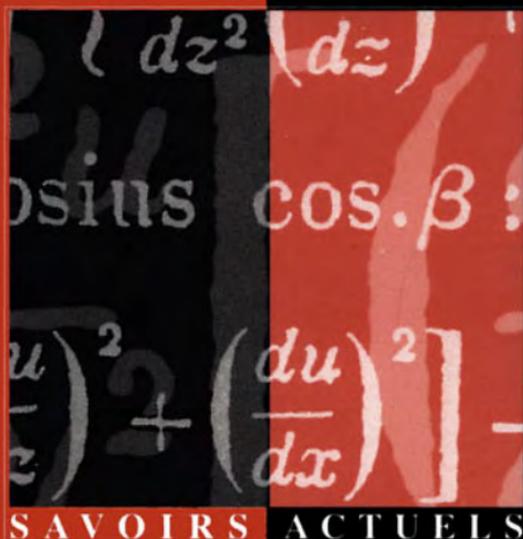


MATHÉMATIQUES

Daniel PERRIN

# Géométrie algébrique

*Une introduction*



 CNRS EDITIONS

  
EDP  
SCIENCES



# Géométrie algébrique

*Une introduction*

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

Daniel Perrin

*IUFM de Versailles  
Université Paris-Sud, Orsay*

# Géométrie algébrique

*Une introduction*

S A V O I R S      A C T U E L S

---

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

© 2001, **EDP Sciences**, 7 avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,  
91944 Les Ulis Cedex A.  
**CNRS ÉDITIONS**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

1<sup>re</sup> édition :

© 1995 **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tel. (1) 43.26.95.35.

ISBN 2-86883-374-8

ISBN 2-271-05271-8

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>ix</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0 La géométrie algébrique . . . . .	1
1 Quelques objets . . . . .	1
2 Quelques problèmes . . . . .	4
<b>I Ensembles algébriques affines</b>	<b>9</b>
1 Ensembles algébriques affines, topologie de Zariski . . .	9
2 Idéal d'un ensemble algébrique affine . . . . .	12
3 Irréductibilité . . . . .	14
4 Le Nullstellensatz (ou théorème des zéros de Hilbert) . .	16
5 Un premier pas vers Bézout . . . . .	21
6 Les morphismes : une première approche . . . . .	22
Exercices . . . . .	27
<b>II Ensembles algébriques projectifs</b>	<b>29</b>
0 Motivation . . . . .	29
1 L'espace projectif . . . . .	29
2 Homographies . . . . .	31
3 Lien affine projectif . . . . .	31
4 Ensembles algébriques projectifs . . . . .	34
5 Idéal d'un ensemble algébrique projectif . . . . .	36
6 Un anneau gradué associé à un ensemble algébrique projectif	37

7	Appendice : anneaux gradués . . . . .	38
	Exercices . . . . .	40
<b>III</b>	<b>Faisceaux et variétés</b>	<b>43</b>
0	Motivations . . . . .	43
1	La notion de faisceau . . . . .	44
2	Le faisceau structural d'un ensemble algébrique affine . .	47
3	Les variétés affines . . . . .	50
4	Les variétés algébriques . . . . .	52
5	Anneaux locaux . . . . .	55
6	Faisceaux de modules . . . . .	56
7	Faisceaux de modules sur une variété algébrique affine .	59
8	Les variétés projectives . . . . .	61
9	Faisceaux de modules sur les variétés algébriques projectives	66
10	Deux suites exactes importantes . . . . .	70
11	Exemples de morphismes . . . . .	71
	Exercices A . . . . .	74
	Exercices B . . . . .	78
<b>IV</b>	<b>Dimension</b>	<b>82</b>
0	Introduction . . . . .	82
1	Définition topologique, lien avec l'algèbre . . . . .	82
2	Dimension et nombre d'équations . . . . .	86
3	Morphismes et dimension . . . . .	91
4	Annexe : morphismes finis . . . . .	98
	Exercices . . . . .	99
<b>V</b>	<b>Espaces tangents, points singuliers</b>	<b>103</b>
0	Introduction . . . . .	103
1	Espaces tangents . . . . .	104
2	Points singuliers . . . . .	108
3	Anneaux locaux réguliers . . . . .	111
4	Le cas des courbes . . . . .	112
	Exercices . . . . .	115
<b>VI</b>	<b>Le théorème de Bézout</b>	<b>119</b>
0	Introduction . . . . .	119
1	Multiplicités d'intersection . . . . .	119
2	Le théorème de Bézout . . . . .	124
	Exercices . . . . .	130

<b>VII Cohomologie des faisceaux</b>	<b>134</b>
0 Introduction . . . . .	134
1 Un peu d'algèbre homologique . . . . .	136
2 La cohomologie de Čech . . . . .	138
3 Théorèmes d'annulation . . . . .	144
4 La cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ . . . . .	145
Exercices . . . . .	151
<b>VIII Genre arithmétique des courbes, théorème de Riemann-Roch, forme faible</b>	<b>154</b>
0 Introduction : la caractéristique d'Euler-Poincaré . . . . .	154
1 Degré et genre d'une courbe projective, Riemann-Roch 1 . . . . .	155
2 Diviseurs sur une courbe, Riemann-Roch 2 . . . . .	163
Exercices . . . . .	173
<b>IX Applications rationnelles, genre géométrique, courbes unicursales</b>	<b>176</b>
0 Introduction . . . . .	176
1 Applications rationnelles . . . . .	176
2 Le cas des courbes . . . . .	179
3 Normalisation : la voie algébrique . . . . .	183
4 Éclatements affines . . . . .	187
5 Éclatements globaux . . . . .	194
6 Appendice : retour sur les démonstrations précédentes . . . . .	202
<b>X Liaison des courbes gauches</b>	<b>204</b>
0 Introduction . . . . .	204
1 Idéaux et résolutions . . . . .	205
2 Courbes ACM . . . . .	212
3 Liaison des courbes gauches . . . . .	221
Exercices . . . . .	230
<b>Mémento d'algèbre</b>	<b>232</b>
1 Anneaux . . . . .	232
2 Produits tensoriels . . . . .	238
3 Bases de transcendance . . . . .	241
4 Quelques exercices d'algèbre . . . . .	242
<b>Appendice. Les schémas</b>	<b>244</b>
0 Introduction . . . . .	244
1 Schémas affines . . . . .	245

2	Schémas . . . . .	245
3	Ce que cela change de travailler avec des schémas . . . .	246
4	Ce que cela apporte de travailler avec des schémas . . . .	247
5	Un Bertini schématique . . . . .	248
<b>Recueil de problèmes</b>		<b>250</b>
	Problème I . . . . .	250
	Problème II . . . . .	252
	Problème III . . . . .	254
	Problème IV . . . . .	256
	Problème V . . . . .	258
	Problème VI . . . . .	259
	Problème VII . . . . .	262
	Problème VIII . . . . .	266
	Problème IX . . . . .	269
	Partiel, décembre 1991 . . . . .	272
	Examen, janvier 1992 . . . . .	274
	Examen, juin 1992 . . . . .	278
	Examen, janvier 1993 . . . . .	280
	Examen, juin 1993 . . . . .	284
	Examen, février 1994 . . . . .	287
<b>Références bibliographiques</b>		<b>293</b>
<b>Index terminologique</b>		<b>295</b>
<b>Index des notations</b>		<b>300</b>

# Avant-propos

Cet ouvrage a pour base un cours fondamental de troisième cycle donné en 1991-92, 1992-93 et 1993-94 à l'Université Paris Sud (Orsay). Le cours comportait une cinquantaine d'heures à raison de  $3/4$  de cours et de  $1/4$  d'exercices. Il s'adressait à des étudiants n'ayant jamais abordé la géométrie algébrique. Vu le temps imparti, il ne peut s'agir, évidemment, que d'une introduction à une partie de ce domaine. Le choix opéré ici est celui de la géométrie projective sur un corps algébriquement clos, traitée par des voies exclusivement algébriques.

Les principes didactiques de ce cours ont été les suivants :

1) Partir de problèmes dont la formulation est simple, mais dont la solution est non triviale (théorème de Bézout sur l'intersection des courbes planes, courbes unicursales). En 1993-1994 le chapitre sur les courbes unicursales a été remplacé par celui sur la liaison des courbes gauches.

2) Introduire à cette occasion les outils fondamentaux de la géométrie algébrique : dimension, singularités, faisceaux, variétés, cohomologie. En ce qui concerne les schémas, on a choisi de ne pas en développer le formalisme sauf dans le cas fini (pour parler de multiplicités d'intersection). Un petit résumé est donné en appendice. On en retient surtout l'usage des éléments nilpotents.

3) Limiter au maximum la part de l'algèbre commutative en admettant un certain nombre de résultats (ou en se contentant de les montrer dans des cas particuliers) lorsque leur démonstration n'est pas essentielle pour leur utilisation. Les résultats fondamentaux utilisés sont rassemblés dans un mémento avec des références. Certains sont proposés en exercices ou en problèmes.

4) Ne pas craindre d'admettre certains résultats du corpus lui-même, lorsque leur sens n'est pas altéré par l'absence de démonstration. C'est le cas par exemple pour l'unicité de la cohomologie ou pour certains points techniques du chapitre IX. Plus généralement, on a essayé de mettre l'accent sur la compréhension des phénomènes plus que sur la technique.

5) Pour chaque sujet abordé, fournir un certain nombre d'exercices et de problèmes. Les textes donnés aux différents examens ont été annexés à l'ensemble.

Il est clair que sur un tel sujet on peut difficilement prétendre à l'originalité. Ce travail s'est donc largement inspiré des ouvrages existants et notamment des livres d'Hartshorne [H], Fulton [F], Mumford [M] et Shafarevitch [Sh].

Je remercie Mireille Martin-Deschamps pour sa lecture attentive et ses remarques. Je remercie aussi les auditeurs de ce cours qui m'ont signalé quelques erreurs et proposé des améliorations, et notamment Abdelkader Belkilani, Nicusor Dan, Leopoldo Kulesz, Vincent Lafforgue et Thomas Péteul.

Enfin, je suis heureux de remercier Claude Sabbah d'avoir accueilli cet ouvrage dans la collection *Savoirs Actuels* et de m'avoir prêté son concours pour la mise au point du texte définitif.

# Notations

On désigne par  $\mathbf{N}$  (resp.  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ ) l'ensemble des entiers  $\geq 0$  (resp. des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes). On note  $\mathbf{F}_q$  le corps fini à  $q$  éléments.

On note  $|E|$  le cardinal d'un ensemble  $E$ . On note  $[x]$  la partie entière d'un nombre réel. La notation  $\binom{n}{p}$  désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

On convient que ce coefficient est nul pour  $n < p$ .

Si  $f : G \rightarrow H$  est un homomorphisme de groupes abéliens (ou de modules, ou d'espaces vectoriels) on note  $\text{Ker } f$  (resp.  $\text{Im } f$ , resp.  $\text{Coker } f$ ) son noyau (resp. son image, resp. son conoyau). On rappelle que l'on a, par définition,  $\text{Coker } f = H/\text{Im } f$ .

Une suite exacte de groupes abéliens (ou de modules, ou d'espaces vectoriels) :

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$$

consiste en la donnée de deux homomorphismes  $u, v$  vérifiant :

- a)  $u$  injectif
- b)  $v$  surjectif
- c)  $\text{Im } u = \text{Ker } v$ .

On se reportera au mémento d'algèbre pour des définitions et notations complémentaires.

Dans les exercices et les problèmes, le signe ¶ indique une question difficile.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Introduction

## 0. La géométrie algébrique

La géométrie algébrique est l'étude des variétés algébriques : toutes celles qui sont définies comme ensembles des zéros d'un ou plusieurs polynômes. On peut en faire remonter l'origine à Descartes et de nombreux mathématiciens s'y sont illustrés : Abel, Riemann, Poincaré, M. Noether, l'école italienne avec Severi, plus récemment Weil, Zariski et Chevalley. Elle a subi dans les années 1950-1960 un bouleversement gigantesque sous l'impulsion de J.-P. Serre et surtout d'A. Grothendieck et son développement a été considérable. C'est maintenant une discipline fondamentale, non seulement pour elle-même, mais aussi dans de nombreuses parties des mathématiques.

## 1. Quelques objets

Il y a deux catégories essentielles de variétés algébriques : les variétés affines et les variétés projectives. Ces dernières sont les plus intéressantes, mais nécessitent quelques définitions qu'il est prématuré de donner ici ; nous les verrons au chapitre II.

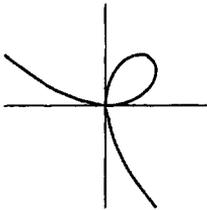
Pour définir une variété affine, on considère une famille de polynômes  $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$  à coefficients dans un corps  $k$ . Alors, le sous-ensemble  $V$  de l'espace affine  $k^n$  défini par les équations  $P_1 = \dots = P_r = 0$  est une variété algébrique affine. Voyons rapidement quelques exemples :

a) Si les  $P_i$  sont de degré 1 on retrouve les sous-variétés linéaires affines de  $k^n$  : droites, plans, etc.

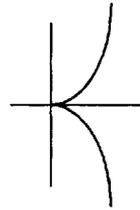
b) Prenons  $n = 2$ ,  $r = 1$  et  $k = \mathbf{R}$ , de sorte que  $k^2$  est un plan réel et

$V$ , définie par l'équation  $P(X, Y) = 0$ , une "courbe" plane. Par exemple si  $P$  est de degré 2 on retrouve les coniques (ellipse  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ , hyperbole  $XY - 1 = 0$ , parabole  $Y - X^2 = 0$ ).

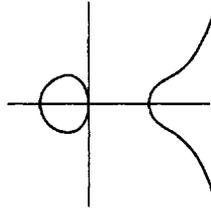
Si  $P$  est de degré 3 on dit que la courbe est une cubique, par exemple  $Y^2 - X^3 = 0$  (cubique cuspidale, i.e. avec un rebroussement, en anglais cusp),  $X^3 + Y^3 - XY = 0$  (cubique nodale, i.e. à point double ordinaire ou nœud),  $Y^2 - X(X - 1)(X + 1) = 0$  (cubique non singulière appelée aussi courbe elliptique, cf. plus loin).



$$X^3 + Y^3 - XY = 0$$

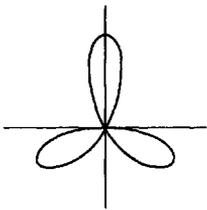


$$Y^2 - X^3 = 0$$

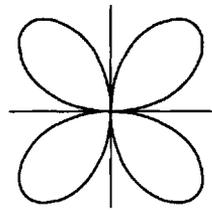


$$Y^2 - X(X - 1)(X + 1) = 0$$

Il y a bien entendu des courbes de tout degré. Signalons seulement les deux courbes suivantes :  $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$  (trifolium) et  $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$  (quadrifolium).



$$(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$$



$$(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$$

c) Dans l'espace  $k^3$  une équation  $F(X, Y, Z) = 0$  définit cette fois une surface. Par exemple, si  $F$  est de degré 2 on obtient une quadrique :

$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$  (sphère),  $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0$  (hyperboloïde à une nappe), etc.

d) Deux équations dans  $k^3$  définissent en général une courbe gauche, par exemple,  $Y - X^2 = 0$  et  $Z - X^3 = 0$  donnent une cubique gauche (ensemble des points  $(u, u^2, u^3)$  pour  $u \in k$ ).

e) Il est clair que l'étude des variétés algébriques dépend essentiellement du corps de base. Ainsi, sur le corps des réels on peut avoir quelques surprises (regarder les "courbes" planes d'équations  $X^2 + Y^2 + 1 = 0$  ou  $X^2 + Y^2 = 0$ ). Le cas le plus agréable est celui où  $k$  est *algébriquement clos* (par exemple  $k = \mathbf{C}$ ). C'est le cadre dans lequel nous travaillerons. Ce choix, qui revient, en fait, à s'intéresser davantage aux équations des variétés qu'à leurs points, est partiellement justifié par le fait que l'on peut plonger n'importe quel corps dans un corps algébriquement clos.<sup>1</sup>

Bien entendu le point de vue inverse est tout aussi intéressant. Il conduit par exemple à la géométrie algébrique réelle (cas  $k = \mathbf{R}$ ) ou à l'arithmétique (cas  $k = \mathbf{Q}$ , voire  $\mathbf{Z}$ , ou  $k$  fini). Ainsi les points sur  $\mathbf{Z}$  de  $X^n + Y^n - Z^n = 0$  sont l'objet de la célèbre conjecture (théorème?) de Fermat. De même la recherche des points rationnels de la courbe  $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) = 0$  est un domaine très ouvert (arithmétique des courbes elliptiques). Deux grandes conjectures concernant ces questions ont récemment été résolues : conjecture de Weil (Deligne, 1974) et de Mordell (Faltings, 1982). Mais ceci est une autre histoire.

f) Par ailleurs les variétés algébriques se rencontrent dans de nombreux domaines des mathématiques. Un exemple simple est celui des matrices et des groupes classiques. Ainsi le groupe

$$SL_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid \det(A) = 1\}$$

est une variété algébrique dans l'espace affine des matrices (car le déterminant est un polynôme). De même le groupe orthogonal :

$$O_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid {}^tAA = I\},$$

ou encore l'ensemble des matrices de rang  $\leq r$  sont des variétés algébriques affines. Les notions de géométrie algébrique que nous allons introduire (par exemple la dimension au chapitre IV, les espaces tangents au chapitre V) donnent des outils fondamentaux pour étudier ces variétés.

<sup>1</sup>Dans le cas où le corps de base est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  les objets que nous étudions apparaissent aussi dans d'autres branches des mathématiques (topologie, géométrie différentielle,...). En fait, la différence entre ces disciplines se situe plus au niveau des fonctions que l'on y reconnaît pour bonnes qu'à celui des objets (cf. Ch. III).

g) Enfin, signalons un exemple de niveau de complexité supérieur : les familles de variétés algébriques (par exemple l'ensemble des droites de  $k^3$ , ou l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  d'un espace de dimension  $n$ ) peuvent souvent être elles-mêmes munies de structures de variétés algébriques (un peu comme l'ensemble des parties d'un ensemble est aussi un ensemble) et on peut alors leur appliquer les techniques de la géométrie algébrique.

## 2. Quelques problèmes

L'un des principes de ce cours est de prendre comme point de départ des problèmes simples dans leur énoncé mais dont la solution nécessite la mise en œuvre de techniques de géométrie algébrique assez élaborées (les faisceaux, cf. Ch. III, la cohomologie, cf. Ch. VII). En voici deux exemples : le problème de Bézout et le problème des courbes unicursales. On abordera aussi au chapitre X le problème, moins élémentaire, de la liaison des courbes gauches.

### a. Intersections : le théorème de Bézout

Si on étudie les intersections d'une conique (penser à une ellipse) et d'une droite du plan on voit qu'on a au plus deux points d'intersection. Avec une droite et une cubique on a au plus trois points, avec deux coniques, au plus quatre points. La question naturelle est alors de se demander si deux courbes planes  $C$  et  $C'$ , de degrés  $d$  et  $d'$ , ont toujours au plus  $dd'$  points d'intersection et dans quel cadre se placer pour obtenir le théorème idéal : deux telles courbes ont exactement  $dd'$  points d'intersection. Il y a manifestement quatre obstructions à la validité de cette dernière assertion :

a) Les deux courbes peuvent avoir une composante commune, ainsi les courbes d'équations  $XY = 0$  et  $X(Y - X) = 0$  ont en commun l'axe des  $y$  (i.e. la courbe  $X = 0$ ) et l'intersection est alors infinie. On devra donc supposer les courbes  $C$  et  $C'$  sans composante commune et avoir auparavant précisé cette notion de composante (cf. Ch. I).

b) Si  $k$  est le corps des réels on sait bien que l'assertion n'est pas toujours vraie. Par exemple le cercle  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$  et la droite  $X = 2$  ne se coupent pas dans  $\mathbf{R}^2$ . En revanche, dans  $\mathbf{C}^2$  ils ont bien deux points d'intersection :  $(2, \mp i\sqrt{3})$ . On supposera donc, pour avoir le théorème idéal, que le corps de base est algébriquement clos (cf. aussi 1.e).

c) Un autre contre-exemple essentiel au théorème idéal est celui de deux droites parallèles, ou d'une hyperbole et de son asymptote qui n'ont pas de point d'intersection. Là encore on voit bien ce qu'il faut faire pour surmonter cette difficulté : introduire des points à l'infini. Pour nous, cela signifiera qu'il faut travailler dans l'espace projectif et non dans l'espace affine (cf. Ch. II).

d) Enfin, si l'on reprend le cas d'un cercle et d'une droite il est encore un cas où le nombre de points d'intersection n'est pas égal à deux, c'est le cas où la droite est tangente au cercle : les courbes  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$  et  $X = 1$  se coupent en l'unique point  $(1, 0)$ . Cependant si on résout le système formé par ces deux équations on tombe sur la relation  $y^2 = 0$ , de sorte que la solution  $y = 0$  est racine double : le point d'intersection est multiple et il doit compter pour deux. De même, si on coupe la cubique  $Y^2 - X^3 = 0$  par la droite  $Y = tX$  on trouve deux points seulement :  $(t^2, t^3)$  et  $(0, 0)$ , mais ce dernier est double (ceci est dû à la singularité de la cubique au point considéré, cf. Ch. V). Bref, il va falloir définir soigneusement la multiplicité d'intersection de deux courbes en un point (le lecteur se penchera sur le cas du trifolium et du quadrifolium en  $(0, 0)$  pour se convaincre que ce n'est pas entièrement évident, cf. Ch. VI).

Avec toutes ces précautions on aura alors le résultat idéal (cf. Ch. VI) :

**Théorème** (de Bézout). *Soient  $C, C'$  deux courbes projectives planes de degrés  $d, d'$ , définies sur un corps algébriquement clos, sans composante commune. Alors, le nombre de points d'intersection de  $C$  et  $C'$ , comptés avec leurs multiplicités, est égal à  $dd'$ .*

Ainsi le trifolium et le quadrifolium ont en commun, outre le point  $(0, 0)$  de multiplicité 14, quatre points réels (simples) à distance finie et deux points imaginaires à l'infini, chacun de multiplicité 3, ce qui donne bien 24 en tout.

## b. Paramétrages, courbes unicursales, genre

Soit  $C$  une courbe plane d'équation  $f(X, Y) = 0$ . Un paramétrage rationnel de  $C$  est donné par deux fractions rationnelles  $\alpha(T)$  et  $\beta(T)$  telles que l'on ait identiquement  $f(\alpha(T), \beta(T)) = 0$ . Le calcul de l'intersection de la cubique cuspidale  $Y^2 - X^3 = 0$  avec une droite passant par l'origine effectué ci-dessus fournit un exemple de paramétrage rationnel :

$x = t^2, y = t^3$  et la question fondamentale est de déterminer les courbes qui admettent un tel paramétrage (ces courbes sont dites rationnelles ou unicursales). Voici deux raisons (outre la possibilité de construction effective dans le cas réel) qui justifient l'intérêt porté à ces courbes :

1) *Les équations diophantiennes.* Il s'agit d'équations polynomiales dont on cherche des solutions entières. Lorsqu'on a des paramétrages c'est facile. Par exemple, cherchons à résoudre l'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  dans  $\mathbf{Z}$ , ou encore, ce qui revient au même,  $(x/z)^2 + (y/z)^2 - 1 = 0$  dans  $\mathbf{Q}$ . On cherche donc les points rationnels du cercle  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ . Pour cela on paramètre ce cercle par  $\cos u, \sin u$ , ou mieux, avec  $t = \operatorname{tg}(u/2)$ , par

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

et on a ainsi en prenant  $t \in \mathbf{Q}$  tous les points rationnels du cercle (car, réciproquement,  $t$  est donné par  $t = y/(1 + x)$ ). On en déduit aussitôt les points entiers de  $X^2 + Y^2 = Z^2 : x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$  avec  $a, b \in \mathbf{Z}$ .

2) *Calcul de primitives.* Ce problème, s'il a perdu de son importance aujourd'hui, a été à l'origine du développement de la géométrie algébrique au XIX<sup>e</sup> siècle, avec notamment les travaux d'Abel et de Riemann.

Considérons une primitive de la forme

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx.$$

Elle met en jeu la conique  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  (i.e.  $y^2 = ax^2 + bx + c$ ). Plus généralement soit  $y = \varphi(x)$  une fonction algébrique (i.e. une fonction qui comporte, comme ci-dessus, des radicaux). On suppose que  $y = \varphi(x)$  est la forme résolue d'une équation implicite  $f(x, y) = 0$  avec  $f$  polynomiale. On cherche la primitive

$$\int g(x, \varphi(x)) \, dx$$

où  $g$  est une fraction rationnelle.

(Par exemple, le cas  $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$ , que l'on rencontre lorsqu'on calcule la longueur d'un arc d'ellipse, a donné naissance à la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques.)

Si la courbe  $f(x, y) = 0$  admet une paramétrisation rationnelle  $x = \alpha(t), y = \beta(t)$  l'intégrale devient alors :

$$\int g(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) \, dt$$

que l'on sait calculer puisqu'il s'agit de la primitive d'une fraction rationnelle.

### Être unicursale ou pas : quelques exemples

1) Les droites sont des courbes unicursales.

2) Les coniques aussi : il suffit de prendre un point  $m_0$ , disons  $(0, 0)$ , sur la courbe et de couper par une droite variable  $y = tx$  passant par ce point. Le deuxième point d'intersection est alors repéré rationnellement par le paramètre  $t$ .

3) La même méthode s'applique aux cubiques singulières. On a vu ci-dessus le cas de  $Y^2 - X^3 = 0$ ; de même  $X^3 + Y^3 - XY = 0$  est paramétrée par

$$x = \frac{t}{1+t^3} \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

4) En revanche les cubiques non singulières ne sont pas unicursales (sinon l'arithmétique des courbes elliptiques ne poserait pas tant de problèmes!) Par exemple les courbes

$$Y^2 = X(X-1)(X+1) \quad \text{ou} \quad X^3 + Y^3 - 1 = 0$$

ne sont pas unicursales. Plus généralement nous allons montrer que, si la caractéristique du corps ne divise pas  $n$ , la courbe  $X^n + Y^n - 1 = 0$  avec  $n \geq 3$  n'est pas unicursale (si elle l'était on aurait des solutions de l'équation de Fermat!).

On suppose qu'on a un paramétrage  $x = p(t)/r(t)$ ;  $y = q(t)/r(t)$  avec  $p, q, r \in k[t]$  sans facteur commun. On a donc  $p^n + q^n - r^n = 0$ , de sorte que  $p, q, r$  sont deux à deux premiers entre eux. Si on dérive cette relation on obtient

$$p^{n-1}p' + q^{n-1}q' - r^{n-1}r' = 0.$$

Supposons, par exemple, que le degré de  $p$  soit supérieur ou égal aux deux autres. On obtient, après multiplication par  $r$  :

$$p^{n-1}(rp' - pr') = q^{n-1}(qr' - rq')$$

et comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux,  $p^{n-1}$  divise  $(qr' - rq')$  ce qui, comme  $n \geq 3$ , est impossible pour une raison de degré.

5) Attention, l'exemple de la courbe  $C$  d'équation  $y - x^3 = 0$ , manifestement unicursale, montre qu'il ne faut pas se contenter de regarder d'éventuels points singuliers à distance finie ( $C$  n'en a pas), mais aussi à l'infini (où  $C$  a un rebroussement).

Pour résoudre le problème de savoir si une courbe est unicursale ou non on introduira aux chapitres VIII et IX un invariant de  $C$ , son genre géométrique  $g(C)$ , qui est un entier  $\geq 0$  et on prouvera l'équivalence :

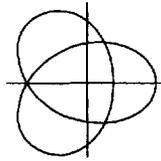
$$C \text{ unicursale} \iff g(C) = 0.$$

Encore faut-il être capable de calculer le genre pour vérifier s'il est nul ou non. Pour une courbe plane non singulière (y compris à l'infini) de degré  $d$  on montre la formule très simple  $g = (d-1)(d-2)/2$ . On vérifie ainsi que, si  $d \geq 3$ , une telle courbe n'est pas unicursale.

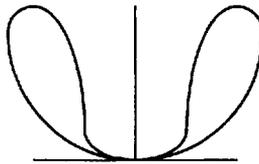
En revanche, si  $C$  a des points singuliers, le genre peut être plus petit que la valeur ci-dessus : chaque point double ordinaire (i.e. à tangentes distinctes) enlève 1 au genre. Plus généralement un point multiple ordinaire d'ordre  $r$  enlève  $r(r-1)/2$ . Ainsi une courbe de degré 4 est unicursale dès qu'elle a un point triple (par exemple le trifolium) ou trois points doubles (par exemple la courbe d'équation :

$$4(X^2 + Y^2)^2 - 4X(X^2 - 3Y^2) - 27(X^2 + Y^2) + 27 = 0).$$

Si les points multiples ne sont pas ordinaires (par exemple si ce sont des rebroussements) les choses sont plus compliquées et le genre peut être encore plus petit. Ainsi la courbe de degré 4 d'équation  $(X^2 - Y)^2 + Y^3(Y - 1) = 0$  est unicursale bien qu'elle n'ait qu'un seul point double. Nous donnerons au chapitre IX un algorithme permettant de calculer le genre dans tous les cas.



$$4(X^2 + Y^2)^2 - 4X(X^2 - 3Y^2) - 27(X^2 + Y^2) + 27 = 0$$



$$(X^2 - Y)^2 + Y^3(Y - 1) = 0$$

# Chapitre I

## Ensembles algébriques affines

Dans tout ce chapitre  $k$  désigne un corps commutatif.

### 1. Ensembles algébriques affines, topologie de Zariski

Soit  $n$  un entier  $> 0$ . On se place dans l'espace  $k^{n1}$ . Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un point de  $k^n$  et si  $P(X_1, \dots, X_n)$  est un polynôme, on note  $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ .

Les premiers objets fondamentaux sont les ensembles algébriques affines que nous introduisons ci-dessous.

**Définition 1.1.** Soit  $S$  une partie quelconque de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . On pose :

$$V(S) = \{x \in k^n \mid \forall P \in S, P(x) = 0\},$$

de sorte que les  $x \in V(S)$  sont les zéros communs à tous les polynômes de  $S$ . On dit que  $V(S)$  est l'ensemble algébrique affine défini par  $S$ . On notera souvent, dans le cas d'un ensemble fini,  $V(F_1, \dots, F_r)$  au lieu de  $V(\{F_1, \dots, F_r\})$ .

---

<sup>1</sup>En fait, tout ce qui suit est valable dans l'espace affine de dimension  $n$  sur  $k$ , que l'on peut noter  $\mathbf{A}^n(k)$ , indépendamment du choix d'un repère : l'opération du groupe affine, translations et applications linéaires bijectives, est innocente, cf. 6.3.2.

*Exemples 1.2*

1) On a  $V(\{1\}) = \emptyset$ ,  $V(\{0\}) = k^n$ , le vide et l'espace tout entier sont donc des ensembles algébriques affines.

2) Si  $n = 1$  et si  $S$  n'est pas réduit à 0,  $V(S)$  est un ensemble fini : les ensembles algébriques affines de la droite sont la droite et les ensembles finis.

3) Si  $n = 2$ , on a, outre le vide et le plan, les "courbes"  $V(F)$ , et les points :  $V(X, Y) = \{(0, 0)\}$ ,  $V(X(X - 1), Y) = \{(0, 0), (1, 0)\}$  ...

*Remarques 1.3*

0) L'application  $V$  est décroissante : si  $S \subset S'$ , on a  $V(S') \subset V(S)$ .

1) Si  $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ , notons  $\langle S \rangle$  l'idéal engendré par  $S$  :  $\langle S \rangle$  est formé des polynômes  $f = \sum_{i=1}^r a_i f_i$  avec  $f_i \in S$  et  $a_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ .

Alors, on a  $V(S) = V(\langle S \rangle)$ . (Par décroissance on a  $V(\langle S \rangle) \subset V(S)$ . Réciproquement, si  $x \in V(S)$ , il annule les  $f_i \in S$ , donc aussi les  $f \in \langle S \rangle$ .) On peut donc pour étudier les ensembles algébriques affines se limiter aux  $S$  qui sont des idéaux, ou, au contraire, aux générateurs de ceux-ci.

2) Comme  $k[X_1, \dots, X_n]$  est noethérien, tout idéal est de type fini :  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  et donc tout ensemble algébrique affine est défini par un nombre fini d'équations :  $V(I) = V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r)$ .

Les ensembles de la forme  $V(f)$  sont appelés des hypersurfaces (en toute rigueur, il faudrait limiter l'usage de ce mot au cas où  $f$  n'est pas constant et où  $k$  est algébriquement clos, cf. Ch. IV) et on a donc montré ci-dessus que tout ensemble algébrique affine est intersection finie d'hypersurfaces.

3) On note, par exemple dans  $k^2$ , que deux polynômes peuvent définir le même ensemble algébrique affine :  $V(X) = V(X^2)$ . (Mais, plus tard, on aura envie de dire que  $V(X^2)$  est l'axe des  $y$  compté deux fois, patience!)

4) Un point de  $k^n$  est un ensemble algébrique affine :

si  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , on a  $\{a\} = V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ .

5) Une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est un :

$$\bigcap_j V(S_j) = V\left(\bigcup_j S_j\right).$$

(Si on veut n'utiliser que des idéaux il faut remplacer l'union des  $S_j$  par leur somme.)

6) Une réunion finie d'ensembles algébriques affines en est un. Il suffit de le voir dans le cas de deux ensembles définis par des idéaux  $I$  et  $J$ . Montrons qu'on a  $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ . En effet, on a  $IJ \subset I, J$  (cf. Mémento 1.2.a) donc  $V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$  par décroissance de  $V$ . Réciproquement, soit  $x \in V(IJ)$  et supposons  $x \notin V(I)$ . Il existe donc  $P \in I$  avec  $P(x) \neq 0$ . Alors, si  $Q \in J$ , on a  $PQ \in IJ$ , donc  $(PQ)(x) = 0$ , donc  $Q(x) = 0$  et  $x \in V(J)$ . Le même raisonnement montre aussi qu'on a  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ .

7) On déduit des points 4) et 6) que tout ensemble fini est un ensemble algébrique affine.

#### 1.4. La topologie de Zariski

Les remarques 5) et 6) ci-dessus montrent que les ensembles algébriques affines sont les fermés d'une topologie sur  $k^n$ , appelée topologie de Zariski. Bien entendu, toute partie  $X$  de  $k^n$  hérite de la topologie induite (dite encore de Zariski) dont les fermés sont les  $X \cap V(I)$ ; en particulier, si  $X$  est un ensemble algébrique affine, les fermés sont les ensembles algébriques affines contenus dans  $X$ .

**Attention**, la topologie de Zariski est très différente des topologies usuelles et il faut en acquérir une intuition ad hoc. Pour simplifier, disons que les fermés y sont très petits : dans  $k^3$  les fermés sont les surfaces, les courbes ou les points (comparer aux boules fermées des topologies usuelles). Au contraire, les ouverts sont très gros, ainsi, deux ouverts non vides se coupent toujours (la topologie n'est donc pas séparée). On découvrira une autre différence notable en comparant la topologie de Zariski sur  $k^2$  et la topologie produit des topologies de Zariski sur  $k$  (cf. Problème I).

#### 1.5. Les ouverts standard

Soit  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  et  $V(f)$  l'hypersurface définie par  $f$ . L'ensemble  $D(f) = k^n - V(f)$  est un ouvert de Zariski de  $k^n$ , dit ouvert *standard*. Les ouverts standard forment une base de la topologie (cf. Mémento 1.8); plus précisément, tout ouvert  $U$  est réunion finie d'ouverts standard : c'est l'assertion duale de celle sur les intersections d'hypersurfaces 1.3.2.

## 2. Idéal d'un ensemble algébrique affine

On introduit une opération  $I$ , essentiellement duale de  $V$ , qui associe à un ensemble de points un idéal de l'anneau de polynômes :

**Définition 2.1.** Soit  $V$  un sous-ensemble de  $k^n$ . On appelle idéal de  $V$  l'ensemble :

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \forall x \in V, f(x) = 0\}.$$

Il s'agit donc des fonctions polynomiales nulles sur  $V$ . Pour voir que c'est bien un idéal, on considère l'homomorphisme d'anneaux

$$r : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{F}(V, k)$$

à valeurs dans l'anneau de toutes les fonctions de  $V$  dans  $k$ , qui à un polynôme associe la restriction à  $V$  de la fonction polynomiale associée. Le noyau de  $r$  est  $I(V)$  (qui est donc un idéal) et l'image de  $r$  est l'anneau  $\Gamma(V)$  des fonctions polynomiales (ou régulières) sur  $V$ , isomorphe à  $k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ . Cet anneau, qui est une  $k$ -algèbre de type fini (cf. Mémento 1.5), s'appelle l'*algèbre affine de  $V$*  et joue un rôle essentiel dans la suite.

La philosophie de ce qui précède est d'associer à l'objet géométrique  $V$  un objet algébrique  $I(V)$  (ou  $\Gamma(V)$ ) et d'établir un dictionnaire permettant de traduire les propriétés géométriques en propriétés algébriques et vice versa.

### Remarques 2.2

0) L'application  $I$  est décroissante.

1) Si  $V$  est un ensemble algébrique affine on a  $V(I(V)) = V$ . En effet, il est clair que  $V \subset V(I(V))$ . Réciproquement, si  $V = V(I)$ , on a  $I \subset I(V)$  et donc  $V = V(I) \supset V(I(V))$ .

2) Comme conséquence on voit que l'application  $V \mapsto I(V)$  est injective, ainsi si on a  $V \subset W$  et  $V \neq W$  il existe un polynôme nul sur  $V$  et non nul sur  $W$ .

3) Inversement, on a  $I \subset I(V(I))$ , mais, **attention**, il n'y a pas égalité en général. Il y a deux types d'obstructions à cela :

a) Lorsque le corps  $k$  n'est pas algébriquement clos,  $V(I)$  peut être anormalement petit, par exemple si  $k = \mathbf{R}$  et  $I = (X^2 + Y^2 + 1)$  on a  $V(I) = \emptyset$  (alors qu'on attendait une courbe), d'où  $I(V(I)) = k[X_1, \dots, X_n] \neq I$ . Même chose avec  $I = (X^2 + Y^2)$ .

b) L'opération  $I$  oublie les puissances : si  $n = 2$  et  $I = (X^2)$ ,  $V(I)$  est l'axe des  $y$  et on a  $I(V(I)) = (X) \neq I$ .

Cette question du rapport entre  $I$  et  $I(V(I))$  est fondamentale et sera élucidée au paragraphe 4.

### 2.3. Quelques exemples

a) On a  $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$ .

b) Pour  $I(k^n)$  on a la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** *On suppose  $k$  infini. Alors on a  $I(k^n) = 0$ .*

(Autrement dit, si une fonction polynomiale est nulle partout le polynôme correspondant est nul.)

**Attention**, on notera que l'assertion est fautive si  $k$  est fini : considérer le polynôme  $X^q - X$  sur  $\mathbf{F}_q$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . C'est clair si  $n = 1$  car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Au cran  $n$ , si  $P \neq 0$  et si  $P$  n'est pas constant on a, par exemple,

$$P = a_r(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^r + \dots$$

avec  $r \geq 1$  et  $a_r \neq 0$ . Il existe  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in k^{n-1}$ , d'après l'hypothèse de récurrence, tel que  $a_r(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ . Alors le polynôme  $P(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$  a au plus  $r$  racines, donc n'est pas nul pour tout  $x_n \in k$ .

c) On a  $I(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ .

L'inclusion  $\supset$  est claire. Inversement, si on a  $P(a_1, \dots, a_n) = 0$  on divise  $P$  successivement par les  $X_i - a_i$  (cf. Mémento 1.1.c) et on écrit ainsi :

$$P = (X_1 - a_1)Q_1 + \dots + (X_n - a_n)Q_n + c$$

avec  $c \in k$ . Mais  $c$  n'est autre que  $P(a_1, \dots, a_n)$ , qui est nul, donc  $P$  appartient à l'idéal  $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ .

d) Supposons  $k$  infini et calculons, dans  $k[X, Y]$ , l'idéal

$$I(V) = I(V(Y^2 - X^3)).$$

Il est clair que  $(Y^2 - X^3) \subset I(V)$ . Réciproquement, on sait que tout point de  $V$  s'écrit  $(t^2, t^3)$  avec  $t \in k$  (cf. Introduction, si  $x \neq 0$  il suffit de prendre  $t = y/x$  et si  $x = 0, t = 0$ ). Soit alors  $P \in I(V)$ . On divise  $P$  par  $Y^2 - X^3$  relativement à la variable  $Y$  (cf. Mémento 1.1.c) :

$$P = (Y^2 - X^3)Q(X, Y) + a(X)Y + b(X).$$

On a alors, pour tout  $t \in k$ ,  $P(t^2, t^3) = 0 = a(t^2)t^3 + b(t^2)$ . Comme  $k$  est infini on en déduit  $a(T^2)T^3 + b(T^2) = 0$  dans  $k[T]$ . En séparant les termes de degrés pairs et impairs on obtient  $a = b = 0$  et on a bien montré  $I(V) = (Y^2 - X^3)$ .

### 3. Irréductibilité

Si on considère dans  $k^2$  l'ensemble algébrique affine défini par  $XY = 0$ , il est réunion des deux axes de coordonnées qui sont eux-mêmes des ensembles algébriques affines, donc des fermés pour Zariski. C'est ce type de situation que nous étudions maintenant. L'idée est que, dans un tel cas, on va se ramener essentiellement à étudier chacun des morceaux.

**Proposition-définition 3.1.** *Soit  $X$  un espace topologique non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Si  $X = F \cup G$  avec  $F, G$  fermés, on a  $X = F$  ou  $X = G$ .*
  - ii) *Si  $U, V$  sont deux ouverts de  $X$  avec  $U \cap V = \emptyset$ , on a  $U = \emptyset$  ou  $V = \emptyset$ .*
  - iii) *Tout ouvert non vide de  $X$  est partout dense.*
- On dit alors que  $X$  est irréductible.*

Avec les topologies usuelles cette situation ne se produit pas, ainsi un espace topologique séparé qui n'est pas réduit à un point n'est jamais irréductible.

Dans le cas des ensembles algébriques affines on a une caractérisation très simple des irréductibles en termes de l'idéal  $I(V)$  (ceci est un premier exemple de traduction algèbre-géométrie).

**Théorème 3.2.** *Soit  $V$  un ensemble algébrique affine muni de sa topologie de Zariski. Alors, on a :  $V$  irréductible  $\iff I(V)$  premier  $\iff \Gamma(V)$  intègre.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver la première équivalence. Supposons  $V$  irréductible et soient  $f, g$  tels que  $fg \in I(V)$ . On a donc

$$V = V(I(V)) \subset V(f) \cup V(g) \text{ donc } V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V)$$

et comme  $V$  est irréductible on a, par exemple,  $V(f) \cap V = V$ , i.e.  $V \subset V(f)$  et  $f \in I(V)$ .

Réciproquement, si  $I(V)$  est premier et si  $V = V_1 \cup V_2$  avec  $V_i$  fermé,  $V_i \neq V$ , on a  $I(V) \subset I(V_i)$  et  $I(V) \neq I(V_i)$  (cf. 2.2.2). Soit alors  $f_i \in I(V_i) - I(V)$ ,  $f_1 f_2$  est nul sur  $V$ , donc est dans  $I(V)$ , contradiction.

**Corollaire 3.3.** *On suppose  $k$  infini. L'espace affine  $k^n$  est irréductible.*

*Démonstration.* On a  $I(k^n) = (0)$  (cf. 2.4) et cet idéal est premier car  $k[X_1, \dots, X_n]$  est intègre.

Si  $k$  est fini l'assertion est fautive puisque  $k^n$  est fini donc réunion finie de ses points qui sont des fermés.

**Application 3.4** (prolongement des identités algébriques). *On suppose  $k$  infini. Soient  $V$  un ensemble algébrique affine  $\neq k^n$  et  $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ . On suppose  $P$  nul en dehors de  $V$ . Alors  $P$  est nul.*

C'est clair. Ce théorème permet de faire sur un corps quelconque des raisonnements de densité analogues à ceux pratiqués sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  avec les topologies usuelles. Une application classique est de montrer qu'une identité vraie sur les matrices carrées inversibles l'est sur toutes (comme le déterminant est polynomial, les matrices non inversibles forment un fermé). Par exemple, si on note  $c_i(A)$  le coefficient de  $X^i$  dans le polynôme caractéristique  $\det(I - XA)$  on a  $c_i(AB) = c_i(BA)$ . (Traiter d'abord le cas où  $B$  est inversible en utilisant la relation  $AB = B^{-1}(BA)B$ .)

La proposition suivante nous sera utile au chapitre IV :

**Proposition 3.5.** *Soit  $X$  un espace topologique et soit  $Y$  un sous-espace de  $X$ . Alors, si  $Y$  est irréductible il en est de même de son adhérence  $\bar{Y}$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  on a des bijections réciproques  $Y \mapsto \bar{Y}$  et  $Z \mapsto Z \cap U$  entre les parties fermées irréductibles  $Y$  de  $U$  et les parties fermées irréductibles  $Z$  de  $X$  qui rencontrent  $U$ .*

*Démonstration.* Si  $\bar{Y} = F_1 \cup F_2$  avec  $F_i$  fermé de  $\bar{Y}$ , donc de  $X$ , on a  $Y = (F_1 \cap Y) \cup (F_2 \cap Y)$ , donc puisque  $Y$  est irréductible,  $Y = F_i \cap Y$ , ou encore  $Y \subset F_i$ . Mais alors on a  $\bar{Y} \subset F_i$  et  $\bar{Y} = F_i$ .

Nous montrons maintenant comment on peut se ramener au cas irréductible.

**Théorème-définition 3.6.** *Soit  $V$  un ensemble algébrique affine non vide. On peut écrire  $V$  de manière unique (à permutation près) sous la forme  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  avec  $V_i$  ensemble algébrique affine irréductible et  $V_i \not\subset V_j$  pour  $i \neq j$ . Les  $V_i$  sont appelées les composantes irréductibles de  $V$ .*

### Démonstration

1) L'existence. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe des ensembles algébriques affines non décomposables et on en prend un dont l'idéal soit maximal parmi ceux-là (un tel  $V$  existe car l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]$  est noethérien). Alors,  $V$  n'est pas irréductible donc on a  $V = F \cup G$  avec  $F, G \neq V$ . On a donc aussi, par injectivité de  $I$ ,  $I(F), I(G) \supset I(V)$  et  $I(F), I(G) \neq I(V)$ . Vu la maximalité de  $I(V)$ ,  $F$  et  $G$  sont donc décomposables :  $F = F_1 \cup \dots \cup F_r$ ,  $G = G_1 \cup \dots \cup G_s$ , mais alors  $V$  est décomposable, contradiction.

2) L'unicité. Supposons qu'on ait deux écritures :  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r = W_1 \cup \dots \cup W_s$ . On écrit  $V_i = V \cap V_i = (W_1 \cap V_i) \cup \dots \cup (W_s \cap V_i)$ . Comme  $V_i$  est irréductible il existe  $j$  tel que  $V_i = W_j \cap V_i$ , i.e.  $V_i \subset W_j$ . De même, il existe  $k$  avec  $W_j \subset V_k$ , donc  $V_i \subset V_k$ , et, par hypothèse, ceci impose  $i = k$  donc  $V_i = W_j$ .

*Remarque 3.7.* Si  $W$  est un fermé irréductible de  $V$ ,  $W$  est contenu dans une composante irréductible. Il en résulte que les composantes irréductibles sont exactement les sous-ensembles fermés irréductibles maximaux de  $V$ .

On renvoie aux exercices pour quelques exemples de décomposition.

## 4. Le Nullstellensatz (ou théorème des zéros de Hilbert)

C'est l'un des premiers théorèmes fondamentaux de la géométrie algébrique. Il s'agit de contrôler la correspondance entre les ensembles algébriques affines et les idéaux et notamment de calculer  $I(V(I))$ . On a déjà noté (2.2.3.a) que certains problèmes surgissaient lorsque  $k$  n'est pas algébriquement clos. On suppose donc désormais :

$k$  est algébriquement clos.

Cette hypothèse permet d'éviter que les ensembles algébriques affines soient trop petits. Ainsi le lecteur vérifiera sans peine (i.e. sans utiliser le Nullstellensatz!) que si  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  n'est pas constant l'hyper-surface  $V(F)$  est infinie (si  $n \geq 2$ ). Le résultat suivant est de la même veine :

**Théorème 4.1** (Nullstellensatz faible). Soit  $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$  un idéal distinct de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Alors  $V(I)$  est non vide.

*Démonstration.* La démonstration qui suit est valable lorsque  $k$  n'est pas dénombrable (par exemple si  $k = \mathbf{C}$ ). Pour une démonstration dans le cas général (cf. Problème III, 4).

Quitte à plonger  $I$  dans un idéal maximal  $m$ , on peut supposer  $I$  maximal. Soit  $K = k[X_1, \dots, X_n]/I$  le corps résiduel. Comme  $k[X_1, \dots, X_n]$  est un espace vectoriel de dimension au plus dénombrable sur  $k$  il en est de même de  $K$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 4.2.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos non dénombrable et soit  $K$  une extension de  $k$  de dimension au plus dénombrable. Alors, on a  $K = k$ .

*Démonstration (de 4.2).* Il suffit de montrer que  $K$  est algébrique sur  $k$ . Sinon, il contiendrait un élément transcendant donc un sous-corps isomorphe au corps des fractions rationnelles  $k(T)$ . Mais ce corps contient la famille non dénombrable des  $1/(T - a)$ ,  $a \in k$  et cette famille est libre : si on a une relation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{T - a_i} = 0,$$

en multipliant par  $T - a_i$  et en faisant  $T = a_i$  on trouve bien  $\lambda_i = 0$ .

Revenons à 4.1 en considérant les images  $a_1, \dots, a_n$  des  $X_i$  dans  $K = k$ . Alors, si  $P(X_1, \dots, X_n) \in I$  on a  $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ , autrement dit le point  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $k^n$  est dans  $V(I)$ , cqfd.

Pour formuler le Nullstellensatz, on introduit la racine d'un idéal  $I$  de l'anneau  $A$  qui est l'idéal

$$\text{rac}(I) = \{x \in A \mid \exists r \in \mathbf{N}, x^r \in I\}.$$

**Théorème 4.3** (Nullstellensatz). Soit  $I$  un idéal de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . On a  $I(V(I)) = \text{rac}(I)$ .

*Démonstration.* Posons :

$$R = k[X_1, \dots, X_n], \quad I = (P_1, \dots, P_r) \quad \text{et} \quad V = V(I).$$

Il est clair qu'on a  $\text{rac}(I) \subset I(V(I))$ . Réciproquement, soit  $F \in I(V)$ . Il s'agit de montrer que  $F^m \in I$  pour  $m$  assez grand. Cela peut se traduire aisément en considérant l'anneau localisé  $R_F$ , obtenu en inversant  $F$  (cf. Mémento 1.6.b). Il suffit en effet de montrer que l'idéal  $IR_F$  engendré par  $I$  dans  $R_F$  est égal à  $(1) = R_F$  car alors on a

$$1 = \sum_i \frac{P_i Q_i}{F^m}$$

donc, en chassant le dénominateur, on trouve bien  $F^m \in I$ .

Mais l'anneau  $R_F$  est aussi isomorphe à  $k[X_1, \dots, X_n, T]/(1 - TF)$  (cf. Mémento loc. cit.) et donc la condition  $IR_F = (1)$  signifie que 1 s'écrit sous la forme  $1 = \sum_i P_i Q_i + A(1 - TF)$ , avec  $A, Q_i \in k[X_1, \dots, X_n, T]$ . Soit alors  $J$  l'idéal  $(P_1, \dots, P_r, 1 - TF)$  de  $k[X_1, \dots, X_n, T]$ . On a  $V(J) = \emptyset$  dans  $k^{n+1}$ , car si  $(x_1, \dots, x_n, t)$  était dans  $V(J)$ , le point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  annulerait les  $P_i$ , donc serait dans  $V$ , de ce fait annulerait  $F$  et ne pourrait pas annuler  $1 - TF$ . Il résulte alors du Nullstellensatz faible que  $J = (1)$ , et on a terminé.

*Exemple 4.4.* On retrouve les phénomènes liés aux puissances vus en 2.2.3.b : par exemple si  $I = (X, Y^2)$  on a  $I(V(I)) = (X, Y)$ .

*Remarque 4.5.* Il est clair que l'idéal  $I(V)$  est égal à sa racine (on dit qu'il est semi-premier ou *radical*) et on a donc  $I(V(I)) = I$  si et seulement si  $I$  est radical (en particulier, c'est vrai si  $I$  est premier). Dire que  $I(V)$  est radical signifie exactement que l'anneau  $\Gamma(V)$  est réduit (i.e. n'a pas d'éléments nilpotents, cf. Mémento 1.2.d). Cette condition sera remise en cause lorsqu'on voudra parler de structures multiples.

#### 4.6. Applications du Nullstellensatz : un dictionnaire algèbre-géométrie

Soit  $V$  un ensemble algébrique affine. On lui associe son idéal  $I(V)$  et son algèbre affine  $\Gamma(V) \simeq k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$  qui est une  $k$ -algèbre de type fini réduite.

a) Le cas  $V = k^n$ . La proposition suivante est une conséquence immédiate du Nullstellensatz et de 3.2 :

**Proposition 4.7.** *On a une bijection décroissante  $W \mapsto I(W)$ , de réciproque  $I \mapsto V(I)$ , entre les ensembles algébriques affines de  $k^n$  et les idéaux radicaux de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . De plus, les propriétés suivantes se correspondent :*

- a)  $W$  irréductible  $\iff I(W)$  premier  $\iff \Gamma(W)$  intègre,
- b)  $W$  est un singleton  $\iff I(W)$  maximal  $\iff \Gamma(W) = k$ .

