaire des forces non conservatives.

Il vient  $dE_c = \delta W_c + \delta W_{nc} = -dE_p^{tot} + \delta W_{nc}$  ou  $d(E_c + E_p^{tot}) = \delta W_{nc}$ .

Par définition, l'énergie mécanique  $E_m$  d'un système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale d'interaction avec les autres corps :

$$E_m = E_c + E_p^{tot}$$

La différentielle de l'énergie mécanique est égale au travail élémentaire des forces non conservatives :

$$dE_m = \delta W_{nc}$$

Un système est dit conservatif lorsque le travail des forces non conservatives est nul. Il y a alors conservation de l'énergie mécanique du système. On dit alors que  $E_m$  est une intégrale première de l'énergie (ou du mouvement).

#### 3.2. Intégrale première de l'énergie

Pour un système unidimensionnel paramétré par  $\xi$ , la conservation de l'énergie mécanique se traduit par :  $E_m = cte = E_c(\xi) + E_p^{tot}(\xi)$ . En écrivant l'énergie cinétique sous la forme  $E_c(\xi) = \frac{1}{2}A\dot{\xi}^2$ , l'équation différentielle du mouvement

est alors  $\frac{d\xi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E_m - E_p(\xi))}{A}}$ , qui s'intègre en  $t = \pm \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{2(E_m - E_p(\xi'))}}$ .

Le choix du signe dépend de la phase considérée dans le mouvement : croissance ou décroissance du paramètre :  $\xi$ .

### 4. Équilibres et stabilité

Considérons un point M de masse  $m$  soumis uniquement à des forces conservatives.

#### 4.1. Recherche des positions d'équilibre

Supposons que la position de M est définie uniquement par un paramètre  $\xi$ . Les positions d'équilibre  $\xi_{eq}$  correspondent à un extremum de la fonction énergie

potentielle totale  $E_p^{tot}(\xi)$  :

$$\left( \frac{dE_p^{tot}}{d\xi} \right)_{\xi_{eq}} = 0$$

#### 4.2. Stabilité des positions d'équilibre

##### Equilibre stable

Correspond à un minimum de l'énergie potentielle totale :

$$\left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}} > 0$$

##### Equilibre instable

Correspond à un maximum de l'énergie potentielle totale :

$$\left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}} < 0$$

#### 4.3. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable

On effectue une « parabolisation » du puits d'énergie potentielle en faisant un développement limité à l'ordre deux de la fonction  $E_p^{tot}(\xi)$  autour de la position

d'équilibre  $\xi_{eq}$  :

$$E_p^{tot}(\xi) = E_p^{tot}(\xi_{eq}) + \frac{1}{2}(\xi - \xi_{eq})^2 \left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}}$$

L'équation du mouvement autour de la position d'équilibre devient alors avec

$$u = \xi - \xi_{eq} : \ddot{u} + \frac{1}{m} \left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}} u = 0$$

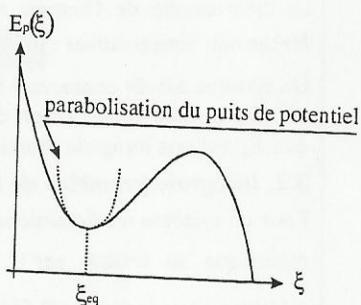
Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}}}$$

Tout se passe

comme si autour de sa position d'équilibre le système était soumis à une force élastique de constante de raideur

$$k = \left( \frac{d^2 E_p^{tot}}{d\xi^2} \right)_{\xi_{eq}}$$



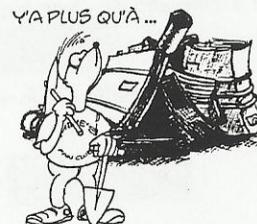
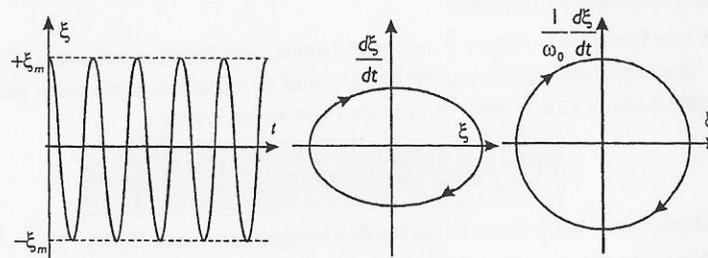
### 5. Approche du portrait de phase

Soit un système dont le comportement est décrit par une variable de position  $\xi$ . Le comportement dynamique du système peut se représenter dans le plan  $(\xi, d\xi/dt)$  appelé **plan de phase**. Si l'on place l'ensemble des différents états successifs dans le plan de phase, on peut observer l'émergence d'une « trajectoire » dans cet espace. Le **portrait de phase** du système correspond à l'ensemble des différentes trajectoires de phase.

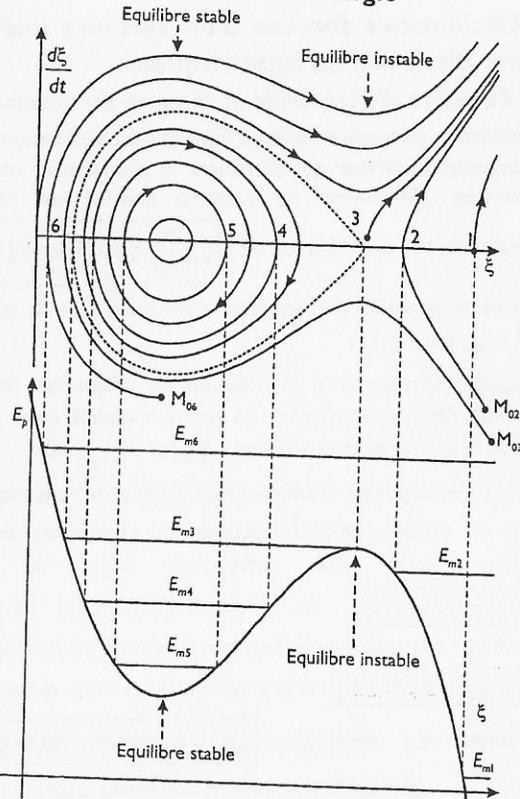
#### 5.1. Systèmes conservatifs

##### Trajectoires de phase fermées

- Les trajectoires de phase fermées sont toujours associées à des mouvements périodiques. Si de surcroît le système est conservatif, il ne peut s'agir que de trajectoires fermées symétriques par rapport à l'axe des  $\xi$ . La réciproque est fautive : une trajectoire fermée symétrique n'est pas suffisante pour conclure à l'absence de frottements subis par le système. Un oscillateur dont les oscillations sinusoidales sont entretenues est un contre exemple.
- Pour les systèmes conservatifs, les trajectoires de phase elliptiques traduisent une évolution temporelle sinusoidale typique d'un oscillateur harmonique non amorti.
- Les ellipses sont homothétiques les unes des autres ; ceci traduit géométriquement la propriété d'isochronisme des oscillations. Cette propriété permet de transformer l'ensemble des trajectoires elliptiques en cercles par une nouvelle graduation de l'axe des ordonnées  $(\frac{d\xi}{dt} \rightarrow \frac{d\xi}{\omega_0 dt})$ .



### Conséquences de la conservation de l'énergie



L'équation de la trajectoire de phase est directement donnée sous forme implicite par la conservation de l'énergie. La figure ci-dessous montre le lien entre l'énergie du système, la variation de l'énergie potentielle et l'allure du portrait de phase.

- Les positions d'équilibre  $\xi_{eq}$  correspondent aux abscisses des points figuratifs où la pente de la tangente à la courbe est nulle (correspond à une force nulle).
- La position d'équilibre est stable si la norme de la vitesse est maximale en  $\xi_{eq}$ , instable si elle est minimale.
- Lorsque la particule reste confinée dans le puits de potentiel, il y a oscillations autour de la position d'équilibre stable correspondant à  $\xi = \xi_A$ .

Au fur et à mesure que l'amplitude du mouvement augmente (énergie croissante), la forme de la trajectoire de phase s'écarte du cercle, ce qui met en évidence l'écart par rapport à l'isochronisme des oscillations.

#### 5.2. Systèmes dissipatifs

##### Existence d'un attracteur

Deux trajectoires de phase, décrivant un système dissipatif se rapprochent au cours du temps pour converger vers un attracteur. Dans le plan de phase, c'est-

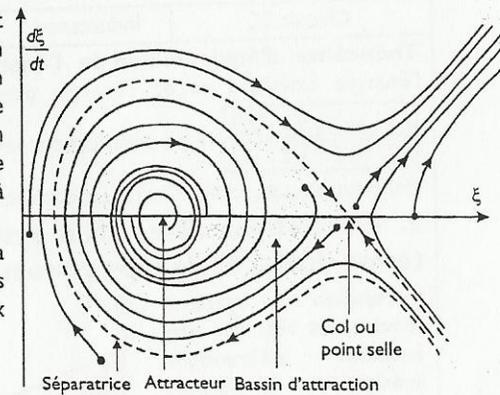
à-dire pour un système ne présentant qu'un degré de liberté, il n'existe que deux attracteurs possibles :

- Le point fixe, qui est un point singulier où la vitesse et l'accélération s'annulent, correspond à une solution stationnaire de l'équation différentielle atteinte asymptotiquement pour  $t \rightarrow \infty$ . Ce point stationnaire peut être stable ou instable. Ce sera toujours le cas s'il n'y a pas d'apport d'énergie au système.
- Le cycle limite, qui est toujours stable, est associé à un comportement périodique du système. L'existence d'un cycle limite nécessite un dispositif extérieur compensant les pertes par frottement.

#### Bassin d'attraction et séparatrice

A chaque attracteur est associé un domaine du plan de phase appelé bassin d'attraction. Une trajectoire de phase débutant en un point quelconque de cette zone du plan aboutit à l'attracteur.

Une séparatrice est la frontière séparant les bassins d'attraction de deux attracteurs.



## OSCILLATEUR HARMONIQUE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

### I. Oscillateur harmonique

#### 1.1. Equation différentielle et solution générale

Un système faiblement écarté d'une position d'équilibre stable a tendance à osciller autour de cette position. Son comportement est décrit par l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Ce résultat est très général puisqu'il découle d'un développement limité à l'ordre deux de la fonction énergie potentielle totale  $E_p^{tot}(\xi)$  au voisinage de  $\xi = \xi_{eq}$ .

- Equation différentielle d'un oscillateur harmonique :  $\xi + \omega_0^2 \xi = 0$
- Solution générale :  $\xi(t) = \xi_1 \cos \omega_0 t + \xi_2 \sin \omega_0 t = \xi_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

La pulsation  $\omega_0$  est appelée **pulsation propre** du système.

La grandeur  $\xi_m$  représente l'**amplitude des oscillations**.

#### 1.2. Conservation de l'énergie et equipartition de l'énergie

La multiplication de l'équation différentielle par  $\dot{\xi}$  et l'intégration par rapport au

temps amène à  $\frac{1}{2} A \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} k \xi^2 = cte$  avec  $\omega_0^2 = k/A$ .

Au sens large, le terme  $\frac{1}{2}A\dot{\xi}^2$  peut s'interpréter comme une énergie cinétique, et le terme  $\frac{1}{2}k\xi^2$  comme une énergie potentielle. Un système régit par l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique est donc un **système conservatif d'énergie totale**  $E = \frac{1}{2}A\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}k\xi^2 = cte$ .

Exemple de système	Coefficient A	Coefficient k	Coefficient $\xi$
Pendule élastique horizontal	masse m	cte de raideur k	Position x
Circuit LC	Inductance L	1/C	Charge q

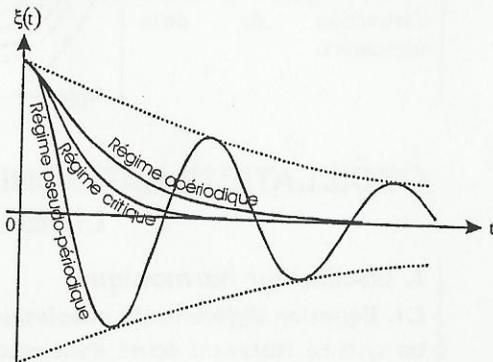
**Théorème d'équipartition de l'énergie :** les moyennes temporelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle au sens large sont égales :  $\langle \frac{1}{2}A\dot{\xi}^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}k\xi^2 \rangle$ . Il y a transfert perpétuel d'énergie entre les formes énergie cinétique et potentielle. Ceci n'est possible tout terme dissipatif a été négligé.

## 2. Oscillations libres d'un système linéaire soumis à un terme dissipatif de type visqueux

L'évolution du système linéaire est régi par une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0.$$

Le coefficient Q définit le facteur de qualité du circuit. On peut introduire le coefficient d'amortissement m défini par la relation  $m = 1/2Q$ .



Régime	Domaine de validité	Solution
Pseudo-périodique	$Q > 1/2$ ou $m < 1$	$\xi(t) = (\xi_1 \cos \omega t + \xi_2 \sin \omega t) e^{-m\omega_0 t}$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ = pseudo-pulsation
Critique	$Q = 1/2$ ou $m = 1$	$\xi(t) = (\xi_3 + \xi_4 t) e^{-\omega_0 t}$
Apériodique	$Q < 1/2$ ou $m > 1$	$\xi(t) = (\xi_5 \cosh \omega' t + \xi_6 \sinh \omega' t) e^{-m\omega_0 t}$ $\omega' = \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$

Les grandeurs  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$  sont déterminées par les conditions initiales.

## 3. Oscillations forcées d'un système linéaire soumis à un terme dissipatif de type visqueux

### 3.1. Equation différentielle et réponse du système

Considérons un système linéaire régit par un seul paramètre  $\xi$ . Il est excité par un dispositif extérieur qui entretient le mouvement et impose une excitation sinusoïdale. L'évolution du système linéaire est régi par une équation

différentielle linéaire de la forme :  $\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = A\omega_0^2 \cos \omega t$

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de deux termes :  $\xi(t) = \xi_{SH}(t) + \xi_p(t)$

- $\xi_{SH}(t)$  correspond à la solution de l'équation homogène (sans second membre). De part l'existence du terme dissipatif, cette solution tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini :  $\xi_{SH}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

- $\xi_p(t)$  correspond à la solution particulière de l'équation générale.

Après un certain temps (disparition du régime transitoire), ne reste que la solution  $\xi_p(t)$  qui correspond donc au régime permanent :

$$\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_p(t)$$

La solution  $\xi(t) = \xi_p(t)$  correspondant au régime permanent a la même pulsation que la source excitatrice ; elle est de la forme :

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

A la grandeur  $\xi(t)$  nous associons la grandeur  $\underline{\xi}$  dans

le corps des complexes :  $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{\xi}(t) = \xi_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{\Xi} e^{j\omega t}$

avec :  $\underline{\Xi} = \xi_0 e^{j\varphi}$  = amplitude complexe associée à  $\underline{\xi}$

$\varphi$  = avance de phase de  $\underline{\xi}$  sur la source excitatrice

L'équation différentielle s'écrit alors  $\underline{\xi} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q} \right] = A\omega_0^2 e^{j\omega t}$ ,

d'où 
$$\underline{\Xi} = \frac{A \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

### 3.2. Résonances du système

#### Résonance d'amplitude

Introduisons la grandeur  $u = \omega/\omega_0$  appelée « pulsation » réduite.

Amplitude	$\xi_0 = \frac{A}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2}}$
Cosinus du déphasage	$\cos \varphi = \frac{1-u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2}}$
Sinus du déphasage	$\sin \varphi = \frac{u/Q}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2}}$

**Remarques :** • la donnée de la tangente du déphasage laisse une indétermination de  $\pi$  sur celui-ci.

• pour  $\omega = \omega_0$ ,  $\xi_0 = Q \cdot A$  : il y a un phénomène de « suramplitude » si le facteur de qualité est suffisamment élevé.

• Pour  $Q > 1/\sqrt{2}$ , l'amplitude  $\xi_0$  passe par un maximum pour la pulsation  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . On dit qu'il y a **résonance d'amplitude**.

• Pour  $Q < 1/2$ , la décroissance de  $\xi_0(\omega)$  est monotone. Il n'y a pas de résonance d'amplitude.

### Réponse en vitesse. Résonance de vitesse

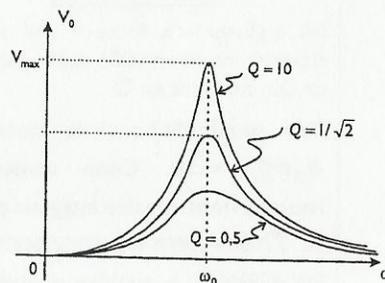
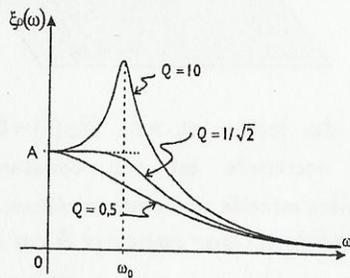
A la vitesse  $v(t) = \frac{d\xi}{dt}$  (au sens général du terme) est associée la grandeur complexe  $\underline{v}(t) = j\omega \times \underline{\xi}(t) = v_0 \cdot \exp(j(\omega t + \psi_v)) = \underline{V} \cdot e^{j\omega t}$ .

$v_0 = \xi_0 \omega =$  amplitude de la vitesse

$\psi_v = \varphi + \frac{\pi}{2} =$  avance de phase de la vitesse sur la source excitatrice

<b>Amplitude</b>	$v_0 = \frac{A \cdot \omega_0}{\sqrt{(u-1/u)^2 + (1/Q)^2}}$
<b>Cosinus du déphasage</b>	$\cos \psi_v = \frac{1/Q}{\sqrt{(u-1/u)^2 + (1/Q)^2}}$
<b>Sinus du déphasage</b>	$\sin \psi_v = -\frac{u-1/u}{\sqrt{(u-1/u)^2 + (1/Q)^2}}$

• Il y a toujours résonance de vitesse quel que soit la valeur du facteur de qualité, pour  $\omega = \omega_0$ , c'est-à-dire lorsque la pulsation de la source excitatrice est égale à la pulsation propre du circuit.



### Résonance de puissance

• En moyenne, la puissance fournie par la force excitatrice est égale à la puissance perdue par la force de frottement fluide.

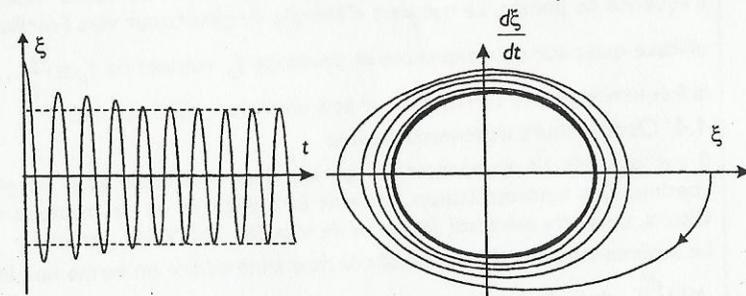
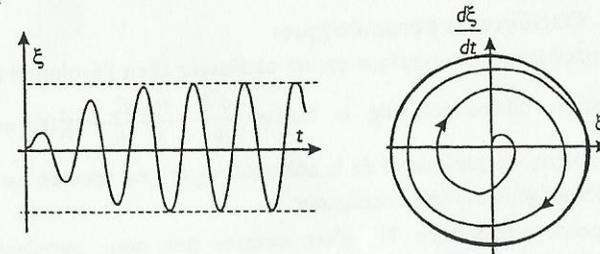
• Si la force de frottement fluide est du type  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$ , la puissance moyenne fournie par la force excitatrice est  $P_m = \langle \alpha v^2 \rangle = \alpha v_0^2 / 2$ .

• Il y a toujours résonance de la puissance transférée, quel que soit la valeur du facteur de qualité, pour  $\omega = \omega_0$ .

## 4. Oscillations entretenues des systèmes du second ordre : cycle limite

### 4.1. Régime transitoire

L'attracteur en courbe fermée apparaît lorsqu'un oscillateur est couplé à un générateur auxiliaire. Deux attracteurs sont en présence : le point fixe, qui peut devenir instable sous l'action du générateur et le cycle limite. Dans ce cas, toutes les trajectoires de phase vont aboutir au cycle limite, quel que soit le point de départ, la forme de ce cycle étant indépendante des conditions initiales.



Si le point figuratif initial  $M_0$  est placé sur le cycle limite, le mouvement est périodique dès l'instant de départ. Pour une position quelconque de  $M_0$ , un régime transitoire précède l'instauration du régime périodique. La périodicité s'affirme au fur et à mesure que le point s'approche de l'attracteur.

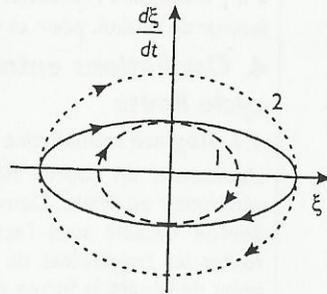
### 4.2. Oscillateurs harmoniques en régime sinusoïdal forcé

Pour maintenir un oscillateur linéaire en régime sinusoïdal forcé, il faut un générateur qui impose la fréquence des oscillations et l'amplitude de l'excitation, ce qui introduit dans l'équation différentielle un terme d'excitation en  $\xi_e \cos(\omega t + \varphi)$ . Une situation stationnaire devient alors instable pour toute valeur de la fréquence d'excitation.

Le cycle limite de l'oscillateur en régime sinusoïdal forcé est une ellipse symétrique par rapport à l'axe des abscisses, dont la taille dépend de la fréquence du générateur. Il y a lieu de distinguer une trajectoire de phase d'un oscillateur harmonique non amorti de ce cycle limite sur lequel viennent s'accumuler, **sans jamais se couper**, les trajectoires de phase d'un système dissipatif.

Les abscisses des points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des positions valent  $\pm \xi_m$ , si nous notons  $\xi_m$  l'amplitude des oscillations.

La trajectoire de phase d'un oscillateur harmonique non amorti coupe l'axe des vitesses aux points d'ordonnée  $\pm\omega_0\xi_m$ , tandis que le cycle limite coupe aux points  $\pm\omega\xi_m$ . Nous voyons que le cycle limite d'un régime sinusoïdal forcé s'inscrit entre deux ellipses correspondant respectivement aux trajectoires de phase de deux oscillateurs harmoniques de même vitesse maximale (cas 1) ou de même amplitude (cas 2).



### 4.3. Oscillateurs paramétriques

Un oscillateur paramétrique est un oscillateur dont l'évolution est régie par une équation différentielle de la forme  $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2(t)\xi = 0$  avec  $\omega_0(t)$  périodique. La périodicité de la pulsation  $\omega_0(t)$  est assurée par un dispositif dit de pompage, externe à l'oscillateur.

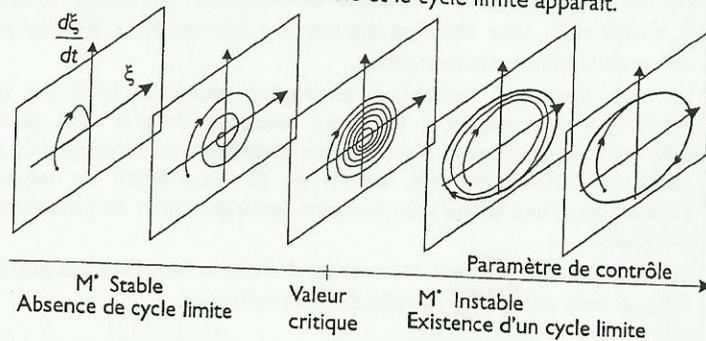
Le point stationnaire  $M^*$  n'est instable que pour certaines valeurs de la fréquence de pompe. Le transfert d'énergie du générateur vers l'oscillateur n'est efficace que pour des fréquences de pompage  $f_p$  voisines de  $f_p \cong \frac{2f_0}{n}$ , où  $f_0$  est la fréquence propre de l'oscillateur et  $n$  un entier positif non nul.

### 4.4. Oscillateurs auto-entretenus

Il est possible de compenser les pertes d'un oscillateur avec un générateur continu. Ces auto-oscillateurs peuvent être déclinés en de multiples variantes. Citons, sans être exhaustif, les noms de Van Der Pol, Wien, Larsen.

Le schéma mathématique général consiste à introduire un terme non linéaire en  $A(\xi) \frac{d\xi}{dt}$  dans l'équation différentielle. Lorsque  $A(\xi)$  est positif, les pertes énergétiques sont plus importantes que l'apport extérieur. Dans le cas contraire, l'énergie de l'oscillateur augmente, ce qui se traduit par une croissance des oscillations avant l'instauration d'un régime périodique. L'énergie mécanique de l'oscillateur n'est pas constante, bien qu'elle soit périodique.

En pratique, le phénomène d'auto-oscillation n'apparaît que pour certaines valeurs d'un paramètre de contrôle. Pour une valeur critique de ce paramètre, une situation stable  $M^*$  devient instable et le cycle limite apparaît.



## THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

### 1. Définitions et théorème du moment cinétique

#### 1.1. Définitions

Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}}$  du point  $M$  de masse  $m$ , de quantité de mouvement  $\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , par rapport à un point  $O$  est par définition :

$$\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le moment d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur le point matériel  $M$ , par rapport à un point  $O$  est, par définition,  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ .

#### 1.2. Théorème du moment cinétique

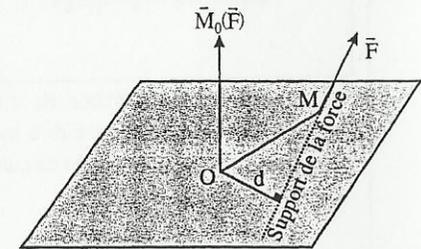
La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel  $M$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ , en un point fixe  $O$  est égale au moment en  $O$  de

$$\text{la résultante des forces s'exerçant sur le point } M : \left( \frac{d\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

#### Remarques :

- le point  $O$  doit être fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
- si le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas galiléen, il faut prendre en compte les forces d'inertie dans l'expression de la résultante des forces.
- l'application du théorème du moment cinétique donne au même titre que la deuxième loi de Newton l'équation différentielle du mouvement.

**Propriété :** la norme du moment en  $O$  de la force  $\vec{F}$  est égal au produit de la norme de  $\vec{F}$  par la distance du point  $O$  au support de la force :  $\|\vec{M}_O(\vec{F})\| = d\|\vec{F}\|$ . Si on



fait « glisser » la force  $\vec{F}$  sur son support, on ne modifie pas le calcul de son moment en  $O$ .

**Cas particulier :** si le moment des forces est nul,  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ , alors  $\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}_s} = \vec{c\acute{e}}$ . Cette constante vectorielle est une constante du mouvement appelée intégrale première associée au moment cinétique.

### 2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe

Par définition, le moment cinétique  $\sigma_\Delta$  par rapport à un axe  $\Delta$  est la projection du moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}_s}$  selon l'axe  $\Delta$  orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$  :

$$\sigma_\Delta = (\vec{\sigma}_O(M)_{I,\mathcal{R}_s}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

On définit de la même façon le moment d'une force par rapport à un axe orienté  $\Delta$  :  $M_\Delta(\vec{F}) \equiv \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$ . Le signe de  $\sigma_\Delta$  et  $M_\Delta(\vec{F})$  dépend bien sûr du sens choisi pour  $\vec{e}_\Delta$ . Pour un sens choisi,  $M_\Delta(\vec{F})$

est positif si la force  $\vec{F}$  fait tourner le point M selon  $\vec{e}_\Delta$  suivant la « règle du tire-bouchon ».

Le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe et orienté  $\Delta$

s'écrit :  $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$ .

**Remarque :** l'axe  $\Delta$  doit être fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

**Cas particulier :** si la projection selon un axe  $\Delta$  du moment des forces est nulle  $M_\Delta(\vec{F}) = 0$ , nous obtenons une constante scalaire du mouvement :  $\sigma_\Delta = \text{cte}$ . La projection du moment cinétique, selon l'axe fixe et orienté  $\Delta$ , se **conserv**e au cours du mouvement.

## MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES CONSERVATIVES

Un système (satellite, planète...), noté M est soumis à la force de gravitation créée par un astre beaucoup plus lourd que le système considéré. Dans ces conditions nous supposons le centre de force (noté O) fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  que nous considérerons galiléen.

### 1. Aspect cinématique des mouvements à force centrale

- Une force est dite centrale si le support de la force passe constamment par un même point que nous noterons O.

- Le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}}$  du point matériel M de masse m par rapport au centre de force O fixe dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  considéré est une constante du mouvement.

- Les vecteurs position  $\vec{OM}$  et vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  étant toujours perpendiculaires à une direction fixe, le mouvement du point M est dans un plan perpendiculaire à cette direction. En coordonnées polaires :

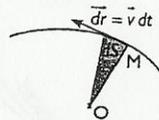
$$\vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}} = r\vec{e}_r \wedge m(r\dot{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = m\vec{C}$$

La constante vectorielle  $\vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  est appelée constante des aires, et  $C = r^2\dot{\theta}$  en coordonnées polaires.

- La vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  garde un signe constant, donc le mouvement se fait toujours dans le même sens.

- L'aire dS balayée par le rayon-vecteur pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dS = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{r}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{v}\| \cdot dt = \frac{1}{2} C \cdot dt$$



- On appelle vitesse aréolaire  $\mathcal{A}$  l'aire balayée par le rayon-vecteur par unité de temps :

$$\mathcal{A} = \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

Celle-ci est une constante du mouvement.

**Loi des aires :** en des temps égaux, le rayon-vecteur  $\vec{r} = \vec{OM}$  balaie des aires égales.

## 2. Mouvements d'un point matériel dans un champ newtonien

### 2.1. Lois de conservation

Un champ de force est dit newtonien si la force d'interaction s'exerçant sur le point matériel varie comme l'inverse du carré de la distance séparant le point M du centre de force. La force newtonienne s'écrit donc :  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$  : il s'agit

d'une force centrale. Elle dérive de l'énergie potentielle  $E_p(r) = -\frac{k}{r}$ . Le choix du signe implique que k est positif si la force est attractive, négatif si la force est répulsive

Force gravitationnelle entre deux masses $m_1$ et $m_2$	$k = G m_1 m_2$
Force électrostatique entre deux charges $q_1$ et $q_2$	$k = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$

- Conservation du moment cinétique :  $\vec{\sigma}_O(M)_{\mathcal{R}} = m\vec{C} = \text{cte}$ .

- Conservation de l'énergie mécanique :  $E_m = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} = \text{cte}$

### 2.2. Energie potentielle effective. Discussion qualitative du mouvement

On fait une étude qualitative du mouvement en se ramenant à la seule variable

$$r : E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{C}{r^2}\right)^2 - \frac{k}{r}$$

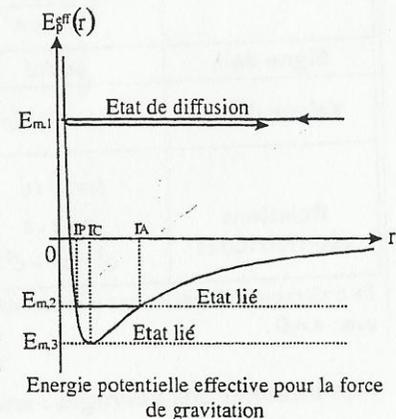
Nous définissons l'énergie potentielle effective comme la grandeur :

$$E_p^{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \text{ . Ainsi, } E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + E_p^{\text{eff}}(r)$$

- Pour  $E_m = E_{m,1} \geq 0$  : la particule s'approche du centre de force jusqu'à une distance  $r_{\min}$  telle que  $E_p^{\text{eff}}(r_{\min}) = E_{m,1}$  puis s'éloigne à l'infini, il s'agit d'un **état de diffusion**.

- Pour  $E_m = E_{m,2}$  : la distance entre la particule et le centre de force reste comprise dans l'intervalle  $r \in [r_p, r_A]$ . Il s'agit d'un **état lié**.

- Pour  $E_m = E_{m,3}$  : la distance entre la particule et le centre de force est égale à  $r_c$ , la trajectoire est circulaire.



### 3. Trajectoires dans un champ de force newtonien

#### 3.1. Équation des trajectoires

L'équation de la trajectoire d'une particule soumise à une force newtonienne  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$  est une conique d'équation en coordonnées polaires :

$$r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

avec  $\varepsilon = +1$  si la force est attractive ( $k > 0$ )

$\varepsilon = -1$  si la force est répulsive ( $k < 0$ )

Par un choix convenable de l'axe polaire (axe définissant l'origine des angles), on peut se ramener à la forme plus simple :

$$r(\theta) = \frac{p}{\varepsilon + e \cos \theta}$$

• Le paramètre focal  $p$  de la conique a pour expression :  $p = \frac{mC^2}{|k|}$

• L'excentricité  $e$  de la conique est liée à l'énergie mécanique  $E_m$  par la

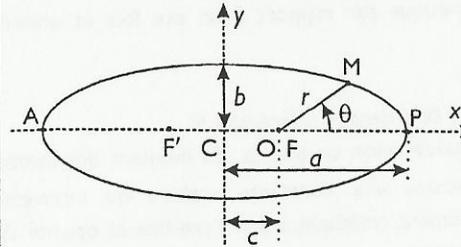
$$e = \sqrt{1 + \frac{2p}{|k|} E_m} = \sqrt{1 + \frac{2mC^2}{k^2} E_m}$$

#### 3.2. Les différentes trajectoires possibles

	Trajectoire elliptique	Trajectoire parabolique	Trajectoire hyperbolique
Domaine de $E_m$	$E_m < 0$	$E_m = 0$	$E_m > 0$
Domaine de $e$	$0 \leq e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Domaine de $r$	$r_p \leq r \leq r_A$ $r_p = \frac{p}{1+e}$ $r_A = \frac{p}{1-e}$	$\frac{p}{2} \leq r < \infty$	Force attractive : $\frac{p}{1+e} \leq r < \infty$ Force répulsive : $\frac{p}{e-1} \leq r < \infty$
Signe de $k$	positif	positif	quelconque
Valeur de $E_m$	$E_m = -k/2a$	$E_m = 0$	$E_m =  k /2a$
Relations géométriques	$p = b^2/a$ $e = c/a$ $a^2 = b^2 + c^2$		$p = b^2/a$ $e = c/a$ $c^2 = a^2 + b^2$

La trajectoire circulaire est vue comme cas particulier de la trajectoire elliptique avec  $e = 0$ .

#### Trajectoire elliptique



$a$  = demi-grand axe  
 $b$  = demi-petit axe  
 $c$  = demi-distance focale  
 $S = \pi ab$  = surface de l'ellipse

(F, F') = foyers

$$MF + MF' = 2a$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

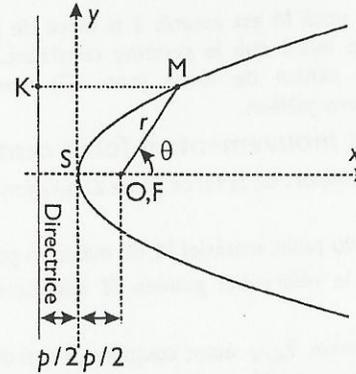
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

A = Apocentre

P = Périgée

Pour un mouvement autour de la Terre (Soleil), A est l'apogée (aphélie) et P le périgée (périhélie).

#### Trajectoire parabolique



F = foyer

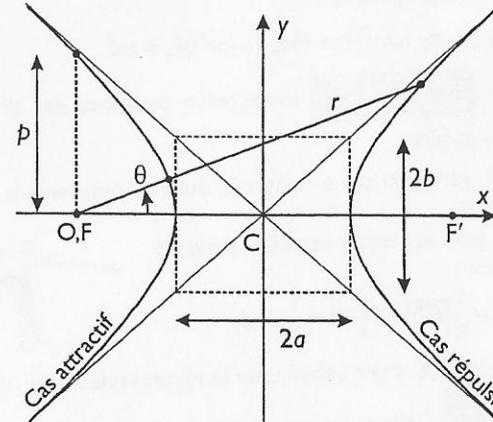
$$y^2 = 2px$$

S = sommet

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

La parabole est le lieu géométrique de tous les points qui sont équidistants de la directrice et du foyer :  $FM = KM$ .

#### Trajectoire hyperbolique



(F, F') = foyers

$$|MF - MF'| = 2a$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$r(\theta) = \frac{p}{\pm 1 + e \cos \theta}$$

$a$  = demi-axe focal  
 $b$  = demi-axe non focal

### 4. Mouvement des planètes, lois de Képler

#### 4.1. Lois de Képler

**Première loi :** les centres des planètes décrivent autour du Soleil des ellipses dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

**Deuxième loi :** le mouvement d'une planète quelconque obéit à la loi des aires. Pendant des durées égales  $\Delta t$ , le rayon vecteur  $\overline{OM}$  balaye des aires égales  $S = \frac{C}{2} \Delta t$  où  $C$  est la constante des aires liée à la planète considérée.

**Troisième loi :** le carré de la période du mouvement est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse, et la constante de proportionnalité est indépendante de la masse de la planète :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

où  $T$  est la période de

révolution elliptique de la planète autour du Soleil,  $a$  le demi-grand axe de la trajectoire elliptique et  $M_s$  est la masse du Soleil.

#### 4.2. Vitesse de libération ou vitesses cosmiques

**Première vitesse cosmique  $v_1$  :** c'est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il décrive une orbite circulaire de rayon  $a$  autour de l'astre de

masse  $M_A$  :

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M_A}{a}}$$

**Deuxième vitesse cosmique :** c'est la vitesse à communiquer initialement à un corps pour qu'il échappe à l'attraction d'un astre de masse  $M_A$  :

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M_A}{a}} = \sqrt{2} v_1$$

Cette vitesse s'appelle encore la vitesse de libération.

#### 4.3. Applications : satellite géostationnaire

Un satellite est dit géostationnaire s'il est fixe dans le référentiel lié à la Terre. Un satellite géostationnaire décrit nécessairement une trajectoire circulaire dans le plan équatorial.

L'altitude des satellites géostationnaires est d'environ  $h_{\text{géo}} = 36000$  km.

## CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

### 1. Cinématique

#### 1.1. Composition des vitesses et des accélérations

Considérons deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre. Dans le cas où il y a un mouvement de rotation d'un référentiel par rapport à l'autre, les dérivées par rapport au temps d'un même vecteur  $\vec{U}$  exprimées dans  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{R}'$  sont différentes :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{U}$$

$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  = vecteur rotation instantané du référentiel  $\mathcal{R}'$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ . Le vecteur rotation a même direction que l'axe instantané de rotation.

**Loi de composition des vitesses angulaires :** pour trois référentiels  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  en mouvement quelconque les uns par rapport aux autres, on a :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Soient  $O$  et  $O'$  deux points fixes origines respectivement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

#### Loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{eM/\mathcal{R}} \\ \vec{v}_{eM/\mathcal{R}} &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M} \end{aligned}$$

On appelle point coïncidant, le point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}'$  coïncidant, à l'instant  $t$  considéré, avec le point mobile  $M$ . La vitesse d'entraînement  $\vec{v}_{eM/\mathcal{R}}$  est donc la vitesse du point  $P$  coïncidant avec  $M$ .

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  : vitesse du point mobile  $M$  exprimée dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$  : vitesse du point mobile  $M$  exprimée dans le référentiel  $\mathcal{R}'$

$\vec{v}_{eM/\mathcal{R}}$  : vitesse d'entraînement du point  $P$  relativement à  $\mathcal{R}$

#### Loi de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{eM/\mathcal{R}} + \vec{a}_{cM/\mathcal{R}} \\ \vec{a}_{eM/\mathcal{R}} &= \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overline{O'M} \\ \vec{a}_{cM/\mathcal{R}} &= 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$  : accélération du point  $M$  exprimée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

$\vec{a}_{eM/\mathcal{R}}$  : accélération d'entraînement du point  $M$  relativement à  $\mathcal{R}$ .

$\vec{a}_{cM/\mathcal{R}}$  : accélération de Coriolis (ou complémentaire) du point  $M$  relativement à  $\mathcal{R}$ .

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point  $P$  coïncidant avec  $M$ .

#### Cas particuliers

	Translation $\vec{\omega} = \vec{0}$	Rotation uniforme autour d'un axe fixe
$\vec{a}_{eM/\mathcal{R}}$	$\vec{a}_{eM/\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}$	$\vec{a}_{eM/\mathcal{R}} = \omega^2 \overline{HM}$ H est le projeté orthogonal de P sur l'axe de rotation
$\vec{a}_{cM/\mathcal{R}}$	$\vec{a}_{cM/\mathcal{R}} = \vec{0}$	$\vec{a}_{cM/\mathcal{R}} = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$

## 2. Dynamique et théorèmes

### 2.1. Forces d'inertie

La relation fondamentale de la dynamique (2<sup>ème</sup> loi de Newton) a été écrite dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :  $m\bar{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum_i \bar{F}_i(M)$ ,  $\sum_i \bar{F}_i(M)$  représentant la résultante des forces d'interaction s'exerçant sur le mobile M. Elle s'écrit dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  quelconque :

$$\begin{cases} m\bar{a}_{M/\mathcal{R}'} = \sum_i \bar{F}_i(M) + \bar{F}_{ie}(M) + \bar{F}_{ic}(M) \\ \bar{F}_{ie}(M) = -m\bar{a}_{e,M/\mathcal{R}'} ; \bar{F}_{ic}(M) = -m\bar{a}_{c,M/\mathcal{R}'} \end{cases}$$

$\bar{F}_{ie}(M)$  : force d'inertie d'entraînement s'exerçant en M.

$\bar{F}_{ic}(M)$  : force d'inertie de Coriolis (ou complémentaire) s'exerçant en M.

### 2.2. Énergie potentielle centrifuge

Dans le cas particulier où le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation uniforme autour d'un axe fixe, la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle centrifuge :  $E_p^{cent} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HM^2 + cte$ , où H est le projeté orthogonal du point M sur l'axe de rotation.

### 2.3. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique est généralisable au cas des référentiels non galiléens à condition de prendre en compte les forces d'inertie.

La puissance de la force d'inertie de Coriolis étant toujours nulle, on a :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B} \left( \sum_i \bar{F}_i \right) + W_{A \rightarrow B} (\bar{F}_{ie})$$

**Théorème** : la variation d'énergie cinétique d'un point M de masse m est égale au travail de la résultante des forces et de la force d'inertie d'entraînement s'exerçant sur M, travail évalué sur le trajet ( $\Gamma$ ) suivi par M de A à B.

### 2.4. Théorème du moment cinétique

**Théorème** : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M relativement au référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , en un point fixe  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  est égale au moment en  $O'$  de la résultante des forces d'interaction et des forces d'inertie s'exerçant sur le point M :

$$\left( \frac{d\bar{c}_{O'}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \bar{M}_{O'} \left( \sum_i \bar{F}_i \right) + \bar{M}_{O'} (\bar{F}_{ie}) + \bar{M}_{O'} (\bar{F}_{ic})$$

## 3. Caractère galiléen approché de quelques référentiels usuels

### 3.1. Le référentiel de Copernic

C'est un référentiel  $\mathcal{R}_{Cop}$  dont le centre de masse du solide de référence est celui du système solaire, les trois axes sont dirigés vers trois étoiles « fixes ».

Les expériences montrent qu'il peut être considéré comme un référentiel galiléen avec une excellente approximation.

### 3.2. Le référentiel héliocentrique

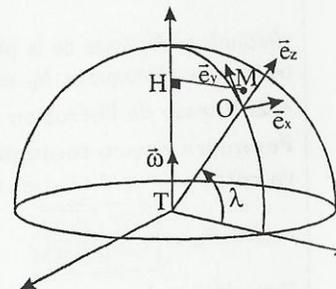
C'est le référentiel dont le centre de masse du solide de référence est le soleil, les trois axes dirigés vers trois étoiles « fixes ». Il peut, lui aussi, être considéré comme galiléen mais dans une approximation moindre car on néglige les masses des planètes et de leurs satellites.

### 3.3. Référentiel géocentrique

C'est le référentiel dont le centre de masse du solide de référence est la Terre, les trois axes dirigés vers trois étoiles « fixes ».

### 3.4. Référentiel terrestre local

Le référentiel terrestre local d'origine un point O à la surface de la Terre, a ses axes  $Ox$  dirigé vers l'Est,  $Oy$  vers le Nord et  $Oz$  vers le zénith (verticale du lieu considéré). Dans le référentiel terrestre, il faut tenir compte de la rotation de la Terre sur elle-même. Il peut être considéré comme galiléen si la durée de l'expérience est suffisamment courte pour pouvoir négliger les effets de la force de Coriolis.



Le référentiel  $\mathcal{R}_T$  lié à la terre en rotation uniforme autour de l'axe des pôles est un référentiel non galiléen. Pour obtenir la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre, il faut rajouter à la force d'attraction terrestre  $m\bar{A}_T(M)$  et aux autres forces  $\bar{F}_{ext}$  (tension, réaction du support,...), les forces d'inertie centrifuge,  $\bar{F}_{ie} = m\omega^2 \overline{HM}$  où H est le projeté de M sur l'axe de rotation et la force d'inertie de Coriolis,  $\bar{F}_{ic}(M) = -2m\bar{\Omega} \wedge \bar{v}_{M/\mathcal{R}_T}$ . La relation

fondamentale s'écrit :  $\bar{a}_{M/\mathcal{R}_T} = \frac{\bar{F}_{ext}}{m} + [\omega^2 \overline{HM} + \bar{A}_T(M)] - 2\bar{\Omega} \wedge \bar{v}(M)_{/\mathcal{R}_{terrestre}}$ ,

où  $\bar{A}_T(M)$  est le champ gravitationnel terrestre.

**Poids** : il correspond à la somme vectorielle de la force gravitationnelle due à la Terre et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de

la Terre autour de son axe des pôles :  $\bar{P} = m\bar{A}_T(M) - m\bar{a}_{e,M/\mathcal{R}_{cop}}$ . Le champ de

pesanteur  $\bar{g}$  correspond donc à la somme vectorielle,

$$\bar{g}(M) = \bar{A}_T(M) - \bar{a}_{e,M/\mathcal{R}_{cop}} = \bar{A}_T(M) + \omega^2 \overline{HM}$$

### 3.5. Approximation du référentiel galiléen

• Pour l'interprétation du mouvement du pendule de Foucault ou de l'expérience de la déviation vers l'est, on prend en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre, mais on peut considérer le référentiel géocentrique comme galiléen.

• En dehors de l'étude des phénomènes cités ci-dessus, le référentiel terrestre sera un référentiel galiléen acceptable à condition de considérer le poids et non pas la seule attraction gravitationnelle.

# SYSTÈME FORMÉ DE DEUX POINTS MATÉRIELS

## I. Définitions

### I.1. Éléments cinétiques

Soit  $(\Sigma)$  le système formé de deux particules  $M_1$  et  $M_2$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . On définit, relativement à un référentiel quelconque  $\mathcal{R}$ :

- La résultante cinétique  $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}}$  comme la quantité de mouvement totale du système :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = m_1 \vec{v}_{M_1/\mathcal{R}} + m_2 \vec{v}_{M_2/\mathcal{R}}$$

- Le moment cinétique total du système par rapport à un point  $O$ :

$$\vec{\sigma}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_{M_1/\mathcal{R}} + \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_{M_2/\mathcal{R}}$$

- L'énergie cinétique totale du système :

$$E_C(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m_1 v_{M_1/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{M_2/\mathcal{R}}^2$$

### I.2. Centre d'inertie et référentiel barycentrique

**Définition :** le centre de masse ou centre d'inertie  $G$  du système  $\Sigma$  est le barycentre des points  $M_i$  affectés des coefficients (masses)  $m_i$ . Pour deux points matériels,

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

Cette définition du centre d'inertie est indépendante du point particulier  $O$  choisi. Si le point  $O$  est choisi en  $G$ , il vient

$$m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0}$$

**Définition :** le référentiel barycentrique (ou du centre de masse)  $\mathcal{R}^*$ , défini relativement au référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , est le référentiel animé par rapport à  $\mathcal{R}$  d'un mouvement de translation de vitesse  $\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$  à chaque instant. Par définition de  $\mathcal{R}^*$ , le vecteur rotation du référentiel  $\mathcal{R}^*$  relativement au référentiel  $\mathcal{R}$  est nul à chaque instant :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

#### Propriétés :

- La résultante cinétique s'exprime en fonction de la vitesse du centre d'inertie  $G$  du système  $\Sigma$  par la relation :

$$\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

- Dans le référentiel barycentrique,  $\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{p}^*(\Sigma) = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$ .

La quantité de mouvement totale du système dans le référentiel barycentrique est nulle.

## 2. Les théorèmes généraux

Nous notons  $\vec{F}_{12}$  la force que le point  $M_1$  exerce sur le point  $M_2$  et  $\vec{F}_{21}$  la force que le point  $M_2$  exerce sur le point  $M_1$ . D'après le principe des actions mutuelles,  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$ . Les forces  $\vec{F}_{12}$  et  $\vec{F}_{21}$  sont des forces intérieures au système  $\Sigma$ . On notera  $\vec{F}_{1,ext}$  et  $\vec{F}_{2,ext}$  les forces que des éléments extérieurs au

système  $\Sigma$  exercent respectivement sur les points  $M_1$  et  $M_2$ , et  $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,ext}$  la résultante des forces extérieures.

### 2.1. Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique)

La dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique du système  $\Sigma$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est égale à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur

$$\Sigma \text{ dans ce référentiel } \mathcal{R} : \left( \frac{d\vec{p}(\Sigma)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext}$$

#### Remarques :

- si le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas galiléen, il faut prendre en compte les forces d'inertie.
- le théorème du centre d'inertie ne fait intervenir que les forces extérieures au système.
- Dans le cas où  $\Sigma$  est un système isolé,  $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$  et  $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{cte}$ . Si le référentiel  $\mathcal{R}$  est galiléen, le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  est alors lui-même galiléen.

### 2.2. Théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps, relativement à un référentiel  $\mathcal{R}$ , du moment cinétique du système  $(\Sigma)$  pris par rapport à un point fixe  $O$  dans  $\mathcal{R}$  est égale au moment en  $O$  de la résultante des forces extérieures agissant sur  $(\Sigma)$  :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \sum M_O(\vec{F}_{ext})$$

#### Remarques :

- si le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.
- le moment cinétique par rapport à un axe  $\sigma_\Delta$  est la projection du moment cinétique  $\vec{\sigma}_{O/\mathcal{R}}$  selon un axe  $\Delta$  orienté par le vecteur  $\vec{e}_\Delta$  :

$\sigma_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}} = (\vec{\sigma}_O(\Sigma)_{/\mathcal{R}}) \cdot \vec{e}_\Delta$ . Le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe et orienté  $\Delta$  s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma_\Delta(\Sigma)_{/\mathcal{R}}}{dt} = M_O(\vec{F}_{ext}) \cdot \vec{e}_\Delta = \sum M_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

- le théorème du moment cinétique s'applique dans le référentiel barycentrique avec  $O$  et  $G$  confondus sans qu'il y ait à tenir compte des forces d'inertie.

### 2.3. Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

#### Théorème de la puissance cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du système  $(\Sigma)$  est égale à la somme des puissances des forces intérieures et des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\frac{dE_C(\Sigma)_{/\mathcal{R}}}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext}) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \cdot \vec{v}_{M_1/\mathcal{R}} + (\vec{F}_{2,ext} + \vec{F}_{1,ext}) \cdot \vec{v}_{M_1/\mathcal{R}}$$

### Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique du système ( $\Sigma$ ) entre deux points A et B est égale au travail des forces intérieures et extérieures s'exerçant sur ( $\Sigma$ ), travail évalué sur le trajet suivi par ( $\Sigma$ ) de A à B :

$$\Delta E_C(\Sigma) = E_C(\Sigma, A) - E_C(\Sigma, B) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{int}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

#### Remarques :

- la puissance et le travail des forces intérieures au système ( $\Sigma$ ) sont indépendants du référentiel choisi.
- la puissance des forces intérieures n'est nulle que dans le cas particulier d'un système indéformable.
- tous les théorèmes écrits pour deux particules en interaction sont directement généralisables à un nombre quelconque de particules en interaction.

### 3. Réduction du problème à deux corps

Nous considérons le système isolé de deux particules :  $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ . D'autre part, les interactions entre les points  $M_1$  et  $M_2$  sont traduites par des forces intérieures conservatives (interaction gravitationnelle, électrostatique, élastique...): elles sont donc associées à une énergie potentielle  $E_p$ .

#### 3.1. Réduction à un problème à un corps

L'étude d'un système isolé ( $\Sigma$ ) de deux points matériels se ramène à l'étude du mouvement d'une particule réduite (fictive) P. Le tableau ci-dessous résume les propriétés de la particule réduite ou particule fictive P.

Masse réduite $\mu$	$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$
Vecteur position $\vec{r} = \overline{GP}$	$\vec{r} = \overline{GP} = \overline{M_1 M_2}$
Vitesse $\vec{v}_{P/R}$	$\vec{v}_{P/R} = \vec{v}_{M_1/R} - \vec{v}_{M_2/R} = (d\overline{M_1 M_2} / dt)_R$
Accélération $\vec{a}_{P/R}$	$\vec{a}_{P/R} = \vec{a}_{M_1/R} - \vec{a}_{M_2/R} = (d^2 \overline{M_1 M_2} / dt^2)_R$
Force $\vec{F}(P)$ s'exerçant sur P	$\vec{F}(P) = \vec{F}_{12}$
Moment cinétique $\vec{\sigma}_G(P)_{R^*} = \vec{\sigma}_G^*(P)$	$\vec{\sigma}_G^*(P)_{R^*} = \vec{\sigma}_G^*(\Sigma) = \overline{M_1 M_2} \wedge \mu \vec{v}_{P/R}$
Énergie cinétique $E_C(P)_{R^*}$	$E_C^*(P)_{R^*} = E_C^*(\Sigma) = \frac{1}{2} \mu v_{M/R}^2$

Les positions des points  $M_1$  et  $M_2$  dans le référentiel barycentrique  $R^*$  sont

données par les relations :

$$\begin{cases} m_1 \overline{GM_1} + m_2 \overline{GM_2} = \vec{0} \\ \vec{r}(t) = \overline{GM_2} - \overline{GM_1} \end{cases}$$

$$\overline{GM_1} = -\frac{m_2}{m_2 + m_1} \vec{r}(t) ; \overline{GM_2} = \frac{m_1}{m_2 + m_1} \vec{r}(t)$$

La trajectoire de la particule réduite P dans le référentiel barycentrique  $R^*$  donne, par homothétie, celles des deux particules  $M_1$  et  $M_2$  dans ce référentiel.

**Cas limite où  $m_2 \ll m_1$  :** ce cas peut correspondre à un satellite autour de la terre, une planète autour du soleil, un électron autour du noyau ...

- la masse réduite est proche de  $m_2$  :  $\mu = \frac{m_2 m_1}{m_2 + m_1} \approx m_2$
- le point  $M_1$  est pratiquement confondu avec le centre de masse G ( $M_1$  est pratiquement immobile dans  $R^*$ ) et le point  $M_2$  coïncide avec le point P.

#### 3.2. Lois de conservation

Le tableau ci-dessous résume les lois de conservation et les conséquences.

Grandeur conservée	Conséquence
Résultante cinétique : $\overline{\vec{p}(\Sigma)}_{R^*} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{G/R^*} = \overline{cte}$	Si le référentiel $R$ est galiléen, alors $R^*$ l'est également.
Moment cinétique total dans $R$ et dans $R^*$ : $\overline{\vec{\sigma}_O(\Sigma)}_{R^*} = \overline{cte}$ ; $\overline{\vec{\sigma}_G^*(\Sigma)} = \overline{cte}$	Le mouvement de la particule réduite P et donc des points matériels $M_1$ et $M_2$ est plan. Il obéit à la loi des aires.
Énergie mécanique dans $R$ et $R^*$ : $E_m(\Sigma)_{R^*} = E_C(\Sigma)_{R^*} + E_p = \overline{cte}$ $E_m^*(\Sigma) = E_C^*(\Sigma) + E_p = \overline{cte}$	Possibilité d'une étude qualitative du mouvement à partir de la notion d'énergie potentielle effective.

## MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE POINTS ET DU SOLIDE

### 1. Cinématique d'un solide

Un solide est un système continu et indéformable de points matériels.

#### 1.1. Relation fondamentale de la cinématique du solide

Soient A et M, deux points quelconques d'un solide (S) et  $R$  un référentiel quelconque, il existe un vecteur  $\vec{\omega}$ , le vecteur rotation du solide dans  $R$  tel que :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overline{AM}$$

#### 1.2. Axe de rotation d'un solide et mouvements d'un solide

Le mouvement d'un solide (S), par rapport au référentiel  $R$ , se décompose toujours en une rotation de vecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\Delta$  (où  $\vec{e}_\Delta$  est un vecteur unitaire porté par l'axe instantané de rotation  $\Delta$ ) autour de l'axe  $\Delta$ , non fixe, et d'une translation parallèlement à l'axe  $\Delta$ .

**Cas particulier n°1 :** mouvement de **translation pure**. Tous les points du solide (S) ont même vitesse à une date t donnée.

**Cas particulier n°2 :** mouvement de **rotation pure**. Le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  s'écrit dans ce cas :  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\Delta = \dot{\theta} \vec{e}_\Delta$ . Tous les points M du solide (S) ont un mouvement circulaire de rayon  $r = AM$  (A est le projeté de M sur l'axe  $\Delta$  qui est fixe) autour de l'axe  $\Delta$  et de vitesse  $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = r\omega \vec{e}_\theta = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

**1.3. Roulement et glissement d'un solide**

Soient deux solides (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) en contact au point géométrique I à la date t.