(Pour le point b) on utilisera le Nullstellensatz faible et la décroissance des applications  $I$  et  $V$ .)

Un autre exemple de traduction est le suivant :

**Proposition 4.8.** *On a l'équivalence :  $V$  est fini  $\iff \Gamma(V)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. (On dit alors que  $\Gamma(V)$  est une  $k$ -algèbre finie, cf. Mémento 1.7.)*

*Démonstration*

1) Supposons  $V$  fini,  $V = \{u_1, \dots, u_r\}$  et considérons l'homomorphisme d'anneaux :

$$\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k^r$$

qui à  $F$  associe  $(F(u_1), \dots, F(u_r))$ . (L'espace  $k^r$  est muni de la structure d'anneau produit, cf. Mémento 1.1.d.) Le noyau de  $\varphi$  n'est autre que  $I(V)$ , de sorte que  $\Gamma(V)$  s'injecte dans  $k^r$  donc est de dimension finie.

2) Réciproquement, supposons  $\Gamma(V)$  de dimension finie. Soit  $\bar{X}_i$  l'image de  $X_i$  dans  $\Gamma(V)$ . Les éléments  $1, \bar{X}_i, \dots, \bar{X}_i^s, \dots$  sont liés, donc on a dans  $\Gamma(V)$  une relation :

$$a_s \bar{X}_i^s + \dots + a_1 \bar{X}_i + a_0 = 0$$

avec  $a_j \in k$  et  $a_s \neq 0$ . Si  $u = (x_1, \dots, x_n)$  est un point quelconque de  $V$ , il en résulte qu'on a aussi :

$$a_s x_i^s + \dots + a_1 x_i + a_0 = 0$$

donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour la coordonnée  $x_i$  de  $u$  et donc aussi pour  $u : V$  est fini.

b) *Le cas général.* On suppose que  $V$  est un ensemble algébrique affine quelconque. Si  $W$  est un ensemble algébrique affine contenu dans  $V$  on a  $I(V) \subset I(W)$ , donc  $I(W)$  détermine un idéal  $I_V(W)$  de l'anneau  $\Gamma(V)$  (son image, cf. Mémento 1.2.c, qui est simplement l'ensemble des  $f \in \Gamma(V)$  nulles sur  $W$ ) et on a l'isomorphisme  $\Gamma(V)/I_V(W) \simeq \Gamma(W)$ , de sorte que cet idéal est radical. Notons aussi que si  $I$  est un idéal de  $\Gamma(V)$  on peut définir  $V(I)$  soit comme l'ensemble des zéros des fonctions de  $I$  sur  $V$  :

$$V(I) = \{ x \in V \mid \forall f \in I \ f(x) = 0 \}$$

soit, ce qui revient au même, en posant  $V(I) = V(r^{-1}(I))$  où  $r$  est la projection canonique de  $k[X_1, \dots, X_n]$  sur  $\Gamma(V)$ . On a alors la proposition suivante :

**Proposition 4.9.** *On a des bijections décroissantes réciproques  $W \mapsto I_V(W)$  et  $I \mapsto V(I)$  entre les sous-ensembles algébriques affines de  $V$  et les idéaux radicaux de  $\Gamma(V)$ . De plus, on a les équivalences :*

- a)  $W$  irréductible  $\iff I_V(W)$  premier  $\iff \Gamma(W)$  intègre,
- b)  $W$  est un singleton  $\iff I_V(W)$  maximal  $\iff \Gamma(W) = k$ ,
- c)  $W$  est une composante irréductible de  $V$   $\iff I_V(W)$  est un idéal premier minimal de  $\Gamma(V)$ .

*Démonstration.* L'assertion sur la bijection est claire, ainsi que le point a) (il suffit de remarquer que  $I$  est un idéal radical de  $\Gamma(V)$  si et seulement si  $r^{-1}(I)$  est un idéal radical de  $k[X_1, \dots, X_n]$ ). Le point c) est l'assertion duale du fait que les composantes irréductibles sont les irréductibles maximaux (cf. 3.6). On note que les idéaux premiers minimaux sont donc en nombre fini (cf. Mémento 4.3).

Pour b) on note que si  $x \in V$  il lui correspond un homomorphisme de  $k$ -algèbres  $\chi_x : \Gamma(V) \rightarrow k$  qui à  $f$  associe sa valeur  $f(x)$  et dont le noyau est l'idéal maximal

$$m_x = I(\{x\}) = \{f \in \Gamma(V) \mid f(x) = 0\}.$$

Les homomorphismes de  $k$ -algèbres  $\chi : \Gamma(V) \rightarrow k$  sont encore appelés les *caractères* de  $\Gamma(V)$  et ils sont aussi en bijection avec les points de  $V$  (en sens inverse, on associe au caractère  $\chi$  le point  $(\chi(X_1), \dots, \chi(X_n))$  et on vérifie qu'il est dans  $V$ ). On a donc prouvé le résultat suivant :

**Proposition 4.10.** *Les points de  $V$  sont en bijection avec les idéaux maximaux de  $\Gamma(V)$ , ou encore avec les caractères de  $\Gamma(V)$ .*

**Exemples 4.11**

a) Soit  $V = V(XY) \subset k^2$ . On vérifie que les idéaux premiers minimaux de  $\Gamma(V)$  sont les images des idéaux  $(X)$  et  $(Y)$  qui correspondent aux deux composantes de  $V$ .

b) Plus généralement, dans le cas d'une hypersurface on a la proposition suivante que le lecteur montrera à titre d'exercice (cf. aussi Exercice I, 3) :

**Proposition 4.12.** *Soit  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$  avec les  $F_i$  irréductibles et non associés et  $\alpha_i > 0$ . On a alors :*

1)  $I(V(F)) = (F_1 \cdots F_r)$ . En particulier si  $F$  est irréductible on a  $I(V(F)) = (F)$ .

2) La décomposition de  $V(F)$  en irréductibles est donnée par  $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ . En particulier si  $F$  est irréductible  $V(F)$  l'est aussi.

Dans le cas d'un ensemble algébrique quelconque on a aussi, comme en 1.5, des ouverts standard qui forment une base de la topologie :

**Proposition-définition 4.13.** *Soit  $V$  un ensemble algébrique affine et soit  $f \in \Gamma(V)$  un élément non nul. L'ensemble*

$$D_V(f) = V - V(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$$

(qu'on note simplement  $D(f)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) est un ouvert de  $V$ , dit ouvert standard. Tout ouvert de  $V$  est réunion finie d'ouverts standard.

## 5. Un premier pas vers Bézout

Nous montrons ici que l'intersection de deux courbes planes sans composante commune est finie. Dans ce paragraphe  $k$  est un corps commutatif quelconque.

**Théorème 5.1.** *Soient  $F, G \in k[X, Y]$  des polynômes non nuls et sans facteur commun. Alors  $V(F) \cap V(G)$  est fini.*

Nous montrerons, au passage, le résultat suivant, à rapprocher de 4.8 :

**Théorème 5.2.** *Sous les hypothèses de 5.1 l'anneau  $k[X, Y]/(F, G)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.*

*Démonstration.* On commence par prouver le lemme suivant :

**Lemme 5.3.** *Sous les hypothèses de 5.1 il existe un polynôme  $d \in k[X]$  non nul et des polynômes  $A, B \in k[X, Y]$  tels que l'on ait  $d = AF + BG$ . (Autrement dit  $d \in (F, G)$ .)*

*Démonstration (de 5.3).* Le lecteur en écrira les détails : il suffit d'appliquer le théorème (élémentaire) de Bézout dans l'anneau principal  $k(X)[Y]$  et de chasser les dénominateurs.

Montrons alors 5.1. Si  $(x, y) \in V(F) \cap V(G)$  on a, avec 5.3,  $d(x) = 0$  donc un nombre fini de  $x$  possibles. Le même raisonnement appliqué à  $y$  montre que l'intersection est finie.

Pour 5.2 on fait un raisonnement analogue, mais cette fois avec les images des monômes  $X^i Y^j$  dans l'anneau quotient : grâce à 5.3 on voit qu'un nombre fini de ces monômes engendrent  $k[X, Y]/(F, G)$ .

*Remarque 5.4.* Parmi les polynômes  $d(X)$  qui conviennent dans le lemme 5.3 il y a le résultant de  $F$  et  $G$ , considérés comme polynômes en  $Y$ . Si  $F$  et  $G$  sont de degrés  $p$  et  $q$  on peut montrer que le degré du résultant est  $\leq pq$  et en déduire, au prix d'une petite astuce, que  $|V(F) \cap V(G)| \leq pq$ , ce qui est une partie du théorème de Bézout.

## 6. Les morphismes : une première approche

Dans ce paragraphe on suppose le corps  $k$  infini (par exemple algébriquement clos).

Nous sommes maintenant en possession d'objets : les ensembles algébriques affines. Mais plus encore que ces objets, ce sont les morphismes qui vont permettre de préciser les contours de la théorie. C'est en effet un principe maintenant bien établi en mathématiques que les mêmes objets (par exemple nos ensembles algébriques affines, disons dans le cas  $k = \mathbb{C}$ ) peuvent donner lieu à des théories totalement distinctes selon les morphismes que l'on autorise entre eux, par exemple les applications continues, ou différentiables au sens réel, ou analytiques, ou polynomiales. On fera alors respectivement de la topologie, de la géométrie différentielle, de la géométrie analytique, ou de la géométrie algébrique.

Dans le cas présent ce sont bien entendu les applications polynomiales qui vont être retenues, précisément :

**Définition 6.1.** Soient  $V \subset k^n$  et  $W \subset k^m$  deux ensembles algébriques affines et  $\varphi : V \rightarrow W$  une application, que l'on peut écrire  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  avec  $\varphi_i : V \rightarrow k$ . On dit que  $\varphi$  est régulière (ou un morphisme) si ses composantes  $\varphi_i$  sont polynomiales (i.e. sont dans  $\Gamma(V)$ ). On note  $\text{Reg}(V, W)$  l'ensemble des applications régulières de  $V$  dans  $W$ .

*Remarque 6.2.* Il est clair qu'on obtient ainsi une *catégorie* : l'identité est un morphisme et le composé de deux morphismes en est un. On a alors les notions usuelles : isomorphisme, automorphisme, etc. On notera que les morphismes sont des applications continues pour les topologies de Zariski (de sorte que l'image réciproque d'un ensemble algébrique par un morphisme est encore un ensemble algébrique), mais la réciproque est inexacte (par exemple toute application bijective de  $k$  dans  $k$  est continue pour Zariski mais pas nécessairement polynomiale).

### Exemples 6.3

1) Les éléments de  $\Gamma(V)$ , et en particulier les fonctions coordonnées, sont des morphismes de  $V$  dans  $k$ .

2) Les applications affines bijectives de  $k^n$  dans lui-même sont des isomorphismes : elles correspondent aux polynômes de degré 1.

3) Soit  $V \subset k^n$ . La projection  $\varphi$  de  $V$  sur  $k^p$ ,  $p \leq n$ , donnée par  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ , est un morphisme.

4) Prenons pour  $V$  la parabole  $V(Y - X^2)$  et pour  $\varphi$  la projection  $\varphi : V \rightarrow k$  donnée par  $\varphi(x, y) = x$ . Alors  $\varphi$  est un isomorphisme, de réciproque  $x \mapsto (x, x^2)$ .

5) L'application  $\varphi : k \rightarrow V(X^3 + Y^2 - X^2)$ , donnée par le paramétrage  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t(t^2 - 1)$  (obtenu en coupant par la droite  $Y = tX$ ), est un morphisme, mais pas un isomorphisme ( $\varphi$  n'est pas injectif).

6) L'application  $\varphi : k \rightarrow V(Y^2 - X^3)$  donnée par le paramétrage  $t \mapsto (t^2, t^3)$  est un morphisme bijectif, mais nous verrons plus loin (6.9) que ce n'est pas un isomorphisme.

Nous avons associé à un ensemble algébrique affine  $V$  son algèbre affine  $\Gamma(V)$  et commencé à établir un dictionnaire pour passer de l'un à l'autre. Il faut bien sûr compléter cette correspondance sur les morphismes, c'est-à-dire montrer qu'elle est *fonctorielle*. C'est fait grâce à la proposition triviale suivante :

**Proposition-définition 6.4.** Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme. On pose, pour  $f \in \Gamma(W)$ ,  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ . Alors  $\varphi^*$  est un morphisme de  $k$ -algèbres,  $\varphi^* : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$ .

### Remarques 6.5

1) On a maintenant un *foncteur contravariant*, noté encore  $\Gamma$ , de la catégorie des ensembles algébriques affines munie des applications régulières, dans la catégorie des  $k$ -algèbres avec les homomorphismes d'icelles, qui à  $(V, \varphi)$  associe  $(\Gamma(V), \varphi^*)$ . (Le mot *contravariant* indique que le sens des flèches est renversé, la functorialité signifie qu'on a la relation  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  et que l'identité se transforme en l'identité.)

2) On peut calculer  $\varphi^*$  de la façon suivante : soient  $V \subset k^n$  et  $W \subset k^m$  deux ensembles algébriques affines et  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme, écrit sous la forme  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  avec  $\varphi_i \in \Gamma(V)$ . Notons  $\eta_i$  la  $i$ -ème fonction coordonnée sur  $W$ , image de l'indéterminée  $Y_i$  dans  $\Gamma(W)$ . Alors on a  $\varphi^*(\eta_i) = \varphi_i$ . Si les fonctions  $\varphi_i$  sont les restrictions à  $V$  de polynômes  $P_i(X_1, \dots, X_n)$ , l'homomorphisme

$$\varphi^* : k[Y_1, \dots, Y_m]/I(W) \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

est défini alors par  $Y_i \mapsto \overline{P}_i(X_1, \dots, X_n)$ .

3) Si  $\varphi(x) = y$ , on vérifie aussitôt qu'on a, avec les notations de 4.9,  $(\varphi^*)^{-1}(m_x) = m_y$ .

### Exemples 6.6

1) Si  $\varphi$  est la projection  $\varphi : V(F) \subset k^2 \rightarrow k$  avec  $\varphi(x, y) = x$ ,  $\varphi^*$  est l'application de  $\Gamma(k) = k[X]$  dans  $k[X, Y]/(F)$  qui à  $X$  associe  $X$ .

2) Pour la paramétrisation  $(t^2, t^3)$  de  $V(Y^2 - X^3)$  on a

$$\varphi^* : k[X, Y]/(Y^2 - X^3) \rightarrow k[T]$$

donnée par  $\varphi^*(\overline{X}) = T^2$  et  $\varphi^*(\overline{Y}) = T^3$ .

Nous étudions maintenant les propriétés du foncteur  $\Gamma$ . Déjà, son comportement est idéal sur les morphismes :

**Proposition 6.7.** Le foncteur  $\Gamma$  est pleinement fidèle, ce qui signifie que l'application  $\gamma : \varphi \mapsto \varphi^*$  de  $\text{Reg}(V, W)$  dans  $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(\Gamma(W), \Gamma(V))$  est bijective.

*Démonstration.* On suppose  $V \subset k^n$  et  $W \subset k^m$ . On note  $\eta_i$  les fonctions coordonnées sur  $W$  (cf. 6.5.2).

1)  $\Gamma$  est fidèle, i.e. si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux morphismes de  $V$  dans  $W$  tels que  $\varphi^* = \psi^*$  on a  $\varphi = \psi$  (injectivité de  $\gamma$ ). En effet cela résulte de la formule qui donne les composantes de  $\varphi$  :  $\varphi_i = \varphi^*(\eta_i)$  (cf. 6.5.2) et de la formule analogue pour  $\psi$ .

2) Soit maintenant  $\theta : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$  un homomorphisme de  $k$ -algèbres. On pose  $\varphi_i = \theta(\eta_i) \in \Gamma(V)$ . On considère le morphisme  $\varphi : V \rightarrow k^m$  dont les coordonnées sont les  $\varphi_i$ . Si on montre que  $\varphi$  est à valeurs dans  $W$  on aura alors (cf. 6.5.2)  $\theta = \varphi^*$ , ce qui montrera la surjectivité de  $\gamma$ . Pour cela, soit  $F(Y_1, \dots, Y_m) \in I(W)$  et  $x \in V$ . On calcule  $F(\varphi(x)) = F(\theta(\eta_1), \dots, \theta(\eta_m))(x)$ . Mais, comme  $\theta$  est un homomorphisme d'algèbres, on a  $F(\theta(\eta_1), \dots, \theta(\eta_m)) = \theta(F(\eta_1, \dots, \eta_m))$  et comme  $F(\eta_1, \dots, \eta_m)$  est l'image dans  $\Gamma(W)$  de  $F(Y_1, \dots, Y_m) \in I(W)$ , cet élément est nul et on a terminé.

**Corollaire 6.8.** Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme. Alors,  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si  $\varphi^*$  en est un. En conséquence,  $V$  et  $W$  sont isomorphes si et seulement si leurs algèbres  $\Gamma(V)$  et  $\Gamma(W)$  le sont.

**Application 6.9.** Le morphisme  $\varphi : k \rightarrow V = V(Y^2 - X^3)$  donné par  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$  n'est pas un isomorphisme.

En effet, sinon  $\varphi^*$  serait un isomorphisme de  $\Gamma(V)$  sur l'anneau  $\Gamma(k) = k[T]$ . Or, l'image de  $\varphi^*$  est le sous-anneau  $k[T^2, T^3]$  de  $k[T]$  qui est strictement plus petit.

En fait, les deux courbes ne sont pas isomorphes car leurs anneaux ne le sont pas. En effet, l'homomorphisme  $\varphi^*$  est injectif (cf. 2.4.d ou 6.11 ci-dessous), de sorte que  $\Gamma(V)$  est isomorphe à  $k[T^2, T^3]$ . L'élément  $T$  est dans le corps des fractions de  $\Gamma(V)$  (c'est  $T^3/T^2$ ), il est entier sur  $\Gamma(V)$  (il vérifie l'équation  $X^2 - T^2 = 0$ ), mais il n'est pas dans  $\Gamma(V)$ , donc cet anneau n'est pas intégralement clos. En revanche l'anneau  $k[T]$  est principal, donc intégralement clos. Ce phénomène est dû au point singulier de la courbe  $V$  (cf. Ch. V).

On a aussi un dictionnaire sur les morphismes, en voici un exemple. On commence par une définition :

**Définition 6.10.** Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme. On dit que  $\varphi$  est dominant si l'adhérence de son image (pour la topologie de Zariski) est égale à  $W$  tout entier :  $\overline{\varphi(V)} = W$ .

On a alors :

**Proposition 6.11.** *Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme.*

- 1) *On a  $\varphi$  dominant  $\iff \varphi^*$  injectif.*
- 2) *On suppose  $\varphi$  dominant et  $V$  irréductible. Alors  $W$  est irréductible.*

*Démonstration*

1) Si  $\varphi$  est dominant et si  $f \in \text{Ker } \varphi^*$ , on a  $f\varphi = 0$  donc  $f$  est nulle sur  $\varphi(V)$  et, comme  $f$  est continue, elle est nulle partout. Réciproquement, soit  $X = \overline{\varphi(V)}$ . C'est un ensemble algébrique affine contenu dans  $W$ . Supposons  $X \neq W$ . Alors (cf. 2.2.2) il existe  $f \in \Gamma(W)$ , non nulle, et nulle sur  $X$ . Mais alors on a  $f\varphi = \varphi^*(f) = 0$ , contradiction.

2) Cela résulte de 1) et de 3.2. (On peut aussi raisonner directement en supposant  $W$  de la forme  $F \cup G$ .)

*Remarque 6.12.* On notera que les conditions sont de nature duale à cause de la contravariance de  $\Gamma$ ; attention toutefois,  $\varphi^*$  injective n'implique pas  $\varphi$  surjectif (penser à la projection de l'hyperbole  $XY = 1$  sur l'axe des  $x$ ).

Pour terminer, nous allons montrer que, lorsque le corps  $k$  est algébriquement clos, la situation est parfaite :

**Théorème 6.13.** *On suppose  $k$  algébriquement clos. Le foncteur  $\Gamma$  est une équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles algébriques affines, munie des applications régulières, et la catégorie des  $k$ -algèbres de type fini réduites, munie des homomorphismes de  $k$ -algèbres.*

(Ceci signifie que le foncteur est pleinement fidèle (cf. 6.7) et que, plus, il est essentiellement surjectif : si  $A$  est une  $k$ -algèbre de type fini réduite, il existe  $V$  telle que  $A$  soit isomorphe à  $\Gamma(V)$ .)

*Démonstration.* La pleine fidélité a été vue en 6.7. Pour la surjectivité, comme  $A$  est de type fini on a  $A \simeq k[X_1, \dots, X_n]/I$  (cf. Mémento 1.5), et, comme  $A$  est réduite l'idéal  $I$  est radical. Soit alors  $V = V(I)$ . On a  $I(V) = \text{rac}(I) = I$  par le Nullstellensatz et donc  $A \simeq \Gamma(V)$ .

*Remarque 6.14.* Ce théorème est la réalisation du programme de traduction de la géométrie à l'algèbre entrepris dans ce chapitre. Dans le cadre affine il est à peu près optimal, mais pour passer au cas projectif il sera nécessaire de se préoccuper aussi des fonctions définies sur les ouverts.

A ce propos, nous aurons besoin dans les chapitres suivants de la notion de fonction rationnelle sur  $V$  sur laquelle nous reviendrons en détail aux chapitres VIII et IX.

**Définition 6.15.** Soit  $V$  un ensemble algébrique affine irréductible, de sorte que l'anneau  $\Gamma(V)$  est intègre. Le corps des fractions de  $\Gamma(V)$  est appelé corps des fonctions rationnelles sur  $V$  et noté  $K(V)$ .

*Remarque 6.16.* Si  $f \in K(V)$ ,  $f$  s'écrit  $f = g/h$  avec  $g, h \in \Gamma(V)$  et  $h \neq 0$ . On peut donc considérer  $f$  comme une fonction sur l'ouvert standard  $D(h)$  défini par  $h(x) \neq 0$ .

## Exercices

1) L'ensemble  $\{(t, \sin t) \mid t \in \mathbf{R}\}$  est-il algébrique ?

2) Soit  $V$  un ensemble algébrique affine,  $V \subset k^n$ , et soit  $x \notin V$ . Montrer qu'il existe  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $F(x) = 1$  et  $F|_V = 0$ .

3) Soit  $F \in k[X, Y]$  un polynôme irréductible. On suppose  $V(F)$  infini. Montrer que l'on a  $I(V(F)) = (F)$ .

Application : si  $F = F_1^{\alpha_1} \cdots F_r^{\alpha_r}$  avec les  $F_i$  irréductibles et les  $V(F_i)$  infinis, trouver les composantes irréductibles de  $V(F)$ .

4) **Quelques résultats sur l'irréductibilité.** (Les espaces considérés sont des espaces topologiques quelconques.)

a) Si  $X$  est irréductible et si  $U$  est un ouvert de  $X$ , montrer que  $U$  est irréductible.

b) Si  $X = U_1 \cup U_2$  avec  $U_i$  ouvert irréductible et si  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , montrer que  $X$  est irréductible.

c) Si  $Y \subset X$  et si  $Y$  est irréductible,  $\overline{Y}$  est irréductible.

5) Un anneau  $A$  est dit *connexe* si tout idempotent de  $A$  est trivial (i.e. si tout élément  $e$  de  $A$  qui vérifie  $e^2 = e$  est égal à 0 ou 1).

a) Montrer qu'un anneau intègre est connexe.

b) Si  $A$  est produit direct de deux anneaux non nuls, montrer que  $A$  n'est pas connexe.

c) Réciproquement, si  $A$  possède un idempotent  $e$  non trivial, montrer que l'on a  $A \simeq A/(e) \times A/(1 - e)$ .

d) Soit  $V$  un ensemble algébrique affine sur un corps  $k$  algébriquement clos. Montrer que  $V$  est connexe (pour la topologie de Zariski) si et seulement si  $\Gamma(V)$  est connexe. (On trouvera, si  $V$  a deux composantes connexes, une fonction qui vaut 0 sur l'une et 1 sur l'autre.) La propriété subsiste-t-elle si  $k$  n'est pas algébriquement clos ?

6) On suppose  $k$  infini. Déterminer les anneaux de fonctions  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des courbes planes d'équations  $F_1 = Y - X^2$ ,  $F_2 = XY - 1$ ,  $F_3 = X^2 + Y^2 - 1$ . Montrer que  $A_1$  est isomorphe à l'anneau des polynômes  $k[T]$ , et que  $A_2$  est isomorphe au localisé  $k[T, T^{-1}]$ . Montrer que  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas isomorphes (regarder les éléments inversibles). Que peut-on dire de  $A_3$  par rapport aux deux autres ? (Distinguer selon que  $-1$  est, ou non, un carré dans  $k$ ; attention aussi à la caractéristique 2.)

7) Soit  $f : k \rightarrow k^3$  l'application qui à  $t$  associe  $(t, t^2, t^3)$  et soit  $C$  l'image de  $f$  (la cubique gauche). Montrer que  $C$  est un ensemble algébrique affine et calculer  $I(C)$ . Montrer que  $\Gamma(C)$  est isomorphe à l'anneau des polynômes  $k[T]$ .

8) On suppose  $k$  algébriquement clos. Déterminer les idéaux  $I(V)$  des ensembles algébriques suivants :

$$V(XY^3 + X^3Y - X^2 + Y), \quad V(X^2Y, (X - 1)(Y + 1)^2),$$

$$V(Z - XY, Y^2 + XZ - X^2).$$

# Chapitre II

## Ensembles algébriques projectifs

Dans tout ce chapitre,  $k$  désigne un corps commutatif.

### 0. Motivation

La principale motivation pour introduire l'espace projectif a déjà été vue dans l'Introduction à propos du théorème de Bézout : dans l'espace affine les résultats concernant les intersections sont toujours assortis de cas particuliers dus au parallélisme, ainsi, dans le plan, deux droites distinctes se coupent en un point et un seul, sauf si elles sont parallèles. Dans l'espace projectif, il n'y aura plus d'exceptions.

Historiquement, le projectif a été introduit au XVII<sup>e</sup> siècle par G. Desargues, mais développé surtout au XIX<sup>e</sup> (Monge, Poncelet, Klein,...). Depuis le programme d'Erlangen de Klein (1872) on sait qu'il est le cadre naturel de la plupart des géométries.

En géométrie algébrique c'est aussi dans ce domaine qu'on aura les résultats les plus satisfaisants. Cependant le cadre affine conserve une grande importance comme modèle local du projectif.

### 1. L'espace projectif

#### a. Définition

Soit  $n$  un entier  $\geq 0$  et  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  sur  $k$ . On introduit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $E - \{0\}$  :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \lambda \in k^*, y = \lambda x$$

La relation  $\mathcal{R}$  n'est autre que la colinéarité et les classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$  sont donc les droites vectorielles de  $E$ , privées de 0.

**Définition 1.1.** *L'espace projectif associé à  $E$ , que l'on note  $\mathbf{P}(E)$ , est le quotient de  $E - \{0\}$  par la relation  $\mathcal{R}$ . Lorsque l'on a  $E = k^{n+1}$  (i.e. si l'on a choisi une base) on pose  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^n(k)$  et on l'appelle espace projectif standard de dimension  $n$ .*

Désignons par  $p$  la projection canonique  $k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(k)$ . Si  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  est  $\neq 0$  et si  $\bar{x} = p(x)$  on dit que  $\bar{x}$  est un *point* de  $\mathbf{P}^n(k)$ , de *coordonnées homogènes*  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . On note qu'alors les  $x_i$  sont non tous nuls et que, si  $\lambda \in k$  est  $\neq 0$ ,  $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  est un autre système de coordonnées homogènes de  $\bar{x}$ , ce qui justifie la terminologie.

### Remarques 1.2

1) Lorsque  $k = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , l'espace projectif a une topologie naturelle : la topologie quotient de celle de  $k^{n+1} - \{0\}$ . On vérifie que l'espace projectif est alors compact et connexe.

2) Le fait que l'espace projectif associé à  $k^{n+1}$  soit de dimension  $n$  correspond au fait que les droites vectorielles  $y$  sont contractées en des points.

### b. Les sous-espaces projectifs

Les notations étant celles définies ci-dessus, on considère un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , de dimension  $m + 1$  avec  $0 \leq m \leq n$ .

**Définition 1.3.** *L'image de  $F - \{0\}$  dans  $\mathbf{P}(E)$  est par définition un sous-espace projectif de dimension  $m$ , noté  $\bar{F}$ .*

(Ceci se justifie, entre autres, par le fait que la trace sur  $F$  de la relation de colinéarité de  $E$  est la relation de colinéarité de  $F$ .)

Lorsque  $m = 0$  on dit que  $\bar{F}$  est un point, pour  $m = 1, 2, \dots, n - 1$  on parle de droite, plan, ..., hyperplan projectifs et on est en mesure de développer toute une géométrie, analogue à la géométrie affine, mais avec des théorèmes d'intersection sans exceptions :

**Proposition 1.4.** *Soient  $V, W$  deux sous-espaces projectifs de  $\mathbf{P}(E)$ , de dimensions  $r$  et  $s$ , avec  $r + s - n \geq 0$ . Alors,  $V \cap W$  est un sous-espace projectif de dimension  $\geq r + s - n$  (en particulier il est non vide).*

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt des théorèmes d'intersection des sous-espaces vectoriels.

*Exemple 1.5.* Si  $n = 2$  on voit que deux droites distinctes du plan projectif se coupent en un point et un seul. Si  $n = 3$ , un plan et une droite ont au moins un point commun et en ont un seul si la droite n'est pas incluse dans le plan; deux plans distincts se coupent suivant une droite, etc.

## 2. Homographies

Si  $E$  est un espace vectoriel, le groupe linéaire  $GL(E)$  opère sur  $E$ . Soit  $u \in GL(E)$ ; comme  $u$  est injectif et conserve la colinéarité,  $u$  induit une bijection  $\bar{u}$  de  $\mathbf{P}(E)$ .

**Définition 2.1.** Une bijection de  $\mathbf{P}(E)$  induite par un élément  $u$  de  $GL(E)$  s'appelle une homographie.

### Remarques 2.2

a) Si  $\bar{F}$  est un sous-espace projectif de dimension  $d$  de  $\mathbf{P}(E)$ , et  $\bar{u}$  une homographie, on a  $\bar{u}(\bar{F}) = \overline{u(F)}$ : l'image de  $\bar{F}$  est un sous-espace projectif de dimension  $d$ . L'application de cette remarque dans le cas  $d = 1$  montre que les homographies conservent l'alignement.

b) Pour une explication du mot homographie, cf. 3.1.1.

c) Par définition il est clair que le groupe  $k^*$  des homothéties opère trivialement sur  $\mathbf{P}(E)$  et on vérifie facilement que les homothéties sont les seuls éléments qui opèrent trivialement. Le groupe des homographies de  $\mathbf{P}(E)$ , ou groupe projectif de  $E$ , est donc le quotient  $PGL(E) = GL(E)/k^*$ .

d) Les homographies sont des automorphismes de l'espace projectif, au sens du chapitre III.

## 3. Lien affine projectif

Ce qui suit est une première approche intuitive du lien affine-projectif. Nous y reviendrons de manière plus précise au chapitre III.

Supposons l'espace vectoriel  $E$ , de dimension  $n + 1$ , muni d'une base, de sorte que  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^n(k)$ , avec les coordonnées  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Soit  $H$  l'hyperplan vectoriel d'équation  $x_0 = 0$  et  $\bar{H}$  l'hyperplan projectif associé

et posons  $U = \mathbf{P}^n(k) - \overline{H}$ . Alors, on a une bijection  $\varphi : U \rightarrow k^n$  qui à  $\bar{x}$  (avec  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ) associe  $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ . Cette application est bien définie : sur  $U$ ,  $x_0$  est non nul et l'image ne dépend pas du système de coordonnées homogènes de  $\bar{x}$ . Elle est bijective, la réciproque étant donnée par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$ .

Par ailleurs, comme l'hyperplan  $\overline{H}$  est un espace projectif de dimension  $n - 1$ , ce qui précède décrit l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(k)$  de dimension  $n$  comme réunion disjointe d'un espace affine  $k^n$  de dimension  $n$  et d'un espace projectif  $\overline{H}$  de dimension  $n - 1$ . On peut aussi dire qu'on a plongé l'espace affine de dimension  $n$  dans un espace projectif de même dimension. Les points de  $k^n$  seront dits "à distance finie", ceux de  $\overline{H}$  "à l'infini".

Bien entendu cette notion d'infini est relative au choix de l'hyperplan  $\overline{H}$  et il est tout à fait possible d'en changer en prenant par exemple les autres hyperplans  $x_i = 0$  ou d'autres encore. En vérité, dans l'espace projectif il n'y a pas d'infini : l'infini est une notion affine!

### 3.1. Exemples

#### 1. La droite projective

On prend  $n = 1$ , on appelle  $(x, t)$  les coordonnées de  $k^2$  et on choisit  $t = 0$  comme "hyperplan"  $\overline{H}$  à l'infini. En fait, comme tous les points  $(x, 0)$  de  $H$  sont colinéaires,  $\overline{H}$  est réduit au seul point  $\infty = (1, 0)$  et on identifie  $k$  et  $\mathbf{P}^1(k) - \{\infty\}$  par  $x \mapsto (x, 1)$ . On voit donc qu'une droite projective est une droite affine à laquelle on a adjoint un unique point à l'infini. Ceci donne le cardinal de la droite projective si  $k$  est fini et, si  $k = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , des renseignements de nature topologique : la droite projective est le compactifié d'Alexandroff de la droite affine, donc un cercle si  $k = \mathbf{R}$  ou une sphère si  $k = \mathbf{C}$ .

On vérifiera, avec cette identification, que les homographies de  $\mathbf{P}^1(k)$  sont les applications  $x \mapsto ax + b/cx + d$ , prolongées à l'infini par les conventions usuelles : ce sont bien les homographies au sens élémentaire.

#### 2. Le plan projectif

On utilise les coordonnées  $(x, y, t)$  et toujours  $t = 0$  comme hyperplan à l'infini. Cette fois  $\overline{H}$  est formé des points de coordonnées *homogènes*  $(x, y, 0)$  et c'est donc une droite projective notée  $D_\infty$ . Le complémentaire de  $\overline{H}$  est formé des points  $(x, y, 1)$ , il est isomorphe au plan affine  $k^2$  par oubli de la troisième coordonnée.

a. *Les droites projectives du plan.* Cherchons les droites projectives de  $\mathbf{P}^2(k)$ . Une telle droite  $\overline{D}$  est donnée comme image d'un sous-espace de dimension 2 de  $k^3$ , donc par une unique équation linéaire non triviale :  $ux + vy + wt = 0$  (avec  $u, v, w$  non tous nuls) et il y a deux cas de figure :

1) Si  $u = v = 0$  on peut supposer  $w = 1$  et  $\overline{D}$  n'est autre que  $D_\infty$ .

2) Sinon, on regarde la trace  $D$  de  $\overline{D}$  dans le plan affine  $k^2$  : on trouve les points  $(x, y)$  vérifiant  $ux + vy + w = 0$ , i.e. une droite affine. On cherche d'autre part la trace de  $\overline{D}$  sur  $D_\infty$  : on trouve les points  $(x, y, 0)$  avec  $ux + vy = 0$ ; il y a un unique point, dont on peut prendre  $(v, -u, 0)$  comme coordonnées homogènes. Ce point à l'infini de la droite  $D$  correspond à la *direction* de celle-ci; d'ailleurs, si  $D'$  est une droite affine parallèle à  $D$  elle a pour équation  $ux + vy + w' = 0$  et donc le même point à l'infini que  $D$ .

Pour résumer on voit donc que les droites projectives distinctes de  $D_\infty$  correspondent bijectivement aux droites affines, chaque droite projective étant munie, en plus, d'un point à l'infini qui correspond à sa direction.

b. *Les coniques.* Soit  $\overline{C}$  la partie de  $\mathbf{P}^2$  formée des points de coordonnées homogènes  $(x, y, t)$  vérifiant  $xy - t^2 = 0$  (cf. 4.1 pour comprendre la nécessité d'utiliser des polynômes homogènes en projectif). La trace de  $\overline{C}$  dans le plan affine  $k^2$  est l'hyperbole  $xy = 1$ . A l'infini,  $\overline{C}$  a deux points :  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0)$  qui correspondent aux directions asymptotiques de  $C$ . D'ailleurs si on coupe  $\overline{C}$  par la droite  $x - t = 0$ , qui correspond en affine à  $x = 1$ , parallèle à l'asymptote  $x = 0$ , on trouve le point  $(1, 1, 1)$  à distance finie et, à l'infini, le point  $(1, 0, 0)$ , direction de l'asymptote. Si on coupe par l'asymptote elle-même on trouve le point à l'infini double : l'asymptote est tangente à  $\overline{C}$  à l'infini.

Mais, attention, on a dit que dans l'espace projectif la droite à l'infini n'est pas fixée a priori. Choisissons donc maintenant  $x = 0$  comme droite à l'infini. Alors, dans le plan affine des  $(y, t)$ ,  $\overline{C}$  donne  $C'$  d'équation  $y = t^2$  : une parabole qui, cette fois, n'a qu'un seul point à l'infini :  $(0, 1, 0)$  (la parabole est tangente à la droite de l'infini).

Continuons à changer de droite à l'infini en prenant maintenant  $x + y = 0$  et supposons que  $k$  est le corps des réels. En faisant le changement de variables (ou l'homographie)  $t' = x + y$ ,  $x' = x$ ,  $y' = t$  on trouve, comme équation de  $\overline{C}$ ,  $x'^2 + y'^2 - x't' = 0$ . En affine, relativement à notre nouvel infini  $t' = 0$  on trouve l'ellipse (en fait le cercle)  $x'^2 + y'^2 - x' = 0$  et il n'y a cette fois aucun point à l'infini (on a pris  $k = \mathbf{R}$ ).

La conclusion de ce petit jeu est que la nature usuelle des coniques

(hyperbole, parabole, ellipse) est une propriété affine qui s'énonce simplement en projectif en disant que la conique coupe la droite que l'on a choisie comme droite à l'infini en deux, un ou zéro points. On montrera d'ailleurs (cf. Exercice V, 3) qu'en projectif il y a, à homographie près, une unique conique propre.

#### 4. Ensembles algébriques projectifs

On reprend le plan du chapitre I, en passant rapidement sur les points analogues et en mettant au contraire en relief les différences.

On travaille sur un corps commutatif  $k$  *infini*,  $n$  est un entier  $> 0$  et on désigne par  $\mathbf{P}^n(k)$ , ou simplement  $\mathbf{P}^n$ , l'espace projectif de dimension  $n$ . Les coordonnées dans  $\mathbf{P}^n$  sont notées  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . On note  $R$  l'anneau de polynômes  $k[X_0, \dots, X_n]$ . Dans les petites dimensions on utilisera plutôt les variables  $x, y, z, t$  avec une prédilection pour  $t = 0$  comme hyperplan à l'infini.

La première différence avec l'anneau affine est que les polynômes  $F$  dans l'anneau  $k[X_0, \dots, X_n]$  ne définissent plus des fonctions sur l'espace projectif, puisque leur valeur en un point  $\bar{x}$  dépend du système de coordonnées homogènes. Par exemple, si  $F$  est homogène de degré  $d$  on a

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

On peut toutefois donner la définition suivante :

**Proposition-définition 4.1.** *Soit  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  et  $\bar{x} \in \mathbf{P}^n$ . On dit que  $\bar{x}$  est un zéro de  $F$  si on a  $F(x) = 0$  pour tout système de coordonnées homogènes  $x$  de  $\bar{x}$ . On écrit alors indifféremment  $F(\bar{x}) = 0$  ou  $F(x) = 0$ . Si  $F$  est homogène il suffit pour cela qu'on ait  $F(x) = 0$  pour un système de coordonnées homogènes. Si  $F = F_0 + F_1 + \dots + F_r$  avec  $F_i$  homogène de degré  $i$ , il faut et il suffit qu'on ait  $F_i(x) = 0$  pour tout  $i$ .*

*Démonstration.* Seule la dernière assertion est non évidente. Si on a  $F(\lambda x) = \lambda^r F_r(x) + \dots + \lambda F_1(x) + F_0(x) = 0$  pour tout  $\lambda$ , comme  $k$  est infini, on voit que tous les  $F_i(x)$  sont nuls. La réciproque est évidente.

On constate donc l'apparition des polynômes homogènes qui vont jouer un rôle essentiel dans l'étude de l'espace projectif.

**Définition 4.2.** *Soit  $S$  une partie quelconque de  $k[X_0, \dots, X_n]$ . On pose :*

$$V_p(S) = \{x \in \mathbf{P}^n \mid \forall F \in S, F(x) = 0\}$$

(au sens de 4.1 bien entendu). On dit que  $V_p(S)$  est l'ensemble algébrique projectif défini par  $S$ . On pourra le noter  $V(S)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

*Remarque 4.3.* Il est clair que si  $I$  est l'idéal engendré par  $S$  on a  $V_p(I) = V_p(S)$ . Comme  $k[X_0, \dots, X_n]$  est noethérien on peut donc se ramener au cas où  $S$  est fini et, vu 4.1, on peut même supposer que  $S$  est fini et formé de polynômes homogènes.

#### Exemples 4.4

a) On a  $V_p((0)) = \mathbf{P}^n$ .

b) Soit  $m = R^+ = (X_0, \dots, X_n)$  l'idéal des polynômes sans terme constant. On a  $V_p(m) = \emptyset$ . (En effet les coordonnées homogènes d'un point de  $\mathbf{P}^n$  sont non toutes nulles.) On l'appelle l'idéal "irrelevant"<sup>1</sup>. **Attention**, ceci vaut même si  $k$  est algébriquement clos, ce qui est une grande différence par rapport à l'anneau affine (cf. I, 4.1).

c) Les points sont des ensembles algébriques projectifs : soit  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$ . L'un des  $x_i$  est non nul, disons  $x_0$ , et on peut supposer  $x_0 = 1$ . On a alors  $\{x\} = V_p(X_1 - x_1 X_0, \dots, X_n - x_n X_0)$ .

d) Si  $n = 2$ , les courbes projectives planes sont définies par des équations homogènes :  $Y^2 T - X^3 = 0$ ,  $X^2 + Y^2 - T^2 = 0, \dots$

*Remarques 4.5.* On a les propriétés analogues au cas affine :

a) L'application  $V_p$  est décroissante.

b) Une intersection quelconque, une union finie d'ensembles algébriques projectifs en sont encore, de sorte qu'on a sur  $\mathbf{P}^n$  une topologie (de Zariski) dont les fermés sont les ensembles algébriques projectifs. Sur les parties de  $\mathbf{P}^n$  on utilisera évidemment la topologie induite par celle de  $\mathbf{P}^n$ . On verra au chapitre III que si on plonge l'espace affine  $k^n$  dans l'espace projectif on retrouve bien ainsi la topologie de Zariski de  $k^n$ .

c) Soit  $V \subset \mathbf{P}^n$  un ensemble algébrique projectif; on lui associe son cône  $C(V)$ , image inverse de  $V$  par la projection  $p : k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(k)$ , avec en plus l'origine de  $k^{n+1}$ . Si  $I$  est un idéal homogène (cf. 7.2 ci-dessus) distinct de  $R$  et si  $V = V_p(I)$  on a  $C(V) = V(I) \subset k^{n+1}$  (au sens affine). Si  $I = R$  on a  $C(V) = V(R^+) = \{0\}$ . La considération de ce cône permet parfois de ramener une question projective à son analogue affine (cf. 5.4).

<sup>1</sup>Irrelevant est un anglicisme. Je propose plutôt : inconvenant.

## 5. Idéal d'un ensemble algébrique projectif

**Définition 5.1.** Soit  $V$  une partie de  $\mathbf{P}^n$ . On définit l'idéal de  $V$  par la formule :

$$I_p(V) = \{F \in k[X_0, \dots, X_n] \mid \forall x \in V, F(x) = 0 \quad (\text{au sens de 4.1})\}.$$

*Remarques 5.2*

- a) En vertu de 4.1,  $I_p(V)$  est un idéal homogène (cf. 7.2) et radical.
- b) L'opération  $I_p$  est décroissante.
- c) Si  $V$  est un ensemble algébrique projectif on a  $V_p(I_p(V)) = V$ . Si  $I$  est un idéal, on a  $I \subset I_p(V_p(I))$ .
- d) On a  $I_p(\mathbf{P}^n) = (0)$ ,  $I(\emptyset) = k[X_0, \dots, X_n]$ .

### 5.3. Irréductibilité

Les définitions et résultats du chapitre I se transcrivent, *mutatis mutandis*, sans difficulté.

Supposons maintenant le corps  $k$  algébriquement clos. On a alors une variante du Nullstellensatz affine. La différence notable est le rôle joué par l'idéal inconvenant  $R^+ = (X_0, \dots, X_n)$ .

**Théorème 5.4** (Nullstellensatz projectif). *On suppose  $k$  algébriquement clos. Soit  $I$  un idéal homogène de  $k[X_0, \dots, X_n]$  et soit  $V = V_p(I)$ .*

$$\begin{aligned} 1) \quad V_p(I) = \emptyset &\iff \exists N \text{ tel que } (X_0, \dots, X_n)^N \subset I \\ &\iff (X_0, \dots, X_n) = R^+ \subset \text{rac}(I). \end{aligned}$$

2) Si  $V_p(I) \neq \emptyset$ , on a  $I_p(V_p(I)) = \text{rac}(I)$ .

*Démonstration.* Si  $I = R$  on a  $V = V_p(I) = \emptyset$  et l'assertion 1) est trivialement vraie. Supposons donc  $I \neq R$ . On applique le Nullstellensatz affine au cône de  $V$  :  $C(V) = V(I) \subset k^{n+1}$  (cf. 4.5.c). Dire que  $V = V_p(I)$  est vide c'est dire que  $C(V)$  est réduit à l'origine de  $k^{n+1}$  donc que  $\text{rac}(I)$  est égal à  $R^+$ , ce qui prouve 1). Pour 2), comme  $V = V_p(I)$  est non vide, on a  $I_p(V) = I(C(V))$ , donc cet idéal est égal à  $\text{rac}(I)$  par le Nullstellensatz affine.

*Remarque 5.5.* On vérifie que si  $I$  est un idéal homogène il en est de même de sa racine. On obtient ainsi une bijection entre les ensembles algébriques projectifs non vides de  $\mathbf{P}^n$  et les idéaux homogènes radicaux de  $R$  qui ne contiennent pas l'idéal inconvenant  $R^+$ . On notera que le vide correspond à deux idéaux radicaux :  $R$  et  $R^+$ . Les idéaux premiers correspondent encore aux ensembles algébriques projectifs irréductibles, mais attention, les points ne correspondent plus aux idéaux maximaux.

## 6. Un anneau gradué associé à un ensemble algébrique projectif

Soit  $V \subset \mathbf{P}^n$  un ensemble algébrique projectif et soit  $I_p(V)$  son idéal. Comme  $I_p(V)$  est homogène, l'anneau quotient

$$\Gamma_h(V) = k[X_0, \dots, X_n]/I_p(V)$$

est gradué (cf. 7.1 ci-dessous). C'est l'un des anneaux gradués naturellement associés à  $V$ . Le lecteur vérifiera qu'on a encore un dictionnaire qui met en correspondance les idéaux homogènes radicaux de  $\Gamma_h(V)$  et les ensembles algébriques projectifs contenus dans  $V$ .

### Remarques 6.1

a) On prendra garde que les éléments de  $\Gamma_h(V)$ , contrairement au cas affine, ne définissent pas des fonctions sur  $V$ . Cependant, si  $f \in \Gamma_h(V)$  et  $x \in \mathbf{P}^n$  le fait que  $x$  soit un zéro de  $f$  a un sens, indépendant du choix d'un représentant de  $f$ . Par rapport au cas affine, l'anneau  $\Gamma_h(V)$  présente deux autres différences fondamentales : on verra au chapitre III, 11.6.a que cet anneau dépend de manière essentielle du plongement de  $V$  dans  $\mathbf{P}^n$  ; de plus, même pour un plongement fixé il y a plusieurs anneaux gradués qu'on peut associer naturellement à  $V$  (cf. Ch. III, 9.8).

b) On notera aussi la conséquence suivante du Nullstellensatz : si  $f \in \Gamma_h(V)$  est homogène de degré  $> 0$  et nul sur le fermé  $W$  de  $V$ ,  $f$  est dans la racine de l'idéal  $I_V(W)$ .

### Les ouverts $D^+(f)$

Ce sont les analogues projectifs des ouverts  $D(f)$  du cas affine.

**Définition 6.2.** Soient  $V$  un ensemble algébrique projectif et  $f \in \Gamma_h(V)$  un élément homogène de degré  $> 0$ . On pose :

$$D^+(f) = \{ x \in V \mid f(x) \neq 0 \}.$$

Il est clair que les  $D^+(f)$  sont des ouverts de  $V$ , de plus :

**Proposition 6.3.** *Avec les notations de 6.2, tout ouvert non vide de  $V$  est union finie d'ouverts de la forme  $D^+(f)$ .*

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert non vide de  $V$ , de sorte que  $V - U = V_p(I)$  avec  $I$  idéal homogène de  $R$ . On a donc  $I = (F_1, \dots, F_r)$  avec les  $F_i \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogènes de degrés  $> 0$ . Alors, si  $f_i$  est l'image de  $F_i$  dans  $\Gamma_h(V)$ , on a  $U = D^+(f_1) \cup \dots \cup D^+(f_r)$ .

**Exemple 6.4.** Si on prend dans  $\mathbf{P}^n$  les ouverts  $D^+(X_i)$ , pour  $i = 0, \dots, n$  on obtient un recouvrement ouvert de  $\mathbf{P}^n$  par des ouverts dont on a vu au paragraphe 3 qu'ils sont naturellement en bijection avec des espaces affines. C'est cette remarque qui sera à la base de la définition de la structure de variété de  $\mathbf{P}^n$  au chapitre suivant.

**Remarque 6.5.** Pour des raisons qui apparaîtront au chapitre suivant, nous ne considérerons les ouverts  $D^+(f)$  que pour des éléments  $f$  de degré  $> 0$ . Si  $f$  est de degré 0, donc une constante, l'ouvert correspondant est trivial : vide si  $f \neq 0$  et égal à  $V$  si  $f = 0$ . Si  $f$  est de degré  $> 0$ ,  $D^+(f)$  est non vide et n'est égal à  $V$  que si  $V$  est fini (cf. IV, 2.9).

En guise de conclusion, les différences fondamentales avec le cadre affine sont les suivantes :

- 1) Il faut utiliser les polynômes homogènes, remplacer les anneaux par des anneaux gradués et les idéaux par des idéaux homogènes.
- 2) Les polynômes (et plus généralement les éléments des anneaux gradués considérés) ne sont plus des fonctions.
- 3) L'idéal inconvenant  $(X_0, \dots, X_n)$  joue un rôle tout à fait particulier.
- 4) On va retrouver le cadre affine par le biais des ouverts  $D^+(X_i)$  ou plus généralement  $D^+(f)$ .

## 7. Appendice : anneaux gradués

**Définition 7.1.** *Une  $k$ -algèbre  $R$  est dite graduée si elle s'écrit comme somme directe*

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} R_n$$

avec les  $R_n$  qui sont des sous-espaces vectoriels de  $R$  vérifiant la condition  $R_p R_q \subset R_{p+q}$ . Les éléments de  $R_p$  sont dits homogènes de degré  $p$  et cette condition est la condition usuelle sur le degré d'un produit.

On notera que  $R_0$  est une sous-algèbre de  $R$  et que  $m = R^+ = \bigoplus_{n>0} R_n$  est un idéal de  $R$  dont le quotient est isomorphe à  $R_0$ . L'exemple type d'algèbre graduée est l'algèbre des polynômes, graduée par le degré usuel.

**Proposition-définition 7.2.** *Soit  $R$  une  $k$ -algèbre graduée et soit  $I$  un idéal de  $R$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1)  $I$  est engendré par des éléments homogènes.

2) Si  $f \in I$  avec  $f = \sum_0^r f_i$  et  $f_i$  homogène de degré  $i$ , on a  $f_i \in I$  pour tout  $i$ .

Un tel idéal sera dit homogène.

*Démonstration.* Il est clair que 2) implique 1). Réciproquement, supposons  $I$  engendré par des éléments homogènes  $G_i$  de degrés  $\alpha_i$ . Soit  $F = F_0 + \dots + F_r \in I$  avec  $F_i$  homogène de degré  $i$ . Par récurrence il suffit de montrer que  $F_r \in I$ . Mais on peut écrire  $F = \sum U_i G_i$  et, en identifiant les termes de plus haut degré,  $F_r = \sum U_{i,r-\alpha_i} G_i$ , de sorte que  $F_r$  est bien dans  $I$ .

**Proposition 7.3.** *Soit  $R$  une  $k$ -algèbre graduée et soit  $I$  un idéal homogène de  $R$ . Soit  $S$  la  $k$ -algèbre quotient  $S = R/I$  et  $p$  la projection canonique. Alors,  $S$  a une graduation naturelle donnée par  $S_i = p(R_i)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $S$  est la somme directe des  $S_i$ , c'est exactement la condition 2) de la proposition 7.2.

*Remarque 7.4.* Lorsque l'on a  $R_0 = k$ , on notera que si  $I$  est homogène et distinct de  $R$ ,  $I$  est contenu dans  $R^+$ .