Le point I<sub>1</sub> (respectivement I<sub>2</sub>) est le point matériel appartenant au solide (S<sub>1</sub>) (respectivement (S<sub>2</sub>)) coïncidant avec le point I à la date t.

La **vitesse de glissement**  $\vec{v}_g$  au point I de (S<sub>2</sub>) sur (S<sub>1</sub>) est définie par la relation :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1}$$

**Remarque :** la condition de **non-glissement** (ou condition d'adhérence) s'écrit :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2} - \vec{v}_{I_1} = \vec{0}$$

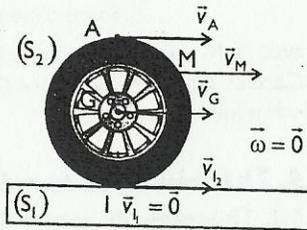
Les cas usuels de mouvement d'un solide en contact avec un autre solide sont les suivants :

**Mouvement de glissement pur.**

La roue (S<sub>2</sub>) présente un mouvement de translation pure par rapport à la route (S<sub>1</sub>).

$$\vec{\omega} = \vec{0} ; \vec{v}_g \neq \vec{0} ; \vec{v}(I) = \vec{0} ;$$

$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(G) = \vec{v}(A) = \vec{v}(M)$  quel que soit le point M de la roue.

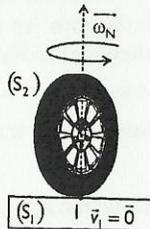


**Mouvement de pivotement pur.**

La roue pivote autour d'un axe vertical.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N ; \vec{\omega}_T = \vec{0} ; \vec{v}_g = \vec{0} ;$$

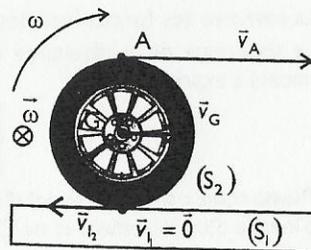
$$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(I) = \vec{v}(I) = \vec{0}.$$



**Mouvement de roulement avec glissement.**

La roue (S<sub>2</sub>) patine, c'est-à-dire qu'elle glisse par rapport à la route (S<sub>1</sub>) et qu'elle roule. La roue tourne autour de son centre G et elle glisse par rapport à la route au point I.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_T ; \vec{\omega}_N = \vec{0} ; \vec{v}_g \neq \vec{0}.$$



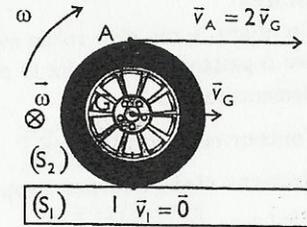
**Mouvement de roulement sans glissement.**

Ce cas correspond à la marche normale d'une voiture :  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_T ; \vec{\omega}_N = \vec{0} ;$

$$\vec{v}_g = \vec{0}$$

$$\vec{v}(I_2) = \vec{v}(I_1) = \vec{v}(I) = \vec{0}$$

$$\vec{v}(G) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IG} , |v(G)| = R\omega$$

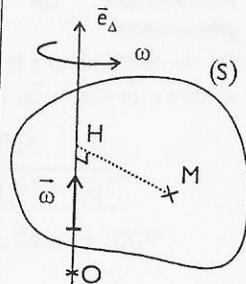


**2. Éléments cinétiques**

	Systèmes de points	Solide (S)
<b>Masse totale</b>	$m_{tot} = \sum_i m_i$	La masse volumique est $\rho(M) = \delta m / \delta \tau$ $m_{tot} = \iiint_{\text{solide}(S)} \rho(M) \delta \tau$
<b>Centre de masse (ou de gravité ou d'inertie) G</b>	$OG = \frac{\sum_i m_i OM}{m_{tot}}$ $\sum_i m_i GM = 0$	$OG = \frac{\iiint_{\text{solide}(S)} OM dm}{m_{tot}}$ $\iiint_{(S)} \rho(M) GM d\tau = 0$
<b>Quantité de mouvement</b>	$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$	$\vec{P} = \int_{(S)} \vec{v}(M) dm = \int_{(S)} \rho(M) \vec{v}(M) \delta \tau$
<b>Résultat important</b>	$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m_{tot} \vec{v}_G$	$\vec{P} = \iiint_{(S)} \vec{v}(M) dm = m_{tot} \vec{v}_G$
<b>Moment cinétique par rapport à un point O</b>	$\vec{\sigma}_{O/S} = \sum_i \vec{\sigma}_O(M)_i$ $= \sum_i OM \wedge m_i \vec{v}_i$	$\vec{\sigma}_{O/S} = \iiint_{(S)} OM \wedge \vec{v}(M) dm$ $= \iiint_{(S)} OM \wedge \vec{v}(M) \rho(M) \delta \tau$
<b>Propriété</b>	soit O' un autre point, on a dans tous les cas :	$\vec{\sigma}_{O'/S} = \overrightarrow{OO'} \wedge m_{tot} \vec{v}_G + \vec{\sigma}_O$
<b>Energie cinétique</b>	$E_{T/S} = \sum_i E_{T/S}(M) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$	$E_{T/S} = \iiint_{(S)} \frac{1}{2} v^2(M) dm$

### Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

On étudie le cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe  $\Delta$  passant par un point O et défini par le vecteur élémentaire  $\vec{e}_\Delta$ .



Vecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\Delta$

Moment cinétique par rapport à  $\Delta$ : noté  $\sigma_\Delta$  et défini par :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}(O) \cdot \vec{e}_\Delta$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  noté  $J_\Delta$

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe  $\Delta$  est par définition :

$$J_\Delta = \iiint_V r^2 dm, \quad r = HM$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe  $\Delta$ , le point M étant le point courant parcourant l'ensemble du volume V du solide.

On montre que  $\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$  où  $J_\Delta$  s'exprime en  $kg \cdot m^2$ .

$J_\Delta$  existe indépendamment du mouvement, c'est une caractéristique du solide donné.

Cas particulier : cylindre homogène de masse m et de rayon R tournant

autour de son axe de symétrie de révolution :  $J_\Delta = \frac{1}{2} m R^2$

## 3. Référentiel barycentrique

### 3.1. Propriétés

- le centre de masse G du système de points ou du solide (S) est fixe dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ .

- Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}$  du référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  par rapport au référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  et donc l'accélération de Coriolis sont nuls :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$  ;  $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_i = \vec{0} \wedge \vec{v}_i = \vec{0}$ .

- la quantité de mouvement totale  $\vec{P}^*$  dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  est nulle :  $\vec{P}^* = \vec{0}$

- le moment cinétique  $\vec{\sigma}^*(O)$  exprimé dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  est indépendant du point O choisi. On le note donc  $\vec{\sigma}^*$

- l'énergie cinétique barycentrique  $E_c^*$  s'écrit dans le référentiel

barycentrique  $\mathcal{R}^*$  :  $E_c^* = E_{c/\mathcal{R}^*} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$  et  $E_c^* = E_{c/\mathcal{R}} = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{v}^2(M) dm$

### 3.2. Théorèmes de Koenig

$$\vec{\sigma}_{/\mathcal{R}} = \vec{\sigma}^* + OG \wedge \vec{p}_{/\mathcal{R}}$$

et

$$E_{c/\mathcal{R}} = E_c^* + \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2$$

## 4. Les actions mécaniques

Un solide de volume V et de surface S subit deux catégories de forces : les forces volumiques  $\vec{F}_V$  et les forces surfaciques  $\vec{F}_S$ .

Les forces surfaciques  $\vec{F}_S$ , comme les forces pressantes et les frottements, traduisent les actions de contact entre la surface S du solide et le milieu extérieur au solide. Ce sont des forces à courte portée.

Les forces volumiques  $\vec{F}_V$  traduisent les forces subies par chaque point M se trouvant au sein du volume V du solide (Sol). Une force volumique  $\vec{F}_V$  (en Newton N), associée à la densité volumique de force  $\vec{f}_V$  (en Newton par unité de volume  $N \cdot m^{-3}$ ) s'écrit :  $\vec{F}_V = \iiint_V d\vec{F}_V = \iiint_V \vec{f}_V \delta\tau$ . Ce sont des forces à longue portée.

Le moment en un point O de ces forces est :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_V) = \iiint_V \vec{OM} \wedge d\vec{F}_V(M) = \iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{f}_V(M) \delta\tau$$

Cas des forces d'inertie : ce sont des forces volumiques. On a

$$\text{Force d'inertie d'entraînement : } \vec{F}_{ic} = -m_{tot} \vec{a}_c(G)$$

$$\text{Force d'inertie de Coriolis : } \vec{F}_{ic} = -m_{tot} \vec{a}_c(G)$$

avec  $\vec{a}_c(G)$  et  $\vec{a}_c(G)$  respectivement les accélérations d'entraînement et de Coriolis du centre de masse G du système. (Voir le chapitre correspondant en mécanique du point).

## 5. Théorèmes de la mécanique des systèmes

### 5.1. Théorème du centre de masse

Nous distinguons les actions (appelées aussi efforts) intérieures des actions extérieures appliquées à un système de points.

La somme des forces appliquées à un système de points de masse m, se décompose en une force extérieure de résultante  $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i}$  et une force

intérieure de résultante  $\vec{F}_{int} = \sum_i \left( \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i \rightarrow j} \right)$ .

La somme des forces intérieures appliquées au système de points est nulle.

Le théorème de la résultante cinétique (appelé aussi théorème du centre de masse) s'exprime par :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{a}_G = \vec{F}_{ext}$$

Remarque : si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, il faut rajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis à la somme des forces extérieures

## 5.2. Théorème du moment cinétique

Soit O, un point fixe du référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , le **théorème du moment cinétique** appliqué à un système de points ou à un solide, dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = M_O(\vec{F}_{ext})$$

Le moment des forces intérieures par rapport au point O est nul :  $M_{O,int} = \vec{0}$ . Le moment des forces se réduit aux seules forces extérieures (et éventuellement les forces d'inertie).

## 5.3. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe $\Delta$ :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

Avec,  $\sigma_\Delta = (\vec{\sigma}_O(M)) \cdot \vec{e}_\Delta$  et  $M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = M_O(\vec{F}_{ext}) \cdot \vec{e}_\Delta$ .

Dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ , le théorème du moment cinétique

s'écrit :  $\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = M_G(\vec{F}_{ext}^*)$  et, en projection  $\frac{d\sigma_{\Delta_c}^*}{dt} = M_{\Delta_c}(\vec{F}_{ext}^*)$

que le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  soit galiléen ou non.

## 5.4. Théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe

Le solide (Sol) tourne autour d'un axe de rotation  $\Delta$  fixe par rapport au référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ . Le moment cinétique, en projection sur l'axe  $\Delta$  s'exprime par :

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$$

Le théorème du moment cinétique, dans le référentiel d'étude galiléen, se traduit par :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, il faut tenir compte, du moment de la force d'inertie d'entraînement et du moment de la force d'inertie de Coriolis.

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  s'écrit :

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = M_G(\vec{F}_{ext}^*)$$

La projection du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  sur l'axe de rotation orienté  $\Delta_c$  s'écrit :

$$J_{\Delta_c} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta_c}(\vec{F}_{ext}^*)$$

Ces deux derniers théorèmes sont très intéressants car ils ne nécessitent pas l'utilisation des moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, même dans le cas où le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  n'est pas galiléen.

## 6. Théorème de l'énergie cinétique

### 6.1. Théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système de points

Le théorème de la puissance cinétique appliqué à un point  $M_i$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  s'écrit :  $\frac{dE_{c/\mathcal{R}_g}(M_i)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_i)$  où  $\mathcal{P}(\vec{F}_i)$  est la puissance des forces subies par le point  $M_i$ .

Le théorème de la puissance cinétique pour le système s'écrit :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}_g}(M_i)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext \rightarrow i}) + \mathcal{P}(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i})$$

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour le système s'écrit :

$$\Delta E_{c/\mathcal{R}_g} = W_{int} + W_{ext}$$

Dans le cas le plus général, le **travail des forces intérieures n'est pas nul**. Ces théorèmes se généralisent à un solide (dans ce cas  $\mathcal{P}_{int} = 0$  car un solide est un système rigide) et à un système (rigide ou non) de solides ( $\mathcal{P}_{int} \neq 0$  a priori). Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, il faut tenir compte de la **puissance de la force d'inertie d'entraînement**.

### 6.2. Expression de l'énergie cinétique et de la puissance pour un solide

$$E_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} v(O)^2 + \frac{1}{2} \sigma_O \omega$$

Si le solide (S) tourne autour d'un axe de rotation  $\Delta$  fixe par rapport à un référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ . L'énergie cinétique devient :

$$E_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

Dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , l'énergie cinétique d'un solide de masse  $m$  tournant autour d'un axe fixe  $\Delta_c$  dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  s'exprime par la forme pratique du théorème de Koenig :

$$E_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J_{\Delta_c} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{G/\mathcal{R}}^2$$

Le premier terme représente « l'énergie cinétique de rotation » dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ , le second terme représente « l'énergie cinétique de translation » dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ .

La **puissance** des forces extérieures qui s'appliquent à un solide s'écrit :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(A) + \overline{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{\omega}$$

où A est un point quelconque du solide (S). La puissance des forces intérieures est nulle pour un solide car il s'agit d'un objet rigide.

Si le système de forces est équivalent à un couple de forces de moment  $\vec{\Gamma}$ , la résultante des forces  $\vec{F}$  est nulle et la puissance est indépendante du point A choisi :  $\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}(A) + \overline{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$ .

La **puissance** et le **travail** d'un système de forces **dépendent du référentiel** choisi.

## 7. Cas de plusieurs solides

Les théorèmes vus sont toujours valables, il suffit de **sommer les mêmes grandeurs** des différents solides. Par exemple :

- l'énergie cinétique d'un ensemble de solides est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun,
- le moment cinétique d'un ensemble de solides est égal à la somme des moments cinétiques de chacun, calculés au même point.

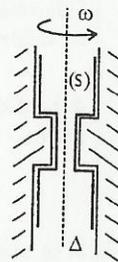
## 8. Contact de deux solides ; lois de Coulomb

### 8.1. Liaison rotule et liaison pivot, liaisons parfaites

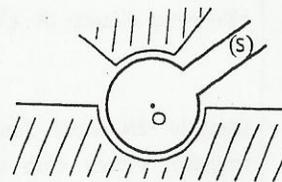
Un solide est soumis à des liaisons s'il est astreint à rester en contact avec d'autres solides.

- La **liaison pivot** rend fixe un axe lié au solide (S) :

le mouvement du solide (S) est décrit par une seule variable qui est l'angle de rotation  $\theta$  autour de cet axe ( $\dot{\theta} = \omega$ ). Si la liaison est réalisée sans frottement, l'action sur l'axe a donc un moment nul parallèlement à l'axe.



- La **liaison rotule** rend fixe un point O du solide (S) : le mouvement du solide (S) est décrit par trois angles de rotation autour de ce point fixe O. En absence de frottements, le moment de l'action du support sur la rotule est nul en O.



- La **liaison glissière** (contact de glissement) assure le contact permanent entre deux solides (ou entre le solide et le support). L'action de liaison  $\vec{R}$  se décompose en une composante tangentielle  $\vec{R}_t$  qui est nulle s'il n'y a pas de frottement et une composante normale  $\vec{R}_n$ .

- Une liaison entre un solide (S) et un support est dite **parfaite** si les actions de contact ont une **puissance nulle** dans le référentiel lié au support.

### 8.2. Lois de Coulomb

L'action de contact exercée par un solide ( $S_1$ ) sur un solide ( $S_2$ ), notée  $\vec{R}$  (ou  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ), peut se décomposer de la manière suivante :  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$  où  $\vec{R}_n$  est la composante normale de l'action  $\vec{R}$  et où  $\vec{R}_t$  est la composante tangentielle de l'action  $\vec{R}$ .

- Loi de Coulomb dans le **cadre du glissement** :  $\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) \neq \vec{0}$ .

La liaison est non parfaite. La composante tangentielle de la réaction  $\vec{R}$  est opposée à la vitesse de glissement :  $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_g \leq 0$  où  $\vec{v}_g$  est la vitesse de glissement au point I de ( $S_2$ ) sur ( $S_1$ ). Les normes des composantes normale et tangentielle de l'action  $\vec{R}$  sont reliées par la relation :  $\|\vec{R}_t\| = f_d \cdot \|\vec{R}_n\|$  où  $f_d$  est le coefficient de frottement dynamique (sans dimension).

- Loi de Coulomb dans le cadre du **non glissement** :  $\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) = \vec{0}$ .

Les normes des composantes normale et tangentielle de l'action  $\vec{R}$  sont reliées par la relation :  $\|\vec{R}_t\| \leq f_s \cdot \|\vec{R}_n\|$  où  $f_s$  est le coefficient de frottement statique.

Le coefficient  $f_s$  est sans dimension.

**Remarque** :  $f_s \geq f_d$ , mais on confond souvent les deux valeurs.

### 8.3. Puissance des actions de contact

La puissance des actions de contact entre solides est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{frot}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot [\vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1)] = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g$$

Dans le cadre du mouvement **avec** glissement :  $\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) \neq \vec{0}$  et

$\mathcal{P}_{\text{frot}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g = \vec{R} \cdot \vec{v}_g = \vec{R}_t \cdot \vec{v}_g < 0$ . Il y a dissipation d'énergie par frottement

Dans le cadre du mouvement **sans** glissement :  $\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) = \vec{0}$  et

$\mathcal{P}_{\text{frot}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g = \vec{0}$ . Il n'y a pas dissipation d'énergie dans le cadre du roulement sans glissement pour un contact **ponctuel** (ou contact sur une droite dans le cas d'un cylindre sur une route) au point I (pourtant, il y a des frottements entre les deux solides).

... JE PEUX DONC AFFIRMER QUE  
LE COTON TISE A UNE  
PUISSANCE DE ZOUAFES



# Électrocinétique - Électronique

## LOIS GÉNÉRALES DANS LE CADRE DE L'APPROXIMATION DES RÉGIMES QUASI-STATIONNAIRES

### 1. Lois générales dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire

#### 1.1. Approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S.)

Les tensions et intensités dans le circuit ne dépendent que du temps. L'intensité est la même en tout point d'une branche.

#### 1.2. Intensité du courant électrique

Le vecteur densité volumique de courant de charges électriques est défini par :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i, \text{ où } \rho_i \text{ est la densité volumique des charges } i \text{ et } \vec{v}_i \text{ leur vitesse.}$$

L'intensité du courant à travers une section  $S$  est définie par  $i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ . Celle-ci

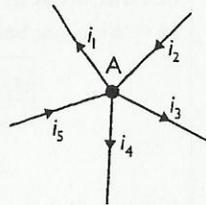
s'exprime encore par  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  où  $dq$  est la charge élémentaire algébrique qui traverse pendant  $dt$  une section du conducteur. L'unité de l'intensité est l'ampère de symbole A.

#### 1.3. Loi des nœuds

La somme des courants arrivant et repartant d'un nœud est nulle.

$$\sum \epsilon_k i_k = 0$$

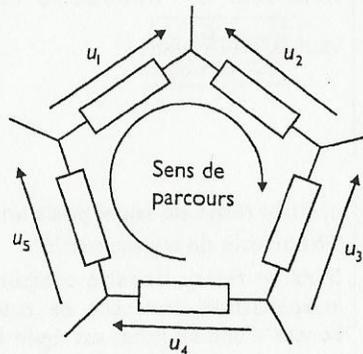
Avec :  $\epsilon_k = +1$  pour tout courant circulant dans un conducteur orienté vers le nœud et  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.



#### 1.4. Loi des mailles

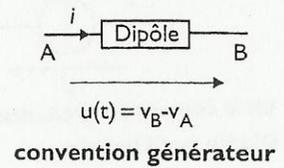
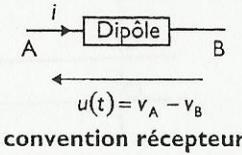
Il faut choisir un sens arbitraire de parcours (orientation de la maille). La loi des mailles exprime que la somme algébrique des tensions le long d'une maille orientée est nulle. La relation  $\sum \epsilon_k u_k = 0$  traduit la deuxième loi de Kirchhoff.

$\epsilon_k = +1$  si la tension  $u_k$  est orientée dans le même sens que le sens de parcours de la maille,  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.



## 2. Le dipôle électrocinétique

### 2.1. Conventions d'orientation



### 2.2. Puissance reçue par un dipôle

La puissance électrique reçue par le dipôle AB s'écrit, en convention

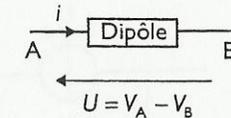
récepteur :  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ .

### 2.3. Dipôles passifs linéaires

#### a. Le résistor

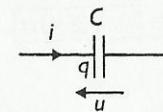
Soit un résistor de résistance  $R$ , orienté en convention récepteur.

Loi d'Ohm :  $U = RI$ .



Puissance dissipée par effet Joule :  $p(t) = ui = (RI) \cdot i = Ri^2$ .

#### b. Le condensateur



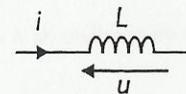
Relations du condensateur :  $q = Cu$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

Energie emmagasinée dans un condensateur :

$$\mathcal{E} = \int p(t) dt = \int ui dt = \int uC \frac{du}{dt} dt = \frac{1}{2} Cu^2$$

#### c. La bobine



Tension aux bornes de la bobine :

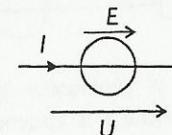
$$u = L \frac{di}{dt}$$

Energie emmagasinée par une bobine :

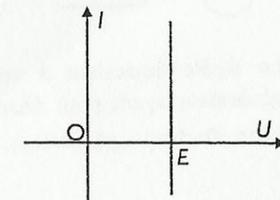
$$\mathcal{E} = \int p(t) dt = \int u i dt = \int L \frac{di}{dt} i dt = \frac{1}{2} Li^2$$

### 2.4. Dipôles actifs linéaires, les générateurs

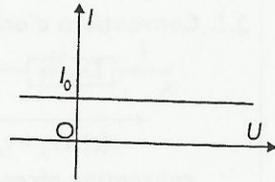
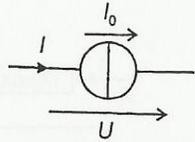
#### a. Source idéale de tension



$E$  est la force électromotrice (f.é.m.)



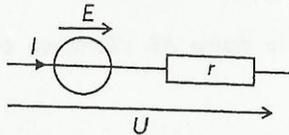
**b. Source idéale de courant**



$I_0$  est le courant électromoteur (c.é.m.)

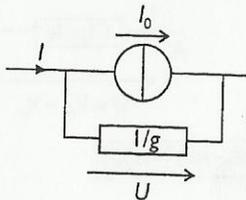
**c. Dipôle actif linéaire**

Source de tension ou modèle de Thévenin :



$$U = E - rI$$

Source de courant ou modèle de Norton :



$$I = I_0 - g \cdot U$$

Passage d'une représentation à l'autre :  $I_0 = E/r ; g = 1/r$

**2.5. Association de dipôles**

**a. Association de résistors**

**Association en série**

La résistance du dipôle équivalent à l'association en série de  $n$  résistors de résistance  $R_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) est :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

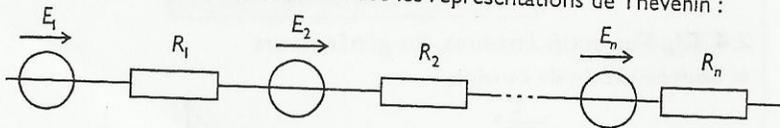
**Association en parallèle**

La résistance du dipôle équivalent à l'association en parallèle de  $n$  résistances  $R_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) est  $R_{eq}$  telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

**b. Association de dipôles actifs**

Pour une association en série, on utilise les représentations de Thévenin :

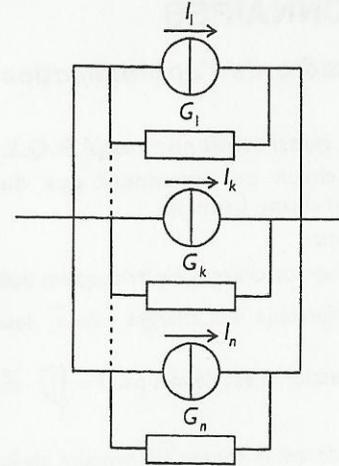


Le dipôle équivalent à une association de  $n$  générateur en série est un générateur ayant pour f.é.m. la tension  $E_{eq}$ , égale à la somme algébrique des f.é.m. de chaque générateur.

Sa résistance interne est  $R_{eq}$  somme des résistances internes de chaque générateur.

$$E_{eq} = \sum_{k=1}^n E_k \text{ et } R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

Pour une association en parallèle, on utilise les représentations de Norton :



Le dipôle équivalent à l'association en parallèle de  $n$  générateurs est un générateur de courant électromoteur égale à la somme algébrique des courants électromoteurs de chaque générateur, et de conductance la somme des conductances de chaque générateur.

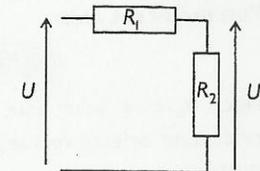
$$I_{eq} = \sum_{k=1}^n I_k \text{ et } G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k$$

**3. Outils usuels permettant la simplification de l'étude des circuits**

**a. Pont diviseur de tension**

La tension aux bornes du résistor 2 vaut :

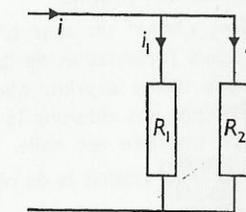
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$



**b. Pont diviseur de courant**

L'intensité qui traverse le résistor 2

vaut 
$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$$



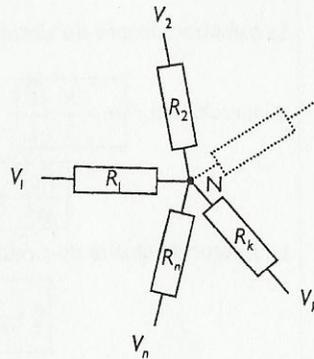
**c. Théorème de superposition**

**Théorème de superposition**

Dans un réseau linéaire comportant des résistances et des sources linéaires indépendantes, l'intensité du courant dans une branche (ou la tension aux bornes d'une branche) est égale à la somme algébrique des intensités (ou des tensions) produites dans cette branche par chacune des sources considérée isolément, les autres sources du circuit étant éteintes.

**d. Loi des nœuds en termes de potentiels ou théorème de MILLMAN**  
 Soit un nœud N d'un réseau auquel sont reliés n résistances  $R_k$  ( $k=1...n$ ).

$$V_N = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}}$$



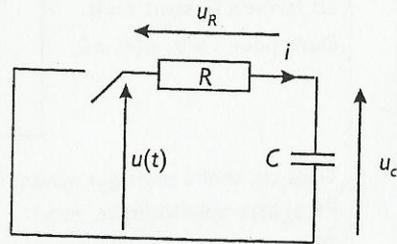
## CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME TRANSITOIRE

### I. Régime transitoire d'un circuit RC

#### I.1. Réponse libre d'un circuit RC

Le condensateur est initialement chargé sous une tension  $E$ .

A l'instant  $t=0$ , l'interrupteur est fermé, la tension  $u(t)$  passe brusquement de la valeur  $E$  à  $0$ .

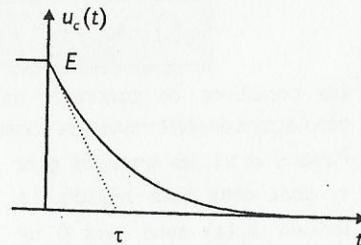


Évolution de la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur

La loi des mailles donne :  $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = 0$  où  $\tau = RC$  est la constante de temps du circuit.

La solution est :  $u_c(t) = E e^{-t/\tau}$ .

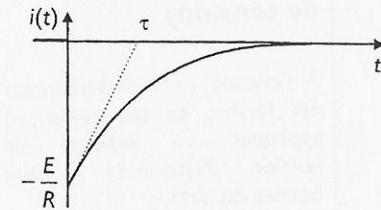
La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses à l'instant  $t = \tau$ .



### Évolution de l'intensité $i(t)$ du courant

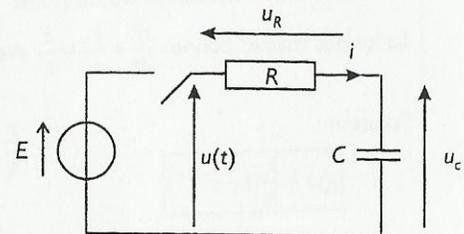
$$i = C \frac{du_c}{dt}, \text{ soit } i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

Le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, mais pas celle de l'intensité du courant.



### I.2. Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. Réponse indicielle

Le condensateur est initialement déchargé. On applique aux bornes du circuit un échelon de tension d'amplitude  $E$ ,  $u(t)$  passe brusquement de  $0$  à  $E$  à l'instant  $t=0$ .



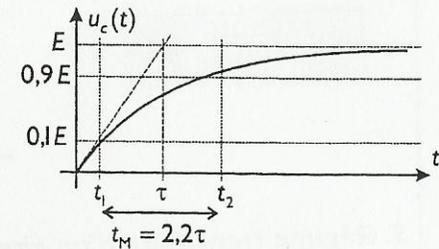
Évolution de la tension aux bornes du condensateur

La loi des mailles donne :  $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{\tau}$  avec  $\tau = RC$ .

La solution est

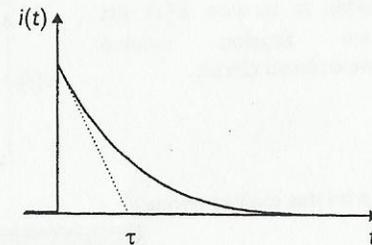
$$u_c(t) = E (1 - e^{-t/\tau})$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote  $u_c = E$  à l'abscisse  $t = \tau$ .



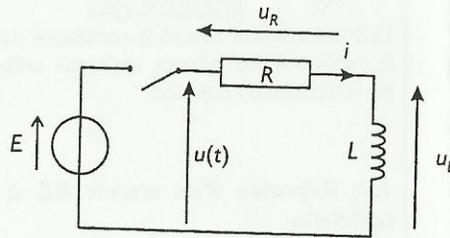
Évolution de l'intensité du courant  $i(t)$

$$i = C \frac{du_c}{dt}, \text{ soit } i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



## 2. Régime transitoire d'un circuit RL (réponse à un échelon de tension)

A l'instant  $t=0$  l'interrupteur est fermé, ce qui revient à appliquer un échelon de tension d'amplitude  $E$  aux bornes du circuit.

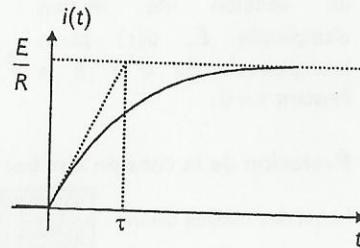


Évolution de l'intensité du courant

La loi des mailles donne  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .

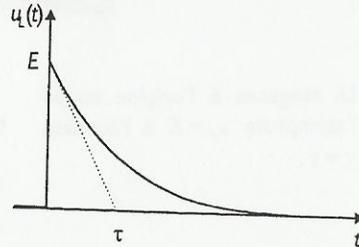
Solution :

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$



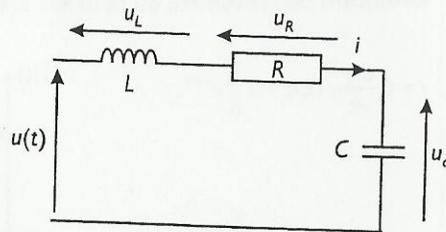
Évolution de la tension aux bornes de la bobine

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = E e^{-t/\tau}$$



## 3. Régime transitoire d'un circuit RLC série

Considérons un circuit RLC série, la tension  $u(t)$  est une tension connue imposée au circuit.



La loi des mailles donne :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u(t)$$

La pulsation propre du circuit vaut :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Le coefficient d'amortissement

du circuit vaut :  $m = \frac{R}{2\sqrt{L/C}}$ . Avec ces notations, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u(t)$$

Le facteur de qualité du circuit RLC série est défini par :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

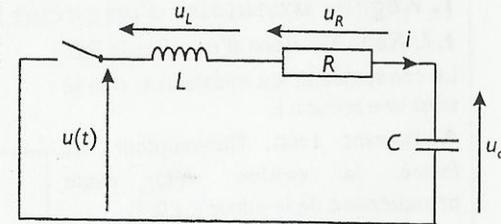
L'équation différentielle s'écrit encore :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u(t)$$

### Réponse libre d'un circuit RLC série

Le condensateur est initialement chargé sous la tension  $E$ . L'interrupteur est fermé à l'instant  $t=0$ .

Donc pour  $t > 0$ ,  $u(t) = 0$ .



Trois cas sont à envisager suivant le signe de  $\Delta'$  :

• Régime apériodique,  $m > 1$

Dans ce cas le discriminant est positif,  $\Delta' > 0$ . L'équation caractéristique admet deux racines réelles :

$$r_1 = -m\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 (m^2 - 1)} = -\omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1})$$

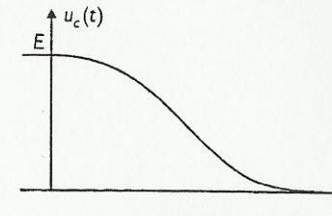
$$r_2 = -m\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 (m^2 - 1)} = -\omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1})$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-m\omega_0 t} (Ae^{+\omega_0 \sqrt{m^2 - 1} t} + Be^{-\omega_0 \sqrt{m^2 - 1} t})$$

Les conditions de continuité de la tension  $u_C(t)$  et de l'intensité  $i(t)$  permettent de déterminer les constantes A et B.

Puisque  $m > 1$ , les solutions  $r_1$  et  $r_2$  sont deux réels négatifs. La tension  $u_C(t)$  tend vers 0 de manière monotone lorsque  $t$  augmente.



• Régime critique,  $m=1$

Dans ce cas le discriminant est nul,  $\Delta' = 0$ . L'équation caractéristique admet une racine réelle double :

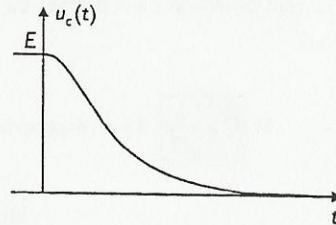
$$r_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_c(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$$

Les conditions de continuité de la tension  $u_c$  et de l'intensité  $i(t)$  permettent de déterminer les constantes A et B.

La pulsation propre  $\omega_0$  étant un réel positif,  $u_c(t)$  tend vers 0 de façon monotone lorsque t augmente.  $u_c(t)$  tend vers 0 plus rapidement que pour le régime aperiodique.



• Régime pseudo-périodique,  $m < 1$

Dans ce cas le discriminant est négatif,  $\Delta' < 0$ . L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$r_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_c(t) = e^{-m\omega_0 t} [A \cos(\omega_0\sqrt{1-m^2} t) + B \sin(\omega_0\sqrt{1-m^2} t)]$$

ou encore :

$$u_c(t) = e^{-m\omega_0 t} A' \cos(\omega_0\sqrt{1-m^2} t + \varphi)$$

La pseudo-pulsation du circuit vaut  $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ .

La solution de l'équation différentielle s'écrit ainsi :

$$u_c(t) = e^{-m\omega_0 t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$$

ou encore  $u_c(t) = A' e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega t + \varphi)$

Les conditions de continuité de la tension  $u_c$  et de l'intensité  $i(t)$  permettent de déterminer les constantes A et B ou A' et  $\varphi$ .

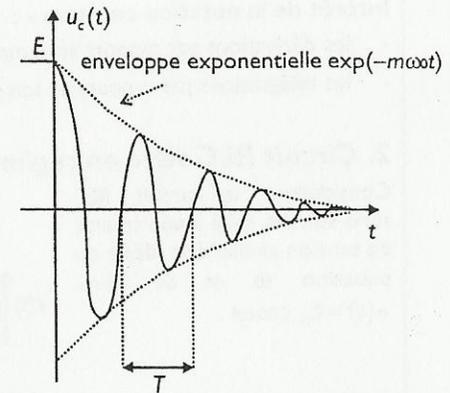
La tension  $u_c(t)$  se présente sous la forme d'une fonction pseudo-sinusoidale, de pseudo-pulsation  $\omega$ , dont l'amplitude est modulée par le facteur  $e^{-m\omega_0 t}$ . Le coefficient  $-m\omega_0$  est la partie réelle des racines de l'équation caractéristique. Si  $0 < m < 1$ , la partie réelle,  $-m\omega_0$  des racines est négative. Il en résulte, dans ce cas, que « l'enveloppe exponentielle »,  $e^{-m\omega_0 t}$  décroît au cours de temps.

Dans ces conditions, le régime libre est un régime transitoire amorti, c'est-à-dire qui s'atténue et tend à disparaître, le temps caractéristique de l'amortissement est

$$\tau = \frac{1}{m\omega_0}$$

La pseudo-période des oscillations amorties est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$



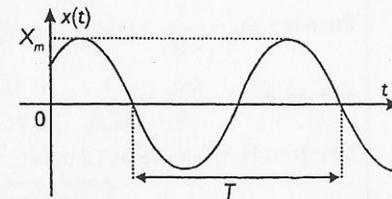
## CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

### 1. Signaux sinusoidaux

#### 1.1. Fonctions sinusoidales

Une grandeur sinusoidale est représentée par :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$



$X_m$  est l'amplitude,  $\omega$  est la pulsation (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $\omega t + \varphi$  est la phase à l'instant t,  $\varphi$  est la phase à l'origine des temps ou déphasage.

La période temporelle est la durée au bout de laquelle le signal se reproduit

identique à lui même :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (en secondes)

La fréquence f du signal est le nombre de cycles par seconde :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (en hertz Hz)} \quad \text{La valeur efficace est : } X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

#### 1.2. Utilisation de la notation complexe

Soit un signal sinusoidal :  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ .

La représentation complexe de ce signal est la fonction complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} \quad \text{avec } j^2 = -1 \quad \text{et} \quad x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t)) \quad \text{et Re la partie réelle.}$$

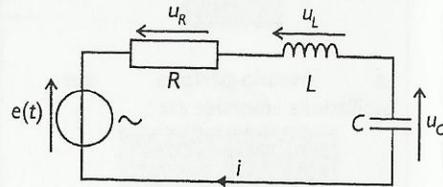
$$\begin{cases} |X_m| = X_m \text{ amplitude} \\ \arg X_m = \varphi \text{ phase à l'origine} \end{cases}$$

**Intérêt de la notation complexe :**

- les dérivations par rapport au temps deviennent des multiplications par  $j\omega$
- les intégrations par rapport au temps deviennent des divisions par  $j\omega$ .

**2. Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé**

Considérons le circuit RLC série suivant, relié à une source de tension sinusoïdale idéale de pulsation  $\omega$  et de f.é.m.  $e(t) = E_m \cos \omega t$ .



**2.1. Réponse en intensité – Résonance d'intensité**

La loi des mailles donne :  $Ri + Lj\omega i + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} i = E_m e^{j\omega t}$

soit encore :

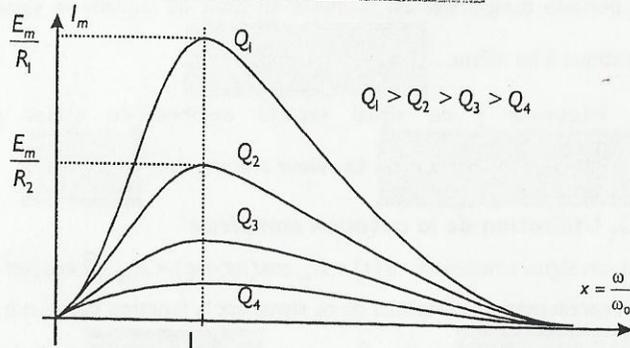
$$E_m = \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_m$$

Posons :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  : pulsation propre du circuit RLC série,  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation

réduite et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité.

L'amplitude maximale de l'intensité du courant s'écrit alors :

$$I_m = |I_m| = \frac{E_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$



Il y a toujours résonance d'amplitude de courant pour  $\omega = \omega_0$

**2.2. Réponse en charge – Résonance de tension aux bornes du condensateur**

L'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$U_{Cm} = \frac{1}{jC\omega} \frac{E_m}{R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j \frac{1}{Q} x}$$

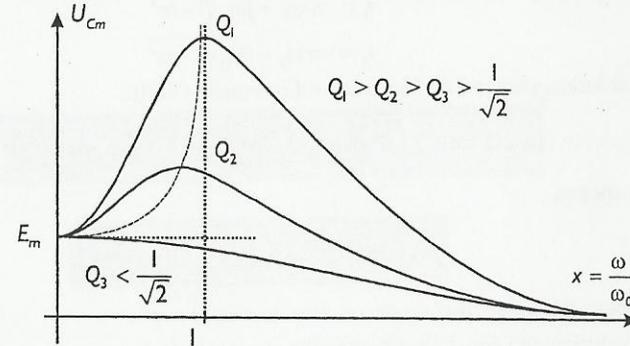
La tension efficace aux bornes du condensateur vaut :

$$U_{Cm} = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

- Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  il y a résonance d'amplitude de tension pour :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

- Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  il n'y a pas résonance d'amplitude de tension.

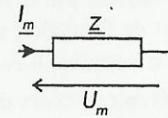


**3. Impédances et admittances complexes**

**3.1. Dipôles passifs linéaires R, L et C**

**Impédance complexe**

Si  $\underline{U}_m$  et  $\underline{I}_m$  désignent les amplitudes complexes associées à  $u(t)$  et  $i(t)$ , on appelle impédance complexe du dipôle la grandeur notée  $\underline{Z}$  et définie, en convention récepteur, par :



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

L'admittance complexe du dipôle est définie par :  $Y = \frac{1}{Z}$

L'impédance complexe  $Z$  contient toutes les informations nécessaires pour caractériser le comportement du dipôle en régime sinusoïdal forcé :

Si la tension aux bornes du dipôle est :  $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , le courant le traversant est noté :  $i = I_m \cos(\omega t + \psi)$ , alors :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\varphi}}{I_m e^{j\psi}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi - \psi)}$$

- le module de  $Z$  donne le rapport des amplitudes  $U_m$  et  $I_m$  (ou des valeurs efficaces) de  $u(t)$  et  $i(t)$  :  $|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$  ; son unité est l'Ohm.

- l'argument de  $Z$  donne le déphasage entre la tension  $u(t)$  et le courant  $i(t)$  :  $\arg Z = \varphi - \psi$ .

**Impédances des dipôles R, L et C**

**Impédance d'un résistor**

L'impédance d'un résistor vaut :  $Z = \frac{U_m}{I_m} = R$

L'impédance d'un résistor est réelle. La tension et le courant sont en phase.

**Impédance d'une bobine parfaite**

L'impédance d'une bobine parfaite vaut :  $Z = jL\omega$

L'impédance complexe d'une bobine parfaite est un imaginaire pur :  $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$ .

En convention récepteur, la tension est en avance de phase de  $+\frac{\pi}{2}$  sur le courant.

**Impédance d'un condensateur parfait**

L'impédance d'un condensateur parfait vaut :  $Z = \frac{1}{jC\omega}$ . L'impédance complexe

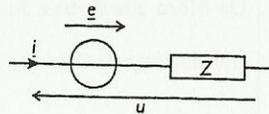
d'un condensateur est un imaginaire pur :  $\arg Z = -\frac{\pi}{2}$ . En convention récepteur,

la tension est en retard de phase de  $\frac{\pi}{2}$  sur le courant.

**3.2. Dipôles actifs linéaires en régime sinusoïdal forcé : générateurs**

En régime sinusoïdal forcé, une source réelle de tension sinusoïdale est caractérisée par :

$$u = e - Zi$$

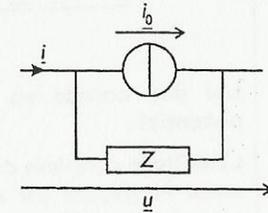


$e$  est la f.é.m. complexe du générateur qui est de la forme  $E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ .

$Z$  est l'impédance interne complexe du générateur.

En régime sinusoïdal forcé, une source réelle de courant sinusoïdal est caractérisée par :

$$i = \frac{e}{Z} = \frac{I}{Z} u$$



Le courant électromoteur complexe est noté  $i_0$ .

**4. Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé**

Un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé est un réseau constitué de dipôles passifs linéaires et de générateurs linéaires délivrant des tensions ou des courants sinusoïdaux que nous choisirons tous de même pulsation  $\omega$ .

**4.1. Loi des nœuds**

$$\sum_k \epsilon_k i_k(t) = 0$$

avec :  $\epsilon_k = +1$  pour tout courant circulant vers le nœud et  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

**4.2. Loi des mailles**

$$\sum_k \epsilon_k u_k(t) = 0$$

avec :  $\epsilon_k = +1$  si la tension  $u_k$  est orientée dans le même sens que le sens de parcours de la maille et  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

**4.3. Association de dipôles linéaires**

**Association en série**

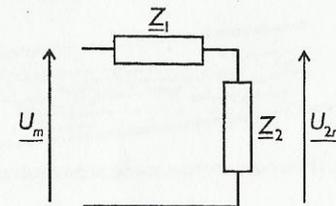
L'impédance équivalente à l'association en série de deux dipôles est égale à la somme des impédances de chacun des dipôles :  $Z_{eq} = Z_1 + Z_2$

**Association en parallèle**

L'admittance équivalente à l'association en parallèle de deux dipôles est égale à la somme des admittances de chacun :  $Y_{eq} = Y_1 + Y_2$

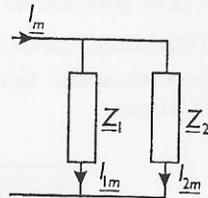
**Diviseur de tension**

$$U_m = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_m$$



**Diviseur de courant**

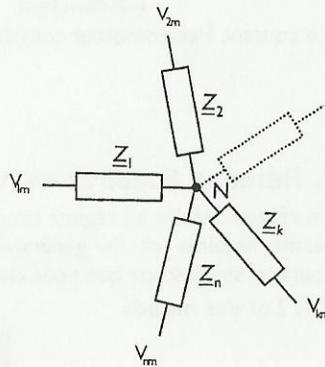
$$I_{2m} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I_m$$



**Loi des nœuds en termes de potentiel :**

L'amplitude complexe du potentiel du nœud N (repéré par rapport à un potentiel de référence ou potentiel de la masse) a pour valeur :

$$V_{Nm} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{V_{km}}{Z_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k V_{km}}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$



(relation aussi connue sous le nom de théorème de Millman).

Si une branche présente une source de courant, il faut en tenir compte dans l'expression précédente.

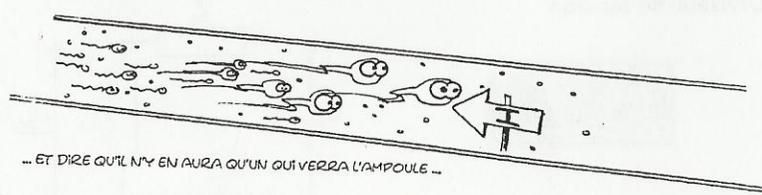
**5. Puissance en régime sinusoïdal forcé**

**5.1. Puissance instantanée, puissance moyenne. Facteur de puissance**

Soit  $u(t) = U_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t$  la tension sinusoïdale aux bornes d'un dipôle linéaire quelconque orienté en convention récepteur et  $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$  l'intensité du courant le traversant.  $U_{eff}$  et  $I_{eff}$  sont les valeurs efficaces de  $u$  et  $i$ . La puissance moyenne reçue par le dipôle est alors :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

$\cos \varphi =$  facteur de puissance.

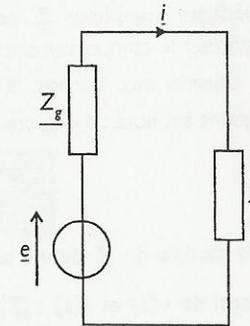


... ET DIRE QU'IL N'Y EN AURA QU'UN QUI VERRA L'AMPOULE ...

**5.2. Adaptation d'impédance - Notion de charge adaptée**

Considérons le montage constitué d'un générateur de tension sinusoïdale de f.é.m.  $e = E\sqrt{2} \cos \omega t$  et d'impédance  $Z_g = R_g + jX_g$  relié à un dipôle D d'impédance  $Z = R + jX$ . D est appelé impédance de charge. La puissance moyenne reçue par le dipôle D, de la part du générateur, est maximale si  $R = R_g$  et  $X = -X_g$ ,

c'est-à-dire si :  $Z = Z_g^*$



**6. Filtres du premier ordre et du second ordre**

**6.1. Définitions**

Un quadripôle est un système électrique possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Un quadripôle est dit linéaire si tous les éléments qui le constituent sont linéaires.

**6.2. Fonction de transfert (ou transmittance) d'un quadripôle linéaire**

En régime sinusoïdal forcé, on appelle fonction de transfert d'un quadripôle linéaire le rapport :

$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e}$$

$v_e$  et  $v_s$  étant les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie du quadripôle.

**6.3. Filtre linéaire**

**Définition**

Un filtre linéaire est un quadripôle linéaire qui permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal.

**Représentation de Bode**

Le gain en décibel est défini par :

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

Un diagramme de Bode regroupe la représentation du gain en décibel ainsi que du déphasage entre  $v_s$  et  $v_e$  en fonction de la variable  $\omega$  ou  $f$ .

**Filtre passe-bas**

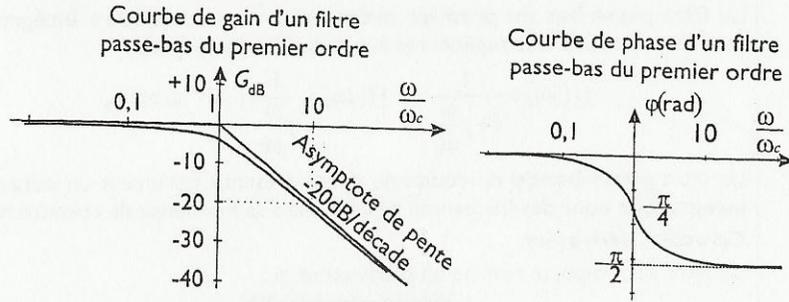
Un filtre passe-bas du premier ordre, est un quadripôle dont la fonction de

transfert est de la forme :  $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

où  $H_0$  est une constante et  $\omega_c$  une pulsation caractéristique correspondant à la pulsation de coupure à  $-3$  dB.

Son rôle est d'éliminer les hautes fréquences pour ne garder que les basses fréquences (inférieures à la fréquence de coupure).

Les diagrammes de Bode du gain et de la phase (pour  $H_0 = 1$ ) sont les suivants :

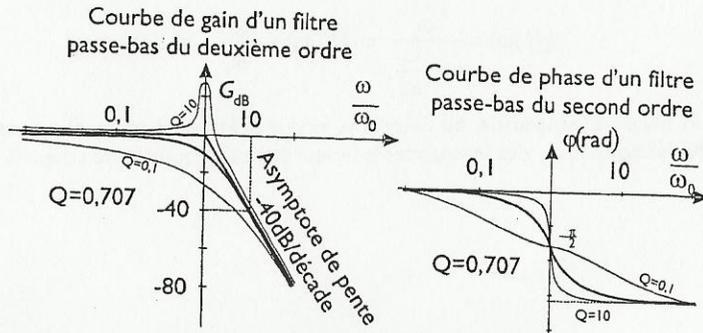


Un filtre passe-bas du **deuxième ordre** est un quadripôle dont la fonction de transfert est du type :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $m$  est le facteur d'amortissement,  $Q = \frac{1}{2m}$  le facteur de qualité et  $\omega_0$  une pulsation caractéristique, appelée pulsation propre du système.

Les diagrammes de Bode du gain et de la phase (pour  $H_0 = 1$ ) sont les suivants :



**Filtre passe-haut**

Un **filtre passe-haut** du **premier ordre**, est un quadripôle dont la fonction de

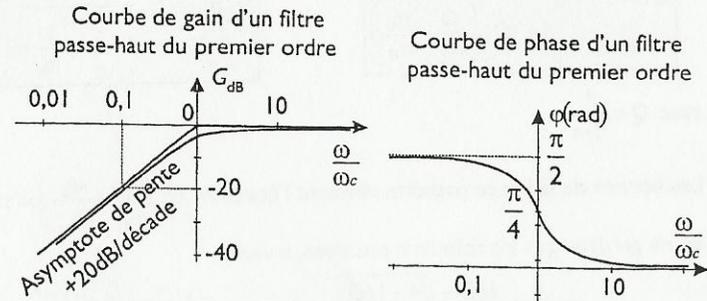
transfert est de la forme :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c}$$

où  $H_0$  est une constante et  $\omega_c$  une pulsation caractéristique correspondant à la pulsation de coupure à  $-3$  dB.

Son rôle est d'éliminer les basses fréquences et de conserver les hautes fréquences (supérieures à la fréquence de coupure).

Les diagrammes de Bode du gain et de la phase (pour  $H_0 = 1$ ) sont les suivants :

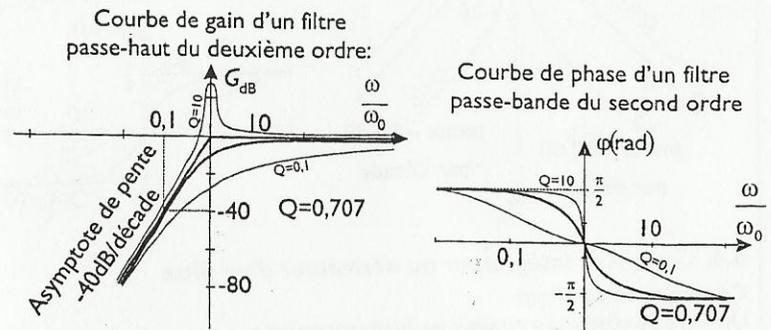


Pour un filtre d'ordre 2 :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $m$  est le facteur d'amortissement,  $Q = \frac{1}{2m}$  le facteur de qualité.

Les diagrammes de Bode (pour  $H_0 = 1$ ) sont les suivants :



**Remarque :** lorsque  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  il y a un phénomène de résonance au voisinage de la pulsation  $\omega_0$ . Le maximum de la courbe n'est cependant pas obtenu en  $\omega_0$

mais en  $\frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ .

### Filtere passe-bande du deuxième ordre

Ce filtre possède une bande passante  $[\omega_{-c}, \omega_{+c}]$  centrée autour d'une pulsation caractéristique  $\omega_0$ . La fonction de transfert est la suivante :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)}$$

avec  $Q = \frac{1}{2m}$ .

$$H(j\omega) = H_0 \frac{2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Les bornes de la bande passante vérifient l'équation  $Q \left( \frac{\omega_{\pm c}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\pm c}} \right) = \pm 1$ .

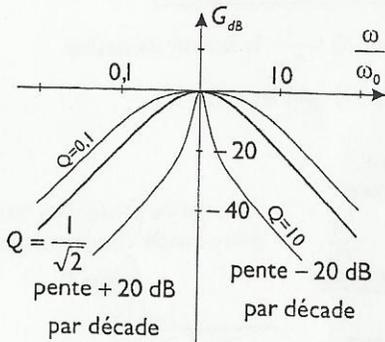
En ne gardant que les solutions positives, il vient :

$$\omega_c = \omega_0 \frac{1/Q + \sqrt{4 + 1/Q^2}}{2}, \quad \omega_{-c} = \omega_0 \frac{-1/Q + \sqrt{4 + 1/Q^2}}{2}$$

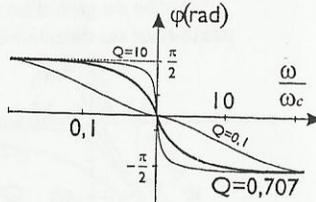
La bande passante est  $\Delta\omega = \omega_c - \omega_{-c} = \omega_0 / Q$ .

Les diagrammes de Bode sont les suivants (pour  $H_0 = 1$ ) :

Courbe de gain d'un filtre passe bande du deuxième ordre



Courbe de phase d'un filtre passe-bande du second ordre



### 6.4. Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

#### Caractère intégrateur

Un filtre se comporte comme un intégrateur si :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \pm \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

La représentation de Bode est une droite de pente -20 dB/décade et un déphasage  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Il est cependant impossible de réaliser un intégrateur idéal pour toutes les pulsations.

Un filtre passe-bas du premier ordre présente un caractère intégrateur pour les pulsations très supérieures à sa pulsation de coupure :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{si } \omega \gg \omega_0$$

Un filtre passe-bande du deuxième ordre présente également un caractère intégrateur pour des fréquences supérieures à sa fréquence de coupure haute.

#### Caractère dérivateur

Un filtre se comporte comme un dérivateur si :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \pm j \frac{\omega}{\omega_0}$$

$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ . La représentation de Bode est une droite de

pente +20 dB/décade et un déphasage  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Il est impossible de réaliser un dérivateur idéal pour toutes les pulsations.

Un filtre passe-haut du premier ordre présente un caractère dérivateur pour les pulsations très inférieures à sa pulsation de coupure :

$$H(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow H(j\omega) \approx j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{si } \omega \ll \omega_0$$

Un filtre passe-bande du deuxième ordre présente également un caractère dérivateur pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure basse.

## RECONNAÎTRE UN FILTRE A PARTIR DE SA FONCTION DE TRANSFERT NORMALISÉE

Passe-bas

Ordre 1 :  $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

Ordre 2 :  $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Passe-haut

Ordre 1 :  $\underline{H} = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

Ordre 2 :  $\underline{H} = H_0 \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Passe-bande du 2<sup>ème</sup> ordre

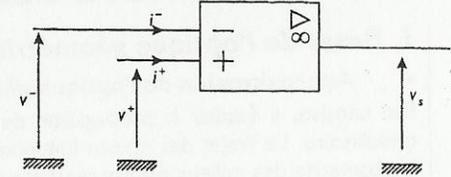
$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + Q j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = H_0 \frac{2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

## CIRCUITS AVEC AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

### 1. Amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire

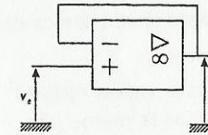
Les courants d'entrée  $i^+$  et  $i^-$  sont nuls :  $i^+ = 0$   $i^- = 0$ .

En régime linéaire :  $v^+ = v^-$  et  $-V_{sat} < v_s < +V_{sat}$ .



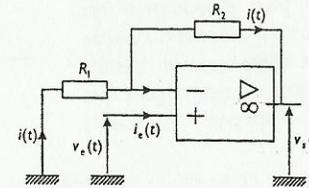
### 2. Montages classiques en régime linéaire

Montage suiveur



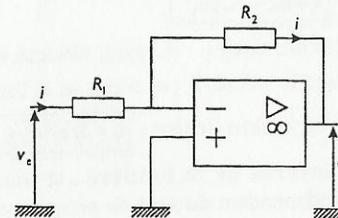
$$V_s = V_e$$

Montage amplificateur non inverseur



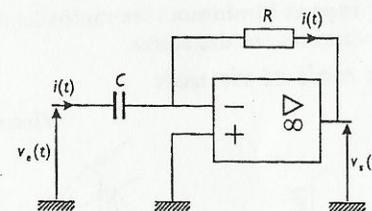
$$v_s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e(t)$$

Montage amplificateur inverseur



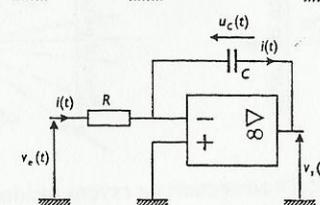
$$v_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_e(t)$$

Montage dérivateur



$$v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}$$

Montage intégrateur



$$v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_e(t) dt$$

# Optique géométrique

## OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

### 1. Bases de l'optique géométrique

• **Approximation de l'optique géométrique :**

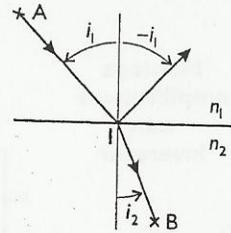
Elle consiste à étudier la propagation de la lumière en ignorant son caractère ondulatoire. Le trajet des rayons lumineux est alors uniquement déterminé par la géométrie des milieux transparents traversés par la lumière.

• **Indice d'un milieu :**

Soit  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide et  $v$  sa vitesse (de phase) dans un milieu transparent, isotrope, homogène. L'indice du milieu est :  $n = c/v$ .

• **Les lois de Snell-Descartes :**

**Réflexion :** le rayon incident et le rayon réfléchi à la surface d'un dioptre sont dans le même plan, le **plan d'incidence**. Le plan d'incidence est défini par le rayon incident et la normale au plan tangent au dioptre au point d'intersection  $I$  entre le rayon incident et le dioptre. L'angle algébrique de réflexion est égal à l'opposé de l'angle d'incidence.



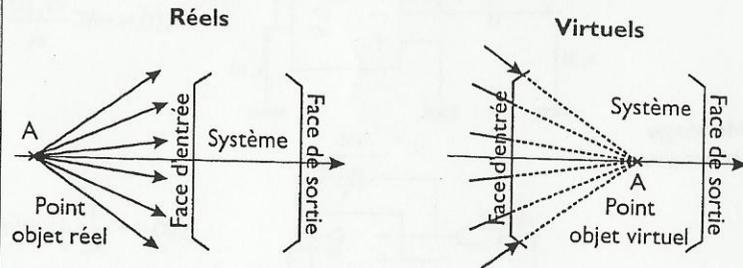
**Réfraction :** le rayon incident et le rayon réfracté sont dans le même plan, le plan d'incidence. On a :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

• **Phénomène de réflexion totale :** le rayon réfracté n'existe pas si le milieu 1 est plus réfringent que le milieu 2 ( $n_1 > n_2$ ) et si l'angle d'incidence  $i_1$  est supérieur à l'angle de **réfraction limite** :  $i_l = \arcsin(n_2/n_1)$ .

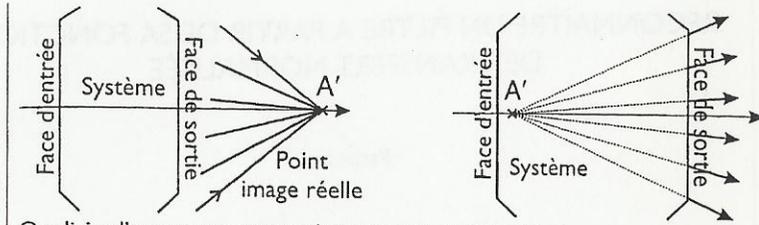
• **Principe de retour inverse de la lumière :** le trajet suivi par la lumière entre deux points est indépendant du sens de propagation de la lumière.

• **Indépendance des rayons lumineux :** les rayons lumineux composant un faisceau sont indépendants les uns des autres.

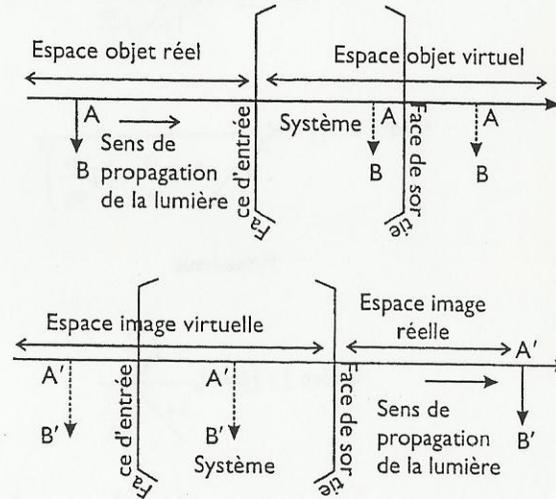
### 2. Objets, images réels et virtuels



Un point objet est un point d'intersection de rayons incidents.  
Un point image est un point d'intersection de rayons émergents.



On divise l'espace en **espace objet** et **image réel ou virtuel** :



### 3. Stigmatisme , aplanétisme et plans focaux

Un système optique (S) est dit **rigoureusement stigmatique** pour un couple de points  $A$  et  $A'$  si tout rayon incident issu de  $A$  passe par  $A'$  après avoir traversé le système (S).

On dit que  $A$  et  $A'$  sont **conjugués** par rapport à (S).

L'**aplanétisme** est la propriété de conservation du stigmatisme dans un plan de front perpendiculaire à l'axe optique.

**Approximation de Gauss :**

L'**approximation de Gauss** consiste à utiliser un système optique centré dans les conditions suivantes :

- Les angles que font les rayons avec l'axe optique sont faibles (rayons paraxiaux).
- Les points d'incidence des rayons sur les dioptres ou miroirs du système sont proches de l'axe optique.

Dans ces conditions, un système optique centré est **approximativement stigmatique et aplanétique**.

• Un objet situé dans le **plan focal objet** a son image à l'infini du système optique. Le **foyer objet F** est le point d'intersection entre le plan focal objet et l'axe optique.

• Un objet situé à l'infini du système optique a son image dans le **plan focal image**. Le **foyer image F'** est le point d'intersection entre le plan focal image et l'axe optique.

### 4. Miroirs sphériques dans l'approximation de Gauss

Soit un miroir sphérique de centre C et de sommet S. Deux types coexistent :

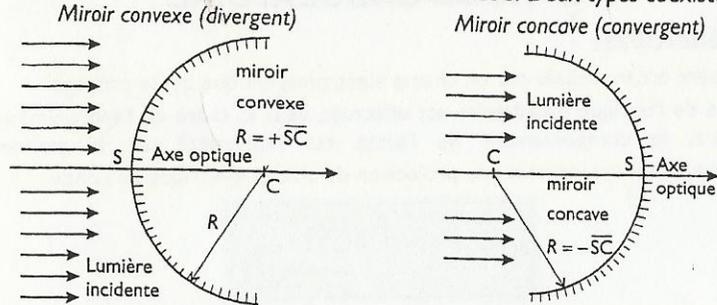
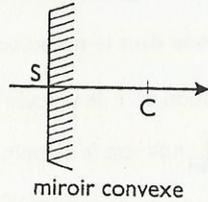
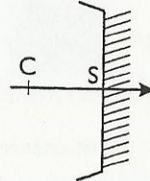


Schéma de Gauss :



miroir convexe

Schéma de Gauss :



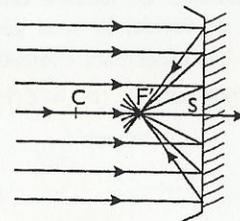
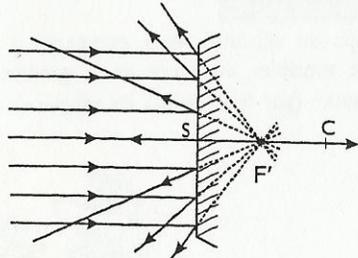
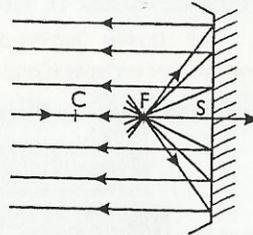
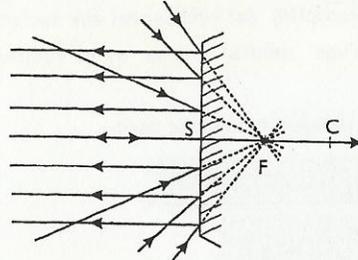
miroir concave

Rayons particuliers :

- Tout rayon arrivant parallèle à l'axe optique passe par le foyer image F'.
- Tout rayon passant par le foyer objet F se réfléchit parallèle à l'axe optique.
- Tout rayon passant par le centre C du miroir revient sur lui-même.

Définitions :  $f = SF$  = distance focale objet ;  $f' = SF'$  = distance focale image

Foyer principal objet F



Foyer principal image F'

Relations de conjugaison :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$$

relation de conjugaison avec origine au sommet (relation de Descartes).

$$F'A' \cdot FA = f \cdot f'$$

relation de conjugaison avec origine aux foyers (relation de Newton).

$$\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS}$$

relation de conjugaison avec origine au centre.

Les foyers image et objet sont confondus et se situent au milieu de SC :

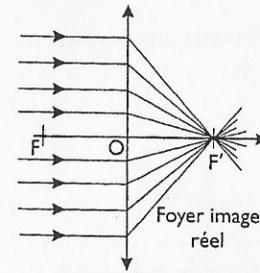
$$SF = SF' = \frac{SC}{2}$$

Grandissement :  $\gamma = \frac{SA'}{SA} = \frac{CA'}{CA} = \frac{F'A'}{SF} = \frac{SF}{FA}$

### 5. Lentilles minces dans l'approximation de Gauss

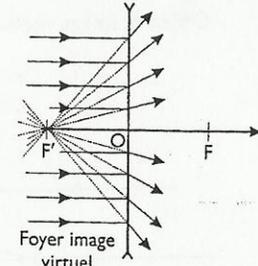
Caractéristiques

Lentille convergente

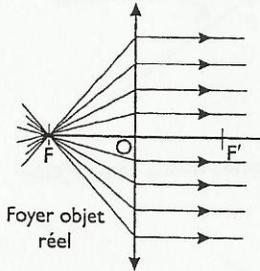


Foyer image réel

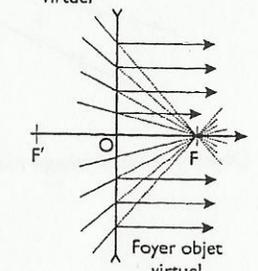
Lentille divergente



Foyer image virtuel



Foyer objet réel



Foyer objet virtuel

Rayons particuliers :

- Tout rayon arrivant parallèle à l'axe optique passe par le foyer image F'.
- Tout rayon passant par le foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique.
- Tout rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.

Distance focale image :  $f' = OF'$ , distance focale objet :  $f = OF$  et

$OF' = -OF$  pour des milieux de part et d'autre de la lentille identiques.

Relations de conjugaison :

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

relation de conjugaison avec origine au sommet (relation de Descartes).

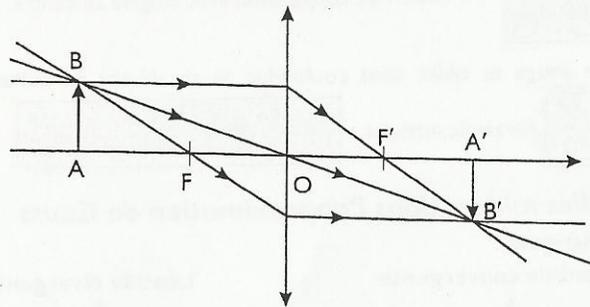
$$F'A' \cdot FA = f \cdot f'$$

relation de conjugaison avec origine aux foyers (relation de Newton).

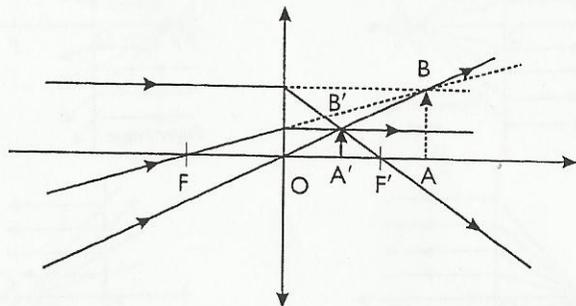
Grandissement :

$$\gamma = \frac{OA'}{OA} = -\frac{F'A'}{f} = -\frac{f}{FA}$$

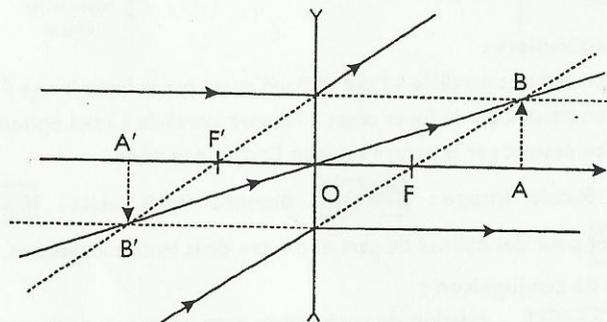
Constructions



Objet et image réels pour une lentille mince convergente



Objet virtuel et image réelle pour une lentille mince convergente



Objet et image virtuels pour une lentille mince divergente

## OPTIQUE ONDULATOIRE

### I. Généralités

La lumière est modélisée par un champ électromagnétique qui se propage. L'étude de l'optique ondulatoire est effectuée dans le cadre de l'approximation **scalaire**, le comportement de l'onde est représenté par la grandeur scalaire  $s(M, t)$  représentant une projection du champ électrique de l'onde :

$$s(M, t) = a \cos(\omega t - \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0}_{\varphi(M)})$$

où  $a$  est l'amplitude de l'onde,  $\omega$  sa pulsation,  $\varphi_0$  la phase à l'origine  $S$  et  $\varphi(M)$  la phase de l'onde en  $M$  à l'instant  $t$ . Pour un milieu homogène,  $\vec{k}$  est le vecteur

d'onde défini par  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ ,  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le milieu considéré,

$\vec{u}$  le vecteur unitaire suivant la direction de propagation et  $\vec{r}$  le vecteur  $\overline{SM}$ .

Le terme  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  s'écrit encore  $\frac{2\pi(SM)}{\lambda_0}$  où  $(SM) = \int_{SM} n ds$  est le chemin optique

de l'onde allant de  $S$  à  $M$ ,  $n$  l'indice optique du milieu au point considéré et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide.

En notation complexe :  $\underline{s}(M, t) = a \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$ .

On montre que le vecteur d'onde  $\vec{k}$ , au point  $M$ , peut encore s'écrire sous la forme  $\vec{k} = \text{grad } \varphi(M)$  où  $\varphi(M)$  est la phase de l'onde en  $M$ . L'ensemble des points tels que  $\varphi = cte$  constitue une surface d'onde.

**Théorème de Malus :** Le vecteur  $\vec{k} = \text{grad } \varphi(M)$  est orthogonal aux surfaces  $\varphi = cte$ . Les rayons lumineux issus d'une même source sont toujours orthogonaux aux surfaces d'onde.

L'éclairement  $\mathcal{E}(M)$  ou l'intensité lumineuse est définie par :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle \dot{s}^2(M, t) \rangle \quad \text{ou} \quad \mathcal{J}(M) = K' \langle s^2(M, t) \rangle$$

ou encore par  $\mathcal{E}(M) = K \frac{1}{2} \langle \dot{s} \dot{s} \rangle$  et  $\mathcal{J}(M) = K' \frac{1}{2} \langle s s \rangle$ .

Les détecteurs de lumière ont des temps de réponse lents comparés à la période de l'onde. Ils sont généralement sensibles au carré de la grandeur  $s(M, t)$ . Les détecteurs effectuent la moyenne (sur leur temps de réponse) de cet éclairement,  $\mathcal{E}_{\text{dect.}}(M) = \langle \mathcal{E}(M) \rangle$ .



### 1.1. Conditions d'obtention d'interférences

Lorsque deux ondes, de pulsations différentes, ayant suivi des parcours différents se superposent en un point M, les grandeurs scalaires relatives à chaque onde s'ajoutent :

$$s_{\text{tot}}(M, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_{01}}_{\varphi_1(M)}) + a_2 \cos(\omega_2 t - \underbrace{\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{02}}_{\varphi_2(M)})$$

L'éclairement au point M vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{det}}(M) = \langle \mathcal{E}(M) \rangle = 2K \left\langle \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 \cos \left( \underbrace{\varphi_1(M) - \varphi_2(M)}_{\varphi(M)} + \underbrace{(\omega_1 - \omega_2)t}_{\Delta\omega} \right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{det}}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle$$

A ce stade deux cas se présentent :

- Les pulsations sont différentes, les éclaircements (ou les intensités) s'ajoutent :  $\mathcal{E}_{\text{det}} = \langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

$$\text{car, } \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle = \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M) + \Delta\omega t) \rangle = 0$$

Les sources sont dites **incohérentes** et **aucun** phénomène d'interférences n'est observable. C'est le cas de deux sources **différentes**, elles sont **toujours incohérentes**.

- Les ondes sont issues de la même source, les pulsations sont identiques, les phases à l'origine sont corrélées,  $\mathcal{E}_{\text{det}} \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , les éclaircements ne s'ajoutent plus :

$$\mathcal{E}_{\text{det}} = \langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \langle \cos \varphi \rangle$$

$$\text{car } \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle = \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M) + \Delta\omega t) \rangle \neq 0$$

Les sources sont dites **cohérentes** et un **phénomène d'interférences** se produit. Ce phénomène intervient si les deux faisceaux de lumière sont produits à partir d'une **même source**.

Si, de plus, les éclaircements de chaque faisceau sont identiques et de valeur  $\mathcal{E}_0$ , l'éclairement total vaut :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos \varphi(M))$$

### 1.2. Émission de la lumière

L'émission de lumière correspond à des transitions électroniques aléatoires. Chaque transition donne lieu à un **train d'ondes**, dont la durée moyenne est appelée **temps de cohérence**  $\tau_c$ . La longueur d'un train d'onde est la **longueur de cohérence**  $\ell_c$  reliée au temps de cohérence par :  $\ell_c = v\tau_c$ , où  $v$  est la vitesse de l'onde dans le milieu considéré.

La phase à l'origine  $\varphi_0$  change de façon aléatoire d'un train d'onde à l'autre.

L'onde n'est plus strictement monochromatique et on admet que l'ordre de grandeur de sa largeur spectrale  $\Delta\nu$  est reliée à la durée d'émission par  $\tau_c \Delta\nu \sim 1$ .

Ce modèle est compatible avec le comportement (temporel) des détecteurs et les conditions que doivent remplir les interféromètres pour produire des interférences.

### 1.3. Expression du déphasage

Le déphasage en M vaut  $\varphi(M) = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_2$ , où  $(SM)_1$  est

le chemin optique de l'onde qui a suivi le chemin 1 et  $(SM)_2$  le chemin optique de l'onde qui a suivi le chemin 2. Finalement,

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

où  $\delta = (SM)_1 - (SM)_2$  est la différence de chemin optique et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide

L'ordre d'interférence  $p$  est défini par :  $p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$

L'éclairement est **maximal** chaque fois que l'ordre d'interférence  $p$  est un **entier** relatif,  $\mathcal{E}_{\text{max}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$ . Les ondes sont alors en **phase**, les interférences sont dites **constructives**.

L'éclairement est **minimal** lorsque l'ordre d'interférence  $p$  est un **demi-entier**,  $\mathcal{E}_{\text{min}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$ . Les ondes sont alors en **opposition de phase**, les interférences sont dites **destructives**.

Le **contraste** des interférences est défini par :

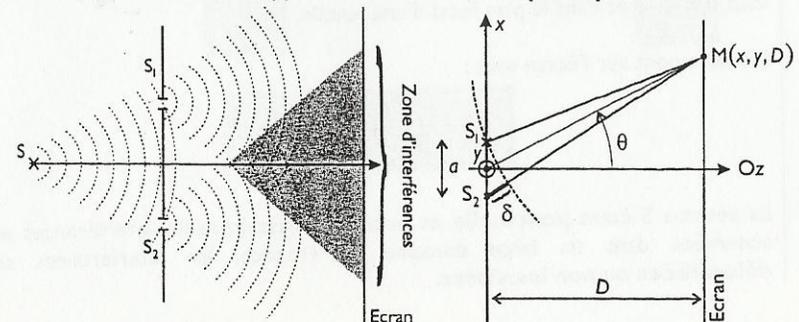
$$C = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}} - \mathcal{E}_{\text{min}}}{\mathcal{E}_{\text{max}} + \mathcal{E}_{\text{min}}}$$

Celui-ci est **maximal** et vaut 1 lorsque les éclaircements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont **identiques**.

Pour qu'il y ait interférences, les trains d'ondes (issus d'une même source) doivent se superposer, il faut donc que la différence de marche soit inférieure à la longueur d'un train d'ondes  $\delta < \ell_c$ . On admettra que les directions de propagation doivent être quasi-parallèles.

### 2. Dispositif à division de front d'onde – Les trous d'Young

Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  identiques distants de  $SS_2 = a$  selon la direction Ox. Celui-ci est éclairé par une source S supposée **monochromatique** et **ponctuelle**.



### 1.1. Conditions d'obtention d'interférences

Lorsque deux ondes, de pulsations différentes, ayant suivi des parcours différents se superposent en un point M, les grandeurs scalaires relatives à chaque onde s'ajoutent :

$$s_{\text{tot}}(M, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \underbrace{\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_{01}}_{\varphi_1(M)}) + a_2 \cos(\omega_2 t - \underbrace{\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_{02}}_{\varphi_2(M)})$$

L'éclairement au point M vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{det}}(M) = \langle \mathcal{E}(M) \rangle = 2K \left\langle \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 \cos \left( \underbrace{\varphi_1(M) - \varphi_2(M)}_{\varphi(M)} + \underbrace{(\omega_1 - \omega_2)t}_{\Delta\omega} \right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{det}}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle$$

À ce stade deux cas se présentent :

• Les pulsations sont différentes, les éclaircements (ou les intensités) s'ajoutent :  $\mathcal{E}_{\text{det}} = \langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

$$\text{car, } \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle = \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M) + \Delta\omega t) \rangle = 0$$

Les sources sont dites **incohérentes** et **aucun** phénomène d'interférences n'est observable. C'est le cas de deux sources **différentes**, elles sont **toujours incohérentes**.

• Les ondes sont issues de la même source, les pulsations sont identiques, les phases à l'origine sont corrélées,  $\mathcal{E}_{\text{det}} \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , les éclaircements ne s'ajoutent plus :

$$\mathcal{E}_{\text{det}} = \langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \langle \cos \varphi \rangle$$

$$\text{car } \langle \cos(\varphi(M) + \Delta\omega t) \rangle = \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M) + \Delta\omega t) \rangle \neq 0$$

Les sources sont dites **cohérentes** et un **phénomène d'interférences** se produit. Ce phénomène intervient si les deux faisceaux de lumière sont produits à partir d'une **même source**.

Si, de plus, les éclaircements de chaque faisceau sont identiques et de valeur  $\mathcal{E}_0$ , l'éclairciment total vaut :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos \varphi(M))$$

### 1.2. Émission de la lumière

L'émission de lumière correspond à des transitions électroniques aléatoires. Chaque transition donne lieu à un **train d'ondes**, dont la durée moyenne est appelée **temps de cohérence**  $\tau_c$ . La longueur d'un train d'onde est la **longueur de cohérence**  $\ell_c$  reliée au temps de cohérence par :  $\ell_c = v\tau_c$ , où  $v$  est la vitesse de l'onde dans le milieu considéré.

La phase à l'origine  $\varphi_0$  change de façon aléatoire d'un train d'onde à l'autre.

L'onde n'est plus strictement monochromatique et on admet que l'ordre de grandeur de sa largeur spectrale  $\Delta\nu$  est reliée à la durée d'émission par  $\tau_c \Delta\nu \sim 1$ .

Ce modèle est compatible avec le comportement (temporel) des détecteurs et les conditions que doivent remplir les interféromètres pour produire des interférences.

### 1.3. Expression du déphasage

Le déphasage en M vaut  $\varphi(M) = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_2$ , où  $(SM)_1$  est

le chemin optique de l'onde qui a suivi le chemin 1 et  $(SM)_2$  le chemin optique de l'onde qui a suivi le chemin 2. Finalement,

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

où  $\delta = (SM)_1 - (SM)_2$  est la différence de chemin optique et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide

L'ordre d'interférence  $p$  est défini par :  $p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$

L'éclairciment est **maximal** chaque fois que l'ordre d'interférence  $p$  est un **entier relatif**,  $\mathcal{E}_{\text{max}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$ . Les ondes sont alors en **phase**, les interférences sont dites **constructives**.

L'éclairciment est **minimal** lorsque l'ordre d'interférence  $p$  est un **demi-entier**,  $\mathcal{E}_{\text{min}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}$ . Les ondes sont alors en **opposition de phase**, les interférences sont dites **destructives**.

Le **contraste** des interférences est défini par :

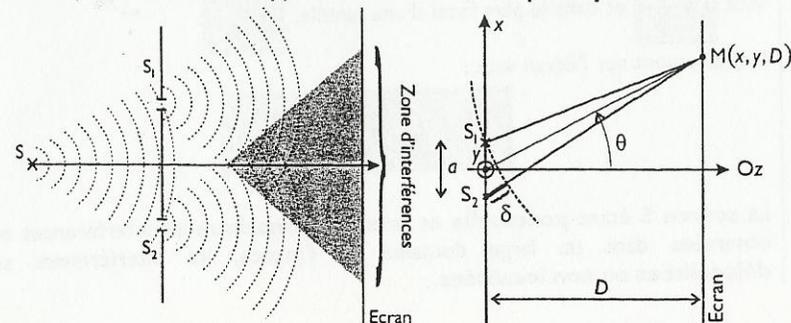
$$C = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}} - \mathcal{E}_{\text{min}}}{\mathcal{E}_{\text{max}} + \mathcal{E}_{\text{min}}}$$

Celui-ci est **maximal** et vaut 1 lorsque les éclaircements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont **identiques**.

Pour qu'il y ait interférences, les trains d'ondes (issus d'une même source) doivent se superposer, il faut donc que la différence de marche soit inférieure à la longueur d'un train d'ondes  $\delta < \ell_c$ . On admettra que les directions de propagation doivent être quasi-parallèles.

### 2. Dispositif à division de front d'onde – Les trous d'Young

Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  identiques distants de  $SS_2 = a$  selon la direction Ox. Celui-ci est éclairé par une source S supposée **monochromatique** et **ponctuelle**.



L'éclairement en un point M de l'écran dépend de la différence de marche  $\delta(M)$  selon :  $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right) \right)$ . Ce dispositif est souvent placé dans l'air tel que  $n_{\text{air}} = n_{\text{vide}} = 1$ . A une distance  $D$  grande devant  $a, x$  et  $y$ , la différence de marche s'exprime, au premier ordre en  $\frac{x}{D}$ , par :

$$\delta(M) = (S_1M) - (S_2M) = S_1M - S_2M = \frac{ax}{D} = a \sin \theta$$

Dans le cas où l'écran est placé dans le plan focal d'une lentille,

$$\delta(M) = a \sin \theta = a \tan \theta = a \frac{x}{f'}$$

Les franges d'interférences, définies par  $\delta = \text{cte}$ , sont en première approximation, des segments de droites perpendiculaires à l'axe  $Ox$ . Les franges brillantes sont telles que :

$$\delta_b \approx \frac{ax_b}{D} = p\lambda, \quad x_b = p \frac{\lambda D}{a}$$

avec  $p \in \mathbb{Z}$ , les interférences sont constructives. Les franges sombres sont telles que :

$$\delta_s \approx \frac{ax_s}{D} = \left( p + \frac{1}{2} \right) \lambda,$$

avec  $x_s = \left( p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda D}{a}$ , les interférences sont destructives.

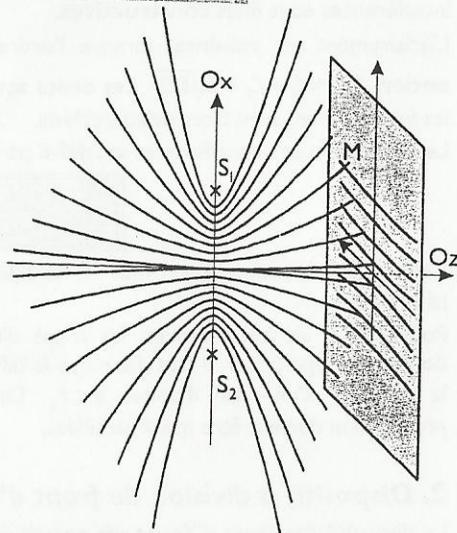
La distance entre deux franges d'égal éclairement est appelée **interfrange** et

vaut  $i = \frac{\lambda D}{a}$  et dans le plan focal d'une lentille,  $i = \frac{\lambda f'}{a}$ .

L'éclairement sur l'écran vaut :

$$\mathcal{E}(x) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda D} \right) \right)$$

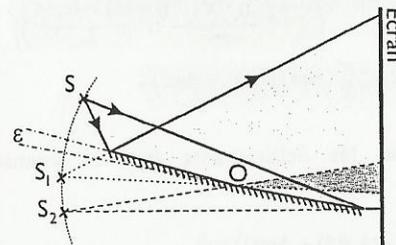
La source  $S$  étant **punctuelle** et **monochromatique** les interférences sont observées dans un large domaine de l'espace, les interférences sont **délocalisées** ou **non localisées**.



### 3. Autres dispositifs interférentiels à division de front d'onde

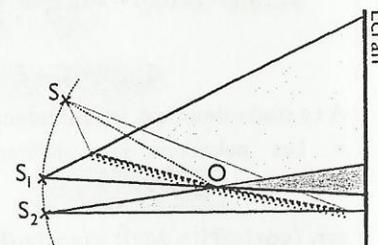
Pour analyser un phénomène d'interférences réalisées avec un autre système que celui des trous d'Young, le plus simple est souvent de se ramener à l'étude faite pour ce dispositif fondamental. La partie grisée plus foncée représente la zone où se produisent les interférences.

Dispositif  
Miroirs de Fresnel



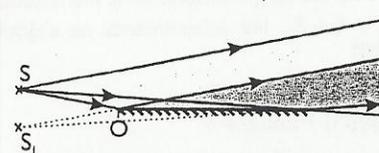
Les miroirs forment en O un petit angle  $\epsilon$ . Du fait de la réflexion sur le second miroir,  $\widehat{S_1OS_2} = 2\epsilon$

Système d'Young équivalent

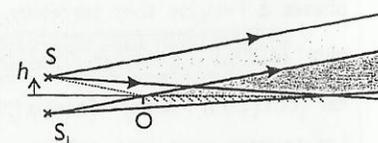


En première approximation, la distance  $a = S_1S_2$ , vaut  $a = 2\epsilon \times OS$ .

Miroir de Lloyd

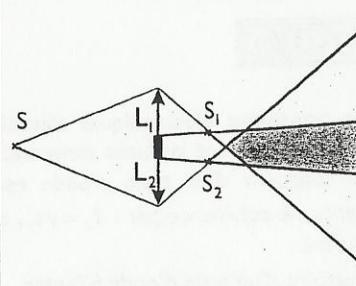


La source  $S$  et son image virtuelle  $S_1$  constituent deux sources secondaires qui produisent des interférences.

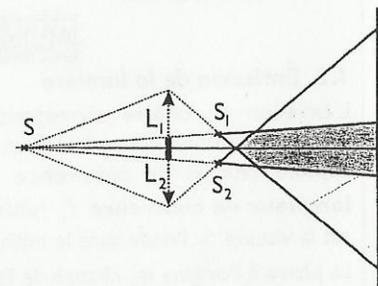


En première approximation, la distance  $a = SS_1 = 2h$ .

Bilentilles de Billet



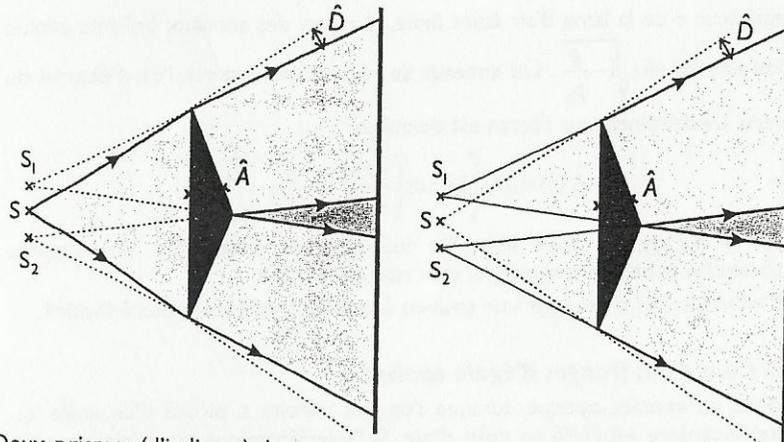
Deux demi-lentilles identiques, sont séparées par un cache de petite taille,  $d_e$ . Les sources secondaires sont les conjuguées par les lentilles de la source  $S$ .



En première approximation, la distance  $a = S_1S_2$ , vaut :

$$a = \frac{\overline{OS}}{\overline{OS} + f'} d_e \quad \text{où } f' \text{ est la distance focale de la lentille et } O \text{ le centre optique de la lentille.}$$

### Biprisme de Fresnel

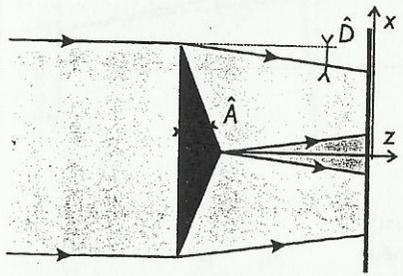


Deux prismes (d'indice  $n$ ) de petit angle au sommet  $\hat{A}$  sont accolés par leur base. Ils donnent naissance à deux faisceaux qui semblent issus des sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ . La déviation provoquée par un prisme de petit angle  $\hat{A}$  vaut  $\hat{D} = (n-1)\hat{A}$ .

En première approximation, la distance  $a = S_1S_2$ , vaut  $a = 2\hat{D} \times OS$ .

#### Cas de deux faisceaux de lumière parallèles

Si un dispositif interférentiel produit deux faisceaux de lumières parallèles, cela revient à considérer que les sources secondaires sont situées à l'infini et qu'elles font, entre elles, un angle  $\alpha = 2\hat{D}$ .

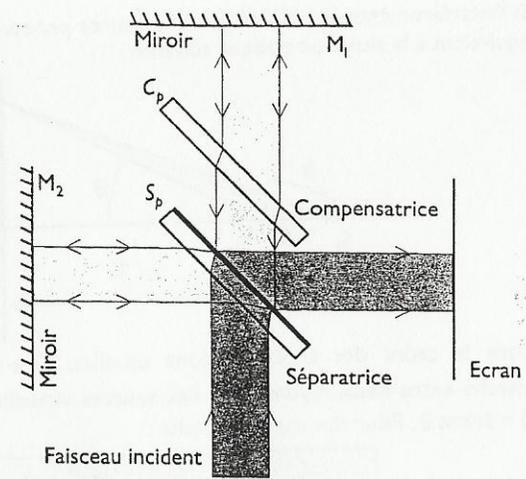


La différence de marche en un point  $M$  de la zone grisée (plus sombre) vaut alors  $\delta(M) = \alpha x = 2\hat{D}x$ . Les franges sont rectilignes, perpendiculaires à  $Ox$  et à  $Oz$ , d'interfrange  $i = \frac{\lambda}{\alpha}$ .

### 4. Dispositif à division d'amplitude - L'interféromètre de Michelson

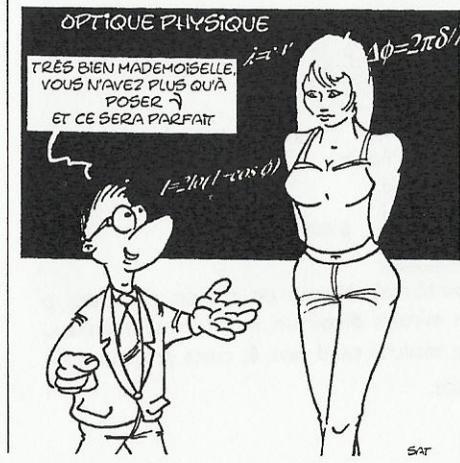
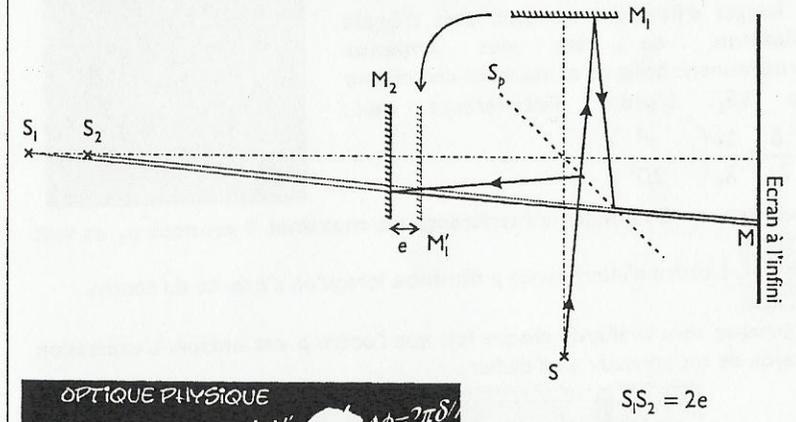
Cet interféromètre est constitué d'une lame semi-réfléchissante ou séparatrice (dont les coefficients de transmission et de réflexion en énergie sont de 0,5) et de deux miroirs plans (de grande qualité) dont la position et l'orientation sont réglables par l'intermédiaire d'un système de vis. La lame séparatrice étant traitée sur l'une de ses faces, un faisceau la traverse une fois et l'autre trois fois. Une lame dite compensatrice a été ajoutée afin de neutraliser l'effet de cette différence.

Lorsque les deux miroirs sont à égale distance de la séparatrice, à 45° de celle-ci et perpendiculaires entre eux, le trajet suivi par les deux faisceaux est identique, la différence de marche est nulle, dans ce cas, l'interféromètre est dit au « contact optique ». Un écran est placé parallèlement au miroir  $M_2$ .

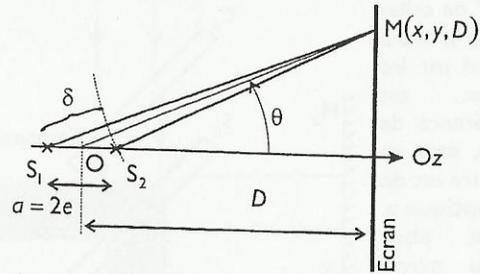


#### 4.1. Réglage en lame d'air, franges d'égale inclinaison

Partant du contact optique, un des miroirs est déplacé, parallèlement à lui-même, d'une distance  $e$ , l'interféromètre est réglé en lame d'air. Tout se passe comme si l'un des faisceaux traversait deux fois une lame d'air d'épaisseur  $e$ .



Si l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle, le montage est encore équivalent à la situation optique suivante :



Dans le cadre des approximations usuelles,  $D \gg e, |x|, |y|$ , la différence de marche entre deux rayons issus des sources virtuelles  $S_1$  et  $S_2$  s'évalue selon  $\delta \approx 2e \cos \theta$ . Pour des angles  $\theta$  petits :

$$\delta = 2e \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = 2e \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2D^2} \right) = 2e \left( 1 - \frac{r^2}{2D^2} \right)$$

La différence de marche ne dépend que de l'angle  $\theta$  (ou de la distance au point O,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Les franges d'interférences sont dites d'**égale inclinaison**, ce sont des **anneaux** alternativement brillants et sombres centrés sur l'axe  $SS_2$ . L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{r^2}{2D^2} \right)$$

Au **centre**,  $r = 0$ , l'ordre d'interférence est **maximal**, il est noté  $p_0$  et vaut

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$$

L'ordre d'interférence  $p$  **diminue** lorsqu'on s'**écarte** du centre.

Les anneaux sont **brillants** chaque fois que l'ordre  $p$  est **entier**. L'expression du rayon de ces anneaux s'en déduit :

$$r_{\text{brillant}} = \sqrt{2D^2 \left( 1 - \frac{p\lambda_0}{2e} \right)} = D \sqrt{2 \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right)} \quad p \text{ est entier}$$

Les anneaux sont **sombres** chaque fois que l'ordre  $p$  est **demi-entier**. L'expression du rayon de ces anneaux s'en déduit :

$$r_{\text{sombre}} = D \sqrt{2 \left( 1 - \frac{p+1/2}{p_0} \right)} \quad p \text{ est entier}$$

Le rayon des anneaux brillants (ou sombres) dépend de  $e$  pour un ordre  $p$  donné. Si la **distance**  $e$  entre les deux miroirs **diminue**, le **rayon** d'un anneau brillant  $r_p$  **diminue** et la différence de marche tend vers 0, cette propriété est mise à profit pour régler l'interféromètre.

L'épaisseur  $e$  de la lame d'air étant fixée, le rayon des anneaux brillants évolue selon une loi en  $\sqrt{1 - \frac{p}{p_0}}$ . Les anneaux se **resserrent** lorsque l'on s'**écarte** du centre. L'éclairement sur l'écran est donné par :

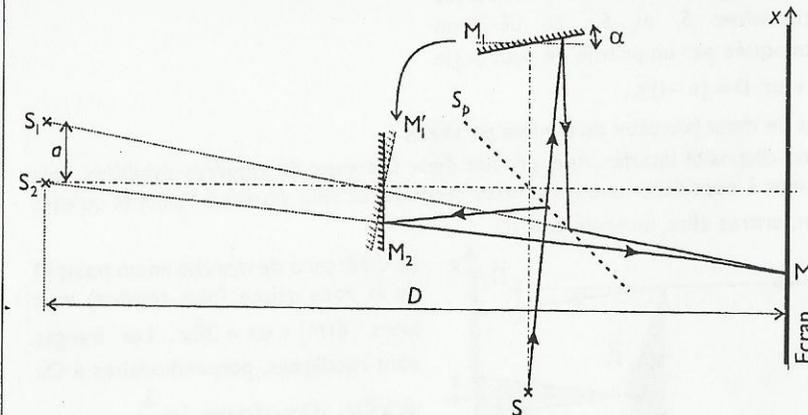
$$E_i(x) = 2E_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{r^2}{2D^2} \right) \right) \right)$$

Pour le réglage en lame d'air, les interférences créées par une **source ponctuelle monochromatique** sont **non localisées**.

Les interférences créées par une **source étendue** sont **localisées à l'infini**.

#### 4.2. Coin d'air, franges d'égale épaisseur

Partant du contact optique, lorsque l'un des miroirs a pivoté d'un angle  $\alpha$ , l'interféromètre est réglé en **coin d'air**. Si l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle, tout se passe comme si les rayons provenaient de deux sources virtuelles  $S_1$  et  $S_2$ , parallèles à l'écran et distantes de  $a$ , la situation correspond à celle des **trous d'Young** avec  $a = 2\alpha D$ .



Tout se passe comme si l'un des faisceaux traversait un coin d'air d'angle  $\alpha$  et d'épaisseur variable  $e(x')$ , ( $x'$  étant la distance à l'arête). Dans le cadre des approximations usuelles,  $D \gg a, |x|$ , la différence de marche entre deux rayons issus des sources virtuelles  $S_1$  et  $S_2$

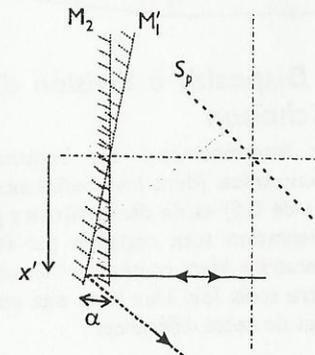
s'évalue facilement :

$$\delta = \frac{ax}{D} = 2\alpha x$$

La différence de marche ne dépend que de  $x$ , les franges d'interférences sont dites d'**égale épaisseur**, ce sont des **franges rectilignes** alternativement brillantes et sombres.

L'interfrange vaut :

$$\frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda}{2\alpha}$$



L'éclairement sur l'écran est donné par :

$$\mathcal{E}(x) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi\alpha x}{\lambda_0} \right) \right)$$



Pour le réglage en coin d'air, les interférences créées par une **source ponctuelle monochromatique** sont **non localisées**. Les interférences créées par une **source étendue** placée à l'infini, sont **localisées au voisinage du coin** (à l'intersection de deux émergents issus d'un même incident).

### 5. Interférences à deux ondes en lumière polychromatique et pour une source étendue — Localisation des interférences

#### 5.1. Cas d'une source ponctuelle mais polychromatique — cohérence temporelle de la source

La source polychromatique est considérée comme une superposition de sources monochromatiques de fréquences  $\nu$  différentes ( $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ). L'intensité élémentaire

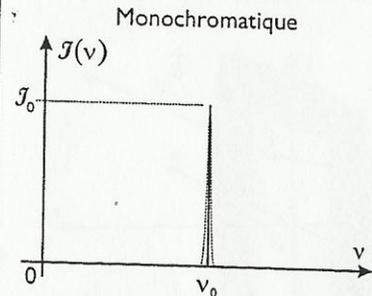
$$d\mathcal{J}(M, \nu) \text{ au point M est donné par } d\mathcal{J}(M, \nu) = i(\nu) \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(M)}{c} \nu \right) \right] d\nu, \text{ où}$$

$i(\nu)$  est la répartition d'intensité spectrale de la source pour la fréquence  $\nu$ . L'intensité en M due à la source (en tenant compte de toutes les fréquences émises) est la somme des intensités élémentaires car les composantes du spectre fréquentiel correspondent à des sources incohérentes.

$$\mathcal{J}(M, \nu) = \int_0^\infty i(\nu) \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(M)}{c} \nu \right) \right] d\nu$$

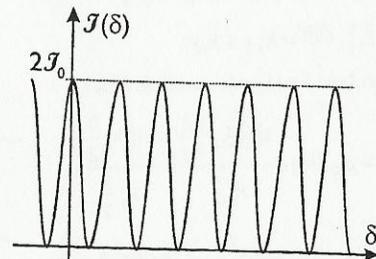
La superposition des figures d'interférences des différentes composantes spectrales de la source provoque un brouillage de la figure d'interférences dans certaines zones de l'espace.

Caractéristique spectrale de la source



Lorsque l'émission de la source se fait autour d'une fréquence centrale  $\nu_0$  (pointillés) avec une largeur fréquentielle très faible, la source est considérée monochromatique.

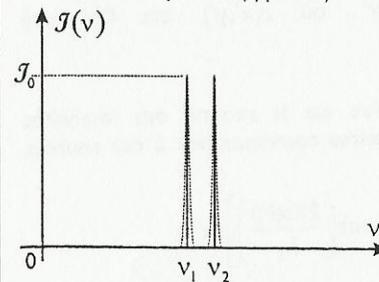
Intensité reçue en M



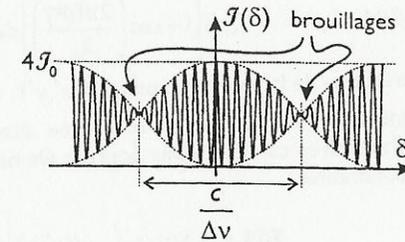
Les interférences sont non localisées.

$$\mathcal{J} = 4\mathcal{J}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\nu_0}{c} \delta \right) \right]$$

Doublet spectral (type Na)



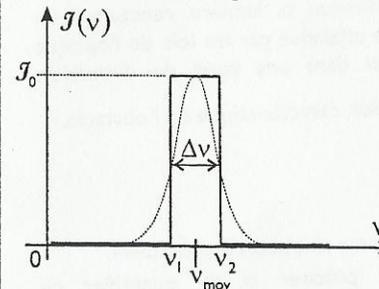
La source émet deux radiations différentes mais de fréquences très voisines,  $\left| \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} \right| \ll 1$ .



Des brouillages sont observés sur l'écran. La figure d'interférences est régulièrement brouillée. On pose  $\nu_{\text{moy}} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$  et  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ .

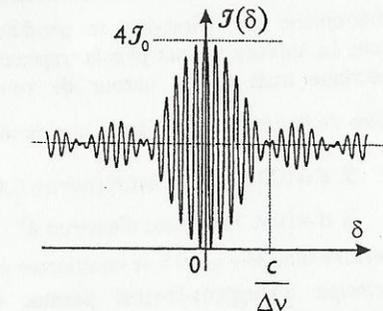
$$\mathcal{J} = 4\mathcal{J}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi\Delta\nu}{c} \delta \right) \cos \left( \frac{2\pi\nu_{\text{moy}}}{c} \delta \right) \right]$$

Profil rectangulaire



Dans certaines conditions, (traversée de filtres), l'émission (réelle en pointillés) de sources est quelquefois modélisée par un profil rectangulaire. L'intensité est constante dans un intervalle de fréquence  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ .

L'intensité spectrale vaut  $i(\nu) = \frac{\mathcal{J}_0}{\Delta\nu}$ .



Les interférences sont essentiellement observées dans une zone correspondant à une différence de marche quasi nulle et de largeur  $\frac{2c}{\Delta\nu}$ . Plus la largeur fréquentielle de la source est large plus les interférences sont « localisées » autour de la zone correspondant à  $\delta = 0$ .

$$\mathcal{J} = 4\mathcal{J}_0 \left[ 1 + \text{sinc} \left( \frac{\pi\Delta\nu}{c} \delta \right) \cos \left( \frac{2\pi\nu_{\text{moy}}}{c} \delta \right) \right]$$

#### 5.2. Cas d'une source monochromatique mais étendue — cohérence spatiale de la source

La source étendue est considérée comme une superposition de sources ponctuelles situées en  $P(x', y')$  qui parcourt la source. L'intensité élémentaire  $d\mathcal{J}(M, x', y')$  au point M du champ d'interférences est donnée par

$d\mathcal{J}(M, x', y') = \mathcal{I}(x', y') \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(P)}{\lambda_0}\right) \right] dx' dy'$ , où  $\mathcal{I}(x', y')$  est l'intensité surfacique de la source au point  $P(x', y')$ .

L'intensité en  $M$  due à la source étendue est la somme des intensités élémentaires car les points sources élémentaires correspondent à des sources incohérentes.

$$\mathcal{J}(M, x', y') = \int_{\text{étendue de la source}} \mathcal{I}(x', y') \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}\right) \right] dx' dy'$$

La superposition des figures d'interférences des différents points provoque un brouillage de la figure d'interférences dans certaines zones de l'espace. **Les interférences sont localisées.**

Le calcul de l'intensité lumineuse en un point  $M$  de la zone d'interférences dépend du système interférentiel.

### 6. Diffraction des ondes lumineuses

Le phénomène de diffraction se produit lorsque la lumière rencontre un obstacle. La lumière ne suit plus la trajectoire attendue par les lois de l'optique géométrique mais s'étale autour de celle-ci dans une zone de dimension angulaire de l'ordre de  $\frac{\lambda}{d}$ ,  $d$  étant une dimension caractéristique de l'obstacle.

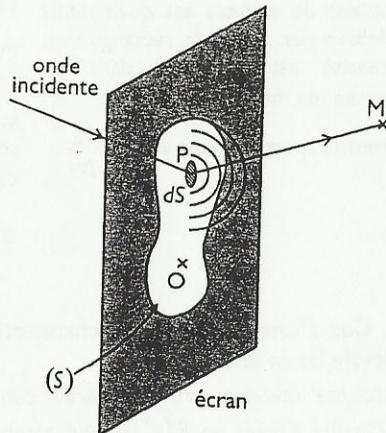
- Si  $d = 100 \lambda$  l'angle est d'environ  $0,6^\circ$
- Si  $d = 10 \lambda$  l'angle est d'environ  $6^\circ$

L'ouverture tend elle aussi à se comporter comme une source ponctuelle.

Le principe d'Huygens-Fresnel permet de préciser et de quantifier ce phénomène.

#### 6.1. Le principe de Huygens-Fresnel

**Énoncé simplifié :** Chaque élément de surface  $dS(P)$  centré sur un point  $P$  d'une ouverture  $(S)$  atteinte par une onde monochromatique se comporte comme une source secondaire ponctuelle émettant des ondelettes sphériques d'amplitude complexe proportionnelle à l'amplitude  $\underline{a}_i(P)$  de l'onde incidente en  $P$  et à la surface  $dS(P)$ . Les différentes sources secondaires sont mutuellement cohérentes donc les amplitudes des ondelettes en  $M$ , point d'observation, s'additionnent.



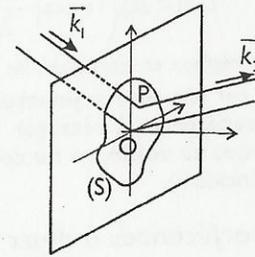
### 6.2. Diffraction de Fraunhofer d'une onde incidente plane

Il s'agit de l'observation à l'infini de la diffraction d'une onde plane.

L'observation se fait sur un écran très éloigné ou, sous certaines conditions dans le plan focal image d'une lentille convergente. Les ondelettes dues aux différentes sources secondaires interfèrent et l'amplitude diffractée en  $M$  s'écrit :

$$\underline{A}(M) = \underline{a}_0(M) \iint_{(S)} \exp(j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP}) dS$$

Le terme  $(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP}$  représente la différence de phase au point  $P$  entre un rayon passant par  $O$  et un rayon passant par  $P$ .



### 6.3. Diffraction par une pupille de phase ou d'amplitude

Si la surface  $(S)$  est constituée d'un matériau de transparence variable (introduisant éventuellement un déphasage variable), l'onde incidente plane est modifiée lors de la traversée du matériau. L'amplitude de l'onde est multipliée en  $P$  par le facteur  $|\underline{t}(P)|$  et l'onde subit en  $P$  un retard de phase  $\varphi(P)$ . La modification de l'onde se traduit alors par  $\underline{t}(P) = |\underline{t}(P)| \exp(-i\varphi(P))$ . L'amplitude diffractée en  $M$  s'écrit :

$$\underline{A}(M) = \underline{a}_0(M) \iint_{(S)} \underline{t}(P) \exp(i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP}) dS$$

Si la pupille est parfaitement transparente :  $\underline{t}(P) = 1$

Si la pupille est parfaitement opaque :  $\underline{t}(P) = 0$

### 6.4. Diffraction de Fraunhofer d'une onde plane par une ouverture rectangulaire

Calcul de l'amplitude diffractée à l'infini

Posons  $\vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$ ,

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP} = k_x x + k_y y.$$

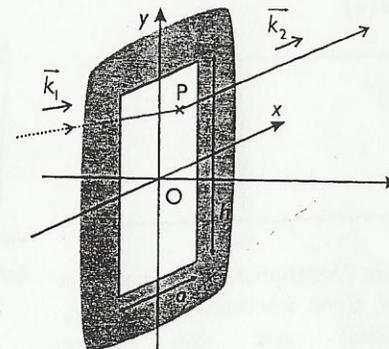
Le calcul de l'intégrale conduit alors à :

$$\underline{A}(M) = \underline{a}_0(M) a \frac{\sin\left(k_x \frac{a}{2}\right)}{k_x \frac{a}{2}} h \frac{\sin\left(k_y \frac{h}{2}\right)}{k_y \frac{h}{2}}$$

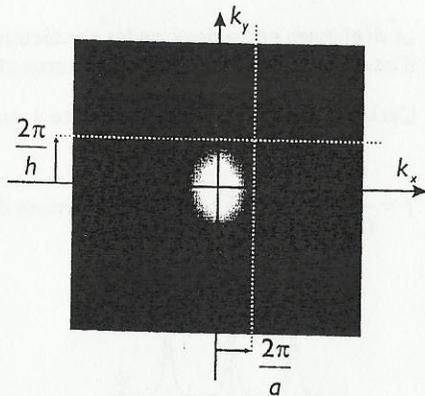
$$\underline{A}(M) = \underline{a}_0(M) a \operatorname{sinc}\left(k_x \frac{a}{2}\right) h \operatorname{sinc}\left(k_y \frac{h}{2}\right)$$

L'éclairement se présente sous la forme :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(k_x \frac{a}{2}\right) \operatorname{sinc}^2\left(k_y \frac{h}{2}\right)$$



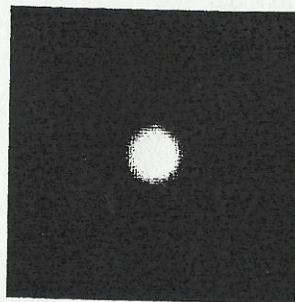
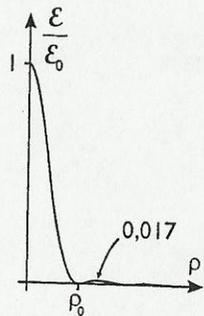
- L'essentiel de la lumière diffractée se trouve dans la tache principale.
- Les taches secondaires les plus (sinon les seules) visibles sont celles situées sur les axes parallèles aux côtés de la fente.
- La tache principale est deux fois plus large que les taches sur l'axe horizontal, et deux fois plus haute que celles situées sur l'axe vertical.