**Définition 7.5.** *Soit  $R$  une  $k$ -algèbre graduée. Un  $R$ -module  $M$  est dit gradué s'il s'écrit comme somme directe :*

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$$

où les  $M_n$  sont des sous- $k$ -espaces vectoriels de  $M$  qui vérifient la condition  $R_p M_q \subset M_{p+q}$  pour  $p \in \mathbf{N}$  et  $q \in \mathbf{Z}$ . Un homomorphisme  $\varphi : M \rightarrow N$  entre deux  $R$ -modules gradués sera dit homogène de degré  $d$  si on a, pour tout  $n$ ,  $\varphi(M_n) \subset N_{d+n}$ .

On notera que si  $\varphi$  est homogène de degré  $d$ , le noyau de  $\varphi$  est un sous-module gradué de  $M$  i.e. si  $x = \sum x_n \in \text{Ker } \varphi$  on a  $x_n \in \text{Ker } \varphi$  pour tout  $n$ .

## Exercices

### 1. Homographies

Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$  et soit  $\mathbf{P}(E)$  l'espace projectif associé. Si  $u \in GL(E)$ ,  $u$  induit une bijection  $\bar{u}$  de  $\mathbf{P}(E)$  dans lui-même qu'on appelle une homographie.

a) Que peut-on dire de  $u$  lorsque  $\bar{u} = Id$ ?

b) Montrer que l'image d'un sous-espace projectif de dimension  $d$  par une homographie en est un autre.

c) Réciproquement, montrer que si  $V$  et  $W$  sont deux sous-espaces projectifs de dimension  $d$  il existe une homographie  $\bar{u}$  telle que  $\bar{u}(V) = W$ .

d) Supposons  $E = k^2$  et

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec  $ad - bc \neq 0$  et prenons dans  $\mathbf{P}^1(k) = \mathbf{P}(E)$  le point  $\infty = (1, 0)$  comme point à l'infini, de sorte que les points  $x$  de  $k$  s'identifient aux points  $(x, 1)$  de  $\mathbf{P}^1(k) - \{\infty\}$ .

Préciser  $\bar{u}$  avec cette description et expliquer le mot homographie.

### 2. Repères

On reprend les notations de 1, on appelle  $p$  la projection canonique de  $E - \{0\}$  sur  $\mathbf{P}(E)$ . Un repère de  $\mathbf{P}(E)$  est formé de  $n + 2$  points  $x_0, \dots, x_{n+1}$  de  $\mathbf{P}(E)$  tels qu'il existe une base  $e_1, \dots, e_{n+1}$  de  $E$  avec  $p(e_i) = x_i$  pour  $i = 1, \dots, n + 1$  et  $p(e_1 + \dots + e_{n+1}) = x_0$ .

a) On suppose  $n = 1$ . Montrer qu'un repère de  $\mathbf{P}(E)$  (i.e. d'une droite projective) consiste exactement en trois points distincts. (Par exemple dans  $\mathbf{P}^1(k)$  avec la description usuelle on peut prendre  $0 = (0, 1)$ ,  $\infty = (1, 0)$  et  $1 = (1, 1)$ .)

b) Montrer que  $n + 2$  points  $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbf{P}(E)$  forment un repère si et seulement si  $n + 1$  quelconques d'entre eux ne sont pas dans un même hyperplan.

c) Montrer que si  $x_0, \dots, x_{n+1}$  et  $y_0, \dots, y_{n+1}$  sont deux repères de  $\mathbf{P}(E)$  il existe une homographie et une seule qui envoie les  $x_i$  sur les  $y_i$ . Étudier le cas  $n = 1$ .

### 3. Quadriques

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Une quadrique de  $\mathbf{P}^3(k)$  est un ensemble algébrique projectif de la forme  $Q = V(F)$  où  $F$  est un polynôme homogène de degré 2 en  $X, Y, Z, T$  irréductible, donc une forme quadratique sur  $k^4$  que l'on supposera non dégénérée.

a) Montrer que si  $Q = V(F)$  est une quadrique il existe une homographie  $h$  telle que  $h(Q) = V(XT - YZ)$ . On supposera désormais que  $Q$  est de cette forme.

b) Montrer que  $Q$  contient deux familles de droites que l'on indexera toutes deux par  $\mathbf{P}^1$ . Montrer que par tout point de  $Q$  passe une unique droite de chaque famille, que deux droites d'une même famille sont disjointes et que deux droites de familles différentes se coupent en un seul point.

c) Montrer que si  $D_1, D_2, D_3$  sont trois droites de  $\mathbf{P}^3$  deux à deux disjointes, il existe une unique quadrique  $Q$  contenant les  $D_i$ . (On commencera par montrer que par 9 points de  $\mathbf{P}^3$  passe toujours un ensemble du type  $V(F)$  avec  $F$  de degré 2, puis que si un tel ensemble coupe une droite en trois points distincts il la contient.)

### 4. La cubique gauche

On suppose  $k$  infini.

On considère l'application  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$  définie par

$$\varphi(u, v) = (u^3, u^2v, uv^2, v^3).$$

On pose  $C = \text{Im } \varphi$ .

a) Montrer que  $C = V(I)$ , où  $I$  désigne l'idéal

$$(XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT).$$

(Dans le sens non évident, regarder sur les ouverts affines  $X \neq 0, T \neq 0$ .)

b) Montrer que  $I(C)$  est égal à  $I$  (on pourra commencer par prouver, par exemple par récurrence sur le degré de  $F$  par rapport à  $Y$  et  $Z$ , que tout polynôme homogène  $F \in k[X, Y, Z, T]$  est égal modulo  $I$  à un polynôme de la forme  $a(X, T) + b(X, T)Y + c(X, T)Z$ ).

c) Montrer que  $I(C)$  n'est pas engendré par 2 générateurs (regarder les termes de degré 2). On dit que  $C$  n'est pas schématiquement intersection complète.

d) ¶ Montrer en revanche qu'on a  $C = V(Z^2 - YT, F)$  où  $F$  est un polynôme homogène de degré 3 que l'on précisera. On dit que  $C$

est ensemblistement intersection complète, c'est-à-dire qu'elle peut être définie par deux équations, ou encore qu'elle est intersection de deux surfaces. Mais attention, ces surfaces sont tangentes et  $C$  est, en fait, double dans cette intersection.

e) ¶ Montrer qu'on a une "résolution" de  $I(C)$  i.e. une suite exacte :

$$0 \rightarrow R(-3)^2 \xrightarrow{u} R(-2)^3 \xrightarrow{v} I(C) \rightarrow 0$$

où  $R$  désigne l'anneau  $k[X, Y, Z, T]$ , et  $R(-i)$  le  $R$ -module gradué égal à  $R$ , mais avec la graduation décalée :  $R(-i)_n = R_{n-i}$ . Les homomorphismes  $u$  et  $v$  sont de degré 0 (i.e. envoient les éléments de degré  $n$  sur les éléments de degré  $n$ ). Ici, cela signifie que  $v$  est donné par trois polynômes homogènes de degré 2 engendrant  $I(C)$  (on se demande bien lesquels!) et  $u$  par une matrice  $3 \times 2$  dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré 1. L'exercice consiste à calculer  $u$ , i.e. les relations (on dit encore les syzygies, c'est plus joli) qui lient les générateurs de  $I$ .

## 5. Réunion de deux droites disjointes

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites disjointes de  $\mathbf{P}^3$ .

a) Montrer que, quitte à faire une homographie, on peut supposer que ces droites sont données par  $D_1 = V(X, Y)$  et  $D_2 = V(Z, T)$ .

b) Soit  $C = D_1 \cup D_2$ . Déterminer  $I(C)$ .

c) ¶ Montrer qu'on a une résolution de  $I(C)$  de la forme suivante (cf. 4) :

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R(-3)^4 \rightarrow R(-2)^4 \rightarrow I(C) \rightarrow 0.$$

# Chapitre III

## Faisceaux et variétés

### 0. Motivations

Si l'on compare l'étude des ensembles algébriques affines et des ensembles algébriques projectifs on constate beaucoup de similitudes et quelques différences fondamentales, notamment le rôle joué par les polynômes homogènes et les anneaux gradués dans le cas projectif, mais surtout une différence au niveau des fonctions. Si  $V$  est un ensemble algébrique affine on a une belle algèbre de fonctions  $\Gamma(V)$  avec un dictionnaire quasiment parfait entre les propriétés de  $V$  et celles de  $\Gamma(V)$ . Dans le cas projectif, l'un des problèmes est que les éléments de  $\Gamma_h(V)$  ne définissent pas des fonctions sur  $V$ , même dans le cas le plus simple des polynômes homogènes, car si  $x \in \mathbf{P}^n$  et si  $F$  est homogène de degré  $d$ , la valeur  $F(x)$  dépend du choix du représentant :  $F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$ .

Pour remédier à cette situation on part de l'idée que l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$  contient des ouverts  $U_i = D^+(X_i)$  qui sont en bijection avec des espaces affines. Sur ces ouverts on possède de bonnes fonctions : les polynômes. On pourrait donc imaginer, pour avoir de bonnes fonctions sur  $\mathbf{P}^n$ , de recoller ces fonctions sur les  $U_i$ . En tous cas, ce n'est pas ainsi qu'on va obtenir beaucoup de fonctions définies sur tout  $\mathbf{P}^n$ , comme le montre l'exemple ci-dessous.

Considérons sur la droite projective  $\mathbf{P}^1$  munie des coordonnées homogènes  $x$  et  $t$  les ouverts  $U_0$  ( $x \neq 0$ ) et  $U_1$  ( $t \neq 0$ ). Ils sont en bijection avec  $k$  par  $j_i : k \rightarrow U_i$  avec  $j_0$  et  $j_1$  donnés respectivement par  $\tau \mapsto (1, \tau)$  et  $\xi \mapsto (\xi, 1)$ , de réciproques  $(x, t) \mapsto t/x$  et  $(x, t) \mapsto x/t$ . Sur  $U_0$  (resp.

$U_1$ ) une bonne fonction, en notre sens, c'est un polynôme  $f(\tau) = f(t/x)$  (resp.  $g(\xi) = g(x/t)$ ). Pour avoir une bonne fonction sur  $\mathbf{P}^1$  tout entier, il faut que ces fonctions coïncident sur  $U_0 \cap U_1$ . Autrement dit on doit avoir, pour tous  $x, t \neq 0$ ,  $f(t/x) = g(x/t)$ , c'est-à-dire

$$a_n \frac{t^n}{x^n} + \dots + a_1 \frac{t}{x} + a_0 = b_m \frac{x^m}{t^m} + \dots + b_1 \frac{x}{t} + b_0$$

et en chassant les dénominateurs,

$$a_n t^{n+m} + a_{n-1} t^{n+m-1} x + \dots \\ + a_0 t^m x^n - b_0 t^m x^n - b_1 t^{m-1} x^{n+1} - \dots - b_m x^{m+n} = 0.$$

Le polynôme ci-dessus, nul sur l'ouvert de Zariski  $x \neq 0, t \neq 0$  de  $k^2$ , est donc identiquement nul (au moins si  $k$  est infini). Mais ceci impose que tous les  $a_i, b_i$  soient nuls pour  $i > 0$  et que  $a_0$  et  $b_0$  soient égaux. Autrement dit,  $f$  et  $g$  sont deux constantes égales et la fonction construite sur  $\mathbf{P}^1$  est elle-même une constante.

La conclusion de ce qui précède est que dans le cas projectif les fonctions globales (i.e. sur tout  $\mathbf{P}^n$ , ou sur tout  $V$  pour  $V$  ensemble algébrique projectif) sont insuffisantes (il n'y a le plus souvent que les constantes) et que si on veut avoir des fonctions, il faut se contenter d'en avoir *localement*, c'est-à-dire sur des ouverts.

C'est cette constatation qui conduit à la notion de *faisceau*.

## 1. La notion de faisceau

### a. Faisceaux de fonctions : définition

**Définition 1.1.** Soit  $X$  un espace topologique et soit  $\mathbf{K}$  un ensemble. Un faisceau de fonctions sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  est la donnée pour tout ouvert  $U$  de  $X$  d'un ensemble  $\mathcal{F}(U)$  de fonctions définies sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbf{K}$ , avec les deux axiomes suivants :

1) *Restriction* : Si  $V$  est un ouvert inclus dans  $U$  et si  $f \in \mathcal{F}(U)$ , on a  $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ .

2) *Recollement* : Si  $U$  est recouvert par des ouverts  $U_i$  ( $i \in I$ ) et si on se donne des  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  telles que  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ , il existe une et une seule fonction  $f \in \mathcal{F}(U)$  telle que  $f|_{U_i} = f_i$ .

**Remarques 1.2**

a) Dans l'axiome de recollement, l'existence d'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{K}$  vérifiant  $f|_{U_i} = f_i$  est claire. La condition dit seulement que cette fonction est dans  $\mathcal{F}(U)$ .

b) Les axiomes ci-dessus sont les axiomes naturels qui assurent que certaines fonctions sur  $X$  (dont on veut faire nos bonnes fonctions dans la situation donnée) possèdent le minimum de propriétés qui permettent de travailler convenablement avec elles : elles sont stables par restriction (axiome 1) et sont de nature locale, c'est-à-dire que pour vérifier que  $f$  est une bonne fonction il suffit de le faire localement (axiome 2).

c) Ce type de conditions est vérifié par des classes très importantes de fonctions : le faisceau de toutes les fonctions, d'abord, mais aussi les fonctions continues à valeurs réelles ou complexes, ou encore, si  $X$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , les fonctions différentiables, analytiques,...

d) On note que la restriction définit une flèche  $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  qui vérifie pour tout  $U$ ,  $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ , et pour tous  $W \subset V \subset U$ ,  $r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$ .

*Notation 1.3.* On pose  $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ . Les éléments de  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  sont appelés les *sections* de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Lorsque  $U$  est égal à  $X$  on parle de sections globales.

**b. Faisceaux généraux**

Nous aurons besoin de faisceaux plus généraux que les faisceaux de fonctions. L'opération de restriction, qui n'est plus évidente, est donnée cette fois de manière axiomatique en utilisant 1.2.d :

**Définition 1.4.** Soit  $X$  un espace topologique. Un *préfaisceau* sur  $X$  consiste en la donnée pour chaque ouvert  $U$  de  $X$  d'un ensemble  $\mathcal{F}(U)$  et, pour  $U$  et  $V$  ouverts avec  $V \subset U$ , d'applications dites de restriction  $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Si  $W \subset V \subset U$  on a  $r_{W,U} = r_{W,V} r_{V,U}$ .

ii) On a  $r_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ .

On pose encore  $r_{V,U}(f) = f|_V$ .

On dit que  $\mathcal{F}$  est un *faisceau* s'il vérifie, de plus, la condition de recollement 2) de 1.1.

*Remarques 1.5*

a) Le préfaisceau dont les sections sur  $U$  sont les fonctions constantes à valeurs dans  $\mathbf{K}$  n'est pas en général un faisceau. En effet, la condition de recollement est en défaut sur un ouvert non connexe.

b) On peut toujours (mais de manière non naturelle) considérer un faisceau comme un faisceau de fonctions (cf. Exercice III, A.1). Cette remarque nous permettra, si besoin est, de nous limiter aux faisceaux de fonctions.

c) Si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau sur  $X$  (pour simplifier nous supposons qu'il s'agit d'un préfaisceau de fonctions de  $X$  dans  $\mathbf{K}$ ), on peut le plonger de manière canonique dans un faisceau  $\mathcal{F}^+$  appelé *faisceau associé* à  $\mathcal{F}$ . Il suffit pour cela de rendre locale la propriété "être dans  $\mathcal{F}(U)$ " en posant, pour  $U$  ouvert de  $X$  :

$$\mathcal{F}^+(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{K} \mid \forall x \in U, \exists V \text{ ouvert,} \\ \text{avec } x \in V \subset U, \text{ et } g \in \mathcal{F}(V) \text{ tel que } f|_V = g\}.$$

Le faisceau ainsi défini est le meilleur possible (i.e. le plus petit qui contient  $\mathcal{F}$ ; cf. [H] II, 1.2).

d) Si on a un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et si  $U$  est un ouvert de  $X$ , le faisceau  $\mathcal{F}|_U$  est défini de manière évidente : si  $V$  est un ouvert de  $U$ , on pose  $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ .

**c. Faisceaux d'anneaux**

Les faisceaux les plus importants avec lesquels nous aurons à travailler sont les faisceaux d'anneaux (ou plutôt de  $k$ -algèbres). Dire que  $\mathcal{F}$  est un faisceau d'anneaux signifie que les  $\mathcal{F}(U)$  sont des anneaux commutatifs et que les restrictions sont des homomorphismes d'anneaux. C'est le cas du faisceau des fonctions (quelconques) à valeurs dans un anneau, ou encore des faisceaux de fonctions continues, différentiables,... à valeurs dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , avec l'addition et la multiplication ordinaires. On peut évidemment donner des définitions analogues avec d'autres structures : groupes, modules,  $k$ -algèbres,...

**Définition 1.6.** *Un espace annelé est un espace topologique  $X$  muni d'un faisceau d'anneaux. Ce faisceau est appelé faisceau structural de  $X$  et on le note traditionnellement  $\mathcal{O}_X$ .*

"Moralement" ce faisceau est le faisceau des "bonnes" fonctions sur  $X$  et cela suppose donc que somme et produit de bonnes fonctions en soient encore.

*Avertissement 1.7.* A partir de maintenant on fixe un corps  $k$  algébriquement clos. Sauf mention expresse du contraire, pour tous les espaces annelés que nous considérerons, le faisceau structural sera un faisceau de fonctions à valeurs dans  $k$  et nous supposerons que c'est un faisceau de  $k$ -algèbres qui contient les fonctions constantes.

Avec ces précisions on a une notion naturelle de morphisme (et donc d'isomorphisme) d'espaces annelés :

**Définition 1.8.** Soient  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  deux espaces annelés. Un morphisme d'espaces annelés consiste en la donnée d'une application continue  $\varphi : X \rightarrow Y$ , qui transforme par composition une bonne fonction en bonne fonction : pour toute fonction  $g : U \rightarrow k$ , telle que  $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ , on a  $g\varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$ .

*Remarques 1.9*

a) On notera que dans le cas des fonctions différentiables par exemple, cette condition relative à la composition équivaut à la différentiabilité de l'application  $\varphi$ .

b) Pour tout ouvert  $U$  de  $Y$  on définit un homomorphisme d'anneaux :

$$\varphi_U^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$$

en posant  $\varphi_U^*(g) = g\varphi$ . Ces homomorphismes sont compatibles avec les restrictions, c'est-à-dire qu'ils vérifient  $r_{\varphi^{-1}V, \varphi^{-1}U} \varphi_U^* = \varphi_V^* r_{V, U}$ . Dans le cas d'espaces annelés dont les faisceaux ne sont plus des faisceaux d'ensembles on définit les morphismes en se donnant, outre l'application continue  $\varphi$ , la collection des  $\varphi_U^*$  vérifiant les conditions de compatibilité ci-dessus (cf. [EGA] I, 0.4.1).

## 2. Le faisceau structural d'un ensemble algébrique affine

Soit  $V \subset k^n$  un ensemble algébrique affine. On cherche à définir les bonnes fonctions sur les ouverts de  $V$ . Deux remarques vont nous guider :

1) sur  $V$  tout entier on veut bien sûr retrouver les fonctions polynomiales  $\Gamma(V)$ ,

2) on a une base d'ouverts très simple : les  $D(f)$ .

En fait, le lemme suivant montre qu'on peut se limiter à définir le faisceau structural sur cette base d'ouverts :

**Lemme 2.1.** Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{U}$  une base d'ouverts de  $X$  et  $\mathbf{K}$  un ensemble. On suppose qu'on s'est donné pour tout  $U \in \mathcal{U}$  un ensemble  $\mathcal{F}(U)$  de fonctions de  $U$  dans  $\mathbf{K}$ , vérifiant les conditions suivantes :

i) (restriction) si  $V, U \in \mathcal{U}$  avec  $V \subset U$  et si  $s \in \mathcal{F}(U)$  on a  $s|_V \in \mathcal{F}(V)$ .

ii) (recollement) si un ouvert  $U \in \mathcal{U}$  est recouvert par des  $U_i$ ,  $i \in I$  avec  $U_i \in \mathcal{U}$  et si  $s$  est une fonction de  $U$  dans  $\mathbf{K}$  qui vérifie  $\forall i \in I$   $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ , on a  $s \in \mathcal{F}(U)$ .

Alors, il existe un unique faisceau  $\overline{\mathcal{F}}$  de fonctions sur  $X$  tel que l'on ait, pour tout  $U \in \mathcal{U}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$ .

*Démonstration.* Si  $U$  est un ouvert, il est recouvert par des ouverts  $U_i$  de la base d'ouverts  $\mathcal{U}$  et on pose :

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \rightarrow \mathbf{K} \mid \forall i, s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}.$$

Le lecteur vérifiera facilement que cette définition est indépendante du choix du recouvrement et que  $\overline{\mathcal{F}}$  est bien le faisceau cherché.

Sous réserve de vérifier les conditions i) et ii) de 2.1 on pourra donc se borner à définir les faisceaux sur des bases d'ouverts.

Notons aussi, en passant, le lemme trivial suivant :

**Lemme 2.2.** Soit  $X$  un espace topologique, muni d'une base d'ouverts  $\mathcal{U}$ , et soient  $\mathcal{F}$  un faisceau et  $\mathcal{G}$  un préfaisceau sur  $X$ . On suppose qu'on a, pour tout  $U \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ . Alors, on a  $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$  (cf. 1.5.c).

Dans le cas qui nous intéresse on cherche donc à définir  $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V)$ . Comme  $D(f)$  est l'ensemble des points où la fonction  $f$  n'est pas nulle, il est naturel d'inclure parmi les sections de  $\mathcal{O}_V$  sur  $D(f)$ , outre les fonctions sur  $V$ , la fonction inverse  $f^{-1}$ . Précisément, considérons l'homomorphisme de restriction  $r : \Gamma(V) \rightarrow \mathcal{F}(D(f), k)$  où  $\mathcal{F}(D(f), k)$  désigne l'anneau de toutes les fonctions de  $D(f)$  dans  $k$ . Comme  $r(f)$  est inversible  $r$  se factorise en  $r = \rho j$  par le localisé  $\Gamma(V)_f$  (cf. Mémento 1.6.b) et l'homomorphisme  $\rho : \Gamma(V)_f \rightarrow \mathcal{F}(D(f), k)$  est injectif. En effet, si  $\rho(g/f^n) = 0$ , on a  $g(x) = 0$  sur  $D(f)$ , donc  $fg = 0$  sur  $V$ , ce qui signifie bien que  $g/f^n$  est nul dans le localisé (cf. Mémento *loc. cit.*). On définit alors :

**Définition 2.3.** Soit  $V$  un ensemble algébrique affine et soit  $f \in \Gamma(V)$ ,  $f$  non nulle. On pose :

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$$

(identifié à un sous-anneau de l'anneau des fonctions sur  $D(f)$  à valeurs dans  $k$  par  $\rho$ ). On définit ainsi un faisceau d'anneaux sur  $V$  appelé faisceau des fonctions régulières.

Dans le cas particulier où  $\Gamma(V)$  est intègre, l'anneau  $\Gamma(V)_f$  est un sous-anneau du corps des fractions  $K(V)$  de  $\Gamma(V)$  (le corps des fonctions rationnelles sur  $V$ , cf. I, 6.15) et l'homomorphisme naturel  $j : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)_f$  est injectif. Si  $\Gamma(V)$  n'est pas intègre (c'est-à-dire si  $V$  n'est pas irréductible), il n'y a pas de corps de fractions et  $j$  n'est plus nécessairement injectif.

*Vérification 2.4.* Il faut maintenant vérifier que les conditions de 2.1 pour avoir un faisceau sur  $V$  sont remplies.

a) *Restriction* : Si on a  $D(f) \subset D(g)$ , on a  $V(g) \subset V(f)$  et donc, comme  $f$  est nulle sur  $V(g)$ , le Nullstellensatz montre qu'on a  $f^n = gh$ . Si on a  $u/g^i \in \Gamma(V)_g$ , sa restriction à  $D(f)$  s'écrit  $uh^i/g^i h^i = uh^i/f^{ni}$  et cette restriction est bien dans  $\Gamma(V)_f$ .

b) *Recollement* : Nous supposons  $V$  irréductible (donc  $\Gamma(V)$  intègre); le lecteur traitera le cas général à titre d'exercice (cf. 2.5.b).

Soit  $D(f)$  un ouvert standard recouvert par des  $D(f_i)$ , avec  $f_i \neq 0$ . Cela signifie que  $V(f)$  est l'intersection des  $V(f_i)$  ou encore que  $V(f) = V(I)$ , idéal engendré par les  $f_i$ . Comme l'anneau  $\Gamma(V)$  est noethérien on peut supposer les  $f_i$  en nombre fini  $r$ .

Soient  $s_i$  des sections sur  $D(f_i)$  que l'on peut écrire  $s_i = a_i/f_i^n$  (avec le même  $n$  puisqu'elles sont en nombre fini). On suppose que ces sections coïncident sur les intersections  $D(f_i) \cap D(f_j)$ . On a donc  $a_i f_j^n = a_j f_i^n$  sur  $D(f_i) \cap D(f_j)$ , donc, par densité ( $V$  est irréductible), cette relation est vraie dans  $V$ .

Comme  $f$  est nul sur  $V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1^n, \dots, f_r^n)$ , on a, d'après le Nullstellensatz,  $f \in \text{rac}(f_1^n, \dots, f_r^n)$ , autrement dit il existe un entier  $m$  et des  $b_j \in \Gamma(V)$  avec  $f^m = \sum_{j=1}^r b_j f_j^n$ .

(Remarquons au passage que lorsqu'on a un recouvrement de  $V$  tout entier, on a la relation  $1 = \sum_{j=1}^r b_j f_j^n$  qui est un analogue algébrique des partitions de l'unité utilisées en analyse.)

Cherchons alors une section  $s$  sur  $D(f)$  de la forme  $s = a/f^m$  (avec le  $m$  défini ci-dessus) telle que  $s|_{D(f_i)} = s_i$ , i.e.  $a/f^m = a_i/f_i^n$ , c'est-à-dire encore  $f_i^n a = a_i f^m = a_i \sum_{j=1}^r b_j f_j^n = \sum_{j=1}^r b_j a_i f_j^n = \sum_{j=1}^r b_j a_j f_i^n = f_i^n \sum_{j=1}^r b_j a_j$ . Il est clair que l'objectif est atteint si on pose  $a = \sum_{j=1}^r b_j a_j$ .

### Remarques 2.5

a) Le lecteur scrupuleux vérifiera que si un ouvert a deux écritures  $D(f_1) = D(f_2)$ , les anneaux correspondants sont égaux. Cela résulte de l'argument utilisé en 2.4.a ci-dessus.

b) Pour vérifier 2.4 dans le cas général, on prendra garde que l'égalité des  $s_i$  sur l'intersection signifie seulement qu'il existe un entier  $N$  avec  $f_i^N f_j^N (a_i f_j^n - a_j f_i^n) = 0$ . On écrira ensuite  $f^m = \sum_j b_j f_j^{n+N}$  et  $a = \sum_j a_j b_j f_j^N$ .

c) Le calcul de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_V)$  pour un ouvert non standard est plus ardu. Voir par exemple le cas de  $U = k^2 - \{(0, 0)\}$  (cf. exercices III, A.2).

## 3. Les variétés affines

Nous avons muni un ensemble algébrique affine  $V$  d'une structure d'espace annelé  $(V, \mathcal{O}_V)$  en l'équipant du faisceau des fonctions régulières  $\mathcal{O}_V$  défini ci-dessus. Une variété algébrique affine est essentiellement la même chose :

**Définition 3.1.** Une variété algébrique affine est un espace annelé isomorphe à un espace annelé  $(V, \mathcal{O}_V)$ , où  $V$  est un ensemble algébrique affine et  $\mathcal{O}_V$  le faisceau des fonctions régulières sur  $V$ . Un morphisme de variétés algébriques affines est simplement un morphisme d'espaces annelés.

### Remarques 3.2

a) Les auteurs américains réservent en général le mot variété au cas irréductible.

b) L'unique gain des variétés algébriques affines par rapport aux ensembles algébriques affines est d'être intrinsèques, i.e. indépendantes d'un plongement dans  $k^n$ . L'exemple typique à cet égard est celui des  $D(f)$  :

**Proposition 3.3.** Soient  $V$  un ensemble algébrique affine et  $f \in \Gamma(V)$ . L'ouvert  $D(f)$ , muni du faisceau  $\mathcal{O}_V$  restreint à  $D(f)$ , est une variété algébrique affine.

*Démonstration.* On suppose  $V$  plongé dans  $k^n$ , soit  $I = I(V)$  et soit  $F$  un polynôme dont la restriction à  $V$  est  $f$ . Il s'agit de montrer que  $D(f)$  est isomorphe à un ensemble algébrique affine. L'astuce est d'aller chercher cet ensemble dans  $k^{n+1}$  : on considère l'application

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1/f(x_1, \dots, x_n))$$

de  $D(f)$  dans  $k^{n+1}$ . L'image  $W$  de  $\varphi$  est égale à l'ensemble  $V(J)$  avec  $J = I + (X_{n+1}F - 1)$  (cf. la démonstration du Nullstellensatz). Il est clair que  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $D(f)$  sur  $W$ , de réciproque donnée par la projection  $p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ . On vérifie facilement que c'est un isomorphisme (il suffit de se limiter aux ouverts standard, cf. ci-après 11.1).

*Exemple 3.4.* Le groupe des matrices inversibles à coefficients complexes  $GL(n, \mathbf{C})$  est une variété algébrique affine. En effet c'est un ouvert de la forme  $D(f)$  dans l'espace affine  $M(n, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n^2}$  de toutes les matrices, avec pour  $f$  la fonction polynomiale déterminant.

Nous montrons dans la proposition suivante que les morphismes de variétés affines entre deux ensembles algébriques affines sont les mêmes que ceux définis au chapitre I. On note  $\text{Hom}_{\text{Var}}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de variétés affines de  $X$  dans  $Y$ .

**Proposition 3.5.** *Soient  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  deux ensembles algébriques affines, munis de leurs structures de variétés affines données par les faisceaux  $\mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{O}_Y$ . On a des bijections naturelles :*

$$\text{Hom}_{\text{Var}}(X, Y) \simeq \text{Reg}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{k\text{-alg}}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

*Démonstration.* La seconde bijection a été vue en I, 6.7 dont nous reprenons ici les notations. Pour la première, si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme de variétés, on voit aussitôt, en considérant les fonctions coordonnées  $\eta_i$  sur  $Y$ , que  $\varphi = (\eta_1\varphi, \dots, \eta_m\varphi)$  est régulière (cf. 1.8). Réciproquement, si  $\varphi$  est régulière, si  $D(g)$  est un ouvert standard de  $Y$  et  $f = h/g^r \in \Gamma(D(g), \mathcal{O}_Y)$ , on a  $f\varphi = \varphi^*(h)/\varphi^*(g)^r \in \Gamma(D(\varphi^*(g)), \mathcal{O}_X)$ , ce qui montre que  $\varphi$  est aussi un morphisme de variétés.

*Remarque 3.6.* La proposition précédente montre que la catégorie des variétés algébriques affines est équivalente à celle des ensembles algébriques affines (mais, si on n'identifie pas les objets isomorphes, on a vu qu'elle contient plus d'objets).

## 4. Les variétés algébriques

L'intérêt essentiel des espaces annelés est de permettre de définir des objets qui, localement, sont du type d'objets connus. Par exemple une variété différentiable est un espace annelé localement isomorphe à un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  muni du faisceau des fonctions différentiables. Dans notre cas les modèles locaux sont bien entendu les variétés algébriques affines :

**Définition 4.1.** *Une variété algébrique est un espace annelé quasi-compact (cf. Mémento 1.8) localement isomorphe à une variété algébrique affine. Un morphisme de variétés algébriques n'est autre qu'un morphisme d'espaces annelés.*

Dire que  $(X, \mathcal{O}_X)$  est localement isomorphe à une variété algébrique affine signifie que pour tout  $x \in X$  il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  tel que  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  soit isomorphe à une variété algébrique affine. Par ailleurs, le lecteur vérifiera que les variétés affines sont bien quasi-compactes, donc sont des variétés algébriques.

**Définition 4.2.** *Soit  $X^1$  une variété algébrique. Les ouverts de  $X$  isomorphes à une variété algébrique affine sont appelés ouverts affines de  $X$ .*

**Proposition 4.3.** *Soit  $X$  une variété algébrique. Les ouverts affines forment une base d'ouverts de  $X$ . Plus précisément, tout ouvert de  $X$  est réunion finie d'ouverts affines (donc est quasi-compact).*

*Démonstration.* On a  $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$  avec  $U_i$  ouvert affine (c'est la définition d'une variété; la quasi-compactité de  $X$  permet de se ramener à un nombre fini d'ouverts). Soit alors  $U$  un ouvert de  $X$ , on a  $U = \bigcup_{i=1}^r U \cap U_i$  et il suffit de montrer l'assertion pour  $U \cap U_i$ . Mais, puisque  $U_i$  est affine, cela résulte de I, 4.13. et de 3.3.

Si  $X$  est une variété algébrique et  $U$  un ouvert de  $X$ , on vérifie facilement, en utilisant 4.3, que les sections de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  sont des fonctions continues à valeurs dans  $k$  (lorsque  $k$  est muni de la topologie de Zariski).

---

<sup>1</sup>On notera souvent, par abus de langage, une variété  $(X, \mathcal{O}_X)$  par la seule lettre  $X$ .

**Corollaire 4.4.** *Une variété algébrique non vide s'écrit de manière unique comme réunion finie de fermés irréductibles sans inclusion mutuelle : ses composantes irréductibles.*

*Démonstration.* On écrit  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$  avec les  $U_i$  ouverts affines (c'est la quasi-compacité), puis les  $U_i$  comme réunion finie de  $U_{i,j}$ , irréductibles et fermés dans  $U_i$ . On a alors  $X = \bigcup_{i,j} \bar{U}_{i,j}$  et les  $\bar{U}_{i,j}$  sont irréductibles en vertu de I, 3.5.

#### Exemples 4.5

a) Si  $X$  est une variété algébrique et  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $U$  muni du faisceau  $\mathcal{O}_X|_U$  est une variété algébrique dite sous-variété ouverte de  $X$ .

En particulier, tout ouvert d'une variété algébrique affine est une variété algébrique (dite quasi-affine), mais, **attention**, pas nécessairement affine (exemple :  $k^2 - \{(0,0)\}$ , cf. Exercice III, A.4).

b) *Sous-variétés fermées.* Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $Y$  un fermé de  $X$ . Il s'agit de définir sur  $Y$  un faisceau  $\mathcal{O}_Y$ . L'idée la plus naturelle, imposée par le fait que l'inclusion doit être un morphisme, est de prendre les restrictions des fonctions sur les ouverts de  $X$ , i.e. de prendre pour sections sur un ouvert  $V$  de  $Y$  :

$$\{f : V \rightarrow k \mid \exists U \subset X, \text{ ouvert,} \\ \text{avec } U \cap Y = V \text{ et } \exists g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ tel que } g|_V = f\}.$$

Malheureusement, cette formule ne définit en général qu'un préfaisceau  $\mathcal{O}_{0,Y}$  (cf. 4.8). Pour que la condition de recollement soit vérifiée il faut "mettre du local" dans la définition, i.e. passer au faisceau associé,  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{0,Y}^+$  (cf. 1.5.c) :

**Proposition-définition 4.6.** *Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $Y$  un fermé de  $X$ . On définit sur  $Y$  un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_Y$  en posant pour  $V$  ouvert de  $Y$  :*

$$\mathcal{O}_Y(V) = \{f : V \rightarrow k \mid \forall x \in V \exists U \subset X, \text{ ouvert,} \\ \text{avec } x \in U \text{ et } g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ tel que } g|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}\}.$$

Alors, si  $X$  est une variété algébrique (resp. une variété algébrique affine), il en est de même de  $Y$  muni de  $\mathcal{O}_Y$  et l'inclusion de  $Y$  dans  $X$  est un morphisme.

*Démonstration.* On peut se limiter au cas affine, le cas général en est une conséquence immédiate. On suppose donc  $X$  affine et il suffit de montrer que le faisceau  $\mathcal{O}_Y$  est égal au faisceau des fonctions régulières  $\mathcal{R}_Y$  sur  $Y$ . Soient  $f \in \Gamma(X)$  et  $\bar{f}$  son image dans  $\Gamma(Y)$ . Vu le lemme 2.2, il suffit de prouver qu'on a  $\mathcal{R}(D(\bar{f})) = \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f}))$ . Comme on a  $D(\bar{f}) = D(f) \cap Y$  et comme l'homomorphisme de restriction :  $\Gamma(X)_f \rightarrow \Gamma(Y)_{\bar{f}}$  est surjectif, on a déjà  $\mathcal{R}(D(\bar{f})) = \Gamma(Y)_{\bar{f}} \subset \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f}))$ . Réciproquement, si  $\bar{s} \in \mathcal{O}_{0,Y}(D(\bar{f}))$ ,  $\bar{s}$  est la restriction d'une section  $s \in \mathcal{O}_X(U)$  définie sur un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $U \cap Y = D(\bar{f})$ . On recouvre  $U$  par des ouverts  $U_i = D(g_i)$ . Leurs traces  $D(\bar{g}_i)$  recouvrent  $D(\bar{f})$  et, comme  $s|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i) = \Gamma(X)_{g_i}$ , on a  $\bar{s}|_{D(\bar{g}_i)} \in \Gamma(Y)_{\bar{g}_i} = \mathcal{R}_Y(D(\bar{g}_i))$ . Mais alors, comme  $\mathcal{R}_Y$  est un faisceau on a  $\bar{s} \in \mathcal{R}_Y(D(\bar{f}))$ , cqfd.

*Remarque 4.7.* En fait il s'agit d'expliquer qu'on a une flèche surjective de faisceaux de  $\mathcal{O}_X$  dans  $\mathcal{O}_Y$  (cf. §6 ci-dessous). On notera que, si  $V$  est un ouvert affine de  $Y$ , trace sur  $Y$  d'un ouvert affine  $U$  de  $X$ , la démonstration précédente montre que toute fonction régulière sur  $V$  est l'image d'une fonction régulière sur  $U$ . Dans ce cas, la difficulté signalée ci-dessus ne se produit donc pas. En revanche, si les ouverts ne sont pas affines il faut faire attention, comme le montre l'exemple ci-dessous (cf. aussi exercice III, A.3) :

*Exemple 4.8.* Prenons  $V = \mathbf{P}^2$  (cf. §8), le fermé  $W = V(X(X-T), XY)$ , réunion de l'axe des  $y$  et du point  $(1, 0, 1)$  et, comme ouvert de  $W$ ,  $W$  lui-même. Cherchons les ouverts  $\Omega = \mathbf{P}^2 - Z$  de  $\mathbf{P}^2$  qui contiennent  $W$  : cela revient à dire que le fermé  $Z$  ne rencontre pas  $W$  et en particulier pas  $V(X)$ . D'après Bézout, cela impose que  $Z$  soit fini (cf. Ch. VI). Mais alors, on a  $\Gamma(\Omega, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) = \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) = k$  (cf. 8.8 et Exercice III, A.2.b). Les seules fonctions sur  $W$  provenant des ouverts de  $V$  sont donc les constantes. Or, si  $\mathcal{O}_W$  est un faisceau, il y a évidemment d'autres fonctions sur  $W$ , ne seraient-ce que les fonctions constantes sur chacune des deux composantes connexes de  $W$ .

c) *Sous-variétés.* On rassemble les deux exemples précédents :

**Définition 4.9.** Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $Y$  une partie localement fermée de  $X$  (i.e. l'intersection d'un ouvert et d'un fermé). Alors,  $Y$ , munie de la structure de variété définie en a) et b), est appelée une sous-variété algébrique de  $X$ .

## 5. Anneaux locaux

**Définition 5.1.** Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $x \in X$ . On considère les couples  $(U, f)$  avec  $U$  ouvert de  $X$  contenant  $x$ , et  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . Deux tels couples  $(U, f)$  et  $(V, g)$  seront dits équivalents s'il existe un ouvert  $W$  avec  $x \in W \subset U \cap V$ , tel que  $f|_W = g|_W$ . Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les germes de fonctions en  $x$ . Le germe de  $(U, f)$  est noté  $f_x$ . L'ensemble des germes en  $x$  est noté  $\mathcal{O}_{X,x}$ .

**Proposition-définition 5.2.** Avec les notations précédentes, l'ensemble  $\mathcal{O}_{X,x}$  est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Cet anneau est une  $k$ -algèbre locale, d'idéal maximal  $m_{X,x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$ . On l'appelle l'anneau local de  $X$  au point  $x$ . On a  $\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \simeq k$ .

*Démonstration.* La structure d'anneau est définie de la manière suivante : si on a deux germes  $(U, f)$  et  $(V, g)$ , pour les ajouter ou les multiplier on commence par les restreindre tous deux sur  $U \cap V$  et on utilise la structure d'anneau de  $\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$ . On vérifie que ces opérations sont bien définies (i.e. ne dépendent pas du choix des représentants). Ensuite, si  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ , on peut parler de  $f(x)$ , valeur de  $f$  en  $x$ , qui ne dépend pas non plus du choix du représentant. On a ainsi un homomorphisme d'anneaux,  $\pi : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k$ , qui à  $f$  associe  $f(x)$ . Cet homomorphisme est évidemment surjectif et son noyau est  $m_{X,x}$  qui est donc un idéal maximal. D'autre part, si  $f \in \mathcal{O}_{X,x} - m_{X,x}$ , i.e. si  $f(x) \neq 0$ ,  $f$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  (ce qui prouve que cet anneau est local). En effet, on relève  $f$  en  $(U, f)$ . Quitte à diminuer  $U$ , on peut supposer que  $U$  est affine. Ainsi on a  $x \in D_U(f)$ , mais alors  $f$  est inversible dans  $\Gamma(D_U(f), \mathcal{O}_U) = \Gamma(D_U(f), \mathcal{O}_X)$ , donc, a fortiori, dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ .

*Remarque 5.3.* La terminologie "anneau local" est bien entendu issue de ce type d'exemples. Par rapport aux anneaux de fonctions sur les ouverts affines contenant  $x$  l'anneau local a l'avantage d'être intrinsèque.

**Proposition 5.4.** On suppose  $k$  algébriquement clos. Soient  $X$  une variété algébrique,  $x \in X$  et  $U$  un ouvert affine contenant  $x$ . On pose  $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . Soit  $m$  l'idéal maximal de  $A$  correspondant au point  $x$  (cf. I, 4.9). On a alors  $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_m$ . En particulier les idéaux premiers de  $\mathcal{O}_{X,x}$  sont en bijection avec les parties fermées irréductibles de  $U$  (donc de  $X$ ) contenant  $x$ .

*Démonstration.* On a un homomorphisme  $r$  de  $A$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  qui à  $a$  associe son germe en  $x$ ,  $a_x$ . Cet homomorphisme se factorise par  $A_m$  car si  $a \notin m$  on a  $a(x) \neq 0$ , donc  $a_x$  est inversible. On vérifie sans peine qu'on obtient l'isomorphisme cherché (utiliser les ouverts  $D(f)$ ). La dernière assertion vient de I, 4.9 (pour passer à  $X$  on prend simplement l'adhérence, cf. I, 3.5).

*Remarque 5.5.* Soient  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés,  $x \in X$  et  $y = \varphi(x)$ . On en déduit un homomorphisme  $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ . En effet, si  $f_y \in \mathcal{O}_{Y,y}$  provient d'un couple  $(U, f)$  avec  $U$  ouvert de  $Y$ , contenant  $y$ , on a, par définition d'un morphisme, un homomorphisme  $\varphi^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$  qui à  $f$  associe la composée  $f\varphi$ . On associe alors à  $f_y$  le germe  $(f\varphi)_x$  et on obtient la flèche cherchée.

On note que cet homomorphisme est *local*, i.e. envoie  $m_{Y,y}$  dans  $m_{X,x}$ . Si  $\varphi$  est un isomorphisme il en est de même de  $\varphi^*$ .

## 6. Faisceaux de modules

Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace annelé (par exemple une variété algébrique). On va s'intéresser maintenant aux faisceaux de modules. C'est une notion essentielle dont on verra apparaître l'utilité au fil des pages.

**Définition 6.1.** On appelle  $\mathcal{O}_X$ -module un faisceau  $\mathcal{F}$  tel que, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{F}(U)$  soit un  $\mathcal{O}_X(U)$ -module, les flèches de restriction étant linéaires.

*Remarque 6.2.* Attention ici au sens de "linéaire". Si on a  $V \subset U$ , on a les flèches de restriction  $r : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  et  $\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ;  $\mathcal{F}(U)$  et  $\mathcal{F}(V)$  peuvent être considérés tous deux comme des  $\mathcal{O}_X(U)$ -modules; c'est clair pour  $\mathcal{F}(U)$ , et pour  $\mathcal{F}(V)$  c'est par l'intermédiaire de  $r$ . On demande alors à  $\rho$  d'être  $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire, i.e. de vérifier  $\rho(af) = r(a)\rho(f)$ . Comme  $\mathcal{O}_X(U)$  est une  $k$ -algèbre, on voit que tous les  $\mathcal{F}(U)$  sont des  $k$ -espaces vectoriels.

*Exemple 6.3.* Le faisceau nul est évidemment un  $\mathcal{O}_X$ -module. Une somme directe finie (ou un produit direct fini, ce qui est la même chose) de  $\mathcal{O}_X$ -modules en est un, par exemple  $\mathcal{O}_X^n$ , somme directe de  $n$  copies du faisceau structural.

On peut essentiellement faire avec les  $\mathcal{O}_X$ -modules toutes les opérations qu'on sait faire avec les  $A$ -modules et parler d'homomorphisme, de noyau, d'image, de suite exacte,...

**Définition 6.4.** Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux  $\mathcal{O}_X$ -modules. Un homomorphisme  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  consiste en la donnée pour chaque ouvert  $U$  d'une flèche  $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire  $f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  compatible, en un sens évident, aux restrictions.

On peut alors définir le faisceau noyau de  $f$  par la formule

$$(\text{Ker } f)(U) = \text{Ker}(f(U))$$

et on dit que  $f$  est injectif si  $f(U)$  est injectif pour tout  $U$ , ou encore si  $\text{Ker } f = 0$ .

En revanche, pour parler de faisceau image et de surjectivité il faut être plus soigneux. C'est l'une des difficultés fondamentales de la notion de faisceau. Considérons en effet un homomorphisme  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ . Il est tentant de définir son image par la formule  $(\text{Im } f)(U) = \text{Im}(f(U))$ . Malheureusement cela ne fournit pas, en général, un faisceau, comme le montre l'exemple suivant, historiquement le premier rencontré (il s'agit ici de faisceaux de groupes abéliens et non de modules, mais le principe est identique) :

**Exemple 6.5.** On prend  $X = \mathbf{C}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ , le faisceau des fonctions holomorphes sur les ouverts de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^*$ , faisceau des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas. On a un homomorphisme  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  par l'exponentielle. Si on définit  $\text{Im } f$  comme ci-dessus, on n'a pas un faisceau : la condition de recollement n'est pas vérifiée. En effet, prenons  $U = \mathbf{C} - \{0\}$  ; cet ouvert est recouvert par les ouverts  $V$  et  $W$ , égaux à  $\mathbf{C}$  privé des demi-axes réels positif et négatif. Sur  $V$  et  $W$ , la fonction identité  $z$  est dans l'image de l'exponentielle (ces ouverts sont simplement connexes donc on a une fonction  $\text{Log}(z)$ ), mais, sur  $U$ ,  $z$  n'est pas dans l'image de  $f$  car  $U$  n'est pas simplement connexe.

Pour remédier à cette difficulté il faut "mettre du local dans la machine" et définir  $\text{Im } f$  comme le faisceau associé au précédent (cf. 1.5.c) :

**Définition 6.6.** Soit  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules. On définit le faisceau  $\text{Im } f$  comme suit : soit  $s \in \mathcal{G}(U)$ , on a  $s \in (\text{Im } f)(U) \iff$  pour tout  $x \in U$ , il existe un ouvert  $V \subset U$ , avec  $x \in V$ , tel que  $s|_V \in \text{Im}(f(V))$ . On dit que  $f$  est surjectif si on a  $\text{Im } f = \mathcal{G}$ .

*Remarque 6.7.* Dire que  $f$  est surjectif c'est dire qu'il l'est *localement*. C'est le cas de l'exponentielle dans l'exemple 6.5.

**Définition 6.8.** Une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H}$  consiste en la donnée de deux homomorphismes de faisceaux  $u$  et  $v$  qui vérifient  $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$ .

Nous allons revenir sur le cas des sous-variétés fermées. Nous aurons besoin, pour cela, de la définition suivante :

**Définition 6.9.** Soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  une application continue et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $Y$ . On appelle image directe de  $\mathcal{F}$  et on note  $\varphi_*\mathcal{F}$  le faisceau sur  $X$  défini par la formule  $\varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .

*Exemple 6.10.* Soient  $X$  une variété algébrique,  $Y$  un fermé de  $X$  et soit  $j : Y \rightarrow X$  l'injection canonique. Notons  $\mathcal{F}_Y$  le faisceau de toutes les fonctions sur  $Y$ , à valeurs dans  $k$  et considérons son image directe  $j_*\mathcal{F}_Y$ . On a un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $r : \mathcal{O}_X \rightarrow j_*\mathcal{F}_Y$  qui, à  $s \in \mathcal{O}_X(U)$ , associe sa restriction  $s|_{U \cap Y} \in j_*\mathcal{F}_Y(U) = \mathcal{F}_Y(U \cap Y)$ . Alors, avec la définition du faisceau structural sur  $Y$  donnée en 4.6, le faisceau  $j_*\mathcal{O}_Y$  n'est autre que le faisceau image de  $r$ .

Dans la suite on identifiera souvent  $\mathcal{O}_Y$  et  $j_*\mathcal{O}_Y$ , ce qui permet de considérer  $\mathcal{O}_Y$  comme un  $\mathcal{O}_X$ -module. (Pour une justification de cette identification, cf. Exercice III, A.9.)

On considère aussi le noyau de  $r$ , que l'on note  $\mathcal{I}_Y$  (ou quelquefois  $\mathcal{I}_{Y/X}$  lorsqu'on veut rappeler l'espace de départ). C'est un  $\mathcal{O}_X$ -module, mieux, c'est un *idéal* (ou un faisceau d'idéaux) de  $\mathcal{O}_X$  (c'est-à-dire que les  $\mathcal{I}_Y(U)$  sont des idéaux des  $\mathcal{O}_X(U)$ ).

Avec l'identification de  $\mathcal{O}_Y$  et de son image directe on obtient la suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules suivante (dite suite exacte fondamentale associée au fermé  $Y$ ) :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0.$$

**Définition 6.11.** Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux  $\mathcal{O}_X$ -modules. On définit le produit tensoriel  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  comme le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ . C'est encore un  $\mathcal{O}_X$ -module.

## 7. Faisceaux de modules sur une variété algébrique affine

Soient  $V$  une variété algébrique affine,  $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ . Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_V$ -module,  $\Gamma(V, \mathcal{F})$  est un  $A$ -module et cette correspondance est fonctorielle en vertu de 6.4 : c'est le foncteur sections globales. Le but de ce numéro est d'exhiber un foncteur en sens inverse.

**Définition 7.1.** Soit  $M$  un  $A$ -module. On définit un  $\mathcal{O}_V$ -module  $\widetilde{M}$  sur les ouverts standard de  $V$  comme suit : si  $f \in A$  on pose  $\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$ . En particulier on a  $\widetilde{M}(V) = \Gamma(V, \widetilde{M}) = M$ .

### Remarques 7.2

1) On peut décrire le module localisé  $M_f$  comme l'ensemble des couples  $(x, s)$  avec  $x \in M$  et  $s = f^n$ , quotienté par la relation d'équivalence :

$$(x, s) \sim (y, t) \iff \exists u = f^r \quad u(xt - ys) = 0.$$

(attention, la présence du  $u$  peut être nécessaire si  $A$  n'est pas intègre ou si  $M$  a de la torsion, i.e. si on peut avoir  $ax = 0$  avec  $a \in A$  et  $x \in M$  tous deux non nuls). On note  $x/s$  l'image de  $(x, s)$ . C'est aussi  $x \otimes (1/s)$ .

2) On vérifie comme en 2.3 qu'on définit bien ainsi un faisceau.

3) On a, en particulier,  $\widetilde{A} = \mathcal{O}_V$ .

**Proposition 7.3.** La correspondance  $M \mapsto \widetilde{M}$  est fonctorielle et exacte, elle commute aux sommes directes et aux produits tensoriels.

### Démonstration

1) Fonctorialité. Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un homomorphisme de  $A$ -modules, on en déduit aussitôt par fonctorialité du produit tensoriel une application  $\varphi_f : M_f = M \otimes_A A_f \rightarrow N_f = N \otimes_A A_f$ , d'où la fonctorialité.

2) Exactitude. Soit  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $A$ -modules. Alors la suite  $0 \rightarrow M'_f \rightarrow M_f \rightarrow M''_f \rightarrow 0$  obtenue par localisation est exacte. Il suffit de prouver l'injectivité de  $i : M'_f \rightarrow M_f$ , le reste résulte des propriétés du produit tensoriel (cf. Mémento 2.2). Supposons  $i(x'/f^n) = 0$  dans  $M_f$ . Cela signifie qu'on a  $f^r x' = 0$  dans  $M$ , donc aussi dans  $M'$ , donc  $x'/f^n = 0$  dans  $M'_f$ . (En termes plus savants, le  $A$ -module  $A_f$  est plat, cf. [Bbki] AC II §2 N°4, Th. 1.)

3) Sommes et produits. Il s'agit de montrer les formules  $(M \oplus M')_f = M_f \oplus M'_f$  et  $(M \otimes_A M')_f = M_f \otimes_{A_f} M'_f$ . Le lecteur les vérifiera à titre d'exercice.