**6.5. Diffraction par un trou circulaire :**

Lorsque la pupille diffractante est une ouverture circulaire de diamètre  $d$ , l'intensité lumineuse se répartit, sur l'écran, essentiellement dans un disque lumineux central appelé, tache d'Airy et dans des anneaux peu lumineux. Le rayon angulaire de la tache d'Airy vaut :

$$\rho_0 = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

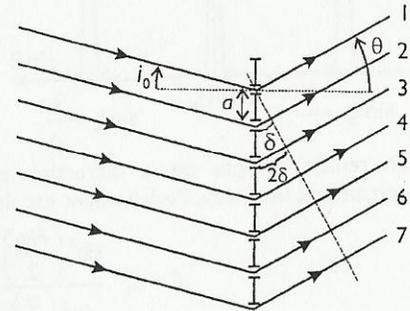


Les instruments d'optique étant composés, entre autres, de diaphragmes circulaires (lentilles), la diffraction limite l'aptitude à séparer deux taches lumineuses formées par le dispositif. Ces deux taches seront séparées si leurs centres sont distincts de plus d'un rayon de la tache d'Airy, c'est le critère de Rayleigh.

**7. Interférences à l'infini entre N ondes cohérentes**

**7.1. Réseau plan**

Un réseau est constitué d'un écran percé de  $N$  fentes supposées infiniment fines et équidistantes de  $a$  que l'on appelle « pas » du réseau (période spatiale). Toutes les ondes issues des  $N$  fentes sont cohérentes, il faut sommer les amplitudes de toutes ces ondes.



Pour une incidence normale et l'onde émergent dans une direction  $\theta$ , la différence de marche entre l'onde issue de la fente 1 et l'onde issue de la fente  $m$  vaut :

$$\delta_{m/1} = (m-1)a \sin \theta = (m-1)\delta$$

Si l'incidence n'est plus normale mais égale à  $i_0$ , la différence de marche  $\delta$  entre deux rayons consécutifs devient :

$$\delta' = a(\sin \theta - \sin i_0)$$

La condition d'interférences constructives s'écrit alors :  $a(\sin \theta_q - \sin i_0) = q\lambda$  (**formule des réseaux**) où  $q \in \mathbb{Z}$  caractérise l'ordre du maximum d'éclairement considéré.

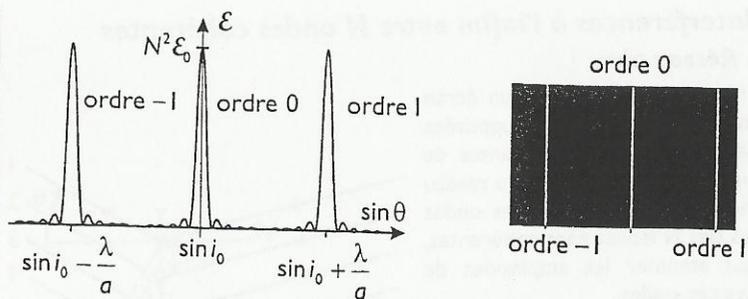
Remarquons que pour  $q=0$ ,  $a(\sin \theta_0 - \sin i_0) = 0$ ,  $\theta_0 = i_0$  : le maxima correspondant à l'ordre 0 est dans la même direction pour toutes les longueur d'onde.

Le calcul de l'éclairement en un point M d'un écran situé à l'infini (sous la direction  $\theta$  conduit à :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$$

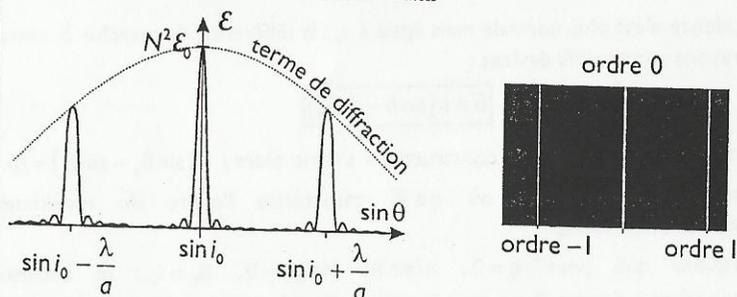
où  $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a(\sin \theta - \sin i_0)}{\lambda}$  et  $\mathcal{E}_0$  l'éclairement dû à une ouverture.

L'éclairement sur l'écran en fonction de  $\theta$  est alors le suivant :



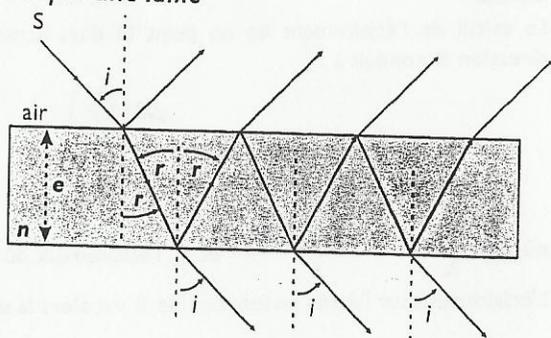
En tenant compte de la diffraction par les fentes (de largeur  $\epsilon < a$  qui constituent le réseau, l'éclairement est alors le suivant :

$$\epsilon = \epsilon_0 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}_{\text{terme d'interférences}} \underbrace{\text{sinc}^2\left(\pi e \frac{\sin\theta}{\lambda}\right)}_{\text{terme de diffraction}}$$



### 7.2. Interférences créées par une lame

Une lame d'indice  $n$  qui présente des faces semi-réfléchissantes est éclairée par une source ponctuelle  $S$  monochromatique. Les réflexions sur les faces produisent des rayons issus de la même source, les ondes sont cohérentes, il s'agit de sommer les amplitudes des ondes.



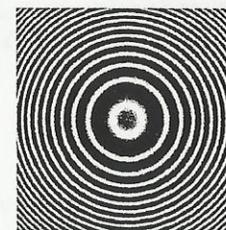
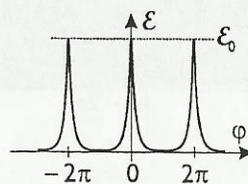
En un point  $M$  situé à l'infini dans la direction  $i$  l'amplitude de l'onde résultante a la forme suivante :  $\underline{a}(M) = \underline{a}_0(M) \frac{1}{1 - R e^{-j\varphi}}$  où  $R$  est le coefficient de réflexion

sur une face et  $\varphi$  le déphasage entre deux rayons consécutifs,  $\varphi = \frac{4\pi n e}{\lambda_0} \cos r$ .

Le déphasage entre deux ondes consécutives ne dépend que de l'angle  $i$ , la figure d'interférences est composée d'anneaux alternativement sombres et brillants.

L'éclairement en  $M$  sous l'incidence  $i$  vaut alors :  $\epsilon(M) = \epsilon_0 \frac{1}{1 + f \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$  avec

$f = \frac{4R}{(1-R)^2}$  appelé coefficient de finesse des anneaux.



Le tracé de l'éclairement a été tracé pour un coefficient de réflexion de 0,9

Si le coefficient de réflexion est voisin de 1, les anneaux observés sont très fins.



# Électromagnétisme

## ÉLECTROSTATIQUE

### 1. Interaction de deux charges ponctuelles, champ électrostatique

#### 1.1. Loi de Coulomb

La force  $\vec{F}_{12}$  exercée par une charge ponctuelle  $q_1$  localisée en  $M_1$  sur une charge ponctuelle  $q_2$  située en  $M_2$  est dirigée suivant la droite qui relie les deux

charges. La loi de Coulomb s'écrit : 
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 M_2}{\|M_1 M_2\|^3}$$

Dans le système international, la valeur numérique de la permittivité électrique du vide  $\epsilon_0$  est  $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . La force de Coulomb est portée par la direction  $M_1 M_2$ , varie en  $1/r^2$ , est attractive ou répulsive selon les signes des charges.

#### 1.2. Champ électrostatique et expressions

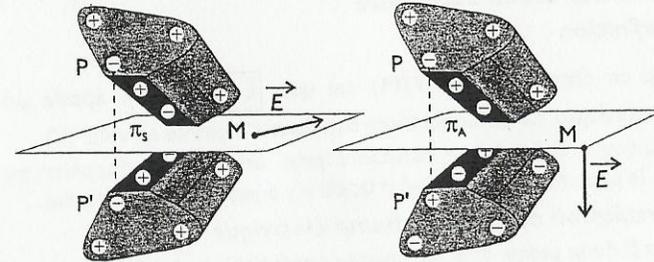
On considère une particule chargée  $q$  placée en un point  $M$  de l'espace, cette particule subit une force de Coulomb  $\vec{f}$  proportionnelle à la charge  $q$ . Elle peut s'écrire :  $\vec{f} = q\vec{E}(M)$ .  $\vec{E}(M)$  représente le champ électrique en  $M$ ; il s'exprime en  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Nature de la distribution	Champ électrostatique créé en $M$
Ponctuelle	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{P}_i M}{\ P_i M\ ^3}$
Linéique	$\lambda$ est la densité linéique de charges (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ ) $\vec{E}(M) = \int_{\text{distribution}} \frac{\lambda(P) \delta l \vec{P} M}{4\pi\epsilon_0 \ P M\ ^3}$
Surfacique	$\sigma$ est la densité surfacique de charges (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ ) $\vec{E}(M) = \iint_{\text{distribution}} \frac{\sigma(P) \delta S \vec{P} M}{4\pi\epsilon_0 \ P M\ ^3}$
Volumique	$\rho$ est la densité volumique de charges (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ ) $\vec{E}(M) = \iiint_{\text{distribution}} \frac{\rho(P) \delta \tau \vec{P} M}{4\pi\epsilon_0 \ P M\ ^3}$

### 2. Éléments de symétrie et conséquences

Soit  $(\Sigma)$  une distribution de charges,  $M$  un point où l'on désire connaître le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ ,  $(\pi)$  un plan contenant le point  $M$ . Deux situations particulières peuvent se présenter :

- Si  $(\pi)$  est un plan de symétrie pour la distribution des charges, alors  $\vec{E}(M)$  est contenu dans le plan  $(\pi)$ .
- Si  $(\pi)$  est un plan d'antisymétrie pour la distribution des charges, alors  $\vec{E}(M)$  est perpendiculaire au plan  $(\pi)$ .



Si, en outre, la distribution de charges est invariante selon une (ou plusieurs) coordonnée(s), les composantes du champ sont, elles aussi, invariantes selon cette (ces) même (s) coordonnée(s).

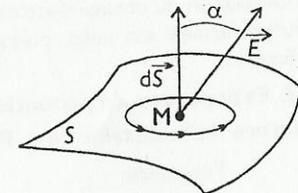
Connaissant le champ électrostatique, il est alors possible de tracer les lignes de champ de ce vecteur, c'est-à-dire les courbes tangentes en tous points au vecteur, orientées selon celui-ci. Elles divergent à partir d'une charge positive et convergent vers une charge négative.

### 3. Théorème de Gauss

#### 3.1. Flux du champ électrostatique

Le flux  $\phi$  du champ électrostatique à travers la surface  $S$  est :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



#### 3.2. Théorème de Gauss

Soit  $S$  une surface fermée, orientée vers l'extérieur, délimitant un volume  $\tau$ . Le flux du champ électrostatique à travers  $S$ , est égal au quotient de la charge totale contenue dans le volume  $\tau$  par la permittivité du vide  $\epsilon_0$ .

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \delta\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho \delta\tau$$

Pour trouver la surface de Gauss, permettant un calcul du champ électrostatique, il faut procéder à une analyse précise des symétries et invariances.

### 3.3. Analogie avec le champ de gravitation

Soit  $S$  une surface fermée, orientée vers l'extérieur, délimitant un volume  $\tau$ . Le flux du champ gravitationnel  $\vec{g}$  à travers la surface  $S$  est égal à l'opposé du produit de la masse totale intérieure à la surface  $S$  par  $4\pi\mathcal{G}$ , où  $\mathcal{G}$  désigne la constante de gravitation universelle.

$$\phi = \oiint_S \vec{g} \cdot \delta\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{intérieure}} = -4\pi\mathcal{G} \iiint_{\tau} \mu \delta\tau$$

## 4. Potentiel électrostatique

### 4.1. Définition

Il existe un champ scalaire  $V(M)$  tel que  $\vec{E} = -\text{grad}(V)$  appelé **potentiel électrostatique**. Le potentiel électrostatique s'exprime en volts (V).

Il est toujours défini à une constante près, on convient d'appeler **potentiel absolu**, le potentiel tel que  $V(\infty) = 0$ , s'il n'y a pas de charge à l'infini.

### 4.2. Circulation du vecteur champ électrique

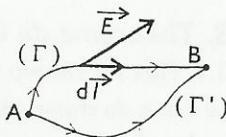
Soit A et B deux points et  $\Gamma$  un chemin conduisant de A à B.

La circulation  $C_{AB}$  du champ électrostatique de A à B, le long de  $\Gamma$  est définie par :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \delta\vec{\ell}$$

$C_{AB}$  s'écrit aussi  $C_{AB} = -\int_A^B \text{grad}(V) \cdot \delta\vec{\ell} = -\int_A^B dV$ , c'est-à-dire :  $C_{AB} = V(A) - V(B)$

Cette dernière expression fait apparaître que la circulation  $C_{AB}$  ne dépend que de la position des points A et B, et non de la courbe  $\Gamma$  reliant ces deux points. La circulation du champ électrostatique le long de toute courbe fermée est nulle, puisque les points A et B coïncident.



### 4.3. Expressions du potentiel électrostatique

Nature de la distribution Potentiel électrostatique absolu créé en M

Ponctuelle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\|P_i M\|}$$

Linéique

$$V(M) = \int_{\text{distribution}} \frac{\lambda(P) \delta\ell}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|}$$

Surfacique

$$V(M) = \iint_{\text{distribution}} \frac{\sigma(P) \delta S}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|}$$

Volumique

$$V(M) = \iiint_{\text{distribution}} \frac{\rho(P) \delta\tau}{4\pi\epsilon_0 \|PM\|}$$

## 5. Dipôle électrostatique

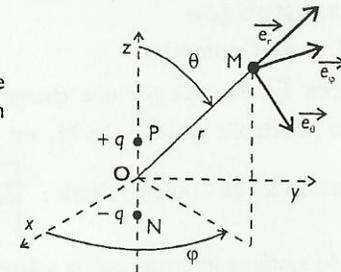
### 5.1. Modèle du doublet

Un doublet ou dipôle est un ensemble de deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$  ( $q > 0$ ) localisées respectivement en des points P et N séparés d'une distance  $a$ . Choisissons un repère d'espace Oxyz, orthonormé direct tel que :

- l'axe Oz passe par P et N.
- O est le milieu du segment NP.

Le **moment dipolaire** de cette distribution de charge est par définition le vecteur :

$$\vec{p} = q \overline{NP}$$



Dans le système international,  $\|\vec{p}\|$  s'exprime en coulomb-mètre (C·m) et en

chimie  $\|\vec{p}\|$  est donné en debye (D) avec  $1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$ .

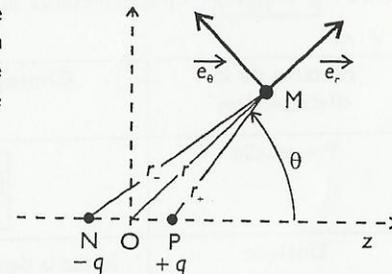
### 5.2. Potentiel et champ à grande distance du doublet

Le plan qui contient le point M et l'axe Oz est un plan de symétrie. Le point courant M est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

Ceci implique que le champ électrique en M est contenu dans ce plan. L'invariance de la situation physique par rotation autour de l'axe Oz permet de limiter l'étude à ce seul plan méridien  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

En notant  $r_+ = PM$  et  $r_- = NM$ , le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$



A grande distance du doublet ( $r \gg a$ ), on peut écrire au premier ordre :

$$r_- \approx r + \frac{a}{2} \cos\theta \text{ et } r_+ \approx r - \frac{a}{2} \cos\theta$$

Alors :

$$V(M) \approx \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cette expression est l'approximation dipolaire du potentiel électrostatique créé par le doublet. En introduisant le vecteur moment dipolaire  $\vec{p}$ , il vient

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p} \cdot \overline{OM}}{OM^3} \right)$$

Il est important de remarquer que la seule caractéristique de la distribution de charge qui intervient dans cette dernière expression est le moment dipolaire

Le champ électrique  $\vec{E} = -\text{grad } V$  se calcule en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\text{grad}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\varphi$$

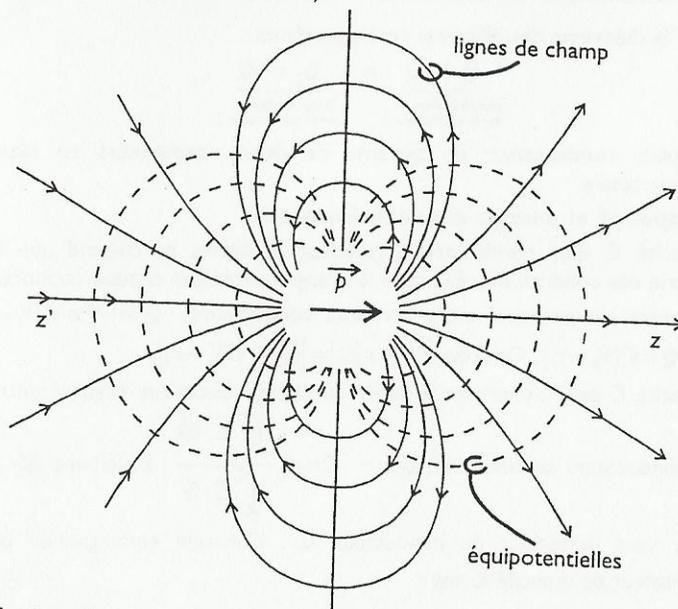
On obtient alors pour le champ à grande distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

Donnons également l'expression intrinsèque du champ créée à grande distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ 3(\vec{p} \cdot \text{OM}) \frac{\text{OM}}{\text{OM}^3} - \frac{\vec{p}}{\text{OM}^3} \right]$$

La figure ci-dessous représente, dans un plan méridien, les lignes de champ électrique et les courbes équipotentielles (intersection des surfaces équipotentielles et du plan méridien).



### 5.3. Action d'un champ électrostatique uniforme sur un dipôle

Dans un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}_0$  uniforme les actions exercées par ce champ sur un dipôle  $\vec{p}$  sont les suivantes :

- la résultante  $\vec{R} = -q\vec{E}_0(N) + q\vec{E}_0(P)$  est nulle :

$$\vec{R} = \vec{0}$$

- le dipôle subit donc un couple de moment  $\vec{\Gamma}$  :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

Site Internet des ouvrages : [www.toutelaphysique.fr](http://www.toutelaphysique.fr)

## 6. Formulation locale des lois de l'électrostatique

### Équations locales

Les équations locales relatives au champ électrostatique sont :

$$\text{rot } \vec{E}_{(M)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{E}_{(M)} = \frac{\rho_{(M)}}{\epsilon_0}$$

• La première relation exprime que le champ électrostatique est à **circulation conservative** :  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ . On retrouve que le champ électrostatique dérive

d'un potentiel scalaire  $V$  selon la relation  $\vec{E}_{(M)} = -\text{grad } V_{(M)}$ .

• La seconde relation est la formulation locale du théorème de Gauss.

L'équation de Poisson est l'équation locale reliant le potentiel électrostatique  $V_{(M)}$  à la charge volumique  $\rho_{(M)}$ .

$$\Delta V_{(M)} + \frac{\rho_{(M)}}{\epsilon_0} = 0$$

Dans une région de l'espace vide de charge, l'équation de Poisson prend la forme appelée **équation de Laplace** :  $\Delta V_{(M)} = 0$ .

**Théorème des extrema** : dans une région vide de charge, le potentiel électrostatique ne peut pas présenter d'extremum.

## 7. Conducteur en équilibre électrostatique

### 7.1. Définition

Un conducteur, de conductivité électrique finie  $\gamma$ , au repos dans le référentiel galiléen du laboratoire, est dit ohmique s'il satisfait à la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j}_{(M)} = \gamma \vec{E}_{(M)}$$

Dans un tel conducteur, homogène et de température uniforme, l'état d'équilibre électrostatique est défini par l'absence de mouvement d'ensemble des porteurs mobiles de charges.

La densité de courant électrique est nulle en tout point du conducteur en équilibre électrostatique :  $\vec{j} = \vec{0}$ .

### 7.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique

• A l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique, le champ électrique est nul,  $\vec{E}_{(M)} = \vec{0}$ .

• Le volume et la surface d'un conducteur en équilibre sont équipotentiels. Le champ électrostatique en un point  $M$  de la surface d'un conducteur en équilibre est donc normal à la surface en ce point.

• La densité volumique de charge dans un conducteur en équilibre est nulle. Si le conducteur est chargé, les charges se répartissent uniquement en surface.

• Au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique, le champ électrique est plus intense au voisinage des régions de faible rayon de courbure. Cette propriété constitue « le pouvoir des pointes ».

### 7.3. Théorème de Coulomb

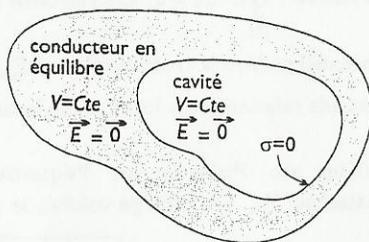
Pour un conducteur en équilibre électrostatique, le champ électrostatique dans

le vide à la surface du conducteur est donné par la relation :  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ext}$  où  $\vec{n}_{ext}$

représente le vecteur unitaire localement normal à la surface, orienté vers l'extérieur.

### 7.4. Champ dans une cavité vide de charge

Soit une cavité vide de charge réalisée à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique.

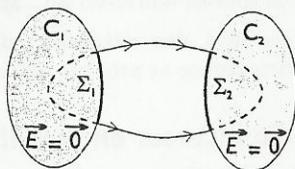


Le champ à l'intérieur de la cavité est nul.

### 7.5. Théorème des éléments correspondants

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux conducteurs en équilibre électrostatique reliés par un tube de champ ayant les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  comme éléments correspondants.

Les charges portées par deux éléments correspondants sont opposées :  $Q_1 = -Q_2$  où  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ) est la charge portée par  $\Sigma_1$  (resp.  $\Sigma_2$ ).



### 7.6. Théorème de superposition des états d'équilibre

La superposition de plusieurs états d'équilibres de conducteurs est encore un état d'équilibre.

### 7.7. Théorème d'unicité

• Soit un ensemble de  $n$  conducteurs en équilibre électrostatique, et dont l'état électrique est défini indifféremment pour chacun par la donnée de leur potentiel ou de leur charge. Dans l'espace entre les conducteurs, le potentiel  $V$  satisfaisant à l'équation de Laplace et aux conditions limites imposées par les conducteurs est unique.

• L'état d'équilibre de chaque conducteur est donc également unique.

### 7.8. Capacité propre d'un conducteur

La charge  $Q$  d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle à son potentiel absolu  $V$ . Le coefficient de proportionnalité est la capacité  $C$  du conducteur :  $Q = CV$ .

• Capacité propre d'un conducteur sphérique de rayon  $R$  :  $C = 4\pi\epsilon_0 R$

### 7.9. Energie d'un ensemble de conducteurs

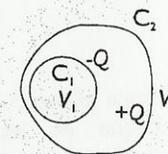
Soit un ensemble de  $n$  conducteurs en interaction. En notant  $Q_i$  la charge du  $i^{\text{ème}}$  conducteur et  $V_i$  son potentiel, l'énergie de l'ensemble des conducteurs est

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

### 8. Étude des condensateurs

#### 8.1. Influence totale, condensateur

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux conducteurs en équilibre électrostatique : lorsque **toutes les lignes de champ électrique issues de  $C_1$  aboutissent sur  $C_2$** , les deux conducteurs sont dits en situation d'**influence totale**. Cette condition est réalisée, en particulier, lorsque le conducteur  $C_2$  entoure  $C_1$ .



D'après le théorème des éléments correspondants :

$$\underbrace{Q_1 = -Q}_{\text{charge portée par le conducteur 1}} = - \underbrace{Q_2 = +Q}_{\text{charge portée par le conducteur 2}}$$

On appelle condensateur un système de deux conducteurs en situation d'influence totale.

#### 8.2. Capacité et énergie d'un condensateur

La capacité  $C$  d'un condensateur, grandeur **positive**, ne dépend que de la géométrie des conducteurs. Elle relie la charge portée par chaque conducteur à la différence de potentiel entre les deux conducteurs :  $Q_1 = -Q = C(V_1 - V_2)$ ,  $Q_2 = +Q = C(V_2 - V_1)$ . On a donc :  $Q = |Q_1| = |Q_2| = C|V_1 - V_2|$ .

La capacité  $C$  peut s'exprimer à partir du champ électrique régnant entre les

deux conducteurs suivant la relation :  $C = \epsilon_0 \frac{\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \delta\vec{S}}{\int_{C_1} \vec{E} \cdot \delta\vec{l}}$ . L'élément  $\delta\vec{S}$  étant

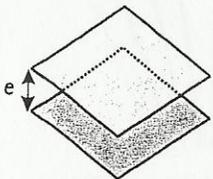
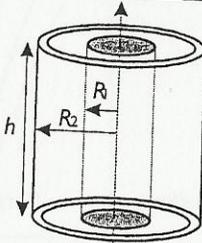
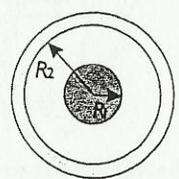
orienté vers l'extérieur du conducteur  $C_1$ . L'énergie emmagasinée par le condensateur de capacité  $C$  est :

$$E = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Elle est localisée là où règne le champ électrique entre les conducteurs.

### 8.3. Quelques capacités usuelles

Les effets de bord sont négligés pour les condensateurs plan et cylindrique.

Condensateur plan	Condensateur cylindrique	Condensateur sphérique
 $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$	 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$	 $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

## MAGNÉTOSTATIQUE

### 1. Relation de Biot et Savart

La relation de Biot et Savart donne une expression intégrale du champ magnétique créé en un point d'observation M :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{i \delta\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}$$

- Un champ magnétique s'exprime en tesla : T
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la perméabilité du vide
- Ordres de grandeur : champ magnétique terrestre ( $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ), champ magnétique créé par un aimant en son voisinage ( $10^{-2} \text{ T}$ ).

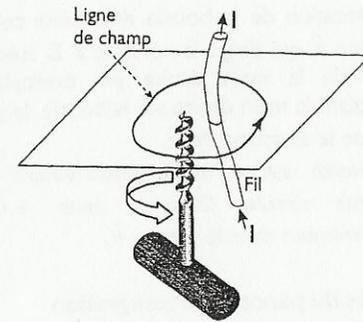
### 2. Propriétés des lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique ont des caractéristiques spécifiques qui les distinguent aisément des lignes de champ électrique. Ces propriétés essentielles sont les suivantes :

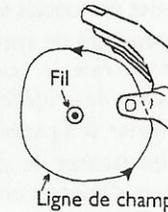
- Une ligne de champ magnétique est une **courbe fermée**. Elle n'a ni début ni fin, à l'exception des lignes allant de l'infini vers l'infini. Néanmoins, l'extension d'une carte de champ peut être trop limitée pour voir l'ensemble de la ligne.
- Une ligne de champ entoure les conducteurs parcourus par des courants.
- Le sens de parcours d'une ligne est étroitement lié au sens des courants dans les fils. Quand la ligne s'enroule autour du fil dans le sens horaire, le courant est dirigé vers l'arrière, ce que nous symbolisons par  $\otimes$ . Une ligne de champ orientée dans le sens trigonométrique direct correspond à un courant dirigé vers l'avant représenté par le symbole  $\odot$ .

Retenons deux autres méthodes mnémotechniques permettant de relier l'orientation de la ligne de champ entourant un conducteur et le sens du courant dans ce fil.

La règle du tire bouchon : Le tire bouchon est placé de telle sorte que son sens de vissage corresponde à l'orientation de la ligne de champ. En tournant, le tire bouchon se déplace dans le sens du courant circulant dans le fil.



La règle de la main droite : Si la main droite s'enroule autour de la ligne de champ étudiée, le pouce indique le sens du courant dans le fil entouré par cette ligne.



### 3. Propriétés de symétrie ou d'antisymétrie

Soit  $(\Sigma)$  une distribution de courants, M un point où l'on désire orienter le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  et  $(\pi)$  un plan contenant le point M.

Deux situations particulières se présentent :

- si  $(\pi)$  est un **plan de symétrie** pour la distribution des courants, alors  $\vec{B}(M)$  est **perpendiculaire au plan**  $(\pi)$
- si  $(\pi)$  est un **plan d'antisymétrie** pour la distribution des courants, alors  $\vec{B}(M)$  est **contenu dans le plan**  $(\pi)$ .

Si, en outre, la distribution de courants est invariante selon une (ou plusieurs) coordonnée(s), les composantes du champ sont elles aussi invariantes selon cette (ces) même(s) coordonnée(s).

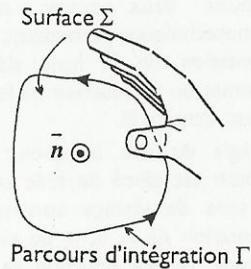
### 4. Théorème d'Ampère

Ce théorème relie la **circulation**  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell}$  du champ magnétique le long d'une **courbe fermée**  $\Gamma$  quelconque à l'**intensité**  $I$  qui **traverse** une surface  $\Sigma$  délimitée par cette boucle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Le parcours d'intégration, qui n'est pas forcément une ligne de champ, doit être préalablement orienté.

L'orientation de la boucle détermine celle du vecteur  $\vec{n}$  qui dirige la normale à  $\Sigma$  suivant la règle de la main droite par exemple. En enroulant la main droite sur la boucle, le pouce indique la direction de  $\vec{n}$ .  
L'intensité est comptée positivement si le courant circule dans le sens  $+\vec{n}$  et négativement dans le sens  $-\vec{n}$ .



**Choix du parcours d'intégration**

Le théorème d'Ampère n'est pas d'un usage commode dans le cas général, mais il permet des calculs simples lorsqu'il est exploitable. C'est l'utilisation successive des propriétés de symétrie (pour en déduire la direction de  $\vec{B}$ ), puis d'invariance (pour ne retenir que les variables de position pertinentes), qui vont nous permettre de simplifier, dans certains cas, un problème magnétostatique afin de déterminer  $\vec{B}$  à partir d'une propriété globale.

Afin de faciliter le calcul de la circulation, il faut judicieusement choisir le parcours d'intégration  $\Gamma$ . Pour cela, il faut que :

- a.  $\vec{B}$  soit tangent ou orthogonal à  $\Gamma$ .
- b. sur les portions où  $\vec{B}$  est tangent, la norme de  $\vec{B}$  doit être uniforme.

**5. Le champ magnétique est un champ à flux conservatif**

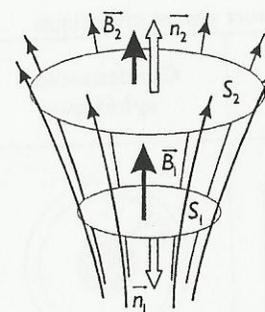
Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface  $S$  est une grandeur algébrique qui repose sur l'orientation relative du champ par rapport au vecteur unitaire  $\vec{n}$  orientant la normale à cette surface. En inversant le vecteur  $\vec{n}$ , le flux change de signe. Pour une surface fermée, le vecteur  $\vec{n}$  doit être orienté de la même façon en tout point de la surface fermée, soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur. Il est d'usage de l'orienter vers l'extérieur.

Le champ magnétique est un champ à flux conservatif, ce qui signifie que le flux du champ magnétique à travers une **surface fermée** quelconque est nul :

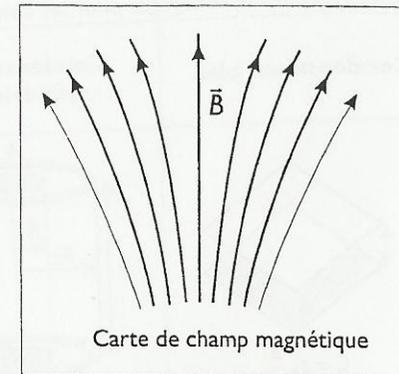
$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \delta S = 0$$

Toute ligne de champ qui entre dans le volume délimité par cette surface doit en ressortir. Pour dégager le contenu physique de cette propriété fondamentale, considérons une surface fermée formée d'une surface latérale  $S_{lat}$  telle que les lignes de champ magnétique en un point quelconque soient tangentes à  $S_{lat}$  et deux surfaces  $S_1, S_2$  orthogonales aux lignes de champ en tout point (tube de champ).

Si nous orientons les deux surfaces dans le même sens que la ligne de champ en posant  $\vec{n}_1 = \vec{n}$  et  $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ , nous obtenons  $\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \delta S_1 = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \delta S_2$ . Pour des surfaces suffisamment petites, le champ magnétique est quasi uniforme sur  $S_1$  et  $S_2$ . Nous en déduisons que  $\|\vec{B}_1\|_{S_1} \equiv \|\vec{B}_2\|_{S_2}$ .



Représentation en 3 dimensions



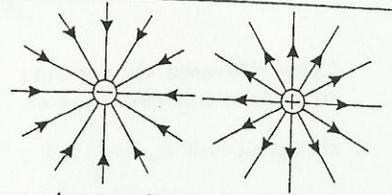
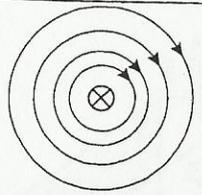
Carte de champ magnétique

L'exemple présenté ci-dessus, qui correspond à une invariance par rotation autour de l'axe vertical, montre clairement que le champ magnétique diminue lorsque les lignes de champ s'écartent. Il va de soi que la norme de  $\vec{B}$  augmente si les lignes de champ se resserrent.

**6. Tableau comparatif des propriétés des champs électrique et magnétiques**

Les propriétés de symétrie du champ magnétique sont en quelque sorte « opposées » à celles du champ électrostatique. Il faut donc distinguer les vecteurs polaires, comme  $\vec{E}$ , des vecteurs axiaux comme  $\vec{B}$ .

Électrostatique	Magnétostatique
Vecteur polaire $\vec{E}$	Vecteur axial $\vec{B}$
Possède les symétries des sources.	De symétrie opposée à celle de ses sources.
Est contenu dans un plan de symétrie.	Est contenu dans un plan d'antisymétrie.
Est orthogonal au plan d'antisymétrie.	Est orthogonal au plan de symétrie.
Une carte de champ électrique est un plan de symétrie.	Une carte de champ magnétique est un plan d'antisymétrie.
Ne dépend pas du choix d'orientation de la base d'étude.	L'expression de $\vec{B}$ se fait par l'intermédiaire d'un produit vectoriel, elle dépend donc du choix d'orientation directe ou indirecte de la base d'étude.
Une ligne de champ électrique est une courbe partant des charges positives pour aboutir sur les charges négatives.	Une ligne de champ magnétique est une courbe fermée entourant un ou plusieurs conducteurs parcourus par des courants.

 <p>Le champ électrique diverge ou converge au voisinage des sources.</p>	 <p>Le champ magnétique circule autour des sources.</p>
<p>La circulation de <math>\vec{E}</math> est nulle sur un parcours fermé : <math>\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0</math>.</p>	<p><b>Théorème d'Ampère</b> La circulation de <math>\vec{B}</math> est non nulle sur un parcours fermé si un courant traverse une surface s'appuyant sur le contour : <math>\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I</math>.</p>
<p><b>Théorème de Gauss</b> Le flux de <math>\vec{E}</math> est non nul à travers une surface fermée contenant des charges : <math>\oint \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}</math>.</p>	<p>Le flux de <math>\vec{B}</math> est nul à travers toute surface fermée : <math>\oint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0</math>.</p>
<p>Force électrique <math>\vec{F}_e = q\vec{E}</math>.</p>	<p>Force magnétique <math>\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}</math>.</p>

Deux produits vectoriels interviennent dans la force magnétique, l'un dans  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  et le second dans l'expression de  $\vec{B}$  donnée par la relation de Biot et Savart. La force de Lorentz est donc indépendante de la convention retenue pour l'orientation de l'espace.

### 7. Equations locales et intégrales du champ magnétique en régime permanent

Le vecteur densité volumique de courant de charge électrique est défini par :

$$\vec{j} = \sum \rho_i \vec{v}_i$$

$\rho_i$  désigne la densité volumique des charges  $i$  et  $\vec{v}_i$  leur vitesse.

	Équation locale	Équation intégrale
Conservation du flux du champ magnétique	$\text{div } \vec{B}_{(M)} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Théorème d'Ampère	$\text{rot } \vec{B}_{(M)} = \mu_0 \vec{j}_{(M)}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enlace}$

### 8. Potentiel vecteur. Jauge de Coulomb

La divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle est nulle, on introduit un potentiel vecteur noté  $\vec{A}$  lié au champ magnétique par la relation :

$$\vec{B}_{(M)} = \text{rot } \vec{A}_{(M)}$$

La circulation du potentiel vecteur le long d'une courbe fermée (C) est alors égale au flux du champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur (S) :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Cette relation ne définit pas  $\vec{A}$  de manière unique :  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \phi$  satisfait également à  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}'$ . On peut alors imposer au potentiel vecteur une condition supplémentaire appelée choix de jauge. Le choix de la jauge de Coulomb permet de simplifier les équations.

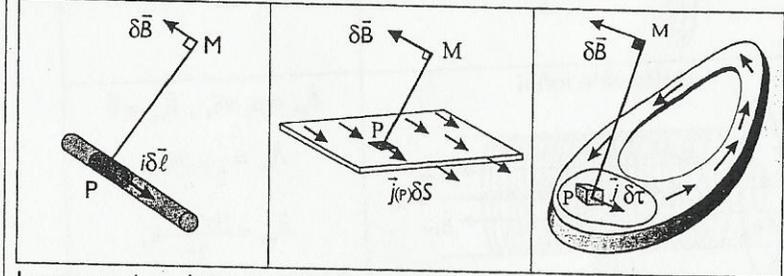
**Jauge de Coulomb :**  $\text{div } \vec{A}_{(M)} = 0$

Pour le choix de la jauge de Coulomb, le potentiel vecteur est relié à la densité volumique de courant par la loi locale :

$$\Delta \vec{A}_{(M)} + \mu_0 \vec{j}_{(M)} = 0$$

**Remarque :** Le potentiel vecteur ainsi défini n'est pas unique.

### 9. Champ magnétique et potentiel vecteur créé par une distribution de courant



Les expressions des potentiels vecteurs donnés vérifient la jauge de Coulomb.

Distribution de courants	Champ magnétique	Potentiel vecteur
Linéique	$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$	$\vec{A}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{circuit} \frac{i d\vec{l}(P)}{PM}$
Surfacique	$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{courants} \frac{\vec{j}_s(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} dS$	$\vec{A}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{courants} \frac{\vec{j}_s(P) dS}{PM}$
Volumique	$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{courants} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau$	$\vec{A}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{courants} \frac{\vec{j}(P) d\tau}{PM}$

- **Distribution linéique** : le champ magnétique et le potentiel vecteur ne sont pas définis sur la distribution.
- **Distribution surfacique** : le champ magnétique est défini mais discontinu à la traversée de la distribution. Le potentiel vecteur est partout défini et continu.
- **Distribution volumique** : le champ magnétique et le potentiel vecteur sont partout définis et continus.

**9.1. Orientation relative du champ magnétique et du potentiel vecteur**

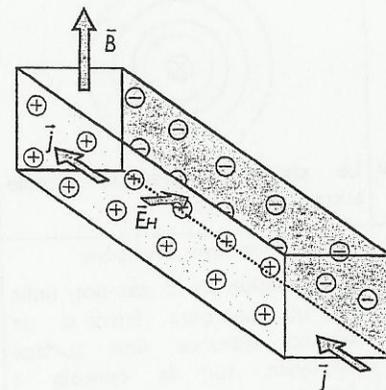


**9.2. Champ magnétique et potentiel vecteur créé par des distributions classiques**

<p><b>Fil rectiligne infini</b></p>	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ $\vec{A}(r) = \vec{A}(r_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z$ <p><math>\vec{r}_0</math> est tel que <math>\vec{A}(r_0) = \vec{0}</math></p>
<p><b>Spire circulaire</b></p>	$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \theta \vec{e}_z$
<p><b>Solénoïde infini</b></p>	$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z, \quad \vec{B}_{ext} = \vec{0}$ $\vec{A}_{int} = \frac{1}{2} \mu_0 n I r \vec{e}_\theta$ $\vec{A}_{ext} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2r} \vec{e}_\theta$ <p><math>n</math> : nbre de spires par u.d.l.</p>
<p><b>Champ magnétique uniforme</b></p>	$\vec{B} = c \vec{e}$ $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{OM}$

**9.3. Effet Hall**

Un conducteur parallélépipédique parcouru par un courant et soumis à un champ magnétique voit apparaître une différence de potentiel sur ses faces perpendiculaires à la fois à  $\vec{j}$  et à  $\vec{B}$  en régime permanent.



Cette différence de potentiel correspond à la circulation du champ de Hall  $\vec{E}_H = -\frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\rho}$ ,  $\rho < 0$ . Le champ de Hall s'écrit encore :  $\vec{E}_H = \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B}$ , avec  $n$  = densité particulaire des électrons,  $e$  = valeur absolue de la charge de l'électron

**9.4. Force de Laplace**

Les collisions des électrons déviés par un champ magnétique contre les ions du réseau cristallin du conducteur font qu'il se transmet au conducteur une force appelée force de Laplace.

La force de Laplace s'exerçant sur un élément de volume  $\delta\tau$  du conducteur est  $d\vec{F}_L = (\rho\delta\tau)\vec{E}_H = (\vec{j} \wedge \vec{B})\delta\tau$ .

Distribution volumique de courant	Distribution surfacique de courant	Distribution linéique de courant
$\vec{F}_L = \iiint_{(V)} (\vec{j} \wedge \vec{B}) \delta\tau$	$\vec{F}_L = \iint_{(S)} (\vec{j}_s \wedge \vec{B}) \delta\tau$	$\vec{F}_L = \int (I \delta\vec{\ell} \wedge \vec{B})$

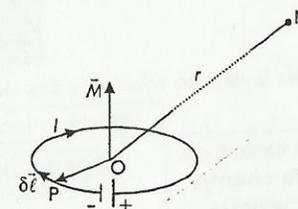
Le circuit complet étant préalablement orienté, l'intensité est une grandeur algébrique.

**10. Dipôle magnétique**

**10.1. Moment magnétique d'un circuit**

Tout circuit dont le moment magnétique est non nul peut être vu, à grande distance, comme un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = I\vec{S}$ .

Pour un élément filiforme, avec  $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{OP} \wedge \delta\vec{\ell}$  la surface orientée.



Distribution volumique de courant	Distribution surfacique de courant	Distribution linéique de courant
$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\vec{OP} \wedge \vec{j}) \delta\tau$	$\vec{M} = \frac{1}{2} \iint_{(S)} (\vec{OP} \wedge \vec{j}_s) \delta S$	$\vec{M} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} (\vec{OP} \wedge I \delta\vec{\ell})$

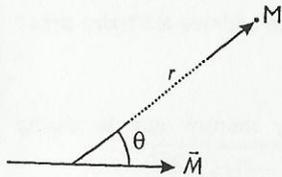
**10.2. Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un moment magnétique**

**Approximation dipolaire :** on peut raisonner en terme de dipôle magnétique pour un circuit lorsque le champ créé est regardé à des distances grandes devant les dimensions caractéristiques du circuit.

Considérons un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  situé en un point O. En un point M situé à une distance r de O, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle sont :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}$$

En coordonnées sphériques (et en cylindriques) :



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

**10.3. Actions subies par un dipôle magnétique et énergie potentielle**

Un circuit, caractérisé par son moment magnétique  $\vec{M}$  est placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$ . Les éléments de réduction en un point O des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit sont la résultante des forces  $\vec{R}$  et le moment en O,  $\vec{M}_O$ . Un circuit placé dans un champ magnétique extérieur a une énergie potentielle  $E_p$ .

Résultante des forces en O	Moment des forces en O	Energie potentielle
$\vec{R} = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext})$ <small>M constant</small>	$\vec{M}_O = \vec{M} \wedge \vec{B}$	$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

**Cas particulier d'un champ uniforme :** la résultante des force est nulle et les actions subies par le dipôle magnétique se réduisent à un couple de moment :  $\vec{T} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$ .

L'effet de la résultante des forces est de déplacer le dipôle vers les régions de plus fort champ. L'effet du moment des forces est de faire pivoter le dipôle pour aligner le moment magnétique dans le sens du champ. C'est à cette condition que l'énergie potentielle du dipôle est minimale.

**10.4. Analogie dipôle électrostatique - dipôle magnétique**

On peut passer des expressions relatives au dipôle électrostatique de moment  $\vec{p}$  à celles du dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$  par les transpositions :

$$\vec{p} \longleftrightarrow \vec{M} ; \quad \frac{1}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0 ; \quad \vec{E} \longleftrightarrow \vec{B}$$

**ÉQUATIONS DE MAXWELL**

**I. Équations de Maxwell**

Les vecteurs champ électrique  $\vec{E}$  et champ magnétique  $\vec{B}$ , indissociables en régime variable, sont les deux composantes du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

Les spécificités du champ électromagnétique et sa dépendance en fonction des sources que sont les distributions de charge et de courant sont données par les équations de Maxwell. Nous nous limitons aux milieux dont les propriétés électriques et magnétiques sont assimilables à celles du vide.

**I.1. Forme intégrale des équations de Maxwell :**

Equation	Forme locale	Forme intégrale
équation de Maxwell-Gauss (MG)	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \delta \vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$
équation de Maxwell-Faraday (MF)	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \delta \vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \delta \vec{S} \right)$
équation de Maxwell-Ampère (MA)	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \delta \vec{l} = \mu_0 \left[ \iint_{(S)} (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot \delta \vec{S} \right]$ $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$
équation de Maxwell « conservation du flux » (MΦ)	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \delta \vec{S} = 0$

• Les équations de Maxwell sont invariantes par changement de référentiels galiléens.

• Pour décrire l'action du champ électromagnétique engendré par les sources  $(\rho, \vec{j})$  sur les charges et les courants, il faut compléter les équations de Maxwell par la force s'exerçant sur les charges et les courants en présence du champ  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

Il s'agit de la **force de Lorentz** :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  ou  $\vec{F} = \iiint_{(V)} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$

**I.2. Signification physique des équations de Maxwell**

• **Equation de Maxwell-Gauss :** elle est la forme locale du théorème de Gauss. Le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égale à la charge intérieure à cette surface divisée par la permittivité du vide  $\epsilon_0$ . Le théorème de Gauss n'est pas limité au domaine de l'électrostatique.

- **Equation de Maxwell-Faraday** : elle exprime qu'un champ magnétique variable engendre un champ électrique à circulation non conservative. Cette équation rend compte des phénomènes d'induction.

- **Equation de Maxwell-Ampère** : un champ électrique variable est source de champ magnétique au même titre qu'un courant. La grandeur  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est appelée **courant de déplacement** parce qu'elle est homogène à une densité de courant (A.m<sup>-2</sup>), mais elle ne correspond à **aucun déplacement de charges**. La forme intégrale s'écrit encore  $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$  avec

$\Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  le flux du champ électrique à travers une surface (S) s'appuyant sur le contour fermé (C) et I le courant enlacé.

- **Equation de Maxwell « conservation du flux »** : elle exprime que le champ magnétique est à flux conservatif : le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque est nul. Les lignes de champ magnétique sont toujours fermées. Il n'existe pas de charge (de monopôle) magnétique.

- La combinaison des équations (MA) et (MG) donne l'équation locale de conservation de la charge électrique :  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

- Les équations (MA) et (MF) expriment le couplage qui existe entre les champs électrique et magnétique. On ne peut dissocier ces deux champs qu'en régime permanent.

### 1.3. Cas particulier de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)

Dans le cadre de l'ARQP, la durée de propagation du signal électromagnétique entre un point source S et un point M est négligeable devant les temps caractéristiques de variation des charges et des courants responsables de ce champ. Pour la propagation d'une onde de longueur d'onde  $\lambda$ , cela revient à écrire  $\lambda \gg SM$ . Dans le cadre de l'ARQP, on a :

- $\text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$  ou  $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \approx \mu_0 \oint_{(C)} \vec{j} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$  : on retrouve le théorème

d'Ampère.

- $\text{div } \vec{j} = 0$  : on retrouve la validité de la loi des nœuds.

L'ARQP néglige les phénomènes de propagation mais pas les phénomènes d'induction.

### Transformation des champs dans la limite électrique non relativiste

Notons  $(\vec{E}, \vec{B})$  et  $(\vec{E}', \vec{B}')$  les champs électromagnétiques définis respectivement dans les référentiels galiléens  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}')$ , et  $\vec{u}$  la vitesse de translation de  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ . Dans la limite des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière, on a :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}$$

- La première expression fait apparaître l'existence d'un champ électromoteur  $\vec{E}_m = \vec{u} \wedge \vec{B}$ . Ce champ apparaît dans un circuit lorsque celui-ci se déplace à une vitesse  $\vec{u}$  dans un champ magnétique indépendant du temps.

## 2. Relations champs-potentiels

### 2.1. Potentiel vecteur

Le potentiel vecteur vérifie les relations :  $\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  et  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Le

potentiel vérifiant ces relations n'est pas unique.

### 2.2. Potentiel scalaire

Le potentiel scalaire V est lié au champ électrostatique  $\vec{E}_s$  par la relation  $\vec{E}_s = -\text{grad } V$ . Le potentiel V est défini à une constante additive arbitraire près ; seule une différence de potentiel a un sens physique.

### 2.3. Champ électrique

En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday montre que le champ

électrique est relié aux potentiels par la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

### 2.4. Choix de jauge

Si le couple  $(V, \vec{A})$  est un couple de potentiels associés au champ électromagnétique, il en est alors de même des couples  $(V', \vec{A}')$  tel que :

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$$

Il existe donc une infinité de couples de potentiels associés à un champ électromagnétique donné, et le choix d'un couple de potentiel est appelé choix de **jauge**. La **jauge de Lorentz**, compatible avec la relativité restreinte, impose au couple de potentiels de satisfaire à la relation supplémentaire :

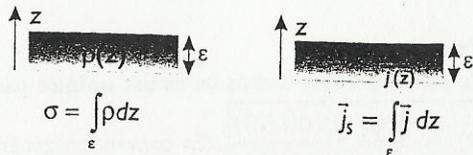
$$\text{div } \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Ce choix de jauge permet de simplifier les équations de propagation de V et de  $\vec{A}$ . En régime permanent, la condition de jauge, appelée alors **jauge de Coulomb**, s'écrit  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

## 3. Relations de passage

### 3.1. Modèle d'une distribution surfacique de charges et de courants

- La notion de distribution surfacique de charges ou de courants n'est qu'une idéalisation de la réalité physique. Dans le premier cas, c'est une façon de décrire des charges réparties en volume sur une très faible épaisseur  $\epsilon$ , dans le second cas des courants volumiques répartis sur une très faible épaisseur  $\epsilon$ .



### 3.2. Continuité et discontinuité des composantes des champs

Dans le cadre de cette modélisation, les relations reliant les champs électrique et magnétique à la frontière entre deux milieux différents (1) et (2), appelées

relations de passage sont :  $E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  où

$\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  représente le vecteur unitaire normal à la surface de séparation orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

- Il y a toujours continuité de la **composante tangentielle du champ électrique** et de la **composante normale du champ magnétique**.
- Pour  $\sigma \neq 0$  la composante normale du champ électrique est discontinue.
- Pour  $\vec{j}_s \neq 0$  la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

## INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### 1. Le cadre de l'étude

L'étude se fait dans le cadre de l'**approximation des états quasi-stationnaires**. Le courant de déplacement  $\epsilon_0(\partial \vec{E} / \partial t)$  est négligeable devant le courant de conduction dans les conducteurs. Précisons que les circuits filiformes peuvent comporter des condensateurs et ne sont donc plus nécessairement fermés, ce qui signifie qu'il faut prendre en compte le courant de déplacement dans le vide ou dans l'air. Le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  est déterminé en tout point M et à tout instant t par application des lois de la magnétostatique.

### 2. Le phénomène d'induction

#### 2.1. Courant induit

Un courant induit circule dans un circuit fermé conducteur lorsque le flux du champ magnétique traversant le circuit varie au cours du temps. Le flux magnétique peut être créé par un champ extérieur ou par le circuit lui-même auquel cas on parle de **flux propre** et de courant **auto-induit** (auto-induction).

#### 2.2. Loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel qu'il tend, par ses effets, à s'opposer à la **variation** (cause) du flux magnétique qui lui a donné naissance.

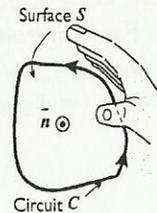
### 3. Cas d'induction de Neumann : circuit fixe dans un champ magnétique variable

#### 3.1. Force électromotrice induite et flux magnétique

Dans un circuit filiforme fermé et immobile il apparaît une force électromotrice induite  $e_{ind}$  qui est reliée au flux total

$$\Phi = \Phi_{ext} + \Phi_{propre}$$

soi, somme du flux extérieur et du flux propre (paragraphe 6 de ce chapitre) du champ magnétique à travers une section quelconque S délimitée par le circuit C. L'orientation de C est liée à celle de la normale à la surface suivant la règle de la main droite. L'expression de  $e_{ind}$  est :



$$e_{ind} = \oint_C \vec{E}(\vec{M}, t) \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{M}, t)}{\partial t} \cdot \vec{n} \delta S = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

#### 3.2. Champ électromoteur de Neumann (complément)

En régime variable dans le temps, le champ électrique s'exprime par :

$$\vec{E}(\vec{M}, t) = - \text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

V étant le potentiel scalaire et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur tel que  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ .

Le champ électromoteur de Neumann est :  $\vec{E}_m(\vec{M}, t) = - \frac{\partial \vec{A}(\vec{M}, t)}{\partial t}$ .

On nomme  $e_{AB}$  la force électromotrice d'induction apparaissant entre A et B. Elle s'exprime comme l'intégrale curviligne du champ électromoteur de

$$\text{Neumann : } e_{AB} = \int_A^B \left( - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l}$$

### 4. Cas d'induction de Lorentz : circuit mobile dans un champ magnétique constant

#### 4.1. Loi d'Ohm dans un conducteur en mouvement

Soit un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  en mouvement dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  (par exemple le référentiel du laboratoire). La loi d'Ohm dans un tel conducteur mobile s'écrit :

$$\vec{j}(\vec{M}, t) = \gamma (\vec{E}(\vec{M}, t) + \vec{v}_{i\mathcal{R}}(\vec{M}, t) \wedge \vec{B}(\vec{M}))$$

où, M désigne un point quelconque du conducteur,  $\vec{E}(\vec{M}, t)$  désigne le champ électrique dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{B}(\vec{M})$  désigne le champ magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et  $\vec{v}(\vec{M}, t)$  la vitesse locale du conducteur par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , supposée petite devant la célérité de la lumière. Il faut remarquer que le point M peut avoir un mouvement quelconque (translation, rotation).

## 4.2. Champ électromoteur de Lorentz

En présence d'un champ magnétique constant dans le temps, le champ électromoteur de Lorentz est :  $\vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M)$  où  $\vec{v}(M, t)$  est la vitesse locale du conducteur par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  donné.

## 4.3. F.e.m. induite dans le circuit

On nomme  $e_{AB}$  la force électromotrice d'induction apparaissant entre A et B l'intégrale curviligne du champ électromoteur de Lorentz, soit :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \delta \vec{\ell}$$

## 5. Cas général : circuit filiforme mobile dans un champ variable

### 5.1. Loi de Faraday

Soit un circuit filiforme conducteur fermé mobile dans un champ magnétique variable dans le temps, la f.e.m.  $e_{ind}$  induite dans ce circuit est donnée par la loi de Faraday :

$$e_{ind}(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

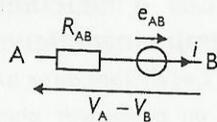
**Remarque :** Des problèmes peuvent apparaître lorsqu'il y a des contacts glissants, par exemple, en présence de discontinuité de la vitesse en certains points du circuit. Il est préférable de revenir au calcul de la circulation du champ électromoteur :

$$e_{ind} = - \frac{d\Phi_{ext}}{dt} - \frac{d\Phi_{propre}}{dt} + \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \delta \vec{\ell}$$

Dans ce cas, il est nécessaire de connaître  $\vec{B}$  sur tous les points de la surface s'appuyant sur le circuit pour calculer le flux.

### 5.2. Modélisation électrocinétique d'une portion de circuit

Soit une portion  $\overline{AB}$  de circuit filiforme qui est le siège d'un phénomène d'induction :  $e_{AB}$  est la f.e.m. induite. La portion de circuit est modélisée par le schéma électrocinétique ci-contre,



$$V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$$

## 6. Calculs de flux pour des circuits filiformes

### 6.1 Inductance propre

Le flux propre  $\Phi_{propre}$  d'un circuit filiforme est proportionnel au courant électrique  $I$  qui circule dans le circuit :

$$\Phi_{propre} = LI$$

où  $L$  est le coefficient d'auto-inductance ou d'inductance propre.