*Exemple 7.4 : La suite exacte associée à un fermé*

Soit  $W$  un fermé de  $V$  défini par l'idéal  $I = I_V(W)$  de  $A$ . Alors on a la suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$  qui donne en passant aux faisceaux  $0 \rightarrow \tilde{I} \rightarrow \tilde{A} \rightarrow \widetilde{A/I} \rightarrow 0$ , laquelle n'est rien d'autre que la suite exacte fondamentale  $0 \rightarrow \mathcal{J}_W \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_W \rightarrow 0$ . (On peut le voir, par exemple, en remarquant que  $W$  est une variété affine et que  $\Gamma(W) = A/I$ , ou encore en le vérifiant sur les  $D(f)$ .)

**Définition 7.5.** Un  $\mathcal{O}_V$ -module isomorphe à un  $\mathcal{O}_V$ -module du type  $\widetilde{M}$  est dit quasi-cohérent. Si  $M$  est de type fini sur  $A$  on dit que  $\widetilde{M}$  est cohérent. On dira parfois simplement faisceau quasi-cohérent au lieu de  $\mathcal{O}_V$ -module quasi-cohérent.

*Remarque 7.6.* Le foncteur  $M \mapsto \widetilde{M}$  est une équivalence de catégories entre la catégorie des  $A$ -modules et celle des  $\mathcal{O}_V$ -modules quasi-cohérents (ce foncteur admet un "quasi-inverse" : le foncteur sections globales  $\Gamma$ ). Encore une fois, dans le cas affine, tout se passe pour l'essentiel autour de l'anneau  $A = \Gamma(V)$ . On notera toutefois qu'il existe des faisceaux non quasi-cohérents sur une variété algébrique affine (cf. [H] II, 5.2.3 ou ci-dessous Exercice III, B.5) mais nous n'en rencontrerons pas dans ce cours.

Lorsqu'on travaille avec des faisceaux quasi-cohérents sur une variété algébrique affine, la difficulté fondamentale concernant la surjectivité des homomorphismes de faisceaux n'existe pas :

**Proposition 7.7.** Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents sur une variété algébrique affine  $X$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Seule la surjectivité de  $\pi$  pose problème. Elle sera prouvée au chapitre VII en montrant la nullité du groupe de cohomologie  $H^1(X, \mathcal{F}')$ .

La proposition suivante, pour laquelle nous renvoyons à [H] II, §5, montre que la propriété d'être quasi-cohérent est de nature locale :

**Proposition 7.8.** Soit  $X$  une variété algébrique affine et soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Alors,  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent (resp. cohérent) si et seulement si il existe un recouvrement ouvert affine  $U_i$  de  $X$ , avec  $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = A_i$  et des  $A_i$ -modules  $M_i$  (resp. de type fini) tels que l'on ait, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M}_i$ .

Cette proposition justifie la définition suivante :

**Définition 7.9.** Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. On dit que  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent (resp. cohérent) si et seulement si il existe un recouvrement ouvert affine  $U_i$  de  $X$  tel que  $\mathcal{F}|_{U_i}$  soit quasi-cohérent (resp. cohérent) sur  $U_i$ .

Concernant les produits tensoriels de faisceaux quasi-cohérents, on a la proposition suivante :

**Proposition 7.10.** Soit  $X$  une variété et soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux faisceaux quasi-cohérents sur  $X$ .

- a) Le faisceau  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  est quasi-cohérent.
- b) Pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$  on a :

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

*Démonstration.* Si  $U$  est un ouvert on a  $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U$  (car ces deux faisceaux sont associés au même préfaisceau sur  $U : W \mapsto \mathcal{F}(W) \otimes_{\mathcal{O}_X(W)} \mathcal{G}(W)$ ). Si  $U$  est affine et si on pose  $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ,  $F = \Gamma(U, \mathcal{F})$ ,  $G = \Gamma(U, \mathcal{G})$  on a  $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = \widetilde{F} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{G} = \widetilde{F \otimes_A G}$ , ce qui prouve les deux assertions ci-dessus.

## 8. Les variétés projectives

### a. Définition du faisceau structural

On reprend les notations du chapitre II.

Soit  $V \subset \mathbf{P}^n$  un ensemble algébrique projectif, muni de la topologie de Zariski. On va le munir d'une structure de variété algébrique. Bien entendu il va suffire de se donner le faisceau structural sur la base d'ouverts  $D^+(f)$ , avec  $f \in \Gamma_h(V)$ , homogène de degré positif (cf. II, 6.2). Pour comprendre comment définir ce faisceau, regardons le cas de l'ouvert  $U_0 = D^+(X_0)$  de  $\mathbf{P}^n$ . On sait qu'on a une bijection  $j : k^n \rightarrow U_0$ , définie par  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (1, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , de réciproque donnée par  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto$

$(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ . Sur  $U_0$  les bonnes fonctions correspondent aux fonctions polynômes sur  $k^n$ , ce sont donc les polynômes en  $x_1/x_0, \dots, x_n/x_0$ , autrement dit, on va poser  $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$ . Cet anneau est contenu dans le localisé de  $k[X_0, \dots, X_n]$  par rapport à  $X_0$ , mais, de plus, le fait de ne considérer que les polynômes en les  $X_i/X_0$  revient à se limiter dans le localisé aux éléments  $F/X_0^r$  avec  $F$  homogène de degré  $r$ . Cela nous conduit à la définition suivante :

**Définition 8.1.** Soit  $R$  un anneau gradué et soit  $f \in R$  un élément homogène de degré  $d$ . On définit une graduation sur l'anneau localisé  $R_f$  en posant, pour  $g \in R$ ,  $g$  homogène de degré  $e$ ,  $\deg(g/f^r) = e - rd$ . L'ensemble des éléments de degré 0 de  $R_f$  est alors un sous-anneau que nous noterons  $R_{(f)}$ .

*Remarque 8.2.* Si on prend  $R = \Gamma_h(V)$  et  $f \in R$ , homogène, de degré  $> 0$ , les éléments de  $R_{(f)}$  ont un immense avantage : ils définissent des fonctions sur l'ouvert  $D^+(f)$ . En effet le changement de coordonnées homogènes multiplie numérateur et dénominateur par le même scalaire.

**Définition 8.3.** Soit  $V$  un ensemble algébrique projectif. On définit un faisceau de fonctions sur  $V$ , à valeurs dans  $k$ , en posant, pour  $f \in \Gamma_h(V)$ , homogène de degré  $> 0$  :

$$\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma_h(V)_{(f)}.$$

Le lecteur vérifiera, comme en 2.4, mais en utilisant en plus la remarque II.6.1.b, que les conditions de 2.1 sont réalisées, de sorte qu'on a bien un faisceau sur  $V$ . Attention il est essentiel pour cela de s'être limité aux éléments  $f$  de degré  $> 0$ . Sinon, si on pouvait appliquer 8.3 avec  $f = 1$ , on aurait  $D^+(f) = V$  et les sections globales de  $\mathcal{O}_V$  seraient les éléments de degré 0 de  $\Gamma_h(V)$ , i.e. les constantes. Mais, si  $V$  n'est pas connexe, il y a d'autres sections : les fonctions constantes sur chaque composante de  $V$ .

**Proposition-définition 8.4.** Soit  $V$  un ensemble algébrique projectif; l'espace annelé  $(V, \mathcal{O}_V)$  (avec le faisceau défini ci-dessus) est une variété algébrique. On appelle variété algébrique projective (resp. quasi-projective) une variété algébrique isomorphe à un ensemble algébrique projectif muni du faisceau ci-dessus (resp. à un ouvert d'une variété algébrique projective).

*Démonstration.* On commence par se ramener au cas  $V = \mathbf{P}^n$ . Supposons  $V \subset \mathbf{P}^n$ . Soit  $f \in \Gamma_h(V)$ , image d'un polynôme homogène  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ . On a alors  $D^+(f) = V \cap D^+(F)$ . De plus, l'homomorphisme de restriction :

$$r : \Gamma(D^+(F), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) \rightarrow \Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V)$$

est clairement surjectif. Mais alors (cf. 2.2)  $\mathcal{O}_V$  est l'image du faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$  dans le faisceau des fonctions sur  $V$ , et si  $\mathbf{P}^n$  est une variété, il en est de même de  $V$  qui est la sous-variété fermée portée par  $V$  (cf. Exemple 6.10).

Dans le cas de  $\mathbf{P}^n$ , il suffit de montrer que les ouverts  $D^+(X_i)$  sont des variétés affines et, par homographie, on peut même se limiter à  $D^+(X_0)$  (en effet, il est clair que les homographies sont des automorphismes de  $\mathbf{P}^n$  muni de sa structure d'espace annelé). C'est essentiellement la traduction formelle du lien affine-projectif vu en II, et cela va faire l'objet du paragraphe suivant.

## b. Le lien affine-projectif

On pose  $U_0 = D^+(X_0)$ , ensemble des points de  $\mathbf{P}^n$  dont la coordonnée  $x_0$  est  $\neq 0$ . On a la bijection  $j : k^n \rightarrow U_0$ , définie par

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (1, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

de réciproque donnée par

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0).$$

On munit  $k^n$  de sa topologie de Zariski et  $U_0$  de la topologie induite par la topologie de Zariski sur  $\mathbf{P}^n$ . La proposition suivante achève la démonstration de 8.4 :

### Proposition 8.5

1)  $j$  est un homéomorphisme.

2)  $j$  est un isomorphisme d'espaces annelés de la variété affine  $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$  sur  $(U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}|_{U_0})$ .

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin d'étudier soigneusement les opérations d'homogénéisation et de déshomogénéisation. Notons déjà que si  $P$  est un polynôme homogène de degré  $d$  en  $T_1, \dots, T_m$  on a, dans le corps des fractions, la formule :

$$(0) \quad P\left(\frac{T_1}{T_i}, \dots, \frac{T_m}{T_i}\right) = \frac{P(T_1, \dots, T_m)}{T_i^d}.$$

Nous utiliserons la convention d'écriture suivante : on note par des lettres majuscules les polynômes de  $k[X_0, \dots, X_n]$  et par des minuscules ceux de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

i. *L'opération  $\flat$  (bémol).* Il s'agit de l'homomorphisme d'anneaux surjectif :  $k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$  donné par

$$P(X_0, \dots, X_n) \mapsto P_{\flat}(X_1, \dots, X_n) = P(1, X_1, \dots, X_n).$$

Son noyau est l'idéal  $(X_0 - 1)$ . On s'intéresse surtout au cas où  $P$  est homogène de degré  $d$ . Dans ce cas on a (dans le corps des fractions  $k(X_0, \dots, X_n)$ ) :

$$(1) \quad P_{\flat}\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) = P\left(\frac{X_0}{X_0}, \frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) = \frac{P(X_0, \dots, X_n)}{X_0^d}.$$

On notera que, si  $P$  est homogène de degré  $d$ ,  $P_{\flat}$  est de degré  $d$  si et seulement si  $X_0$  ne divise pas  $P$ .

ii. *L'opération  $\sharp$  (dièse).* **Attention**, cette opération n'est pas un homomorphisme. A l'inverse de la précédente, elle va de  $k[X_1, \dots, X_n]$  dans  $k[X_0, \dots, X_n]$ , si  $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $p^{\sharp}$  est le polynôme homogène de plus petit degré de  $k[X_0, \dots, X_n]$  tel que  $p = (p^{\sharp})_{\flat}$ . On peut le décrire ainsi : si  $p = p_0 + p_1 + \dots + p_d$  avec  $p_i$  homogène de degré  $i$  et  $p_d \neq 0$  on pose  $p^{\sharp}(X_0, \dots, X_n) = X_0^d p_0 + X_0^{d-1} p_1 + \dots + p_d$ , ou encore :

$$(2) \quad p^{\sharp}(X_0, \dots, X_n) = X_0^d p\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

iii. *Quelques remarques.* Si  $p, q \in k[X_1, \dots, X_n]$  on a  $(pq)^{\sharp} = p^{\sharp}q^{\sharp}$  (cela résulte de la formule (2)).

Si  $p \in k[X_1, \dots, X_n]$  on a  $(p^{\sharp})_{\flat} = p$ .

Si  $P \in k[X_0, \dots, X_n]$  est homogène on a  $P = (X_0)^r (P_{\flat})^{\sharp}$  où  $X_0^r$  est la plus grande puissance de  $X_0$  divisant  $P$ . (On se ramène au cas où  $X_0$  ne divise pas  $P$  et on utilise (1) et (2) en notant que le degré ne chute pas en passant de  $P$  à  $P_{\flat}$ .)

Conséquence : si  $P$  est homogène et si  $P_{\flat} = 0$  on a  $P = 0$ .

iv.  *$j$  est un homéomorphisme.* Comme les  $D^+(F)$  et les  $D(f)$  sont des bases d'ouverts de  $\mathbf{P}^n$  et  $k^n$ , cela résulte des deux formules suivantes dont la vérification est immédiate :

a) si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  est homogène on a :

$$j^{-1}(D^+(F)) = j^{-1}(D^+(F) \cap U_0) = D(F_b),$$

b) si  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ , on a  $j(D(f)) = D^+(f^\sharp) \cap U_0$ .

v. *L'isomorphisme de faisceaux.* Soit  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ , homogène de degré  $d$ . Il suffit de montrer l'isomorphisme :

$$\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) \simeq \Gamma(D(F_b), \mathcal{O}_{k^n}).$$

On note déjà qu'on a  $D^+(F) \cap U_0 = D^+(FX_0)$ .

On a  $\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = k[X_0, \dots, X_n]_{(FX_0)}$  et les éléments de cet anneau sont les  $P/(FX_0)^r$  avec  $P$  homogène de degré  $r(d+1)$ . Ce sont aussi exactement les éléments du type  $P/F^r X_0^s$  avec  $P$  de degré  $rd+s$  (il suffit de multiplier le numérateur par une puissance de  $F$  ou de  $X_0$  pour se ramener à la première forme). D'autre part, on a  $\Gamma(D(F_b), \mathcal{O}_{k^n}) = k[X_1, \dots, X_n]_{F_b}$ .

Pour définir la flèche  $\varphi$  cherchée on part de l'homomorphisme bémol :  $k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ . Comme  $(FX_0)_b = F_b$ , cet homomorphisme induit un homomorphisme  $\psi$  sur les localisés :

$$\psi : k[X_0, \dots, X_n]_{FX_0} \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{F_b}$$

et on obtient  $\varphi$  en composant  $\psi$  avec l'injection naturelle :

$$i : k[X_0, \dots, X_n]_{(FX_0)} \rightarrow k[X_0, \dots, X_n]_{FX_0}.$$

Il reste à voir que  $\varphi$  est bien un isomorphisme. Notons la formule :  $\varphi(P/F^r X_0^s) = P_b/F_b^r$ .

1)  $\varphi$  est injectif :

si  $P_b/F_b^r = 0$ , on a  $P_b = 0$ , donc  $P = 0$  (cf. iii).

2)  $\varphi$  est surjectif :

soit  $p/F_b^r \in k[X_1, \dots, X_n]_{F_b}$  on a  $p/F_b^r = \varphi(X_0^s p^\sharp/F^r)$  avec  $s \in \mathbf{Z}$  donné par  $s = rd - \deg p$ .

Ceci achève de prouver 8.5 (et donc aussi 8.4).

### Remarques 8.6

1) L'espace projectif  $\mathbf{P}^n$  est irréductible. Cela résulte de 8.5 et de l'exercice I, 4.b.

2) Nous montrerons en 11.8 que tous les ouverts  $D^+(F)$  de  $\mathbf{P}^n$  sont des ouverts affines. Il en résulte que les ouverts  $D^+(f)$  de  $V \subset \mathbf{P}^n$  le sont aussi.

Nous décrivons dans la proposition suivante l'anneau local de  $\mathbf{P}^n$  en un point. Pour une démonstration, cf. Exercice III, B.4.

**Proposition 8.7.** *Soit  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$  et soit  $I_x = I_{\mathbf{P}}(\{x\})$  l'idéal premier homogène des polynômes nuls au point  $x$ . Alors, l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n, x}$  est l'anneau  $k[X_0, \dots, X_n]_{(I_x)}$ , sous-anneau du localisé  $k[X_0, \dots, X_n]_{I_x}$  formé des éléments homogènes de degré 0. Si  $x_0 = 1$  et si on pose  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ , l'homomorphisme  $b$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n, x}$  sur  $\mathcal{O}_{k^n, \xi}$ .*

La proposition suivante est la confirmation du fait qu'il n'y a pas de fonctions globales non triviales sur une variété algébrique projective. Elle sera démontrée au chapitre VIII (cf. aussi Problème II, 3).

**Proposition 8.8.** *Soit  $X$  une variété algébrique projective irréductible. On a  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$  (les seules sections globales de  $\mathcal{O}_X$  sont les constantes).*

## 9. Faisceaux de modules sur les variétés algébriques projectives

Soit  $X$  une variété algébrique projective munie d'un plongement dans  $\mathbf{P}^n$ . Nous allons définir des faisceaux de modules sur  $X$  de manière analogue à ce qui a été fait au §7 dans le cas affine, mais à partir de modules gradués (cf. II, 7.5). On pose  $R = \Gamma_h(X)$ . Il est important de noter ici que cet anneau, et notamment sa graduation, dépend du plongement choisi (cf. 11.6.a ci-après).

**Définition 9.1.** *Soit  $M$  un  $R$ -module gradué. On définit un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\widetilde{M}$  sur les ouverts standard de  $X$  comme suit : si  $f \in R$  est homogène de degré  $> 0$  on pose  $\widetilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)}$ .*

Bien entendu  $M_{(f)}$  désigne le sous-module de  $M_f$  (cf. §7) formé des éléments de degré 0, i.e. des  $x/f^n$  avec  $x$  homogène et  $\deg x = n \deg f$ .

*Remarques 9.2*

1) On a  $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$ .

2) En restriction à l'ouvert affine  $D^+(f)$ , d'anneau  $R_{(f)}$ , on vérifie que le faisceau  $\widetilde{M}$  n'est autre que le faisceau  $\widetilde{M}_{(f)}$  associé au  $R_{(f)}$ -module  $M_{(f)}$  défini au §7 dans le cas affine. En particulier, le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\widetilde{M}$  est

quasi-cohérent (et même cohérent si  $M$  est un  $R$ -module de type fini). Réciproquement, on obtient ainsi tous les  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents (cf. 9.8.2).

On considère la catégorie des  $R$ -modules gradués avec comme morphismes les homomorphismes de degré 0 (c'est-à-dire ceux qui conservent le degré, cf. II, 7.5). On a alors l'analogie de la proposition 7.3 :

**Proposition 9.3.** *La correspondance  $M \mapsto \widetilde{M}$  est fonctorielle, exacte et commute aux sommes directes et aux produits tensoriels.*

*Démonstration.* Elle est essentiellement identique à celle de 7.3, sauf pour le produit tensoriel. Dans ce dernier cas, on vérifie d'abord que l'on définit une structure de  $R$ -module gradué sur  $P = M \otimes_R N$  en posant  $P_n = \sum_{p+q=n} M_p \otimes_k N_q$ . On construit ensuite un morphisme  $\varphi : \widetilde{M} \otimes_{\widetilde{R}} \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M \otimes_R N}$  : il suffit de le faire sur les ouverts  $D^+(f)$  et on pose alors  $\varphi(x/f^r \otimes y/f^s) = (x \otimes y)/f^{r+s}$ . On vérifie que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules. On peut se limiter pour cela aux ouverts  $D^+(f)$  avec  $f$  de degré 1 car ces ouverts recouvrent  $X$  et l'isomorphisme réciproque  $y$  est donné de manière évidente par  $(x \otimes y)/f^r \mapsto x/f^p \otimes y/f^q$  avec  $p = \deg x$  et  $q = \deg y$ . (Si  $f$  n'est pas de degré 1 on a encore un isomorphisme, moins trivial, mais qui n'échappera pas à la perspicacité du lecteur.)

En fait, du point de vue de l'exactitude, on a le résultat plus précis suivant :

**Proposition 9.4.** *Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un homomorphisme homogène de degré 0 entre  $R$ -modules gradués. On suppose que pour  $n$  grand  $\varphi_n : M_n \rightarrow N_n$  est surjectif. Alors  $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  est un morphisme surjectif de faisceaux.*

*Démonstration.* On se place sur un ouvert  $D^+(f)$  avec  $f$  homogène de degré  $> 0$ . Il suffit de voir que  $\varphi_{(f)} : M_{(f)} \rightarrow N_{(f)}$  est surjectif. Soit  $y/f^r \in N_{(f)}$ . Pour  $s$  assez grand  $f^s y$  est dans l'image de  $\varphi$ , donc aussi  $y/f^r = f^s y / f^{r+s}$ , cqfd.

**Exemple 9.5 :** *La suite exacte associée à un fermé*

Soit  $X$  une variété algébrique projective,  $R = \Gamma_h(X)$  et soit  $Y$  un fermé de  $X$  défini par l'idéal homogène  $I = I_X(Y)$  de  $R$ . Alors on a la suite exacte de  $R$ -modules gradués  $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$  qui donne

en passant aux faisceaux  $0 \rightarrow \tilde{I} \rightarrow \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/I \rightarrow 0$ . Ici encore, cette suite n'est rien d'autre que la suite exacte fondamentale  $0 \rightarrow \mathcal{J}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ , comme on le vérifie sur les ouverts  $D^+(f)$ .

Nous allons maintenant définir les faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$  et  $\mathcal{O}_X(d)$  pour une variété projective  $X$ . Leur avantage, par rapport au faisceau structural, est de posséder des sections globales (au moins pour  $d > 0$ ) : les polynômes homogènes de degré  $d$ . On définit d'abord la notion de module décalé :

**Définition 9.6.** Soit  $R$  un anneau gradué et soit  $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$  un  $R$ -module gradué. Le module  $M(d)$  est le module gradué égal à  $M$  mais avec la graduation décalée :  $M(d)_n = M_{d+n}$ .

On notera que l'opération de décalage n'affecte pas l'exactitude des suites exactes de modules.

**Définition 9.7.** Soit  $X$  une variété algébrique projective plongée dans  $\mathbf{P}^n$  et soit  $R = \Gamma_h(X)$ . Le faisceau  $\mathcal{O}_X(d)$  est le faisceau associé au module décalé  $R(d) : \mathcal{O}_X(d) = \tilde{R}(d)$ . Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, on note  $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$  (cf. 6.11).

Les sections de  $\mathcal{O}_X(d)$  sur l'ouvert  $D^+(f)$  sont donc les éléments de degré  $d$  de  $R_f : a/f^r$  avec  $\deg a - r \deg f = d$ .

### Remarques 9.8

0) Attention, les faisceaux  $\mathcal{O}_X(d)$  dépendent de manière essentielle de la graduation de  $R$ , donc du plongement de  $X$  dans  $\mathbf{P}^n$  choisi.

1) Si  $M$  est un  $R$ -module gradué, on a  $\tilde{M}(d) = \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) = \tilde{M}(d)$  (cela résulte de la commutation au produit tensoriel).

2) On cherche maintenant un foncteur en sens inverse. Comme les faisceaux sur les variétés projectives ont, en général, trop peu de sections globales, ce sont les sections des faisceaux  $\mathcal{F}(d)$  (pour tous les  $d \in \mathbf{Z}$ ) qui vont jouer en projectif le rôle que jouaient en affine les sections globales de  $\mathcal{F}$ , mais la situation sera moins idyllique. Précisément, si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, on définit le  $R$ -module gradué  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  par la formule :

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(d)).$$

(La structure de module provient de la flèche naturelle :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(p)) \otimes_k \Gamma(X, \mathcal{F}(q)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(p+q)).$$

Si  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent on vérifie qu'on a alors  $\mathcal{F} \simeq \Gamma_* \widetilde{\mathcal{F}}$ , autrement dit  $\Gamma_*$  est un inverse à droite de  $\widetilde{\phantom{x}}$  (cf. [H] II, 5.15). En particulier, un module est quasi-cohérent (resp. cohérent) si et seulement si il est de la forme  $\widetilde{M}$  (resp.  $\widetilde{M}$  avec  $M$  de type fini).

3) Attention, en revanche ce n'est pas un inverse à gauche : si le faisceau  $\mathcal{F}$  est donné, au départ, sous la forme  $\widetilde{M}$ , les modules  $M$  et  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  ne sont pas nécessairement isomorphes. Précisément, on a, pour chaque  $d$ , un homomorphisme naturel  $r_d : M_d \rightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}(d))$  défini en associant à  $x \in M_d$  l'élément  $x/1$  dans  $M_{(f)}(d)$  puis en constatant que ces sections se recollent en une section globale. On en déduit un homomorphisme de degré 0,  $r : M \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{F})$ , mais attention,  $r$  n'est, en général, ni injectif ni surjectif (cf. Ch. VII ou penser déjà au cas où  $X$  est non connexe avec  $M = R$  et  $d = 0$ ). Cependant, nous montrerons au chapitre VII que, si  $M$  est de type fini,  $r_d$  est un isomorphisme pour  $d$  assez grand. (La morale de ce résultat, comme de 9.4, c'est que le faisceau  $\widetilde{M}$  ne dépend, en fait, que des termes de grand degré de  $M$ .)

Cependant, dans le cas de  $\mathbf{P}^n$ , les sections globales de ces faisceaux sont bien celles attendues :

**Proposition 9.9.** *Soit  $R_d$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  en  $X_0, \dots, X_n$ . On a :*

$$\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0; \\ R_d & \text{si } d \geq 0. \end{cases}$$

En particulier, on a  $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}) = k$  (cf. 8.8).

*Démonstration.* Soit  $f \in \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$ ,  $f \neq 0$ . Par définition, sa restriction à l'ouvert  $D^+(X_i)$  est une fraction rationnelle de la forme  $P_i(X_0, \dots, X_n)/X_i^r$ , avec  $P_i$  homogène de degré  $d+r$ . De plus, quitte à simplifier par  $X_i$ , on peut supposer que  $X_i$  ne divise pas  $P$ . De même  $f|_{D^+(X_j)}$  est de la forme  $P_j(X_0, \dots, X_n)/X_j^s$  avec  $P_j$  homogène de degré  $d+s$  et  $X_j$  ne divisant pas  $P_j$ . Comme ces éléments sont des restrictions de  $f$  ils coïncident sur l'intersection  $D^+(X_i X_j)$  donc sont égaux dans le localisé  $k[X_0, \dots, X_n]_{(X_i X_j)}$  ou encore dans le corps des fractions rationnelles  $k(X_0, \dots, X_n)$ . On a donc  $X_j^s P_i = X_i^r P_j$ , mais comme  $X_i$  ne

divise pas  $P_i$ , ceci n'est possible que si  $r = 0$  et de même on a  $s = 0$ , donc  $P_i = P_j$ . La section  $f$  est donc donnée par le polynôme  $P_i$  homogène de degré  $d$  et indépendant de  $i$ .

**Corollaire 9.10.** On a :

$$\dim_k \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}.$$

*Remarque 9.11.* Contrairement au cas des variétés algébriques affines où les espaces de sections ne sont que rarement de dimension finie (cela correspond aux variétés finies, cf. I, 4.8) on voit ici que les espaces de sections des faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$  sont de dimension finie. Ce phénomène est général : nous montrerons au chapitre VII que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur la variété algébrique projective  $X$ , l'espace  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.

## 10. Deux suites exactes importantes

### a. La suite exacte d'une hypersurface

On travaille dans  $\mathbf{P}^n$  et on considère un polynôme homogène de degré  $d > 0$ ,  $F \in R = k[X_0, \dots, X_n]$ , non nul et sans facteur multiple. Soit  $X = V_p(F)$  l'hypersurface projective définie par  $F$ . On sait que l'idéal  $I(X)$  est égal à  $(F)$  d'après le Nullstellensatz. La multiplication par  $F$  induit un isomorphisme de  $R$ -modules gradués :  $R(-d) \rightarrow I(X)$ . (Attention au décalage, il faut que la constante 1 qui a pour image  $F$  ait le même degré, à savoir  $d$ , au départ et à l'arrivée.) En passant aux faisceaux on a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d) \xrightarrow{-F} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

### b. La suite exacte d'une intersection complète

**Proposition 10.1.** Soient  $F, G \in R = k[X_0, \dots, X_n]$  deux polynômes homogènes de degrés  $s$  et  $t$  sans facteur commun et soit  $I = (F, G)$ . On a la suite exacte de  $R$ -modules gradués :

$$0 \rightarrow R(-s-t) \xrightarrow{\varphi} R(-s) \oplus R(-t) \xrightarrow{\psi} I \rightarrow 0$$

avec  $\varphi(C) = (-CG, CF)$  et  $\psi(A, B) = AF + BG$ .

*Démonstration.* On notera déjà que les flèches sont bien homogènes de degré 0. Il est clair que  $\psi$  est à valeurs dans  $I$  et surjective. Cherchons son noyau : on a  $AF + BG = 0$  donc  $AF = -BG$ , mais, comme  $F$  et  $G$  sont premiers entre eux,  $F$  divise  $B$ , donc  $B = CF$  et on en déduit  $A = -CG$ . Enfin, comme  $R$  est intègre, il est clair que  $\varphi$  est injective.

**Corollaire 10.2.** *Avec les notations précédentes, soit  $V = V_p(F, G)$ . On suppose que  $I_p(V) = I = (F, G)$  (c'est-à-dire que cet idéal est radical). Alors on a la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-t) \rightarrow \mathcal{J}_V \rightarrow 0.$$

Lorsque  $F$  et  $G$  sont sans facteurs communs, on dit que la variété  $V = V_p(F, G)$  est *intersection complète* des hypersurfaces  $V(F)$  et  $V(G)$  et on exprime la condition  $I(V) = (F, G)$  en disant que  $V$  est *schématiquement intersection complète* des hypersurfaces en question. Attention, une intersection complète ensembliste ne l'est pas toujours schématiquement (cf. par exemple la cubique gauche de l'exercice II, 4).

Pour d'autres exemples de calculs de "résolutions", voir exercices II.

## 11. Exemples de morphismes

### a. Quelques remarques sur les morphismes

Soient  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  des variétés algébriques et soit  $\varphi : X \rightarrow Y$ , une application. On cherche à quelles conditions  $\varphi$  est un morphisme.

**Proposition 11.1.** *Le fait d'être un morphisme est de nature locale : si on a un recouvrement de  $Y$  par des ouverts  $V_i$  et, pour chaque  $i$ , un recouvrement de  $\varphi^{-1}(V_i)$  par des ouverts  $U_{ij}$ ,  $\varphi$  est un morphisme si et seulement si pour tous  $i, j$ ,  $\varphi|_{U_{ij}} : U_{ij} \rightarrow V_i$  est un morphisme.*

*Démonstration.* Seule la condition suffisante est non triviale. On note d'abord que  $\varphi$  est continue. Ensuite si  $V$  est un ouvert de  $Y$  et  $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ , les restrictions  $f_i$  de  $f$  aux  $V_i$  sont des sections, donc les  $f_i \varphi$  restreintes aux  $U_{ij}$  sont des sections et  $f \varphi$ , qui s'obtient par recollement est aussi une section.

**Proposition 11.2.** *Si  $Y$  est affine il suffit de regarder les sections globales :  $\varphi$  est un morphisme si et seulement si pour tout  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ , on a  $f \varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ .*

*Démonstration*

1) Supposons  $X$  affine. Alors  $\varphi$  est régulière et on conclut par 3.5.

2) Dans le cas général on recouvre  $X$  par des ouverts affines et la conclusion vient de 11.1 et du cas  $X$  affine.

*Remarques 11.3*

1) On vérifie que la projection naturelle de  $k^{n+1} - \{0\}$  dans  $\mathbf{P}^n$  est un morphisme.

2) Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme et si  $V$  et  $W$  sont des sous-variétés de  $X$  et  $Y$  respectivement, telles que  $\varphi(V) \subset W$ , la restriction  $\varphi|_V : V \rightarrow W$  est encore un morphisme.

**b. Application aux morphismes de  $\mathbf{P}^n$  dans  $\mathbf{P}^m$** 

Considérons  $m+1$  polynômes  $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ , homogènes de même degré  $d$ . Alors on définit une application :

$$\varphi : \Omega = \mathbf{P}^n - V_p(F_0, \dots, F_m) \rightarrow \mathbf{P}^m$$

en posant  $\varphi(x) = \varphi(x_0, \dots, x_n) = (F_0(x), \dots, F_m(x))$ .

On prendra garde de ne pas oublier 1) que les coordonnées d'un point du projectif ne sont pas toutes nulles, ce qui justifie que  $\varphi$  ne soit pas défini sur tout  $\mathbf{P}^n$ , 2) que ce sont des coordonnées homogènes, ce qui impose que les  $F_i$  soient de même degré.

**Proposition 11.4.** *Avec les notations précédentes,  $\varphi$  est un morphisme de variétés.*

*Démonstration.* On applique 11.1 et 11.2 avec le recouvrement affine  $D^+(X_i)$  de  $\mathbf{P}^m$ . L'image réciproque est l'ouvert  $D^+(F_i)$  et ces ouverts recouvrent  $\Omega$ . Si  $g$  est dans  $\Gamma(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m})$ , on a  $g = G(X_0, \dots, X_m)/X_i^r$  et

$$g\varphi = G(F_0(X_0, \dots, X_n), \dots, F_m(X_0, \dots, X_n))/F_i(X_0, \dots, X_n)^r$$

est bien un élément de  $\Gamma(D^+(F_i), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n})$ .

*Remarque 11.5.* Si  $V$  est l'adhérence de l'image de  $\varphi$  la remarque 11.3 montre que  $\varphi$  définit aussi un morphisme de  $\mathbf{P}^n - V_p(F_0, \dots, F_m)$  dans  $V$ .

## Exemples 11.6

a) *Paramétrer la conique.* On considère le morphisme  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$  donné par

$$\varphi(u, v) = (u^2, uv, v^2).$$

Ce morphisme est défini sur tout  $\mathbf{P}^1$  car les polynômes  $u^2, uv, v^2$  n'ont pas de zéro commun dans  $\mathbf{P}^1$ . Il est clair que son image est contenue dans la conique  $C = V_{\mathbf{P}}(XT - Y^2)$  et on voit facilement que  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$  est bijective, mais nous allons montrer, plus précisément, que c'est un isomorphisme.

Pour cela on note que  $C$  est recouverte par les ouverts affines  $D^+(X)$  et  $D^+(T)$  de  $\mathbf{P}^2$ . On sait que ces ouverts sont isomorphes à  $k^2$ , par exemple, pour  $D^+(X)$ , la flèche est donnée par  $(1, y, t) \mapsto (y, t)$ . Cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme  $j$  de  $C \cap D^+(X)$  sur  $C_b$ , conique affine définie par  $y^2 - t = 0$ . Par ailleurs, on a aussi l'isomorphisme  $i$  de  $k$  sur  $D^+(u) \subset \mathbf{P}^1$  donné par  $v \mapsto (1, v)$ . Mettant bout à bout ces flèches on obtient :

$$k \xrightarrow{i} D^+(u) \xrightarrow{\varphi} D^+(X) \cap C \xrightarrow{j} C_b$$

avec  $v \mapsto (1, v) \mapsto (1, v, v^2) \mapsto (v, v^2)$  et il est clair que le composé des trois est un isomorphisme, donc  $\varphi$  est un isomorphisme de  $D^+(u)$  sur  $D^+(X) \cap C$ . Le même raisonnement avec  $v$  et  $T$  donne le résultat.

Attention, dans cet exemple, bien que  $\mathbf{P}^1$  et  $C$  soient isomorphes, les anneaux gradués associés ne sont pas les mêmes. En effet le morphisme  $\varphi$  induit un homomorphisme

$$\varphi^* : \Gamma_h(C) = k[X, Y, T]/(XT - Y^2) \rightarrow \Gamma_h(\mathbf{P}^1) = k[U, V],$$

donné par les trois polynômes  $U^2, UV, V^2$ . Mais cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme (son image est le sous-anneau  $k[U^2, UV, V^2]$ ) et il ne conserve pas la graduation. En fait les deux anneaux ne sont pas isomorphes (le localisé de  $\Gamma_h(C)$  en l'idéal  $(X, Y, T)$  n'est pas régulier car il correspond au sommet du cône affine  $V(XT - Y^2)$ , cf. Ch. V).

b) *La cubique gauche.* On considère cette fois  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$  avec  $\varphi(u, v) = (u^3, u^2v, uv^2, v^3)$  (cf. Exercices II). Le même type d'arguments montre que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}^1$  sur la courbe

$$C = V(XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT).$$

c) *Le morphisme de Veronese.* Il généralise les exemples précédents. Soit  $d$  un entier  $> 0$  et notons  $M_0, M_1, \dots, M_N$  les monômes de degré  $d$  en  $X_0, \dots, X_n$ . On a donc  $N = \binom{n+d}{n} - 1$ . Le morphisme de Veronese (associé à cet ordre des monômes) est le morphisme  $\varphi_d : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^N$  donné par

$$\varphi_d(x_0, \dots, x_n) = (M_0(x), \dots, M_N(x)).$$

Considérons par ailleurs l'homomorphisme

$$\theta : k[Y_0, \dots, Y_N] \rightarrow k[X_0, \dots, X_n]$$

qui envoie  $Y_i$  sur  $M_i$  et soit  $I$  son noyau. On a alors :

**Proposition 11.7.** *Le morphisme de Veronese  $\varphi_d$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}^n$  sur la variété algébrique projective  $V = V_{\mathbf{P}}(I)$  (dite variété de Veronese).*

La démonstration n'est pas difficile (à condition d'avoir des notations convenables, cf. Exercice III, B.3).

L'intérêt du morphisme de Veronese est de transformer une hypersurface de  $\mathbf{P}^n$  en un hyperplan de  $\mathbf{P}^N$ , ce qui permet parfois de se ramener à ce cas, ainsi :

**Proposition 11.8.** *Soit  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogène de degré  $d > 0$ . Alors l'ouvert  $D^+(F)$  est un ouvert affine de  $\mathbf{P}^n$ . (Et il en résulte que dans une variété algébrique projective  $V$  tous les  $D^+(f)$  sont des ouverts affines.)*

*Démonstration.* On écrit  $F = \sum_i a_i M_i$  (où les  $M_i$  sont toujours les monômes de degré  $d$ ). Par le morphisme de Veronese, les  $M_i$  correspondent aux coordonnées  $Y_i$  et on a  $\varphi_d(D^+(F)) = D^+(H) \cap V$  où  $H = \sum_i a_i Y_i$  est maintenant de degré 1. Mais, quitte à faire une homographie,  $D^+(H)$  est isomorphe à  $D^+(Y_i)$  qui est un ouvert affine. Alors, comme  $D^+(F)$  est isomorphe à un fermé de  $D^+(H)$ , c'est bien aussi une variété affine.

## Exercices A

### 1. Faisceaux et faisceaux de fonctions

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . Soit  $P \in X$  et soit  $E_P$  l'ensemble des couples  $(U, s)$  où  $U$  est un ouvert contenant  $P$  et où  $s \in \mathcal{F}(U)$ . On vérifiera qu'on définit une relation d'équivalence sur

$E_P$  ainsi :  $(U, s) \sim (V, t)$  si et seulement si il existe  $W$  ouvert, contenant  $P$ ,  $W \subset U \cap V$  tel que  $s|_W = t|_W$ .

La classe d'équivalence de  $(U, s)$  s'appelle le *germe* de  $s$  en  $P$ . On la note  $s_P$ . On note  $\mathcal{F}_P$  l'ensemble des germes, c'est la *fibres* de  $\mathcal{F}$  en  $P$ . On dit que  $\mathcal{F}_P$  est la limite inductive des  $\mathcal{F}(U)$  pour  $P \in U$ .

On pose  $K = \coprod_{P \in X} \mathcal{F}_P$  (réunion disjointe des  $\mathcal{F}_P$ ). Montrer qu'on définit une injection  $i_U$  de  $\mathcal{F}(U)$  dans l'ensemble des fonctions de  $U$  dans  $K$  en posant  $i_U(s)(P) = s_P$ . Montrer que les  $i_U$  sont compatibles aux restrictions, de sorte que  $\mathcal{F}$  est un sous-faisceau du faisceau des fonctions de  $X$  dans  $K$ .

## 2. Sections sur un ouvert

Soit  $V$  une variété algébrique affine. On suppose que  $\Gamma(V)$  est un anneau factoriel (c'est le cas, par exemple, si  $V = k^n$ ).

a) Soient  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(V)$  des éléments non nuls et soit  $h$  leur *pgcd*. Montrer que l'on a  $D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n) \subset D(h)$  et que l'homomorphisme naturel de restriction :

$$r : \Gamma(D(h), \mathcal{O}_V) \rightarrow \Gamma(D(f_1) \cup \dots \cup D(f_n), \mathcal{O}_V)$$

est un isomorphisme (on raisonnera par récurrence sur  $n$ ).

b) En déduire que si  $U$  est un ouvert de  $V$  et si  $U$  n'est pas contenu dans un ouvert  $D(f)$  distinct de  $V$ , on a  $\Gamma(U, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ . Exemple :  $V = k^2$ ,  $U = k^2 - \{(0, 0)\}$ ; plus généralement on a  $\Gamma(U) = \Gamma(V)$  dès que  $V - U$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $V$ .

## 3. Sections et quotients

Soit  $Q \subset k^4$ ,  $Q = V(XY - ZT)$  muni de sa structure de variété algébrique. Soient  $U_Y$  et  $U_Z$  les ouverts de  $Q$  définis par  $y \neq 0$  et  $z \neq 0$  et posons  $U = U_Y \cup U_Z$ .

a) Montrer que la fonction  $f$  de  $U$  dans  $k$  définie par  $f(x, y, z, t) = x/z$  (resp.  $= t/y$ ) si  $P = (x, y, z, t) \in U_Z$  (resp. si  $P \in U_Y$ ) est un élément de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_Q)$ .

b) ¶ Montrer que  $f$  n'est pas la restriction à  $U$  d'un quotient  $G/H$  avec  $G, H$  dans  $k[X, Y, Z, T]$  et  $H(P) \neq 0$  pour tout  $P \in U$ .

(On notera que cela signifie que  $V(Y, Z)$ , bien que de codimension 1 dans  $Q$ , ne peut être défini par une seule équation (cf. Ch. IV).)

#### 4. Être ou ne pas être affine

Montrer que  $k^2 - \{(0, 0)\}$  muni de sa structure de sous-variété ouverte de  $k^2$  n'est pas une variété affine. (Considérer le morphisme d'inclusion dans  $k^2$  et utiliser l'exercice 2 et la pleine fidélité du foncteur  $V \mapsto \Gamma(V)$  sur les affines.)

#### 5. Être ou ne pas être isomorphe

Montrer que  $k$  n'est pas isomorphe à  $k - \{x_1, \dots, x_n\}$  pour  $n \geq 1$ . (Regarder les éléments inversibles de leurs anneaux.)

#### 6. Un critère local

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés. Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si on a les deux conditions :

- i)  $\varphi$  est un homéomorphisme,
- ii) pour tout  $x \in X$ ,  $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  est un isomorphisme.

#### 7. Semi-continuité du rang

Soit  $X$  une variété affine d'anneau  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $\mathcal{F} = \bar{M}$  le faisceau correspondant sur  $X$ . Soit  $x \in X$  qui correspond à l'idéal maximal  $m_x$  de  $A$  et soit  $k(x)$  le corps résiduel (qui est isomorphe au corps de base  $k$ ). On pose  $\mathcal{F}(x) = M \otimes_A k(x)$ . (Attention à ne pas confondre avec la fibre  $\mathcal{F}_x$  du faisceau (cf. Exercice 1) qui est, elle, le produit tensoriel avec l'anneau local :  $M \otimes_A A_{m_x}$ ; le lien entre les deux est la formule  $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x / m_x \mathcal{F}_x$ .)

a) Montrer que  $\mathcal{F}(x)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.

b) On pose  $U_n = \{x \in X \mid r(x) = \text{rang}(\mathcal{F}(x)) \leq n\}$ . Montrer que  $U_n$  est ouvert dans  $X$ , c'est-à-dire que la fonction  $r$  est semi-continue supérieurement. (On utilisera Nakayama, cf. Mémento II.)

c) Généraliser le résultat précédent à une variété non nécessairement affine  $X$  et à un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$ .

d) On suppose  $X$  connexe et  $\mathcal{F}$  localement libre (i.e. pour tout  $x \in X$  il existe un ouvert affine  $U$  de  $X$ , contenant  $x$  sur lequel  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_U^n$ ). Montrer que la fonction  $r$  est constante sur  $X$ .

e) ¶ Réciproquement on suppose  $r$  constante. Montrer que  $\mathcal{F}$  est localement libre. (On pourra relever une base  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  de  $\mathcal{F}(x)$  sur  $k$  en  $x_1, \dots, x_r$  dans  $\mathcal{F}_x$  ou même dans  $\mathcal{F}(U)$  pour  $U$  ouvert affine contenant  $x$  et montrer que ces éléments forment une base de  $\mathcal{F}(U)$  sur  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ .)

## 8. Images directes et réciproques de faisceaux

Les notions introduites dans cet exercice et le suivant sont d'une importance capitale en géométrie algébrique. Cependant, elles ne seront pas utilisées dans la suite du cours. On pourra se reporter à [H] pour les détails.

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . Nous avons défini en 6.9 le faisceau image directe  $\varphi_*\mathcal{F}$  par la formule :  $\varphi_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}V)$ , pour  $V$  ouvert de  $Y$ . Le but de l'exercice est de définir une opération en sens inverse  $\varphi^{-1}$  et d'étudier ses propriétés.

1) Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau sur  $Y$  et  $U$  un ouvert de  $X$ . Montrer qu'on définit une relation d'équivalence sur les couples  $(V, s)$  où  $V$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $\varphi(U)$  et  $s \in \mathcal{G}(V)$  en posant  $(V, s) \sim (V', s')$  si et seulement si  $s$  et  $s'$  coïncident sur un ouvert  $V''$  contenant  $\varphi(U)$  et contenu dans  $V \cap V'$  (c'est une définition analogue à celle des germes de fonctions de 5.1). L'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation est noté  $\varphi_0^{-1}\mathcal{G}(U)$  (savamment c'est ce qu'on appelle la limite inductive des  $\mathcal{G}(V)$  pour  $V \supset \varphi(U)$ ). Ceci définit un préfaisceau sur  $X$  et on appelle *image réciproque* de  $\mathcal{G}$  et on note  $\varphi^{-1}\mathcal{G}$  le faisceau associé :  $\varphi^{-1}\mathcal{G} = \varphi_0^{-1}\mathcal{G}^+$ . Montrer que l'opération  $\varphi^{-1}$  est fonctorielle.

2) Montrer que les fibres  $\varphi^{-1}\mathcal{G}_P$  et  $\mathcal{G}_{\varphi(P)}$  sont en bijection (cf. Exercice 1).

3) Montrer que si  $\varphi$  est ouverte on a, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\varphi^{-1}\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(\varphi^{-1}U)$ . Montrer que si  $X$  est un ouvert de  $Y$  et  $\varphi$  l'inclusion, on a  $\varphi^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}|_X$  (en particulier on a  $\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ ).

4) Montrer que la formule précédente n'est pas vraie en général, même si  $X$  est un fermé de  $Y$ . (Prendre pour  $X$  un point et utiliser 2).)

5) Soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) un faisceau sur  $X$  (resp. sur  $Y$ ). Montrer qu'il existe des morphismes naturels  $\lambda : \varphi^{-1}\varphi_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \varphi_*\varphi^{-1}\mathcal{G}$ . En déduire la formule (dite d'adjonction) :

$$\mathrm{Hom}_X(\varphi^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, \varphi_*\mathcal{F}).$$

## 9. Images directes et réciproques de $\mathcal{O}_Y$ -modules

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés.

1) Montrer qu'on a un morphisme de faisceaux  $j : \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ . (Utiliser 8.5 ci-dessus.)

2) Soit  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module. Montrer qu'on définit un  $\mathcal{O}_X$ -module, appelé image réciproque de  $\mathcal{G}$  et noté  $\varphi^*\mathcal{G}$ , par la formule :

$$\varphi^*\mathcal{G} = \varphi^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Montrer que cette opération est fonctorielle. Montrer qu'on a  $\varphi^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ .

3) Soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) un  $\mathcal{O}_X$ -module (resp. un  $\mathcal{O}_Y$ -module). Montrer qu'il existe des morphismes naturels  $\lambda : \varphi^* \varphi_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \varphi_* \varphi^* \mathcal{G}$ . En déduire la formule (dite d'adjonction) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varphi^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \varphi_* \mathcal{F}).$$

4) On suppose que  $X$  est une sous-variété (ouverte ou fermée) de  $Y$  et que  $\varphi$  est l'injection canonique.

a) Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Montrer qu'on a  $\varphi^* \varphi_* \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$ .

b) Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux  $\mathcal{O}_X$ -modules. Montrer qu'on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\varphi_* \mathcal{F}, \varphi_* \mathcal{F}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}').$$

c) Montrer que  $\varphi_*$  et  $\varphi^*$  réalisent une équivalence de catégories entre les  $\mathcal{O}_X$ -modules et les  $\mathcal{O}_Y$ -modules de la forme  $\varphi_* \mathcal{F}$ . Cette équivalence de catégories est la justification théorique de l'identification entre  $\mathcal{F}$  et  $\varphi_* \mathcal{F}$  de III, 6.10.

5) On suppose  $X$  et  $Y$  affines d'anneaux respectifs  $B$  et  $A$ . On a donc un homomorphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  associé à  $\varphi$ . Soit  $M$  (resp.  $N$ ) un  $A$ -module (resp. un  $B$ -module). Montrer les formules :  $\varphi^* \widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}$  et  $\varphi_* \widetilde{N} = \widetilde{N_{[A]}}$  où  $N_{[A]}$  désigne le  $A$ -module obtenu à partir de  $N$  par réduction des scalaires à  $A$ .

## Exercices B

### 1. Homogénéisation, déshomogénéisation

Dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(k)$  repéré par les coordonnées homogènes  $x_0, \dots, x_n$  on identifie l'espace affine  $\mathbf{A}^n(k)$  à l'ouvert  $U_0$  défini par  $x_0 \neq 0$ . L'hyperplan "à l'infini"  $x_0 = 0$  est noté  $H_0$ . On va étudier les rapports entre les sous-ensembles algébriques de  $\mathbf{A}^n(k)$  et  $\mathbf{P}^n(k)$ .

On rappelle qu'on a posé :

Pour  $P \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ ,  $P_b(X_1, \dots, X_n) = P(1, X_1, \dots, X_n)$ ,

Pour  $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $p^\#(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^{\deg p} p(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0})$ .

Les notations ci-dessous seront utilisées dans la suite :

Si  $I$  est un idéal de  $k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $I^\#$  est l'idéal de  $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  engendré par les  $p^\#$ , pour  $p \in I$ .

Si  $J$  est un idéal de  $k[X_0, \dots, X_n]$ ,  $J_b$  est l'idéal de  $k[X_1, \dots, X_n]$  engendré par les  $P_b$ , pour  $P \in J$ .

Si  $V$  (resp.  $W$ ) est un ensemble algébrique de  $\mathbf{A}^n(k)$  (resp.  $\mathbf{P}^n(k)$ ), de la forme  $V = V(I)$  (resp.  $W = V(J)$ ),  $V^\sharp$  (resp.  $W_b$ ) est l'ensemble algébrique de  $\mathbf{P}^n(k)$  (resp.  $\mathbf{A}^n(k)$ ) défini par  $I^\sharp$  (resp.  $J_b$ ).

1) Montrer que les opérations  $b$  et  $\sharp$  sont croissantes sur les ensembles algébriques.

2) a) Montrer que l'on a  $(V^\sharp)_b = V$ .

b) Montrer que  $V^\sharp$  est l'adhérence de  $V$  dans  $\mathbf{P}^n$ .

c) Montrer que si  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  est la décomposition de  $V$  en composantes irréductibles, les  $V_i^\sharp$  sont les composantes irréductibles de  $V^\sharp$ .

3) a) Montrer que l'on a  $W_b = W \cap U_0$ .

b) On suppose qu'aucune composante irréductible  $W_i$  de  $W$  n'est incluse dans  $H_0$ . Montrer que l'on a  $(W_b)^\sharp = W$  et que les composantes de  $W_b$  sont les  $W_{ib}$ .

4) Montrer que  $I$  est radical si et seulement si  $I^\sharp$  l'est. Montrer que si  $J$  est radical  $J_b$  l'est. Étudier la réciproque. Montrer que  $I(V^\sharp) = I(V)^\sharp$  et  $I(W_b) = I(W)_b$ .

5) Soit  $I$  l'idéal de  $k[X, Y, Z]$  engendré par  $F$  et  $G$  avec  $F = Y - Z^2$  et  $G = X - Z^3$ . L'idéal  $I^\sharp$  est-il engendré par  $F^\sharp$  et  $G^\sharp$ ? (cf. Exercice II, 4.)

## 2. Résolution d'un module gradué

Soit  $R$  un anneau noethérien gradué,  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  et  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini,  $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$ . On note  $M(n)$  le module décalé défini par  $M(n)_p = M_{n+p}$ .

1) Montrer que  $M$  est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes.

2) Montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif  $p : L_0 \rightarrow M$ , où  $L_0$  est un  $R$ -module gradué de la forme  $\bigoplus_{i=1}^r R(n_i)$ , et où  $p$  est homogène de degré zéro :  $p$  envoie un élément de degré  $n$  sur un élément de degré  $n$ .

3) Montrer que  $M$  admet une résolution graduée, i.e. qu'il existe une suite exacte :

$$\dots \rightarrow L_d \xrightarrow{u_d} L_{d-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

avec les  $L_i$  de la forme ci-dessus et les  $u_i$  homogènes de degré zéro. (On pourra considérer les noyaux de  $p$  et des  $u_i$ .)

### 3. Le morphisme de Veronese

On se propose de prouver le théorème III, 11.7. Soient  $n$  et  $d$  des entiers  $> 0$  et soit

$$A = \{ \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^{n+1} \mid \alpha_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^n \alpha_i = d \}.$$

On note que  $|A| = \binom{n+d}{d}$ . On pose  $|A| = N + 1$ .

Le support de  $\alpha \in A$  est l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\alpha_i \neq 0$ . Son cardinal est appelé la largeur de  $\alpha$ .

Soient  $i, j \in [0, n]$  des entiers distincts. On note  $(i, j)$  (resp.  $(i)$ ) l'élément  $\alpha$  de  $A$  défini par  $\alpha_k = 0$  pour  $k \neq i, j$ ;  $\alpha_i = d - 1$ ;  $\alpha_j = 1$  (resp.  $\alpha_k = 0$  pour  $k \neq i$  et  $\alpha_i = d$ ).

Si  $X_0, \dots, X_n$  sont des indéterminées on pose, pour  $\alpha \in A$ ,  $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$ .

On considère l'application  $\varphi : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^N$  définie par la formule :

$$\varphi(x_0, \dots, x_n) = ((x^\alpha)_{\alpha \in A}) = ((x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n})).$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est un morphisme injectif.
- 2) On considère l'homomorphisme d'anneaux :

$$\theta : k[(Y_\alpha)]_{(\alpha \in A)} \rightarrow k[X_0, \dots, X_n]$$

défini par  $\theta(Y_\alpha) = X^\alpha$ . Soit  $I = \text{Ker } \theta$  et  $V = V_p(I)$  (la variété de Veronese).

Montrer que  $I$  est un idéal homogène et qu'on a  $\varphi(\mathbf{P}^n) \subset V$ .

3) Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ . On suppose qu'on a  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ . Montrer que  $Y_\alpha Y_\beta - Y_\gamma Y_\delta$  est dans l'idéal  $I$ .

4) Montrer que les ouverts  $D^+(Y_{(i)})$  recouvrent  $V$ . (Soit  $y = (y_\alpha) \in V$ . Il s'agit de voir que l'un des  $y_{(i)}$  est  $\neq 0$ . On raisonnera par l'absurde en considérant un  $y_\alpha$  non nul avec  $\alpha$  de largeur minimale et on utilisera 3.)

5) On définit  $\psi : D^+(Y_{(i)}) \cap V \rightarrow D^+(X_i)$  par la formule :

$$\psi((y_\alpha)) = (y_{(i,0)}, y_{(i,1)}, \dots, y_{(i)}, \dots, y_{(i,n)}).$$

Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre sur les ouverts considérés.

6) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}^n$  sur la variété de Veronese  $V$ .

#### 4. Anneaux locaux du projectif

On se propose de prouver la proposition III, 8.7.

Soit  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$ . On considère les idéaux  $m_x$  et  $I_x$  de  $k[X_0, \dots, X_n]$  définis comme suit :  $m_x = (X_0 - x_0, \dots, X_n - x_n)$ ,  $I_x$  est l'idéal engendré par les polynômes  $x_i X_j - x_j X_i$  pour  $0 \leq i < j \leq n$ .

1) On suppose  $x_0 \neq 0$ . Montrer que  $I_x$  est engendré par les polynômes  $X_i - \frac{x_i}{x_0} X_0$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Montrer qu'on a  $I_x \subset m_x$ .

2) Montrer que  $I_x$  est l'idéal  $I_p(\{x\})$  des polynômes nuls au point  $x$ . En déduire que  $I_x$  est homogène et premier.

3) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique :

$$k[X_0, \dots, X_n]_{(m_x)} \simeq k[X_0, \dots, X_n]_{(I_x)}$$

où les parenthèses signifient qu'on se limite, dans le localisé, aux éléments de degré 0.

4) On suppose  $x_0 = 1$  et on pose :

$$\xi = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad n_\xi = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \subset k[X_1, \dots, X_n].$$

Montrer que l'homomorphisme  $\flat : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$  qui envoie  $X_0$  sur 1 induit un isomorphisme :

$$k[X_0, \dots, X_n]_{(m_x)} \simeq k[X_1, \dots, X_n]_{n_\xi}$$

5) Conclure.

#### 5. Un exemple de module non quasi-cohérent

Soient  $X$  une variété affine irréductible,  $a$  un point de  $X$ , et  $\mathcal{F}$  le préfaisceau défini sur  $X$  par la formule :

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & \text{si } a \notin U, \\ 0 & \text{si } a \in U. \end{cases}$$

Montrer que  $\mathcal{F}$  est un faisceau, puis que c'est un  $\mathcal{O}_X$ -module, non nul, mais tel que  $\Gamma(X, \mathcal{F}) = 0$ . En déduire que  $\mathcal{F}$  n'est pas quasi-cohérent.

# Chapitre IV

## Dimension

Dans tout ce chapitre on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 0. Introduction

La notion de dimension est le premier et le plus naturel des invariants d'une variété algébrique. On va enfin pouvoir parler de variétés de dimension 0 (les points), de dimension 1 (les courbes), de dimension 2 (les surfaces)... Nous allons donner une définition topologique de la dimension, très naturelle, mais pas toujours facile à manipuler, puis d'autres, plus agréables, mais qui font appel à des résultats d'algèbre.

### 1. Définition topologique, lien avec l'algèbre

#### a. Définition

L'idée fondamentale que nous allons formaliser est que toute partie fermée irréductible d'une variété algébrique irréductible est de dimension plus petite que la variété initiale.

**Définition 1.1.** Soit  $X$  un ensemble. Une chaîne de parties de  $X$  est une suite  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n$  avec les  $X_i \subset X$  distincts. Une telle chaîne est dite de longueur  $n$ .

**Définition 1.2.** Soit  $X$  un espace topologique. La dimension de  $X$  est la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréduc-

tibles de  $X$ . C'est un entier  $\geq 0$  ou  $+\infty$ . On le note  $\dim X$ .<sup>1</sup>

## b. Quelques remarques topologiques

**Proposition-définition 1.3.** *Si  $Y$  est un sous-espace topologique de  $X$  on a  $\dim Y \leq \dim X$ . Si  $X$  est de dimension finie, la codimension de  $Y$  dans  $X$  est par définition le nombre  $\dim X - \dim Y$ . Si de plus  $X$  est irréductible et de dimension finie et si  $Y$  est un fermé distinct de  $X$  on a  $\dim Y < \dim X$ .*

*Démonstration.* Soit  $F_1 \subset \dots \subset F_n$  une chaîne de fermés irréductibles de  $Y$ . On en déduit la suite  $\overline{F}_1 \subset \dots \subset \overline{F}_n$  de fermés irréductibles (cf. I, 3.7) de  $X$ . Ces fermés sont distincts car on a, pour tout  $i$ ,  $F_i = \overline{F}_i \cap Y$  puisque  $F_i$  est fermé dans  $Y$ . Le résultat en découle. La deuxième assertion est claire (rajouter  $X$  à une chaîne maximale de  $Y$ ).

**Proposition 1.4.** *Soit  $X$  un espace topologique. On suppose qu'on a  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i$  fermé. Alors on a  $\dim X = \sup \dim X_i$ .*

*Démonstration.* Vu 1.3 il est clair que l'on a  $\dim X \geq \sup \dim X_i$ . Réciproquement, soit  $p$  le sup en question (s'il est infini, le résultat est trivial). Supposons qu'on ait une chaîne de  $X$  de longueur  $p + 1$  :

$F_0 \subset \dots \subset F_{p+1}$ . On a  $F_{p+1} = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap F_{p+1})$ , mais, comme  $F_{p+1}$  est irréductible, il est inclus dans l'un des  $X_i$ , ce qui contredit  $\dim X_i \leq p$ .

La proposition précédente s'applique en particulier lorsque les  $X_i$  sont les composantes irréductibles d'une variété algébrique  $X$  (cf. III, 4.4). On est donc essentiellement ramené au cas des variétés algébriques irréductibles.

## c. Lien avec la dimension de Krull

Rappelons la définition de la dimension de Krull d'un anneau  $A$ .

**Définition 1.5.** *La dimension de Krull de  $A$  est la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de  $A$ . On la note  $\dim_K A$ .*

<sup>1</sup>Bien entendu cette notion n'a d'intérêt que pour les topologies du type de Zariski. Ainsi, si  $X$  est séparé on a toujours  $\dim X = 0$ .

*Exemple 1.6.* Un anneau principal qui n'est pas un corps est de dimension 1 (car tout idéal premier non nul est maximal);  $k[X_1, \dots, X_n]$  est un anneau de dimension  $\geq n$  comme en témoigne la chaîne  $(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, \dots, X_n)$ . En fait cet anneau est de dimension  $n$  (cf. 1.9 ci-dessous).

**Proposition 1.7.** *Soit  $V$  une variété algébrique affine et soit  $\Gamma(V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $V$ . On a*

$$\dim V = \dim_K \Gamma(V).$$

*Démonstration.* Cela résulte de la bijection décroissante (corollaire I, 4.9 du Nullstellensatz) entre parties fermées irréductibles de  $V$  et idéaux premiers de  $\Gamma(V)$ .

#### d. Le théorème algébrique fondamental

Le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration dans le problème III, est la pierre angulaire de ce chapitre :

**Théorème 1.8.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini intègre et  $K = \text{Fr}(A)$  son corps des fractions. La dimension de Krull de  $A$  est égale au degré de transcendance de  $K$  sur  $k$  :  $\dim_K A = \partial_k K$ .*

**Corollaire 1.9.** *On a  $\dim_K k[X_1, \dots, X_n] = n$ . Il en résulte que l'espace affine  $k^n$  est bien de dimension  $n$ .*

*Démonstration.* En effet, le corps des fractions de  $k[X_1, \dots, X_n]$  est  $k(X_1, \dots, X_n)$  dont le degré de transcendance sur  $k$  est  $n$  (cf. Mémento 3.2.b).

**Corollaire 1.10.** *Soit  $V$  une variété algébrique affine irréductible,  $\Gamma(V)$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $V$  et  $K(V)$  le corps des fonctions rationnelles (cf. I, 6.15). On a  $\dim V = \dim_K \Gamma(V) = \partial_k K(V)$ . En particulier, la dimension d'une variété algébrique affine  $V$  est finie.*

*Démonstration.* Le premier point vient de 1.7 et 1.8. Pour le second, vu 1.4 on peut supposer  $V$  irréductible, donc  $\Gamma(V)$  intègre. Mais, comme  $\Gamma(V)$  est une  $k$ -algèbre de type fini, le corps  $K(V)$  est une extension de type fini de  $k$  donc, a fortiori, son degré de transcendance est fini (cf. Mémento 3.c).

### e. Passage d'une variété à un ouvert

**Proposition 1.11.** *Soit  $X$  une variété algébrique irréductible et soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ . On a  $\dim X = \dim U$  et cette dimension est finie.*

*Démonstration*

1) On traite d'abord le cas où  $X$  est affine d'anneau  $\Gamma(X)$ . L'ouvert  $U$  contient alors un ouvert standard non vide  $D(f)$  avec  $f \in \Gamma(X)$  non nul et on a  $\dim D(f) \leq \dim U \leq \dim X$ . Comme l'anneau de  $D(f)$  est un localisé de celui de  $X$ , ces anneaux ont même corps de fractions, donc  $X$  et  $D(f)$  ont même dimension par 1.10, donc aussi  $U$ .

2) Ce qui précède prouve que les ouverts affines non vides de  $X$  (qui sont irréductibles) ont tous la même dimension finie  $r$  (regarder l'intersection de deux ouverts).

3) Supposons  $\dim X > r$ . On aurait donc une chaîne  $F_0 \subset \dots \subset F_n$  avec  $n > r$ . Soit  $x \in F_0$  et soit  $U$  un ouvert affine contenant  $x$ . On considère dans  $U$  les fermés  $U \cap F_i$ . Ils sont irréductibles comme ouverts non vides d'un irréductible, distincts car on a  $\overline{F_i \cap U} = F_i$  ( $F_i \cap U$  est un ouvert non vide de l'irréductible  $F_i$ ). On a donc une chaîne de longueur  $n$  dans  $U$ , ce qui est absurde.

4) Enfin, si  $U$  est un ouvert quelconque, il contient un ouvert affine et on a la conclusion.

*Commentaire 1.12.* Ce qui précède donne une voie pour calculer la dimension d'une variété algébrique  $X$  quelconque :

1) Quitte à décomposer  $X$  en union finie d'irréductibles on se ramène au cas où  $X$  est irréductible.

2) Si  $X$  est irréductible, quitte à remplacer  $X$  par un ouvert affine, on peut supposer  $X$  affine irréductible.

3) Enfin pour  $X$  affine irréductible on utilise le degré de transcendance de  $K(X)$ .

*Exemples 1.13*

1) On a  $\dim \mathbf{P}^n = n$ . (On se ramène à l'espace affine.)

2) Une variété  $V$  de dimension 0 est finie : on se ramène au cas affine irréductible et c'est clair.

**Définition 1.14.** Une variété algébrique de dimension 1 (resp. 2) est appelée une courbe (resp. une surface).

On notera qu'on tolère pour l'instant la présence de composantes de dimensions plus petites.

## 2. Dimension et nombre d'équations

### a. Le Hauptidealsatz

Soit  $V$  une variété algébrique affine de dimension  $d$  et soit  $f \in \Gamma(V)$ . Le but de ce paragraphe est de donner une base solide à l'idée intuitive que la sous-variété fermée  $V(f)$  de  $V$  est de dimension  $d - 1$ . Cette idée est suggérée notamment par le modèle linéaire : le cas des hyperplans dans les espaces vectoriels.

Notons déjà les deux cas extrêmes à éviter :

#### Proposition 2.1

a)  $V(f)$  est vide  $\iff f$  est inversible dans  $\Gamma(V)$ ,

b)  $V(f)$  contient une composante irréductible  $\iff f$  est diviseur de zéro.

*Démonstration.* Le point a) résulte du Nullstellensatz faible (I, 4.1). Pour b), si  $f$  est diviseur de zéro on a  $fg = 0$  avec  $g \neq 0$ , donc  $V = V(f) \cup V(g)$  avec  $V(g) \neq V$ . Si  $V_i$  est une composante de  $V$  on a  $V_i = (V(f) \cap V_i) \cup (V(g) \cap V_i)$ , donc  $V_i$  est contenue dans  $V(f)$  ou dans  $V(g)$ . Comme toutes les composantes ne peuvent être contenues dans  $V(g)$  (car  $V(g) \neq V$ ) c'est que  $V(f)$  contient au moins une composante. Réciproquement, si  $V(f)$  contient la composante  $V_i$  on prend  $g \in \Gamma(V)$ ,  $g \neq 0$ ,  $g$  nul sur la réunion des autres composantes (cf. I, 2.2.2) et on a  $fg = 0$ .

Notons aussi la définition :

**Définition 2.2.** Une variété algébrique  $X$  est dite équidimensionnelle si toutes ses composantes irréductibles sont de même dimension.

Bien entendu une variété algébrique irréductible est équidimensionnelle.

Le théorème suivant est une variante géométrique d'un résultat d'algèbre (le Hauptidealsatz, ou théorème de l'idéal principal, de Krull).

**Théorème 2.3.** Soit  $V$  une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension  $n$  et soit  $f \in \Gamma(V)$  un élément qui n'est ni inversible, ni diviseur de zéro. Alors  $V(f)$  est une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension  $n - 1$ .

*Démonstration.* Voir [M] I, §7 Th. 2 pour une excellente démonstration. Contentons-nous du cas trivial où  $V = k^n$  :  $f$  est alors un polynôme non constant (nous supposons qu'il est de degré  $> 0$  en  $X_n$ ) et on peut le supposer irréductible (cf. I, 4.12). Alors, on a

$$\Gamma(V(f)) = k[X_1, \dots, X_n]/(f)$$

et cet anneau est intègre. Montrons que les images  $x_1, \dots, x_{n-1}$  des  $X_i$  dans cet anneau forment une base de transcendance de son corps de fractions, ce qui prouvera que  $V(f)$  est de dimension  $n - 1$ . En effet, la dernière variable  $x_n$  est algébrique sur  $k(x_1, \dots, x_{n-1})$  puisqu'elle vérifie l'équation  $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ . D'autre part les  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sont algébriquement indépendants, sinon on aurait une équation polynomiale  $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$  dans  $\Gamma(V(f))$ , ce qui signifie  $g(X_1, \dots, X_{n-1}) \in (f)$ , or c'est impossible pour une raison de degré en  $X_n$ .

**Corollaire 2.4.** Soit  $V$  une variété algébrique affine équidimensionnelle de dimension  $n$  et soient  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(V)$ . Alors si  $W$  est une composante irréductible de  $V(f_1, \dots, f_r)$ , on a  $\dim W \geq n - r$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $r$ . De plus, on remarque que, pour  $r$  fixé, il suffit de prouver le résultat pour  $V$  irréductible (car  $W$  est contenu dans une composante de  $V$ ).

Supposons  $r = 1$  et  $V$  irréductible. Si  $f_1$  n'est ni inversible ni nul, la conclusion vient de 2.3. Mais  $f_1$  ne peut être inversible (sinon  $V(f_1) = \emptyset$ , or il contient  $W$  qui est irréductible donc non vide). Si  $f_1$  est nul on a  $V(f_1) = V$  et le résultat est clair. Enfin, pour passer de  $r - 1$  à  $r$  on applique l'hypothèse de récurrence à une composante de  $V(f_1)$  qui contient  $W$ .

Le lecteur prendra garde que, si  $f$  est diviseur de 0,  $V(f)$  n'est pas nécessairement équidimensionnel, ni de dimension  $n$ , ni de dimension  $n - 1$ . Par exemple, si  $V = V(XY)$  et  $f = x(x + y + 1)$  on vérifie que  $V(f)$  est réunion d'une droite et d'un point.

Bien entendu on ne peut, dans le cas de  $r$  équations,  $r > 1$ , espérer un résultat plus précis (penser au cas où les  $f_i$  sont toutes égales).

### b. Le théorème d'intersection

Là encore la source de ce résultat est le modèle linéaire : le lemme sur la dimension de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, mais il faut ici se contenter d'une inégalité.

**Proposition 2.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles algébriques affines irréductibles contenus dans  $k^n$ , de dimensions respectives  $r$  et  $s$ . Alors, toute composante irréductible de  $X \cap Y$  est de dimension  $\geq r + s - n$ .*

#### Démonstration

1) On suppose d'abord que  $X = V(F)$  est une hypersurface. Si  $f$  est l'image de  $F$  dans  $\Gamma(Y)$  on a alors  $X \cap Y = V_Y(f)$  et on conclut par 2.4.

2) Le cas général se ramène au cas précédent en identifiant  $X \cap Y$  avec la trace de la diagonale dans le produit  $k^n \times k^n$  (cf. Exercice IV, 1 ou [H] I, 7.1).

### c. Réciproques : systèmes de paramètres

On a vu en 2.3 et 2.4 que si dans une variété affine de dimension  $n$  on prend  $r$  équations on obtient une sous-variété de dimension  $\geq n - r$  et sans doute égale à  $n - r$  dans les bons cas. Réciproquement on peut se demander si toute sous-variété de dimension  $n - r$  (ou encore de codimension  $r$ ) peut être définie par  $r$  équations. C'est manifestement trop exiger mais nous allons donner quelques réciproques partielles. Commençons par le cas  $r = 1$ . Là nous allons avoir la bonne réciproque, mais avec une hypothèse (forte) sur la variété de départ :

**Proposition 2.6.** *Soit  $V$  une variété algébrique affine irréductible. On suppose l'anneau  $\Gamma(V)$  factoriel. Soit  $W$  un fermé irréductible de  $V$ , de codimension 1. Alors, il existe  $f \in \Gamma(V)$  telle que  $W = V(f)$ .*

*Démonstration.* On considère  $I(W)$  qui est un idéal premier de  $\Gamma(V)$ . Cet idéal est de hauteur 1, c'est-à-dire minimal parmi les idéaux premiers non nuls de  $\Gamma(V)$  (cela résulte de la bijection entre parties irréductibles et idéaux premiers). Il suffit de voir qu'il est principal car si  $I(W) = (f)$  on a bien  $W = V(f)$ . Soit  $g \in I(W)$ ,  $g \neq 0$  et décomposons  $g$  en produit d'irréductibles  $g = f_1 \cdots f_r$ . Comme  $I(W)$  est premier l'un des  $f_i$  est dans  $I(W)$ , donc on a  $(f_i) \subset I(W)$ . Mais, comme  $\Gamma(V)$  est factoriel, l'idéal  $f_i$  est premier (c'est le lemme d'Euclide, cf. Mémento 1.5) et non nul, donc égal à  $I(W)$ .

Dans le cas général on doit se contenter du résultat suivant :

**Proposition 2.7.** *Soit  $V$  une variété algébrique affine irréductible et soit  $W$  une sous-variété algébrique affine irréductible de codimension  $r \geq 1$ . Pour tout  $s$  avec  $1 \leq s \leq r$ , il existe  $f_1, \dots, f_s \in \Gamma(V)$  telles que :*

- 1)  $W \subset V(f_1, \dots, f_s)$ ,
- 2) toutes les composantes de  $V(f_1, \dots, f_s)$  sont de codimension  $s$ .

*En particulier, il existe  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(V)$  tels que  $W$  soit une composante irréductible de  $V(f_1, \dots, f_r)$ . On dit que les  $f_i$  forment un système de paramètres de  $W$ .*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $s$ . Pour  $s = 1$  on prend  $f \in I(W)$ ,  $f \neq 0$  ( $I(W) \neq (0)$  car  $V \neq W$ ), on a  $W \subset V(f)$  et on conclut avec 2.3.

Passons de  $s - 1$  à  $s$ . Le cas  $s - 1$  donne  $W \subset V(f_1, \dots, f_{s-1})$  et le fait que, si  $Y_1, \dots, Y_n$  sont les composantes de  $V(f_1, \dots, f_{s-1})$ , les  $Y_i$  sont de codimension  $s - 1$ . Comme  $s - 1 < r$ , aucun  $Y_i$  n'est inclus dans  $W$ , de sorte que  $I(W)$  n'est contenu dans aucun des  $I(Y_i)$ . D'après le lemme d'évitement des idéaux premiers (cf. Mémento 4.1), on a  $I(W) \not\subset \bigcup_{i=1}^n I(Y_i)$  et il existe donc  $f_s \in I(W)$ ,  $f_s \notin I(Y_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . On a alors  $W \subset V(f_1, \dots, f_s)$ . De plus, si  $Z$  est une composante de  $V(f_1, \dots, f_s)$ , on sait que  $Z$  est de codimension  $\leq s$ . Par ailleurs,  $Z$  est contenue dans  $V(f_1, \dots, f_{s-1})$ , donc dans l'un des  $Y_i$ , et n'est pas égal à cet  $Y_i$  (car  $f_s \notin I(Y_i)$ ). Il s'ensuit que  $Z$  est de codimension  $\geq s$  (cf. 1.3) donc en définitive de codimension  $s$ , cqfd.

**Corollaire 2.8.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini intègre de dimension de Krull  $n$  et soit  $I$  un idéal premier de  $A$ . On suppose qu'on a  $\dim_K(A/I) = r$ . Alors on peut trouver une suite d'idéaux premiers de  $A$  de longueur  $n$  "passant" par  $I$  :*

$$(0) = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_{n-r} = I \subset \dots \subset I_n.$$

(On dit que l'anneau  $A$  est caténaire.)

*Démonstration.* L'existence des  $I_k$  convenables pour  $k \geq n - r$  résulte de la définition de la dimension de Krull de  $A/I$ . Par ailleurs, l'anneau  $A$  est l'anneau d'une variété affine irréductible  $V$  et  $I$  correspond à une sous-variété irréductible de dimension  $r$ . On obtient alors le résultat en appliquant 2.7, dans la forme précise énoncée ci-dessus.

**Corollaire 2.9.** Soit  $V$  une variété algébrique irréductible et soit  $x \in V$ . On a  $\dim V = \dim_K \mathcal{O}_{V,x}$ . Si  $V$  n'est pas irréductible la dimension de Krull de  $\mathcal{O}_{V,x}$  est le sup des dimensions des composantes irréductibles de  $V$  contenant  $x$ . On note ce nombre  $\dim_x(V)$ .

*Démonstration.* On se ramène aussitôt au cas où  $V$  est affine irréductible d'anneau  $A$ , le point  $x$  correspondant à l'idéal maximal  $m_x$  de  $A$ . Vu la description des idéaux premiers de  $\mathcal{O}_{V,x} = A_{m_x}$  (cf. Mémento 1.6), on a déjà  $\dim_K \mathcal{O}_{V,x} \leq \dim_K A = \dim V$ . La réciproque vient de 2.7, là encore dans la forme précise énoncée ci-dessus.

#### d. Les variantes projectives

Nous donnons rapidement les variantes projectives de certains résultats précédents. Les démonstrations sont pour la plupart immédiates en utilisant les ouverts affines et les cônes de ces variétés (cf. II, 4.5 c). L'avantage du projectif est de permettre, dans les bons cas, de conclure que les variétés obtenues sont non vides.

**Proposition 2.10.** Soit  $V \subset \mathbf{P}^n$  une variété algébrique projective irréductible et soit  $f \in \Gamma_h(V)$  un élément homogène non constant.

1) Toute composante irréductible de  $V(f)$  est de codimension 1 dans  $V$ .

2) Si on a, de plus,  $\dim V > 0$ ,  $V(f)$  n'est pas vide.

*Démonstration.* Pour le premier point on regarde les ouverts affines  $U_i = D^+(X_i)$ . Si  $V(f)$  n'est pas vide il n'est pas contenu dans tous les  $V(X_i)$ , disons par exemple,  $V(f) \not\subset V(X_0)$  et intéressons-nous aux composantes de  $V(f)$  non contenues dans  $V(X_0)$ . Alors,  $V \cap U_0$  est une variété algébrique affine irréductible et on a  $V(f) \cap U_0 = V(f_b) \neq \emptyset$ , où  $f_b \in \Gamma(V \cap U_0)$  est défini comme en III, 8.b. L'élément  $f_b$  n'est pas inversible (car  $V(f_b)$  est non vide), ni nul (sinon  $V(f)$  contiendrait  $V \cap U_0$ , donc  $V$ , et  $f$  serait nul). On a donc  $\dim V(f_b) = \dim(V \cap U_0) - 1 = \dim V - 1$ ; mieux, cela vaut pour toutes les composantes irréductibles non contenues dans  $V(X_0)$  et on a le résultat.

Pour l'assertion 2) on raisonne sur les cônes dans  $k^{n+1}$ . Soit  $C(V)$  le cône de  $V$  (cf. II, 4.5). L'idéal (en affine) de  $C(V)$  n'est autre que  $I_p(V)$ . Il est donc premier, de sorte que  $C(V)$  est irréductible. De plus, on a  $\dim C(V) = \dim V + 1$  (le plus simple pour prouver cela est d'utiliser

le théorème de dimension des fibres (4.7), appliqué à la projection naturelle de  $C(V) - \{0\}$  sur  $V$  dont les fibres sont des droites privées de l'origine, donc de dimension 1; on peut aussi appliquer le Hauptidealsatz pour passer de l'anneau  $k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$  à l'anneau affine  $k[X_1, \dots, X_n]/I(V)_b$  en passant au quotient par l'élément  $X_0 - 1$ . On considère alors la sous-variété affine  $V_a(f) \subset C(V)$ . Elle est non vide (elle contient 0 car  $f$  est homogène) et de codimension 1 dans  $C(V)$ , donc elle est de dimension  $\dim V > 0$ . Elle n'est donc pas réduite à 0, donc son image dans  $\mathbf{P}^n$ , qui n'est autre que  $V(f)$ , est non vide.

Nous laissons au lecteur les deux propositions suivantes dont les démonstrations sont analogues.

**Corollaire 2.11.** *Soit  $V$  une variété algébrique projective irréductible et soient  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma_h(V)$  des éléments homogènes non constants.*

1) *Toute composante irréductible de  $V(f_1, \dots, f_r)$  est de codimension  $\leq r$  dans  $V$ .*

2) *Si on a, de plus,  $r \leq \dim V$ ,  $V(f_1, \dots, f_r)$  n'est pas vide.*

On a aussi des systèmes de paramètres homogènes :

**Proposition 2.12.** *Soit  $V$  une variété algébrique projective irréductible et soit  $W$  une sous-variété algébrique projective irréductible de codimension  $r$ . Il existe des éléments homogènes  $f_1, \dots, f_r \in \Gamma_h(V)$  tels que  $W$  soit une composante irréductible de  $V(f_1, \dots, f_r)$ .*

### 3. Morphismes et dimension

#### a. Exemples et discussion

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés algébriques. On suppose  $X$  et  $Y$  irréductibles (pour se ramener à ce cas on décompose  $Y$  en composantes irréductibles :  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ , puis on considère les images réciproques qui sont des fermés recouvrant  $X$  et on les décompose à leur tour, cf. 3.8 ci-dessous).

Soit  $y$  un point de  $Y$  et notons  $\varphi^{-1}(\{y\})$  ou plutôt  $\varphi^{-1}(y)$  sa fibre. Comme  $\{y\}$  est fermé dans  $Y$  (exercice : pourquoi?), la fibre est un fermé de  $X$  que l'on munit de sa structure de variété<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Pour les problèmes concernant la dimension, qui est un invariant somme toute assez grossier, la structure de variété nous suffit. En revanche pour des notions plus fines (par exemple le degré) il faudra définir sur la fibre une structure de schéma, voir l'appendice sur les schémas 4.b.

On se propose de comparer les dimensions de  $X$ ,  $Y$  et des fibres.

*Exemple 3.1.* On considère la projection  $\varphi : k^{n+d} \rightarrow k^n$  donnée par les  $n$  premières coordonnées. La fibre d'un point quelconque de  $k^n$  est isomorphe à  $k^d$ . On a donc ici la relation :

$$(*) \quad \dim X = \dim Y + \dim \varphi^{-1}(y).$$

Cette relation est la relation attendue, mais il convient de prendre quelques précautions.

*Exemple 3.2.* Si  $\text{Im } \varphi$  est trop petite, une formule du type  $(*)$  ne peut pas être valable. Par exemple, si  $\varphi$  est constante, disons  $\varphi(x) = b$  pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\varphi^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } y \neq b, \\ X, & \text{si } y = b, \end{cases}$$

et la formule  $(*)$  n'est pas vraie (ne serait-ce que parce que  $Y$  n'intervient pas).

On va donc devoir faire une hypothèse sur  $\varphi$ . L'hypothèse naturelle,  $\varphi$  surjective, est trop forte (cf. 3.3 et 3.4), la bonne condition est  $\varphi$  dominant, i.e. (cf. I, 6.10)  $\overline{\varphi(X)} = Y$ .

*Exemple 3.3.* Prenons  $V = V(XY - 1) \subset k^2$ ,  $W = k$  et pour  $\varphi$  la projection :  $\varphi(x, y) = x$ . On a  $\varphi(V) = k - \{0\}$ , la projection est dominante mais non surjective. Ici les fibres, sauf celle de 0 qui est vide, ont toutes la bonne dimension, donnée par  $(*)$  : zéro.

*Exemple 3.4.* Soit  $V = V(XZ - Y) \subset k^3$  et soit  $\varphi : V \rightarrow k^2$ , donnée par  $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ . On a, si  $x \neq 0$ ,  $\varphi^{-1}(x, y) = \{(x, y, y/x)\}$ ;  $\varphi^{-1}(0, y) = \emptyset$  si  $y \neq 0$  et  $\varphi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0, z) \mid z \in k\}$ . L'image de  $\varphi$  est donc  $(k^2 - V(X)) \cup \{(0, 0)\}$  et les fibres non vides vérifient toutes la formule  $(*)$  qui leur prédit la dimension 0, sauf celle du point  $(0, 0)$  qui est de dimension 1.

A propos d'image, on prendra garde que l'image d'un morphisme n'est pas nécessairement ouverte, ni fermée, ni même localement fermée (i.e. intersection d'un ouvert et d'un fermé). En revanche elle est toujours constructible, c'est-à-dire union finie de parties localement fermées (cf. [H] Exercice II, 3.18 et 3.19 ou [M] I, 8 Cor. 2).

La morale de cet exemple c'est que la fibre "générale" sera de la dimension attendue  $\dim X - \dim Y$  mais que des fibres "spéciales" pourront être de dimension plus grande.

### b. Réduction au cas affine

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles et soit  $y \in Y$ , appartenant à l'image  $\varphi(X)$ , et  $Z$  une composante irréductible de  $\varphi^{-1}(y)$ .

**Lemme 3.5.** *Il existe des ouverts affines non vides  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  tels que l'on ait :*

- 1)  $\varphi(U) \subset V$ ,
- 2)  $\varphi|_U : U \rightarrow V$  dominant,
- 3)  $y \in V$ ,
- 4)  $Z \cap U \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* On prend un ouvert affine  $V$  de  $Y$  contenant  $y$ . On regarde  $\varphi^{-1}(V)$ . C'est un ouvert de  $X$  qui contient  $Z$ . On prend  $z \in Z$  et  $U$  un ouvert affine de  $\varphi^{-1}(V)$  contenant  $z$ . Il suffit de montrer que  $\varphi|_U : U \rightarrow V$  est dominant. Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $V$ . Comme  $\varphi$  est dominant,  $\Omega$  rencontre  $\varphi(X)$ , de sorte que  $\varphi^{-1}(\Omega)$  est un ouvert non vide de  $X$ . Mais alors, comme  $X$  est irréductible, cet ouvert rencontre  $U$  en un point  $x$  et on a  $\varphi(x) \in \Omega \cap \varphi|_U(U)$ , cqfd.

### 3.6. Conséquences

a) Dans la situation du lemme on a  $\dim X = \dim U$ ,  $\dim Y = \dim V$ ,  $\dim Z = \dim Z \cap U$  et  $Z \cap U$  est une composante irréductible de  $\varphi|_U^{-1}(y)$ . On a donc la même situation qu'au départ mais avec des variétés algébriques affines et ceci permet de ramener la plupart des énoncés au cas affine.

b) On déduit du lemme que si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dominant (avec  $X, Y$  irréductibles) on a  $\dim Y \leq \dim X$ . En effet on peut supposer  $X, Y$  affines et on sait alors que la flèche  $\varphi^* : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  associée à  $\varphi$  est injective. Elle induit donc une flèche injective sur les corps des fractions :  $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$  et il en résulte que le degré de transcendance de  $K(Y)$  sur  $k$  est plus petit que celui de  $K(X)$ . On conclut alors par 1.8.

### c. Le théorème de dimension

**Théorème 3.7.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles.

1) Soit  $y \in Y$ . Toute composante irréductible de  $\varphi^{-1}(y)$  est de dimension au moins égale à  $\dim X - \dim Y$ .

2) Il existe un ouvert non vide  $U \subset Y$  vérifiant :

a)  $U \subset \varphi(X)$ ,

b)  $\forall y \in U$  on a  $\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ , plus précisément, toutes les composantes irréductibles de  $\varphi^{-1}(y)$  sont de dimension  $\dim X - \dim Y$ .

*Démonstration.* Vu 3.5 et 3.6 on peut supposer  $X$  et  $Y$  affines. On pose alors  $A = \Gamma(Y)$ ,  $B = \Gamma(X)$  et  $\varphi$  induit  $\varphi^* : A \rightarrow B$ , injectif.

1) Posons  $p = \dim Y$ . Soit  $y \in Y$ . D'après 2.7 il existe des éléments  $f_1, \dots, f_p \in A$  tels que  $V(f_1, \dots, f_p)$  soit fini et que  $y$  en soit un point. Quitte à restreindre  $Y$  (comme en 3.5) en le remplaçant par un ouvert affine qui contienne  $y$  et aucun autre point de  $V(f_1, \dots, f_p)$  on peut supposer qu'on a  $V(f_1, \dots, f_p) = \{y\}$ . Posons alors  $g_i = \varphi^*(f_i)$ . Alors, on a  $\varphi^{-1}(y) = V(g_1, \dots, g_p)$ . En effet, dire que l'on a  $x \in \varphi^{-1}(y)$ , donc  $\varphi(x) = y$ , signifie exactement qu'on a, pour tout  $i$ ,  $f_i \varphi(x) = 0$ , or  $f_i \varphi$  n'est autre que  $g_i$ .

Mais alors, par 2.4, toute composante de  $\varphi^{-1}(y) = V(g_1, \dots, g_p)$  est de codimension  $\leq p$ , donc de dimension  $\geq \dim X - \dim Y$ . (Mais, attention, la fibre peut être vide, auquel cas elle n'a pas de composante irréductible.)

2) Posons  $p = \dim Y$ ,  $q = \dim X$  et  $r = q - p$ . On a l'injection  $\varphi^*$  de  $A$  dans  $B$ . Comme  $B$  est une  $k$ -algèbre de type fini, c'est a fortiori une  $A$ -algèbre de type fini :  $B = A[b_1, \dots, b_n]$  (attention cette notation ne signifie pas que  $B$  est une algèbre de polynômes; cf. Problème III, 0). Soient  $K$  et  $L$  les corps de fractions de  $A$  et  $B$ , on a aussi  $L = K(b_1, \dots, b_n)$ . Par ailleurs, comme on a  $\partial_K K = p$ ,  $\partial_K L = q$ , on en déduit  $\partial_K L = r$  (cf. Mémento 3.c). On peut donc trouver parmi les  $b_i$  une base de transcendance de  $L$  sur  $K$  à  $r$  éléments, disons  $b_1, \dots, b_r$  et à l'inverse,  $r + 1$  des  $b_i$  sont toujours liés.

Pour montrer le théorème on peut traiter séparément les points a) et b) et il suffit ensuite de prendre l'intersection des ouverts non vides obtenus (cette intersection est non vide puisque  $Y$  est irréductible).

Montrons d'abord le point a) du théorème. Soit  $C$  la sous- $A$ -algèbre de  $B$  engendrée par  $b_1, \dots, b_r$ ,  $C = A[b_1, \dots, b_r]$ . Comme les  $b_i$  sont algébriquement indépendants sur  $K$  il s'agit cette fois d'une algèbre de polynômes et on a donc  $C \simeq A \otimes_k k[T_1, \dots, T_r]$  (cf. Mémento 2.4), donc

$C$  est l'algèbre d'une variété affine  $Z$ , isomorphe à  $Y \times k^r$  (cf. Problème I, 1.b), la projection  $\pi : Z \rightarrow Y$  correspondant à l'injection canonique  $j : A \rightarrow C$ . L'autre injection  $i : C \rightarrow B$  correspond à un morphisme dominant  $\varphi' : X \rightarrow Z$  avec  $f = \pi\varphi'$ .

Pour prouver a) il suffit de montrer que  $\varphi'(X)$  contient un ouvert non vide  $\Omega$  de  $Z$ . En effet,  $\varphi(X)$  contiendra alors  $\pi(\Omega)$  qui est un ouvert non vide de  $Y$  (cf. Problème I, 1.c). Soit  $M = K(b_1, \dots, b_r)$ . On a  $L = M(b_{r+1}, \dots, b_n)$  et, comme  $b_1, \dots, b_r$  est une base de transcendance de  $L$  sur  $K$ , les  $b_i$ ,  $i > r$  sont algébriques sur  $M$ . On a donc des équations  $c_{n,i}b_i^{n_i} + \dots + c_{0,i} = 0$ , pour  $i = r+1, \dots, n$  et on peut supposer les  $c_{i,j} \in C$  (quitte à multiplier par les dénominateurs) et les  $c_{n,i} \neq 0$ .

On pose alors  $f = \prod_{i=r+1}^n c_{n,i}$ . On a  $f \in C$ ,  $f \neq 0$ . Soit  $\Omega$  l'ouvert non vide  $D_Z(f)$ . Son image réciproque par  $\varphi'$  n'est autre que  $D_X(\varphi'^*(f))$  et ces ouverts correspondent respectivement aux algèbres localisées  $C_f$  et  $B_{\varphi'^*(f)}$ . Cette dernière est engendrée comme  $C_f$ -algèbre par les  $b_i$  pour  $i > r$ , mais, et c'est là qu'on a progressé, comme  $f$  est inversible dans  $C_f$ , il en est de même des  $c_{n,i}$ , de sorte que, cette fois, les  $b_i$  sont entiers sur  $C_f$ . Autrement dit l'anneau  $B_{\varphi'^*(f)}$  est entier sur  $C_f$ , ou encore, le morphisme restreint  $\varphi' : D_X(\varphi'^*(f)) \rightarrow D_Z(f)$  est fini, donc surjectif (cf. Annexe 4, Th. 4.2, ci-dessous) et l'ouvert  $\Omega$  est bien contenu dans  $\varphi'(X)$ .

Passons maintenant au point b). Si on considère  $r+1$  éléments  $b_{i_1}, \dots, b_{i_{r+1}}$  parmi  $b_1, \dots, b_n$ , on sait qu'ils sont algébriquement dépendants sur  $K$ , donc qu'ils vérifient une équation non triviale  $F_{\underline{i}}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{r+1}}) = 0$ , ( $\underline{i} = \{i_1, \dots, i_{r+1}\}$ ), que l'on peut supposer à coefficients dans  $A$ . On choisit alors un coefficient non nul  $a_{\underline{i}}$  de cette équation et on pose  $a = \prod a_{\underline{i}}$ , produit étendu à toutes les parties à  $r+1$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . On considère ensuite l'ouvert non vide  $D_Y(a)$  de  $Y$ . On va montrer que sur cet ouvert, toutes les composantes irréductibles des fibres ont la bonne dimension.

Soit  $y \in D_Y(a)$ . Il correspond à un idéal maximal  $m$  de  $A$ ,  $m = (f_1, \dots, f_s)$  et, si on pose  $g_i = \varphi^*(f_i)$ , on vérifie facilement, comme dans la démonstration du point 1), que l'on a  $\varphi^{-1}(y) = V(g_1, \dots, g_s) = V(mB)$ . Par le Nullstellensatz on a  $I(\varphi^{-1}(y)) = \text{rac}(mB)$  et si  $W$  est une composante irréductible de  $\varphi^{-1}(y)$ ,  $W$  correspond à un idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $B$ , contenant  $mB$  et minimal pour cette condition. On a alors  $\Gamma(W) = B/\mathfrak{q}$  et, vu le point 1), il reste à voir que  $\dim B/\mathfrak{q} \leq r$ , ou encore  $\partial_k \text{Fr}(B/\mathfrak{q}) \leq r$ .

Or, on a  $\mathfrak{q} \cap A = m$  : on a  $m \subset mB \subset \mathfrak{q}$ , donc  $m \subset \mathfrak{q} \cap A$ , mais

comme  $\mathfrak{q} \cap A$  est premier (donc  $\neq A$ ) et  $m$  maximal, ils sont égaux. Il en résulte que  $B/\mathfrak{q}$  est engendré comme  $k = A/m$ -algèbre par les images  $\bar{b}_i$  des  $b_i$ . De même on a  $\text{Fr}(B/\mathfrak{q}) = k(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ . Supposons qu'on ait  $\partial_k \text{Fr}(B/\mathfrak{q}) > r$ . On aurait donc, parmi les  $\bar{b}_i$ ,  $r+1$  éléments  $\bar{b}_{i_1}, \dots, \bar{b}_{i_{r+1}}$  algébriquement indépendants sur  $k$ . Mais on sait que les  $b_i$  correspondants vérifient, eux,

$$F_{\frac{1}{2}}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{r+1}}) = \sum a_{i,\alpha} b_{i_1}^{\alpha_1} \dots b_{i_{r+1}}^{\alpha_{r+1}} = 0,$$

avec  $a_{i,\alpha} \in A$ , et la même relation est encore vraie en passant au quotient par  $\mathfrak{q}$  et elle donne une relation entre les  $\bar{b}_i$ , cette fois avec des coefficients  $\bar{a}_{i,\alpha} \in k$ ; précisément, puisque  $\mathfrak{q} \cap A = m$  est l'idéal maximal correspondant à  $y$ ,  $\bar{a}_{i,\alpha} = a_{i,\alpha}(y)$ . Mais, comme  $y \in D_Y(a)$ , l'un des  $\bar{a}_{i,\alpha}$  est donc non nul par construction, ce qui prouve que l'équation vérifiée par  $\bar{b}_{i_1}, \dots, \bar{b}_{i_{r+1}}$  est non triviale, donc que ces éléments sont algébriquement dépendants et on obtient une contradiction.

#### d. Quelques corollaires

Le premier corollaire prend en compte le cas réductible :

**Corollaire 3.8.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés algébriques.*

1) *On suppose que toutes les fibres de  $\varphi$  sont de dimension  $\leq r$ . Alors, on a  $\dim X \leq r + \dim Y$ .*

2) *On suppose que  $\varphi$  est dominant et que toutes les fibres non vides de  $\varphi$  sont de dimension  $r$ . Alors on a  $\dim X = r + \dim Y$ .*

#### Démonstration

1) On décompose  $Y$  en composantes irréductibles :  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ , puis on décompose de même  $\varphi^{-1}(Y_i) = \bigcup_j X_{i,j}$ . On considère la restriction de  $\varphi : X_{i,j} \rightarrow Y_i$  et on pose  $Z_i = \overline{\varphi(X_{i,j})}$ . On applique alors 3.7 à  $\varphi : X_{i,j} \rightarrow Z_i$ , on a donc  $\dim X_{i,j} \leq \dim Z_i + \dim \varphi^{-1}(z) \leq \dim Y + r$  et, comme  $X$  est réunion des  $X_{i,j}$ , on a la conclusion.

2) Soit  $Y_i$  une composante  $Y$  de dimension  $\dim Y$ . La restriction  $\varphi : \varphi^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$  est dominante (considérer l'ouvert non vide  $Y_i - \bigcup_{j \neq i} Y_j$  de  $Y$ ). On décompose encore  $\varphi^{-1}(Y_i) = \bigcup_j X_{i,j}$  en composantes. Quitte à enlever certaines composantes on peut supposer que tous les  $X_{i,j}$  dominent  $Y_i$ . Si toutes les dimensions des  $X_{i,j}$  sont  $< r + \dim Y$ , le point 2.b, de 3.7 appliqué à la restriction  $\varphi : X_{i,j} \rightarrow Y_i$  montre que la fibre générale de  $\varphi^{-1}Y_i \rightarrow Y_i$  est de dimension  $< r$ , ce qui est absurde.

**Corollaire 3.9.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme fermé (i.e. qui transforme tout fermé en un fermé, c'est le cas par exemple si  $X$  et  $Y$  sont des variétés projectives, cf. Problème II). On pose, pour  $i \in \mathbf{N}$  :

$$Y_i = \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq i\}.$$

Alors les  $Y_i$  sont des fermés de  $Y$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $\dim Y$ . Si  $\dim Y = 0$  c'est clair. Sinon, posons  $p = \dim Y$ ,  $q = \dim X$ . On peut supposer  $X$  et  $Y$  irréductibles et  $\varphi$  surjectif et on note que les  $Y_i$  décroissent avec  $i$ . Le théorème 3.7 montre que  $Y_{q-p} = Y$  (donc aussi les  $Y_i$ ,  $i \leq q-p$ ) et qu'il existe un fermé  $Y' \neq Y$  (le complémentaire de l'ouvert  $U$  de 3.7) tel que  $Y_i \subset Y'$  pour  $i \geq q-p+1$ . On applique alors l'hypothèse de récurrence à  $Y'$  et à son image réciproque par  $\varphi$ .

*Remarque 3.10.* Les fermés  $Y_i$  forment ce qu'on appelle une stratification de  $Y$ . On introduit aussi, pour chaque  $i$ , la partie localement fermée  $Y_i^0 = Y_i - Y_{i+1}$  sur laquelle la dimension de la fibre est constante et égale à  $i$  (ce sont ces parties qui sont les strates, elles sont disjointes et d'union  $Y$ ). Comme ce sont des parties localement fermées de  $Y$  elles ont des structures de variétés. L'utilisation de ce type de stratification est une technique standard en géométrie algébrique, témoin le corollaire suivant, souvent utile dans les problèmes de dimension :

**Corollaire 3.11.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme fermé surjectif. Avec les notations de 3.9 on a la formule :  $\dim X = \sup(i + \dim Y_i^0)$ , le sup étant étendu à tous les  $i \in \mathbf{N}$  tels que  $Y_i^0$  soit non vide.

*Démonstration.* On peut supposer  $X$  et  $Y$  irréductibles. Posons  $p = \dim X$ ,  $q = \dim Y$ . Comme  $Y_{q-p}^0$  contient un ouvert non vide, on a  $\dim Y_{q-p}^0 = \dim Y = p$ , de sorte que  $\dim X \leq \sup(i + \dim Y_i^0)$ . Réciproquement, considérons un  $Y_i^0$  non vide et soit  $X_i^0 = \varphi^{-1}(Y_i^0)$ . On a alors par 3.8  $\dim Y_i^0 + i \leq \dim X_i^0 \leq \dim X$ , d'où l'autre inégalité.

*Contre-exemple 3.12.* Le corollaire 3.9 n'est pas valable si on ne suppose pas  $\varphi$  fermé. En effet, l'image de  $\varphi$  n'est autre que  $Y_0$  et elle n'est pas fermée en général, cf. 3.4. On notera que l'hypothèse  $\varphi$  surjectif n'est pas suffisante comme le montre l'exemple du morphisme  $\varphi : k^3 \rightarrow k^3$  donné

par  $\varphi(x, y, z) = (x, (xy-1)y, (xy-1)z)$  qui est surjectif mais pour lequel  $Y_1$  n'est pas fermé.<sup>3</sup>

#### 4. Annexe : morphismes finis

On rappelle (cf. Mémento 1.7) que si  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini,  $B$  est entier sur  $A$  si et seulement si  $B$  est un  $A$ -module de type fini : on dit alors que  $B$  est une  $A$ -algèbre finie.

**Définition 4.1.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés algébriques affines irréductibles et soit  $\varphi^* : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  le morphisme associé sur les algèbres qui fait de  $\Gamma(X)$  une  $\Gamma(Y)$ -algèbre. On dit que  $\varphi$  est un morphisme fini si  $\Gamma(X)$  est une  $\Gamma(Y)$ -algèbre finie.

**Théorème 4.2.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme fini. Alors  $\varphi$  est surjectif.

*Démonstration.* On va travailler sur les anneaux. On désigne par  $\text{Max}A$  (resp.  $\text{Spec}A$ ) l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers) de  $A$ . Le théorème 4.2 résulte alors de l'énoncé suivant :

**Théorème 4.3.** Soient  $A \subset B$  des anneaux intègres avec  $B$  entier sur  $A$ . Soit  $m \in \text{Max}A$ . Il existe  $n \in \text{Max}B$  tel que  $m = n \cap A$ .

*Démonstration (de 4.3).* On commence par prouver un lemme :

**Lemme 4.4.** Avec les notations de 4.3, soit  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}B$ , de sorte que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A \in \text{Spec}A$ . Alors on a  $\mathfrak{q}$  maximal  $\iff \mathfrak{p}$  maximal.

*Démonstration (de 4.4).* Comme  $B$  est entier sur  $A$ , il en est de même de  $B/\mathfrak{q}$  sur  $A/\mathfrak{p}$  (prendre l'équation de dépendance intégrale de  $b \in B$  et la projeter dans le quotient). On est donc ramené à montrer :

**Lemme 4.5.** Soient  $A \subset B$  des anneaux intègres avec  $B$  entier sur  $A$ . Alors on a :  $A$  est un corps  $\iff B$  est un corps.

<sup>3</sup>Cet exemple m'a été fourni par Nicusor Dan.

*Démonstration (de 4.5).* Supposons que  $A$  soit un corps. Soit  $b \in B$ ,  $b \neq 0$ . Il vérifie une équation :  $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$  et on peut supposer  $a_0 \neq 0$  (quitte à diviser par  $b^i$ , ce qui est possible puisque  $B$  est intègre). Mais alors,  $a_0$  est inversible dans  $A$  et on a :  $b(a_0^{-1}b^{n-1} + a_0^{-1}a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_0^{-1}a_1) = -1$  et  $b$  est inversible.

Supposons que  $B$  soit un corps et soit  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ . Il a un inverse  $a^{-1}$  dans  $B$ , qui est donc entier sur  $A$  :  $a^{-n} + a_{n-1}a^{-n+1} + \dots + a_0 = 0$ , ou encore, en multipliant par  $a^n$  :  $1 + a(a_{n-1} + \dots + a_0a^{n-1}) = 0$ , égalité qui a lieu dans  $A$  et montre que  $a$  y est inversible. Ceci achève de prouver 4.5 et 4.4.

Le résultat suivant est une conséquence de 4.4 :

**Corollaire 4.6.** *Avec les notations de 4.3, si  $A$  est local d'idéal maximal  $m$ , il existe  $n \in \text{Max}B$  tel que  $m = n \cap A$ .*

*Démonstration (de 4.6).* On a  $A \subset B$ , donc  $B \neq 0$ , donc  $B$  contient un idéal maximal  $n$  et, vu 4.4, il est bien obligé de convenir.

On peut maintenant, après ces quelques détours, finir la démonstration de 4.3. On prend  $m \in \text{Max}A$  et on regarde les localisés  $A_m$  et  $B_m$  obtenus en inversant les éléments de la partie multiplicative  $S = A - m$ . Alors,  $B_m$  est intègre, contient  $A_m$  et est encore entier sur  $A_m$ . (Il suffit d'écrire une équation pour le numérateur.) On a donc, d'après 4.6, un idéal maximal  $n'$  de  $B_m$  au-dessus de  $mA_m$  (i.e. qui vérifie  $n' \cap A_m = mA_m$ ). Soit  $n = n' \cap B$ , c'est un idéal premier de  $B$  et on a  $n \cap A = n' \cap A_m \cap A = m$ . Mais alors  $n$  est maximal par 4.4 et on a fini.