**Remarques :**

- $L$  s'exprime en henry (H) et est une grandeur positive caractéristique de la géométrie du circuit et du milieu dans lequel elle se trouve (ici le vide).
- Le flux s'exprime en weber (Wb).

## Auto-induction dans un circuit :

La f.e.m. d'auto-induction apparaissant dans un circuit unique parcouru par un courant  $I$  est :

$$e(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} = - \frac{d(LI(t))}{dt}$$

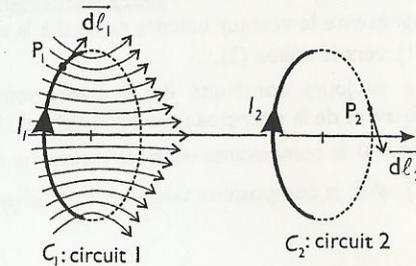
En convention générateur, le sens de la f.e.m.  $e$  est le même que le sens du courant  $I$ . En convention récepteur, la tension aux bornes d'une inductance vaut alors :

$$u_L(t) = -e(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

## 6.2. Coefficients d'inductance mutuelle de deux circuits filiformes

On se place dans les cas de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus par des courants d'intensité  $I_1$  et  $I_2$ .

**Flux à travers les circuits :**  $\Phi_1$  (resp  $\Phi_2$ ) représente le flux total à travers  $C_1$  (resp  $C_2$ ).



**Mutuelle :** on montre que l'on peut exprimer les flux en fonction des intensités par les relations :  $\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$ ,  $\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$ .

$L_1$  et  $L_2$  sont les inductances propres des circuits  $C_1$  et  $C_2$ . Les coefficients  $M_{ij}$  sont les coefficients de mutuelle inductance entre les deux circuits ; ils s'expriment en henry.

**Définition et propriétés :**  $M_{12} = M_{21} = M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\delta \vec{\ell}_1 \cdot \delta \vec{\ell}_2}{|\overline{PP_2}|}$

**Remarques :**

- le coefficient de mutuelle inductance  $M$  dépend des orientations indépendantes des circuits  $C_1$  et  $C_2$ . On ne peut donc pas fixer son signe contrairement aux coefficients  $L_1$  et  $L_2$ , qui sont toujours positifs.

- A partir de considérations énergétiques, on a l'inégalité suivante :  $M^2 \leq L_1 L_2$

## 7. Énergie magnétique de deux circuits

### 7.1. Énergie associée au champ magnétique

L'énergie magnétique  $W_{mag}$  associée à une distribution de courant est donnée

par l'expression :  $W_{mag} = \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \delta \tau$

**Remarques :**

-  $W_{mag}$  est positive et s'exprime en joule (J).

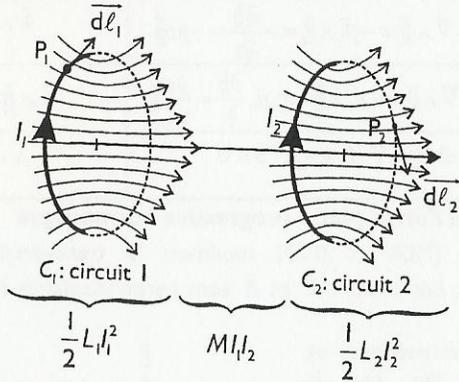
- la quantité  $\vec{B}^2 / 2\mu_0$  représente la densité volumique d'énergie magnétique et s'exprime en  $J \cdot m^{-3}$ .

### 7.2. Énergie magnétique et coefficients d'inductance

Circuit unique : l'énergie magnétique  $W_{mag}$  d'un circuit unique d'inductance propre  $L$  parcouru par un courant  $I$  est donnée par la relation :

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2$$

Système de deux circuits : Dans les cas de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus par des courants d'intensité  $I_1$  et  $I_2$ .



$\Phi_1$  (respectivement  $\Phi_2$ ) représente le flux total à travers  $C_1$  (respectivement  $C_2$ ). L'énergie magnétique  $W_{mag}$  de ce dispositif est :  $W_{mag} = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2$ .

En introduisant les inductances propres  $L_1$  et  $L_2$  ainsi que le coefficient de mutuelle inductance  $M$  entre ces deux circuits on établit l'expression :

$$W_{mag, tot} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

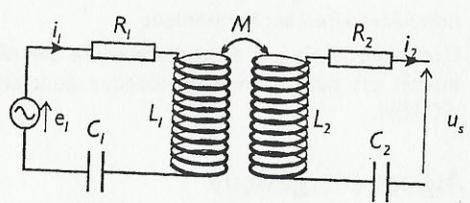
### 8. Circuits couplés par mutuelle

La f.e.m. induite dans le circuit n°1 vaut :

$$e_{ind,1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

La f.e.m. induite dans le circuit n°2 vaut :

$$e_{ind,2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



La loi des mailles conduit alors au système couplé suivant :

$$\begin{cases} e_1 - R_1 i_1 + e_{ind,1} - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = 0 \\ u_S + R_2 i_2 - e_{ind,2} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0 \end{cases}$$

## PROPAGATION DANS LE VIDE ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### 1. Propagation d'une onde plane dans le vide

#### 1.1. Équations de propagation

Calculons le rotationnel de la relation de Maxwell-Faraday :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial \overline{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{\overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}}_0 = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Calculons le rotationnel de la relation de Maxwell-Ampère :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overline{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{\overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}}_0 = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Le champ électrique et le champ magnétique vérifient la même équation différentielle appelée équation de d'Alembert :

$$\square \vec{E} = \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \square \vec{B} = \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  vérifient également l'équation de d'Alembert pour le choix de la jauge de Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ,

$$\square V = \Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad \square \vec{A} = \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Ces équations décrivent la propagation de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $V$  et  $\vec{A}$  à la célérité  $c$  de la lumière dans le vide :  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , chacune des six composantes du champ électromagnétique  $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ , notée  $\psi(M, t) = \psi(x, y, z, t)$ , vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

#### 1.2. Surface d'onde et onde plane

- Une surface d'onde correspond à l'ensemble des points où l'onde a même valeur à un instant donné. Lorsque la surface d'onde est un plan, on parle d'onde plane ; on parle d'onde sphérique lorsque la surface d'onde est une sphère.
- Dans un espace vide illimité, la direction de propagation de l'onde est perpendiculaire à la surface d'onde.

• Solution générale de l'équation de propagation :

Onde plane	Onde sphérique
$\Psi(M,t) = \Psi_+ \left( t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \Psi_- \left( t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right)$	$\Psi(M,t) = \frac{1}{r} \Psi_+ \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \Psi_- \left( t + \frac{r}{c} \right)$
$\Psi_+$ : onde progressive dans le sens des $\vec{u}$ ; $\Psi_-$ : onde progressive dans le sens opposé à $\vec{u}$ .	$\Psi_+$ : onde sphérique divergente $\Psi_-$ : onde sphérique convergente

1.3. Onde progressive harmonique (OPH)

Une onde est dite harmonique lorsque  $\Psi$  varie sinusoidalement. Elle est encore appelée onde monochromatique.

Onde plane progressive harmonique (OPPH)	Onde sphérique progressive harmonique (OSPH)
$\Psi(M,t) = \Psi_0 \cos \left[ \omega \left( t \pm \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \varphi \right]$	$\Psi(M,t) = \frac{\Psi_0 \cos \left[ \omega \left( t \pm r/c \right) + \varphi \right]}{r}$
$\Psi(M,t) = \Psi_0 \cos \left[ \omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi \right]$	$\Psi(M,t) = \frac{\Psi_0 \cos \left[ \omega t \pm kr + \varphi \right]}{r}$

Le vecteur d'onde  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$  indique la direction de propagation de l'onde. Cette onde est caractérisée par une double périodicité, temporelle  $T = 2\pi/\omega$  et spatiale  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$ .

2. Structure de l'onde plane progressive harmonique

2.1. Expression du champ électromagnétique d'une OPPH

Les équations régissant le champ électromagnétique sont linéaires dans le vide. Il est alors commode d'utiliser la notation complexe. Pour une onde se propageant dans le sens et la direction donnés par  $\vec{k} = k\vec{u}$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ j \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \text{ avec } \vec{E}_0 = (E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y + E_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{e}_z)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp \left[ j \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \text{ avec } \vec{B}_0 = (B_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + B_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{e}_y + B_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{e}_z)$$

Opérateur « dérivée temporelle »	Opérateur « nabla »
$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} ; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -j\vec{k} \cdot \vec{B}$
$\frac{\partial ( )}{\partial t} \mapsto j\omega ( )$	$\vec{\nabla} \cdot ( ) \mapsto -j\vec{k} \cdot ( )$

• Ces expressions simples des opérateurs  $\partial/\partial t$  et « nabla » ne sont valables que si les amplitudes des champs sont constantes et uniformes (elles ne s'appliquent pas, par exemple, à l'onde sphérique).

• Pour l'écriture  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ j \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$ , on a  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -j\omega \vec{E}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j\vec{k} \cdot \vec{E}$ .

2.2. Équations de Maxwell pour une OPPH dans le vide

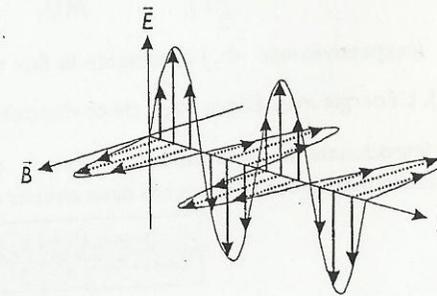
(MG)	$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$
(MF)	$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}$	$\vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{0}$
(MA)	$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -j\vec{k} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} \vec{E}$	$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$
(MΦ)	$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -j\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

2.3. Structure de l'onde plane progressive harmonique

• Les équations (MG) et (MΦ) montrent la transversalité du champ électromagnétique. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation.

• Les champs magnétique et électrique sont liés par la relation :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$

Le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct et les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vibrent en phase si l'onde est polarisée rectilignement (cas de la figure).



2.4. Onde plane progressive (OPP)

- La relation  $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$  est encore valable pour une onde plane progressive, non nécessairement harmonique.
- L'onde plane n'a pas d'existence réelle car elle est d'extension infinie. Son intérêt est qu'une onde quelconque peut se décomposer en une infinité d'OPPH.

3. Aspect énergétique

3.1. Puissance cédée aux porteurs de charge

Puissance volumique cédée aux charges par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$	Puissance cédée par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ à une distribution de charges et de courants de volume (V)
$p = \frac{\delta P}{\delta \tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$	$P = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \delta \tau$

• Pour un milieu conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , soit  $p = \gamma \vec{E}^2$ ), la puissance dissipée par effet Joule est  $P_j = \iiint_{(V)} \gamma \vec{E}^2 \delta\tau$ .

### 3.2. Densité volumique d'énergie électromagnétique

En tout point où règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  est localisée une énergie.

Densité volumique d'énergie électrique	Densité volumique d'énergie magnétique	Densité volumique d'énergie électromagnétique
$w_e = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2}$	$w_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$	$w_{em} = w_e + w_m$

• **Cas particulier d'une OPP** : il y a équi-partition entre les formes d'énergie électrique et magnétique :  $w_e = w_m$ .

### 3.3. Vecteur de Poynting

• Le vecteur de Poynting correspond à une puissance rayonnée par unité de surface et est défini par la relation :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

• La puissance rayonnée  $P_{ray}$  par le champ électromagnétique à travers une surface  $(S)$  est  $P_{ray} = \iint_{(S)} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot \vec{\delta S} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{\delta S}$ . Elle correspond au flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  à travers  $(S)$ . Les lignes de champ du vecteur de Poynting correspondent aux trajectoires de l'énergie transportée par l'onde.

### 3.4. Cas de l'OPPH

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting s'écrit :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2\mu_0 c} \vec{u}$ . Il est possible de calculer directement cette moyenne à partir des expressions complexes des champs :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

où  $\vec{B}^*$  est le complexe conjugué de  $\vec{B}$ .

### 3.5. Bilan d'énergie

L'énergie électromagnétique, comme la charge électrique, se conserve.

Loi locale de conservation	$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$
Loi intégrale de conservation	$\iiint_{(V)} \frac{\partial w_{em}}{\partial t} \delta\tau + \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{\delta S} = - \iiint_{(V)} (\vec{j} \cdot \vec{E}) \delta\tau$
	<p>puissance électromagnétique au sein du volume (V)      puissance rayonnée à travers (S)      puissance cédée aux charges mobiles</p>

Pour une OPP, la relation suivante est vérifiée :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = c w_{em} \vec{u}$

### 3.6. Vitesse de transport de l'énergie

La vitesse de propagation de l'énergie est  $\vec{v}_e = \vec{\Pi} / w_{em}$ . Pour une OPPH dans le vide, elle est égale à  $c$ .

## 4. États de polarisation d'une OPPH

### 4.1. Définitions

La direction de polarisation de l'onde est la direction du champ électrique  $\vec{E}$

### 4.2. Description de l'état de polarisation

En choisissant l'axe Oz comme direction de propagation de l'onde, le champ électrique s'écrit dans le cas le plus général :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

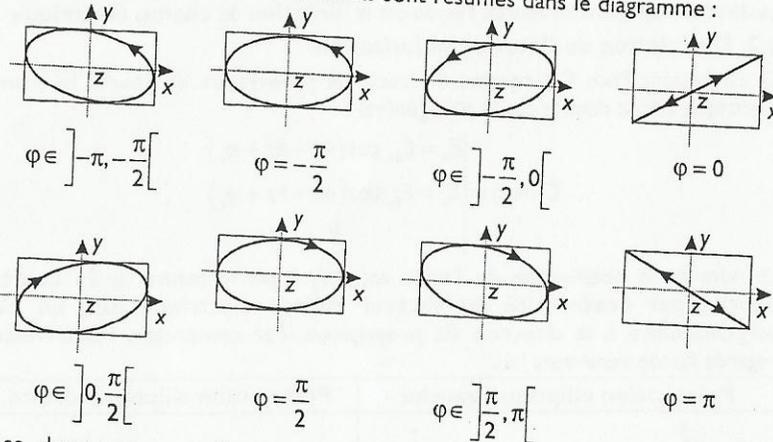
Le nom de la polarisation de l'onde est donné par la nature de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur champ électrique dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Par convention, l'observateur regarde l'onde venir vers lui.

Polarisation elliptique gauche	Polarisation elliptique droite
Onde polarisée rectilignement	Polarisation circulaire gauche
$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = 0$ ou $\pi$ Les composantes $E_x$ et $E_y$ vibrent en phase ou en opposition de phase	$E_{0x} = E_{0y}$ <b>Gauche</b> : $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$ <b>Droite</b> : $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pi/2$

- Toute OPPH polarisée rectilignement peut être considérée comme la somme de deux OPPH de même amplitude, l'une polarisée circulairement à gauche et l'autre polarisée circulairement à droite.
- Les ondes polarisées elliptiquement et circulairement transportent un moment cinétique.
- Il est possible de produire une lumière polarisée rectilignement à partir d'une lumière polarisée de façon quelconque grâce à un film plastique polariseur (ou polaroid).

**Onde polarisée elliptiquement**

Il s'agit du cas général. Les résultats sont résumés dans le diagramme :



Les deux cas particuliers  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$  correspondent à la polarisation rectiligne.

**PROPAGATION AVEC DISPERSION**

**1. Absorption et dispersion**

**1.1. Cas général d'un milieu absorbant**

- Dans le cas le plus général, le vecteur d'onde, d'une onde se propageant dans un milieu quelconque est complexe :  $\underline{k} = k' + jk''$ ,  $k'$  et  $k''$  réels.
- Pour une OPPH se propageant dans le sens des  $z$  croissants, les champs  $\underline{E}$  et  $\underline{B}$  sont de la forme :  $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)}$  et  $\underline{B} = \underline{B}_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)}$ .
- La partie imaginaire  $k''$  caractérise l'absorption de l'énergie électromagnétique par la matière que traverse l'onde. La partie réelle  $k'$  affecte la phase de l'onde.
- Le milieu est caractérisé par un indice complexe  $\underline{n} = n' + jn''$ ,  $n'$  et  $n''$  réels.

$n' = \frac{c}{\omega} k'$

indice de dispersion et  $n'' = \frac{c}{\omega} k''$ , indice d'absorption.

Pour un milieu transparent, l'indice  $n$ , réel, s'identifie à l'indice de réfraction vu en optique.

**1.2. Paquet d'ondes. Vitesse de phase et vitesse de groupe**

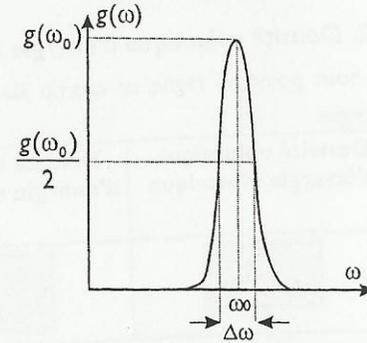
- Une onde plane peut se décomposer en une somme infinie d'OPPH :

$$\underline{E}(\vec{r}, t) = \int_0^\infty \underline{g}(\omega) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega.$$

On parle alors de la propagation d'un paquet d'ondes (d'un groupe d'ondes).

- La vitesse de phase  $v_\varphi$  est la vitesse de propagation de la phase de l'onde :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$



- Pour  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , la courbe  $g(\omega)$  est très « resserrée » autour de  $\omega_0$ , la vitesse de groupe  $v_g$  est la vitesse de propagation de la composante de pulsation  $\omega_0$ . Elle n'a de sens que lorsque le milieu est non absorbant, c'est-à-dire pour  $k$  réel. La vitesse de groupe dépendant généralement de la pulsation, elle est définie pour la pulsation centrale  $\omega_0$  du paquet d'ondes :  $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$ . La vitesse de groupe représente souvent la vitesse de propagation de l'énergie

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{\Pi}}{w_{em}}$$

- Lorsque la relation reliant  $k$  à  $\omega$  n'est pas linéaire, le milieu est dit dispersif : la vitesse de phase et la vitesse de groupe dépendent alors de la pulsation.

Longueur de cohérence $\Delta x$ du paquet d'ondes	Durée de cohérence $\Delta t$ du paquet d'ondes
Le champ électrique ne prend de valeurs significatives que sur une distance $\Delta x$ centrée sur le paquet d'ondes telle que :	À une position fixe, le champ électrique ne prend de valeurs significatives que pendant une durée $\Delta t$ telle que : $\Delta t \Delta\omega \approx 2\pi$ .
$\Delta x \Delta k \approx 2\pi$ et $\Delta k \approx \Delta\omega / v_g$	

**2. Propagation dans un plasma**

**2.1. Conduction dans un plasma**

- Un plasma est un gaz ionisé. Il contient, par unité de volume,  $n$  électrons (de masse  $m$  et de charge  $-e$ ) et  $n$  cations (de masse  $M$  et de charge  $e$  pour des cations monovalents).

La charge d'un volume élémentaire est nulle :  $\rho = 0$ .

- La seule force non négligeable s'exerçant sur les particules chargées est la force de Lorentz :  $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$ ,  $M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})$ .

Pour les vitesses  $\|\vec{v}_e\|$  et  $\|\vec{v}_i\|$  négligeables devant la vitesse de phase  $v_\phi$  de l'onde, la force magnétique est négligeable et  $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$ ,  $M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e\vec{E}$ .

• Sous l'effet du champ électrique d'une OPPH  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , les vitesses des électrons et des ions est donnée par  $\vec{v}_e = \frac{e}{jm\omega} \vec{E}$  et  $\vec{v}_i = -\frac{e}{jM\omega} \vec{E}$ . Le vecteur densité volumique de courant est  $\vec{J} = ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = j \frac{ne^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} = \gamma \vec{E}$ .

Pour  $M \gg m$ , la conductivité complexe du plasma est  $\gamma = j \frac{ne^2}{m\omega}$ .

• Le courant volumique est en quadrature avec le champ électrique : la puissance moyenne cédée par le champ au plasma est nulle.

### 2.2. Propagation d'une OPPH dans un plasma. Relation de dispersion

• L'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \left( 1 + j \frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

est de la forme  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  avec  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , la permittivité complexe du milieu.

La permittivité relative du plasma est  $\epsilon_r = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$ ,  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ .

La pulsation  $\omega_p$  est dite pulsation plasma du milieu.

• Les équations de propagation dans un plasma sont les mêmes que celles dans le vide à ceci près qu'il faut remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la

$$\text{permittivité complexe } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta \vec{B} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour le choix de la jauge  $\text{div } \vec{A} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  et en milieu localement neutre

$$\rho = 0, \text{ on a } \Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta V - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

• La relation de dispersion est la relation reliant le vecteur d'onde à la pulsation. Pour la propagation dans un plasma :

$$k^2 = \epsilon_r \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]$$

• Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\vec{k}$  est imaginaire pur et l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement : il n'y a pas de propagation possible et l'onde est évanescence.

• Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\vec{k}$  est réel : il y a propagation. On dit que le plasma est transparent pour  $\omega > \omega_p$ .

Vitesse de phase	Vitesse de groupe
$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}} > c$	$v_g = c \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} < c$

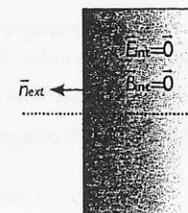
Le plasma est un milieu dispersif.

### 3. Réflexion sur un conducteur plan parfait

#### 3.1. Hypothèse du conducteur parfait

• Un conducteur parfait n'oppose aucune résistance au passage du courant électrique : il est caractérisé par une conductivité infinie.

En l'absence de champ magnétique statique, les champs  $\vec{E}_{\text{int}}$  et  $\vec{B}_{\text{int}}$  sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait. Il en est donc de même de  $\vec{j}$  et de  $\rho$ . Les seules charges et courants possibles sont superficiels.



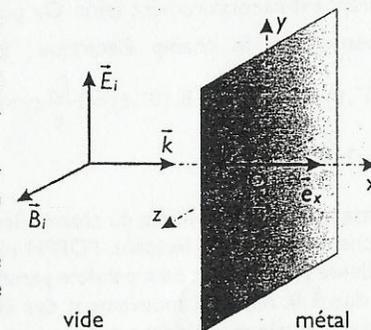
Relations de passage :

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}, \quad \vec{B}_{\text{ext}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{\text{ext}}$$

Le champ électrique dans le vide au voisinage d'un conducteur parfait est orthogonal à l'interface conducteur - vide.

#### 3.2. Réflexion sous incidence normale d'une OPPH

Considérons une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le vide selon la direction de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$  perpendiculaire à l'interface vide - conducteur supposée assimilable à un plan infini. Choisissons comme axe Oy la direction de polarisation de l'onde, le champ électromagnétique de cette onde incidente a donc pour expression :



$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_z, \quad \text{avec}$$

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ . Le champ électrique dans le vide, au voisinage du métal, ne doit pas avoir de composante tangentielle. Il faut donc qu'il existe une onde réfléchie dont le champ électrique compense celui de l'onde incidente :  $\vec{E}_r(0^-, t) = -\vec{E}_i(0^-, t)$ .

#### 3.3. Expression de l'onde réfléchie

Pour préciser la structure de cette onde réfléchie, utilisons des considérations de symétrie : pour l'onde incidente, le plan xOz, perpendiculaire au champ électrique, est plan d'antisymétrie et le plan xOy, perpendiculaire au champ magnétique, est plan de symétrie. L'onde réfléchie possède au moins les

propriétés de symétrie de l'onde incidente qui en est la cause, donc le champ électrique réfléchi est perpendiculaire au plan  $xOz$  et le champ magnétique est perpendiculaire au plan  $xOy$ .

Ces résultats nous amènent à considérer pour l'onde réfléchie la structure d'une OPPH polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_y$  se propageant selon  $Ox$ , vers les  $x$  décroissants :  $\vec{E}_r(x, t) = \vec{E}'_0 \exp j(\omega't + k'x) \vec{e}_y$  avec  $\vec{k}' = -k' \vec{e}_x = -\frac{\omega'}{c} \vec{e}_x$ .

La relation de passage en  $O$  impose  $\vec{E}'_0 \exp(j\omega't) = -\vec{E}_0 \exp(j\omega t)$ ,  $\forall t$ ; alors  $\omega' = \omega$  et  $\vec{E}'_0 = -\vec{E}_0$ . L'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente (linéarité du milieu). Nous avons, de plus,  $k' = \frac{\omega}{c} = k$ .

Le champ électrique de l'onde réfléchie a donc même pulsation et même amplitude que celui de l'onde incidente; cependant il change de sens lors de la réflexion (ou subit un déphasage de  $\pi$ ):  $\vec{E}_r(0^-, t) = -\vec{E}_0 \exp(j\omega t) \vec{e}_y$ .

Le champ électromagnétique de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{E}_r(x, t) = -\vec{E}_0 \exp j(\omega t + kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{-\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}_r = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

**Remarque 1 :** le champ électrique dans le vide au voisinage du conducteur n'ayant pas de composante normale, la relation de passage du § 3.2. indique qu'il n'y a pas de charge superficielle sur le conducteur ( $\sigma = 0$ ). Le vecteur densité de courant est nécessairement selon  $Oy$  puisqu'il possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique; il est donné par  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ , avec

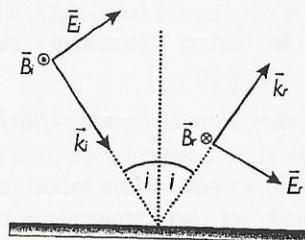
$$\vec{B}(0^-, t) = \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = 2 \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{n} = -\vec{e}_x, \quad \text{d'où}$$

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \exp i(\omega t) \vec{e}_y.$$

**Remarque 2 :** l'amplitude du champ électrique réfléchi étant la même que celle du champ électrique incident, l'OPPH réfléchi a la même énergie que l'OPPH incidente; ce résultat peut paraître paradoxal dans la mesure où l'onde réfléchie est due à la mise en mouvement des électrons du conducteur sous l'effet du champ électrique incident; notons que nous sommes dans l'hypothèse où la résistivité du métal est nulle et donc le courant  $\vec{j}_s$  ne dissipe aucune énergie.

### 3.4. Réflexion d'une OPPH

- L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence (en valeur absolue).
- La pulsation de l'onde réfléchie est identique à celle de l'onde incidente
- Le milieu de propagation étant le même pour les ondes incidente et réfléchie,  $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\|$ .



## 4. Onde stationnaire

• Une onde est dite stationnaire si les variables temps et espace sont décorréliées. Un signal stationnaire peut s'écrire sous la forme :  $\Psi(x, t) = f(x)g(t)$ .

• Une onde stationnaire ne transporte en moyenne aucune énergie. L'énergie d'une onde stationnaire est équi-répartie entre la composante électrique et magnétique.

• Les **nœuds de vibrations** correspondent aux points de l'espace où l'amplitude de la vibration est nulle, les **ventres de vibrations** à ceux où l'amplitude de la vibration est maximale.

• Une demi longueur d'onde sépare deux nœuds ou deux ventres consécutifs.

• Dans, le vide, la superposition de deux OPPHPR de même amplitude, de même pulsation et se propageant en sens opposé conduit à une onde stationnaire :

$$\vec{E} = E_0 (\exp(-jkx) - \exp(jkx)) \exp(j\omega t) \vec{e}_y = -2jE_0 \sin(kx) \exp(j\omega t) \vec{e}_y$$

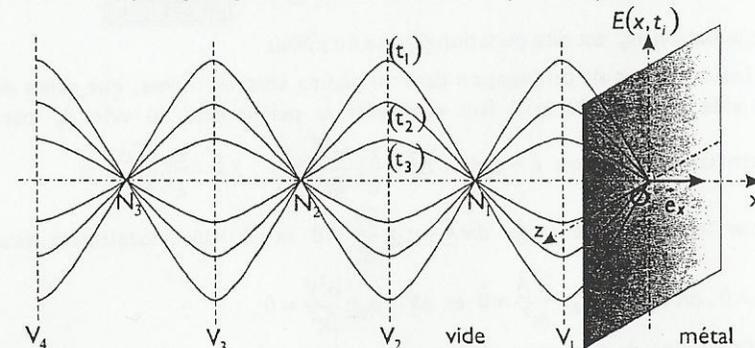
$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\exp(-jkx) + \exp(jkx)) \exp(j\omega t) \vec{e}_z = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \exp(j\omega t) \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Les champs électrique et magnétique sont en quadrature.

Les nœuds du champ magnétique sont les ventres du champ électrique et les ventres du champ magnétique sont les nœuds du champ électrique.

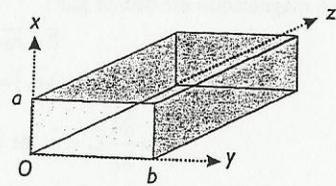


### 5. Propagation guidée

#### 5.2. Guide d'onde infini à section rectangulaire

On envisage la propagation d'une onde transverse électrique (TE) à travers un guide d'onde à parois de conductivité infinie :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \exp j(\omega t - kz)$$



- Les équations de Maxwell et les conditions aux limites sur les parois conductrices conduisent à l'expression suivante pour le champ électrique :

$$\vec{E} = \left( E_{0x} \cos\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n \frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x + E_{0y} \sin\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(n \frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right) \cos(kz - \omega t).$$

- Un mode propre est une onde stationnaire satisfaisant aux conditions limites.
- Le mode défini par le couple d'entiers  $(m, n)$  est un mode propre appelé mode  $TE_{mn}$ . Il est engendré par une onde progressive réfléchi sur les différentes faces de la cavité.
- Le nombre d'entiers caractérisant un mode propre est égal au nombre de directions de l'espace où des conditions aux limites sont imposées.
- Un guide monomode est un guide ne permettant la propagation que d'un seul mode.
- Les amplitudes du champ électrique ne sont pas indépendantes :  $\text{div} \vec{E} = 0$  conduit à :  $\frac{m}{a} E_{0x} + \frac{n}{b} E_{0y} = 0$ .

Le champ magnétique a une composante selon la direction de propagation : l'onde n'est pas transverse magnétique TM.

L'équation de propagation  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$  donne  $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$

Pour le mode  $TE_{mn}$ , le guide d'ondes se comporte comme un **filtre passe-haut** de pulsation de coupure  $\omega_{c,mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ .

On a en différenciant la relation de dispersion :  $2kdk = 2\omega d\omega/c^2$ , soit

$$c^2 = \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = v_\phi v_g \text{ avec } v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,mn}}{\omega}\right)^2}} \text{ et } v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,mn}}{\omega}\right)^2}.$$

La vitesse de groupe correspond ici à la vitesse de propagation de l'énergie. La dispersion vient des conditions aux limites imposées par les conducteurs.

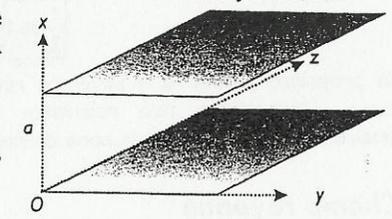
Une onde transverse électromagnétique (TEM) **ne peut pas se propager** dans un guide d'ondes rectangulaire.

#### 5.3. Propagation guidée entre deux plans conducteurs parallèles

On envisage la propagation d'une onde dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x) \exp j(\omega t - kz)$$

Les deux plans conducteurs parfaits, sont illimités, parallèles et distants de  $a$ .



- Cette configuration n'est qu'un cas particulier du guide d'onde rectangulaire précédent avec  $b$  infini. On en déduit alors :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y, \quad k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \text{ et } \omega_c = m \frac{\pi c}{a}$$

Le mode, ne dépendant que d'un entier  $m$  est appelé mode  $TE_m$ .

- La propagation n'est possible que si  $\omega > \frac{\pi c}{a}$ , soit  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} < 2a$ .

## CHAMP RAYONNÉ PAR UN DIPÔLE OSCILLANT

### I. Dipôle oscillant

Bon nombre de sources de rayonnement peuvent être modélisées par un dipôle oscillant de moment  $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t = qa (\cos \omega t) \vec{e}_z$ .

- **Approximation dipolaire**

La source de rayonnement est assimilable à un dipôle électrique, de moment  $\vec{p}$ , placé au point O choisi comme origine, lorsque ses effets sont étudiés en un point M situé à une distance  $r$  très grande devant l'extension de la distribution dipolaire de dimension caractéristique  $a$  :

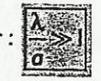


- **Approximation non relativiste**

La vitesse de chaque charge est faible devant la vitesse de la lumière :

$$\begin{aligned} v &= -\omega a \sin \omega t \\ v &< \omega a \\ \omega a &\ll c \\ a &\ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} < \lambda \end{aligned}$$

L'approximation non relativiste consiste à considérer :



- **Zone de rayonnement**

Le champ électromagnétique rayonné par le dipôle oscillant est étudié dans une région de l'espace assez éloignée (**champ lointain**) de la source pour que :

$$\frac{r}{\lambda} \gg 1$$

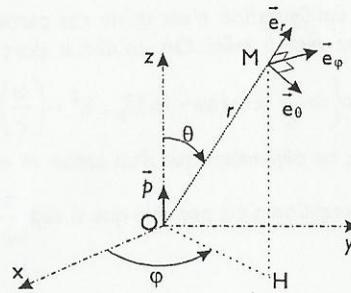
Cette propriété définit la « zone de rayonnement » ou « zone de champ lointain ». L'hypothèse non relativiste et l'approximation dipolaire sont nécessairement vérifiées dans la zone de rayonnement.

### 2. Champ rayonné

L'objectif est de déterminer en M, à tout instant, le champ électromagnétique créé par le dipôle oscillant de moment  $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$  placé en O.

Le point M est repéré par les coordonnées sphériques, précisées sur la figure ci-contre,  $\vec{p} = p_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ .

En notation complexe,  $\vec{p} = p_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z$ .



#### 2.1. Potentiel vecteur

L'expression du potentiel vecteur créé en M par un élément de circuit parcouru par un courant  $\vec{j}(P, t) \delta \tau$  en P (potentiel retardé) vaut :

$$d\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} \delta \tau$$

Pour une distribution dipolaire D :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} \delta \tau$$

Le terme  $t_p = \frac{PM}{c}$  correspond à la durée de propagation entre le point source P

et le point M. Par hypothèse,  $\|\vec{OP}\| \leq a \ll \|\vec{OM}\| = r$  donc  $PM = r$ . De plus

$\frac{PM}{c} = \frac{r}{c}$  car  $\frac{a}{c} \ll T = \frac{\lambda}{c}$  en vertu de l'approximation non relativiste ( $a \ll \lambda$ ).

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_D \vec{j}(P, t - r/c) \delta \tau$$

Par définition, la vitesse moyenne des charges du volume élémentaire  $\delta \tau$  est  $\vec{v}$  et leur charge est  $\delta q = \rho \delta \tau$ ,  $\vec{j} \delta \tau = \rho \vec{v} \delta \tau = \delta q \vec{v}$ .

Le potentiel vecteur s'écrit :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

ou en notation complexe  $\vec{A}(M, t) = \frac{j\omega \mu_0}{4\pi r} \vec{p}$

Remarque : En statique,  $\dot{\vec{p}} = \vec{0}$  et  $\vec{A} = \vec{0}$ .

### 2.2. Champ magnétique

Le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{B} = \text{rot}(A(r, t) \vec{e}_z) = \text{grad } A(r, t) \wedge \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Or,  $\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \right)$  et  $\frac{\partial \dot{p}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{p}}{\partial t} = -\frac{\ddot{p}}{c}$  donc :  $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right)$ .

Comparons les ordres de grandeurs :  $|\dot{p}|$  est de l'ordre  $\omega |p_0|$  et  $|\ddot{p}|$  est de l'ordre  $\omega^2 |p_0|$  donc  $\frac{|\ddot{p}|/c}{|\dot{p}|/r}$  est de l'ordre de  $\frac{\omega r}{c} = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ . Dans la zone de rayonnement ( $\frac{r}{\lambda} \gg 1$ ), le terme  $\frac{\dot{p}}{r}$  est négligeable devant le terme  $\frac{\ddot{p}}{c}$ . Alors

$$\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p}$$

Le champ magnétique a donc pour expression :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\phi$$

ou en notation complexe  $\vec{B}(M, t) = -\frac{k\omega \mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \sin \theta \vec{e}_\phi = -\frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \sin \theta \vec{e}_\phi$

Remarque : En régime statique,  $\vec{B} = \vec{0}$ .

### 2.3. Champ et potentiel électrique

Le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

le potentiel scalaire électrique V étant calculé à partir de la condition de jauge

de Lorentz  $\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \text{div } \vec{A}$ .

Avec,  $\text{div } \vec{A} = \text{div}(A \vec{e}_z) = \text{grad } A \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z$ ,  $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p}$  et  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$  :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_0 c}{4\pi r} \ddot{p} \cos \theta$$

En intégrant par rapport au temps et en excluant la présence éventuelle d'un potentiel permanent, nous obtenons l'expression du potentiel électrique :

$$V(M, t) = \frac{\mu_0 c \cos \theta}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

ou en notation complexe  $V(M, t) = jkr \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = j\omega \frac{\mu_0 c p \cos \theta}{4\pi r}$

# Thermodynamique

## THERMODYNAMIQUE DES FLUIDES

### 1. Théorie cinétique des gaz

#### 1.1. Description du modèle

En théorie cinétique des gaz, les composantes de la vitesse des particules sont des variables aléatoires continues variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

- **Modèle des sphères dures** : on néglige la structure interne des molécules ainsi que toute interaction à distance entre elles. Il n'y a que des collisions élastiques (conservation de l'énergie cinétique totale) entre les molécules.

- **Le chaos moléculaire** : les composantes des vecteurs positions et quantités de mouvement des molécules sont distribuées au hasard.

Il y a homogénéité de la répartition moléculaire et isotropie de la répartition des vitesses.

- **Homogénéité de la densité moléculaire** : en l'absence de champ extérieur (on néglige le champ de gravitation), la concentration des molécules est la même en tous points du récipient.

#### 1.2. Interprétation cinétique de la pression et de la température

L'énergie cinétique moyenne de translation des molécules de masse  $m$  est :

$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ , où le crochet désigne une moyenne statistique sur une population constituée d'un grand nombre de molécules du gaz. La grandeur

$\langle v^2 \rangle = v_{qu}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \right)$  est la vitesse quadratique au carré de la molécule.

Hors équilibre, les molécules de plus grande énergie cinétique cèdent par collision de l'énergie aux molécules de plus faibles énergie cinétique. Il s'en suit l'établissement d'un équilibre correspondant à l'équilibre thermique ou chaque

molécule a une même énergie cinétique moyenne :  $\frac{1}{2} m_1 \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{2} m_2 \langle v_2^2 \rangle$ .

On définit alors la température cinétique  $T_c$  par la relation :

$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m v_{qu}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c$  où  $k_B = R/N_A$  désigne la constante de Boltzmann

( $R$  = cte des gaz parfaits,  $N_A$  = constante d'Avogadro).

Les **chocs** nombreux des molécules sur les parois du récipient sont responsables d'un transfert de quantité de mouvement et donc d'une **pression**

cinétique  $P_c$  donnée par la relation  $P_c = \frac{1}{2} m n_p v_{qu}^2$  où  $n_p$  représente la

densité particulaire des molécules (nombre de molécules par unité de volume).

Remarquons que la définition de la température cinétique et de la pression

cinétique conduit directement à l'équation d'état des gaz parfaits  $P_c V = n R T_c$  et

que l'énergie cinétique totale des  $N$  molécules constituant le gaz est

$$E_c^{Tot} = N \langle e_c \rangle = \frac{3}{2} n R T_c.$$

Les notions générales de température et de pression sont définies à partir du second principe de la thermodynamique, et elles se confondent respectivement avec la température et pression cinétique dans le modèle du gaz parfait. Par la suite, nous noterons simplement  $T$  la température et  $P$  la pression et écrirons l'équation d'état des gaz parfaits  $PV = nRT$ .

#### 1.3. Quelques vitesses utiles

- **Vitesse moyenne** :  $v_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

- **Vitesse la plus probable** :  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

- **Vitesse quadratique moyenne** :  $v_{qu} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

## 2. Éléments de statique des fluides

### 2.1. Champ de pression et force pressante

Un fluide est un ensemble d'entités microscopiques occupant un volume dont la forme géométrique s'adapte aux contraintes extérieures. Pour étudier les propriétés d'un fluide, on le décompose en éléments de taille mésoscopique, ce qui permet d'une part de ne pas s'occuper du caractère discret des molécules et d'autre part de pouvoir considérer une variation locale des différentes grandeurs le caractérisant (pression, masse volumique, etc...). Un élément de volume de taille mésoscopique du fluide est appelé **particule de fluide**.

Chaque particule de fluide est soumise à deux types de forces :

- les forces volumiques (gravitation, électromagnétique, inertie...)
- les forces surfaciques ou de contact

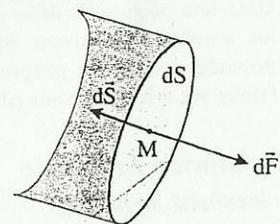
La force pressante  $d\vec{F}(M)$  exercée par un fluide sur un élément de surface  $d\vec{S}$  centré en un point  $M$  est perpendiculaire et proportionnelle à  $d\vec{S}$ .

Pour un élément de surface orienté vers le fluide exerçant la force pressante, on a

$d\vec{F}(M) = -P(M) d\vec{S}$ . Le coefficient de

proportionnalité entre la force et la surface définit la pression du fluide au point  $M$ . La pression en  $M$  est indépendante de l'orientation de la surface.

La pression est donc homogène à une force par unité de surface, et son unité est le Pascal :  $1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .



Remarque : En statique,  $\lambda \rightarrow \infty$  et  $V(M, t) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Expression du champ électrique

$$\overline{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\mu_0 c \cos \theta}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right) = -\frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi r} \ddot{p} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 c \sin \theta}{4\pi r^2} \dot{p}$$

D'autre part,  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{p} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$ .

Nous en déduisons  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c \sin \theta}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}}{r} + \frac{\ddot{p}}{c} \right) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \vec{e}_\theta$ , soit :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta$$

En notation complexe :  $\vec{E}(M, t) = \frac{k^2 p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \omega^2 p \sin \theta}{4\pi r} \vec{e}_\theta$

#### 2.4. Structure de l'onde émise

- Chaque composante du champ électromagnétique vaut :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\phi$$

caractéristique d'une onde progressive, se propageant dans la direction et le sens de  $\vec{e}_r$ , à la vitesse  $c$ .

- La décroissance des champs est en  $\frac{1}{r}$  et la polarisation est rectiligne.
- Les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $\vec{e}_r$ , sont perpendiculaires entre eux et le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_r)$  est direct. Leurs

normes vérifient la relation  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ , d'où la relation  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$ .

- Dans une **région limitée** de l'espace, telle que  $r$  et  $\sin \theta$  varient très peu, les amplitudes peuvent être considérées comme constantes et l'onde possède toutes les propriétés de l'onde plane progressive harmonique : l'onde est « **localement plane** ».

### 3. Puissance rayonnée

#### 3.1. Intensité rayonnée

L'expression du vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_r$$

Par définition, l'intensité énergétique moyenne est  $I = \frac{\langle \delta P \rangle}{\delta S} = \langle \Pi \rangle$

$$I = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \langle \dot{p}^2 \rangle = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 c} (\omega^2 p_0)^2$$

L'intensité décroît en  $\frac{1}{r^2}$ .

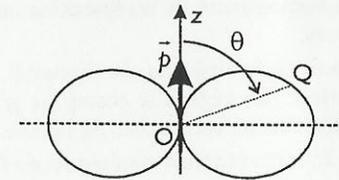
L'intensité est une fonction de l'angle  $\theta$ , le **rayonnement n'est pas isotrope**. Cette anisotropie peut être décrite par l'indicatrice de rayonnement.

#### 3.2. Indicatrice de rayonnement

On définit le vecteur  $\vec{OQ} = I \vec{e}_r$ , et on se place à la distance  $r = r_0$  fixée du dipôle. On trace, dans le plan  $\varphi = \text{cte}$ , le vecteur  $\vec{OQ} = I \vec{e}_r$ , en fonction de l'angle  $\theta$ , l'extrémité  $Q$  de ce vecteur décrit une surface appelée indicatrice de rayonnement. L'axe  $Oz$  du dipôle est un axe de symétrie de révolution du système ( $I$  ne dépend pas de la variable  $\varphi$ ), la surface est donc une surface de révolution autour de cet axe ; nous représentons sa méridienne.

Ce diagramme constitue le **diagramme de rayonnement**. La fonction caractéristique du rayonnement est

$$\frac{I}{I_{\text{max}}} = \sin^2 \theta$$



L'intensité rayonnée est **nulle** dans la **direction de l'axe Oz du dipôle** et est **maximale** dans le **plan équatorial**, perpendiculaire en  $O$  à cet axe.

#### 3.3. Puissance totale rayonnée

La puissance rayonnée à travers une sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  vaut :

$$P = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \dot{p}^2 \delta S$$

avec  $\delta S = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ,

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{p}^2$$

La puissance est **indépendante du rayon  $r$**  de la sphère  $\Sigma$  ; il n'y a **pas de dissipation de puissance** au cours de la propagation.

La puissance moyenne rayonnée par un dipôle oscillant à la pulsation  $\omega$  a pour expression :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \dot{p}^2 \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle (-\omega^2 p_0 \cos \omega t)^2 \rangle$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

Cette puissance est **proportionnelle à la quatrième puissance de la pulsation** (ou en  $\frac{1}{\lambda^4}$ ). Ce résultat permet, en partie, d'expliquer la couleur bleue du ciel.

La résultante des forces de pression exercée par un fluide sur une surface  $S$  quelconque s'obtient par sommation :  $\vec{F} = - \iint_S P(\mathbf{M}) d\vec{S}$ . Le moment en  $O$  de

ces forces est :  $\vec{M}_O = - \iint_S \vec{OM} \wedge P(\mathbf{M}) d\vec{S}$ .

**2.2. Théorème d'Archimède**

Considérons un objet solide délimité par une surface fermée  $S$  immobilisé dans un fluide quelconque au repos (figure 1).

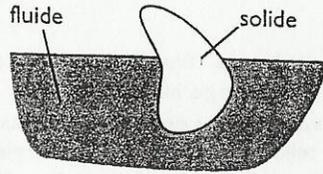


figure 1

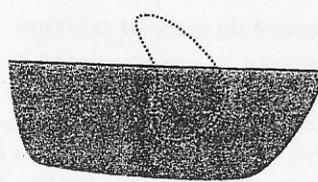


figure 2

Ce solide a remplacé une certaine quantité de fluide de même volume que l'on appelle fluide déplacé. Lorsque la présence du solide ne modifie en rien le champ de pression au sein du fluide, alors la résultante des forces de pression que le fluide exerce sur le solide est égale à la résultante des forces de pression que le fluide extérieure exercerait sur le fluide déplacé.

L'équilibre du fluide déplacé de masse  $m_f$  sous l'action de son poids et de la pression du fluide extérieur à  $S$  implique  $m_f \vec{g} - \iint_S P(\mathbf{M}) d\vec{S} = \vec{0}$ . L'objet subit donc de la part du fluide une force pressante :  $-\iint_S P(\mathbf{M}) d\vec{S} = -m_f \vec{g} = \vec{\Pi}_A$  que

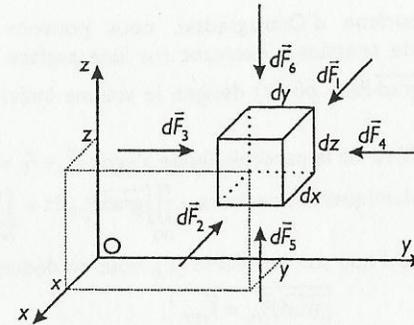
l'on appelle **poussée d'Archimède** :  $\vec{\Pi}_A = -m_f \vec{g}$ .

Cette poussée d'Archimède a pour point d'application le barycentre  $G_f$  du fluide déplacé appelé **centre de poussée**. L'équilibre implique aussi que le moment de la poussée d'Archimède en  $G_f$  est nul.

**Théorème d'Archimède** : la résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps immergé est équivalente à une force unique appelée poussée d'Archimède, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé et appliquée au centre de poussée.

**2.3. Équation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme**

Dans le référentiel terrestre, définissons un repère  $Oxyz$  fixe cartésien orthonormé d'axe  $Oz$  vertical ascendant. Isolons un petit parallélépipède d'arêtes parallèles aux axes du repère au sein d'un fluide au repos.



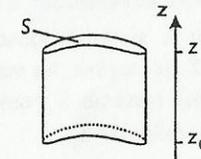
Ses six faces sont soumises aux forces de pression  $d\vec{F}_1, d\vec{F}_2, \dots, d\vec{F}_6$ . L'équilibre de ce petit volume sous l'action de son poids et des forces pressantes se traduit par :  $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 + d\vec{F}_5 + d\vec{F}_6 + dm \vec{g} = \vec{0}$ . En projetant sur les trois axes, nous obtenons :  $\partial P / \partial x = 0, \partial P / \partial y = 0$  et  $\partial P / \partial z = -\rho g$  où  $\rho$  représente la masse volumique du fluide. On peut résumer ces trois relations scalaires en écrivant :  $\text{grad } P = -\rho \vec{g}$ .

Cette dernière formulation a l'avantage de ne pas dépendre du système de coordonnées particulier choisi.

**Remarques :**

- En l'absence de pesanteur,  $\frac{\partial P}{\partial z}$  est nul, donc la pression  $P = P_0$  est uniforme. La poussée d'Archimède sur un objet délimité par la surface fermée  $S$  est alors nulle :  $\vec{\Pi}_A = -\iint_S P_0 d\vec{S} = \vec{0}$ .
- Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, la loi de variation de la pression avec la variable  $z$  est  $P(z) = P_0 - \rho g(z - z_0)$  en notant  $P_0$  la pression pour  $z = z_0$ .

$(P(z) - P(z_0))S = \rho S(z - z_0)g$  est le poids de la colonne verticale de fluide, dont la surface  $S$  à la base est horizontale à la cote  $z_0$ , et dont la hauteur est  $z - z_0$ .



**Applications :**

**Théorème de Pascal :**

Dans un fluide incompressible, toute variation de pression imposée en un point induit la même variation de pression en tout autre point du fluide (si  $P(z_1) \rightarrow P'(z_1) = P(z_1) + \Delta P$  alors  $P(z_2) \rightarrow P'(z_2) = P(z_2) + \Delta P$ ).

**Théorème des vases communicants :**

Les surfaces libres d'un liquide homogène placé sous une même atmosphère sont à la même altitude ( $P(z) = P_{atm} \Rightarrow z = cte$ ).

**2.4. Loi fondamentale de la statique des fluides dans le cas général**

Plaçons nous dans le cas général où s'exerce sur une particule de fluide un champ de forces qui ne se limite pas obligatoirement aux forces de pesanteur et notons  $\vec{f}$ , la résultante des forces volumiques s'exerçant sur la particule de

fluide. D'après le théorème d'Ostrogradski, nous pouvons écrire que la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée ( $S$ ) est  $\vec{F}_p = -\oint\limits_{(S)} P_{(M)} d\vec{S} = -\iiint\limits_{(V)} \text{grad} P d\tau$ , où ( $V$ ) désigne le volume intérieur à la surface

( $S$ ). La condition d'équilibre de la particule fluide s'écrit  $\vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{0}$  où  $\vec{F}_v$  est la résultante des forces volumiques, soit encore  $-\iiint\limits_{(V)} \text{grad} P_{(M)} d\tau + \iiint\limits_{(V)} \vec{f}_{v(M)} d\tau = \vec{0}$ .

La relation étant vraie quel que soit le volume ( $V$ ), nous en déduisons que :

$$\boxed{\text{grad} P_{(M)} = -\vec{f}_{v(M)}}.$$

**Loi fondamentale de la statique des fluides :** le gradient de la pression en un point  $M$  est égal à la résultante des forces volumiques en ce point  $M$ .

**Cas d'un fluide en rotation :** le fluide est au repos dans un référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) en rotation par rapport à un référentiel galiléen ( $\mathcal{R}$ ). Le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) est alors non galiléen et il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement. On a alors  $\text{grad} P = \rho(\vec{g} - \vec{a}_{e(M)})$  où  $\vec{a}_{e(M)}$  désigne l'accélération d'entraînement au point  $M$ .

**Remarque :** on peut remplacer la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée par une force volumique équivalente :

$$\boxed{\vec{F}_p = -\oint\limits_{(S)} P_{(M)} d\vec{S} = -\iiint\limits_{(V)} \text{grad} P d\tau}.$$
 On retrouve alors l'expression de la poussée

d'Archimède comme cas particulier où on ne considère que le champ de pesanteur :  $\vec{F}_p = \vec{I}_A = -\iiint\limits_{(V)} \rho \vec{g} d\tau = -m_f \vec{g}$ .

### 3. Variables et équations d'état

• On appelle variables d'état les paramètres thermodynamiques nécessaires pour décrire l'équilibre et l'évolution d'un système thermodynamique macroscopique.

• Si l'on réunit  $\lambda$  systèmes identiques  $\Sigma_i$ , dans le même état, pour former un seul système  $\Sigma$  homogène, les **variables intensives** de  $\Sigma$  sont les mêmes que celles de chaque système  $\Sigma_i$ , tandis que les **variables extensives** de  $\Sigma$  sont égales à  $\lambda$  fois celles de  $\Sigma_i$ .

• Le lien existant entre le système étudié et les variables d'état est donné par l'équation d'état du système.

• Equation d'état des gaz parfaits :  $PV = nRT$

• Equation d'état du gaz de Van der Waals :  $(P + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives. Le terme  $nb$  représente le covolume du fluide, c'est-à-dire le volume propre de l'ensemble des particules, et le terme  $\frac{n^2 a}{V^2}$  provient des interactions attractives de Van der Waals entre deux particules.

## PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Le premier principe de la thermodynamique affirme l'équivalence entre deux modes de transfert énergétique, le travail et le transfert thermique (également appelé chaleur).

### 1. Postulat d'existence de la fonction d'état énergie interne. Premier principe

#### 1.1. Énoncé du premier principe

Pour satisfaire au principe général de la conservation de l'énergie, on postule l'existence d'une fonction d'état, notée  $U$ , et appelée énergie interne.

**Énoncé du premier principe :** pour tout système, il existe une grandeur extensive, appelée énergie interne et notée  $U$ , telle que la somme de l'énergie mécanique et de l'énergie interne  $E_m + U = E$ , appelée énergie totale soit conservative. L'énergie interne est une fonction d'état du système.

**Variation d'une grandeur extensive :** soit  $X$  une grandeur extensive relative à un système ( $\Sigma$ ) délimité par une surface ( $S$ ). Toute cause de variation de la grandeur  $X$  extensive peut se résumer en un terme d'échange  $\delta_e X$  de cette grandeur avec le milieu extérieur, et en un terme de production  $\delta_p X$  de cette grandeur au sein même du système :  $dX = \delta_e X + \delta_p X$ .

La grandeur  $X$  est dite **conservative** lorsque le terme de production est toujours nul :  $\delta_p X = 0$ .

L'énergie totale est une grandeur dite conservative car il n'y a pas de production ou d'annihilation possible de cette énergie :  $\delta E_p = 0$ . En d'autres termes, toute variation de l'énergie totale d'un système vient d'un échange d'énergie entre le système et le milieu extérieur. Par contre, ni l'énergie interne  $U$ , ni l'énergie mécanique  $E_m$  ne sont des grandeurs conservatives.

#### 1.2. Formes d'énergies comprises dans l'énergie interne

L'énergie interne d'un corps est la somme de l'énergie cinétique  $E_{c,micro}^*$  de ses constituants microscopiques dans le référentiel barycentrique, et de toutes les énergies potentielles d'interaction  $E_{p,int}$  entre ses divers constituants :

$$\boxed{U = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^*)^2 + E_{p,int}}$$
 avec  $v_i^*$  la vitesse du constituant ( $i$ ) de masse  $m_i$

dans le référentiel barycentrique.

**Cas particulier du gaz parfait :** il n'y a pas d'interaction à distance entre les différents constituants.

• **Gaz parfait monoatomique :** la seule forme d'énergie interne est l'énergie cinétique de translation de chaque atome et l'énergie interne se limite alors à la somme  $U = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^*)^2 = N \langle e_c \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$  soit  $\boxed{U = \frac{3}{2} nRT}$ .

• **Gaz parfait diatomique :** il faut prendre en compte la possibilité de vibration de la distance entre les deux atomes et de rotation des atomes autour

de leur axe commun, ce qui ajoute deux degrés de liberté. L'énergie interne vaut

alors pour une population de  $N$  molécules, 
$$U = \frac{5}{2} Nk_B T = \frac{5}{2} nRT$$

## 2. Formulation mathématique du premier principe. Travail et transfert thermique

### 2.1. Les deux formes d'échange d'énergie avec le milieu extérieur

Lorsque de l'énergie a été transférée entre plusieurs corps sans qu'il y ait eu un travail macroscopique échangé, on dit alors que l'énergie a été transférée sous forme de transfert thermique.

**Notation :**  $W$  représente le travail reçu par le système

$Q$  représente le transfert thermique reçu par le système

**Convention de signe :** tout ce que reçoit le système est compté positivement, tout ce qu'il cède est compté négativement. Ainsi :

$W > 0$  ( $Q > 0$ ) : le système reçoit effectivement de l'énergie sous forme de travail (de la chaleur) du milieu extérieur.

$W < 0$  ( $Q < 0$ ) : le système cède effectivement de l'énergie sous forme de travail (de la chaleur) au milieu extérieur.

**Variations élémentaires :** ni le travail ni le transfert thermique ne sont dans le cas général des différentielles totales exactes. Les variations élémentaires seront donc notées respectivement  $\delta W$  et  $\delta Q$ .

### 2.2. Travail des forces de pression

Considérons un système thermodynamique  $\Sigma$  dont le volume  $V$  varie de  $dV$  au cours d'une transformation infinitésimale. En notant  $P_{\text{ext}}$  la pression extérieure agissant sur la surface frontière de  $\Sigma$  avec le milieu extérieur, le travail élémentaire reçu par  $\Sigma$  de la part des forces de pression extérieures est :

$$\delta W_p = -P_{\text{ext}} dV$$

Le signe moins traduit le fait que le travail est effectivement reçu par le système lors d'une compression, effectivement cédé au milieu extérieur lors d'une détente.

Le travail total reçu par  $\Sigma$  lorsque son volume passe d'une valeur initiale  $V_i$  à ne

valeur finale  $V_f$  est alors : 
$$W_p = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV$$
 Le calcul ne peut se faire que si on

connaît l'évolution de la pression extérieure durant la transformation.

### Transformations particulières

• **Transformations réversibles (et « quasi-statiques ») :** il y a à chaque instant équilibre mécanique entre le système et le milieu extérieur. Pour un système gazeux, il y a donc à chaque étape de la transformation égalité entre la

pression  $P$  du gaz et la pression extérieure  $P_{\text{ext}} : P = P_{\text{ext}}$ , d'où 
$$W_p = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

• **Transformation isochore :** le volume du système reste constant et  $W_p = 0$

• **Transformation monobare :** le système évolue sous une pression extérieure constante, soit :

$$W_p = -P_{\text{ext}} (V_f - V_i)$$

**Transformation isobare :** la pression du système reste constante et égale à la pression extérieure, soit :

$$W_p = -P (V_f - V_i)$$

### 2.3. Formulation mathématique du premier principe

On distingue les systèmes fermés où il n'y a pas d'échange de matière entre le système et le milieu extérieur des systèmes ouverts où se font au contraire des échanges de matière

Les deux formes de transfert de l'énergie entre un système et le milieu extérieur sont le travail noté  $W$  et le transfert thermique notée  $Q$ . Pour ce qui est du travail, on fait une distinction entre le travail  $W_c$  des forces extérieures dérivant d'une énergie potentielle (forces conservatives), du travail  $W_{nc}$  des forces extérieures non conservatives.

La variation de l'énergie totale du corps est égale à la somme de l'énergie échangée par l'intermédiaire du travail des forces extérieures non conservatives et de l'énergie échangée sous forme de chaleur. Le travail des forces extérieures conservatives n'apparaît pas explicitement car il est déjà pris en compte dans la variation d'énergie potentielle macroscopique du corps.

La formulation mathématique du premier principe écrite sous forme différentielle et intégrale est donc :

formulation différentielle

$$d(E_m + U) = \delta W_{nc} + \delta Q$$

formulation intégrale

$$\Delta(E_m + U) = W_{nc} + Q$$

Notons que cette formulation n'est valable que pour un **système fermé**. Le premier principe tel qu'il est écrit ici doit donc toujours s'appliquer à un même système thermodynamique dont on suit l'évolution au cours du temps.

L'usage fait que l'on écrit souvent plus simplement  $W$  le travail contribuant à la variation de l'énergie totale du système. Il faut simplement faire attention à ne pas prendre en compte le travail des forces dérivant d'une énergie potentielle (exemple : travail des forces de pesanteur).

## 3. Fonction enthalpie. Bilan énergétique d'un système en écoulement

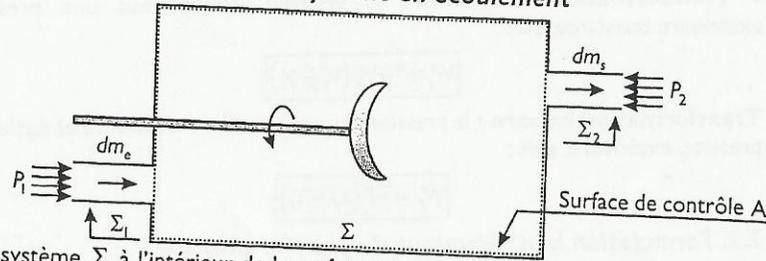
### 3.1. Fonction enthalpie $H$

Par définition, l'enthalpie  $H$  d'un système de pression  $P$  et de volume  $V$  est :

$$H \equiv U + PV$$

Les paramètres  $P$  et  $V$  étant des paramètres d'état et l'énergie interne  $U$  une fonction d'état, l'enthalpie est donc, par construction, une fonction d'état.

### 3.2. Bilan énergétique d'un système en écoulement



Le système  $\Sigma$  à l'intérieur de la surface de contrôle A définit un système ouvert puisqu'il y a entrée et sortie de matière.

Notons  $\Sigma_1$  le sous-système formé de la masse  $dm_e$  de fluide entrante à l'intérieur de la surface A entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , et  $\Sigma_2$  le sous-système formé de la masse  $dm_s$  sortante de la surface A entre ces mêmes instants. Le système  $\Sigma'$  défini par la réunion de deux sous-systèmes :  $\Sigma' = \{\Sigma \cup \Sigma_1\}$  à l'instant  $t$ , et  $\Sigma' = \{\Sigma \cup \Sigma_2\}$  à l'instant  $t + dt$  constitue alors un système fermé.

En régime permanent :  $dm_e = dm_s$  (pas d'accumulation de matière dans A).

Une machine peut fournir du travail au fluide à l'intérieur de la surface de contrôle A.

On appelle **travail indiqué** le travail reçu par le système de la part des parties mobiles de la machine intérieures à la surface de contrôle.

Le premier principe appliqué au système fermé  $\Sigma'$  conduit, en régime permanent à la relation :  $dm [h + e_{pot} + e_{cin}]_1^2 = \delta W_i + \delta Q$  avec :

- l'enthalpie massique  $h$
- l'énergie potentielle macroscopique massique  $e_{pot}$  (gz pour l'énergie potentielle massique de pesanteur)
- l'énergie cinétique macroscopique massique  $e_{cin}$
- $\delta W_i$  et  $\delta Q$  respectivement le travail indiqué et le transfert thermique reçus par le système  $\Sigma'$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

#### Cas particulier de la détente de Joule-Thomson

La détente de Joule-Thomson est la détente lente d'un gaz à travers une paroi poreuse sous l'action d'une différence de pression. Cette détente se fait dans un tube calorifugé et horizontal. Pour cette détente,  $e_{pot} = gz = cte$  (tube horizontal),  $e_{cin} = cte$  (vitesse de l'écoulement identique en amont et en aval),  $\delta Q = 0$  (processus adiabatique) et  $\delta W_i = 0$  (pas d'autres formes de travaux que celui des forces de pression). Ainsi, la détente de Joule-Thomson est isenthalpique :  $h_1 = h_2$ .

### 4. Coefficients calorimétriques

#### Capacités thermiques

Les capacités thermiques traduisent la capacité d'un corps à emmagasiner de l'énergie sous forme thermique.

Les capacités thermiques et capacités thermiques massiques à volume constant sont définies à partir de la fonction énergie interne  $U$ .

• Capacité thermique à volume constant :  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ .

• Capacité thermique massique à volume constant : il s'agit de la capacité thermique à volume constant ramenée à l'unité de masse du système,  $c_v = \frac{C_V}{m}$ .

Les capacités thermiques et capacités thermiques massiques à pression constante sont définies à partir de la fonction enthalpie  $H$ .

• Capacité thermique à pression constante :  $C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$ .

• Capacité thermique massique à pression constante : il s'agit de la capacité thermique à pression constante ramenée à l'unité de masse du système,

$$c_p = \frac{C_P}{m}$$

**Phases condensées** : les capacités thermiques  $C_V$  et  $C_P$  sont très proches et on parle alors simplement de capacité thermique  $C$  :  $C_P \approx C_V \approx C$ . On a alors

$$dU \approx dH = CdT$$

**Gaz parfaits** : l'énergie interne et l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépendent que de la température :  $dU = C_V dT$  et  $dH = C_P dT$ .

La relation entre les capacités thermiques à pression et à volume constants est donnée par la relation de Mayer :  $C_P - C_V = nR$  pour  $n$  moles de gaz.

En introduisant le rapport  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$  :  $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$  et  $C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$ .

Gaz monoatomique :  $C_V = \frac{3}{2} nR$  et  $C_P = \frac{5}{2} nR$ , soit  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \approx 1,67$ .

Gaz diatomique :  $C_V = \frac{5}{2} nR$  et  $C_P = \frac{7}{2} nR$ , soit  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,40$ .

#### 4.2. Loi de Laplace

Elle n'est valable que pour une transformation adiabatique, réversible, appliquée à un gaz parfait avec  $\gamma = cte$ . Elle s'exprime indifféremment en fonction des couples de variables  $(P, V)$ ,  $(T, V)$  ou  $(P, T)$  :

• Couple  $(P, V)$  :  $PV^\gamma = cte$ .

• Couple  $(T, V)$  :  $TV^{\gamma-1} = cte$ .

• Couple  $(P, T)$  :  $P^{1-\gamma} T^\gamma = cte$ .

## SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

### 1. Enoncé du second principe et hypothèse fondamentale

**Enoncé :** Pour tout système, il existe une fonction d'état, extensive, appelée entropie et notée  $S$  telle qu'un système, thermiquement isolé et fermé, évolue spontanément vers un maximum d'entropie.

**Hypothèse fondamentale :** Toute l'information sur le système est contenue dans la fonction entropie  $S$ . Cette fonction est différentiable, en fonction des paramètres extensifs  $(U, V, n, \dots)$  décrivant le système, et monotone croissante en énergie interne  $U$ .

L'entropie est une mesure du désordre du système. L'état le plus désordonné d'un système isolé correspond à son état le plus probable. Le second principe est un critère d'évolution pour le système : un système isolé évolue toujours dans le sens d'une croissance de son entropie, et l'état d'équilibre est atteint lorsque l'entropie est maximale.

### 2. Identité thermodynamique et couples de variables

L'entropie  $S$  est une fonction des paramètres extensifs  $(U, V, n, \dots)$  décrivant le système et monotone croissante en énergie interne  $U$ . On peut écrire de la même façon que l'énergie interne  $U$  est une fonction des variables extensives  $(S, V, n, \dots)$  :  $U = U(S, V, n, \dots)$ .

La différentielle de l'énergie interne s'écrit alors :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, n, \dots} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, n, \dots} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S, V, \dots} dn + \dots$$

Température thermodynamique	Pression thermodynamique	Potentiel chimique
$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, n, \dots}$	$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, n, \dots}$	$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S, V, \dots}$

La température thermodynamique exprime la dépendance de l'énergie interne en fonction de l'entropie, la pression thermodynamique la dépendance de l'énergie interne en fonction du volume du système, le potentiel chimique la dépendance de l'énergie interne en fonction du nombre de moles, ...

Dans le cas du gaz parfait, température thermodynamique et température cinétique se confondent. De même, la pression thermodynamique a le sens de la pression définie en statique des fluides. Les notions de température et de pression thermodynamique constituent des généralisations des notions définies dans les cas particuliers du modèle cinétique du gaz parfait et de la statique des fluides.

**Remarque :** dans le cas où le système est composé de plusieurs espèces chimiques, on définit le potentiel chimique relatif à l'espèce (i) par

$$\mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S, V, n_j, j \neq i, \dots}$$

Identité thermodynamique :  $dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dn_i + \dots$

L'identité thermodynamique fait apparaître des couples de variables : une variable intensive et la variable extensive conjuguée.

Exemple :	Variable extensive	Variable intensive conjuguée
	entropie $S$	température $T$
	volume $V$	opposé de la pression $-P$
	nombre de mole $n$	potentiel chimique $\mu$
	charge électrique $q$	potentiel électrique $\Phi$

Dans le cas particulier d'un système fermé n'échangeant avec l'extérieur que de l'énergie sous forme de travail par l'intermédiaire des forces de pression, l'identité thermodynamique s'écrit  $dU = TdS - PdV$ .

**Différentielle de l'enthalpie :** la définition de l'enthalpie  $H = U + PV$  conduit immédiatement à la différentielle  $dH = TdS + VdP$ .

### 3. Bilans entropiques

#### 3.1. Terme d'échange et terme de production d'entropie

L'entropie étant une grandeur extensive, la variation élémentaire d'entropie  $dS$  d'un système ( $\Sigma$ ) peut s'écrire comme la somme d'un terme d'échange et d'un terme de production d'entropie :  $dS = \delta S_e + \delta S_p$ .

La variation d'entropie de ( $\Sigma$ ) entre l'état initial et final s'écrit alors

$$\Delta S = S_p + S_e \text{ avec :}$$

- $S_p$  = entropie produite au sein du système au cours de la transformation
- $S_e$  = entropie d'échange reçue par le système

Ni l'entropie échangée ni l'entropie produite ne sont des fonctions d'état : seule la somme  $S_e + S_p$  l'est. Les grandeurs  $S_e$  et  $S_p$  dépendent donc de la transformation particulière suivie par le système pour passer de l'état initial à l'état final.

- L'entropie échangée vient des transferts thermiques entre le système et le milieu extérieur. En notant  $\delta Q$  le transfert thermique élémentaire reçue par le

système de température  $T_f$  à la frontière extérieure, on a  $S_e = \int_{T_i}^{T_f} \frac{\delta Q}{T_f}$ .

- L'entropie d'un système isolé ne pouvant que croître d'après le second principe, on a toujours  $S_p \geq 0$ .

- Dans le cas d'une transformation réversible, l'entropie produite est nulle :  $S_p = 0$ . L'entropie produite est donc une mesure de l'irréversibilité de la transformation. La détermination de l'entropie produite se fait à partir de la relation  $S_p = \Delta S - S_e$  : on détermine la variation d'entropie du système qui ne

dépend que des états initiaux et finaux du système, ainsi que l'entropie échangée connaissant le transfert thermique échangé et la température à la frontière.

### 3.2. Relation de Carathéodory

La relation différentielle  $dU = TdS - PdV$  s'écrit encore d'après le premier principe  $dU = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev}$ . On reconnaît l'expression du travail élémentaire des forces de pression dans une transformation réversible  $\delta W_{rev} = -PdV$ , d'où par identification  $\delta Q_{rev} = TdS$ .

**Relation de Carathéodory :**  $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$  et  $\Delta S = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T}$ .

La variation d'entropie du système peut se calculer en imaginant une transformation réversible amenant le système de son état initial à son état final.

**Remarque :** Notons que la relation fait intervenir la température  $T$  du système. Dans un échange de chaleur réversible avec le milieu extérieur, on a

$T = T_f$  et  $S_p = 0$ , et la relation  $\Delta S = S_e = \int \frac{\delta Q}{T_f} = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T}$  permet de retrouver la relation de Carathéodory.

## 4. Entropie des systèmes thermodynamiques usuels

### 4.1. Cas du gaz parfait

• Couples  $(T, V)$  :  $dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ , soit

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)$$

• Couple  $(T, P)$  :  $dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dP = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$ , soit

$$S(T, P) = S(T_0, P_0) + \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

• Couple  $(P, V)$  : en faisant une combinaison linéaire des deux relations précédentes :  $(\gamma-1)dS = \gamma nR \frac{dV}{V} + nR \frac{dP}{P}$ , soit

$$S(P, V) = S(P_0, V_0) + \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

### 4.2. Cas de la matière condensée

Pour la matière condensée, on peut confondre les capacités  $C_v$  et  $C_p$  de sorte que l'on parlera simplement de capacité thermique  $C$  :  $C_v \approx C_p \approx C$ . Dans ce

cas,  $dU = CdT = TdS$  et  $S(T) = S(T_0) + \int_{T_0}^T C_{(T)} dT$ . Dans le cas particulier où, dans

le domaine de température considéré, on peut négliger la variation de la capacité thermique avec la température :  $S(T) = S(T_0) + C \ln \left( \frac{T}{T_0} \right)$ .

### 4.3. Cas d'un thermostat

**Définition :** Un thermostat est un système n'échangeant avec l'extérieur de l'énergie que sous forme de transfert thermique sans que sa température ne varie. Il s'agit bien sûr du cas idéal d'un système de capacité thermique infinie :

$C_{Th} = \infty$ . En notant  $T_{Th}$  la température du thermostat, on a alors  $dS_{Th} = \frac{dU_{Th}}{T_{Th}}$ ,

soit avec  $\Delta U_{Th} = Q_{Th}$  :  $\Delta S_{Th} = \frac{Q_{Th}}{T_{Th}}$ . Il est inutile ici de préciser si le transfert

thermique s'est effectué de façon réversible ou non puisque le transfert thermique reçu par le thermostat s'identifie à la variation d'énergie interne du thermostat.

### 4.4. Système échangeant de la chaleur avec plusieurs thermostats

L'entropie d'échange  $S_{e,i}$  reçue par un système ( $\Sigma$ ) échangeant un transfert

thermique avec un thermostat de température  $T_i$  est  $S_{e,i} = \int \frac{\delta Q_i}{T_i} = \frac{Q_i}{T_i}$ . Si le

système échange de l'énergie avec plusieurs thermostats à des températures différentes, l'entropie d'échange totale reçue est  $S_e = \sum_i S_{e,i} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ . La

variation d'entropie du système ( $\Sigma$ ) satisfait alors à l'inégalité  $\Delta S = S_p + S_e \geq S_e$ .

**Inégalité de Carnot-Clausius :**  $\Delta S \geq \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ .

Cas particulier d'un cycle de transformations :  $\Delta S_{cycle} = 0$ , soit  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ .

## MACHINES THERMIQUES

### I. Bilan énergétique. Les différents diagrammes

#### I.1. Rappels du premier principe

**Système fermé :** pas d'échange de matière entre le système et l'extérieur.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit  $\Delta(E_m + U) = W + Q$ . Dans la plupart des cas, la variation de l'énergie mécanique  $E_m$  est négligeable et le bilan énergétique du système fermé se ramène à  $\Delta U = W + Q$ .

**Système ouvert :** on ramène l'étude à celle d'un système fermé.

**Bilan énergétique d'un système en écoulement en régime**

**permanent :**  $dm [h + e_{pot} + e_{cin}]_1^2 = \delta W_i + \delta Q = dm (w_i + q)$ .

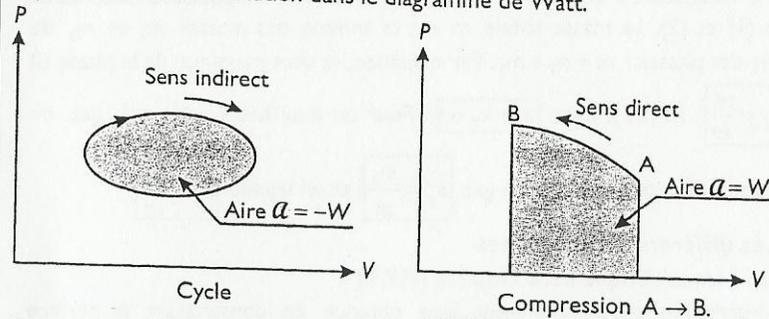
Le bilan équivalent en puissance s'écrit  $D_m [h + e_{pot} + e_{cin}]_1^2 = P_i + P_{Th}$  où

$D_m = \frac{dm}{dt}$  représente le **débit massique**,  $P_i = \frac{\delta W_i}{dt}$  et  $P_{Th} = \frac{\delta Q}{dt}$  respectivement la **puissance indiquée** et la **puissance thermique** reçue par le fluide.

### 1.2. Diagramme de Watt. Travail de transvasement

**Diagramme de Watt :** diagramme représentant l'évolution de la pression  $P$  du système en fonction du volume  $V$  de la machine. Si on raisonne sur l'unité de masse du fluide, les diagrammes de Watt et de Clapeyron se confondent dans le cas d'un système fermé.

**Propriété :** La valeur absolue du travail reçu de façon réversible par le système de la part des forces de pression est égal à l'aire  $\mathcal{A}$  intérieure à la représentation de l'évolution dans le diagramme de Watt.



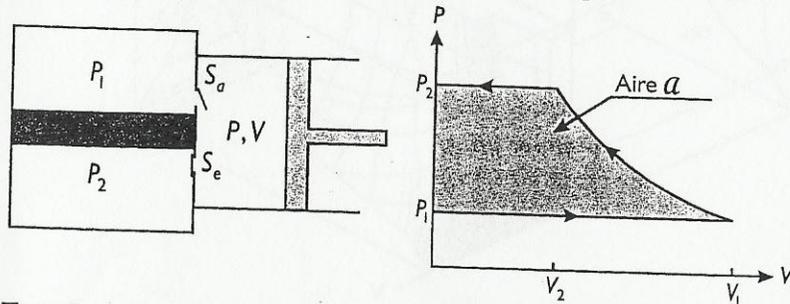
Pour une évolution dans le sens direct :  $W = \mathcal{A}$

Pour une évolution dans le sens indirect :  $W = -\mathcal{A}$

Considérons une masse  $m$  de gaz que l'on veut faire passer d'un réservoir de pression  $P_1$  à un réservoir de pression  $P_2$ .

Le processus comprend les phases :

- d'admission, le volume du réservoir évoluant de 0 à  $V_1$ .
- de compression, le volume du réservoir évoluant de  $V_1$  à  $V_2$ .
- de refoulement, le volume du réservoir évoluant de  $V_2$  à 0.



**Travail de transvasement :** il correspond au travail à fournir par un compresseur pour faire évoluer le gaz d'un état ① ( $P_1, V_1$ ) à un état ② ( $P_2, V_2$ ), phases d'admission et d'échappement incluses. Le travail de transvasement est égal à l'aire du cycle dans le diagramme de Watt.

$$\oint_{\text{cycle}} P dV = \mathcal{A}$$

## 2. Les moteurs thermiques

### 2.1. Inégalité de Clausius-Carnot. Énoncés de Kelvin et de Carnot

**Notion de source :** système pouvant céder de l'énergie par échange d'une grandeur extensive, la grandeur intensive conjuguée restant constante.

**Source d'énergie thermique :** échange d'entropie, la température de la source restant constante. On parle également de source de chaleur ou de thermostat. Un système ( $\Sigma$ ) échange de l'énergie thermique avec plusieurs thermostats. Soit  $Q_i$  l'énergie thermique reçue par le système ( $\Sigma$ ) de la part du thermostat n°(i) de température  $T_i$ . D'après le second principe, on a

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} + S_p = 0 \text{ en notant } S_p \text{ l'entropie produite à cause des irréversibilités sur un cycle de transformations.}$$

**Inégalité de Clausius :**  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

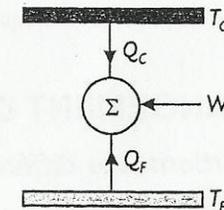
**Énoncé de Kelvin :** un système en contact avec une seule source de chaleur et décrivant un cycle de transformations ne peut fournir de travail.

**Énoncé de Carnot :** un système décrivant un cycle de transformations ne peut fournir du travail que s'il échange de l'énergie thermique avec au moins deux sources de chaleur à des températures différentes.

### 2.2. Cycles dithermes

#### Rendement d'un moteur

On considère un système ( $\Sigma$ ) recevant le travail  $W$  et les énergies thermiques  $Q_f$  et  $Q_c$  respectivement de la part de la source froide de température  $T_f$  et de la source chaude de température  $T_c$ .



**Efficacité mécanique d'un moteur :**  $e_m = \frac{W_{\text{cédé}}}{Q_c} = -\frac{W}{Q_c}$

L'efficacité mécanique est le rapport du travail cédé sur l'énergie thermique reçue de la part de la source chaude par le système sur un cycle de transformations. L'efficacité mécanique est également appelée rendement car elle est toujours inférieure à 1. Par application du premier principe

$$\Delta U_{\text{cycle}} = Q_f + Q_c + W = 0, \text{ et de l'inégalité de Clausius-Carnot } \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0, \text{ on}$$

en déduit  $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ . L'égalité correspondant au rendement maximal est

obtenue dans le cas d'un cycle décrit de façon réversible.

#### Théorème de Carnot

Toutes les machines thermiques fonctionnant de façon réversible en échangeant de l'énergie thermique avec deux sources de température  $T_f$  et  $T_c$  données ont

le même rendement :  $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ . Les machines thermiques fonctionnant de façon irréversible entre ces deux sources ont un rendement inférieur à celui des machines fonctionnant de façon réversible.

**Cycle de Carnot**

Le cycle de Carnot est le cycle que doit décrire une machine ditherme pour que les évolutions soient réversibles. Son rendement est donc égal au rendement maximal  $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ . Il est composé de deux isothermes réversibles et de deux adiabatiques réversibles.

**Réfrigérateurs et pompes à chaleur**

Les réfrigérateurs et pompes à chaleur dithermes prélèvent de l'énergie thermique  $Q_F$  à la source froide et cèdent de l'énergie thermique  $Q_C$  à la source chaude, moyennant un travail reçu  $W$ .

**Réfrigérateur :** le but est de prélever de l'énergie thermique à la source froide que l'on veut refroidir dont l'efficacité frigorifique vaut :  $e_F = \frac{Q_F}{W} \leq \frac{T_F}{T_C - T_F}$ .

**Pompe à chaleur :** le but est de fournir de l'énergie thermique à la source chaude dont l'efficacité thermique vaut :  $e_T = \frac{Q_C}{W} \leq \frac{T_C}{T_C - T_F}$ .

Les égalités sont obtenues lorsque la transformation est réversible.

**CHANGEMENT D'ÉTAT D'UN CORPS PUR**

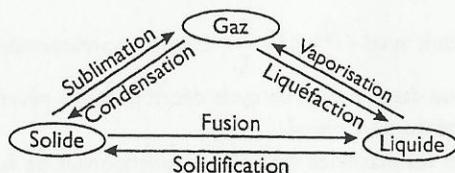
**1. Définitions. Les différents diagrammes**

**1.1. Définitions**

Le sens commun définit trois états physiques de la matière : solide, liquide et gaz. Bien qu'il en existe beaucoup d'autres (état plasma, différentes phases des cristaux liquides,...), nous nous limiterons à celles-ci. Une phase est caractérisée par ses propriétés physiques (masse volumique, indice de réfraction...) qui varient continûment.

• **Corps pur :** système constitué d'un seul type de molécules (mono ou polyatomiques).

• Le passage d'une phase à l'autre est appelé **changement d'état** ou transition de phase, selon la terminologie rassemblée dans le schéma ci-contre.



• On appelle « vapeur » un gaz qui se présente sous forme liquide ou solide dans les conditions ordinaires (293K, 1 bar).

• L'état **fluide** recouvre l'état liquide et l'état gazeux.

• **Variance :** la variance  $\nu$  d'un système est le nombre nécessaire et suffisant de paramètres intensifs à fixer pour que tous les paramètres intensifs du système soient définis. Pour un corps pur sous  $\phi$  phases, on a  $\nu = 3 - \phi$ .

<b>Variance</b>	$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$
<b>Système</b>	zérovariant	monovariant	divariant

• **Titre massique :** un corps pur de masse  $m$  est en équilibre sous deux phases (1) et (2). La masse totale  $m$  est la somme des masses  $m_1$  et  $m_2$  de chacune des phases :  $m = m_1 + m_2$ . Par définition, le titre massique de la phase (i)

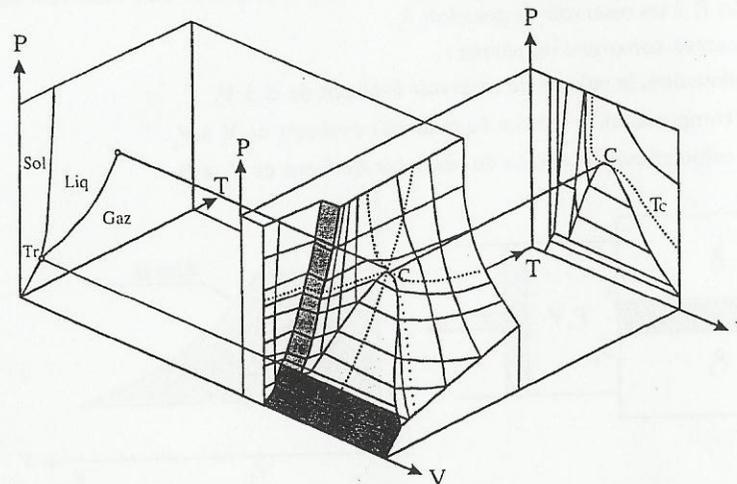
est  $x_i = \frac{m_i}{m}$ ,  $i \in [1, 2]$ , avec  $x_1 + x_2 = 1$ . Pour un équilibre liquide  $\rightleftharpoons$  gaz, on

définira alors le titre massique en gaz  $x_g = \frac{m_g}{m}$  et en liquide  $x_l = \frac{m_l}{m}$ .

**1.2. Les différents diagrammes**

**Surface caractéristique dans l'espace (P,V,T)**

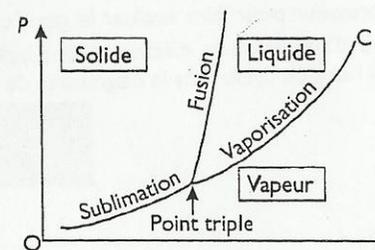
Une description d'ensemble peut être obtenue en construisant la surface caractéristique du corps pur. La projection de la surface caractéristique dans le plan (P,T) donne ce que l'on appelle le diagramme (P,T), et sa projection dans le plan (P,V) fait apparaître le réseau d'isothermes d'Andrews.



**Diagramme (P,T)**

Est visualisé dans le plan (P,T) l'ensemble des points d'équilibre d'un corps pur, sous une, deux ou trois phases.

• Dans ce diagramme apparaît le point où il y a équilibre simultanément entre les trois phases solide, liquide et gazeuse. Ce point est appelé **point triple**.

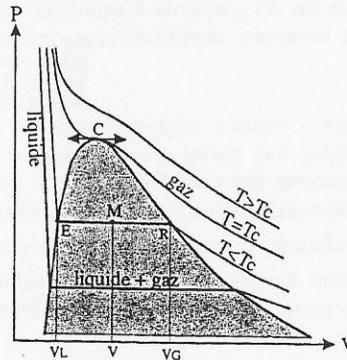


<b>Equilibre</b>	solide $\rightleftharpoons$ gaz	solide $\rightleftharpoons$ liquide	liquide $\rightleftharpoons$ gaz
<b>Courbe de :</b>	Sublimation	Fusion	Vaporisation

- Sur chacune de ces courbes d'équilibre le système est monovariant : la pression d'équilibre ne dépend que de la température :  $P = P(T)$ .
- La pression liquide  $\rightleftharpoons$  gaz est appelée **pression de vapeur saturante** et est notée  $P_s$  :  $P_s = P_s(T)$ . Elle est une fonction croissante de la température.
- Au point triple, le système est zérovariant. Température et pression au point triple sont entièrement déterminées et dépendent du corps pur considéré. Tous les corps purs ont un point triple excepté l'hélium.
- la pente de la courbe de sublimation est toujours positive. Au point triple, elle est comprise entre celle de la courbe de vaporisation et celle de la courbe de fusion.
- la pente de la courbe de fusion est positive sauf pour l'eau, le bismuth (Bi) et le tellure (Te) où elle est négative.

**Diagramme de Clapeyron et isothermes d'Andrews**

Pour une température  $T$  fixée, les variations de la pression  $P$  sont représentées en fonction du volume massique  $v = V/m$  (coordonnées dites de Clapeyron).



Est représenté dans ce diagramme le réseau des isothermes d'Andrews.

**Points particuliers le long d'une isotherme :**

- Le **point d'ébullition E** est le point où apparaît la première bulle de gaz pour une évolution dans le sens des  $v$  croissants, le point où disparaît la dernière bulle de gaz pour une évolution dans le sens des  $v$  décroissants.
- Le **point de rosée R** est le point où disparaît la dernière goutte de liquide pour une évolution dans le sens des  $v$  croissants, le point où apparaît la première goutte de liquide pour une évolution dans le sens des  $v$  décroissants.
- Le palier ER est le **palier de vaporisation** ou de **liquéfaction**.
- L'ensemble des points E constitue la **courbe d'ébullition**, l'ensemble des points R la **courbe de rosée**. La réunion des courbes de rosée et d'ébullition forme la **courbe de saturation**.
- La courbe de saturation se termine en un point C appelé **point critique**. Il n'y a plus de distinction possible entre phase liquide et phase gazeuse au-delà du point critique : on parle d'état fluide.

**Propriété :** l'isotherme critique présente au point critique une tangente

horizontale et un point d'inflexion :  $\left(\frac{dP}{dv}\right)_C = 0$  et  $\left(\frac{d^2P}{dv^2}\right)_C = 0$ .

**Théorème des moments :** Le point M, représentatif de l'état du système sur le palier (ER) a pour abscisse le volume massique  $v$  tel que  $v = \frac{V}{m} = \frac{m_G v_G + m_L v_L}{m} = x_G v_G + x_L v_L = x_G v_G + (1 - x_G) v_L$ .

Les titres massique en gaz et en liquide sont donnés par les relations :

$$x_G = \frac{v - v_L}{v_G - v_L} = \frac{EM}{ER} \quad \text{et} \quad x_L = \frac{v_G - v}{v_G - v_L} = \frac{MR}{ER}$$

**2. Transferts énergétiques**

**2.1. Enthalpie et entropie de changement d'état**

**Définition :** on appelle **enthalpie de transition de phase**  $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$  de la phase 1 à la phase 2 le transfert thermique nécessaire pour réaliser de façon réversible, à température et pression constante, la transition de phase de l'unité de masse du corps de la phase 1 à la phase 2.

L'enthalpie de transition de phase est également appelée **chaleur latente** (massique) et notée  $l_{1 \rightarrow 2}$ .

<b>Transition</b>	sol $\rightarrow$ gaz	sol $\rightarrow$ liq	liq $\rightarrow$ gaz
<b>Enthalpie de changement d'état</b>	$\Delta h_{sub} = h_G - h_S$ Enthalpie de sublimation	$\Delta h_{fus} = h_L - h_S$ Enthalpie de fusion	$\Delta h_{vap} = h_G - h_L$ Enthalpie de vaporisation

<b>Chaleur latente</b>	Sublimation $l_S$	Fusion $l_F$	Vaporisation $l_V$
------------------------	-------------------	--------------	--------------------

En notant  $q_p$  l'énergie thermique reçue par l'unité de masse du corps pour passer de façon réversible de la phase 1 à la phase 2, on a :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2} = l_{1 \rightarrow 2} = q_p = T \Delta s_{1 \rightarrow 2}$$

L'entropie de changement d'état à la température  $T$  est donc :

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} = (s_2 - s_1) = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow 2}}{T} = \frac{l_{1 \rightarrow 2}}{T}$$

Elle est égale à la variation d'entropie massique entre les états 1 et 2.

**2.2. Enthalpie et entropie massique d'un système diphasé**

Soit un système en équilibre sous deux phases (1) et (2). En notant  $h_i$  l'enthalpie massique de la phase (i) et  $x_i$  le titre massique correspondant, l'enthalpie massique  $h$  du système diphasé s'écrit :  $h = x_1 h_1 + x_2 h_2$ .

Avec,  $h = x_1 h_1 + (1 - x_1) h_2 = h_2 - x_1 \Delta h_{1 \rightarrow 2}$  et  $h = (1 - x_2) h_1 + x_2 h_2 = h_1 + x_2 \Delta h_{1 \rightarrow 2}$ , les titres massiques peuvent s'exprimer par les relations :

$$x_1 = \frac{h_2 - h}{\Delta h_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{h - h_1}{\Delta h_{1 \rightarrow 2}}$$

De la même façon, on a en notant  $s_i$  l'entropie massique de la phase ( $i$ ) et  $T$  la température d'équilibre :

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2, \quad x_1 = \frac{s_2 - s}{\Delta s_{1 \rightarrow 2}} = T \frac{s_2 - s}{l_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{s - s_1}{\Delta s_{1 \rightarrow 2}} = T \frac{s - s_1}{l_{1 \rightarrow 2}}$$

### 2.3. Relation de Clapeyron

À la température  $T$ , la pente de la courbe d'équilibre, dans le diagramme  $(P, T)$  est liée à l'enthalpie de changement d'état  $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$  par la relation dite de

Clapeyron :  $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow 2}}{T(v_2 - v_1)}$ , où  $v_1$  et  $v_2$  sont les volumes massiques.

**Cas particulier de l'eau** : pour la courbe de fusion, la relation de Clapeyron

s'écrit  $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{fus} = \frac{\Delta h_{fus}}{T(v_{liquide} - v_{solide})}$ , soit puisque  $v_{solide} > v_{liquide}$ ,  $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{fus} < 0$  : la

pression d'équilibre est une fonction décroissante de la température.

### 2.4. Etats métastables

- **Surfusion** : on observe le corps à l'état liquide à une température inférieure à sa température de fusion.
- **Retard à la condensation** : le corps est à l'état gazeux à une pression supérieure à sa pression de vapeur saturante.
- **Retard à la vaporisation** : le corps est à l'état liquide à une température supérieure à sa température de vaporisation.

## TRANSFERTS THERMIQUES EN THERMODYNAMIQUE

### 1. Les différents modes de transfert de l'énergie

Ces transferts se font généralement selon trois modes distincts :

- La **conduction** qui correspond à une diffusion microscopique par chocs des particules ayant le plus d'énergie cinétique moyenne avec celles qui en ont moins.
- La **convection** naturelle ou forcée qui correspond à un transport macroscopique de matière (mouvement d'air chaud ascendant). La convection est inexistante dans un solide contrairement à un fluide.
- Le **rayonnement** qui correspond à la propagation d'une onde électromagnétique qui peut avoir lieu dans le vide.

### 2. La notion de température locale

Un échantillon mésoscopique est **grand** à l'échelle atomique (il comporte plusieurs millions d'atomes) et **petit** à l'échelle macroscopique.

L'évolution d'un système se fait toujours en deux étapes :

- dans un premier temps un équilibre s'effectue à l'échelle mésoscopique ; c'est l'**équilibre local** : la température est uniforme sur chaque échantillon mésoscopique,

- dans un second temps, ces (sous) systèmes interagissent entre eux (couplage) pour aboutir éventuellement à un **équilibre global** du système, c'est ce second temps que l'on étudie ici.

### 3. Vecteur densité de courant d'énergie

Le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique  $\vec{J}_{th}$  représente la **puissance** thermique transportée, par unité de surface (exprimé en  $W \cdot m^{-2}$ ) et tel que le courant élémentaire  $\delta\phi$  qui traverse une surface élémentaire  $\delta\vec{S}$  vérifie  $\delta\phi = \vec{J}_{th} \cdot \delta\vec{S}$ .

La puissance thermique traversant une surface s'écrit donc :

$$\Phi = \iint_{\text{surface}} \vec{J}_{th} \cdot \delta\vec{S}$$

### 4. Etude de la conduction et loi de Fourier

Dans le cas de gradients thermiques modérés, en l'absence d'autres gradients locaux, le vecteur densité de courant thermique vérifie la **loi de Fourier** :

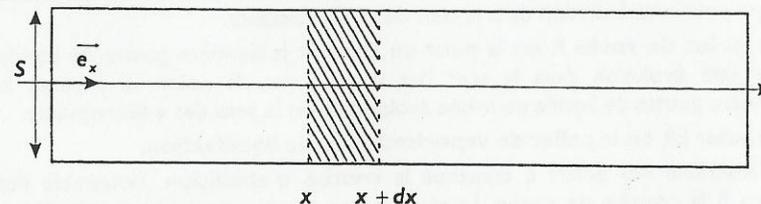
$$\vec{J}_{th} = -\lambda \text{grad} T$$

Le signe « moins » traduit le sens du vecteur densité de courant d'énergie thermique des zones de températures élevées vers les zones de basses températures (en conformité avec le second principe qui stipule que l'énergie thermique passe spontanément du chaud vers le froid).

Le coefficient  $\lambda$  toujours positif est la conductivité thermique du milieu. Il s'exprime en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ . Ce coefficient dépend des matériaux et de la température. Les solides sont meilleurs conducteurs de la chaleur que les liquides.

### 5. Equation dite de la « chaleur »

#### 5.1. Modèle unidirectionnel



Bilan local d'enthalpie :

(variation de l'enthalpie de la tranche d'épaisseur  $dx$  pendant  $dt$ ) = (enthalpie qui « entre » en  $x$ ) - (enthalpie qui « sort » en  $x + dx$ ) + (enthalpie « créée entre »  $x$  et  $x + dx$ ).

$$d(\delta H) = S dx \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_x dt = \left[ \underbrace{[J_{Th}(x,t)S]}_{\text{enthalpie "entrante" par unité de tps}} - \underbrace{[J_{Th}(x+dx,t)S]}_{\text{enthalpie "sortante" par unité de tps}} + \underbrace{p(x,t)S dx}_{\text{puissance créée}} \right] dt$$

avec  $p(x,t)$ , la puissance créée par unité de volume.

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_x + \left( \frac{\partial J_{Th}}{\partial x} \right)_t = p$$

En tenant compte de l'expression de la loi locale de Fourier dans l'équation de conservation à une dimension, il vient :

$$\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + p(x,t) = \rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

appelée pour des raisons historiques **équation de la chaleur**.

### 5.2. Cas général

Equation de bilan d'énergie :  $\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \text{div } J_{Th} = p$

Equation de la chaleur :  $\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \Delta T = p$

La grandeur  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  est appelée **diffusivité thermique** (exprimée en  $m^2 \cdot s^{-1}$ )

## 6. Transport conducto-convectif

Lorsqu'un système est plongé dans un fluide (de l'air par exemple), des échanges thermiques apparaissent : il y a un transport d'énergie thermique entre le système et le fluide. Ce transfert est modélisé par la loi de Newton qui donne la densité surfacique de courant d'énergie de pertes entre le système et le fluide :

$$J_{\text{échanges}} = -h(T_{\text{système}} - T_{\text{fluide}})$$

$h$  est un paramètre dépendant de la nature du système et du fluide. Il s'exprime en  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ . Le flux surfacique d'énergie qui en résulte se calcule par intégration de  $J_{\text{échanges}}$  sur toute la surface d'échange.

## 7. Régime permanent, régime quasi-permanent et modèles électrocinétiques

### 7.1. Résistance thermique

En régime permanent, il est possible de développer une analogie entre la conduction électrique et la conduction thermique. Le tableau ci-dessous montre cette correspondance.

Electrocinétique	Thermoconduction
$\vec{j} = -\gamma \text{grad}V$	$\vec{j}_{Th} = -\lambda \text{grad}T$
Conductivité électrique $\gamma$	Conductivité thermique $\lambda$
Potentiel électrique $V$	Température $T$
Courant électrique $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \delta \vec{S}$	Flux thermique $\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_{Th} \cdot \delta \vec{S}$

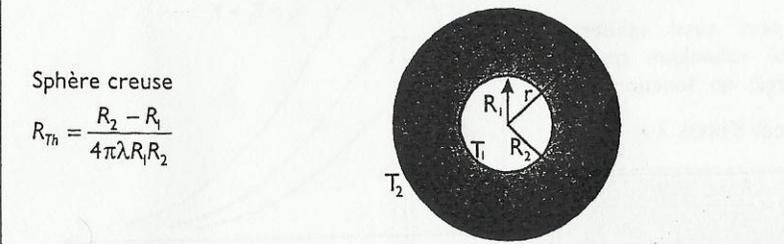
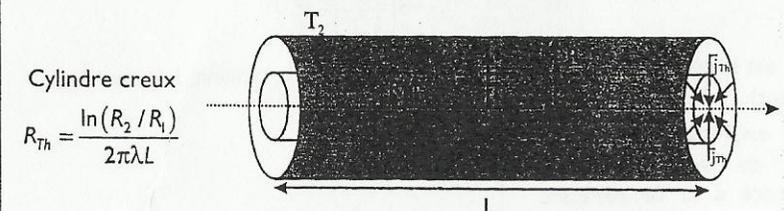
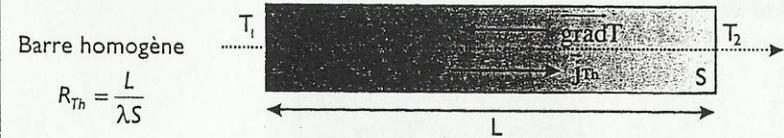
En se basant sur l'analogie électrique, on peut définir la résistance thermique :

Résistance électrique  $R_{el} = \frac{V_2 - V_1}{I}$

Résistance thermique  $R_{Th} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi}$

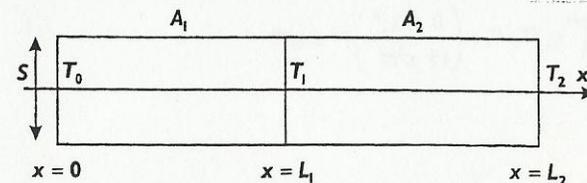
En régime permanent, le flux du courant thermique se conserve pour un problème unidirectionnel. L'unité de la résistance thermique est :  $W \cdot K^{-1}$ .

**Résistances thermiques usuelles :**



### 7.2. Association série

Le flux thermique traverse successivement les deux résistances. La résistance thermique  $R_{th}$  de l'ensemble est la somme des deux résistances :  $R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$

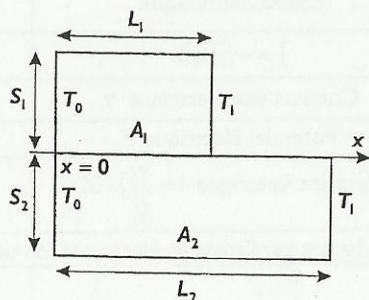


### 7.3. Association parallèle

La conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique.

En parallèle, la conductance équivalente est  $G_{th} = G_{th_1} + G_{th_2}$  soit

$$R_{th} = \frac{R_{th_1} R_{th_2}}{R_{th_1} + R_{th_2}}$$



## 8. Transfert par rayonnement

### 8.1. Le corps noir

C'est un corps capable d'absorber tout rayonnement incident quel que soit sa fréquence, placé dans une enceinte avec laquelle il est en équilibre thermique.

### 8.2. Loi de Planck

Relation de Planck du rayonnement pour un corps noir,

$$u_v(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

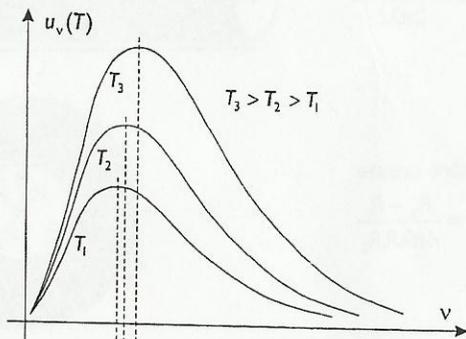
où  $c$  est la célérité de la lumière,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $h$  la constante de Planck.

$u_v(T)$  est l'énergie émise par unité de volume et de fréquence à la température  $T$ .

On peut aussi utiliser la densité volumique spectrale d'énergie en fonction de la

longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  :

$$u_\lambda(T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$



Pour obtenir la densité volumique d'énergie  $u(T)$  émise sur tout le spectre électromagnétique, il suffit d'intégrer  $u_\lambda(T)$  sur toutes les longueurs d'ondes.

$$\text{Ainsi : } u(T) = \int_0^{+\infty} u_\lambda(T) d\lambda = \left(\frac{8 \pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3}\right) T^4 = \sigma T^4$$

### 8.3. Loi de Wien (1880)

Elle traduit la relation entre le maximum de la courbe  $u_\lambda(T)$  et la température,

$$\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

### 8.4. Loi de Kirchhoff

Aucun corps ne peut émettre à une température  $T$  plus de rayonnement en termes énergétiques que le corps noir à la même température.

### 8.5. Loi de Stefan – Boltzmann (1879)

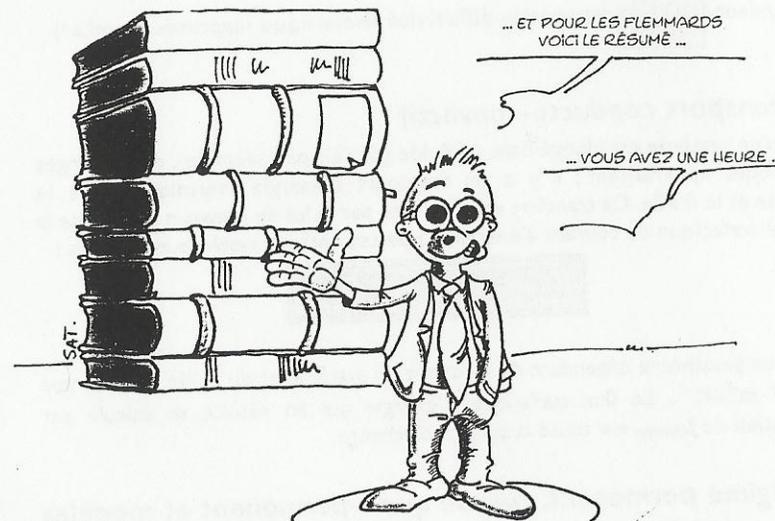
Un corps noir rayonne la densité volumique d'énergie (sur tout le spectre)  $u(T) = \sigma T^4$ .

On montre que cela revient à considérer que ce corps noir émet l'énergie au niveau de sa surface avec la puissance surfacique  $P = \frac{u(T)c}{4}$ .

Ainsi, la puissance émise par unité de surface par un corps noir de température  $T$  vérifie la loi :

$$P = \sigma T^4$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan et vaut sensiblement  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .



## Chimie

## ATOMES ET MOLÉCULES

## 1. Quantification de l'énergie dans l'atome d'hydrogène

- Les niveaux d'énergie électroniques sont quantifiés ( $n$  est un entier strictement positif) :

$$E = \frac{13,6}{n^2} \text{ électron-volt (eV)}$$

- 1 électron-volt correspond à  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- L'énergie d'un photon de fréquence  $\nu$  (longueur d'onde  $\lambda$ ) est :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$h$  est la constante de Planck et  $c$  la vitesse de la lumière.

## 2. Structure électronique de l'atome

Quatre nombres quantiques décrivent l'état électronique :

- $n$  : nombre quantique principal, entier non nul.
- $\ell$  : nombre quantique secondaire, entier tel que  $0 \leq \ell \leq n-1$ .
- $m$  : nombre quantique magnétique, entier relatif tel que  $-\ell \leq m \leq \ell$ .
- $s$  : nombre quantique de spin. Le moment magnétique de spin  $m_s$  est tel que  $-s \leq m_s \leq s$ . Pour l'électron,  $s = 1/2$  et  $m_s = \pm 1/2$ .

## 3. Les orbitales

Une orbitale atomique correspond à la donnée d'un triplet  $(n, \ell, m)$ .

$n$	$\ell$	$m$	Nom et nombre
1	0	0	1s (1 orbitale)
2	0	0	2s (1 orbitale)
	1	{-1 ; 0 ; 1}	2p (3 orbitales)
3	0	0	3s (1 orbitale)
	1	{-1 ; 0 ; 1}	3p (3 orbitales)
	2	{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2}	3d (5 orbitales)
4	0	0	4s (1 orbitale)
	1	{-1 ; 0 ; 1}	4p (3 orbitales)
	2	{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2}	4d (5 orbitales)
	3	{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3}	4f (7 orbitales)

## 4. Règles de remplissage des orbitales

- Règle de Pauli** : sur une orbitale atomique, on ne peut placer que deux électrons avec des spins antiparallèles.
- Règle de Klechkowski** : l'ordre de remplissage des orbitales est le suivant :  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 5p, 7s, 5f, 6d, 7p$
- Règle de Hund** : pour des orbitales atomiques de même niveau d'énergie, les électrons en occupent le maximum avec des spins parallèles.
- Electrons de valence** : les électrons appartenant aux orbitales de plus grand nombre quantique principal et/ou aux orbitales en cours de remplissage.

## 5. La classification périodique

Tableau périodique des éléments sur la prochaine page.

Familles chimiques :

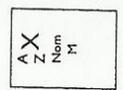
- Alcalins : éléments de la colonne I (H, Li, Na, K, Rb, Cs, Fr)
- Alcalino-terreux : éléments de la colonne II (Be, Mg, Ca, Sr, Ba)
- Chalcogènes : éléments de la colonne VI (O, S, Se)
- Halogènes : éléments de la colonne VII (F, Cl, Br, I, At)
- Gaz rares ou nobles : éléments de la colonne VIII (He, Ne, Ar, Kr)

## 6. Formules de Lewis des molécules

- Une liaison covalente est la mise en commun par deux atomes d'électrons de valence.
- Règle de l'octet** : dans un édifice polyatomique, un atome tend à s'entourer de 8 électrons par création de liaisons covalentes. Cette règle est transgressée pour des éléments situés après le phosphore et avant le carbone)
- Méthode pour écrire une formule de Lewis** :
  - Faire le décompte des électrons de valence pour chaque atome. Soit  $N$  ce nombre total.
  - Si  $N$  est pair, il y aura  $N/2$  liaisons covalentes, sinon il y aura  $(N-1)/2$  liaisons covalentes et un électron célibataire.
  - Placer les atomes autour de l'atome central.
  - Envisager des liaisons simples
  - Avec les électrons restants, envisager des doublets non-liants pour que chaque atome respecte l'octet.
  - Envisager des liaisons multiples le cas échéant.
  - Attribuer les charges formelles à chaque atome.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1 H Hydrogène 1,01	2 He Hélium	3 Li Lithium 6,94	4 Be Béryllium 9,01	5 B Bore 10,8	6 C Carbone 12,0	7 N Azote 14,0	8 O Oxygène 16,0
9 F Fluor 19,0	10 Ne Néon 20,2	11 Na Sodium 23,0	12 Mg Magnésium 24,3	13 Al Aluminium 27,0	14 Si Silicium 28,1	15 P Phosphore 31,0	16 S Soufre 32,1
17 Cl Chlore 35,5	18 Ar Argon 39,9	19 K Potassium 39,1	20 Ca Calcium 40,1	21 Sc Scandium 45,0	22 Ti Titane 47,9	23 V Vanadium 50,9	24 Cr Chrome 52,0
25 Mn Manganèse 54,9	26 Fe Fer 55,8	27 Co Cobalt 58,9	28 Ni Nickel 58,7	29 Cu Cuivre 63,5	30 Zn Zinc 65,4	31 Ga Gallium 69,7	32 Ge Germanium 72,6
33 As Arsenic 74,9	34 Se Sélénium 79,0	35 Br Brome 79,9	36 Kr Krypton 83,6	37 Rb Rubidium 85,5	38 Sr Strontium 87,5	39 Y Yttrium 88,9	40 Zr Zirconium 91,2
41 Nb Niobium 92,9	42 Mo Molybdène 95,9	43 Tc Technetium 99,0	44 Ru Ruthénium 101,1	45 Rh Rhodium 102,9	46 Pd Paladium 106,4	47 Ag Argent 107,9	48 Cd Cadmium 112,4
50 Sn Étain 118,7	51 Sb Antimoine 121,8	52 Te Tellure 127,5	53 I Iode 126,9	54 Xe Xénon 131,3	55 Ba Baryum 137,3	56 La Lanthanides 138,9	57 Ce Cérium 140,1
60 Nd Néodyme 144,2	61 Pm Prométhium 145	62 Sm Samarium 150,4	63 Eu Europium 152,0	64 Gd Gadolinium 157,3	65 Tb Terbium 158,9	66 Dy Dysprosium 162,5	67 Ho Holmium 164,9
70 Yb Ytterbium 173,0	71 Lu Lutécium 175,0	72 Hf Hafnium 178,5	73 Ta Tantalum 180,9	74 W Tungstène 183,9	75 Re Rénium 186,2	76 Os Osmium 190,2	77 Ir Iridium 192,2
80 Pt Platine 195,1	81 Au Or 197,0	82 Hg Mercure 200,6	83 Tl Thallium 204,4	84 Pb Plomb 207,2	85 Bi Bismuth 209,0	86 Po Polonium 209,0	87 At Astatine 210
88 Ra Radium 226,1	89 à 103 actinides	104 Fr Francium 223	105 Rf Rutherfordium 261	106 Db Dubnium 262	107 Sg Seaborgium 263	108 Bh Bohrium 264	109 Hs Hassium 265

A : nombre de masse de l'isotope le plus abondant  
 Z : numéro atomique  
 M : masse atomique en g.mol<sup>-1</sup>



Éléments de transition

lanthanides	139 La Lanthane 138,9	140 Ce Cérium 140,1	141 Pr Praseodyme 140,9	144 Nd Néodyme 144,2	147 Pm Prométhium 145	152 Sm Samarium 150,4	157 Eu Europium 152,0	159 Gd Gadolinium 157,3	162 Dy Dysprosium 162,5	163 Ho Holmium 164,9	165 Er Erbium 167,3	167 Tm Thulium 168,9	173 Lu Lutécium 175,0
actinides	227 Ac Actinium 227	232 Th Thorium 232,0	233 Pa Protactinium 231	238 U Uranium 238,0	237 Np Neptunium 237	239 Pu Plutonium 244	243 Am Américium 243	247 Cm Curium 247	251 Cf Californium 251	252 Es Einsteinium 254	257 Fm Fermium 257	261 Md Moscovium 261	265 Lw Lawrencium 260

7. Géométrie des édifices polyatomiques – VSEPR

Un édifice est représenté par la formule générique AX<sub>m</sub>E<sub>n</sub> où A est l'atome central, m le nombre d'atomes X entourant l'atome central et n le nombre de doublets non liants situés sur l'atome central.

m+n	Valeur de m	Géométrie	Représentation
2	2	Linéaire	
3	3	Triangulaire, plane	
3	2	Coudée	
4	4	Tétraédrique	
4	3	Pyramide à base triangulaire	
4	2	Coudée	
5	5	Bipyramide à base triangulaire	
6	6	Octaédrique	

# CINÉTIQUE CHIMIQUE

## 1. Système fermé en réaction chimique

### 1.1. Coefficients stœchiométriques algébriques

Equation bilan :  $v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots = v'_1 A'_1 + v'_2 A'_2 + \dots$  notée :  $\sum v_i A_i = 0$

Coefficients stœchiométriques :  $v_i$  positifs pour les produits et négatifs pour les réactifs.