Pour d'autres résultats sur les morphismes finis, cf. Problème III, Partiel 1991 et chapitre IX.

Pour des applications des résultats de ce chapitre, voir les problèmes d'examen de juin 1993 et février 1994.

## Exercices

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 1. Intersections en affine

Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles algébriques de  $k^n$ , irréductibles, de dimensions respectives  $r$  et  $s$ . On se propose de montrer que toute composante irréductible de  $X \cap Y$  est de dimension  $\geq r + s - n$ .

a) Montrer que le résultat est vrai si  $X$  est une hypersurface de  $k^n$ .

b) Soit  $\Delta$  la diagonale de  $k^n \times k^n$  (cf. Problème I, 4). Montrer que la variété  $X \cap Y$  est isomorphe à  $(X \times Y) \cap \Delta$ . Montrer que  $X \times Y$  est de dimension  $r + s$  (on utilisera le théorème sur la dimension des fibres).

c) Utiliser b) et les équations explicites de  $\Delta$  pour ramener le problème initial au cas d'une hypersurface. Conclure.

## 2. Intersections en projectif

Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles algébriques de  $\mathbf{P}^n$ , irréductibles, de dimensions respectives  $r$  et  $s$ .

a) Montrer que toute composante irréductible de  $X \cap Y$  est de dimension  $\geq r + s - n$  (utiliser les cônes affines de  $X$  et  $Y$  pour se ramener à 1).

b) Montrer que si, de plus, on a  $r + s - n \geq 0$ , l'ensemble  $X \cap Y$  est non vide.

## 3. Matrices de rang au plus $r$

Soient  $p, q$  des entiers  $> 0$  et  $r$  un entier avec  $0 \leq r \leq \inf(p, q)$ . On désigne par  $\mathbf{M}_{p,q}$  l'ensemble des matrices  $p \times q$  à coefficients dans  $k$ . On munit cet ensemble de sa structure naturelle d'espace affine de dimension  $pq$ . On pose :

$$C_r = \{A \in \mathbf{M}_{p,q} \mid \text{rang}(A) \leq r\} \text{ et } C'_r = \{A \in \mathbf{M}_{p,q} \mid \text{rang}(A) = r\}.$$

a) Montrer que  $C_r$  est un fermé de  $\mathbf{M}_{p,q}$  et que  $C'_r$  est un ouvert de  $C_r$ .

b) On pose :

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,q}$$

où  $I_r$  est la matrice identité d'ordre  $r$ . Montrer que l'application  $\varphi : \mathbf{M}_{p,p} \times \mathbf{M}_{q,q} \rightarrow C_r$  définie par  $\varphi(P, Q) = PJQ$  est un morphisme de variétés, surjectif. En déduire que  $C_r$  est irréductible.

c) On considère la restriction  $\varphi'$  de  $\varphi$  à  $GL(p, k) \times GL(q, k)$ . Montrer que l'image de  $\varphi'$  est égale à  $C'_r$ . Montrer que toutes les fibres de  $\varphi'$  sont isomorphes. Calculer la dimension de  $\varphi'^{-1}(J)$ .

d) Déduire de b) et c) la dimension de  $C_r$  et la codimension de  $C_r$  dans  $\mathbf{M}_{p,q}$ .

#### 4. Dimension du groupe orthogonal

On note  $O(n, k)$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $k$  qui vérifient  ${}^tAA = I_n$ .

a) Montrer que  $O(n, k)$  est un sous-groupe de  $GL(n, k)$  et que c'est une variété affine. Montrer que l'on a  $\dim O(n, k) \geq n(n-1)/2$ .

b) Soient  $S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid \sum_1^n x_i^2 = 1\}$  et  $e = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e \in S$ . Montrer que l'application  $\varphi : O(n, k) \rightarrow S$ , définie par  $\varphi(A) = Ae$  est un morphisme surjectif. Déterminer les fibres de  $\varphi$  et en déduire, par récurrence sur  $n$ , la dimension de  $O(n, k)$ .<sup>4</sup>

#### 5. Dimension du commutarium

On se propose de calculer la dimension de la variété affine :

$$C = \{(A, B) \in M_n(k) \times M_n(k) \mid AB = BA\}.$$

On rappelle les résultats suivants sur les matrices (on suppose connue la réduction de Jordan).

1) Si  $A \in M_n(k)$ , le commutant  $C(A) = \{B \in M_n(k) \mid AB = BA\}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\geq n$ .

2) On a  $\dim C(A) = n$  si et seulement si la réduite de Jordan est complète, i.e. si pour chaque valeur propre  $\lambda$  le bloc correspondant est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On dit alors que  $A$  est une matrice générique.

a) Montrer que les matrices génériques forment un ouvert  $U$  de  $M_n(k)$ .

b) Soit  $A$  une matrice quelconque. Montrer que  $C(A)$  contient une matrice générique (on se ramènera au cas où  $A$  est sous forme de Jordan).

c) Soient  $p_1$  et  $p_2$  les projections de  $C$  sur  $M_n(k)$ . Montrer que  $\Omega = p_1^{-1}(U) \cup p_2^{-1}(U)$  est un ouvert de  $C$  de dimension  $n^2 + n$ .

<sup>4</sup>On peut montrer, en utilisant le problème V, 6, que toutes les composantes irréductibles de  $O(n, k)$  ont même dimension. On peut montrer aussi que ces composantes sont  $O^+(n, k) = \{A \in O(n, k) \mid \det(A) = 1\}$  et  $O^-(n, k)$  (qui correspond à  $\det(A) = -1$ ).

- d) Montrer que  $\Omega$  est dense dans  $C$  (si  $(A, B) \in C$  on "l'approchera", grâce à b), par des couples  $(A, B + \lambda B')$  avec  $\lambda \in k$  et  $B'$  générique).  
 e) Calculer la dimension de  $C$ .

## 6. Dimension des grassmanniennes

Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $G_{n,p}$  l'ensemble des sous-espaces de dimension  $p$  de  $E$ . On admettra que  $G_{n,p}$  est une variété algébrique projective (appelée grassmannienne).

Montrer que l'application  $\varphi$  qui à un  $p$ -uplet de vecteurs indépendants de  $E$  associe le sous-espace qu'ils engendrent induit une surjection d'un ouvert de  $E^p$  sur  $G_{n,p}$ . Déterminer les fibres de  $\varphi$  et calculer  $\dim G_{n,p}$  (on admettra que  $\varphi$  est un morphisme).

(Voir aussi Examen juin 1993.)

## 7. Un théorème d'irréductibilité

On se propose de montrer le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés projectives. On suppose : 1)  $Y$  irréductible, 2) toutes les fibres  $\varphi^{-1}(y)$ , pour  $y \in Y$ , irréductibles et de dimension constante  $n$ . Alors  $X$  est irréductible.*

1) Montrer que  $\varphi$  est surjectif et fermé (cf. Problème II). Montrer qu'on a  $\dim X = n + \dim Y$ .

2) Soit  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  la décomposition en composantes irréductibles de  $X$ . Montrer qu'il existe une composante  $X_i$  telle que  $\varphi(X_i) = Y$ .

On suppose dans ce qui suit que les composantes  $X_i$  telles que  $\varphi(X_i) = Y$  sont celles d'indices  $i = 1, \dots, s$ ,  $1 \leq s \leq r$ . On note  $\varphi_i$  la restriction de  $\varphi$  à  $X_i$ .

3) Montrer qu'il existe  $i \leq s$  tel que  $\dim X_i = \dim X$ . Montrer que, pour un tel  $i$ , toutes les fibres de  $\varphi_i$  sont de dimension  $\geq n$ , puis que l'on a  $X = X_i$  (comparer les fibres de  $\varphi$  et  $\varphi_i$ ). Conclure.

On notera que la propriété ne subsiste pas sans l'hypothèse que les variétés sont projectives : on peut avoir un morphisme  $p : X \rightarrow Y$  surjectif, avec  $X, Y$  affines,  $Y$  irréductible et toutes les fibres de  $p$  irréductibles et de même dimension sans que  $X$  soit irréductible, ni même équidimensionnel. Il suffit de prendre pour  $X$  la réunion de l'origine de  $k^2$  et de l'hyperbole  $xy = 1$  et pour  $p$  la projection sur l'axe des abscisses.

# Chapitre V

## Espaces tangents, points singuliers

Dans tout ce chapitre on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 0. Introduction

Commençons par un peu de géométrie différentielle. Soit  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  une hypersurface  $S \subset \mathbf{R}^n$ . On suppose  $f$  de classe  $C^\infty$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \in S$ . Qu'est-ce que l'espace tangent à  $S$  en  $a$  ?

Pour le comprendre, développons  $f$  en un point  $x = a + h$ , voisin de  $a$ , par la formule de Taylor :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_n) + \dots$$

(car  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ ). L'idée fondamentale est qu'au voisinage de  $a$ , comme les  $h_i = x_i - a_i$  sont petits, les  $h_i h_j$  sont encore plus petits, de sorte que  $S$  est proche de l'hyperplan "tangent" :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0$$

que l'on obtient donc en écrivant que  $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) \in S$ , mais en négligeant les termes d'ordre  $\geq 2$ .

En géométrie algébrique on n'a pas en général cette notion de petitesse. Pour la remplacer, on va parler de déformation du premier ordre

(l'analogie de  $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n)$ ) en considérant des déformations du type  $(a_1 + b_1\epsilon, \dots, a_n + b_n\epsilon)$  avec  $a_i, b_i \in k$ , mais avec  $\epsilon$  "infiniment petit d'ordre 1", ce qui signifie ici qu'on a  $\epsilon \neq 0$ , mais aussi  $\epsilon^2 = 0$ .

Autrement dit, pour chercher l'espace tangent à une variété algébrique on devra résoudre les équations qui la définissent non plus dans le corps  $k$ , mais dans l'anneau des nombres duaux :

$$k[\epsilon] = k[X]/(X^2) = \{a + b\epsilon \mid a, b \in k; \epsilon^2 = 0\}.$$

Dans le cas des hypersurfaces on retrouve bien l'hyperplan tangent ordinaire mais, en fait, cette méthode est surtout utile lorsque les variétés ont des écritures plus globales. Voici deux exemples de ce type :

### Exemples 0.1

1) On peut calculer ainsi l'espace tangent au point  $A$  à la variété algébrique de matrices  $O(n, \mathbf{R})$  définie par l'équation  ${}^tAA = I$ . Une déformation de  $A$  sera de la forme  $A + \epsilon B$ ; dire qu'elle est dans  $O(n, \mathbf{R})$  signifie qu'on a  ${}^t(A + \epsilon B)(A + \epsilon B) = I$ , d'où en développant :  ${}^tAA + \epsilon({}^tBA + {}^tAB) + \epsilon^2({}^tBB) = I$  et en tenant compte de  $\epsilon^2 = 0$  et de  ${}^tAA = I$ , il reste  ${}^tBA + {}^tAB = 0$  qui donne l'espace tangent cherché. On notera que dans le cas  $A = I$  on retrouve  ${}^tB + B = 0$  : l'espace tangent à l'origine est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.

2) De la même manière on voit facilement que l'espace tangent au groupe  $SL(n, k)$  à l'origine est formé des matrices de trace nulle.

## 1. Espaces tangents

### a. Définition et exemples

Comme il s'agit d'étude locale, on peut essentiellement se limiter aux variétés algébriques affines (cf. 1.11).

Soit donc  $V$  une variété algébrique affine et  $x \in V$ . On a vu au chapitre I que la donnée d'un point revenait à celle d'un idéal maximal de  $\Gamma(V)$  :  $m_x = \{f \in \Gamma(V) \mid f(x) = 0\}$ , ou encore d'un homomorphisme d'algèbres (ou caractère)  $\chi_x : \Gamma(V) \rightarrow k$ , donné par  $f \mapsto f(x)$ , le lien entre les deux étant clair :  $m_x = \text{Ker } \chi_x$ .

Un autre manière de voir le point  $x$  de  $V$  est d'introduire le "point étalon" : il s'agit de la variété affine  $P$ , réduite à un point  $P$ , et avec  $\Gamma(P, \mathcal{O}_P) = k$ . On la notera aussi  $\text{Spec } k$ . La donnée du caractère  $\chi_x$  :

$\Gamma(V) \rightarrow k = \Gamma(P)$  revient donc à la donnée d'un morphisme, qu'on notera simplement  $x : P \rightarrow V$  : on envoie le point étalon dans  $V$ .

Une déformation de  $V$  c'est la même chose, mais en remplaçant le point étalon  $P$  par le point épaissi<sup>1</sup>  $P_\epsilon$  (qu'on note aussi  $\text{Spec } k[\epsilon]$ ). Ce point épaissi n'est pas une variété (c'est notre premier schéma!), il s'agit de l'espace annelé formé là encore d'un unique point, mais avec cette fois  $\Gamma(P_\epsilon) = k[\epsilon]$  : on a des fonctions non constantes, dont le nilpotent  $\epsilon$ , et l'anneau n'est pas réduit, contrairement à la situation des variétés. On a un morphisme évident  $i : P \rightarrow P_\epsilon$  qui correspond sur les anneaux à la projection  $p : k[\epsilon] \rightarrow k$  qui envoie  $\epsilon$  sur 0.

**Définition 1.1.** Soit  $V$  une variété algébrique affine et  $x \in V$ . Une déformation<sup>2</sup> de  $V$  en  $x$  est un morphisme d'espaces annelés  $t : P_\epsilon \rightarrow V$  (au sens de III, 1.9. b) tel que l'on ait  $ti = x$ . (Autrement dit, ensemblistement,  $P_\epsilon$  s'envoie sur  $x$ .) On note  $\text{Def}(V, x)$  l'ensemble des déformations de  $V$  en  $x$ .

Il revient au même de se donner un homomorphisme de  $k$ -algèbres  $t^* : \Gamma(V) \rightarrow k[\epsilon]$  avec  $pt^* = \chi_x$ . Un tel homomorphisme sera appelé déformation de  $\Gamma(V)$  en  $x$ . Leur ensemble sera noté  $\text{Def}(\Gamma(V), x)$ .

Considérons une telle déformation de  $\Gamma(V)$ . Vu la condition  $pt^* = \chi_x$  elle s'écrit  $t^*(f) = f(x) + \epsilon v_t(f)$  avec  $v_t(f) \in k$ . La déformation  $t^*$  définit donc une application  $v_t : \Gamma(V) \rightarrow k$  qui lui est liée par la formule  $t^* = \chi_x + \epsilon v_t$ . Le fait que  $t^*$  soit un homomorphisme d'algèbres se traduit pour  $v_t$  par le fait que  $v_t$  est linéaire et, pour la multiplication, en tenant compte de  $\epsilon^2 = 0$ , par la formule :

$$v_t(fg) = f(x)v_t(g) + g(x)v_t(f).$$

On introduit alors la définition suivante :

**Définition 1.2.** Soit  $A$  une  $k$ -algèbre et soit  $M$  un  $A$ -module. Une application  $D : A \rightarrow M$  est appelée une dérivation si elle vérifie :

- 1)  $D$  est  $k$ -linéaire,
- 2) pour tous  $a, b \in A$  on a  $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ .

L'espace des dérivations de  $A$  dans  $M$  est noté  $\text{Der}_k(A, M)$ . C'est un  $k$ -espace vectoriel. On notera que si  $\lambda \in k$  on a  $D(\lambda) = 0$  (calculer

<sup>1</sup>Il s'agit ici du point épaissi dans une seule direction. On pourrait aussi avoir des épaississements multidimensionnels en remplaçant par exemple  $k[\epsilon]$  par  $k[X, Y]/(X^2, Y^2)$ .

<sup>2</sup>En fait, il serait plus correct de parler de déformation infinitésimale.

$D(1^2)$ ). Un exemple évident de dérivation est fourni par l'application  $F \mapsto \partial F / \partial X_j$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$  dans lui-même.

**Exemple et définition 1.3.** Soit  $V$  une variété algébrique affine et soit  $x \in V$ . Prenons  $A = \Gamma(V)$  et  $M = k$ , considéré comme  $\Gamma(V)$ -module au moyen de  $\chi_x : si f \in \Gamma(V)$  et  $\lambda \in k$ , on pose  $f \cdot \lambda = f(x)\lambda$ . Une dérivation de  $\Gamma(V)$  dans  $k$  est donc une application  $k$ -linéaire  $v : \Gamma(V) \rightarrow k$  qui vérifie, pour  $f, g \in \Gamma(V) : v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$ . On dit que  $v$  est un vecteur tangent à  $V$  en  $x$ ; l'ensemble des vecteurs tangents à  $V$  en  $x$  (qui n'est autre que  $\text{Der}_k(\Gamma(V), k)$ ) est aussi noté  $T_x(V)$  et appelé espace tangent à  $V$  en  $x$ . C'est un  $k$ -espace vectoriel.

On voit que l'application  $v_t$  associée à une déformation  $t$  est un vecteur tangent et on peut résumer la situation dans la proposition suivante :

**Proposition 1.4.** Soit  $V$  une variété algébrique affine et soit  $x \in V$ . On a des bijections canoniques :

$$\text{Def}(V, x) \simeq \text{Def}(\Gamma(V), x) \simeq T_x(V) = \text{Der}_k(\Gamma(V), k)$$

données par  $t \mapsto t^* \mapsto v_t$ , avec la formule  $t^* = \chi_x + \epsilon v_t$ .

**Remarque 1.5.** Le vecteur tangent nul  $v_t = 0$  correspond à la déformation triviale  $t = xi$  qui consiste d'abord à envoyer le point épaissi  $P_\epsilon$  dans le point ordinaire  $P$ , puis à envoyer ce dernier dans  $V$  par  $x$ .

**Définition 1.6.** Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme de variétés algébriques affines et soit  $x \in V$ . On pose  $\varphi(x) = y$ . L'application  $\varphi$  induit une flèche :  $\text{Def}(\varphi, x) : \text{Def}(V, x) \rightarrow \text{Def}(W, y)$  définie par  $\text{Def}(\varphi, x)(t) = \varphi t$ . Cette application induit une application linéaire  $T_x(\varphi) : T_x(V) \rightarrow T_y(W)$  donnée par la formule  $T_x(\varphi)(v_t) = v_{\varphi t} = v_t \varphi^*$ . On l'appelle application linéaire tangente à  $\varphi$  en  $x$  ou différentielle de  $\varphi$  en  $x$ .

**Remarque 1.7.** La correspondance ci-dessus est fonctorielle (c'est-à-dire vérifie  $T_x(\psi\varphi) = T_y(\psi)T_x(\varphi)$  et transforme l'identité en l'identité). On pourra calculer à titre d'exercice quelques différentielles classiques, par exemple celle du produit de matrices ou du passage à l'inverse.

## Exemples 1.8

1) Soit  $V = k^n$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$ . L'espace tangent à  $V$  en  $a$  est formé des déformations  $t^* : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[\epsilon]$  qui vérifient  $\chi_a = pt^*$ . Une telle déformation est déterminée par les images des indéterminées  $t^*(X_i) = a_i + \epsilon b_i$ , c'est-à-dire par un vecteur  $(b_1, \dots, b_n)$ . L'espace tangent est donc l'espace vectoriel  $k^n$ .

2) Soit  $V$  une variété algébrique affine, plongée dans  $k^n$  et supposons  $I(V) = (F_1, \dots, F_r)$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$  et cherchons l'espace tangent à  $V$  en  $a$ .

On considère pour cela une déformation

$$t^* : k[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_r) \rightarrow k[\epsilon],$$

avec  $\chi_a = pt^*$ , donnée par les images des indéterminées  $t^*(X_i) = a_i + \epsilon b_i$ , avec les relations  $F_j(a + \epsilon b) = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, r$ , c'est-à-dire, avec la formule de Taylor :

$$\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial F_j}{\partial X_i}(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Le vecteur tangent  $v_t$  correspondant est le vecteur  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Si  $d_a(F_1, \dots, F_r)$  est la matrice jacobienne des  $F_j$  au point  $a$ , qui est une application linéaire de  $k^n$  dans  $k^r$ , on a donc

$$T_a(V) = \text{Ker } d_a(F_1, \dots, F_r).$$

En particulier, on voit que  $T_a(V)$  est de dimension finie.

## b. Lien avec l'anneau local

**Proposition 1.9.** Soient  $V$  une variété algébrique affine,  $x \in V$  et  $m_x$  l'idéal maximal de  $\Gamma(V)$  correspondant à  $x$ . On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :  $T_x(V) \simeq (m_x/m_x^2)^*$  (l'étoile désigne le dual au sens des espaces vectoriels).

*Démonstration.* Soit  $v : \Gamma(V) \rightarrow k$  un vecteur tangent à  $V$  en  $x$ , i.e. une dérivation de  $\Gamma(V)$  dans  $k$ . Désignons encore par  $v$  sa restriction à  $m_x$ . Cette application linéaire est nulle sur  $m_x^2$  car on a, pour  $f, g \in m_x$ ,  $v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$  et, comme  $f, g$  sont dans  $m_x$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont nuls. Elle se factorise donc en  $\bar{v} : m_x/m_x^2 \rightarrow k$  élément du dual de  $m_x/m_x^2$ .

Réciproquement, soit  $\theta \in (m_x/m_x^2)^*$ , on retrouve  $v$  par la formule :  $v(f) = \theta(\overline{f - f(x)})$  (on note  $\bar{a}$  l'image dans  $m_x/m_x^2$  de  $a \in m_x$ ).

**Corollaire 1.10.** Soient  $V$  une variété algébrique affine,  $x \in V$ ,  $\mathcal{O}_{V,x}$  l'anneau local de  $V$  en  $x$  et  $m_{V,x}$  son idéal maximal. On a un isomorphisme :  $T_x(V) \simeq (m_{V,x}/m_{V,x}^2)^*$ . En particulier, l'espace tangent ne dépend que de l'anneau local de  $V$  en  $x$ .

*Démonstration.* Posons  $A = \Gamma(V)$  et  $m = m_x$ , de sorte que l'on a  $\mathcal{O}_{V,x} = A_m$  et  $m_{V,x} = mA_m$ . L'homomorphisme naturel  $m \rightarrow mA_m$  donné par  $x \mapsto x/1$  se factorise en  $\theta : m/m^2 \rightarrow mA_m/(mA_m)^2$  et il s'agit de voir que  $\theta$  est un isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels.

a)  $\theta$  est injectif : soit  $x \in m$  tel que  $x \in (mA_m)^2$ . Cela signifie qu'il existe  $s \notin m$  tel que  $sx \in m^2$ . Mais, si  $s \notin m$ , comme  $A/m$  est un corps, il existe  $t \in A$  avec  $st = 1 - a$ ,  $a \in m$ . On en déduit  $x = stx + ax \in m^2$ .

b)  $\theta$  est surjectif : soit  $x/s \in mA_m$ , avec  $x \in m$ ,  $s \notin m$ . Avec les notations de a) on a  $x/s = \theta(tx)$ , car  $x/s - tx = txs/(1 - a) \in (mA_m)^2$ .

*Remarque 1.11.* On peut maintenant définir l'espace tangent en un point d'une variété algébrique quelconque  $X$  comme l'espace tangent en ce point à un ouvert affine. Vu 1.10 cet espace ne dépend pas de l'ouvert en question. On peut aussi utiliser directement la formule de 1.10 ou encore la définition avec les déformations de  $X$  au sens de 1.1.

## 2. Points singuliers

**Définition 2.1.** Soit  $V$  une variété algébrique irréductible et soit  $x \in V$ . On dit que  $x$  est un point régulier (ou lisse) de  $V$  (ou encore que  $V$  est non singulière en  $x$ ) si on a  $\dim V = \dim_k T_x(V)$ . On dit que  $V$  est non singulière (ou lisse ou régulière) si elle l'est en tout point.

### Remarques 2.2

1) Si  $V$  n'est pas irréductible il faut demander  $\dim_x V = \dim T_x(V)$  où  $\dim_x V$  est le sup des dimensions des composantes irréductibles passant par  $x$ . (En fait, on peut montrer, cf. 3.6, que si  $x$  est sur plusieurs composantes il est singulier.)

2) Dans tous les cas on a  $\dim T_x(V) \geq \dim_x(V)$  (cf. Problème V).

**Théorème 2.3** (critère jacobien). Soit  $V \subset k^n$  une variété algébrique affine irréductible, de dimension  $d$ . On suppose que  $I(V) = (F_1, \dots, F_r)$ . Alors on a :

$V$  non singulière en  $x \iff \text{rang } d_x(F_1, \dots, F_r) = n - d$  (cf. 1.8).

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt de 1.8.

*Remarque 2.4.* Si on suppose seulement  $V = V(F_1, \dots, F_r)$ , et si

$$\text{rang } d_x(F_1, \dots, F_r) = n - d,$$

$V$  est non singulière en  $x$ . En effet  $I(V)$  est engendré par les  $F_i$  et éventuellement d'autres polynômes, ce qui ne peut que faire diminuer le noyau de la matrice jacobienne et on conclut avec 2.2.2. En revanche, si le rang est  $< n - d$  on ne peut pas conclure, cf. l'exemple de  $V(X^2)$  dans  $k^2$  (la variété  $V(X^2) = V(X)$  est non singulière, mais le schéma  $V(X^2)$ , cf. Appendice, est singulier).

### Exemples 2.5

a) *Les courbes planes.* Si  $F(X, Y)$  est un polynôme sans facteur multiple et si  $F(a, b) = 0$ , le point  $(a, b)$  est singulier sur  $V(F)$  si et seulement si on a  $\partial F/\partial X(a, b) = \partial F/\partial Y(a, b) = 0$ . (En effet, l'hypothèse implique  $I(V(F)) = (F)$ , cf. I, 4.11.) Ainsi  $V(Y^2 - X^3)$  et  $V(X^3 + X^2 - Y^2)$  sont singulières en  $(0, 0)$ . (Dans le cas du point  $(0, 0)$ , on notera que  $V(F)$  est singulière si et seulement si  $F$  n'a pas de termes de degré  $< 2$ .) En revanche,  $V(Y^2 - X(X - 1)(X - \lambda))$  est lisse pour  $\lambda \neq 0, 1$  (en caractéristique différente de 2.) On note que si  $F$  n'est pas irréductible,  $F = F_1 \cdots F_r$ , les points qui sont à l'intersection de  $F_i$  et  $F_j$  sont singuliers.

b) *Les hypersurfaces.* Le résultat est identique pour les hypersurfaces affines :  $a = (a_1, \dots, a_n)$  est un point singulier de  $V(F)$  si toutes les dérivées partielles de  $F$  (et  $F$  elle-même!) sont nulles en  $a$ .

**Proposition 2.6** (le cas projectif). *Soit  $V \subset \mathbf{P}^n$  une variété algébrique projective irréductible et soit  $x = (x_0, \dots, x_n) \in V$ . On suppose qu'on a  $I(V) = (F_1, \dots, F_r)$  avec les  $F_i$  homogènes. Soit  $A$  la matrice de terme général  $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x)$ , pour  $i = 1, \dots, r$  et  $j = 0, \dots, n$ . Alors on a :  $V$  non singulière en  $x \iff \text{rang}(A) = n - \dim V$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $x_0 \neq 0$  et même  $x_0 = 1$  et  $x$  est un point lisse de  $V$  si et seulement si  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  est un point lisse de l'ouvert affine  $V_\flat = V \cap D^+(X_0)$  de  $V$ . Comme on a  $I(V_\flat) = (F_{1\flat}, \dots, F_{r\flat})$  (cf. Exercice III, B.1),  $\xi$  est lisse dans  $V_\flat$  si et seulement si

la matrice  $B$  des  $(\partial F_i/\partial X_j)(\xi)$ , pour  $j = 1, \dots, n$  et  $i = 1, \dots, r$  est de rang  $n - \dim V$ . Or, si  $F$  est un polynôme homogène on a, pour  $j \geq 1$ ,  $(\partial F/\partial X_j)(x) = (\partial F_i/\partial X_j)(\xi)$ , de sorte que la matrice  $B$  est obtenue, à partir de la matrice  $A$  de l'énoncé, en supprimant la première colonne, formée des  $(\partial F_i/\partial X_0)(x)$ . On a donc  $\text{rang}(B) \leq \text{rang}(A)$ .

Mais, si  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  est un polynôme homogène de degré  $d$ , on a la formule d'Euler :

$$dF = \sum_{j=0}^n X_j \frac{\partial F}{\partial X_j}$$

qui donne, pour  $F_i$  (de degré  $d_i$ ), au point  $x$  :

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_0}(x) = d_i F_i(x) - \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x),$$

ce qui, comme  $F_i(x) = 0$ , montre que la première colonne de  $A$  est combinaison linéaire des autres, de sorte que l'on a  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ .

### Exemples 2.7

1) La courbe elliptique projective plane  $V(Y^2T - X(X - T)(X - \lambda T))$  est lisse pour  $\lambda \neq 0, 1$ .

2) La cubique gauche  $C$  de  $\mathbf{P}^3$  qui vérifie :

$$I(C) = V(XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$$

(cf. Exercice II, 4) est lisse. En effet la matrice jacobienne :

$$d_x = \begin{pmatrix} T & -Z & -Y & X \\ -Z & 2Y & -X & 0 \\ 0 & -T & 2Z & -Y \end{pmatrix}$$

est de rang 2 en tout point (il y a  $X^2$  et  $T^2$  parmi les mineurs et sur  $C$ ,  $x$  ou  $t$  est non nul). On vérifiera que les 3-mineurs sont dans  $I(C)$ .

3) Si la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $d$ , la courbe de Fermat  $V(X^d + Y^d - T^d)$  est une courbe lisse de  $\mathbf{P}^2$ . Exercice : trouver une courbe plane lisse de degré  $d$  en caractéristique  $p$  avec  $p$  divisant  $d$ . (Réponse :  $X^d + Y^{d-1}T + XT^{d-1}$ .)

*Remarque 2.8.* Comme dans le cas affine, si on suppose seulement  $V = V(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbf{P}^n$  avec des  $F_i$  homogènes et si la matrice des dérivées partielles au point  $x$  est de rang  $n - \dim V$ , le point  $x$  est lisse sur  $V$ .

### 3. Anneaux locaux réguliers

Rappelons d'abord un résultat d'algèbre.

**Proposition-définition 3.1.** Soient  $A$  un anneau local noethérien,  $m$  son idéal maximal,  $k = A/m$ . Le quotient  $m/m^2 \simeq m \otimes_A k$  est un  $k$ -espace vectoriel et on a  $\dim_k m/m^2 \geq \dim_K A$  (dimension de Krull de  $A$ , cf. IV, 1.5).

On dit que  $A$  est régulier si on a  $\dim_k m/m^2 = \dim_K A$ .

*Démonstration.* Le fait que  $m/m^2$  est un  $k$ -espace vectoriel est clair : soient  $\lambda \in A$  et  $x \in m$ , on note  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{x}$  leurs images respectivement modulo  $m$  et  $m^2$ . On pose alors  $\lambda\bar{x} = \overline{\lambda x}$  et on vérifie que cette définition ne dépend pas des représentants. On peut aussi utiliser la description avec le produit tensoriel.

Dans le cas où  $A$  est l'anneau local en un point d'une variété algébrique, l'inégalité cherchée vient de 2.2.2. Pour une preuve de l'inégalité dans le cas général, cf. [Ma].

**Proposition 3.2.** Soit  $V$  une variété algébrique et soit  $x \in V$ . On a :  
 $V$  lisse en  $x \iff \mathcal{O}_{V,x}$  régulier.

*Démonstration.* On sait que  $T_x(V) \simeq (m_{V,x}/m_{V,x}^2)^*$  (cf. 1.10). D'autre part on a  $\dim_x V = \dim_K \mathcal{O}_{V,x}$  pour tout  $x$  (cf. IV, 2.9), d'où la conclusion (cf. 2.2.1).

La proposition suivante donne une interprétation commode de la dimension de  $m/m^2$  :

**Proposition 3.3.** Soient  $A$  un anneau local noethérien,  $m$  son idéal maximal,  $k = A/m$ . La dimension de  $m/m^2$  comme  $k$ -espace vectoriel est égale au nombre minimum de générateurs de  $m$ .

*Démonstration.* (C'est un cas particulier du lemme de Nakayama, cf. Mémento 2.)

1) Supposons  $m = (x_1, \dots, x_d)$ . Alors les  $\bar{x}_i$  engendrent  $m/m^2$  sur  $k$ . En effet, si  $x \in m$  on a  $x = \sum_{i=1}^d a_i x_i$  avec  $a_i \in A$  d'où, en réduisant modulo  $m^2$  :  $\bar{x} = \sum_{i=1}^d \bar{a}_i x_i = \sum_{i=1}^d \bar{a}_i \bar{x}_i$  par définition de la structure d'espace vectoriel. Il en résulte qu'on a  $\dim_k m/m^2 \leq d$ .

2) Réciproquement soit  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$  une base de  $m/m^2$  sur  $k$ . Alors, on a  $m = (x_1, \dots, x_d)$ . On peut en effet compléter les  $x_i$  pour avoir un système générateur  $x_1, \dots, x_d, \dots, x_n$  de  $m$  et on conclut par récurrence grâce au lemme suivant :

**Lemme 3.4.** *Si  $m = (x_1, \dots, x_n)$  et si  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$  engendrent  $m/m^2$  sur  $k$ , on a  $m = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .*

*Démonstration (de 3.4).* On écrit  $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}_i \bar{x}_i$  avec  $a_i \in A$ . On en déduit  $x_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \in m^2$ . Mais, comme  $m^2$  est engendré par les produits  $x_i x_j$  on a  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j$ . On regroupe alors les termes en  $x_n : x_n(1 - \sum_{i \leq n} b_{in} x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + \sum_{i < j < n} b_{ij} x_i x_j$ . Mais, comme les  $x_i$  sont dans  $m$  le coefficient de  $x_n$  n'est pas dans  $m$ , donc est inversible dans  $A$  et on a  $x_n \in (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

**Corollaire 3.5.** *Soient  $A$  un anneau local noethérien,  $m$  son idéal maximal. Alors on a :*

*$A$  régulier  $\iff m$  engendré par  $\dim A$  éléments.*

*Remarque 3.6.* Un anneau local régulier est factoriel (cf. [Ma]), donc en particulier intègre (ce qui prouve, cf. 2.2.1, qu'un point situé à l'intersection de deux composantes irréductibles est nécessairement singulier).

## 4. Le cas des courbes

Dans ce chapitre on réservera le nom de courbes aux variétés *équidimensionnelles* de dimension 1. Nous allons préciser la structure des anneaux locaux des courbes. On se reportera au problème IV pour les démonstrations.

**Proposition 4.1.** *Soit  $C$  une courbe et soit  $x \in C$ . On a l'équivalence :*  
 *$x$  est non singulier  $\iff \mathcal{O}_{C,x}$  est un anneau de valuation discrète (c'est-à-dire un anneau local et principal).*

*Démonstration.* La condition de non-singularité signifie ici que l'idéal maximal est principal, ce qui équivaut au fait que l'anneau local est un anneau de valuation discrète (cf. Problème IV).

Outre cette condition locale on a une caractérisation globale très simple des courbes affines lisses (*loc. cit.*) :

**Théorème 4.2.** *Soit  $C$  une courbe affine irréductible. Alors  $C$  est lisse si et seulement si  $\Gamma(C)$  est intégralement clos.*

**Exemple 4.3.** La courbe  $V(Y^2 - X^3)$  est singulière à l'origine. On vérifie que son anneau  $A = k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$  n'est pas intégralement clos : l'élément  $Y/X$  du corps des fractions de  $A$  n'est pas dans  $A$  mais est entier sur  $A$  car il vérifie  $(Y/X)^2 - X = 0$ .

Lorsque  $x$  est un point singulier de  $C$  on définit sa multiplicité  $\mu_x(C)$  (qui vaut bien entendu 1 pour un point régulier). Nous nous limiterons au cas des courbes planes (cf. 4.7.2 pour une généralisation).

Soit  $F \in k[X, Y]$  (on ne suppose pas, a priori,  $F$  sans facteur multiple) et  $P = (a, b) \in k^2$ . Quitte à faire une translation on peut supposer  $P = (0, 0)$ . On écrit alors  $F = F_0 + F_1 + \dots + F_d$  avec  $F_i$  homogène de degré  $i$ .

**Définition 4.4.** La multiplicité de  $F$  en  $P$ , que l'on note  $\mu_P(F)$ , est le plus petit entier  $i$  tel que  $F_i \neq 0$ . Si  $F$  est sans facteur multiple, et si  $C = V(F)$ , c'est aussi la multiplicité de  $C$  en  $P$ .

**Remarque 4.5.** Dire que  $\mu_P(F) = 0$  c'est dire que  $P \notin V(F)$ ; dire que  $\mu_P(F) = 1$  c'est dire que  $P$  est un point lisse de  $V(F)$  car si  $F_1 = \alpha X + \beta Y$ , on a  $\alpha = \frac{\partial F}{\partial X}(P)$  et  $\beta = \frac{\partial F}{\partial Y}(P)$ . Si  $F$  est sans facteur multiple, dire que  $\mu_P(F) \geq 2$  c'est dire que  $P$  est un point singulier de  $V(F)$ .

On notera que, si  $\mathcal{O}_P$  est l'anneau local de  $k^2$  en  $P$  et si  $m_P$  est son idéal maximal,  $\mu_P(F)$  est le plus grand entier  $r$  tel que  $F \in m_P^r$ . C'est aussi le plus petit entier  $r$  tel qu'il existe une dérivée partielle d'ordre  $r$  de  $F$  non nulle en  $P$ .

La définition de la multiplicité a le défaut de sembler dépendre du plongement de la courbe ou du choix des coordonnées. La proposition suivante montre qu'elle est définie intrinsèquement :

**Proposition 4.6.** Soit  $F \in k[X, Y]$ ,  $F = F_r + \dots + F_p$  sa décomposition en polynômes homogènes non nuls avec  $r \leq p$ . Soit  $P = (0, 0) \in k^2$ , de sorte qu'on a  $r = \mu_P(F)$ . Soient  $\mathcal{O}_P$  l'anneau local de  $k^2$  en  $P$ ,  $m = m_P$  son idéal maximal,  $A$  l'anneau quotient  $A = \mathcal{O}_P/(F)$  et  $\bar{m}$  son idéal maximal. Alors on a, pour  $n$  assez grand,  $\dim_k A/\bar{m}^n = rn + c$  où  $c$  est un entier constant.

*Démonstration.* On a  $A/\overline{m}^n \simeq \mathcal{O}_P/(F, m^n)$ . On a alors, pour  $n \geq r$ , la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P/m^{n-r} \xrightarrow{F} \mathcal{O}_P/m^n \rightarrow \mathcal{O}_P/(F, m^n) \rightarrow 0.$$

En effet, considérons la multiplication par  $F : \mathcal{O}_P \xrightarrow{F} \mathcal{O}_P$ . Si  $x \in m^{n-r}$ , comme  $F \in m^r$  on a  $Fx \in m^n$  et on a donc bien la factorisation annoncée. Le seul point à montrer est qu'elle est injective. Soit  $a \in \mathcal{O}_P$  et supposons  $aF \in m^n$ , il s'agit de montrer que  $a \in m^{n-r}$ . Pour cela on écrit  $a = a'/s$ , avec  $a', s \in k[X, Y]$  et  $s(P) \neq 0$ . On pose  $a' = a_l + \dots + a_q$  avec  $a_i$  homogène de degré  $i$ ,  $a_l \neq 0$  et  $l \leq q$ . Comme  $s$  n'est pas nul en  $P$ , le fait que  $Fa$  soit dans  $m^n$  signifie que la valuation en  $P$  du polynôme  $a'F$  est  $\geq n$ , or cette valuation est  $r + l$  (car  $a_l F_r \neq 0$ ). On a donc  $l \geq n - r$ , donc  $a \in m^{n-r}$ .

On déduit de cette suite exacte l'égalité :

$$\dim A/\overline{m}^n = \dim \mathcal{O}_P/m^n - \dim \mathcal{O}_P/m^{n-r}.$$

Mais, en désignant par  $x, y$  les images des indéterminées, on a une base évidente de  $\mathcal{O}_P/m^n$  :

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{n-1}, x^{n-2}y, \dots, y^{n-1}$$

de cardinal  $n(n+1)/2$ , d'où  $\dim A/\overline{m}^n = n(n+1)/2 - (n-r)(n-r+1)/2 = rn - r(r-1)/2$ .

#### Remarques 4.7

1) La proposition ci-dessus englobe le cas des courbes (i.e. le cas où  $F$  n'a pas de facteur multiple). Dans ce cas l'anneau  $A$  n'est autre que l'anneau local de  $C = V(F)$  en  $P$  et on constate que la multiplicité ne dépend que de cet anneau local. On a donné la proposition dans un cadre plus général afin de préserver la possibilité d'avoir des courbes avec des composantes multiples (cf. Ch. VI).

2) La notion de multiplicité se généralise comme suit : si  $A$  est un anneau local noethérien, de corps résiduel  $k = A/m$ , on montre que pour  $n$  grand la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $A/m^n$  est une fonction polynomiale de  $n$  (dite fonction de Hilbert-Samuel de  $A$ ), de degré  $d = \dim_K A$  et dont le coefficient dominant est de la forme  $\frac{\mu_A}{d!}$  où  $\mu_A$  est un entier appelé multiplicité de  $A$  (cf. [H] V, Exercice 3.4).

#### 4.8. Tangentes à une courbe plane en un point

On définit aussi, toujours dans le cas des courbes planes, les *tangentes* en un point éventuellement singulier. Comme ci-dessus, on se ramène par translation au cas où l'on a  $P = (0, 0)$  et  $F(P) = 0$ .

Si  $\mu_P(F) = 1$  la tangente est donnée par  $F_1 = 0$ , et n'est autre que l'espace tangent (cf. 1.8).

Si  $\mu_P(F) = r \geq 2$  l'espace tangent est  $k^2$  tout entier, mais, comme  $k$  est algébriquement clos, on peut décomposer le polynôme homogène  $F_r$  sous la forme de produit de facteurs de degré 1 :  $F_r = \prod_{i=1}^r (\alpha_i X + \beta_i Y)^{r_i}$ . Les droites  $T_i$  d'équations  $\alpha_i X + \beta_i Y = 0$  sont appelées les *tangentes* à  $F$  en  $P$ , et le nombre  $r_i$  est la *multiplicité* de  $T_i$  (on désigne aussi l'ensemble de ces droites sous le nom de cône tangent). Lorsque les  $r_i$  sont tous égaux à 1 on dit que le point multiple est *ordinaire*.

#### Exemples 4.9

Si  $F = Y^2 - X^3$ , l'origine est un point double avec tangente double. Ce n'est pas un point double ordinaire (il s'agit d'un rebroussement).

Si  $F = X^3 + X^2 - Y^2$ , l'origine est point double ordinaire avec pour tangentes  $Y = \pm X$ .

Si  $F = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$  (trifolium), l'origine est point triple ordinaire, avec les tangentes  $Y = 0$  et  $Y = \pm\sqrt{3}X$ .

Si  $F = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$  (quadrifolium), l'origine est point quadruple (non ordinaire) avec deux tangentes doubles  $X = 0$  et  $Y = 0$ .

## Exercices

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos. On se reportera aux exercices du chapitre II pour la définition des homographies. Dans le cas du plan projectif  $\mathbf{P}^2$  une homographie est simplement un changement de coordonnées linéaire :  ${}^t(X', Y', T') = A{}^t(X, Y, T)$  où  $A$  est une matrice inversible  $3 \times 3$ .

### 1. Trois remarques

a) Soit  $F \in k[X_0, \dots, X_n]$  un polynôme homogène de degré  $d$ . On suppose  $F$  *réductible*. Montrer que  $V(F)$  n'est pas lisse. (Si  $F = GH$ , regarder un point commun de  $V(G)$  et  $V(H)$ , il en existe d'après l'exercice IV, 2 b.)

b) Soit  $F \in k[X, Y, Z, T]$  homogène de degré 3. On suppose que  $V(F)$  comporte deux points singuliers  $a$  et  $b$  distincts. Montrer que la droite  $ab$  est contenue dans  $V(F)$ .

c) Soit  $F \in k[X, Y, T]$ , homogène de degré 3. On suppose que  $V(F)$  a trois points singuliers distincts. Montrer que  $V(F)$  est réunion de trois droites.

## 2. Quelques exemples

Déterminer les points singuliers des variétés suivantes et préciser si elles sont irréductibles :

a) Dans  $\mathbf{P}^2$  :

$$V(XY^4 + YT^4 + XT^4), \quad V(X^2Y^3 + X^2T^3 + Y^2T^3),$$

$$V(X^n + Y^n + T^n), \quad n > 0,$$

$$V((X^2 - YT)^2 + Y^3(Y - T)), \quad V(2X^4 + Y^4 - TY(3X^2 + 2Y^2) + Y^2T^2),$$

$$V(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2 - 2XYT(X + Y + T)).$$

On essaiera, si possible, de tracer la partie affine réelle (relative à  $T = 0$ ) de ces courbes.

b) Dans  $\mathbf{P}^3$  :

$$V(X^2 + Y^2 - Z^2), \quad V(XYT + X^3 + Y^3),$$

$$V(XY^2 - Z^2T), \quad V(XYZ + XYT + XZT + YZT),$$

$$V(XT - YZ, YT^2 - Z^3, ZX^2 - Y^3).$$

## 3. Coniques

Soit  $F \in k[X, Y, T]$  un polynôme homogène irréductible de degré 2 et soit  $C = V(F) \subset \mathbf{P}^2$  la "conique" définie par  $F$ .

a) Montrer que, quitte à faire une homographie, on peut supposer  $F = YT - X^2$ . (On prendra un point  $P \in C$ , non singulier, et on se ramènera par une homographie au cas où  $P = (0, 0, 1)$  et où la tangente à  $C$  en  $P$  est la droite  $Y = 0$ . On montrera alors que  $F$  est de la forme  $aX^2 + bY^2 + dYT + fXY$ . On fera ensuite une nouvelle homographie du type  $X' = X, T' = T, Y' = uX + vY + wT$  pour aboutir à la forme voulue. On peut aussi utiliser la réduction des formes quadratiques.)

b) Montrer qu'une conique irréductible est lisse.

#### 4. Cubiques cuspidales

Soit  $F \in k[X, Y, T]$  un polynôme homogène irréductible de degré 3 et soit  $C = V(F) \subset \mathbf{P}^2$  la “cubique” définie par  $F$ . On suppose que  $C$  a un point singulier  $P$  du type rebroussement (un cusp en anglais).

a) Montrer que l'on peut, par une homographie, se ramener au cas où  $P = (0, 0, 1)$  et où la tangente double est  $Y = 0$ .

b) Montrer qu'à une homographie près on a  $F = Y^2T - X^3$ . Déterminer les points singuliers de  $C$ .

#### 5. Cubiques nodales

Même exercice que le précédent dans le cas où  $C$  a un point double ordinaire (ou nœud). On se ramènera à la forme  $X^3 + Y^3 - XYT$ .

#### 6. Une quartique elliptique gauche

Soit  $C = V(X^2 - XZ - YT, YZ - XT - ZT) \subset \mathbf{P}^3$  et soit  $P$  le point  $(0, 0, 0, 1)$ .

a) On considère la projection  $\varphi$  de centre  $P$  sur le plan  $T = 0$  (c'est-à-dire l'application qui à  $Q = (x, y, z, t) \in \mathbf{P}^3$ ,  $Q \neq P$ , associe  $(x, y, z) \in \mathbf{P}^2$ ). Montrer que  $\varphi$  induit un isomorphisme de  $C - \{P\}$  sur la cubique plane  $\Gamma = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$  privée du point  $(1, 0, -1)$ . Montrer que  $\Gamma$  est lisse.

b) Montrer que  $C$  est une courbe irréductible et lisse. Montrer que le nombre de points d'intersection de  $C$  et d'un plan est  $\leq 4$  et que ce nombre est “en général” égal à 4 (on dit que  $C$  est de degré 4 ou une quartique).

#### 7. Produits

Etudier la lissité du point  $(x, y) \in X \times Y$  selon la nature de  $x$  et  $y$ .

#### 8. Sous-variétés linéaires

Soit  $V(F)$  une hypersurface de  $\mathbf{P}^n$ , de degré  $\geq 2$ . On suppose que  $V(F)$  contient une sous-variété linéaire  $L$  (c'est-à-dire un sous-espace projectif) de dimension  $r \geq n/2$ . Montrer que  $V(F)$  est singulière (on cherchera des points singuliers sur  $L$  après l'avoir écrit sous la forme  $X_{r+1} = 0, \dots, X_n = 0$ ).

## 9. Quadriques

On suppose que  $k$  n'est pas de caractéristique 2. On appelle quadrique de  $\mathbf{P}^n$  une variété de la forme  $Q = V(F)$  avec  $F$  homogène de degré 2 (i.e. une forme quadratique).

a) Montrer que, quitte à faire une homographie, on peut supposer  $F = X_0^2 + \cdots + X_r^2$  avec  $0 \leq r \leq n$ .

b) Montrer que  $Q$  est irréductible si et seulement si on a  $r \geq 2$ .

c) On suppose  $r \geq 2$ . Montrer que le lieu singulier de  $Q$  est une sous-variété linéaire de dimension  $n - r - 1$ . En particulier  $Q$  est lisse si et seulement si on a  $r = n$ .

# Chapitre VI

## Le théorème de Bézout

### 0. Introduction

Il s'agit d'expliquer que deux courbes planes de degrés  $s$  et  $t$  ont exactement  $st$  points d'intersection. On a vu dans l'introduction qu'il convenait pour cela de prendre quelques précautions :

- 1) supposer les courbes sans composantes communes,
- 2) supposer le corps de base  $k$  algébriquement clos,
- 3) travailler dans le plan projectif,
- 4) compter les intersections avec des multiplicités.

Il reste à traiter ce dernier point. Comme il s'agit d'une notion locale nous travaillerons d'abord en affine.

### 1. Multiplicités d'intersection

#### a. Schémas finis

Commençons par analyser un exemple très simple.

On coupe la parabole  $C = V(Y - X^2)$  par la droite  $D_\lambda = V(Y - \lambda)$ . La variété intersection est  $C \cap D_\lambda = V(Y - X^2, Y - \lambda)$ . Considérons l'idéal  $I_\lambda = (Y - X^2, Y - \lambda) = (Y - \lambda, X^2 - \lambda)$  et calculons l'anneau quotient  $A_\lambda = k[X, Y]/I_\lambda$ . En envoyant  $Y$  sur  $\lambda$  on voit déjà qu'il est isomorphe à  $k[X]/(X^2 - \lambda)$  et on distingue deux cas :

a) Si  $\lambda \neq 0$ , posons  $\lambda = \alpha^2$ . Alors  $A_\lambda$  est isomorphe à l'anneau produit  $k \times k$  par l'homomorphisme qui à  $X$  associe  $(\alpha, -\alpha)$ . Cet anneau est ré-

duit donc  $I_\lambda$  est égal à l'idéal  $I(C \cap D_\lambda)$  et la variété  $C \cap D_\lambda$  a pour anneau  $A_\lambda$ . Elle est formée de deux points distincts avec en chacun de ces points l'anneau local  $k$ .

b)  $\lambda = 0$  :  $D_0$  est tangente à  $C$ . On a  $A_0 = k[X]/(X^2) = k[\epsilon]$  (l'anneau des nombres duaux). Ici le quotient n'est pas réduit et donc  $I(C \cap D_0)$  est la racine de  $I_0$ , c'est-à-dire l'idéal  $(X, Y)$ . La variété  $C \cap D_0$  est un point, avec l'anneau local  $k$ . Bien entendu pour comprendre la multiplicité 2 de l'intersection de  $D_0$  avec  $C$  il faut se garder de faire ce passage à la racine car c'est l'idéal  $I_0 = (Y, X^2)$ , limite des  $I_\lambda$  quand  $\lambda$  tend vers 0, et non sa racine, qui contient l'information souhaitée. La solution est de définir  $C \cap D_0$  non pas comme une variété, mais comme un schéma, c'est-à-dire, ici, de munir l'unique point  $P = (0, 0)$  de  $C \cap D_0$  de l'anneau  $\Gamma(P) = k[X]/(X^2) = k[\epsilon]$  et non de  $k$ . On a alors en  $P$  une "fonction" inhabituelle, non nulle, mais nilpotente,  $\epsilon$ . Tout ceci nous mène à la définition suivante :

**Définition 1.1** (schéma fini). *Un schéma fini  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un espace annelé où  $Z$  est un ensemble fini discret et où, pour chaque point (ouvert)  $P \in X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_Z(\{P\})$  est une  $k$ -algèbre locale de dimension finie comme  $k$ -espace vectoriel (i.e. une  $k$ -algèbre finie). Cette dimension est appelée multiplicité de  $Z$  au point  $P$ . On la note  $\mu_P(Z)$ .*

*Remarques 1.2*

1) L'anneau  $\mathcal{O}_Z(\{P\})$  est aussi l'anneau local de  $Z$  en  $P$ ,  $\mathcal{O}_{Z,P}$  (au sens de III, 5.1).

2) L'anneau  $\mathcal{O}_{Z,P}$  a pour unique idéal premier son idéal maximal  $m_P$  (en effet, si  $I$  est un idéal premier, le quotient est intègre et de dimension finie sur  $k$  donc un corps, donc  $I$  est maximal et c'est  $m_P$ ). Il en résulte que  $m_P$  est le nilradical de  $\mathcal{O}_{Z,P}$  (cf. Mémento 1.2.d) donc ses éléments sont nilpotents et, comme il est de type fini,  $m_P$  lui-même est nilpotent, i.e. il existe un entier  $n$  tel que  $m_P^n = 0$ .