### 1.2. Avancement d'une réaction

Avancement de la réaction :  $\xi$  tel que

$$d\xi = \frac{dn_i}{v_i}$$

où  $dn_i$  est la variation (en mol) de la quantité de l'espèce  $A_i$ .

Quantité de constituant  $A_i$  :  $n_{i,0}$  est la quantité initiale de  $A_i$

$$n_i = n_{i,0} + v_i \xi$$

## 2. Vitesses en cinétique chimique

### 2.1. Vitesses de formation et de disparition

Vitesse de formation  $r_f$  de  $A_i$  :  $r_f = \frac{1}{V} \frac{dn_i}{dt}$

où  $V$  est le volume du réacteur.

Vitesse de disparition  $r_d$  de  $A_i$  :  $r_d = -r_f = -\frac{1}{V} \frac{dn_i}{dt}$

### 2.2. Vitesse de réaction

Vitesse de réaction  $r$  :

$$r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

$$r = \frac{1}{v_i} \frac{1}{V} \frac{dn_i}{dt}$$

$$r = \frac{1}{v_i} r_f = -\frac{1}{v_i} r_d$$

## 3. Facteurs influençant la vitesse d'une réaction

### 3.1. Influence des concentrations

Loi de vitesse :  $r = k \prod [A_i]^{\alpha_i}$

où  $k$  est la constante de vitesse et les  $\alpha_i$  les ordres partiels.

Ordre global de la réaction :  $\sum \alpha_i$

### 3.2. Influence de la température

Loi d'Arrhénius :  $E_A$  est l'énergie d'activation :

$$k = A e^{-\frac{E_A}{RT}}$$

## 4. Résultats de cinétique formelle

Soit la réaction  $A = B$  d'ordre  $p$  par rapport à  $A$ . Soit  $k$  la constante de vitesse.

La concentration initiale de  $A$  est notée  $A_0$ .

On a alors les résultats suivants :

Ordre	Loi cinétique	Temps de $\frac{1}{2}$ réaction
0	$[A](t) = A_0 - kt$	$t_{1/2} = \frac{A_0}{2k}$
1	$[A](t) = A_0 \exp(-kt)$	$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$
2	$\frac{1}{[A](t)} = \frac{1}{A_0} + kt$	$t_{1/2} = \frac{1}{2kA_0}$

## 5. Mécanismes réactionnels

### 5.1. Processus élémentaire

- C'est une réaction dont l'équation-bilan traduit ce qu'il se passe au niveau microscopique.
- Molécularité** : nombre d'espèces réactives intervenant dans le processus élémentaire (en général 1, 2 voire 3).

### 5.2. Intermédiaires réactionnels

Ce sont les réactifs ou produits à brève durée de vie apparaissant dans le mécanisme mais non dans l'équation-bilan globale.

### 5.3. Approximation de l'état quasi stationnaire (A.E.Q.S.) ou principe de Bodenstein.

Pour l'intermédiaire réactionnel  $I$  très réactif, on peut considérer qu'il disparaît

dès qu'il s'est formé, donc que sa concentration reste constante :  $\frac{d[I]}{dt} = 0$

### 5.4. Différents types de mécanismes

- Mécanisme en séquence ouverte (réaction par stades)** : les intermédiaires réactionnels sont consommés au cours d'une autre étape et il n'y a pas régénération des intermédiaires.
- Mécanisme en séquence fermée (réaction en chaîne)** : des intermédiaires sont régénérés, certains processus peuvent alors se répéter un grand nombre de fois.

# THERMODYNAMIQUE DES SYSTEMES CHIMIQUES

## 1. Enthalpie libre

La fonction d'état extensive  $G$ , appelée enthalpie libre, est définie par :

$$G = H - TS$$

Pour un système fermé, sans variation de composition (pas de réaction physico-chimique) et soumis uniquement à des forces pressantes, la variation élémentaire d'enthalpie libre est donnée par :

$$dG = -SdT + Vdp$$

Dans ce cas, l'enthalpie libre ne dépend que des variables intensives  $p$  et  $T$ .

L'entropie et le volume d'un tel système peuvent alors s'exprimer en fonction d'une dérivée partielle de l'enthalpie libre selon :

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad \text{et} \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$$

### Relation de Gibbs-Helmholtz

A partir de la définition de la fonction enthalpie libre,  $G = H - TS$  et de

l'expression  $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ , il résulte que  $H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ , d'où :

$$\frac{H}{T^2} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{G}{T} \right)_p$$

Cette relation est connue sous le nom de **relation de Gibbs-Helmholtz**.

## 2. Potentiel chimique

### 2.1. Définition

On considère désormais un système fermé de composition variable comportant  $p$  constituants. La quantité de matière d'un constituant  $i$  est notée  $n_i$ . L'enthalpie libre du système dépend cette fois des variables  $T, p, n_1, n_2, \dots, n_p$ . Son expression différentielle est la suivante :

$$dG = -SdT + Vdp + \left(\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)_{T,p,n_{i \neq 1}} dn_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial n_2}\right)_{T,p,n_{i \neq 2}} dn_2 + \dots$$

Le potentiel chimique d'un constituant  $i$  est défini par :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_{i \neq i}}$$

L'expression différentielle de l'enthalpie libre est la suivante :

$$dG = VdP - SdT + \sum_i (\mu_i dn_i)$$

A température et pression constantes :  $dG = \sum_i (\mu_i dn_i)$

On montre, à partir des propriétés d'extensivité de  $G$ , que l'expression de l'enthalpie libre en fonction du potentiel chimique, est la suivante :

$$G = \sum_i (\mu_i n_i)$$

### 2.2. Évolution du potentiel chimique en fonction de $p$ et $T$

#### Variation avec la température

Dérivons l'expression du potentiel chimique par rapport à la température  $T$  :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{p,n_{i \neq i}} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_{i \neq i}} = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{T,p,n_{i \neq i}} = \frac{\partial}{\partial n_i} (-S)_{T,p,n_{i \neq i}} = -S_{i,m}$$

Le terme  $S_{i,m}$  représente l'entropie molaire partielle du constituant  $i$  au sein du mélange.

#### Variation avec la pression

Dérivons l'expression du potentiel chimique par rapport à la pression  $p$  :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p}\right)_{T,n_{i \neq i}} = \frac{\partial}{\partial n_i} (V)_{T,p,n_{i \neq i}} = V_{i,m}$$

La variation du potentiel chimique avec la pression est importante pour les gaz et généralement **négligeable** pour les phases **condensées** car  $V_{i,m}(\text{gaz}) \gg V_{i,m}(\text{liq}, \text{sol})$ .

L'expression différentielle du potentiel chimique est alors la suivante :

$$d\mu_i = -S_{i,m}dT + V_{i,m}dp$$

Pour un corps pur (exposant \*) en phase condensée, cette expression s'écrit simplement sous la forme :

$$d\mu^* = -S^*dT + V^*dp$$

### 2.3. Expression du potentiel chimique

#### 2.4. Potentiel chimique d'un gaz parfait pur

Pour un gaz parfait pur,  $\left(\frac{\partial \mu_i^*}{\partial p}\right)_{T,n_{i \neq i}} = V_{i,m}^* = \frac{RT}{p}$ . Par intégration entre la

pression standard de référence  $p^\circ$  et une pression quelconque  $p$ , à température constante  $T$ , il est possible d'établir l'expression du potentiel chimique d'un gaz parfait pur (exposant \*) selon :

$$\mu^* = \underbrace{\mu^*(p=p^\circ)}_{\mu^*} + RT \ln \frac{p}{p^\circ}$$

où  $p^\circ$  est la pression standard de référence  $p^\circ = 1 \text{ bar}$  (exactement) et  $\mu(T, p^\circ) = \mu^\circ(T)$  le potentiel chimique standard du gaz à la température  $T$ .

**Remarque :** Toutes les grandeurs évaluées sous la **pression standard**  $p^\circ = 1 \text{ bar}$  sont appelées grandeurs standard.

### 2.5. Cas d'un mélange idéal

Dans un mélange idéal de gaz parfaits, le potentiel chimique du gaz  $i$  dans le mélange vaut :  $\mu_i(T, p_i) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln\left(\frac{p_i}{p^\circ}\right)$  où  $\mu_i^\circ$  est le potentiel chimique standard du gaz  $i$  et  $p_i$  sa **pression partielle** (correspondant à la pression du gaz s'il était seul dans le volume total offert au mélange).

### 2.6. Solution idéale

Le potentiel chimique des constituants d'une solution idéale est donné par :

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(x_i)$$

où  $x_i$  représente la fraction molaire du composé  $i$  dans le mélange idéal. Rappelons que la fraction molaire d'un corps représente le rapport entre la quantité de matière de ce corps et la quantité de matière totale du mélange :

$$x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$$

### 2.7. Solutions diluées

Dans un mélange liquide de deux composés A et B où A est le solvant et B le soluté, le nombre de moles du composé A étant très grand devant celui de B, le potentiel chimique du composé B s'écrit :

$$\mu_B = \mu_{B,\text{réf}}(T) + RT \ln\left(\frac{[B]}{c^\circ}\right)$$

La grandeur  $\mu_{B,\text{réf}}$  représente le potentiel chimique du composé B dans un état de référence et  $c^\circ$  une concentration de référence prise généralement à 1 mol/L. Dans le cas général on admet que  $\mu_{B,\text{réf}}(T) = \mu_B^\circ(T)$ , d'où :

$$\mu_B = \mu_B^\circ(T) + RT \ln\left(\frac{[B]}{c^\circ}\right)$$

### 2.8. Solutions quelconques

Pour une solution quelconque, le potentiel chimique d'un des constituants est donné par la relation suivante :

$$\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

Cette relation constitue aussi la **relation de définition de l'activité** d'un corps dans une solution. Le rapport  $\gamma_i = \frac{a_i}{x_i}$  est appelé coefficient d'activité du composé  $i$ . Pour un mélange idéal,  $\gamma_i = 1$ , l'activité du constituant  $i$  est égale à sa fraction molaire  $a_i = x_i$ .

**L'activité du solvant vaut 1**

### 2.9. Cas de phases solides

Dans le cadre du programme qui exclut les solutions solides, on admet que :

**L'activité d'un solide vaut 1**

## 3. Grandeurs standard

### 3.1. Grandeurs standard relatives à un constituant

#### États standard

- L'état standard d'un constituant gazeux (pur ou dans un mélange), à la température  $T$ , est l'état (hypothétique) de ce constituant gazeux pur, à la température  $T$  sous la pression standard  $p^\circ = 1$  bar se comportant comme un gaz parfait.
- L'état standard d'un constituant (pur ou dans un mélange), à la température  $T$ , est l'état (hypothétique) de ce constituant pur dans l'état physique du mélange, à la température  $T$  sous la pression standard  $p^\circ = 1$  bar.
- L'état standard d'un soluté en solution, à la température  $T$ , est l'état (hypothétique) de ce constituant à la concentration molaire  $c^\circ = 1$  mol/L, à la température  $T$  sous la pression standard  $p^\circ = 1$  bar et ayant le même comportement qu'en solution infiniment diluée (idéale).

#### Grandeurs molaires standard

Une **grandeur molaire standard** est définie, pour chaque constituant  $i$  d'un mélange, pris dans leur état standard :

- l'enthalpie molaire standard  $H_{i,m}^\circ(T) = \left(\frac{\partial H^\circ}{\partial n_i}\right)_{T, n_{(i \neq j)}}$ , en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ , avec

$$H^\circ(T) = \sum_i n_i H_{i,m}^\circ(T) \text{ enthalpie standard du mélange.}$$

- l'entropie molaire standard  $S_{i,m}^\circ(T) = \left(\frac{\partial S^\circ}{\partial n_i}\right)_{T, n_{(i \neq j)}}$ , en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , avec

$$S^\circ(T) = \sum_i n_i S_{i,m}^\circ(T) \text{ entropie standard du mélange.}$$

- le potentiel chimique standard  $\mu_i^\circ(T) = \left(\frac{\partial G^\circ}{\partial n_i}\right)_{T, n_{(i \neq j)}}$  =  $G_{i,m}^\circ$ , en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,

avec  $G^\circ(T) = \sum_i n_i G_{i,m}^\circ(T)$  enthalpie libre standard.

- la capacité thermique molaire standard à pression constante

$$C_{p,i,m}^\circ = \frac{\partial H_{i,m}^\circ}{\partial T}, \text{ en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

#### Grandeurs standard de réaction

Considérons une réaction chimique dont l'équation bilan s'écrit :  $\sum_i \nu_i B_i = 0$  où

$\nu_i$  représentent un coefficient stoechiométrique **algébrique** de l'équation et  $B_i$  le symbole chimique d'un composé participant à cette réaction.

L'avancement de la réaction est noté  $\xi$ . La quantité de matière du constituant  $i$  vaut  $n_i(\xi) = n_i(0) + \nu_i \xi$ , donc  $\frac{dn_i(\xi)}{d\xi} = \nu_i$ .

L'énergie interne standard de réaction d'une réaction chimique est définie par :

$$\Delta_r U^\circ(T) = \left( \frac{\partial U^\circ}{\partial \xi} \right)_T$$

$$\Delta_r U^\circ(T) = \sum_i \nu_i U_{i,m}^\circ(T)$$

L'énergie interne standard de réaction s'exprime en joules par mole d'avancement.

L'énergie interne standard du système est définie par :  $U^\circ(T) = \sum_i n_i(\xi) U_{i,m}^\circ(T)$

où  $n_i(\xi)$  représente le nombre de mole de chaque constituant  $i$ .

L'enthalpie de réaction d'une réaction chimique est définie par :

$$\Delta_r H^\circ(T) = \left( \frac{\partial H^\circ}{\partial \xi} \right)_T$$

$$\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i H_{i,m}^\circ(T)$$

L'enthalpie standard de réaction s'exprime en joules par mole d'avancement.

L'enthalpie standard du système est définie par :  $H^\circ(T, \xi) = \sum_i n_i(\xi) H_{i,m}^\circ(T)$ .

De même l'entropie standard d'une réaction est définie par :

$$\Delta_r S^\circ(T) = \left( \frac{\partial S^\circ}{\partial \xi} \right)_T$$

$$\Delta_r S^\circ(T) = \sum_i \nu_i S_{i,m}^\circ(T)$$

L'entropie standard de réaction s'exprime en joules par mole d'avancement.

L'entropie standard du système est définie par :  $S^\circ(T, \xi) = \sum_i n_i(\xi) S_{i,m}^\circ(T)$ .

L'enthalpie libre standard d'une réaction chimique est définie par :

$$\Delta_r G^\circ(T) = \left( \frac{\partial G^\circ}{\partial \xi} \right)_T$$

$$\Delta_r G^\circ(T) = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ(T)$$

L'enthalpie libre standard de réaction s'exprime en joules par mole d'avancement. L'enthalpie libre standard du système est définie par :

$$G^\circ(T, \xi) = \sum_i n_i(\xi) G_{i,m}^\circ(T)$$

Remarquons que :  $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T) - T \Delta_r S^\circ(T)$ .

**Les grandeurs standard de réaction ne dépendent que de la température**

**Relation entre enthalpie standard et énergie interne standard de réaction**

On montre, que dans un large domaine de température, la relation suivante est vérifiée :

$$\Delta_r H^\circ - \Delta_r U^\circ = \left( \sum_i \nu_{i,\text{gaz}} \right) RT$$

Où  $\sum_i \nu_{i,\text{gaz}}$  représente la variation du nombre de moles de gaz supposé parfait dans l'équation chimique considérée.

**Grandeurs standard de formation**

La **réaction standard de formation** d'une espèce chimique, à la température  $T$ , est la réaction au cours de laquelle **une mole** de cette espèce est formée, dans son **état standard de référence**, à partir des **corps purs simples** (pris dans leur état standard de référence) qui la constitue.

La variation d'enthalpie (ou d'entropie) correspondant à cette réaction particulière porte le nom d'enthalpie (respectivement entropie) de **formation** de l'espèce chimique considérée, on la note  $\Delta_f H^\circ(T)$  (respectivement  $\Delta_f S^\circ(T)$ ).

Par **convention**, l'enthalpie molaire standard de formation d'un **corps pur simple**, pris dans son état standard de référence, est **nulle**.

**Conséquence**

L'enthalpie standard (et l'entropie standard) de toute réaction chimique est égale à la combinaison linéaire des enthalpies standard de formation (respectivement des entropies standard de formation) de chaque composé affecté de son coefficient stœchiométrique **algébrique**.

$$\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ(T)$$

$$\Delta_r S^\circ(T) = \sum_i \nu_i \Delta_f S_i^\circ(T)$$

Cette loi est connue sous le nom de **loi de Hess**.

Comme pour l'enthalpie standard de formation, l'enthalpie libre standard de formation d'une espèce correspond à l'enthalpie libre standard de la réaction de formation de l'espèce considérée. On la note  $\Delta_f G^\circ(T)$ .

### 3.2. Grandeurs de réaction

À la température  $T$  et sous la pression  $p$ , l'enthalpie du système est définie par :

$H(T, p, \xi) = \sum_i n_i(\xi) H_{i,m}(T, p)$  où  $n_i(\xi)$  représente la quantité de matière de chaque constituant  $i$  en fonction de l'avancement de la réaction.

À la température  $T$  et sous la pression  $p$ , l'enthalpie de réaction d'une réaction chimique est définie par :

$$\Delta_r H(T, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

$$\Delta_r H(T, p) = \sum_i \nu_i H_{i,m}(T, p)$$

L'enthalpie de réaction s'exprime en joules par mole d'avancement.

L'enthalpie de réaction est **indépendante** de l'avancement  $\xi$ .

L'enthalpie du système est une fonction affine de l'avancement :

$$H(T, p, \xi) = \Delta_r H(T, p) \xi + H(T, p, \xi = 0)$$

A la température  $T$  et sous la pression  $p$ , l'entropie de la réaction est définie par :

$$\Delta_r S(T, p, \xi) = \left( \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)_{T, p}$$

$$\Delta_r S(T, p, \xi) = \sum_i \nu_i S_{i,m}(T, p, \xi)$$

L'entropie standard de réaction s'exprime en joules par kelvin par **mole d'avancement**.

L'entropie standard du système est définie par :  $S(T, p, \xi) = \sum_i n_i(\xi) S_{i,m}(T, p, \xi)$ .

A la température  $T$  et sous la pression  $p$ , l'enthalpie libre de la réaction chimique est définie par :

$$\Delta_r G(T, p, \xi) = \left( \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T, p}$$

$$\Delta_r G(T, p, \xi) = \sum_i \nu_i \mu_i(T, p, \xi)$$

L'enthalpie libre de réaction s'exprime en joules par **mole d'avancement**.

L'enthalpie libre du système est définie par :  $G(T, p, \xi) = \sum_i n_i(\xi) G_{i,m}(T, p, \xi)$ .

Remarquons que :  $\Delta_r G(T, p, \xi) = \Delta_r H(T, p) - T \Delta_r S(T, p, \xi)$

L'entropie de réaction et l'enthalpie libre de réaction **dependent** de l'avancement de la réaction.

### 3.3. Influence de la température

*Variation des grandeurs standard de réaction avec la température*

**Cas de l'enthalpie**

Il est possible de déterminer l'enthalpie standard de réaction à n'importe quelle température par :

$$\Delta_r H(T_2) = \Delta_r H(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \Delta_r C_{p,m} dT$$

Avec  $\Delta_r C_{p,m} = \sum_i \nu_i C_{p,i,m}$ .

**Cas de l'entropie**

De même, il est possible de calculer l'entropie standard de réaction à n'importe quelle température par :

$$\Delta_r S(T_2) = \Delta_r S(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \Delta_r C_{p,m} \frac{dT}{T}$$

Ces lois sont connues sous le nom de lois de Kirchhoff.

## 4. Affinité chimique ; évolution et équilibre chimique

### 4.1. Affinité chimique

**Définition**

L'affinité chimique est définie par

$$A(T, p, \xi) = -\Delta_r G(T, p, \xi)$$

L'affinité chimique **standard** est définie par :

$$A^0(T) = -\Delta_r G^0(T) = -\sum_i \nu_i \mu_i^0(T)$$

L'affinité chimique s'exprime, comme l'enthalpie libre standard de réaction, en  $J \cdot \text{mol}^{-1}$  (mole d'avancement).

### 4.2. Critère thermodynamique d'évolution spontanée

A partir de l'expression différentielle de l'enthalpie libre  $dG$ , du premier et du second principe, on montre que :  $\Delta_r G d\xi = -T \delta S_p$  où  $\delta S_p$  représente l'entropie produite au cours de l'avancement élémentaire  $d\xi$  de la réaction. Cette relation se traduit par :

$$-\Delta_r G d\xi = A d\xi = T \delta S_p$$

**Évolution spontanée :**

Un système évolue, conformément au **second principe** de la thermodynamique, de sorte que la création d'entropie est positive :

$$A d\xi > 0$$

- si  $A > 0$  alors  $d\xi > 0$  l'évolution est telle qu'elle favorise la formation des produits et la consommation des réactifs.
- si  $A < 0$  alors  $d\xi < 0$  l'évolution est telle qu'elle favorise la disparition des produits et la production des réactifs.

**Condition d'équilibre**

Si le système est en **équilibre** alors  $\delta S_p = 0$ .

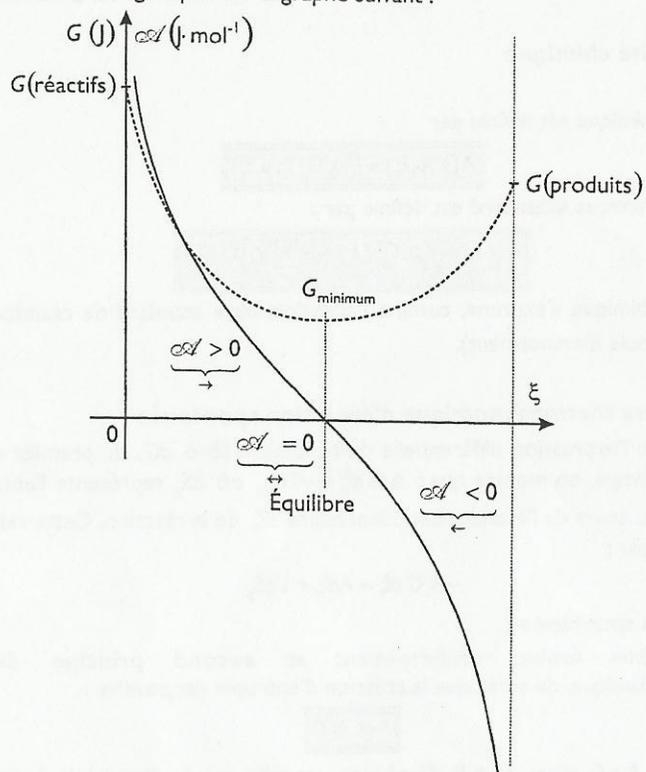
La condition d'équilibre chimique se traduit par :

$$\Delta_r G = 0$$

$$A = 0$$

L'enthalpie libre est **minimale**, l'**affinité chimique** est nulle.

Ces résultats sont regroupés sur le graphe suivant :



## 5. Expression de l'affinité chimique, de l'enthalpie libre de réaction et de la constante d'équilibre

### 5.1. Constante d'équilibre standard

A température et pression constantes, la constante d'équilibre standard d'une réaction chimique est définie par :

$$A^\circ(T) = -\Delta_r G^\circ(T) = RT \ln(K^\circ(T))$$

Pour une réaction donnée cette constante ne dépend que de la

température :  $K^\circ(T) = \exp\left(\frac{A^\circ(T)}{RT}\right) = \exp\left(\frac{-\Delta_r G^\circ(T)}{RT}\right)$ .

### 5.2. Expression de l'enthalpie libre de réaction et de l'affinité

A partir de l'expression du potentiel chimique  $\mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$  et de celle

de l'enthalpie libre de réaction  $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$ , on établit la relation suivante :

$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ + RT \sum_i \ln a_i^{\nu_i} = \Delta_r G^\circ + RT \ln \prod_i a_i^{\nu_i} = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q$$

avec  $Q = \prod_i a_i^{\nu_i}$  appelé quotient de réaction.

En tenant compte de la définition de la constante d'équilibre, l'affinité chimique et l'enthalpie libre de réaction s'écrivent :

$$-\Delta_r G(T, p, \xi) = A(T, p, \xi) = A^\circ(T) - RT \ln(Q) = RT \ln\left(\frac{K^\circ}{Q}\right)$$

L'affinité chimique est la somme d'un terme ne dépendant que de la température (ici  $A^\circ$ ) et d'un terme faisant intervenir le quotient de réaction ( $RT \ln(Q)$ ) qui évolue en fonction de l'avancement.

### 5.3. Équilibre, relation de Guldberg et Waage

La condition d'équilibre pour une réaction chimique se traduit par :

$$\Delta_r G(T, p, \xi) = -A(T, p, \xi) = \sum_i \nu_i \mu_i(T, p, \xi) = RT \ln\left(\frac{K^\circ}{Q_{\text{eq}}}\right) = 0$$

Cette relation se traduit par :

$$Q_{\text{eq}} = K^\circ = \prod_i a_{i,\text{eq}}^{\nu_i}$$

Ceci est la loi d'action des masses ou relation de Guldberg et Waage.

### 5.4. Relation de Van't Hoff

La relation de Gibbs-Helmholtz appliquée aux équilibre chimiques, s'écrit :

$$-\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2} = \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^\circ}{T} \right)$$

Elle conduit à la relation suivante :

$$\frac{d(\ln K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ(T)}{RT^2}$$

Cette relation est connue sous le nom de relation de Van't Hoff.

### 5.5. Lois de déplacement des équilibres

#### Notion de variance

La variance  $v$  d'un système est le nombre nécessaire et suffisant de paramètres intensifs (concentrations, pressions partielles, température,...) permettant de déterminer l'état du système sans en changer la nature. Il est possible de calculer cette variance par :  $v = c + 2 - \phi$ , où :

- $c$  représente le nombre de constituants indépendants, c'est-à-dire le nombre  $n$  de constituants chimiques du système diminué du nombre  $r$  de relations linéairement indépendantes reliant ces composés :  $c = n - r$ .
- Le nombre 2 « représente » la température et la pression.
- Le terme  $\phi$  « représente » le nombre de phases.

#### Déplacement et rupture d'équilibre

S'il y a un seul paramètre intensif indépendant (équilibre univariant  $v=1$ ), la modification d'un paramètre entraîne une rupture d'équilibre, c'est-à-dire la

disparition d'un constituant ou d'une phase, le système évolue vers un système physico-chimique différent.

Si le nombre de paramètres intensifs est supérieur ou égal à deux, la modification d'un paramètre permet un déplacement d'équilibre, c'est à dire une modification de la composition du système, le système évolue vers un nouvel état d'équilibre du même système physico-chimique.

**Lois de déplacement des équilibres**

Le système étudié est en équilibre et associé à la réaction chimique d'équation bilan  $\sum_i \nu_i B_i = 0$ . Celui-ci est perturbé par la modification d'un paramètre et évolue vers un nouvel état d'équilibre.

**Influence de la température à pression constante (loi de Van't Hoff)**

Seule la température imposée au système varie de  $dT$  (par exemple  $dT > 0$ ). Il faut alors exploiter la relation de Van't Hoff :

$$\frac{d(\ln K^*)}{dT} = \frac{\Delta_r H^*(T)}{RT^2} \text{ ou encore } d(\ln K^*) = \frac{\Delta_r H^*(T)}{RT^2} dT$$

le signe de la dérivée de la fonction  $\ln K^*$  et donc le sens de déplacement de l'équilibre dépend de celui de  $\Delta_r H^*$ . Trois cas peuvent se présenter ( $dT > 0$ ) :

- Si  $\Delta_r H^* > 0$  (réaction endothermique) lors d'une augmentation de température ( $K^* \nearrow$ ), le système évolue vers la formation des produits (ce qui correspond au sens endothermique).
- Si  $\Delta_r H^* < 0$  (réaction exothermique) lors d'une augmentation de température ( $K^* \searrow$ ), le système évolue vers la formation des réactifs (ce qui correspond au sens endothermique).

Dans ces deux cas, l'évolution du système s'oppose à la perturbation imposée, le sens endothermique tendant à limiter l'augmentation de température.

- Si  $\Delta_r H^* = 0$  (réaction athermique, cas rare) le système n'évolue pas sous l'effet du changement de température. Celle-ci n'est pas facteur d'équilibre.

**Influence de la pression à température constante (loi de Le Chatelier)**

L'affinité chimique du système s'écrit :

$$A = A^*(T) - RT \ln(Q) = RT \ln\left(\frac{K^*}{Q}\right)$$

La température étant fixée,  $K^*$  est fixée, seul  $Q$  varie et le signe de l'affinité se déduit de celui de  $\ln\left(\frac{K^*}{Q}\right)$ . Il suffit donc d'évaluer  $Q$  par rapport à  $K^*$ , ou

encore d'étudier le signe de  $d\left[\ln\left(\frac{K^*}{Q}\right)\right] = -\frac{dQ}{Q}$ , ou encore :

$$dA = -RT \left(\frac{dQ}{Q}\right)$$

Écrivons le quotient de réaction sous la forme suivante :

$$Q = \prod_i a_i^{\nu_i} = \prod_j a_j^{\nu_j} \prod_k a_k^{\nu_k} = \prod_j a_j^{\nu_j} \prod_k \left[ x_k^{\nu_k} \left(\frac{p}{p^0}\right)^{\Delta_r \nu(\text{gaz})} \right]$$

espèces condensées
espèces gazeuses
espèces condensées
espèces gazeuses

puisque l'activité d'un gaz supposé parfait s'écrit :  $a_k = x_k \frac{p}{p^0}$  où  $p$  est la pression totale du système.

Seule la pression exercée sur le système varie de  $dp$  (par exemple  $dp > 0$ ) Trois cas peuvent se présenter :

- Si  $\sum_i \Delta_r \nu(\text{gaz}) > 0$  alors  $dA < 0$ , le système évolue vers la formation des réactifs il y aura alors diminution du nombre de moles gazeuses, la pression aura tendance à baisser.
- Si  $\sum_i \Delta_r \nu(\text{gaz}) < 0$  alors  $dA > 0$  le système évolue vers la formation des produits, il y aura encore diminution du nombre de moles de gaz, la pression aura encore tendance à diminuer.

Dans ces deux premiers cas, l'évolution du système s'oppose à la perturbation imposée (loi de Le Chatelier).

- Si  $\sum_i \Delta_r \nu(\text{gaz}) = 0$  alors  $dA = 0$  le système n'évolue pas, la pression n'est pas facteur d'équilibre.

## RÉACTIONS EN SOLUTION AQUEUSE

### I. Équilibres acido-basiques

**Acide, base au sens de Brønsted :**

- un acide est une espèce moléculaire ou ionique susceptible de donner un proton  $H^+$  ou de provoquer la libération d'un proton du solvant
- une base est une espèce moléculaire ou ionique susceptible de capter un proton  $H^+$

**pH d'une solution :**  $pH = -\log(a_{H^+})$

**Activité des protons :**  $a_{H^+} = \frac{[H_3O^+]}{c_0}$ ,  $c_0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$

**Constante d'acidité du couple AH/A<sup>-</sup> :**  $AH + H_2O = A^- + H_3O^+$

$$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$$

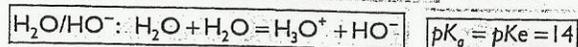
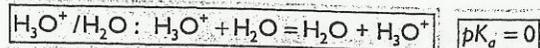
$$pK_a = -\log(K_a)$$

**Autoprotolyse de l'eau :**  $2H_2O = H_3O^+ + HO^-$

Produit ionique de l'eau :  $K_w = [H_3O^+][HO^-]$

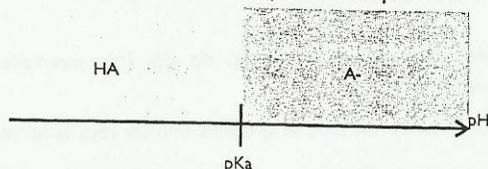
A 25°C,  $K_w = 1.0 \times 10^{-14}$  et  $pK_w = -\log(K_w) = 14$

- Couples de l'eau :



Dans l'eau,  $\text{H}_3\text{O}^+$  est l'acide le plus fort,  $\text{HO}^-$  est la base la plus forte.

- Diagramme de prédominance pour le couple HA/A<sup>-</sup>



## 2. Complexes de coordination

- Un complexe est un édifice polyatomique constitué d'un atome ou d'un cation central (noté M) auquel sont liés des molécules ou des ions appelés ligands (notés L).

- Constante de formation globale :  $\text{M} + n\text{L} = \text{ML}_n$

$$\beta_n = \frac{[\text{ML}_n]}{[\text{M}][\text{L}]^n}$$

- Constante de dissociation globale :  $\text{ML}_n = \text{M} + n\text{L}$

$$\frac{1}{\beta_n} = \frac{[\text{M}][\text{L}]^n}{[\text{ML}_n]}$$

- Constantes de formation successives :  $\text{ML}_{i-1} + \text{L} = \text{ML}_i$

$$K_i = \frac{[\text{ML}_i]}{[\text{ML}_{i-1}][\text{L}]}$$

- Constantes de dissociation successives :  $\text{ML}_i = \text{ML}_{i-1} + \text{L}$

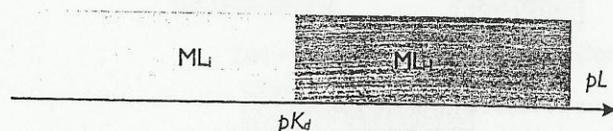
$$K_{di} = \frac{[\text{ML}_{i-1}][\text{L}]}{[\text{ML}_i]} = \frac{1}{K_i}$$

- Relations entre les constantes :

$$\beta_n = \prod_{i=1}^n K_i$$

$$pK_{dn} = \log \beta_n - \log \beta_{n-1}$$

- Diagramme de prédominance du complexe ML<sub>n</sub> :



## 3. Précipités

- Produit de solubilité :  $A_p B_q(\text{solide}) = p A_{(\text{aq})}^{q+} + q B_{(\text{aq})}^{p-}$

Solution saturée (le solide se dissout partiellement) :

$$K_s = [A^{q+}]^p [B^{p-}]^q$$

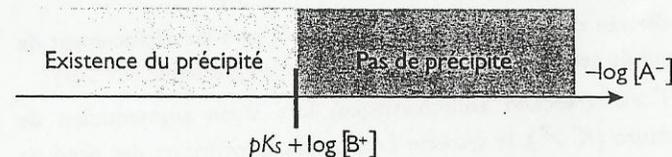
On définit :  $pK_s = -\log(K_s)$

Solution insaturée (tout le solide s'est dissout) :

$$K_s > [A^{q+}]^p [B^{p-}]^q$$

- Solubilité : quantité maximale de matière (en moles ou en grammes) de produit que l'on peut dissoudre dans un litre d'une solution donnée.

- Diagramme d'existence du précipité AB (pour  $p = q = 1$ )



## REACTIONS D'OXYDOREDUCTION

### I. Réactions d'oxydoréduction

Définitions :

- un réducteur est une espèce capable de céder un ou plusieurs électrons,
- un oxydant est une espèce capable de capter un ou plusieurs électrons.

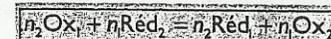
On définit ainsi le **couple oxydant-réducteur** (anciennement appelé « couple rédox ») qui se compose de l'oxydant et du réducteur conjugué (l'oxydant réduit). On le note sous la forme : **oxydant/réducteur** abrégé pour la suite en *ox/red*.

Les réactions d'oxydoréduction se présentent comme un processus de transfert électronique. La réaction se produit nécessairement entre deux couples rédox.

Un oxydant Ox<sub>1</sub> reçoit des électrons et devient un réducteur Réd<sub>1</sub> et un réducteur Réd<sub>2</sub> cède des électrons et devient un oxydant, Ox<sub>2</sub>.

**Demi-équation électronique (1)**  $(\text{Ox}_1 + n_1 e^- = \text{Réd}_1) \times n_2$

**Demi-équation électronique (2)**  $(\text{Réd}_2 = \text{Ox}_2 + n_2 e^-) \times n_1$



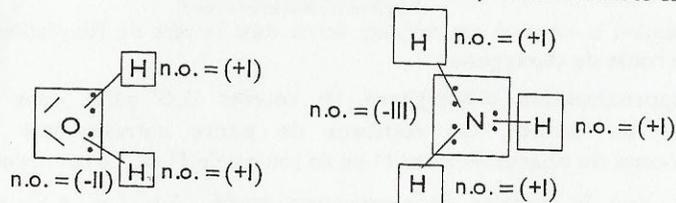
## 2. Nombre d'oxydation

Le nombre d'oxydation, n.o., caractérise l'état d'oxydation d'un élément dans un ion ou une molécule. Le **nombre d'oxydation** est un **entier** s'écrivant entre parenthèses, en chiffres romains. Les règles sont les suivantes :

• Dans un ion monoatomique, le nombre d'oxydation est le nombre de charge algébrique :  $\text{Na}^+$  (I),  $\text{Mg}^{2+}$  (II),  $\text{Al}^{3+}$  (III),  $\text{Cl}^-$  (-I),  $\text{S}^{2-}$  (-II).

• Dans une molécule, on attribue pour chaque liaison, le doublet électronique à l'élément le plus électronégatif. Le nombre d'oxydation de l'élément est alors égal à la somme des nombres de charge fictive de cet élément.

Pour déterminer le nombre d'oxydation, il faut écrire la structure de Lewis, attribuer le doublet à l'élément le plus électronégatif puis compter le nombre de charges. Dans l'eau, le nombre d'oxydation de l'oxygène est (-II) et celui de l'hydrogène est (+I), dans l'ammoniac, le nombre d'oxydation de l'azote est (-III).



Généralement, dans une molécule ou un ion, l'**hydrogène** H est au nombre d'oxydation ( ) (sauf dans les hydrures et  $\text{H}_2$ ) et l'**oxygène** O au nombre d'oxydation ( ) (sauf dans les peroxydes et  $\text{O}_2$ ).

## 3. Piles électrochimiques

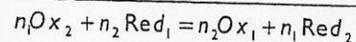
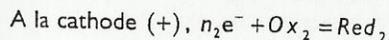
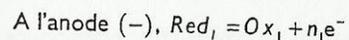
### 3.1. Anode / Cathode :

- Une électrode siège d'une **oxydation** est appelée **anode**
- Une électrode siège d'une **réduction** est appelée **cathode**

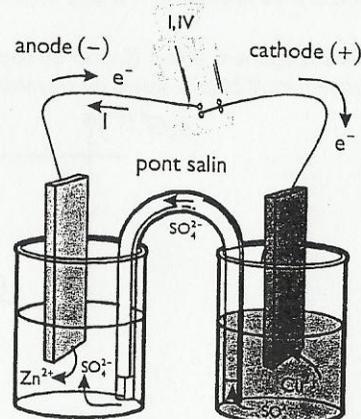
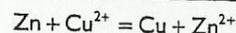
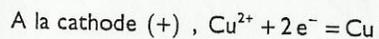
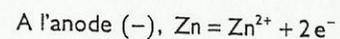
Moyen mnémotechnique : « règle du chat rouge = RED CAT »

### 3.2. Pile électrochimique :

La réaction est :



Exemple : La pile Daniell :



## 4. Formule de Nernst

### 4.1. Force électromotrice

La force électromotrice (f.e.m.) d'une pile est la différence de potentiel entre la cathode et l'anode.

### 4.2. Potentiel de Nernst

A un couple rédox,  $\text{Ox}/\text{Red}$  de demi-réaction électronique  $p\text{Ox} + q\text{H}^+ + n e^- = r\text{Red}$ , est associé un potentiel d'oxydoréduction ou potentiel d'électrode. Celui-ci est donné par la formule de Nernst :

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{RT}{nF} \ln \frac{(a_{\text{Ox}})^p [\text{H}^+]^q}{(a_{\text{Red}})^r}$$

Où :  $a_{\text{Ox}}$  et  $a_{\text{Red}}$  sont les activités de l'oxydant et réducteur,

$R$  est la constante des gaz parfaits,  $T$  la température absolue et  $F$  la constante de Faraday ( $F \approx 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

A  $25^\circ\text{C}$ , l'expression se simplifie en

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0,06}{n} \ln \frac{(a_{\text{Ox}})^p [\text{H}^+]^q}{(a_{\text{Red}})^r}$$

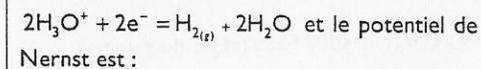
Par définition,  $E^\circ(\text{Ox}/\text{Red})$  est la valeur du potentiel rédox lorsque l'oxydant et le réducteur ont leur activité égale à 1. C'est le potentiel d'électrode standard du couple d'oxydoréduction,  $\text{Ox}/\text{Red}$  à la température  $T$  considérée.

### 4.3. Electrodes de référence

Comme nous ne pouvons mesurer que des différences de potentiel, le potentiel d'une électrode est défini par rapport à un potentiel de référence.

#### Electrode Standard à Hydrogène

Une électrode de platine plonge dans une solution d'acide. Cette électrode est placée à l'intérieur d'un tube de verre dans lequel arrive un courant de dihydrogène gazeux sous une pression connue. La réaction rédox se produisant peut s'écrire :

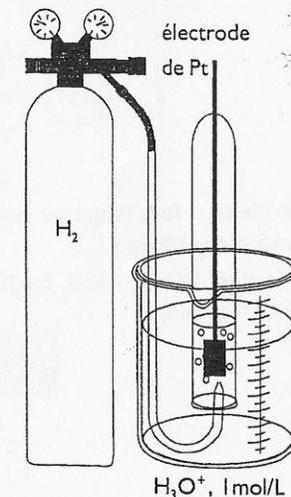


$$E = E^\circ(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2) + 0,03 \cdot \log \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]/C^\circ}{P_{\text{H}_2}/P^\circ} \right)$$

avec  $C^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ .

L'électrode standard à hydrogène, notée E.S.H., correspond à  $\text{pH} = 0$  et  $P(\text{H}_2) = 1 \text{ bar}$ . Par convention, le potentiel de cette électrode est nul à toute température.

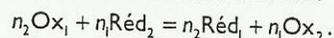
En pratique, cette électrode est très peu utilisée car peu commode à manipuler. On utilise des électrodes secondaires comme celle au calomel saturée en KCl. Son potentiel vaut  $E = 0,246 \text{ V}$  à  $25^\circ\text{C}$ .



## 5. Classification rédox – Règle du gamma

### 5.1. Relation entre l'affinité et les potentiels de Nernst

Soit la pile dont l'équation bilan de fonctionnement est :

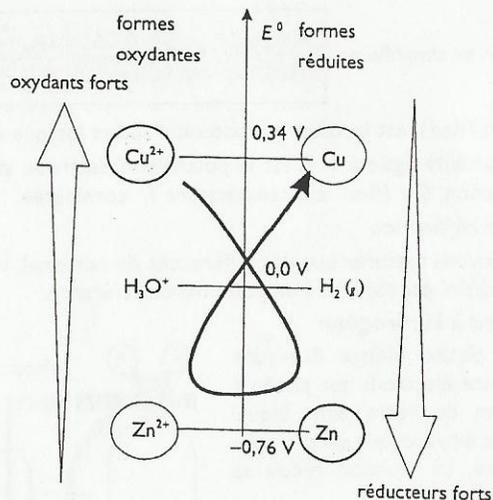


Si cette pile est en circuit ouvert, alors l'affinité de la réaction est :

$$A(T) = n_1 n_2 F (E_1 - E_2)$$

- si  $E_1 > E_2$ ,  $A > 0$  et la réaction se fait dans le sens de réduction de l'oxydant le plus fort ( $\text{Ox}_1$ )
- Si  $E_1 = E_2$ ,  $A = 0$  et il y a équilibre chimique
- Si  $E_1 < E_2$ ,  $A < 0$  et la réaction se fait dans l'autre sens.

### 5.2. Règle du « gamma »



L'oxydant le plus fort réagit sur le réducteur le plus fort (règle du gamma)

**Constante d'équilibre :**

Pour la réaction  $n_2 \text{Ox}_1 + n_1 \text{Ré}_2 = n_2 \text{Ré}_1 + n_1 \text{Ox}_2$  on montre que la constante de la réaction est égale à :

$$K = 10^{\frac{0,06}{n} (E_1 - E_2)}$$

## OXYDO-REDUCTION EN PHASE « SECHE » DIAGRAMMES D'ELLINGHAM

A partir d'un minerai naturel (très souvent une forme oxydée d'un élément), on aimerait obtenir un métal, il faut donc savoir quel réducteur utiliser et dans quelles conditions. Les diagrammes d'Ellingham permettent de répondre à la question lorsque la réduction se fait en phase « sèche ».

### I. Construction du diagramme d'Ellingham

Considérons un couple oxydant réducteur  $\text{M}_x\text{O}_y/\text{M}$ . L'équation bilan de la

réaction formation d'un oxyde est  $\frac{2x}{y} \text{M} + \text{O}_{2(g)} = \frac{2}{y} \text{M}_x\text{O}_y$ .

Par convention la réaction est toujours écrite dans le sens de l'oxydation et pour une mole de dioxygène.

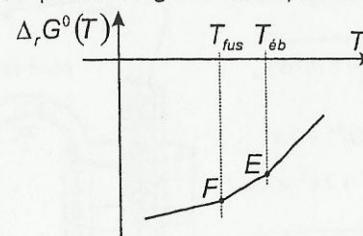
Dans l'approximation d'Ellingham, les courbes  $\Delta_r G^\circ = f(T)$  sont des segments de droites. Les ruptures de pente correspondent aux changements de phases du métal M ou de son oxyde  $\text{M}_x\text{O}_y$ , ce qui revient à dire que, dans le domaine de température étudié,  $\Delta_r H^\circ$  et  $\Delta_r S^\circ$  sont indépendants de la température :  $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ(298) - T \Delta_r S^\circ(298)$ .

Le signe de la pente dépend du signe de  $\Delta_r S^\circ(298)$ . Comme l'entropie est une « mesure de désordre », l'entropie de réaction est négative s'il y a diminution de la quantité de matière gazeuse et positive s'il y a augmentation de la quantité de matière gazeuse. Pour un métal et son oxyde à l'état solide, la pente est donc positive.

Pour le couple,  $\text{CO}_{(g)}/\text{C}_{(s)}$ , la réaction d'oxydation est  $2\text{C}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = 2\text{CO}_{(g)}$  et la pente est négative.

Lors du changement d'état (fusion F ou vaporisation E) du métal à la température de changement d'état la pente du segment correspondant est plus forte.

Lors du changement d'état (fusion ou vaporisation) de l'oxyde à la température de changement d'état, la pente du segment correspondant est plus faible.



## 2. Domaines d'existence et de stabilité

### 2.1. Cas d'un métal et son oxyde à l'état liquide ou solide

L'affinité de la réaction s'écrit  $A = -\Delta_r G = -\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{p^\circ} \right)$ .

$$A = RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_{O_2}^{eq}} \right)$$

Les points du plan, situés au-dessus de la courbe correspondent à  $P_{O_2} > (P_{O_2})_{eq}$  soit  $A > 0$  : le système tend à évoluer vers la formation de l'oxyde.

Si à une température donnée, la pression en dioxygène est maintenue constante, le système évolue jusqu'à la disparition totale du métal. Le demi espace au-dessus de la courbe constitue le **domaine d'existence de l'oxyde**  $M_xO_y$ .

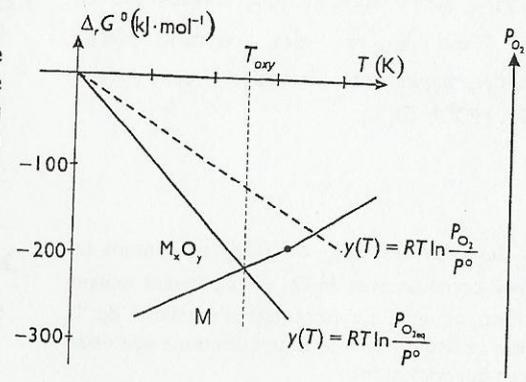
Le dioxygène est le seul produit gazeux :

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln(K^\circ) = RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{p^\circ} \right)_{eq}$$

On trace la droite définie par  $y(T) = RT \ln \frac{P_{O_2}}{p^\circ}$ .

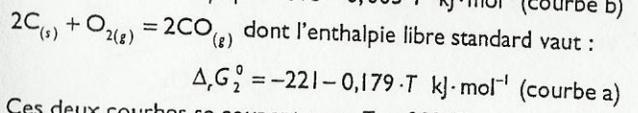
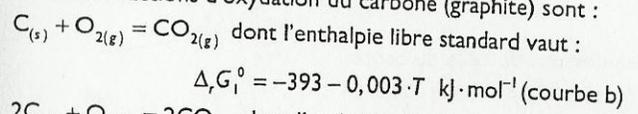
Pour une pression  $P_{O_2}$  fixée, la température d'équilibre est obtenue par intersection du diagramme d'Ellingham et de la droite

$$y = RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{p^\circ} \right)$$



### 2.2. Cas du carbone

Les deux réactions d'oxydation du carbone (graphite) sont :

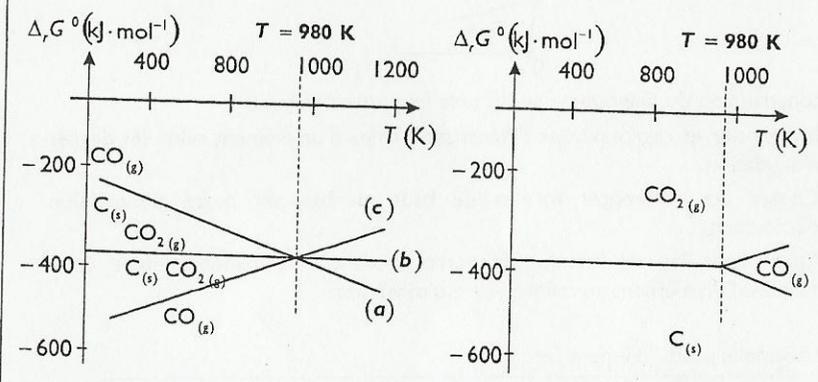


Ces deux courbes se coupent pour  $T = 980 \text{ K}$ .

Nous pouvons considérer une troisième réaction  $2CO_{(g)} + O_{2(g)} = 2CO_{2(g)}$  dont l'enthalpie libre standard est une combinaison linéaire des deux précédentes :

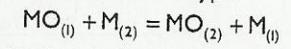
$$\Delta_r G_3^\circ = 2\Delta_r G_1^\circ - \Delta_r G_2^\circ = -565 + 0,179 \cdot T \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ (courbe c)}$$

Le diagramme montre que pour  $T < 980 \text{ K}$ , les domaines de stabilité de  $CO_{(g)}$  sont disjoints. Le monoxyde de carbone n'est pas stable. Il se dismute selon  $2CO_{(g)} = CO_{2(g)} + C_{(s)}$  (équilibre de Boudouard). Nous ne devons considérer que l'équilibre  $C_{(s)} + O_{2(g)} = CO_{2(g)}$ . Pour  $T > 980 \text{ K}$ , le domaine de stabilité CO est par contre limité par deux demi droites, d'où le diagramme ci-dessous.



### 2.3. Exploitation - Prédiction de réactions

Comment prévoir le sens d'une réaction de type :



Cette réaction est la combinaison linéaire des réactions :

$$\begin{cases} 2M_{(1)} + O_2 = 2MO_{(1)} & \Delta_r G_1^\circ \\ 2M_{(2)} + O_2 = 2MO_{(2)} & \Delta_r G_2^\circ \end{cases} \text{ donc } \Delta_r G^\circ = \frac{\Delta_r G_2^\circ - \Delta_r G_1^\circ}{2}$$

La connaissance du diagramme d'Ellingham permet pour chaque température de connaître le signe de  $\Delta_r G^\circ$ .

Dans le cas le plus fréquent, l'affinité de la réaction est  $A = -\Delta_r G = -\Delta_r G^\circ$ .

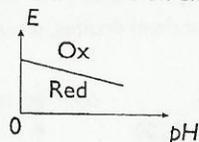
- si  $A > 0$ ,  $\Delta_r G^\circ < 0$ , alors la réaction évolue vers la formation des produits  $M_{(1)}$  et  $MO_{(2)}$  jusqu'à la disparition de l'un des réactifs.
- si  $A < 0$ ,  $\Delta_r G^\circ > 0$  alors la réaction évolue vers la formation des réactifs  $M_{(2)}$  et  $MO_{(1)}$ , jusqu'à la disparition de l'un des produits.

## DIAGRAMMES E-PH ET CORROSION

### 1. Elaboration d'un diagramme potentiel-pH

Le diagramme potentiel-pH permet la représentation dans le plan (E-pH) des domaines de prédominance/existence des différentes formes d'un élément en fonction du potentiel E (mesuré par rapport à l'électrode standard à hydrogène) et du pH. Les domaines sont séparés par des segments de droites.

D'après la relation de Nernst, la forme oxydante d'un couple prédomine pour les valeurs élevées du potentiel. Ainsi aura-t-on en général :



La construction du diagramme se déroule en plusieurs étapes :

- Inventorier et regrouper les différentes formes d'un élément selon les degrés d'oxydation.
- Classer les différentes formes de haut en bas par degré d'oxydation décroissant.
- Déterminer les valeurs du pH correspondant à la frontière entre deux formes d'un élément au même degré d'oxydation.

Par exemple, pour l'élément fer :

nombre d'oxydation	pH <sub>1</sub>	pH <sub>2</sub>
III	Fe <sup>3+</sup> <sub>aq</sub>	Fe(OH) <sub>3(s)</sub>
II	Fe <sup>2+</sup> <sub>aq</sub>	Fe(OH) <sub>2(s)</sub>
0	Fe <sub>(s)</sub>	

Pour des hydroxydes solides de formule M(OH)<sub>p(s)</sub>, la valeur du pH = pH<sub>1</sub> à partir de laquelle la forme solide existe se détermine grâce à l'expression de la constante de solubilité  $K_s = [\text{OH}^-]^p [\text{M}^{p+}]$ .

Dans le plan (E-pH), la limite du domaine d'existence de la forme solide est

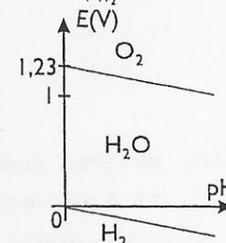
donc une droite verticale d'équation  $x = \text{pH}_1 = \text{p}K_s - \frac{\text{p}K_s + \log [\text{M}^{p+}]}{p}$  avec

$[\text{M}^{p+}] = \text{constante}$ .

### 2. Exploitation du diagramme

#### 2.1. Diagramme potentiel-pH de l'eau

$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$  ;  $E^\circ(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = 0,00 \text{ V}$  ;  $p_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar}$  ;  $p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar}$ .

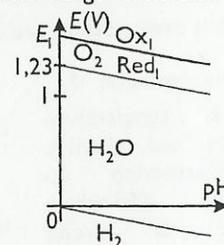


Le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau (H<sub>2</sub>O) est situé dans la zone délimitée par l'inégalité  $-0,06 \text{ pH} < E < 1,23 - 0,06 \text{ pH}$ .

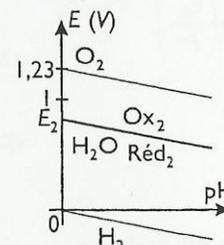
#### 2.2. Stabilité des solutions aqueuses

Pour les réactions se déroulant en milieu aqueux, il est indispensable d'examiner l'action oxydante ou réductrice de l'eau sur les différentes espèces. Deux espèces, dont des domaines sont disjoints, réagissent. Afin de connaître la stabilité d'un élément (Ox/Red), le diagramme potentiel-pH de l'eau sera superposé à celui de l'élément étudié. Il convient alors d'envisager trois cas :

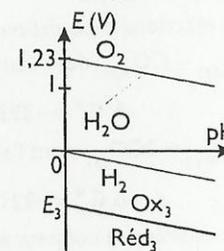
Si la frontière E<sub>1</sub> est au-dessus de celle du couple O<sub>2(g)</sub>/H<sub>2</sub>O alors l'oxydant Ox<sub>1</sub> oxyde l'eau en O<sub>2(g)</sub>. C'est le cas des oxydants forts, thermodynamiquement instables dans l'eau (MnO<sub>4</sub><sup>-</sup>, HOCl, Cl<sub>2</sub>...).



Si les deux formes Ox<sub>2</sub> ou Red<sub>2</sub> présentent un domaine commun avec H<sub>2</sub>O, elles peuvent exister en milieu aqueux. Le potentiel d'équilibre de la solution se situera dans la zone commune aux deux espèces qui coexistent.



Si la frontière E<sub>3</sub> est en dessous de celle du couple H<sub>2</sub>O/H<sub>2</sub> alors le réducteur Red<sub>3</sub> réduit l'eau en dihydrogène H<sub>2(g)</sub>. C'est le cas des réducteurs forts (Fe, Na, ...).



Les diagrammes E-pH permettent de savoir si une réaction est thermodynamiquement possible mais ne nous renseignent pas sur la cinétique de cette réaction.

## Phénomènes de corrosion

### 3. Présentation des courbes intensité-potentiel

Les courbes intensité-potentiel traduisent l'aspect cinétique d'une réaction.

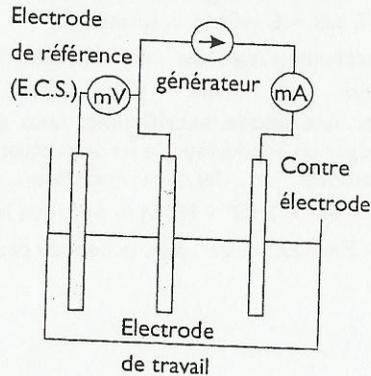
Dans une solution on plonge une électrode, l'électrode de travail (E.T) qui peut être cathode ou anode suivant l'expérience. Une réaction d'oxydoréduction s'y produit (réduction ou oxydation suivant les cas).

On plonge une électrode de référence (par exemple l'électrode standard au calomel E.C.S.). On mesure la différence de potentiel entre E.T et l'électrode de référence, ainsi on a accès au potentiel d'électrode de E.T.

Pour faire varier le potentiel de E.T, on doit brancher un générateur entre E.T et une troisième électrode, la contre électrode qui assure la fermeture du circuit. Les réactions qui s'y produisent ne sont pas étudiées.

#### Montage pour le tracé des courbes intensité-potentiel :

Dans la solution on trouve en plus de l'eau et de ses ions, une forme oxydante et/ou réductrice d'un élément.



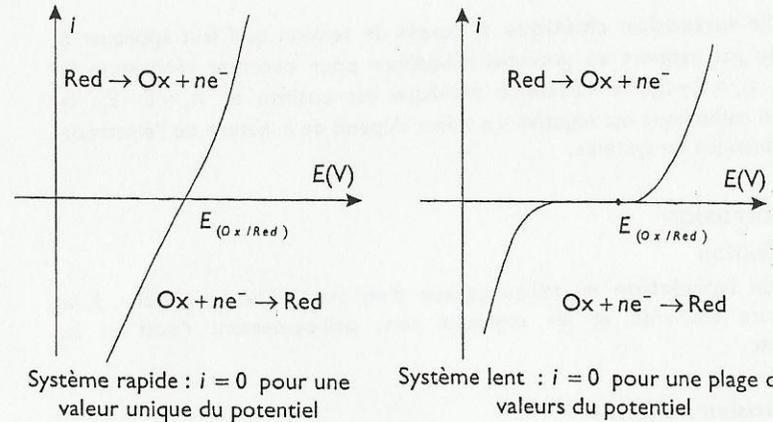
L'intensité du courant  $i$  est représentée en fonction du potentiel  $E$  de l'électrode de travail.

Selon la valeur de la f.e.m. du générateur, l'électrode de travail sera tantôt :

- l'anode, dans ce cas, le **courant anodique**  $i_a$  correspond à une **oxydation**,  $Red \rightarrow Ox + ne^-$  et il est compté **positivement** par convention.
- la cathode, dans ce cas le **courant cathodique**  $i_c$  correspond à une **réduction**  $Ox + ne^- \rightarrow Red$ . Il est **négatif**.

Deux cas se présentent :

- Les **systèmes électrochimiques rapides** caractérisés par un courant **non nul dès que le potentiel diffère** du potentiel de Nernst à l'équilibre. Les échanges électroniques au niveau de l'électrode sont très rapides.
- Les **systèmes électrochimiques lents** caractérisés par un courant **quasi nul** pour une large plage de potentiel autour du potentiel de Nernst. Les échanges électroniques au niveau de l'électrode sont très lents.



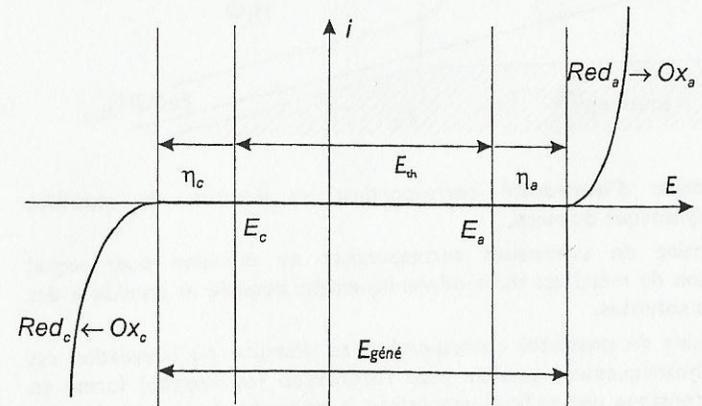
### 4. Electrolyse

Dans l'industrie, l'**électrolyse** est une méthode de séparation d'éléments ou de composés chimiques liés utilisant l'électricité.

Dans une cellule électrochimique, introduisons les espèces rédox  $Red_1$  et  $Ox_2$  des couples  $Ox_1/Red_1$  et  $Ox_2/Red_2$  en supposant que le potentiel de Nernst du couple 1 est plus élevé que le potentiel de Nernst du couple 2. La « règle du gamma » nous apprend donc qu'**aucune réaction spontanée** ( $Ox_1 + Red_2 = Red_1 + Ox_2$ ) se fait. Il va donc falloir forcer la réaction inverse, la réaction d'électrolyse :



Dans ce cas, nous pourrions représenter les courbes intensité-potentiel  $i = f(E)$  de la manière suivante :



Avec :

$E_a$  potentiel de Nernst du couple réagissant à l'anode (donc  $Ox_1/Red_1$ )

$E_c$  potentiel de Nernst du couple réagissant à la cathode (donc  $Ox_2/Red_2$ )

On appelle **surtension cinétique**  $\eta$  l'excès de tension qu'il faut appliquer à l'électrode par rapport au potentiel d'équilibre pour observer réellement la réaction,  $\eta_o = E - E_o$ , la surtension anodique est positive et  $\eta_c = E - E_c$ , la surtension cathodique est négative. La valeur dépend de la nature de l'électrode et de la cinétique du système.

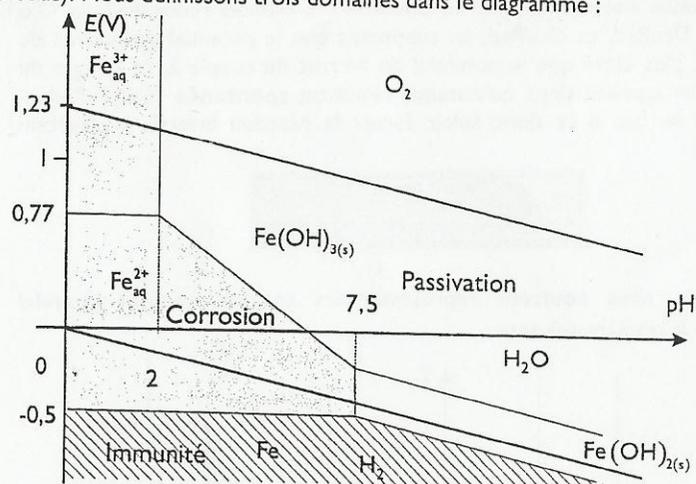
## 5. La corrosion

### 5.1. Définition

Il s'agit de l'**oxydation** en milieu aqueux d'un métal. Elle se produit à la température ambiante et les oxydants sont principalement l'eau et le dioxygène.

### 5.2. Corrosion uniforme

Toute la surface du métal en contact avec la solution oxydante est uniformément attaquée. La prévision de ce phénomène s'étudie à l'aide des diagrammes potentiel-pH, appelés diagrammes de corrosion où les concentrations des espèces solubles sont prises égales à  $10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (donnés ci-dessous). Nous définissons trois domaines dans le diagramme :



- Le domaine d'**immunité** correspondant au domaine de **stabilité** thermodynamique du métal.
- Le domaine de **corrosion** correspondant au domaine pour lequel l'oxydation du métal est thermodynamiquement possible et conduit à des **espèces solubles**.
- Le domaine de **passivité** correspondant au domaine où l'oxydation est thermodynamiquement possible mais l'hydroxyde (ou l'oxyde) formé en surface constitue une pellicule empêchant la poursuite de la corrosion (ce n'est pas vrai pour tous les métaux, en particulier le fer)

## 6. Utilisation du zinc pour la protection du fer

Pour protéger le fer de la corrosion, nous disposons de différentes méthodes :

- Par **méthode physique**, nous protégeons le fer du milieu corrosif extérieur par **application en surface** de peinture, film plastique, etc... Cette protection dure tant que cette couche protectrice n'est pas altérée.
- Chimiquement, nous pouvons former des alliages avec un métal, comme le chrome, le titane ou l'aluminium. Il se forme à la surface un **film d'oxyde** imperméable à l'oxydant. C'est le phénomène de **passivation**.
- Chimiquement, nous déposons, sur le fer, un métal plus réducteur que lui, comme le zinc. Il existe plusieurs procédés :
  - **galvanisation** à chaud. Il s'agit d'une réaction de diffusion dont le résultat est la création d'alliages Zn/Fe à la surface de la pièce en fer. Le zinc est stable à  $\text{pH} = 6$  grâce à la surtension.
  - **électrozingage** est une méthode électrolytique : la pièce de fer à recouvrir de zinc joue le rôle de cathode (+).
    - Avec une **anode sacrificielle**, nous créons une pile de corrosion en reliant par un conducteur, le fer à protéger à un bloc de zinc. A la surface de la cathode en fer, la réaction de réduction peut s'écrire :  $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- = 2\text{HO}^- + \text{H}_2$  et le zinc joue le rôle de l'anode et se consomme selon  $\text{Zn} = \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$  d'où le nom du procédé.

## Constantes d'acidité à 25°C

nom de l'acide	formule	nom de la base	formule	$K_a$
Acide perchlorique	HClO <sub>4</sub>	Perchlorate	ClO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	fort
Acide chlorhydrique	HCl	Chlorure	Cl <sup>-</sup>	fort
Acide sulfurique	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	Hydrogénosulfate	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	fort
Hydrogénosulfate	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	Sulfate	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$1,3 \times 10^{-2}$
Acide nitrique	HNO <sub>3</sub>	Nitrate	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	fort
Acide oxalique	H <sub>2</sub> C <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	Hydrogénooxalate	HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	$6,3 \times 10^{-2}$
Hydrogénooxalate	HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	Oxalate	C <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$5,0 \times 10^{-5}$
Acide phosphorique	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	Dihydrogénophosphate	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	$7,5 \times 10^{-3}$
Dihydrogénophosphate	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	Hydrogénophosphate	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$6,2 \times 10^{-8}$
Hydrogénophosphate	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	Phosphate	PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	$4,8 \times 10^{-13}$
Acide méthanoïque	HCOOH	Méthanoate	HCOO <sup>-</sup>	$1,0 \times 10^{-3}$
Acide fluorhydrique	HF	Fluorure	F <sup>-</sup>	$3,5 \times 10^{-4}$
Acide benzoïque	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH	Benzoate	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COO <sup>-</sup>	$6,7 \times 10^{-5}$
Acide éthanoïque (acétique)	CH <sub>3</sub> COOH	Ethanoate (acétate)	CH <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	$1,75 \times 10^{-5}$
Acide propanoïque	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> COOH	Propanoate	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> COO <sup>-</sup>	$1,3 \times 10^{-5}$
Dioxyde de carbone	CO <sub>2</sub> + H <sub>2</sub> O	Hydrogénocarbonate	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	$4,5 \times 10^{-7}$
Acide sulfureux	H <sub>2</sub> S	Hydrogénosulfure	HS <sup>-</sup>	$1,0 \times 10^{-7}$
Hydrogénosulfure	HS <sup>-</sup>	Sulfure	S <sup>2-</sup>	$1,0 \times 10^{-13}$
Acide hypochloreux	HClO	Hypochlorite	ClO <sup>-</sup>	$4,0 \times 10^{-8}$
Ammonium	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	Ammoniac	NH <sub>3</sub>	$6,3 \times 10^{-10}$
Phénol	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> OH	Phénate	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> O <sup>-</sup>	$1,3 \times 10^{-10}$
Acide cyanhydrique	HCN	Cyanure	CN <sup>-</sup>	$7,2 \times 10^{-10}$
Triéthylammonium	(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>3</sub> NH <sup>+</sup>	Triéthylamine	(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>3</sub> N	$1,0 \times 10^{-11}$
Hydrogénocarbonate	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Carbonate	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	$4,7 \times 10^{-11}$

## Produit de solubilité à 25°C

Composé	nom	cations	anions	$K_s$
AgBr	Bromure d'argent	Ag <sup>+</sup>	Br <sup>-</sup>	$5,0 \times 10^{-13}$
AgCl	Chlorure d'argent	Ag <sup>+</sup>	Cl <sup>-</sup>	$1,6 \times 10^{-10}$
AgI	Iodure d'argent	Ag <sup>+</sup>	I <sup>-</sup>	$1,5 \times 10^{-16}$
Ag <sub>2</sub> CrO <sub>4</sub>	Chromate d'argent	2 Ag <sup>+</sup>	CrO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$9 \times 10^{-12}$
BaSO <sub>4</sub>	Sulfate de baryum	Ba <sup>2+</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$1,5 \times 10^{-9}$
CaCO <sub>3</sub>	Carbonate de calcium	Ca <sup>2+</sup>	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	$8,7 \times 10^{-9}$
Ca <sub>3</sub> (PO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	Phosphate de calcium	3 Ca <sup>2+</sup>	2 PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	$1,3 \times 10^{-32}$
Cu(OH) <sub>2</sub>	Hydroxyde de cuivre II	Cu <sup>2+</sup>	2 HO <sup>-</sup>	$1,6 \times 10^{-19}$
Fe(OH) <sub>2</sub>	Hydroxyde de fer II	Fe <sup>2+</sup>	2 HO <sup>-</sup>	$1,8 \times 10^{-15}$
Fe(OH) <sub>3</sub>	Hydroxyde de fer III	Fe <sup>3+</sup>	3 HO <sup>-</sup>	$4 \times 10^{-38}$
FeCO <sub>3</sub>	Carbonate de fer II	Fe <sup>2+</sup>	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	$2 \times 10^{-10}$
FeS	Sulfure de fer II	Fe <sup>2+</sup>	S <sup>2-</sup>	$1,0 \times 10^{-17}$
Ni(OH) <sub>2</sub>	Hydroxyde de nickel II	Ni <sup>2+</sup>	2 HO <sup>-</sup>	$5,0 \times 10^{-15}$
Mg(OH) <sub>2</sub>	Hydroxyde de magnésium	Mg <sup>2+</sup>	2 HO <sup>-</sup>	$8,9 \times 10^{-12}$
MnS	Sulfure de manganèse	Mn <sup>2+</sup>	S <sup>2-</sup>	$2 \times 10^{-10}$
PbBr <sub>2</sub>	Bromure de plomb	Pb <sup>2+</sup>	2 Br <sup>-</sup>	$4,6 \times 10^{-6}$
PbCl <sub>2</sub>	Chlorure de plomb	Pb <sup>2+</sup>	2 Cl <sup>-</sup>	$1,6 \times 10^{-5}$
PbI <sub>2</sub>	Iodure de plomb	Pb <sup>2+</sup>	2 I <sup>-</sup>	$1,4 \times 10^{-8}$
PbS	Sulfure de plomb	Pb <sup>2+</sup>	S <sup>2-</sup>	$7 \times 10^{-29}$
PbCO <sub>3</sub>	Carbonate de plomb	Pb <sup>2+</sup>	HO <sup>-</sup>	$1,5 \times 10^{-15}$
PbCrO <sub>4</sub>	Chromate de plomb	Pb <sup>2+</sup>	CrO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	$2 \times 10^{-16}$
Pb(OH) <sub>2</sub>	Hydroxyde de plomb	Pb <sup>2+</sup>	2 HO <sup>-</sup>	$1,2 \times 10^{-15}$
ZnS	Sulfure de zinc	Zn <sup>2+</sup>	S <sup>2-</sup>	$2 \times 10^{-22}$

## Potentiels standard d'oxydoréduction à 25°C

Oxydant	Réducteur	$E^{\circ}$ (V)
$F_{2(g)}$	$F^{-}$	2,87
$O_{3(g)}$	$O_{2(g)}$	2,08
$S_2O_8^{2-}$	$SO_4^{2-}$	2,01
$Ce^{4+}$	$Ce^{3+}$	1,71
$MnO_4^{-}$	$MnO_2$	1,69
$MnO_4^{-}$	$Mn^{2+}$	1,51
$Cl_{2(g)}$	$Cl^{-}$	1,36
$Cr_2O_7^{2-}$	$Cr^{3+}$	1,33
$MnO_2$	$Mn^{2+}$	1,23
$O_{2(g)}$	$H_2O$	1,23
$IO_3^{-}$	$I_{2(aq)}$	1,19
$Hg^{2+}$	$Hg_2^{2+}$	0,91
$Hg^{2+}$	$Hg_{(l)}$	0,85
$Ag^{+}$	$Ag$	0,80
$Fe^{3+}$	$Fe^{2+}$	0,77
$I_{2(aq)}$	$I^{-}$	0,62
$Cu^{2+}$	$Cu$	0,34
$S_4O_6^{2-}$	$S_2O_3^{2-}$	0,09
$H^{+}$	$H_{2(g)}$	0,00
$Pb^{2+}$	$Pb$	-0,13
$Ni^{2+}$	$Ni$	-0,26
$Fe^{2+}$	$Fe$	-0,44
$Zn^{2+}$	$Zn$	-0,76
$Al^{3+}$	$Al$	-1,68
$Mg^{2+}$	$Mg$	-2,36
$Na^{+}$	$Na$	-2,71
$Li^{+}$	$Li$	-3,04

## STRUCTURE DE LA MATIÈRE CONDENSÉE

## 1. Définitions

Chaque atome ou ion  $n^{\circ}(i)$  est représenté par une sphère de rayon  $R_i$ .

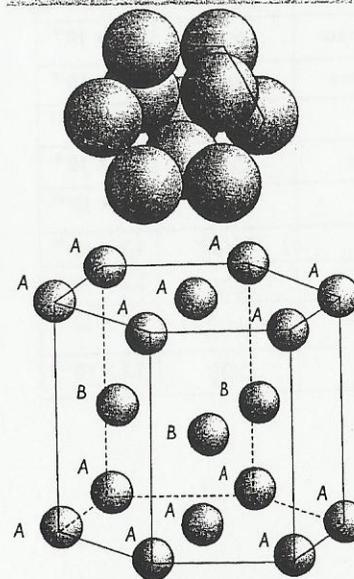
- **Réseau** : ensemble de points appelés **nœuds**, répartis régulièrement. Le réseau est défini par 3 vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  non coplanaires. Un nœud N se déduit d'une origine O par translation :  $\vec{ON} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , ( $m, n, p$ ) sont entiers.
- **Coordinance** : nombre de plus proches voisins d'une sphère quelconque, ces voisins étant tangents à la sphère envisagée.
- **Compacité C** : nombre sans dimension qui mesure le taux d'occupation de l'espace. En notant  $n$  le nombre d'atomes ou d'ions par maille :

$$C = \frac{\text{volume occupé}}{\text{volume de la maille}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{4\pi}{3} R_i^3}{|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$

- **Masse volumique** :  $\mu = \frac{m}{V} = \frac{ZM}{N_A V}$  où  $m$  est la masse de la maille et  $V$  est le volume de la maille.

## 2. Empilements compacts

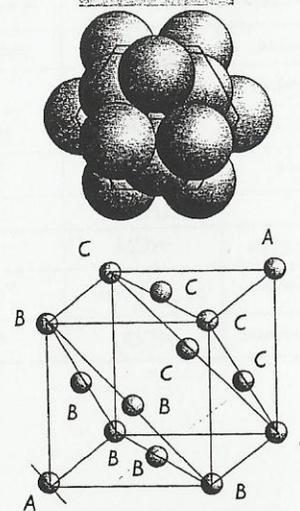
Structure hexagonal compact (h.c.)



Structure (h.c.) écartée

Coordinance : 12

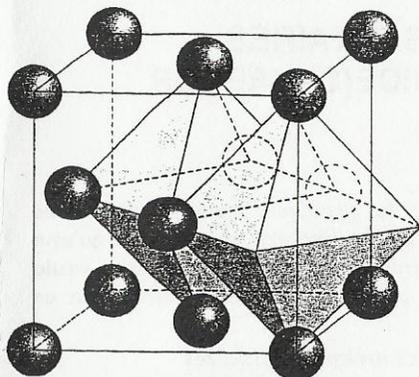
Structure cubique à faces centrees (c.f.c.)



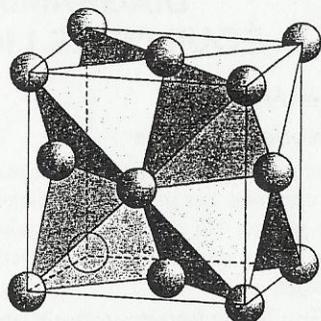
Structure (c.f.c.) écartée

$$\text{Compacité } C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74$$

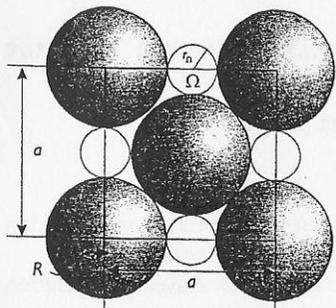
Sites intersticiels du CFC :



Sites octaédriques

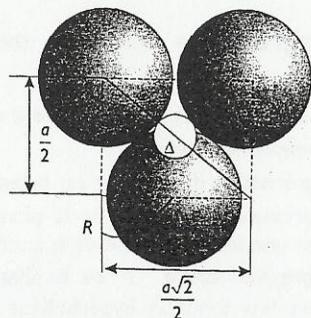


Sites tétraédriques



habitabilité des sites octaédriques

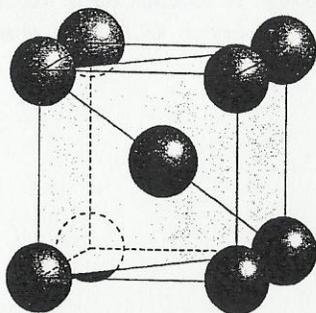
$$r_{\Omega} = \frac{a}{2} - r = (\sqrt{2} - 1)r = 0,414r$$



habitabilité des sites tétraédriques

$$r_{\Delta} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)r = 0,225r$$

3. Empilement CC

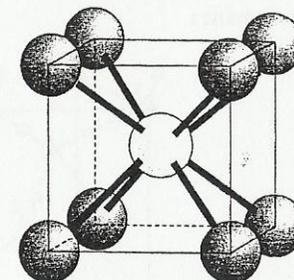


Coordinance 8

Compacité  $C = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$

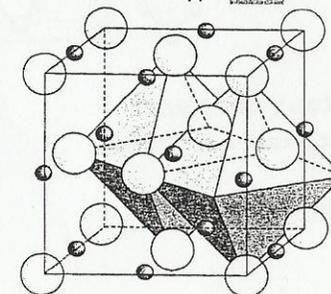
4. Cristaux ioniques

- La structure du type **CsCl** correspond à une structure cubique simple d'anions  $\text{Cl}^-$  et à l'occupation d'un site cubique par le cation  $\text{Cs}^+$  ou réciproquement. Il y a contact du cation avec les 8 anions aux sommets du cube donc la coordinnce du cation  $\text{Cs}^+$  comme de l'anion  $\text{Cl}^-$  est 8



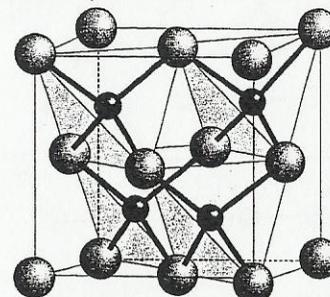
Structure type **CsCl**

- La structure du type **NaCl** : Les ions  $\text{Cl}^-$  forment une structure cubique à faces centrées et les lacunes octaédriques sont occupés par les cations  $\text{Na}^+$  ou réciproquement. La coordinnce du cation  $\text{Na}^+$  est de 6 comme celle de l'anion  $\text{Cl}^-$ .

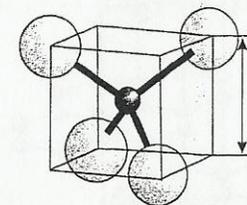


Structure type **NaCl**

- La structure blende **ZnS** : les atomes de zinc occupent la moitié des sites tétraédriques. La coordinnce de  $\text{Zn}^{2+}$  et de  $\text{S}^{2-}$  est de 4.



Structure de **ZnS**

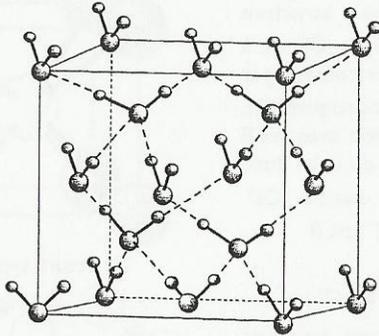


Vue d'un site

type	CsCl	NaCl	ZnS
coordinnce	8	6	4
rapport $\frac{r}{R}$	$\frac{r}{R} \geq \sqrt{3} - 1$	$\frac{r}{R} \geq \sqrt{2} - 1$	$\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

## 5. Cristaux moléculaires

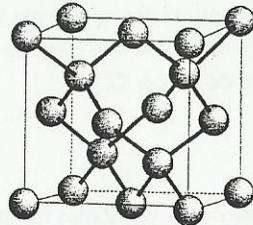
Glace type diamant :



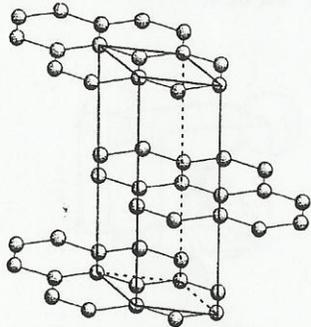
## 6. Cristaux covalents

Diamant : atomes de carbone

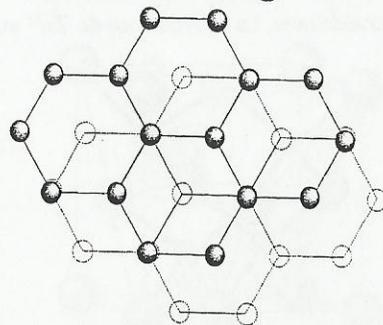
Coordinance : 4



Graphite : atomes de carbone



Vue en 3 dimensions du graphite



Vue de dessus du graphite

# DIAGRAMMES BINAIRES ÉQUILIBRES LIQUIDE(S)-VAPEUR

## 1. Généralités

### 1.1. Notion de phase

Une phase est une région de l'espace où les grandeurs intensives varient de façon continue. Les gaz sont miscibles en toutes proportions et forment qu'une seule phase. Un système de liquides miscibles est constitué d'une seule phase : c'est une solution. Un système présentant plusieurs phases est un mélange.

### 1.2. Equilibres liquide-vapeur pour les mélanges binaires

Un mélange binaire est un système fermé composé de deux constituants notés ici A et B.

## 2. Diagrammes binaires avec miscibilité totale à l'état liquide

Cas d'une solution liquide idéale et de gaz parfaits.

Diagrammes isothermes

La température du système est fixée.

- la pression totale  $P$  de la phase vapeur en équilibre avec une solution idéale est une fonction affine de la fraction molaire  $x$  dans la phase liquide.
- la pression totale  $P$  de la phase vapeur en équilibre avec une solution idéale est une fonction hyperbolique de la fraction molaire  $y$  dans la phase gazeuse.

Lorsque les deux phases coexistent, la courbe donnant la pression pour laquelle il y a apparition de la première bulle de vapeur dans le mélange en fonction de la fraction molaire dans la phase liquide  $P(x)$  donne la composition en A de la phase liquide : c'est la **courbe d'ébullition**.

La courbe donnant la pression pour laquelle il y a apparition de la première goutte de liquide dans le mélange en fonction de la fraction molaire dans la phase gazeuse  $P(y)$  donne la composition en A de la phase vapeur : c'est la **courbe de rosée**.

### 3.3. Diagramme isobare

Le diagramme isobare représente les lois  $T(y)_A$  et  $T(y)_B$  (figure 6).

L'intersection des deux courbes (point H) définit l'état du système pour lequel les deux liquides sont en équilibre avec la vapeur. Un tel mélange est appelé **hétéroazéotrope**. Les deux courbes  $T(y)_A$  et  $T(y)_B$  représentent l'ensemble des états du système pour lesquels il y a équilibre entre un liquide et de la vapeur. Pour les températures inférieures à la température d'ébullition de l'hétéroazéotrope,  $T_H^*$ , le système est constitué des deux liquides A et B non miscibles.

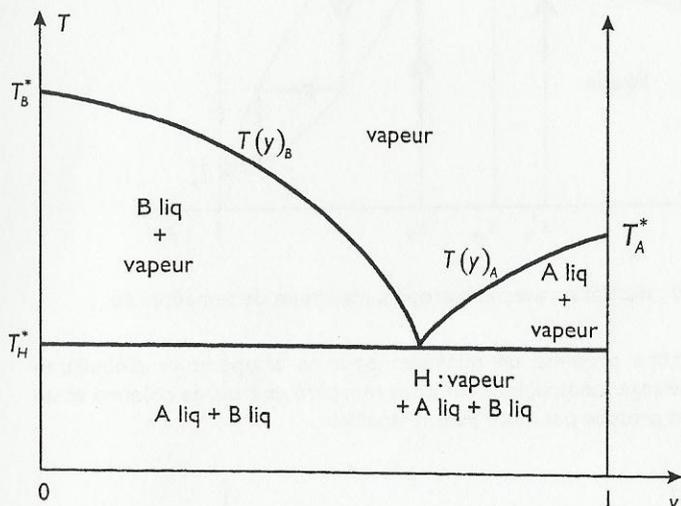


Figure 6 : diagramme binaire isobare pour deux liquides non miscibles

### 3.4. Changement d'état

Le refroidissement d'un mélange gazeux (représenté par  $M_1$ ) conduit, dans un premier temps, au point  $M_2$  où apparaît la première goutte de liquide, qui est, pour l'exemple considéré, constitué de A pur.

Site Internet des ouvrages : [www.toutelaphysique.fr](http://www.toutelaphysique.fr)

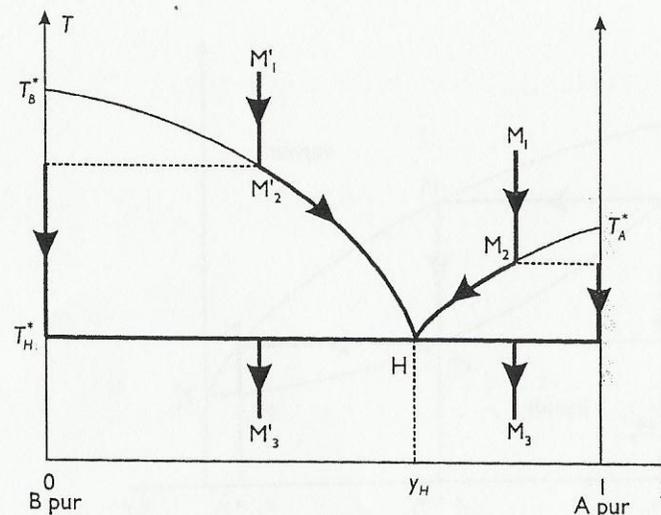


Figure 7 : diagramme isobare de changement d'état

Si le refroidissement est poursuivi, deux phases coexistent alors :

- une **phase liquide** constituée de **A pur**,
- une **phase gazeuse** : sa composition est donnée par l'abscisse du point de la **courbe de rosée** à la température considérée (fragment  $M_2H$  de la figure 7).

A la température  $T_H^*$ , la constitution de la vapeur est celle de l'hétéroazéotrope ( $y_H$ ), la **première goutte de liquide B pur apparaît**. La phase gazeuse se condense complètement pour donner deux phases liquides constituées de chacun des constituants purs. Cette condensation se fait à la température constante  $T_H^*$ .

**Remarque** : le refroidissement d'un système représenté par un point  $M'_1$  de la figure 7 conduit au point  $M'_2$  pour lequel apparaît la première goutte de B pur liquide. Le raisonnement pour l'évolution ultérieure jusqu'au point  $M'_3$  est le même que précédemment.

## 4. Application : Distillation fractionnée

### 4.1. Mélange sans azéotrope

Considérons un mélange liquide représenté par le point  $M_0$  sur le diagramme isobare (figure 8). Lorsqu'on chauffe ce liquide, une première bulle de gaz de composition  $y_1$  apparaît à la température  $T_1$  (point  $M_1$ ).

Si cette bulle passe à l'état liquide (liquéfaction), le liquide obtenu a la même composition  $x_1 = y_1$  (point  $M'_1$ ). Si on porte ce liquide à ébullition à la température  $T_2$ , une bulle de gaz de composition  $y_2$  apparaît. En recommençant cette opération un grand nombre de fois, on obtient ainsi un liquide dont la composition tend vers  $x=1$ , c'est-à-dire A pur. L'ensemble de ces séquences s'appelle **distillation fractionnée**.

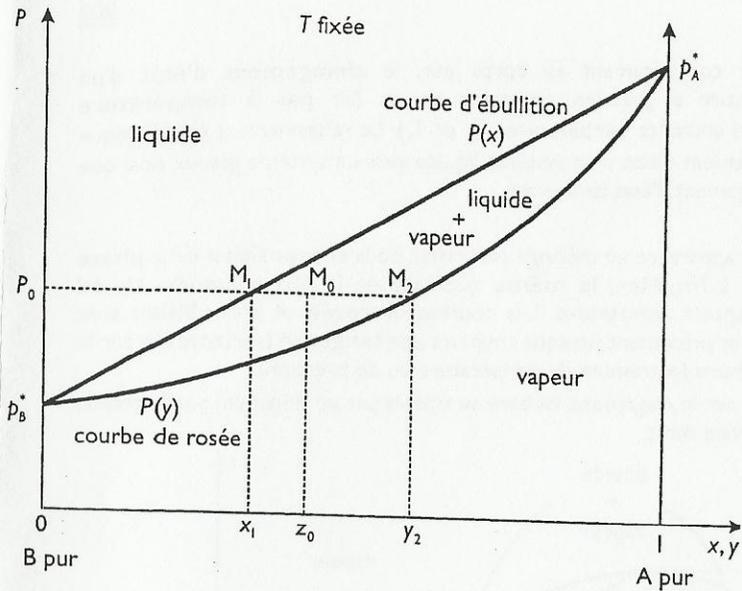


Figure 1 : diagramme binaire isotherme pour un mélange (A,B) avec A plus volatil que B.

Trois domaines sont délimités :

- **au-dessus** du segment de droite, seule la **phase liquide** existe (pressions élevées),
- **en dessous** de l'arc d'hyperbole, seule la **phase gazeuse** existe (faibles pressions),
- dans la portion comprise **entre les deux courbes**, coexistent les **deux phases liquide et vapeur** : c'est le fuseau.

Le point  $M_0$  représente le système dans un état donné. Son ordonnée donne la pression  $P_0$  du système. Son abscisse  $z_0$  est la fraction molaire totale du constituant A dans le mélange (quel que soit son état physique). Sur une droite horizontale, à la pression  $P_0$ , l'abscisse  $x_1$  de  $M_1$ , sur la courbe d'ébullition, donne la fraction molaire de A dans le liquide, celle  $y_2$  de  $M_2$ , sur la courbe de rosée, donne la fraction molaire de A dans le gaz.

Le constituant A est plus volatil que le constituant B. La fraction molaire  $x_1$  de A dans le liquide est inférieure à celle  $y_2$  dans le gaz.

De façon générale, la **vapeur** est **plus riche** que le liquide dans le **composé le plus volatil**.

### Diagrammes isobares

La pression du système est fixée. Les diagrammes isobares  $T(x)$  et  $T(y)$  ont l'aspect de la figure 2.

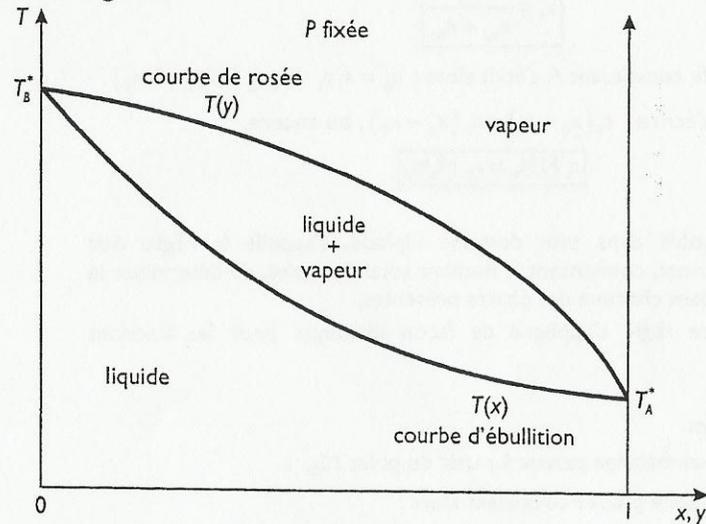


Figure 2 : diagramme binaire isobare

La **courbe du haut** donne la température pour laquelle il y a apparition de la première bulle de liquide  $T(y)$  en fonction de la composition du gaz : c'est la **courbe de rosée**.

La **courbe du bas** donne la température d'ébullition (température pour laquelle il y apparition de la première bulle de gaz)  $T(x)$  en fonction de la composition du liquide : c'est la **courbe d'ébullition**.

### Règle des moments

**Dans ce paragraphe, la nature isotherme ou isobare des graphes n'a pas besoin d'être précisée.**

Soit un point  $M_0$  représentatif d'un système biphasé et son abscisse :  $x_0 = \frac{n_A}{n_A + n_B}$  où  $n_A$  et

$n_B$  sont respectivement les nombres totaux de moles de A et de B dans les deux phases.

Soient  $n_1$  et  $n_2$  les nombres de moles dans les phases 1 et 2. La conservation de la quantité de matière impose :  $n_1 + n_2 = n_A + n_B$ .

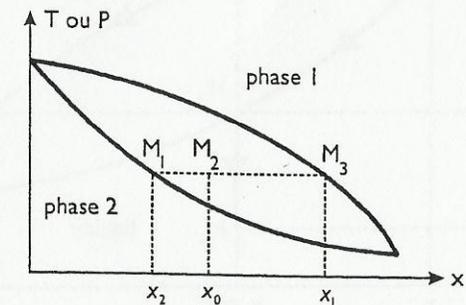


Figure 3 : théorème des moments

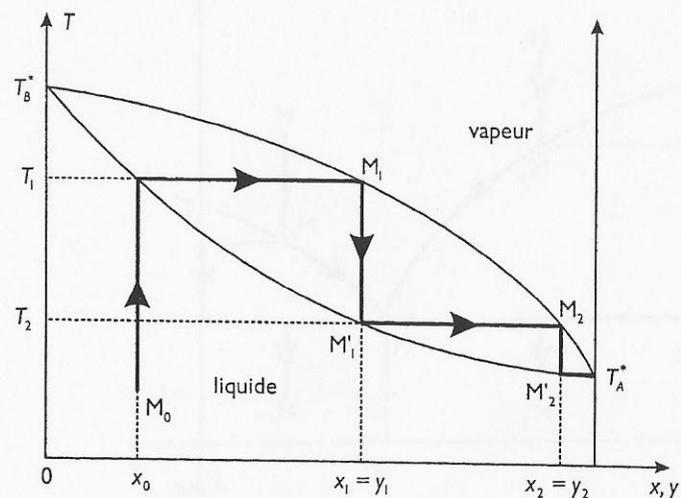


Figure 8 : principe de la distillation fractionnée

#### 4.2. Mélange avec azéotrope

La composition de la vapeur et celle du liquide étant la même à l'azéotrope, il est impossible, de séparer, par distillation, les constituants d'un mélange binaire avec azéotrope.

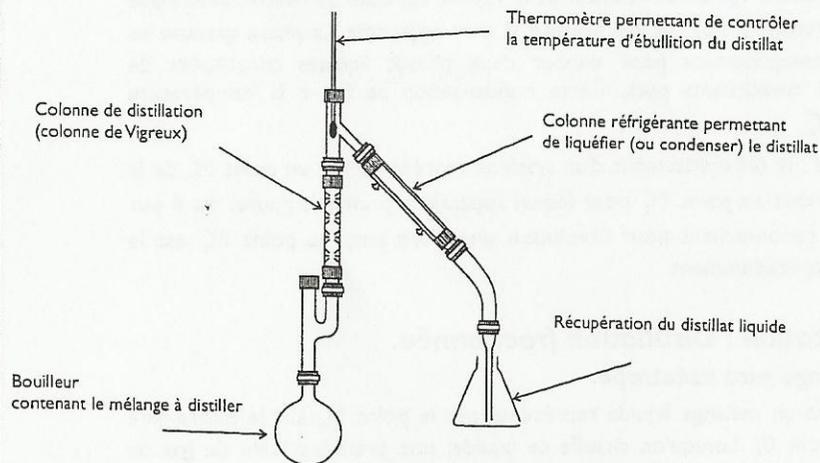


Figure 9 : montage de distillation fractionnée

Lorsque l'azéotrope présente un maximum pour sa température d'ébullition (figure 10), A pur est alors obtenu en tête de colonne (bas de la colonne de distillation) si la fraction molaire  $x_0$  du mélange initial est supérieure à celle de l'azéotrope  $x_{az}$ .

C'est B pur qui est obtenu en tête de colonne si la fraction molaire  $x'_0$  du mélange initial est inférieure à celle de l'azéotrope  $x_{az}$ . La composition du mélange dans le bouilleur tend vers celle de l'azéotrope.

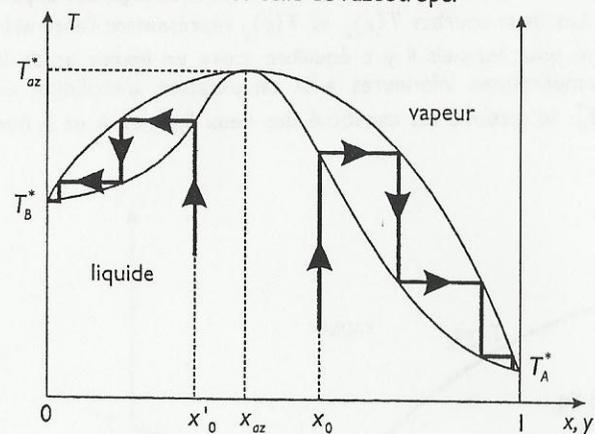


Figure 10 : distillation avec azéotrope à maximum de température

Lorsque l'azéotrope présente un minimum pour sa température d'ébullition (figure 10), le mélange azéotrope est alors récupéré en haut de colonne et un des deux liquides presque pur reste dans le bouilleur.

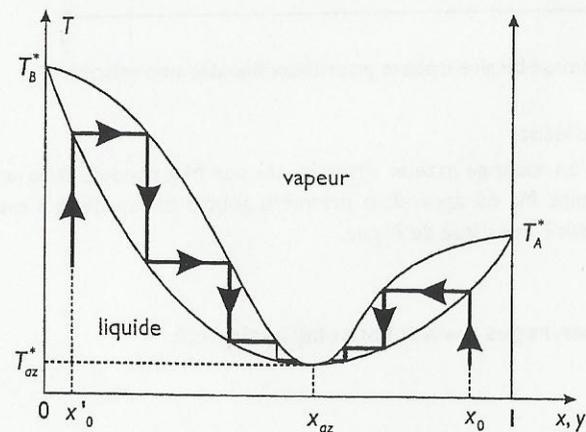


Figure 10 : distillation avec azéotrope à minimum de température

## CONSTANTES PHYSIQUES

### Constantes universelles

vitesse de la lumière dans le vide	$c$	$299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
constante de gravitation de Newton	$G$	$6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
constante de Planck	$h$	$6,626075 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

### Constantes électromagnétiques

charge élémentaire	$e$	$1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$
rayon de Bohr	$a_0$	$0,529177249 \times 10^{-10} \text{ m}$
constante de Rydberg	$R_\infty$	$10973731,534 \text{ m}^{-1}$

### Grandeurs caractéristiques et constantes physico-chimiques

masse de l'électron	$m_e$	$9,1093897 \times 10^{-31} \text{ kg}$
masse du proton	$m_p$	$1,6726231 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante d'Avogadro	$N_A$	$6,0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante de Faraday	$F$	$96485,309 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
constante molaire des gaz	$R$	$8,314510 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B$	$1,380658 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
volume molaire normal (gaz parfait)	$V_m$	$22,41410 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
constante de Stephan Boltzmann	$\sigma$	$5,67051 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
constante de la loi de déplacement de Wien	$\lambda_{\text{max}} T$	$2,897756 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
masse de la Terre	$M_T$	$6 \times 10^{24} \text{ kg}$
rayon moyen de la Terre	$R_T$	$6,400 \times 10^6 \text{ m}$
vitesse orbitale moyenne de la Terre	$v$	$29,8 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Excentricité de la Terre	$e$	$0,0167$
masse du soleil	$M_S$	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
rayon moyen du soleil	$R_S$	$0,696 \times 10^9 \text{ m}$
diamètre apparent	$\theta_S$	$31'$

## INDEX

<b>A</b>	
acide .....	177
activité .....	168
admittance complexe .....	60
affinité chimique .....	173
Alcalino-terreux .....	161
Alcalins .....	161
amplificateur inverseur .....	69
amplificateur non inverseur .....	69
amplitude des oscillations .....	21, 25
angle de réfraction limite .....	70
anode sacrificielle .....	191
approximation d'Ellingham .....	183
approximation de Bodenstein .....	165
Approximation de Gauss .....	71
Approximation de l'état quasi stationnaire .....	165
association des ressorts .....	14
attracteur .....	20, 21, 25
Avancement d'une réaction .....	164
Azéotrope .....	203

<b>B</b>	
base .....	177
bobine .....	49, 54, 60

<b>C</b>	
Capacité thermique .....	143
capacité thermique molaire standard .....	169
centre d'inertie .....	36, 37
centre de masse .....	34, 35, 36, 39
centre de poussée .....	136
Chalcogènes .....	161
chaleur latente .....	153
champ électromoteur de Lorentz .....	114
champ électromoteur de Neumann .....	113
champ lointain .....	129, 130
changement d'état .....	150, 153, 154
chemin optique .....	75, 77
cinématique .....	11
Circulation .....	94
coefficients de mutuelle .....	115
Coefficients stœchiométriques .....	164
Compacité .....	195, 196
condensateur .....	49, 52, 53, 55, 59, 60, 99
conduction .....	154
conservation de la charge .....	110
Constante d'acidité .....	177
Constante de dissociation .....	178
Constante de formation .....	178
constante de Stefan .....	159
constante des aires .....	28
constante universelle de la gravitation .....	14
contact optique .....	81, 83
contraste .....	77
convection .....	154

convention récepteur .....	49, 59, 60, 62
Coordinnence .....	195, 198
corps noir .....	158
corrosion .....	190
couple oxydant-réducteur .....	179
courant anodique .....	188
courant cathodique .....	188
courant d'énergie thermique .....	155
courant de déplacement .....	110
courbe d'ébullition .....	152, 199
courbe de rosée .....	199
courbes intensité-potentiel .....	188
Cristaux ioniques .....	197
critère de Rayleigh .....	88
cycle limite .....	21, 25, 26

## D

débit massique .....	147
densité de courant .....	97
densité volumique de courant .....	48, 104
Déplacement et rupture d'équilibre .....	175
dérivateur .....	66, 67, 69
détente de Joule-Thomson .....	142
diagramme de Bode .....	63
Diagramme de Clapeyron .....	152
Diagramme de prédominance .....	178
diagramme de rayonnement .....	133
Diagramme de Watt .....	148
diagramme potentiel-pH .....	186
diagrammes d'Ellingham .....	183
diagrammes de corrosion .....	190
Diagrammes isobares .....	201
Diagrammes isothermes .....	199
différence de marche .....	77, 78, 80, 81, 82, 83, 85, 89
Dipôle électrostatique .....	95
dipôle magnétique .....	108
distillation fractionnée .....	205
Distillation fractionnée .....	205
distribution surfacique .....	111
domaine d'immunité .....	190
domaine de corrosion .....	190
domaine de passivité .....	190

## E

éclairage .....	75, 76, 77, 78, 83, 87, 89, 90
Efficacité .....	149
égale inclinaison .....	81, 82
Electrode Standard à Hydrogène .....	181
Electrodes de référence .....	181
électrolyse .....	189
électrozingage .....	191
éléments correspondants .....	98, 99
Empilements compacts .....	195
Énergie cinétique .....	15
énergie interne ..	139, 140, 141, 143, 144, 147
Energie mécanique .....	17

Énergie potentielle.....	16, 17
Energie potentielle centrifuge.....	34
Énergie potentielle de gravitation.....	17
énergie potentielle effective.....	29
Énergie potentielle élastique.....	17
Énoncé de Carnot.....	149
Énoncé de Kelvin.....	149
enthalpie.....	141, 142, 143, 145, 153, 154
enthalpie libre.....	166
enthalpie libre standard.....	170
enthalpie molaire standard.....	169
entropie molaire standard.....	169
équation de d'Alembert.....	117
équation de la chaleur.....	156
équation de Laplace.....	97, 98
équation de Poisson.....	97
équilibre de Boudouard.....	185
équipotentielle.....	96
état de diffusion.....	29
état lié.....	29
état standard de référence.....	171
excentricité.....	30

## F

facteur d'amortissement.....	64, 65
facteur de puissance.....	62
facteur de qualité.....	22, 24, 25, 55, 58, 64, 65
flux conservatif.....	102, 110
flux propre.....	112, 113, 114
force centrale.....	28, 29
force conservative.....	16
Force d'inertie d'entraînement.....	43
force d'inertie de Coriolis.....	34
Force d'inertie de Coriolis.....	43
force de Coulomb.....	92
Force de gravitation.....	14
force de Laplace.....	107
Force de Lorentz.....	14
Force électrostatique.....	14, 29
Force gravitationnelle.....	29
force newtonienne.....	29, 30
Forces d'inertie.....	34
formule de Lewis.....	161
formule de Nernst.....	181
formule des réseaux.....	89
fréquence propre.....	26

## G

galvanisation.....	191
gaz de Van der Waals.....	138
gaz parfait.....	135, 139, 143, 144, 146
Gaz rares.....	161
géostationnaire.....	32
gradient.....	96, 138
grandeur molaire standard.....	169
Grandissement.....	73, 74
Graphite.....	198
guide d'onde.....	128

## H

Hall.....	106, 107
Halogènes.....	161
harmoniques.....	26
hétéroazéotrope.....	203
Hund.....	161

## I

Identité thermodynamique.....	144, 145
impédance complexe.....	59, 60
Indicatrice de rayonnement.....	133
indice.....	70, 150
inductances propres.....	115, 116
Inégalité de Carnot-Clausius.....	147
Inégalité de Clausius-Carnot.....	149
influence totale.....	99
intégrateur.....	66, 67, 69
interfrange.....	78, 80, 83
Intermédiaires réactionnels.....	165
isothermes d'andrews.....	152
isothermes d'Andrews.....	151, 152

## J

jauge de Coulomb.....	105
jauge de Coulomb.....	105
jauge de Coulomb.....	111
jauge de Lorentz.....	111, 117, 131

## K

Klechkowski.....	161
------------------	-----

## L

lame d'air.....	81, 83
Lentille convergente.....	73
Lentille divergente.....	73
liaison covalente.....	161
Loi d'Arrhénius.....	164
Loi d'Ohm.....	49
Loi de composition des vitesses.....	33
loi de Coulomb.....	92
Loi de Coulomb.....	47
loi de Faraday.....	114
loi de Fourier.....	155
loi de Hess.....	171
Loi de Hooke.....	14
Loi de Laplace.....	143
loi de Le Châtelier.....	176
Loi de Lenz.....	112
loi de Newton.....	156
Loi de Wien.....	159
Loi des aires.....	28
Loi des mailles.....	48, 61
Loi des nœuds.....	48, 52, 61, 62
lois de Képler.....	32
lois de Kirchhoff.....	172
lois de Newton.....	13

longueur de cohérence.....	76
----------------------------	----

## M

masse grave.....	13
masse inerte.....	13
masse réduite.....	39
Masse volumique.....	195
Mécanismes réactionnels.....	165
mélanges binaires.....	199
mésoscopique.....	135, 154
mode propre.....	128
Modèle des sphères dures.....	134
Molécularité.....	165
Moment cinétique.....	38, 39, 41, 42
Moment d'inertie.....	42
moment dipolaire.....	95
moment magnétique.....	107, 108
Montage suiveur.....	69
mouvement rectiligne uniforme.....	12

## N

nœuds de vibrations.....	127
nombre d'oxydation.....	180
nombres quantiques.....	160
Norton.....	50, 51

## O

onde stationnaire.....	127, 128
orbitales.....	160, 161
ordre d'interférence.....	77, 82
Ordre global.....	164
Oscillateur harmonique.....	21
oscillateur paramétrique.....	26
oxydant.....	179

## P

paramètre focal.....	30
particule fictive.....	38
particule réduite.....	38, 39
Pauli.....	161
permittivité du vide.....	14, 17, 93
Piles.....	180
plan d'antisymétrie.....	93, 101, 103
plan d'incidence.....	70
plan de symétrie.....	93, 95, 101, 103
plasma.....	123
Poids.....	14, 35
point coïncidant.....	33
point critique.....	152
point d'ébullition.....	152
point de rosée.....	152
point triple.....	151, 152
polarisation.....	121
pompes à chaleur.....	150
Pont diviseur.....	51
portrait de phase.....	19, 20
potentiel absolu.....	94

potentiel chimique.....	166
potentiel électrostatique.....	94, 95
potentiel retardé.....	130
Potentiels standard.....	194
poussée d'Archimède.....	136, 137, 138
pouvoir des pointes.....	97
premier principe.....	139, 140, 141, 142, 146, 147, 149
pression.....	134, 135, 136, 137, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 152, 153, 154
pression cinétique.....	134, 135
pression de vapeur saturante.....	152, 154
principe d'Huygens-Fresnel.....	86
principe de l'inertie.....	13
principe des actions mutuelles.....	13
Produit de solubilité.....	179, 193, 194
produit ionique de l'eau.....	177
profil rectangulaire.....	85
pseudo-pulsation.....	56
Puissance d'une force.....	15
puissance électrique.....	49
puissance thermique.....	155
pulsation plasma.....	124
pulsation propre.....	21, 24, 55, 56, 58

## Q

quadripôle linéaire.....	63
Quantification de l'énergie.....	160
quantité de mouvement.....	13

## R

rayonnement.....	154
réducteur.....	179
référentiel barycentrique.....	36, 37, 38, 39, 42, 44, 45, 46
référentiel galiléen.....	13, 16, 28, 35, 138
réflexion totale.....	70
Réfrigérateurs.....	150
régime aperiodique.....	56
régime permanent.....	23, 142, 147
Régime transitoire.....	25, 52, 54
régimes quasi-stationnaires.....	48
Règle de l'octet.....	161
Règle des moments.....	201
règle du tire bouchon.....	101
Relation d'Einstein.....	160
relation de Biot et Savart.....	100, 104
Relation de Carathéodory.....	146
Relation de Clapeyron.....	154
relation de Descartes.....	73
Relation de dispersion.....	124
relation de Gibbs-Helmholtz.....	166
relation de Guldberg et Waage.....	175
relation de Newton.....	73
Relation de Planck.....	158
relation de Van't Hoff.....	175
Relations de conjugaison.....	73
Réponse indicielle.....	53
Réseau.....	195

résistance thermique.....	157
résistor.....	49, 51, 60
Résonance.....	23, 58, 59
résonance d'amplitude.....	24, 58, 59
Résonance de puissance.....	24
Résonance de vitesse.....	24
retour inverse de la lumière.....	70
roulement sans glissement.....	41, 47

## S

séquence fermée.....	165
séquence ouverte.....	165
Sites octaédriques.....	196
Sites tétraédriques.....	196
Solubilité.....	179
suramplitude.....	24
surface de Gauss.....	93
surfaces élémentaires.....	3
Surfusion.....	154
surtension cinétique.....	190
Système conservatif.....	17
Système lent.....	189
Système rapide.....	189
Systèmes dissipatifs.....	20
systèmes fermés.....	141

## T

tache d'Airy.....	88
température cinétique.....	134, 144
température thermodynamique.....	144
temps de cohérence.....	76
Théorème d'Ampère.....	101
Théorème d'Archimède.....	136
Théorème de Gauss.....	93
Théorème de l'énergie cinétique.....	15, 16, 34
théorème de la puissance cinétique.....	45
théorème de la résultante cinétique.....	43
Théorème de Malus.....	75
théorème de Millman.....	62

Théorème de Pascal.....	137
Théorème de superposition.....	51
Théorème des moments.....	153
théorème du moment cinétique.....	27, 28
Théorème du moment cinétique.....	27, 34
thermostat.....	147, 149
Thévenin.....	50
trajectoire.....	11
Transformation isobare.....	141
Transformation isochore.....	140
Transformation monobare.....	141
Transformations réversibles.....	140
transition de phase.....	150, 153
translation.....	13, 36, 39, 40, 46
Travail de transvasement.....	148
travail indiqué.....	142
trous d'Young.....	77, 79, 83
tube de champ.....	102

## V

valeur efficace.....	57
variables extensives.....	138, 144
variables intensives.....	138
Variance.....	151
Vecteur accélération.....	12
vecteur d'onde.....	75
vecteur de Poynting.....	120, 132
vecteur rotation.....	33, 36, 39, 40, 42
Vecteur vitesse.....	11
ventres de vibrations.....	127
vitesse aréolaire.....	28
vitesse cosmique.....	32
Vitesse de disparition.....	164
Vitesse de formation.....	164
vitesse de glissement.....	40, 47
vitesse de groupe.....	123
vitesse de libération.....	32
Vitesse de libération.....	32
Vitesse de phase.....	123
VSEPR.....	163



Achévé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD

B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL

Dépôt légal : mai 2008 - N° d'imprimeur : 805042

Imprimé en France