3) Une variété finie est un schéma fini où tous les anneaux locaux sont égaux à  $k$ , donc où tous les points sont de multiplicité 1.

**Proposition 1.3.** *Soit  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  un schéma fini. On a, pour toute partie  $V$  de  $Z$  :  $\Gamma(V, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in V} \mathcal{O}_{Z,P}$ . Réciproquement si on se donne, en chaque point d'un ensemble fini  $Z$ , une  $k$ -algèbre locale finie, la formule ci-dessus définit sur  $Z$  une structure de schéma fini.*

*Démonstration.* C'est clair : à une section sur  $V$  on associe ses restrictions sur chacun des points (ouverts)  $P \in V$  et il n'y a pas de condition de recollement.

**Définition 1.4.** Si  $Z$  est un schéma fini et si  $A = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ , on note  $Z = \text{Spec } A$ .

On notera que  $A$  est une  $k$ -algèbre finie (i.e. un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie) car elle est produit des anneaux locaux  $\mathcal{O}_{Z,P}$  qui sont de dimension finie (cf. 1.11.4). Le schéma  $Z$  est une variété si et seulement si  $A$  est réduite.

*Exemple 1.5.*

Même dans le cas d'un point unique il y a beaucoup de structures de schémas possibles, par exemple  $k[X]/(X^n)$ , ou  $k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ .

## b. La structure de schéma fini sur l'intersection de deux courbes affines planes

Soient  $F, G \in k[X, Y]$  deux polynômes non nuls et *sans facteur commun*. On rappelle (cf. I, 5) que l'ensemble  $Z = V(F, G)$  est fini et que l'algèbre  $k[X, Y]/(F, G)$  est finie. On cherche à définir une structure de schéma fini sur  $Z$ . Pour cela, on se souvient que, dans le cas des variétés, lorsqu'on a un fermé  $Z$  de la variété affine  $X$ , avec  $R = \Gamma(X)$  et  $I = I(Z)$ , on a  $\mathcal{O}_Z = \widetilde{R}/I$  (cf. III, 7.4). On va donc définir  $\mathcal{O}_Z$  ici par la formule analogue, mais avec  $(F, G)$  à la place de  $I(Z)$ , comme nous l'a suggéré l'exemple de  $C \cap D_0$  ci-dessus. Nous aurons besoin de la description précise du faisceau  $\widetilde{R}/I$  que nous allons donner dans le cas général :

**Proposition-définition 1.6.** Soit  $X$  une variété algébrique affine irréductible et soit  $R = \Gamma(X)$ . Soient  $I$  un idéal de  $R$ ,  $Z$  le fermé  $\widetilde{V}(I)$  (on ne suppose pas  $I = I(Z)$ ),  $i$  l'injection de  $Z$  dans  $X$  et  $\mathcal{F} = \widetilde{R}/I$ . Soit  $D(f)$  un ouvert standard de  $X$ . On a alors les résultats suivants :

- 1) Si  $D(f) \cap Z = \emptyset$ , on a  $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = 0$ .
- 2) Si  $D(f) \cap Z = \{x\}$ , on a  $\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$ .
- 3) Si  $D(f) \cap Z = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on a

$$\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{X,x_i}/I\mathcal{O}_{X,x_i}.$$

4) L'ensemble  $Z = V(I)$  est fini si et seulement si  $R/I$  est une  $k$ -algèbre finie;  $Z$  est alors discret et on définit un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_Z$  sur  $Z$  en posant, pour  $U \subset Z$  :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Z) = \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x} / I\mathcal{O}_{X,x}.$$

On a alors  $\mathcal{F} = i_*\mathcal{O}_Z$ . En particulier on a :

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = R/I = \prod_{x \in Z} \mathcal{O}_{X,x} / I\mathcal{O}_{X,x}.$$

L'espace annelé  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un schéma fini, noté  $\text{Spec}(R/I)$ , conformément à 1.4.

*Démonstration.* On a, dans tous les cas,

$$\Gamma(D(f), \mathcal{F}) = (R/I)_f = R_f / IR_f.$$

1) On a  $Z \subset V(f)$ , donc  $f$ , nul sur  $Z$ , est dans la racine de  $I$  : on a  $f^r \in I$ . Mais alors, dans  $R_f / IR_f$ ,  $f^r$  est à la fois inversible et nul, donc cet anneau est nul.

2) Le point  $x$  correspond à l'idéal maximal  $m_x$  de  $R$ . Dire que  $x \in D(f)$  signifie que  $f \notin m_x$  de sorte que  $m_x$  définit un idéal maximal de  $R_f$ . Dire que  $x \in Z$  signifie que l'on a  $I \subset m_x$  donc  $m_x$  s'identifie à un idéal maximal de  $R_f / IR_f$ . Dire que  $x$  est le seul point de  $Z \cap D(f)$  signifie que l'idéal correspondant à  $m_x$  est le seul idéal maximal de l'anneau  $R_f / IR_f$ , qui est donc local et on a  $R_f / IR_f = (R_f / IR_f)_{m_x} = R_{m_x} / IR_{m_x}$ , ce qui est le résultat cherché.

3) Il existe  $f_1, \dots, f_n \in R$  tels que l'on ait, pour tout  $i$ ,  $f_i(x_i) \neq 0$  et  $f_i(x_j) = 0$  pour  $j \neq i$ . On a donc  $x_i \in D(ff_i)$  mais  $x_i \notin D(ff_j)$  pour  $j \neq i$ . On calcule  $\Gamma(D(f), \mathcal{F})$  en recouvrant  $D(f)$  par les  $D(ff_i)$  et par des  $D(g_j)$  disjoints de  $Z$ . On en déduit un homomorphisme injectif :

$$\Gamma(D(f), \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{i=1}^n \Gamma(D(ff_i), \mathcal{F}) \times \prod_j \Gamma(D(g_j), \mathcal{F}).$$

Les derniers anneaux sont nuls (cf. 1) de sorte qu'il ne reste que les  $D(ff_i)$ . Mais, comme  $D(ff_i f_j) \cap Z = \emptyset$ , il n'y a pas de condition de recollement et  $\varphi$  est un isomorphisme, ce qui, avec 2, donne le résultat.

4) Montrons la première assertion. Supposons d'abord  $R/I$  de dimension finie. Alors, comme on a  $I \subset I(Z)$ , l'anneau  $\Gamma(Z) = R/I(Z)$  est a fortiori de dimension finie, donc  $Z$  est fini (cf. I, 4.8).

Réciproquement, si  $Z$  est fini, l'anneau  $\Gamma(Z)$  qui est l'anneau réduit associé à  $R/I$  est de dimension finie d'après I, 4.8. Par ailleurs, la formule de 3) appliquée à  $f = 1$  montre que  $R/I$  est produit d'anneaux locaux, donc aussi  $\Gamma(Z)$ , mais pour ce dernier les anneaux locaux sont tous égaux à  $k$  (cf. 1.2). Les anneaux locaux de  $R/I$  ont donc leur idéal maximal nilpotent et on est ramené à prouver le lemme suivant :

**Lemme 1.7.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre locale d'idéal maximal  $m$  et de corps résiduel  $k$ . On suppose qu'on a  $m^n = 0$ . Alors,  $A$  est de dimension finie sur  $k$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer la suite de sous-espaces vectoriels :

$$(0) = m^n \subset m^{n-1} \subset \dots \subset m \subset A$$

et de noter que les quotients  $m^i/m^{i+1}$  sont tous de dimension finie sur  $k = A/m$  (car les idéaux  $m^i$  sont de type fini).

Revenons au point 4). Le fait que  $i_*\mathcal{O}_Z$  soit égal à  $\mathcal{F}$  vient de 3); enfin, dire que  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un schéma fini revient à voir que les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}/I\mathcal{O}_{X,x}$  sont de dimension finie sur  $k$  et cela résulte de la finitude de  $R/I$ .

*Remarque 1.8.* Le faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_Z$  défini ci-dessus est ce qu'on appelle l'image réciproque du faisceau  $\mathcal{F}$  par l'application  $i$  et il est noté  $i^*(\mathcal{F})$ .

Revenant à la situation étudiée au début du paragraphe b), on peut particulariser 1.6 et définir la structure de schéma fini sur  $V(F, G)$  comme suit :

**Proposition-définition 1.9.** *Soient  $F, G \in k[X, Y]$  sans facteur commun et  $Z$  l'ensemble fini  $V(F, G)$ . On pose  $R = k[X, Y]$  et  $I = (F, G)$ . On munit  $Z$  d'une structure d'espace annelé en définissant  $\mathcal{O}_Z$  comme en 1.6 ( $\mathcal{O}_Z = i^*(\widetilde{R/I})$ ) avec la notation de 1.8). Alors,  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  est un schéma fini. L'anneau local  $\mathcal{O}_{Z,P}$  en  $P \in Z$  est égal à  $\mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G)$  et on a :*

$$k[X, Y]/(F, G) \simeq \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_{k^2,P}/(F, G) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z),$$

de sorte que  $Z = \text{Spec}(R/I) = \text{Spec} k[X, Y]/(F, G)$ .

**Définition 1.10.** Avec les notations de 1.9, on définit la multiplicité d'intersection  $\mu_P(F, G)$  de  $F$  et  $G$  en  $P$  comme la multiplicité du schéma fini  $Z = V(F, G)$  en  $P$ , c'est-à-dire :

$$\mu_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_{k^2, P} / (F, G).$$

**Corollaire 1.11.** Avec les notations de 1.9, on a la formule :

$$\sum_{P \in V(F, G)} \mu_P(F, G) = \dim_k k[X, Y] / (F, G) = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z).$$

On voit que cette formule contient déjà une bonne part de l'information recherchée : la somme des multiplicités des points d'intersection. Attention, il peut manquer des points à l'infini, penser au cas  $F = X$ ,  $G = X - 1$ .

*Remarques 1.12*

1) Dans la définition 1.10 les polynômes  $F$  et  $G$  peuvent avoir des facteurs multiples. On s'autorise donc à parler de multiplicité d'intersection dans le cas de courbes elles-mêmes multiples (c'est important pour les calculs, cf. Problème VII).

2) La définition 1.10 garde un sens si  $P \notin V(F, G)$ . La multiplicité est alors 0 car  $F$  ou  $G$  est non nul en  $P$  donc inversible dans l'anneau local et le quotient est nul.

3) Pour une définition axiomatique de la multiplicité et un algorithme de calcul, indispensable dans la pratique, cf. Problème VII ou [F] Ch. 3.

4) On a montré, dans la proposition 1.6, que toute  $k$ -algèbre finie est isomorphe à un produit de  $k$ -algèbres locales finies. On en déduit aisément que le foncteur  $Z \mapsto \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  de la catégorie des schémas finis dans celle des  $k$ -algèbres finies est une équivalence de catégories.

*Exemple 1.13.* Calculons la multiplicité d'intersection de  $X^3 - X^2 - Y$  et de  $Y$  au point  $P = (0, 0)$ . Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{k^2, P}$ . L'idéal  $I\mathcal{O}$  est égal à  $(X^3 - X^2 - Y, Y) = (X^3 - X^2, Y) = (X^2(X - 1), Y) = (X^2, Y)$  car  $X - 1$  est inversible dans  $\mathcal{O}$ . Le quotient  $\mathcal{O}/I\mathcal{O}$  a alors une base formée des images de 1 et  $X$  et la multiplicité cherchée est 2.

## 2. Le théorème de Bézout

Dans tout ce qui suit on considère deux polynômes homogènes non nuls  $F, G$  de  $k[X, Y, T]$ , sans facteur commun, de degrés respectifs  $s$  et  $t$ .

**a. Multiplicité d'intersection en projectif**

Soit  $P = (x, y, t) \in \mathbf{P}^2$ . L'une des coordonnées est non nulle, on peut supposer que c'est  $t$ , et même que l'on a  $t = 1$ . On considère alors les polynômes  $F_b$  et  $G_b$  déshomogénéisés par rapport à  $T$  (par exemple  $F_b(X, Y) = F(X, Y, 1)$ , cf. III, 8.b) et on définit la multiplicité d'intersection de  $F$  et  $G$  en  $P$  par  $\mu_P(F, G) = \mu_{(x,y)}(F_b, G_b)$ .

Nous allons montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la droite à l'infini (ici  $T = 0$ ). Pour cela, soit  $I(P)$  l'idéal (premier et homogène) du point  $P$  dans  $\mathbf{P}^2$ . L'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}$  s'obtient comme le sous-anneau du localisé  $k[X, Y, T]_{I(P)}$  formé des éléments  $A/B$  avec  $A, B$  homogènes de même degré et  $B(P) \neq 0$  (cf. III, 8.7). Si  $J$  est un idéal de  $k[X, Y, T]$  on note  $J_P$  la trace sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}$  de l'idéal engendré par  $J$  dans  $k[X, Y, T]_{I(P)}$ .

Le fait que la multiplicité est bien définie résulte alors du lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme d'anneaux :*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}/(F, G)_P \simeq \mathcal{O}_{k^2, P}/(F_b, G_b).$$

*Démonstration.* Notons que dans le cas présent (i.e.  $P = (x, y, 1)$ ) l'idéal  $(F, G)_P$  est l'idéal engendré par  $F/T^s$  et  $G/T^t$ . On considère l'homomorphisme  $\flat : k[X, Y, T] \rightarrow k[X, Y]$  qui envoie  $T$  sur 1. Cet homomorphisme induit  $\Phi : k[X, Y, T]_{I(P)} \rightarrow k[X, Y]_{m_P} = \mathcal{O}_{k^2, P}$  (où  $m_P$  est l'idéal du point  $P$  dans  $k^2$ ) et la restriction de  $\Phi$  à  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}$  sur  $\mathcal{O}_{k^2, P}$  (cf. III, 8.7). Comme l'image par  $\Phi$  de  $(F, G)_P$  est l'idéal  $(F_b, G_b)$ , on a le résultat voulu en passant au quotient.

**b. Énoncé du théorème**

**Théorème 2.2** (Bézout). *Soient  $F, G \in k[X, Y, T]$  deux polynômes homogènes sans facteur commun, de degrés respectifs  $s$  et  $t$ . On a :*

$$\sum_{P \in V(F) \cap V(G)} \mu_P(F, G) = st.$$

(On peut aussi étendre la somme à tous les points de  $\mathbf{P}^2$  puisque si  $P \notin V(F) \cap V(G)$  la multiplicité est nulle, cf. 1.11.2.) La démonstration du théorème de Bézout occupe le reste de ce chapitre.

### c. Le lien avec le cas affine

**Lemme 2.3.** *L'ensemble  $V(F) \cap V(G) \subset \mathbf{P}^2$  est fini.*

*Démonstration.* Prenons  $T = 0$  comme droite de l'infini et notons-la  $D_\infty$ . La trace de  $V(F)$  (resp.  $V(G)$ ) sur  $D_\infty$  est un sous-ensemble algébrique projectif de  $D_\infty$  donc fini ou égal à  $D_\infty$ . Si c'est  $D_\infty$  c'est que  $T$  divise  $F$  (resp.  $T$  divise  $G$ ). Comme  $F$  et  $G$  sont sans facteur commun l'ensemble  $V(F) \cap V(G) \cap D_\infty$  est fini.

On identifie  $\mathbf{P}^2 - D_\infty$  à  $k^2$  par la méthode habituelle. On a alors  $V(F) \cap k^2 = V(F_b)$  (cf. III, 8.b) et de même pour  $G$ . Mais,  $F_b$  et  $G_b$  sont encore sans facteur commun, donc  $V(F) \cap V(G) \cap k^2 = V(F_b) \cap V(G_b)$  est fini. Au total, l'intersection est bien finie.

**Lemme 2.4.** *Il existe une droite projective  $D$  qui ne rencontre pas l'intersection  $V(F) \cap V(G)$ .*

*Démonstration.* Soit  $Z \subset \mathbf{P}^2$  un ensemble fini. Il s'agit de voir qu'il existe une droite ne rencontrant pas  $Z$ . On prend  $a \notin Z$ . On regarde les droites passant par  $a$ . Il y en a une infinité, dont seulement un nombre fini rencontre  $Z$ , cqfd.

### d. Description du faisceau structural de l'intersection

Soit  $D$  une droite projective qui ne rencontre pas  $Z = V(F, G)$ . Quitte à faire une homographie (ce qui ne change ni les multiplicités d'intersection des polynômes  $F$  et  $G$  ni leurs degrés) on peut supposer que cette droite est la droite  $T = 0$  et la choisir comme droite à l'infini. On a alors  $V(F) \cap V(G) = V(F_b) \cap V(G_b) \subset k^2$  en identifiant  $\mathbf{P}^2 - D_\infty$  et  $k^2$ . On munit  $Z = V(F_b, G_b)$  de sa structure de schéma fini comme en 1.9. On sait alors qu'on a :

$$\sum_{P \in V(F, G)} \mu_P(F, G) = \sum_{P \in V(F_b, G_b)} \mu_P(F_b, G_b) = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

et il reste à prouver que l'on a bien

$$\dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \dim_k k[X, Y]/(F_b, G_b) = st.$$

On pose  $S = k[X, Y, T]$ ,  $J = (F, G)$  (c'est un idéal homogène) et  $B = S/J$  (c'est un  $S$ -module gradué). Côté affine, on pose  $R = k[X, Y]$  et  $I = (F_b, G_b)$ . On appelle  $i$  l'injection de  $Z$  dans  $k^2$  et  $j$  celle de  $Z$  dans  $\mathbf{P}^2$ . On a alors la description de  $\mathcal{O}_Z$  :

**Proposition 2.5.** *On a des isomorphismes :  $i_*(\mathcal{O}_Z) \simeq \widetilde{R/I}$  et  $j_*(\mathcal{O}_Z) \simeq \widetilde{S/J} = \widetilde{B}$ . En particulier on a  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{S/J})$ .*

*Démonstration.* Le premier isomorphisme a été vu en 1.6. Le second se démontre de la même manière en remplaçant les ouverts  $D(f)$  par les  $D^+(f)$ . Nous retrouverons cet isomorphisme par une autre voie en 2.11.

En vertu de 2.5, on est donc ramené à prouver la formule  $\Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{S/J}) = st$ . En fait nous n'aurons pas vraiment besoin de calculer cet espace de sections (cf. 2.13), mais cette écriture va nous permettre de comprendre mieux quels sont les phénomènes réellement en jeu. L'avantage essentiel que nous aurons à travailler ainsi dans le projectif c'est que tous les espaces de sections des faisceaux cohérents sont de dimension finie (cf. VII, 4.4). Nous verrons aussi au chapitre VII que sous les raisonnements que nous allons faire ici se cache la cohomologie.

### e. Description de $B = S/J$

**Lemme 2.6.** *On a la suite exacte de  $S$ -modules gradués :*

$$0 \rightarrow S(-s-t) \xrightarrow{\psi} S(-s) \oplus S(-t) \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow S/J \rightarrow 0$$

avec  $\psi(W) = (WG, -WF)$  et  $\varphi(U, V) = UF + VG$ .

*Démonstration.* Ce résultat a été vu en III, 10.1.

**Corollaire 2.7.** *On a les suites exactes de faisceaux :*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-t) \rightarrow \widetilde{J} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \widetilde{J} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \rightarrow \widetilde{S/J} \rightarrow 0.$$

Cette dernière suite exacte doit être comprise ainsi : on peut identifier, par  $j_*$ , les faisceaux  $\widetilde{S/J}$  et  $\mathcal{O}_Z$ . Le faisceau  $\widetilde{J}$  est alors un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$  qu'on peut noter  $\mathcal{J}_Z$  et la deuxième suite est l'analogue pour le sous-schéma  $Z$  de  $\mathbf{P}^2$  de la suite fondamentale associée à un fermé dans une variété (cf. III, 9.5).

Le problème, pour calculer  $\Gamma(\mathbf{P}^2, \tilde{B})$ , c'est qu'on a bien la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathbf{P}^2, \tilde{J}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{P}^2, \tilde{B})$$

mais que la dernière flèche n'est certainement pas surjective :  $\Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2})$  est de dimension 1 et on espère que  $\Gamma(\mathbf{P}^2, \tilde{B})$  est de dimension *st*. On aurait d'ailleurs le même problème avec l'autre suite exacte : on n'oubliera pas que la surjectivité sur les faisceaux n'implique pas la surjectivité sur les sections globales (cf. III, 6.7).

L'idée pour surmonter cette difficulté, dont la source est le manque de sections globales de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$ , est de travailler avec les faisceaux décalés  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$  (cf. III, 9.7), qui pour  $d$  grand ont, eux, des sections.

### f. Comparaison de $\tilde{B}$ et $\widetilde{B}(d)$ (ou de $\mathcal{O}_Z$ et $\mathcal{O}_Z(d)$ )

Le fait que  $Z$  ne rencontre pas la droite à l'infini va impliquer qu'on ne change pas  $j_*(\mathcal{O}_Z) = \tilde{B}$  par décalage :

**Proposition 2.8.** *La multiplication par  $T$  induit une injection  $\alpha$  de  $S$ -modules gradués de  $B(-1)$  dans  $B$ . De plus pour  $n \geq s + t - 1$ , la flèche  $\alpha_n : B_{n-1} \rightarrow B_n$  est surjective.*

#### Démonstration

1) L'injectivité. Soit  $\overline{H} \in B(-1)$  tel que  $\alpha(\overline{H}) = 0$ . Cela signifie qu'on a  $TH = UF + VG$  dans  $S$ . On fait  $T = 0$  dans cette relation, on trouve alors  $U(X, Y, 0)F(X, Y, 0) + V(X, Y, 0)G(X, Y, 0) = 0$ . Mais  $F(X, Y, 0)$  et  $G(X, Y, 0)$  sont premiers entre eux (car  $F$  et  $G$  n'ont pas de zéro commun à l'infini), donc  $G(X, Y, 0)$  divise  $U(X, Y, 0) : U(X, Y, 0) = G(X, Y, 0)C(X, Y)$ , et par suite,  $V(X, Y, 0) = -F(X, Y, 0)C(X, Y)$ . Revenant dans  $S$  on a ainsi  $U = GC + TU'$ ,  $V = -FC + TV'$  donc  $TH = T(U'F + V'G)$  et  $H = U'F + V'G$  est bien nul dans le quotient  $S/J$ .

2) La surjectivité de  $\alpha_n$  résulte de son injectivité et du lemme suivant :

**Lemme 2.9.** *Pour  $d \geq s + t - 2$  on a  $\dim_k B_d = st$ .*

*Démonstration.* La suite exacte de 2.6 donne, en degré  $d$  :

$$0 \rightarrow S_{d-s-t} \rightarrow S_{d-s} \oplus S_{d-t} \rightarrow S_d \rightarrow B_d \rightarrow 0$$

et on a donc  $\dim B_d = \dim S_d - \dim S_{d-s} - \dim S_{d-t} + \dim S_{d-s-t}$ . On conclut par un calcul facile en utilisant la formule :

$$\dim S_n = \binom{n+2}{2} = (n+2)(n+1)/2,$$

valable pour  $n \geq -2$  (ce qui explique la condition  $d \geq s+t-2$ ).

(Si l'on veut s'épargner le calcul on peut aussi noter que la formule précédente ne dépend plus que de  $s$  et  $t$  et calculer la dimension de  $B_d$  dans le cas particulier  $F = X^s, G = Y^t$ . Dans ce cas, une base de  $B_d$  est formée des images des  $X^i Y^j T^{d-i-j}$  avec  $0 \leq i \leq s-1, 0 \leq j \leq t-1, d-i-j \geq 0$ . Pour  $d \geq s+t-2$  la dernière condition est superflue, de sorte que la dimension cherchée est bien  $st$ .)

**Corollaire 2.10.** *La multiplication par  $T$  induit un isomorphisme de faisceaux  $\widetilde{B}(-1) \simeq \widetilde{B}$  (et on a donc aussi, pour tout entier  $d$ , un isomorphisme  $\widetilde{B}(d) \simeq \widetilde{B}$ ).*

*Démonstration.* Cela résulte de 2.8 et de III, 9.4 (la surjectivité pour  $n$  grand suffit).

*Remarque 2.11.* On peut donner, à l'aide de 2.8, une autre démonstration de 2.5. Soit  $H \in S$  un polynôme homogène de degré  $> 0$ . On a alors  $D^+(H) \cap D^+(T) = D(H_b)$  et  $Z \cap D^+(H) = Z \cap D(H_b)$  et il s'agit de prouver qu'on a un isomorphisme :

$$\Gamma(D^+(H), \widetilde{S}/J) \simeq \Gamma(D(H_b), \widetilde{R}/I)$$

(par 1.6 ce dernier groupe est isomorphe à  $\Gamma(Z \cap D^+(H), \mathcal{O}_Z)$ ). Le lecteur consciencieux montrera sans peine cet isomorphisme (qui s'obtient à partir de l'opération bémol) en s'inspirant de la démonstration de la proposition 2.13 ci-dessous.

En identifiant  $j_*(\mathcal{O}_Z)$  et  $\widetilde{B}$  le corollaire 2.10 devient :

**Corollaire 2.12.** *La multiplication par  $T$  induit un isomorphisme de faisceaux  $\mathcal{O}_Z(-1) \simeq \mathcal{O}_Z$  et donc aussi, pour tout entier  $d$ , un isomorphisme  $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_Z(d)$ .*

### g. Conclusion

Il reste à montrer que l'on a les égalités

$$\dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(d)) = \dim_k \Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B}(d)) = \dim k[X, Y]/(F_b, G_b) = st.$$

En fait, comme on a  $\dim_k B_d = st$  pour  $d$  assez grand, il suffit de trouver un isomorphisme de  $B_d$  sur  $k[X, Y]/(F_b, G_b)$  (on peut montrer, cf. VII, 4.3, qu'on a aussi, pour  $d$  grand, un isomorphisme  $\Gamma(\mathbf{P}^2, \widetilde{B}(d)) \simeq B_d$ , mais c'est inutile ici).

On considère pour cela l'homomorphisme d'anneaux

$$\flat : k[X, Y, T] = S \rightarrow k[X, Y] = R$$

qui envoie  $T$  sur 1. Comme l'image de l'idéal  $J$  par cet homomorphisme est égale à  $I$ , il se factorise en un homomorphisme noté encore  $\flat : B = S/J \rightarrow A = R/I$  et on peut restreindre ce dernier en une application linéaire  $v_d : B_d \rightarrow R/I$ . Il reste à prouver le résultat suivant :

**Proposition 2.13.** *La flèche  $v = v_d : B_d \rightarrow R/I = k[X, Y]/(F_b, G_b)$  est un isomorphisme pour  $d \geq s + t - 2$ .*

#### Démonstration

1) Montrons d'abord que  $v$  est injective : soit  $\overline{P} \in B_d$ , image de  $P \in S_d$  et supposons  $v(\overline{P}) = 0$ . On a  $P_b \in I$ , i.e.  $P_b = aF_b + bG_b$ ,  $a, b \in k[X, Y]$ . En appliquant l'opération dièze on obtient  $T^\alpha P = T^\beta a^\sharp F + T^\gamma b^\sharp G$  (cf. III, 8 b) donc  $T^\alpha P \in J$ , mais, vu l'injectivité de la multiplication par  $T$  dans  $S/J$  (cf. 2.8), on a  $P \in J$ , donc  $\overline{P} = 0$ .

2) Montrons que  $v$  est surjective. Soit  $\overline{f} \in k[X, Y]/I$ , image du polynôme  $f$ . On considère  $f^\sharp$  qui est homogène d'un certain degré  $n$  et on regarde son image  $\overline{f}^\sharp$  dans  $B_n$ . Si  $n \leq d$ , l'élément  $T^{d-n} \overline{f}^\sharp$  de  $B_d$  s'envoie sur  $f$  par  $v$ . Si  $n > d \geq s + t - 2$ , on sait que la multiplication par  $T^{n-d}$  est un isomorphisme de  $B_d$  sur  $B_n$  et on a donc  $\overline{f}^\sharp = T^{n-d} \overline{P}$  avec  $\overline{P} \in B_d$  qui s'envoie sur  $f$  par  $v$ .

Ceci achève la démonstration du théorème de Bézout.

### Exercices

Les exercices qui suivent concernent les courbes planes projectives et notamment des applications du théorème de Bézout.

## 1. Systèmes linéaires de courbes

Soit  $d$  un entier  $> 0$ . On note  $V_d$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  en  $X, Y, T$ .

a) Montrer que  $\dim_k(V_d) = (d+1)(d+2)/2$ .

b) Pour  $P \in \mathbf{P}^2$  on pose  $V_d(P) = \{F \in V_d \mid F(P) = 0\}$ . Montrer que  $V_d(P)$  est un hyperplan de  $V_d$ .

c) Pour  $r \in \mathbf{N}$  et  $P \in \mathbf{P}^2$  on pose  $V_d(rP) = \{F \in V_d \mid \mu_P(F) \geq r\}$ . Calculer  $\dim_k(V_d(rP))$ .

d) Pour  $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{N}$  et  $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{P}^2$  on pose

$$V_d(r_1P_1, \dots, r_nP_n) = \{F \in V_d \mid \forall i = 1, \dots, n \quad \mu_{P_i}(F) \geq r_i\}.$$

Montrer que l'on a :

$$\dim_k V_d(r_1P_1, \dots, r_nP_n) \geq (d+1)(d+2)/2 - \sum_{i=1}^n r_i(r_i+1)/2.$$

e) Avec les notations précédentes, montrer que si l'on a

$$\sum_{i=1}^n r_i(r_i+1)/2 \leq d(d+3)/2$$

il existe une courbe (au sens large : un polynôme, avec éventuellement des facteurs multiples) passant par chacun des  $P_i$  avec une multiplicité  $\geq r_i$ .

## 2. Degré et points singuliers

Soit  $F$  un polynôme homogène de degré  $d \geq 1$  en  $X, Y, T$ . On note  $\mu_P(F)$  (ou simplement  $\mu_P$ ) la multiplicité de  $F$  en  $P$ .

a) On suppose  $F$  sans facteur multiple. Montrer que l'on a :

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} \mu_P(\mu_P - 1) \leq d(d-1).$$

(On appliquera Bézout à  $F$  et  $\partial F/\partial X$ .)

b) On suppose  $F$  irréductible. Montrer qu'on peut améliorer l'inégalité précédente :

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} \mu_P(\mu_P - 1) \leq (d-1)(d-2).$$

(Montrer, cf. 1.e, qu'il existe un polynôme  $G$  de degré  $d-1$  qui passe par les points singuliers de  $F$  avec la multiplicité  $\mu_P - 1$  ainsi que par un

certain nombre, convenablement choisi, d'autres points de  $F$  et appliquer Bézout.)

L'entier (positif ou nul) :

$$g = (d-1)(d-2)/2 - \sum_{P \in \mathbf{P}^2} \mu_P(\mu_P - 1)/2$$

est le *genre* de la courbe  $V(F)$  (au moins si elle n'a que des points multiples à tangentes distinctes).

### 3. Applications

a) Retrouver le fait qu'une conique irréductible est non singulière et qu'une cubique irréductible a au plus un point double (cf. Exercice V, 1).

b) Montrer qu'une quartique qui a plus de trois points doubles, ou un point plus que triple, est réductible.

c) Montrer qu'une quartique qui a un unique point double à tangentes distinctes est irréductible.

d) Soit  $F(X, Y, T) = \sum_{i+j+k=4} X^i Y^j T^k$ . Montrer que  $V(F)$  est lisse (donc irréductible). (On notera que  $V(F)$  est stable sous l'action du groupe symétrique  $S_3$  qui permute les coordonnées. On calculera le cardinal des orbites des points de  $\mathbf{P}^2$  sous l'action de ce groupe, en faisant attention à quelques cas particuliers, et on regardera les orbites des éventuels points singuliers.)

### 4. La quartique tricuspide

On pose  $F(X, Y, T) = Y^2 T^2 + T^2 X^2 + X^2 Y^2 - 2XYT(X + Y + T)$ .

a) Montrer que  $C = V(F)$  a trois points de rebroussement en  $P = (0, 0, 1)$ ,  $Q = (0, 1, 0)$ ,  $R = (1, 0, 0)$ .

b) On considère une conique  $\Gamma$  passant par  $P, Q, R$  et tangente à  $C$  en  $P$ . Montrer que  $C$  et  $\Gamma$  ont au plus un autre point commun.

c) Montrer que les coniques  $\Gamma$  comme ci-dessus ont pour équations  $\mu(YT - XT) + \lambda XY$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{P}^1(k)$ . Calculer explicitement les points d'intersection de  $C$  et  $\Gamma$ . (On repassera en affine pour faire les calculs.)

d) Montrer qu'on obtient ainsi un paramétrage birationnel de  $C$ . On calculera d'abord ce paramétrage en affine, puis, en homogénéisant, on trouvera le morphisme  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$  donné par la formule  $\varphi(\lambda, \mu) = (4\mu^2(\lambda + \mu)^2, 4\mu^2(\lambda - \mu)^2, (\lambda^2 - \mu^2)^2)$ . On montrera que ce morphisme est un isomorphisme sauf aux points  $(1, 0)$ ,  $(-1, 1)$  et  $(1, 1)$  dont les images

sont les points  $P, Q, R$  et que la réciproque de  $\varphi$  est donnée, en dehors de  $P, Q, R$ , par  $\varphi^{-1}(x, y, t) = ((x - y)t, xy)$ .

e) Construire la partie réelle de  $C$  dans le plan affine  $T \neq 0$ .

# Chapitre VII

## Cohomologie des faisceaux

### 0. Introduction

Revenons un instant sur la démonstration du théorème de Bézout. Il s'agit de calculer, pour  $Z = V(F, G)$ , la dimension de  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ . La méthode consiste à utiliser les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-t) \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow 0$$

et à leur appliquer le foncteur sections globales  $\Gamma$ . La difficulté vient du fait que  $\Gamma$  n'est pas exact à droite : si on a une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules sur une variété  $X$  :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

on en déduit la suite exacte :

$$(**) \quad 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} \Gamma(X, \mathcal{H})$$

mais  $\pi$  n'est pas surjectif en général.

Cette situation est très fréquente en géométrie algébrique : on a souvent à calculer la dimension d'un espace de sections globales  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  (en projectif, pour  $\mathcal{F}$  cohérent, cette dimension est finie, cf. 4.6), par exemple :

1) Si  $X$  est une variété,  $\dim \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est le nombre de composantes connexes de  $X$ ,

2) Si  $C$  est une courbe de  $\mathbf{P}^3$ ,  $\dim \Gamma(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(s))$  est le nombre de surfaces de degré  $s$  (indépendantes) qui contiennent  $C$  ...

La méthode pour calculer ces nombres est encore d'incorporer les faisceaux en question dans des suites exactes comme on l'a fait pour Bézout et on se heurte toujours au problème de l'inexactitude de  $\Gamma$  (dans une suite du type (\*\*), si on connaît deux des dimensions on ne sait pas calculer la troisième).

La cohomologie a été inventée (entre autres) pour surmonter cette difficulté. On introduit de nouveaux groupes associés à  $\mathcal{F}$ , que l'on note  $H^i(X, \mathcal{F})$  (ou  $H^i(\mathcal{F})$  s'il n'y a pas d'ambiguïté), définis pour  $i \geq 0$ , le  $H^0$  n'étant rien d'autre que  $\Gamma$ . Leur propriété essentielle est de donner lieu, lorsqu'on a une suite exacte de faisceaux (\*), à une suite exacte longue :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(\mathcal{F}) & \rightarrow & H^0(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\pi} & H^0(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} \\ & & & & H^1(\mathcal{F}) & \rightarrow & H^1(\mathcal{G}) & \rightarrow H^1(\mathcal{H}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{array}$$

dont on espère qu'elle va permettre de calculer l'image de  $\pi$  (dans la pratique on n'y parviendra que si certains des  $H^i$  sont nuls.)

L'existence et l'unicité de ces groupes  $H^i\mathcal{F}$  peut se voir de façon très générale (c'est la théorie des foncteurs dérivés, cf. [H] ou [Tohoku]). Nous préférons ici les construire explicitement, grâce à la cohomologie de Čech (mais nous devons admettre leur unicité).

Pour comprendre l'origine de cette cohomologie de Čech, reprenons l'exemple de la suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules (\*) et de la suite (\*\*) sur les sections globales. Le problème est de déterminer l'image de  $\pi$ .

Soit donc  $h \in \Gamma(\mathcal{H})$ . A priori il n'est pas dans l'image de  $\pi$ , mais, ce qui est vrai, c'est qu'il y est localement (car  $p$  est surjectif). On a donc un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $X$  et des sections  $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$  telles que  $p(g_i) = h|_{U_i}$ . Le problème est de voir si les  $g_i$  se recollent (au besoin en modifiant chaque  $g_i$  par un  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ , ce qui ne change pas  $p(g_i)$ ). On regarde donc, sur les ouverts  $U_{ij} = U_i \cap U_j$ , les sections  $f_{ij} = g_i - g_j$ . Comme  $g_i$  et  $g_j$  ont même image dans  $\mathcal{H}$ , les  $f_{ij}$  sont des sections de  $\mathcal{F}$ . De plus, elles vérifient une sorte de relation de Chasles :  $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$  sur l'ouvert  $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$  : on dit que la famille  $f_{ij}$  est un *cocycle*.

Maintenant, dire que les  $g_i$  se recollent, c'est dire qu'il existe des  $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$  tels que l'on ait  $f_i + g_i = f_j + g_j$  sur  $U_{ij}$ , ou encore que  $f_{ij} = f_j - f_i$  (attention, il s'agit cette fois de sections de  $\mathcal{F}$ ). On dira alors que la famille  $f_{ij}$  est un *cobord*. (Bien entendu, un cobord est un cocycle.)

L'obstruction à ce que  $h$  soit dans l'image de  $\pi$  est donc celle qui fait qu'un cocycle n'est pas toujours un cobord. On est ainsi amené à définir  $H^1(X, \mathcal{F})$  comme le quotient du groupe des cocycles par celui

des cobords, la flèche  $\delta : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$  étant celle qui à  $h$  associe la classe du cocycle  $f_{ij}$  défini comme ci-dessus. On aura bien alors  $h \in \text{Im } \pi \iff h \in \text{Ker } \delta$ .

## 1. Un peu d'algèbre homologique

**Définition 1.1.** *Un complexe (disons de groupes abéliens, mais ce pourrait être aussi bien de  $A$ -modules, ou de  $\mathcal{O}_X$ -modules) est une suite  $A^\bullet$  :*

$$\dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^i} A^i \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+1} \rightarrow \dots$$

de groupes abéliens  $A^i$ , indexée par  $\mathbf{Z}$  ou  $\mathbf{N}$  avec des homomorphismes vérifiant pour tout  $i$  :  $d^{i+1} \circ d^i = 0$ . Les homomorphismes  $d^i$  sont appelés différentielles (ou cobords). **Attention**, la suite n'est pas exacte, on a seulement  $\text{Im } d^i \subset \text{Ker } d^{i+1}$ , mais il n'y a pas égalité. Le groupe quotient  $\text{Ker } d^{i+1} / \text{Im } d^i$  est appelé  $i^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie du complexe et noté  $H^i(A^\bullet)$ .

On peut aussi définir des complexes avec une différentielle qui diminue les degrés. On parle alors de l'homologie du complexe. Dans le cas de la cohomologie (resp. de l'homologie) on note en général les termes du complexe avec les indices en haut (resp. en bas).

**Exemple 1.2.** Sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$ , on a le complexe des formes différentielles muni de la différentielle usuelle  $d$  (cf. [Go]). Le noyau de  $d$  est constitué des formes fermées, son image des formes exactes et la nullité des groupes de cohomologie est liée à des propriétés topologiques de  $U$ . Par exemple, si  $U$  est étoilé, le lemme de Poincaré dit que les  $H^i$  sont nuls. C'est encore vrai si  $n = 2$  et si  $U$  est simplement connexe.

**Définition 1.3.** *Soient  $A^\bullet$  et  $B^\bullet$  deux complexes, de différentielles respectives  $d^i$  et  $\delta^i$ . Un morphisme de complexes de  $A^\bullet$  dans  $B^\bullet$  est la donnée, pour chaque  $i$ , d'un homomorphisme  $f^i : A^i \rightarrow B^i$  rendant le diagramme ci-dessous commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A^i & \xrightarrow{d^{i+1}} & A^{i+1} \\ \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ B^i & \xrightarrow{\delta^{i+1}} & B^{i+1} \end{array}$$

On le note  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ . Une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \rightarrow 0$$

est la donnée de deux morphismes de complexes  $f, g$  avec, pour tout  $i$ , la suite exacte

$$0 \rightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \rightarrow 0.$$

Il résulte aussitôt de la définition d'un morphisme que les  $f^i$  envoient les noyaux et les images des  $d^i$  dans ceux des  $\delta^i$ , donc induisent des morphismes  $f^i : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$ .

Dans le cas d'une suite exacte on a la proposition fondamentale suivante :

**Proposition 1.4.** Soit  $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \rightarrow 0$  une suite exacte de complexes. Il existe des homomorphismes, dits de connexion,

$$\partial^n : H^n C^\bullet \rightarrow H^{n+1} A^\bullet$$

tels que l'on ait une suite exacte longue :

$$\dots H^n A^\bullet \xrightarrow{\bar{f}^n} H^n B^\bullet \xrightarrow{\bar{g}^n} H^n C^\bullet \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1} A^\bullet \xrightarrow{\bar{f}^{n+1}} H^{n+1} B^\bullet \dots$$

*Démonstration*

1) On considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont des complexes et les colonnes des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \rightarrow & A^n & \xrightarrow{d^{n+1}} & A^{n+1} & \xrightarrow{d^{n+2}} & A^{n+2} & \rightarrow & \dots & \\
 & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \downarrow f^{n+2} & & & \\
 \dots & \rightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow{\delta^n} & B^n & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & B^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+2}} & B^{n+2} & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow g^{n-1} & & \downarrow g^n & & \downarrow g^{n+1} & & & \\
 \dots & \rightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{\Delta^n} & C^n & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & C^{n+1} & \rightarrow & \dots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & 
 \end{array}$$

2) Le plus difficile est peut-être de définir l'homomorphisme  $\partial^n : H^n C^\bullet \rightarrow H^{n+1} A^\bullet$ . On a  $H^n C^\bullet = \text{Ker } \Delta^{n+1} / \text{Im } \Delta^n$ . Soit  $\bar{x} \in H^n C^\bullet$ , il provient de  $x \in C^n$ , avec  $\Delta^{n+1}(x) = 0$ .

Partons donc d'un tel  $x$ . Comme  $g^n$  est surjectif, on a  $x = g^n(y)$ ,  $y \in B^n$  et  $\Delta^{n+1}(x) = \Delta^{n+1}g^n(y) = g^{n+1}\delta^{n+1}(y) = 0$ , donc  $\delta^{n+1}(y) \in$

Im  $f^{n+1}$  : il existe  $z \in A^{n+1}$ , unique, tel que  $\delta^{n+1}(y) = f^{n+1}(z)$ . On a  $z \in \text{Ker } d^{n+2}$ . En effet,  $f^{n+2}d^{n+2}(z) = \delta^{n+2}f^{n+1}(z) = \delta^{n+2}\delta^{n+1}(y) = 0$  car  $B^*$  est un complexe, et, comme  $f^{n+2}$  est injectif, on a le résultat. Soit alors  $\bar{z}$  l'image de  $z$  dans  $H^{n+1}A^*$ .

On vérifie déjà que  $\bar{z}$  ne dépend pas du choix du relèvement  $y$  de  $x$ . Si on a un autre  $y'$  qui relève  $x$ , on a  $y' = y + f^n(t)$  avec  $t \in A^n$ , donc  $\delta^{n+1}(y') = \delta^{n+1}(y) + f^{n+1}d^{n+1}(t)$ . Vu l'injectivité de  $f^{n+1}$  on a donc  $z' = z + d^{n+1}(t)$ , mais alors  $\bar{z}' = \bar{z}$  dans  $H^n$ .

On a donc construit une application  $D : \text{Ker } \Delta^{n+1} \rightarrow H^{n+1}A^*$ .

On montre alors :

a)  $D$  est un homomorphisme. (C'est clair car on peut relever  $x + x'$  en  $y + y'$ .)

b)  $D$  est nul sur Im  $\Delta^n$ . En effet, si  $x = \Delta^n(u)$ ,  $u \in C^{n-1}$ , on relève  $u$  en  $v \in B^{n-1}$  et on a  $x = g^n\delta^n(v)$ . On peut donc relever  $x$  en  $y = \delta^n(v)$ , mais alors  $\delta^{n+1}\delta^n(v) = 0$ , donc  $z = 0$ .

On en déduit que  $D$  se factorise en  $\partial^n : H^n C^* \rightarrow H^{n+1}A^*$ , donné, avec les notations précédentes, par  $\partial^n(\bar{x}) = \bar{z}$ .

3) Il reste à prouver l'exactitude de la suite exacte longue. C'est une chasse au diagramme sans difficulté. Traitons par exemple l'exactitude en  $H^n C^*$ , le lecteur se chargera des deux autres cas.

1) On a  $\partial^n \bar{g}^n = 0$ , donc Im  $\bar{g}^n \subset \text{Ker } \partial^n$ . En effet, soit  $\bar{y} \in H^n B^*$ , il provient de  $y \in B^n$  avec  $\delta^{n+1}(y) = 0$ . On a  $\bar{g}^n(\bar{y}) = \overline{g^n(y)} = \bar{x}$ . Vu la définition de  $\partial^n$  on a  $\partial^n(\bar{x}) = \bar{z}$  avec  $f^{n+1}(z) = \delta_{n+1}(y) = 0$ , donc, comme  $f^{n+1}$  est injectif,  $z = 0$ .

2) Réciproquement, soit  $\bar{x} \in \text{Ker } \partial^n$ . On a donc, avec les notations précédentes,  $\bar{z} = 0$ , i.e.  $z = d^{n+1}(t)$ , avec  $t \in A^n$ , donc  $f^{n+1}(z) = \delta^{n+1}(y) = \delta^{n+1}f^n(t)$ , de sorte que  $y - f^n(t) \in \text{Ker } \delta^{n+1}$ , mais alors on a  $x = g^n(y - f^n(t))$  et  $\bar{x} \in \text{Im } \bar{g}^n$ .

## 2. La cohomologie de Čech

### a. Définition

Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathcal{F}$  un faisceau de groupes abéliens sur  $X$ ,  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert fini de  $X$  indexé par l'ensemble ordonné  $I = \{0, 1, \dots, n\}$ .

On note les intersections  $U_{ij} = U_i \cap U_j, \dots, U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ . Nous allons définir un complexe de groupes abéliens  $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

On pose, pour  $0 \leq p \leq n$  :

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

Si  $p > n$  on pose  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ .

Un élément de  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  s'appelle une cochaîne. Il consiste en la donnée de sections  $s_{i_0 \dots i_p}$  de  $\mathcal{F}$  sur chaque intersection  $U_{i_0 \dots i_p}$ . Ainsi  $C^0$  est formée de sections  $s_i$  sur les  $U_i$ ,  $C^1$  de  $s_{ij}$  sur les  $U_{ij}, \dots$

Nous définissons maintenant la différentielle  $d^{p+1} : C^p \rightarrow C^{p+1}$  par la formule :

$$(d^{p+1}s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}$$

où le signe  $\widehat{i}_k$  signifie qu'on omet l'indice  $i_k$ .

**Proposition-définition 2.1.** On a  $d^{p+1} \circ d^p = 0$  pour tout  $p \geq 0$ . Le complexe ainsi obtenu s'appelle le complexe de Čech de  $\mathcal{F}$  relatif au recouvrement  $\mathcal{U}$ . Ses groupes de cohomologie sont les groupes de cohomologie de Čech de  $\mathcal{F}$  relatifs à  $\mathcal{U}$ . On les note  $H^{\nu p}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

*Démonstration.* Soit  $t = d^p(s)$ . On calcule :

$$\begin{aligned} d^{p+1}(t)_{i_0 \dots i_{p+1}} &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k t_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \sum_{l=0, l \neq k}^{p+1} (-1)^{\alpha(k,l)} s_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots \widehat{i}_l \dots i_{p+1}} |_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}} \end{aligned}$$

où l'entier  $\alpha(k, l)$  vaut  $l$  si  $l < k$  et  $l + 1$  si  $l > k$ .

Regardons alors dans la somme totale le terme  $s_{i_0 \dots \widehat{\alpha} \dots \widehat{\beta} \dots i_{p+1}}$ ,  $\alpha < \beta$ , il intervient deux fois, l'une pour  $l = \alpha$ ,  $k = \beta$  avec le signe  $(-1)^\alpha (-1)^{\beta+1}$ , l'autre pour  $k = \alpha$ ,  $l = \beta$  avec le signe  $(-1)^\alpha (-1)^\beta$  : au total ces termes s'annulent et on a le résultat.

*Exemple 2.2.* Si  $s \in C^0$ , on a  $s = (s_i)$  avec  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  et le cobord  $ds$  est donné par  $(ds)_{ij} = (s_j - s_i)|_{U_{ij}}$ . Si  $t \in C^1$ ,  $t = (t_{ij}) \in \mathcal{F}(U_{ij})$ , son image par  $d$  est  $(dt)_{ijk} = (t_{jk} - t_{ik} + t_{ij})|_{U_{ijk}}$ . On vérifie bien sur cet exemple la nullité de  $d \circ d$ . On retrouve aussi la description des cocycles et des cobords donnée dans l'introduction.

Il s'agit maintenant de voir que les groupes de cohomologie que nous venons de définir remplissent bien les fonctions que nous leur avons assignées dans l'introduction. Déjà le  $H^0$  est bien ce que l'on attend :

**Proposition 2.3.** *On a  $H^{\vee 0}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $H^0$  est juste le noyau de la première différentielle. Il est donc formé des  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  tels que  $ds = 0$ , i.e. tels que  $s_i = s_j$  sur  $U_{ij}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est un faisceau les  $s_i$  se recollent en une section globale  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

#### Remarques 2.4

1) La cohomologie de Čech est fonctorielle : si on a un homomorphisme de faisceaux de groupes  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  on en déduit immédiatement un homomorphisme de complexes de  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  dans  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$  et des homomorphismes de groupes  $H^p(u) : H^{\vee p}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{\vee p}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ .

2) On vérifie aussitôt sur la définition de la cohomologie de Čech qu'elle commute aux sommes directes, i.e. qu'on a la formule :

$$H^{\vee p}(X, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i) = \bigoplus_{i \in I} H^{\vee p}(X, \mathcal{F}_i).$$

3) Lorsque  $X$  est une variété algébrique sur le corps  $k$  et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module, les groupes  $\mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$  sont munis naturellement de structures de  $k$ -espaces vectoriels et il en est de même des  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ . Comme les différentielles sont  $k$ -linéaires, tous les  $H^{\vee p}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  sont donc aussi des  $k$ -espaces vectoriels.

#### b. La nullité des $H^i$ en affine

**Théorème 2.5.** *Soient  $X$  une variété affine,  $A = \Gamma(X)$  son anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $\mathcal{F} = \bar{M}$  le faisceau quasi-cohérent associé et soit  $\mathcal{U} = (U_i)$  ( $i = 0, \dots, m$ ) un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines standard. Alors on a, pour tout  $p > 0$ ,  $H^{\vee p}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ .*

*Démonstration.* Nous allons traiter essentiellement un cas doublement particulier : 1) on suppose  $p = 1$ , 2) on suppose  $A$  intègre et  $M$  sans torsion. Nous donnerons quelques indications pour le cas général qui n'est pas conceptuellement plus difficile, mais un peu long à écrire.

Rappelons que  $M$  sans torsion signifie que si  $a \in A$  et  $x \in M$  avec  $ax = 0$  on a  $a = 0$  ou  $x = 0$ .

Posons  $U_i = D(f_i)$ , avec  $f_i \in A, f_i \neq 0$ .

Soit  $\alpha = (\alpha_{ij})$  un 1-cocycle. A priori  $\alpha_{ij}$  n'est défini que pour  $i < j$  et la relation des cocycles :

$$(*) \quad \alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0$$

ne vaut que pour  $i < j < k$ . Il est commode ici d'étendre la définition à tous les couples  $i, j$  en posant  $\alpha_{ii} = 0$  pour tout  $i$ , et  $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$  si  $i > j$ .

On vérifie que la relation (\*) est alors valable pour tous les triplets  $i, j, k$ .

On a  $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \widetilde{M}) = M_{f_i f_j}$ . On le note  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} / f_i^n f_j^n$  avec  $\beta_{ij} \in M$ . (On peut prendre le même exposant  $n$  pour tous par finitude.)

La relation (\*) s'écrit alors :

$$\frac{\beta_{jk}}{f_j^n f_k^n} - \frac{\beta_{ik}}{f_i^n f_k^n} + \frac{\beta_{ij}}{f_i^n f_j^n} = 0$$

sur  $U_{ijk}$ , ou encore  $f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij} = 0$ , a priori dans  $M_{f_i f_j f_k}$ , mais, comme  $M$  est sans torsion, cette relation est vraie dans  $M$ .

On peut encore écrire cette relation sous la forme :

$$(**) \quad f_k^n \alpha_{ij} = -\frac{\beta_{jk}}{f_j^n} + \frac{\beta_{ik}}{f_i^n}$$

qui vaut sur l'ouvert  $U_{ij}$ .

On note que cette relation n'est pas très éloignée de ce qu'on cherche : on veut montrer que  $\alpha_{ij}$  est un cobord donc qu'il s'écrit  $\alpha_{ij} = \gamma_j - \gamma_i$  et la relation (\*\*) dit que  $\alpha_{ij}$  est un cobord si on inverse  $f_k$ , donc sur  $U_k$ . Pour recoller tout cela on va utiliser une partition de l'unité.

En effet, comme on l'a vu en III, 2.3, le fait que les  $D(f_i) = D(f_i^n)$  recouvrent  $X$  signifie qu'on a une partition de l'unité : il existe des  $a_k \in A$  tels que l'on ait  $1 = \sum_{k=0}^m a_k f_k^n$ . On pose alors pour tout  $j$  :

$$\gamma_j = -\sum_{k=0}^m a_k \frac{\beta_{jk}}{f_j^n} \in \Gamma(U_j, \widetilde{M})$$

et on a, sur  $U_{ij}$ ,

$$\gamma_j - \gamma_i = \sum_{k=0}^m a_k \left( \frac{\beta_{ik}}{f_i^n} - \frac{\beta_{jk}}{f_j^n} \right) = \sum_{k=0}^m a_k f_k^n \alpha_{ij} = \alpha_{ij}$$

donc  $\alpha$  est bien un cobord.

La démonstration sans les hypothèses  $A$  intègre et  $M$  sans torsion est tout à fait analogue. Il faut seulement faire attention au fait que lorsqu'on a la relation  $f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij} = 0$  sur  $U_{ijk}$ , donc dans  $M_{f_i, f_j, f_k}$ , cela signifie qu'il existe un entier  $N$  (on peut prendre le même pour tous les triplets) tel que  $f_i^N f_j^N f_k^N (f_i^n \beta_{jk} - f_j^n \beta_{ik} + f_k^n \beta_{ij}) = 0$  dans  $M$ . Le reste est à peu près identique (il faut prendre l'exposant  $n + N$  dans la partition de l'unité et écrire les  $\gamma_j$  avec  $a_k f_k^N$  au lieu de  $a_k$ ).

Pour le groupe  $H^p$  (dans le cas  $A$  intègre et  $M$  sans torsion), si  $\alpha_{i_0, \dots, i_p}$  est notre cocycle, on pose

$$\alpha_{i_0, \dots, i_p} = \frac{\beta_{i_0, \dots, i_p}}{f_{i_0}^n \dots f_{i_p}^n}.$$

On a la partition de l'unité  $1 = \sum_{k=0}^m a_k f_k^n$ , il suffit alors de prendre :

$$\gamma_{i_0, \dots, i_{p-1}} = \sum_{k=0}^m a_k \frac{\beta_{k, i_0, \dots, i_{p-1}}}{f_{i_0}^n \dots f_{i_{p-1}}^n}$$

et on vérifie (en tenant compte de  $d\alpha = 0$ ) qu'on a bien  $\alpha = d\gamma$ .

**Corollaire 2.6.** Soient  $X$  une variété algébrique affine et  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents. Alors on a la suite exacte sur les sections globales :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Vu le calcul fait dans l'introduction (et pour lequel on peut prendre des ouverts standard puisqu'ils forment une base d'ouverts) c'est exactement 2.5.

### c. La suite exacte de cohomologie de Čech

Nous aurons besoin de la notion de variété séparée (cf. Problème I, partie 4) :

**Définition 2.7.** Soit  $X$  une variété algébrique. On dit que  $X$  est séparée si la diagonale  $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$  est fermée dans le produit  $X \times X$ . Si  $X$  est séparée, et si  $U$  et  $V$  sont des ouverts affines de  $X$ ,  $U \cap V$  est un ouvert affine de  $X$ .

**Proposition 2.8.** Les variétés affines, projectives, quasi-affines, quasi-projectives sont séparées.

On a alors le théorème :

**Théorème 2.9.** Soient  $X$  une variété algébrique séparée,  $\mathcal{U}$  un recouvrement affine fini de  $X$  et soit  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents. Alors on a une suite exacte longue en cohomologie de Čech :

$$0 \rightarrow H^{v_0}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{v_0}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^{v_0}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \\ H^{v_1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{v_1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

*Démonstration.* On regarde les complexes de Čech associés à  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ . Ils forment une suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0.$$

En effet, comme les  $U_i$  sont affines et  $X$  séparée, les intersections  $U_{i_0, \dots, i_p}$  sont aussi affines. Mais alors, par 2.5, comme les faisceaux sont quasi-cohérents, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \mathcal{H}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow 0.$$

On obtient la suite exacte de complexes en faisant le produit fini de ces suites pour  $i_0 < \dots < i_p$  et la conclusion s'obtient en appliquant 1.4.

*Remarque 2.10.* On peut montrer que la cohomologie de Čech, avec les hypothèses de 2.9 (i.e.  $X$  séparée,  $\mathcal{F}$  quasi-cohérent et  $\mathcal{U}$  affine), est la bonne cohomologie (il y a unicité de celle-ci pourvu qu'on ait  $H^0 = \Gamma$  et la suite exacte longue, ainsi qu'une petite propriété d'annulation). Pour toutes ces questions, cf. [H] III, 4.5. En particulier, et nous admettons cela, la cohomologie de Čech ne dépend pas du recouvrement affine choisi. (On peut aussi montrer directement ce fait en utilisant des suites spectrales, cf. [G] 5.9.2.) On notera donc désormais, toujours sous les hypothèses ci-dessus,  $H^i(X, \mathcal{F})$  ce  $i^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie en omettant la mention du recouvrement et le signe  $^v$ .

**Proposition 2.11.** Soient  $X$  une variété algébrique séparée,  $Y$  une sous-variété fermée de  $X$  et  $j : Y \rightarrow X$  l'injection canonique. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $Y$ . On a, pour tout  $i : H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$ .

*Démonstration.* Vu les hypothèses sur  $X, Y$  et  $\mathcal{F}$  on peut calculer la cohomologie avec Čech. On prend alors un recouvrement affine  $U_i$  de  $X$ . Les  $Y \cap U_i$  forment un recouvrement affine de  $Y$  et la conclusion vient de la formule  $\mathcal{F}(U \cap Y) = j_*\mathcal{F}(U)$  qui est la définition de  $j_*$ .

*Remarque 2.12.* Conformément à l'habitude instituée au chapitre III on identifiera souvent  $\mathcal{F}$  à son image directe  $j_*\mathcal{F}$  et on notera abusivement  $H^i(X, \mathcal{F})$  le groupe de cohomologie  $H^i(X, j_*\mathcal{F})$ .

### 3. Théorèmes d'annulation

La commodité d'utilisation de la cohomologie (et notamment des suites exactes longues) dépend en grande partie de la faculté de montrer que certains groupes de cohomologie sont nuls. En ce sens on a déjà le théorème 2.5 qui montre que sur une variété algébrique affine il n'y a pas de cohomologie en degré  $> 0$ .

Voici un autre résultat lié à la dimension :

**Théorème 3.1.** *Soit  $V$  une variété séparée de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent. On a  $H^i(V, \mathcal{F}) = 0$  pour  $i > n$ .*

*Démonstration.* On se contente de montrer le théorème pour une variété algébrique projective; pour le cas général, cf. [H] III, 2.7 ou [H] Exercice III, 4.8. Dans le cas projectif on a le lemme suivant :

**Lemme 3.2.** *Soit  $V$  une sous-variété fermée de  $\mathbf{P}^N$ , de dimension  $n$ . Il existe une sous-variété linéaire  $W$  de  $\mathbf{P}^N$ , de codimension  $n + 1$ , telle que  $V \cap W = \emptyset$ .*

*Démonstration (de 3.2).* On raisonne par récurrence sur  $N$ . C'est clair pour  $N = 1$ . Pour passer de  $N - 1$  à  $N$  on montre qu'il existe un hyperplan  $H$  de  $\mathbf{P}^N$  ne contenant aucune composante de  $V$ . Alors les traces sur  $H$  des dites composantes sont vides ou de dimension  $\leq n - 1$  et on applique la récurrence dans  $H$ .

Posons  $E = k^{N+1}$ . Pour prouver l'existence de  $H$  on remarque que les hyperplans projectifs correspondent aux formes linéaires non nulles sur  $E$ , deux formes proportionnelles donnant le même hyperplan. Autrement dit, l'espace des hyperplans est l'espace projectif  $\mathbf{P}(E^*)$ . En termes de coordonnées, si  $H$  a pour équation  $a_0X_0 + \dots + a_NX_N = 0$ , il lui correspond le point de coordonnées homogènes  $(a_0, \dots, a_N)$ .

Si  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  on choisit  $x_i \in V_i$ ,  $x_i = (x_{i0}, \dots, x_{iN})$ . Dans l'espace des hyperplans, l'ensemble des hyperplans ne contenant pas  $x_i$  est un ouvert non vide  $\Omega_i$  (défini par  $\sum_{k=0}^N x_{ik}a_k \neq 0$ ). Mais alors l'intersection  $\Omega$  des  $\Omega_i$  est non vide et tout  $H \in \Omega$  convient.

Revenons à 3.1. Quitte à faire une homographie on peut supposer  $W = V(X_0, \dots, X_n)$ . Comme  $V \cap W$  est vide  $V \subset D^+(X_0) \cup \dots \cup D^+(X_n)$  et  $V$  est donc recouvert par les  $n + 1$  ouverts affines  $V \cap D^+(X_i)$ . Mais alors, dans le complexe de Čech associé à ce recouvrement, tous les  $C^i$  pour  $i > n$  sont nuls, donc a fortiori les  $H^i$ .

**Remarque 3.3.** La démonstration précédente montre aussi que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau quasi-cohérent sur une variété  $V$ , à support dans une sous-variété  $W$  de dimension  $d$  (i.e. tel que  $\mathcal{F}(U) = 0$  pour tout ouvert  $U$  ne rencontrant pas  $W$ ), on a pour tout  $p > d$ ,  $H^p(V, \mathcal{F}) = 0$ . Ceci se produit en particulier si  $\mathcal{F}$  est un faisceau de la forme  $j_*(\mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est un faisceau sur  $W$  et  $j$  l'injection canonique de  $W$  dans  $V$ .

Par exemple, si  $Z$  est un schéma fini contenu dans  $\mathbf{P}^n$  (cf. Ch. VI) on a  $H^p(Z, \mathcal{O}_Z) = H^p(\mathbf{P}^n, j_*\mathcal{O}_Z) = 0$  pour  $p > 0$ .

#### 4. La cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$

La cohomologie des faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ , qui joue un rôle fondamental en géométrie projective, est particulièrement simple.

**Théorème 4.1.** Soit  $n$  un entier  $\geq 1$  et soit  $d \in \mathbf{Z}$ . On note  $S_d$  l'espace des polynômes homogènes de degré  $d$  en  $n + 1$  variables. (Si  $d$  est  $< 0$  on convient que  $S_d = 0$ .)

- a) On a  $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = S_d$  pour tout  $d$ .
- b) On a  $H^i(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = 0$  pour  $0 < i < n$  et pour tout  $d$ .
- c) L'espace vectoriel  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  est isomorphe au dual de l'espace  $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d - n - 1))$  pour tout  $d \in \mathbf{Z}$ .

**Exemple 4.2.** Il est facile de retenir les dimensions des groupes en question. D'abord, ils sont tous nuls sauf  $H^0$  et  $H^n$ . Ensuite le  $H^0$  relatif à  $d$  est formé des polynômes homogènes de degré  $d$ , donc il est de dimension  $\binom{n+d}{n}$ . Par exemple pour  $n = 3$  la suite de ces nombres est 1, 4, 10, 20, 35, 56, .... Enfin les  $H^n$  ont les mêmes rangs, mais en allant dans l'autre sens : ils croissent quand  $d$  tend vers  $-\infty$  et il suffit de se souvenir que le premier  $d$  tel que  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  soit non nul est égal à  $-n - 1$ . La dimension du  $H^n$  relatif à  $d$  est  $\binom{-d-1}{n}$ . On notera que les faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-i)$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , ont une cohomologie particulièrement sympathique!

*Démonstration.* Posons  $S = k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} S_d$ . Nous allons prouver le théorème pour tous les entiers  $d \in \mathbf{Z}$  à la fois en introduisant le faisceau  $\mathcal{F} = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ . C'est un faisceau quasi-cohérent sur  $\mathbf{P}^n$  (mais non cohérent), associé au  $S$ -module gradué  $M = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} S(d)$ . Comme la cohomologie commute aux sommes directes (cf. 2.4.2), la connaissance de la cohomologie de  $\mathcal{F}$  nous donnera celle de tous ses facteurs.

Bien entendu nous allons calculer la cohomologie de  $\mathcal{F}$  avec le recouvrement standard de  $\mathbf{P}^n$  par les ouverts affines  $U_i = D^+(X_i)$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n$ . On sait (cf. III, 9) qu'on a  $\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = S(d)_{(X_{i_0} \dots X_{i_p})}$ , ensemble des éléments homogènes de degré  $d$  du localisé  $S_{X_{i_0} \dots X_{i_p}}$  et on en déduit le complexe de Čech de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ . Le complexe de Čech de  $\mathcal{F}$ , qui est la somme des précédents, est formé avec les localisés de  $S$  : on a  $C^p = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} S_{X_{i_0} \dots X_{i_p}}$ , d'où le complexe :

$$\prod_{i=0}^n S_{X_i} \rightarrow \prod_{0 \leq i < j \leq n} S_{X_i X_j} \rightarrow \dots \rightarrow \prod_{i=0}^n S_{X_0 \dots \widehat{X_i} \dots X_n} \xrightarrow{\delta_n} S_{X_0 X_1 \dots X_n}.$$

On note que le groupe  $C^p$ , muni de sa décomposition naturelle en somme directe, est un  $S$ -module gradué, donc aussi le groupe de cohomologie  $H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{F})$  et la partie homogène de degré  $d$  de ce groupe n'est autre que  $H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$ .

Le foncteur  $H^0$  étant égal à  $\Gamma$  (cf. 2.3), le calcul de  $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  a déjà été fait en III, 9.

Pour calculer  $H^n$ , on note d'abord que  $S_{X_0 X_1 \dots X_n}$  est un espace vectoriel de dimension infinie dont une base est formée de tous les monômes  $X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$  avec les  $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ . On remarque ensuite que  $H^n$  est le conoyau de  $\delta_n$  et que l'image de cette flèche est formée des fractions de la forme :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{F_i}{(X_0 \dots \widehat{X_i} \dots X_n)^r} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{X_i^r F_i}{(X_0 \dots X_n)^r}.$$

Une base de l'image de  $\delta_n$  est donc formée des monômes  $X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$  comme ci-dessus, mais où l'un au moins des  $\alpha_i$  est  $\geq 0$ . Il en résulte que le conoyau  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{F})$  a pour base les images des monômes dont tous les exposants sont strictement négatifs, le morceau  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  correspondant aux monômes de degré  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = d$ . On constate déjà que cet espace est nul pour  $d \geq -n$ . Pour  $d \leq -n - 1$  il s'agit de compter les monômes de degré  $d$  en les  $X_i$  dont tous les exposants sont  $< 0$ . Cela

revient à compter les monômes de degré  $-d - (n + 1)$  en les indéterminées  $1/X_i$  et il y en a donc  $\binom{-d - 1}{n}$ .

Dans le cas particulier  $d = -n - 1$  l'espace  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1))$  est de dimension 1 avec pour base l'image du monôme  $1/(X_0 \cdots X_n)$ . Si on identifie cet espace au corps de base on a une forme bilinéaire non dégénérée :

$$\varphi : H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) \times H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d - n - 1)) \rightarrow H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1))$$

qui associe aux monômes  $X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$  et  $X_0^{\beta_0} \cdots X_n^{\beta_n}$  avec  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = d$  et  $\sum_{i=0}^n \beta_i = -d - n - 1$  l'image du monôme  $X_0^{\alpha_0 + \beta_0} \cdots X_n^{\alpha_n + \beta_n}$  dans  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1))$ . Comme  $\varphi$  est non dégénérée (si on ordonne convenablement les monômes elle a pour matrice l'identité), elle induit l'isomorphisme cherché entre  $H^n$  et le dual de  $H^0$ .

Il reste à prouver le point b). On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$  il n'y a rien à démontrer.

On considère l'élément  $X_0$  de  $S$  et le complexe  $C_{(X_0)}$  obtenu en prenant la partie homogène de degré zéro dans le localisé par rapport à  $X_0$  du complexe de Čech  $C^*$  de  $\mathcal{F}$ .

Le lecteur prouvera le lemme facile suivant (qui résulte du fait que le foncteur localisation est exact) :

**Lemme 4.3.** Soit  $M^* = M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{u} M''$  un complexe de  $S$ -modules gradués et soit  $H(M^*)$  le groupe de cohomologie associé (qui est un  $S$ -module gradué). Soit  $f \in S$  un élément homogène de degré  $d > 0$ ,  $M_{(f)}^* = M'_{(f)} \xrightarrow{v(f)} M_{(f)} \xrightarrow{u(f)} M''_{(f)}$  le complexe obtenu en prenant les éléments homogènes de degré 0 du localisé et  $H(M_{(f)}^*)$  son groupe de cohomologie. Alors on a  $H(M_{(f)}^*) = H(M^*)_{(f)}$ .

Le lemme montre que les groupes de cohomologie de  $C_{(X_0)}$  s'obtiennent par localisation à partir de ceux de  $C^*$  :  $H^p(C_{(X_0)}) = H^p(C^*)_{(X_0)}$ .

Par ailleurs, on sait (cf. III, 8.5), qu'on a, via l'opération bémol, un isomorphisme  $S_{(X_0)} \simeq R = k[X_1, \dots, X_n] = \Gamma(D^+(X_0), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n})$  et cet isomorphisme induit des isomorphismes sur les localisés :  $(S_{X_{i_0} \cdots X_{i_p}})_{(X_0)} \simeq R_{X_{i_0} \cdots X_{i_p}}$  (en remplaçant éventuellement  $X_0$  par 1); autrement dit le complexe  $C_{(X_0)}$  est isomorphe au complexe de Čech  $C^*$  du faisceau  $\mathcal{F}$  restreint à  $D^+(X_0)$ , relatif au recouvrement (affine) de cet ouvert par les  $D^+(X_i) \cap D^+(X_0)$ , pour  $i = 0, \dots, n$ .

Mais, comme  $D^+(X_0)$  est affine et  $\mathcal{F}$  quasi-cohérent, la cohomologie de  $C''$  est nulle pour  $p \geq 1$ , donc aussi celle de  $C'_{(X_0)}$  et on a donc, en définitive :  $H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{F})_{(X_0)} = 0$  pour  $p \geq 1$ . Ceci signifie simplement que pour tout  $x \in H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{F})$  (ou encore pour tout  $x \in H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$ ),  $x$  est annulé par une puissance de  $X_0$ .

Pour montrer que  $H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  est nul pour  $p \geq 1$  il suffit alors de prouver l'assertion suivante :

**Lemme 4.4.** *La multiplication par  $X_0$  induit un isomorphisme :*

$$H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) \simeq H^p(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d+1)).$$

*Démonstration (de 4.4).* On considère la suite exacte de faisceaux induite par la multiplication par  $X_0$  (cf. Ch. III, 10.a) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d) \xrightarrow{X_0} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d+1) \rightarrow \mathcal{O}_H(d+1) \rightarrow 0$$

où  $H$  est le fermé  $V(X_0)$ , isomorphe à  $\mathbf{P}^{n-1}$  (on utilise les conventions de 2.12 ci-dessus). On écrit la suite de cohomologie associée à cette suite exacte. Elle commence par :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) \xrightarrow{X_0} H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d+1)) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathcal{O}_H(d+1))$$

et on voit que  $\pi$  est surjectif en calculant les dimensions des espaces vectoriels de la suite. La suite exacte longue finit par

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_H(d+1)) \xrightarrow{i} H^n(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) \xrightarrow{X_0} H^n(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d+1)) \rightarrow 0$$

(en effet, on a  $H^n(\mathcal{O}_H(d+1)) = 0$  car  $H$  est de dimension  $n-1$ , cf. 3.1). De plus,  $i$  est injectif, toujours pour une raison de dimensions. Comme entre les deux tous les  $H^p(\mathcal{O}_H(d+1))$ , pour  $1 \leq p \leq n-2$ , sont nuls en vertu de l'hypothèse de récurrence, on a bien l'isomorphisme voulu, pour chaque  $p$  compris entre 1 et  $d-1$ .

#### 4.5. Application : retour à Bézout

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $X$  on notera  $h^i \mathcal{F}$  la dimension de l'espace vectoriel  $H^i(X, \mathcal{F})$ .

Souvenons-nous qu'il s'agissait de calculer  $h^0 \mathcal{O}_Z$ ,  $Z$  étant le schéma fini  $V(F, G)$ . On avait les deux suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-t) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

On peut écrire les suites exactes de cohomologie (en se souvenant que les  $h^1\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n)$  sont nuls). La deuxième suite donne l'égalité  $h^0\mathcal{O}_Z = 1 + h^1\mathcal{J}_Z$  (car  $h^0\mathcal{J}_Z = 0$ ). Elle donne aussi  $h^2\mathcal{J}_Z = h^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} = 0$  (car  $h^1\mathcal{O}_Z = h^2\mathcal{O}_Z = 0$  pour une raison de dimension). La première suite donne alors

$$\begin{aligned} h^1\mathcal{J}_Z &= h^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s-t) - h^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-s) - h^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-t) \\ &= \binom{s+t-1}{2} - \binom{s-1}{2} - \binom{t-1}{2} = st - 1, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Une autre méthode pour prouver Bézout (qui est essentiellement celle que nous avons utilisée au chapitre VI) est de calculer  $h^0\mathcal{O}_Z(d)$  à l'aide des suites exactes précédentes (décalées de  $d$ ). Le point clé de la démonstration est de montrer la nullité de  $H^1\mathcal{J}_Z(d)$  pour  $d$  assez grand (c'est immédiat en utilisant la résolution de  $\mathcal{J}_Z$  et le théorème 4.1). On calcule ensuite  $h^0\mathcal{J}_Z(d)$  puis  $h^0\mathcal{O}_Z(d)$  avec les suites exactes de cohomologie associées aux deux suites exactes ci-dessus. Les calculs sont évidents car les suites longues s'arrêtent au niveau des  $H^0$ .

Cette nullité de  $H^1\mathcal{J}_Z(d)$  pour  $d$  assez grand est un cas particulier d'un théorème général. C'est un résultat dû à J.-P. Serre ainsi que la finitude des dimensions des groupes de cohomologie en projectif que nous avons déjà plusieurs fois évoquée :

**Théorème 4.6** (Serre). *Soit  $X$  une variété algébrique projective et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors :*

1) *Pour tout  $i \geq 0$ ,  $H^i(X, \mathcal{F})$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.*

2) *Il existe un entier  $n_0$ , dépendant de  $\mathcal{F}$ , tel que pour tout  $d \geq n_0$  et tout  $i > 0$  on ait  $H^i(X, \mathcal{F}(d)) = 0$ .*

*Démonstration*

1) Supposons  $X$  plongée dans  $\mathbf{P}^n$  et soit  $i$  l'injection canonique. En vertu de 2.10, quitte à remplacer  $\mathcal{F}$  par  $i_*\mathcal{F}$  on peut supposer  $X = \mathbf{P}^n$ . On note que les faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$  vérifient bien les propriétés 1 et 2 ci-dessus.

2) Posons  $S = k[X_0, \dots, X_n]$ . On sait que  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  où  $M$  est un  $S$ -module gradué de type fini (cf. III, 9.8.2). Si les générateurs  $x_1, \dots, x_r$  de  $M$  sont homogènes de degrés  $n_1, \dots, n_r$  on a une surjection

$$p : L = \bigoplus_{i=1}^r S(-n_i) \rightarrow M$$

qui associe au  $i$ -ème vecteur de base de  $L$  l'élément  $x_i$ . En introduisant le noyau  $N$  de  $p$  (qui est lui aussi un  $S$ -module gradué de type fini) et en passant aux faisceaux on a la suite exacte de faisceaux cohérents :

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_i)$  est un faisceau dont la cohomologie vérifie les propriétés 1) et 2) en vertu de 4.1.

3) Prouvons alors 1) par récurrence descendante sur  $i$ . Pour  $i \geq n+1$  on a  $H^i \mathcal{F} = 0$  pour tout faisceau cohérent (cf. 3.1). Supposons donc le résultat établi pour  $i+1$  et tout faisceau cohérent et passons à  $i$ . On a la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H^i \mathcal{L} \xrightarrow{f} H^i \mathcal{F} \xrightarrow{g} H^{i+1} \mathcal{N} \rightarrow \dots$$

et donc  $h^i \mathcal{F} = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g \leq h^i \mathcal{L} + h^{i+1} \mathcal{N}$  et ces deux dernières quantités sont finies : pour  $h^{i+1} \mathcal{N}$  c'est l'hypothèse de récurrence, pour l'autre c'est le cas particulier calculé en 4.1.

4) Pour le point 2) on procède aussi par récurrence descendante sur  $i$  en établissant la propriété  $(P_i)$  suivante :

$(P_i)$  : Soit  $i$  un entier  $\geq 1$ . Pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $p \geq i$  et  $d \geq n_0$  on ait  $h^p \mathcal{F}(d) = 0$ .

Il est clair que  $(P_{n+1})$  est vraie. Soit  $i$  un entier avec  $1 \leq i \leq n$ , supposons que  $P_{i+1}$  soit vraie et montrons  $P_i$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent et soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  définis comme en 2) ci-dessus. Il existe un entier  $d_0$  tel que, pour  $d \geq d_0$  et  $p \geq i+1$  on ait  $h^p \mathcal{N}(d) = h^p \mathcal{F}(d) = 0$ . On prend alors pour  $n_0$  le sup de  $d_0$  et des  $n_i - n$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Pour  $d \geq n_0$  on a la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H^i \mathcal{L}(d) \xrightarrow{f} H^i \mathcal{F}(d) \xrightarrow{g} H^{i+1} \mathcal{N}(d) \rightarrow \dots$$

Comme  $d - n_i \geq -n$  on a  $h^i \mathcal{L}(d) = 0$  en vertu de 4.1, comme  $d \geq d_0$  on a  $h^{i+1} \mathcal{N}(d) = 0$  et on en déduit  $h^i \mathcal{F}(d) = 0$ .

## Exercices

### 1. Où l'on retrouve une variété non affine

Soit  $S$  l'ouvert  $k^2 - \{(0, 0)\}$  de l'espace affine  $k^2$ , muni de sa structure de variété. Calculer le groupe  $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_S)$  de cohomologie de Čech relatif au recouvrement de  $S$  par les ouverts  $D(X)$  et  $D(Y)$  et montrer que ce groupe est non nul. En déduire que  $S$  n'est pas une variété affine. (cf. Exercice III, A.2).

### 2. Une variété non séparée

1) Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés et  $U_i$  un ouvert de  $X_i$ . On suppose que les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  sont des variétés isomorphes. Soit  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  un tel isomorphisme. Montrer qu'on définit alors une variété  $X$  (qu'on dit obtenue par recollement de  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $U_1$  et  $U_2$ ) de la manière suivante :

On prend la réunion *disjointe*  $Y = X_1 \cup X_2$ , on considère la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie  $U_1$  et  $U_2$  (i.e. les seuls couples non trivialement équivalents sont les  $(x, \varphi(x))$  pour  $x \in U_1$ ) et on appelle  $X$  l'ensemble quotient  $Y/\mathcal{R}$  muni de la topologie quotient. Cela signifie encore que si on considère les applications naturelles (injectives)  $i_1 : X_1 \rightarrow X$  et  $i_2 : X_2 \rightarrow X$ , un sous-ensemble  $V \subset X$  est dit ouvert si et seulement si  $V_1 = i_1^{-1}(V)$  et  $V_2 = i_2^{-1}(V)$  sont ouverts. Le faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  est alors défini par :

$$\mathcal{O}_X(V) = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(V_1), s_2 \in \mathcal{O}_{X_1}(V_2) \\ \text{et } \varphi^*(s_2|_{V_2 \cap U_2}) = s_1|_{V_1 \cap U_1}\}.$$

2) Avec les notations précédentes, on prend  $X_1 = X_2 = k^2$  et  $U_1 = U_2 = k^2 - \{(0, 0)\}$ . Montrer que la variété obtenue par recollement n'est pas séparée (on exhibera deux ouverts affines dont l'intersection n'est pas affine). Intuitivement cette variété est simplement un plan dans lequel l'origine est doublée.

Les exercices suivants ont pour but de calculer quelques groupes de cohomologie dans l'espace projectif. Si  $X$  est une variété projective on désigne par  $h^i(X, \mathcal{F})$ , ou même par  $h^i(\mathcal{F})$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $H^i(X, \mathcal{F})$ .

### 3. Les hypersurfaces

Soit  $F \in S = k[X_0, \dots, X_n]$  un polynôme homogène de degré  $t$  et soit  $Q = V(F)$  l'hypersurface associée. On suppose qu'on a  $I(Q) = (F)$ . On a donc la suite exacte  $0 \rightarrow S(-t) \xrightarrow{j} S \rightarrow S/(F) \rightarrow 0$ , où  $j$  désigne la multiplication par  $F$ , et cette suite donne la suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow 0.$$

Utiliser cette suite exacte pour calculer  $h^i(Q, \mathcal{O}_Q(d))$  pour tout  $d \in \mathbf{Z}$ .

*Remarque.* En fait le calcul vaut même si l'on n'a pas  $I(Q) = (F)$ , ce qui correspond au cas où  $F$  a des facteurs multiples. Dans ce cas les groupes de cohomologie calculés sont ceux du schéma  $Q$ , avec multiplicités.

### 4. Les intersections complètes

On suppose  $n \geq 2$ . On considère cette fois deux polynômes  $F, G \in S = k[X_0, \dots, X_n]$ , homogènes de degrés  $s$  et  $t$ , sans facteurs communs. On pose  $Z = V(F, G)$  et on suppose qu'on a  $I(Z) = (F, G)$  (ou qu'on fait des schémas sans le savoir!) et on a alors (cf. Bézout) les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-t) \rightarrow \mathcal{J}_Z \rightarrow 0.$$

Calculer  $h^i \mathcal{O}_Z(d)$  et  $h^i \mathcal{J}_Z(d)$  pour tout  $d \in \mathbf{Z}$ . (On notera que l'on a  $\dim Z = n - 2$ .)

### 5. La cubique gauche

On reprend les notations et les résultats de l'exercice 4 du chapitre II.

On a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow R(-3)^2 \xrightarrow{u} R(-2)^3 \xrightarrow{v} I(C) \rightarrow 0$$

que l'on traduit en termes de faisceaux par :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-2)^3 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0.$$

On a d'autre part la suite :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

Calculer tous les  $h^i \mathcal{O}_C(d)$  et  $h^i \mathcal{J}_C(d)$  pour  $d \in \mathbf{Z}$ . (Noter déjà que  $h^i \mathcal{O}_C(d)$  est nul pour  $i \geq 2$ . En déduire la valeur de  $h^3 \mathcal{J}_C(d)$ , puis celle de  $h^2 \mathcal{J}_C(d)$ . Le reste va tout seul.)

## 6. Les deux droites disjointes

On reprend les notations et les résultats de l'exercice 5 du chapitre II. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow R(-4) \rightarrow R(-3)^4 \rightarrow R(-2)^4 \rightarrow I(C) \rightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-3)^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-2)^4 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0.$$

Le but est toujours de calculer les  $h^i \mathcal{O}_C(d)$  et les  $h^i \mathcal{J}_C(d)$ . On notera au préalable que, comme la courbe  $C$  est réunion disjointe des deux droites  $D_1$  et  $D_2$ , on a l'isomorphisme  $\mathcal{O}_C \simeq \mathcal{O}_{D_1} \oplus \mathcal{O}_{D_2}$ , ce qui permet le calcul direct des  $h^i \mathcal{O}_C(d)$ .

# Chapitre VIII

## Genre arithmétique des courbes, théorème de Riemann-Roch, forme faible

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 0. Introduction : la caractéristique d'Euler-Poincaré

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur une variété projective  $X$ , on a vu que  $H^i \mathcal{F} = H^i(X, \mathcal{F})$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et on cherche à calculer sa dimension  $h^i \mathcal{F}$ . On verra ci-dessous que cette situation se rencontre souvent dans la pratique. En général ce n'est pas évident, mais un invariant beaucoup plus facile à calculer est la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i \mathcal{F}$  (la somme est finie car on a  $h^i \mathcal{F} = 0$  pour  $i > \dim X$ )<sup>1</sup>. En effet, si on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

on a  $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$ , de sorte que si deux des caractéristiques d'Euler<sup>2</sup> sont connues la troisième l'est aussi. Pour démontrer cette pro-

---

<sup>1</sup>Le premier exemple de ce type de somme alternée est sans doute la formule d'Euler  $s - a + f = 2$  qui relie les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe.

<sup>2</sup>et Poincaré!

priété d'additivité on se ramène, en utilisant la suite exacte de cohomologie, au lemme suivant que le lecteur sagace prouvera par récurrence sur  $n$  à partir de la relation bien connue entre les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire :

**Lemme 0.1.** *Considérons une suite exacte de  $k$ -espaces vectoriels :*

$$0 \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow 0,$$

alors on a  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k A_i = 0$ .

Le célèbre théorème de Riemann-Roch pour les courbes, dans sa forme faible, n'est rien d'autre qu'un calcul de caractéristique d'Euler (dans sa forme plus consistante il met en jeu, en plus, un théorème de dualité). Pour un énoncé plus général du théorème de Riemann-Roch (i.e. toujours un calcul de caractéristique d'Euler, mais cette fois en termes de classes de Chern) on se reportera par exemple à [H] Appendice A.4.1.

## 1. Degré et genre d'une courbe projective, Riemann-Roch 1

### a. La théorie

Soit  $C \subset \mathbf{P}^N$  une courbe (c'est-à-dire une variété algébrique de dimension 1), projective et irréductible. Nous poserons  $S = k[X_0, \dots, X_N]$  et  $A = \Gamma_h(C) = S/I(C)$ . L'anneau  $A$  est un anneau gradué intègre et le faisceau associé  $\tilde{A}$  n'est autre que  $\mathcal{O}_C$ . Notre objectif est de calculer la caractéristique d'Euler  $\chi(\mathcal{O}_C(n)) = h^0 \mathcal{O}_C(n) - h^1 \mathcal{O}_C(n)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  (on notera que les  $h^i$  pour  $i \geq 2$  sont nuls car  $C$  est de dimension 1). La méthode, qui est l'une des techniques standard de la géométrie projective, consiste à étudier la section de la courbe par un hyperplan assez général.

**Proposition 1.1.** *Soit  $H$  un hyperplan ne contenant pas  $C$ . On note  $h$  son équation et  $\bar{h}$  l'image de  $h$  dans  $A$ . La multiplication par  $\bar{h}$  dans  $A$  induit alors la suite exacte de  $S$ -modules gradués :*

$$(*) \quad 0 \rightarrow A(-1) \xrightarrow{\bar{h}} A \rightarrow A/(\bar{h}) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* La seule chose à vérifier est l'injectivité de la multiplication par  $\bar{h}$ . Comme  $A$  est intègre cela résulte du fait que  $C \not\subset H$  donc  $h \notin I(C)$ , donc  $\bar{h} \neq 0$  dans  $A$ .

On considère alors  $Z = C \cap H$ . Comme  $H$  ne contient pas  $C$ , cette intersection est finie. On la munit d'une structure de schéma fini (cf. VI, 1.1) en définissant  $\mathcal{O}_Z$  comme le faisceau associé à la  $k$ -algèbre graduée  $A/(\bar{h})$  (cf. VI, 1.6 et 2.5). On rappelle qu'on a alors pour tout  $n$ , comme dans Bézout (cf. VI, 2.12), un isomorphisme  $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_Z(n)$  (obtenu par exemple par multiplication par la forme linéaire  $X_0$  si l'hyperplan  $X_0 = 0$  ne rencontre pas  $Z$ ).

La suite (\*) donne alors, sur les faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-1) \xrightarrow{\bar{h}} \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

ou encore, en décalant :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(n-1) \xrightarrow{\bar{h}} \mathcal{O}_C(n) \rightarrow \mathcal{O}_Z(n) \rightarrow 0.$$

En prenant les caractéristiques d'Euler dans cette dernière suite on a :

$$\chi \mathcal{O}_C(n) = \chi \mathcal{O}_C(n-1) + \chi \mathcal{O}_Z(n).$$

Mais ce dernier terme est réduit à  $h^0 \mathcal{O}_Z(n)$  (car  $\dim Z = 0$ ) et il est aussi égal à  $h^0 \mathcal{O}_Z$ . On pose  $d = h^0 \mathcal{O}_Z = h^0 \mathcal{O}_{C \cap H}$ . C'est un entier  $\geq 1$  (car  $Z$  n'est pas vide, cf. IV, 2.9) qui n'est autre que le nombre de points, comptés avec multiplicités, de  $C \cap H$  (cf. VI, 1). On a alors  $\chi \mathcal{O}_C(n) = \chi \mathcal{O}_C(n-1) + d$  et, par récurrence,  $\chi \mathcal{O}_C(n) = nd + \chi \mathcal{O}_C$ .

On constate donc que  $\chi \mathcal{O}_C(n)$  est un polynôme de degré 1 en  $n$ . (Ce résultat est déjà une forme du théorème de Riemann-Roch.) Ceci montre au passage que le nombre  $d$  de points de  $C \cap H$  ne dépend pas de  $H$  :

**Définition 1.2.** Soit  $C \subset \mathbf{P}^N$  une courbe projective irréductible. Le nombre  $d$  de points d'intersection de  $C$  (comptés avec leur multiplicité) avec un hyperplan  $H$  ne contenant pas  $C$  est appelé le degré de  $C$ .

Il reste à calculer  $\chi \mathcal{O}_C = h^0 \mathcal{O}_C - h^1 \mathcal{O}_C$ . On a déjà (cf. III, 8.8 ou Problème II) :

**Lemme 1.3.** Si  $X$  est une variété algébrique projective irréductible, on a  $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$  (les seules fonctions globales sont les constantes) et donc,  $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ .

*Démonstration.* L'anneau  $R = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est intègre. En effet, si on a  $fg = 0$  dans cet anneau, on a encore  $fg = 0$  en restriction à un ouvert affine  $U$ . Mais  $U$  est irréductible et son anneau est intègre par I, 3.2. Il en résulte, par exemple, qu'on a  $f|_U = 0$ , donc  $f = 0$  par densité.

Mais on sait aussi que  $R$  est de dimension finie sur  $k$  (cf. VII, 4.6), c'est donc un corps (cf. IV, 4.5), algébrique sur  $k$ , mais comme  $k$  est algébriquement clos, on a  $R = k$ .

Il reste le terme  $h^1\mathcal{O}_C$ . Faute de pouvoir le calculer, on le nomme :

**Définition 1.4.** Soit  $C$  une courbe projective irréductible. On appelle genre arithmétique de  $C$  le nombre entier  $\geq 0$ ,  $g = h^1\mathcal{O}_C$ . (On le note aussi parfois  $p_a$ , avec un  $a$  comme arithmétique.)

On peut alors résumer ce qui précède dans le théorème suivant :

**Théorème 1.5** (Riemann-Roch 1). Soit  $C \subset \mathbf{P}^N$  une courbe projective irréductible, de degré  $d$  et genre  $g$ . On a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  :

$$h^0\mathcal{O}_C(n) - h^1\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g.$$

De plus, pour  $n$  grand on a  $h^0\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$ .

*Démonstration.* Elle résulte de ce qui précède, et, pour l'assertion concernant  $n$  grand, de VII, 4.6.

*Remarques 1.6*

1) Il y a une différence de nature fondamentale entre les deux invariants  $d$  et  $g$ . Le genre  $g = h^1\mathcal{O}_C$  ne dépend que de  $C$  et pas du plongement dans un  $\mathbf{P}^N$  ou un autre. Le degré  $d$ , lui, en dépend de manière essentielle. C'est clair sur la définition qui fait intervenir les hyperplans de  $\mathbf{P}^N$ , c'est clair aussi sur Riemann-Roch (qui en constitue une définition alternative) car les faisceaux  $\mathcal{O}_C(n)$  ne sont définis qu'en référence à un plongement dans  $\mathbf{P}^N$  (cf. III, 9.8.0). Par exemple une droite, qui est une sous-variété de degré 1 de  $\mathbf{P}^3$ , est isomorphe (cf. III, 11.6) à une conique ou une cubique gauche qui sont respectivement de degré 2 et 3 (cf. ci-dessous 1.7 et 1.12).

2) Dans 1.5, si  $C$  est lisse on peut préciser que  $h^1\mathcal{O}_C(n)$  est nul si  $nd > 2g - 2$  (cf. 2.14 ci-dessous).

3) Si  $C$  est lisse il existe des hyperplans  $H$  tels que  $C \cap H$  soit formé de  $d$  points distincts. C'est même le cas si  $H$  est "général" (cf. Exercice VIII, 1).

4) Si  $C$  est une courbe irréductible on a, pour  $n < 0$ ,  $h^0 \mathcal{O}_C(n) = 0$ . Pour le voir on considère la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n-1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Z(n).$$

Pour  $n = 0$ , comme  $H^0 \mathcal{O}_C$  est un corps et  $H^0 \mathcal{O}_Z \neq 0$ , l'homomorphisme d'anneaux  $H^0 \mathcal{O}_C \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Z$  est injectif, donc  $H^0 \mathcal{O}_C(-1)$  est nul. La nullité des autres  $H^0 \mathcal{O}_C(n)$  pour  $n < 0$  s'ensuit par récurrence.

5) On peut étendre ce qui précède à des courbes plus générales, par exemple non irréductibles ou non connexes, voire non réduites (des schémas). Si la courbe  $C$  n'est pas connexe, le nombre  $h^0 \mathcal{O}_C$  n'est plus égal à 1 : c'est le nombre de composantes connexes de  $C$ . Pour que la formule de Riemann-Roch ( $\chi \mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$ ) soit encore valide il faut poser  $g = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$ . Attention,  $g$  peut alors prendre des valeurs négatives, par exemple si  $C$  est la réunion disjointe de deux droites de  $\mathbf{P}^3$ , on a  $g = -1$ .

## b. Exemples et applications

Deux questions se posent à ce moment du discours :

- 1) à quoi servent les invariants ainsi définis ?
- 2) comment les calculer ?

### i) Utilisation de $d$ et $g$

1) Une première utilisation est celle qui a motivé leur définition : faire des calculs cohomologiques. Donnons juste un exemple : il s'agit, étant donné une courbe  $C \subset \mathbf{P}^3$ , de savoir si cette courbe est sur une surface de degré  $d$ , ou encore si  $h^0 \mathcal{J}_C(d) > 0$ . La réponse est souvent donnée par Riemann-Roch (avec le supplément 1.6.2), grâce à la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_C(d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d) \rightarrow \mathcal{O}_C(d) \rightarrow 0.$$

Ainsi, si  $C$  est une courbe lisse de degré 7 et genre 5, on a  $h^0 \mathcal{O}_C(2) = 2 \cdot 7 + 1 - 5 = 10 = h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(2)$ , donc, a priori,  $C$  n'est pas sur une surface de degré 2 (c'est cependant possible si on a  $h^1 \mathcal{J}_C(2) > 0$ ); en revanche, comme  $h^0 \mathcal{O}_C(3) = 3 \cdot 7 + 1 - 5 = 17 < h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(3) = 20$ , elle est toujours sur une surface de degré 3 (et même sur 3 surfaces indépendantes).

2) Une autre utilisation de ces invariants est la classification des courbes, par exemple selon leur genre. On verra au chapitre suivant le cas  $g = 0$  (les courbes unicursales, encore que là il s'agisse du genre géométrique), de même les courbes de genre 1 sont les courbes elliptiques. Si le corps de base est le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes, le genre a une interprétation topologique simple. Une courbe algébrique lisse projective est aussi une variété différentiable de dimension 1 sur  $\mathbf{C}$ , donc 2 sur  $\mathbf{R}$ . C'est donc une surface compacte et orientable et on sait (cf. [Gr]) qu'elle est alors homéomorphe à une sphère (cas  $g = 0$ ) ou à un tore ( $g = 1$ ) ou à un tore à  $g$  trous (genre  $g$ ).

Plus près de nos préoccupations, si on regarde les courbes de  $\mathbf{P}^2$  ou  $\mathbf{P}^3$ , avec les invariants  $d, g$  de nombreuses questions se posent : Quels sont les degrés possibles, les genres possibles, les couples  $(d, g)$  possibles (disons pour les courbes lisses) ? Si ces questions sont faciles dans  $\mathbf{P}^2$  il n'en est pas de même dans  $\mathbf{P}^3$  (surtout pour la dernière dont la solution définitive date de 1982, cf. [GP]). Enfin, si  $d$  et  $g$  sont fixés il reste à étudier la famille  $H_{d,g}$  des courbes de degré  $d$  et genre  $g$ . On peut munir cette famille d'une structure de variété algébrique (ou plutôt de schéma) et se demander si elle est lisse, irréductible et quelle est sa dimension. Pour l'essentiel, cette question, dans  $\mathbf{P}^3$ , est encore ouverte (cf. par exemple [MDP]).

3) Le lecteur s'interrogera peut-être sur la prédilection manifeste de l'auteur pour les courbes de  $\mathbf{P}^3$ . Outre le fait que ce sont les plus immédiatement accessibles (après les courbes planes) il y a une raison plus sérieuse. Prenons en effet une courbe  $C$  dans  $\mathbf{P}^N$  et un point  $P$  hors de  $C$ . On peut considérer la projection  $\pi$  de centre  $P$  sur un hyperplan  $H$  ne contenant pas  $P$  (l'image d'un point  $Q \in C$  est le point d'intersection de  $H$  avec la droite  $\langle PQ \rangle$ ). Soit  $C'$  l'image de  $C$  par  $\pi$ . Cette opération permet de ramener  $C$  dans l'hyperplan  $H \simeq \mathbf{P}^{N-1}$ , mais pour que  $C$  et  $C'$  soient isomorphes par  $\pi$  il faut en tous cas que  $\pi$  soit injectif sur  $C$ , ce qui signifie que  $P$  n'est pas aligné avec deux points distincts de  $C$  (autrement dit que  $P$  n'est pas sur une sécante à  $C$ ). Or, on voit facilement que la réunion des sécantes à  $C$  est une sous-variété de dimension 3 de  $\mathbf{P}^N$ , de sorte qu'on peut toujours trouver un centre de projection convenable dès que  $N \geq 4$ . On montre ainsi (cf. [H] IV, 3.6) que toute courbe projective lisse est isomorphe à une courbe de  $\mathbf{P}^3$ , donc que toutes les courbes lisses peuvent être plongées dans  $\mathbf{P}^3$ . En revanche on ne peut pas, en général, projeter une courbe de  $\mathbf{P}^3$  sur une courbe plane isomorphe, d'ailleurs on verra ci-dessous que les genres des courbes planes sont très particuliers (cf. cependant IX, 2.9 pour un pis-aller).

ii) Calcul de  $d$  et  $g$  : les résolutions

L'idée fondamentale pour calculer  $d$  et  $g$  ou plus généralement les dimensions des groupes de cohomologie est celle de résolution. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur  $\mathbf{P}^N$ , une résolution de  $\mathcal{F}$  est une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où les  $\mathcal{L}_i$  sont des faisceaux dissociés, c'est-à-dire sont de la forme :

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(n_i), \quad n_i \in \mathbf{Z}.$$

Il suffit pour cela, si  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $S$ -module gradué de type fini, d'avoir une résolution libre graduée de  $M$  :

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec les  $L_i$  de la forme :

$$L = \bigoplus_{i=1}^r S(n_i), \quad n_i \in \mathbf{Z}.$$

On a déjà vu dans la démonstration de VII, 4.6 comment obtenir le début d'une telle résolution :  $\bigoplus_{i=1}^r S(n_i) \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$  en partant de générateurs de  $M$ . Pour continuer on applique le même procédé au noyau de  $p$  et ainsi de suite. Un théorème de Hilbert (qui porte le joli nom de théorème des syzygies, cf. Ch. X) affirme que le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations, donc que tout module gradué de type fini a une résolution.

*Exemple 1.7 : les courbes planes*

**Théorème 1.8.** Soit  $F \in k[X, Y, T]$  un polynôme homogène de degré  $d > 0$ , irréductible et soit  $C = V_p(F) \subset \mathbf{P}^2$  la courbe projective définie par  $F$ . Alors on a :

- 1) Le degré de  $C$  est égal à  $d$ .
- 2) Le genre arithmétique de  $C$  est égal à

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

*Démonstration*

1) C'est le théorème de Bézout : ici un hyperplan n'est rien d'autre qu'une droite et le nombre de points d'intersection de  $C$  et  $D$ , comptés avec multiplicités, est égal à  $d$ .

2) On utilise la suite exacte usuelle :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

qui donne  $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g = \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}) - \chi(\mathcal{J}_C) = 1 - \chi(\mathcal{J}_C)$ . Mais, comme  $C$  est une hypersurface de  $\mathbf{P}^2$ , on sait (cf. III, 10.a) que  $\mathcal{J}_C$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)$  et on a donc  $g = \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-d)) = \binom{d-1}{2}$ , cqfd.

*Remarque 1.9.* Cela permet de répondre, pour les courbes planes, aux questions de i) ci-dessus : on a des courbes lisses de tout degré  $d > 0$  (cf. V, 2.7.3), leur genre arithmétique est imposé par le degré. On notera que les genres possibles sont très lacunaires : 0, 1, 3, 6, 10, 15, ... En particulier, il n'y a pas de courbe plane de genre arithmétique 2 ni 4.

*Exemple 1.10 : Les intersections complètes dans  $\mathbf{P}^3$*

Soit  $C = V_p(F, G) \subset \mathbf{P}^3$  une intersection complète (cf. III, 10.b). On suppose  $F, G \in k[X, Y, Z, T]$  homogènes de degrés  $s$  et  $t$  et on suppose qu'on a  $I_p(C) = (F, G)$  (on dit alors que  $C$  est schématiquement intersection complète : son idéal est engendré par deux générateurs, ce qui implique évidemment qu'elle est ensemblistement intersection des deux surfaces correspondantes, mais la réciproque est fautive, cf. 1.13). Pour calculer le genre  $g = h^1 \mathcal{O}_C$  on utilise encore la suite exacte (\*). On note, en déroulant la suite exacte de cohomologie associée à (\*), qu'il est égal à  $h^2 \mathcal{J}_C$ . Mais on a une résolution de  $\mathcal{J}_C$  (cf. III, 10.1) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-s-t) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-t) \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

et on en déduit la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^2 \mathcal{J}_C \rightarrow H^3 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-s-t) \rightarrow H^3 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-s) \oplus H^3 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-t) \rightarrow 0 ;$$

en effet les  $H^2$  des faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n)$  sont nuls et  $H^3 \mathcal{J}_C$  aussi (considérer la suite (\*)). On a alors la formule :

$$g = \binom{s+t-1}{3} - \binom{s-1}{3} - \binom{t-1}{3}$$

(avec la convention que le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  est nul si  $n < p$ ) et on trouve  $g = \frac{1}{2}st(s+t-4) + 1$ . Pour le degré on peut calculer de la même façon  $\chi(\mathcal{O}_C(1)) = d + 1 - g$ , mais il est plus simple de couper  $C$  par un plan  $H$  général (disons  $T = 0$ ). On est ramené à chercher dans le plan  $H$  l'intersection des deux courbes d'équations  $F(X, Y, Z, 0)$  et  $G(X, Y, Z, 0)$  de degrés  $s$  et  $t$ . D'après Bézout, il y a  $st$  points d'intersection, donc  $C$  est de degré  $st$ .

### Remarques 1.11

1) Il existe pour tous  $s, t$  des courbes intersections complètes lisses (cf. Exercice VIII, 2).

2) On obtient ainsi pour  $s = 2$  et  $t = 3$  des courbes lisses de genre 4 (qui ne sont donc pas isomorphes à des courbes planes, cf. i.3 ci-dessus), mais toujours pas de courbes de genre 2 (cf. Examen Janvier 1992).

*Exemple 1.12 : La cubique gauche.* On se reportera à l'exercice II, 4 pour la définition et les résultats concernant cette courbe. On voit d'abord, en coupant par un plan quelconque, que le degré est bien égal à 3. Pour le genre on utilise la même méthode que ci-dessus, mais on a cette fois la résolution suivante pour  $\mathcal{J}_C$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-2)^3 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

qui donne la suite exacte  $0 \rightarrow H^2 \mathcal{J}_C \rightarrow H^3 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-3)^2 \rightarrow \dots$ . Comme le  $H^3$  est nul on a  $g = 0$ . (Pour le degré on peut aussi voir que  $\chi(\mathcal{O}_C(1)) = 4$ , ce qui redonne  $d = 3$ .)

*Remarque 1.13.* La cubique gauche n'est pas schématiquement intersection complète. En effet, sinon on aurait  $3 = st$ , donc, par exemple  $s = 1$  et  $t = 3$ , mais alors le genre serait égal à 1 et non à 0. En revanche elle est *ensemblément* intersection complète de deux surfaces de degrés 2 et 3 :  $Z^2 - YT$  et  $Y^3 - 2XYZ + X^2T = Y(Y^2 - XZ) + X(XT - YZ)$ . Ce qui se passe c'est que  $C$  est double dans cette intersection (qui, comme schéma, est de degré 6). Signalons, à ce propos, que la question de savoir si toute courbe de  $\mathbf{P}^3$  est ensemblistement intersection complète est encore ouverte actuellement.

## 2. Diviseurs sur une courbe, Riemann-Roch 2

Si  $C$  est une courbe de  $\mathbf{P}^N$  et  $H$  un hyperplan ne contenant pas  $C$ , on a vu qu'on avait la suite exacte associée à la multiplication par l'équation de  $H$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-1) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap H} \rightarrow 0$$

où  $C \cap H$  est muni de sa structure de schéma fini. On va généraliser cette situation à tous les sous-schémas finis de  $C$  en introduisant les diviseurs. Réciproquement, ceux-ci redonneront les faisceaux  $\mathcal{O}_C(n)$  associés à certains plongements de  $C$  dans un espace projectif. Cette étude de la courbe  $C$  du point de vue des diviseurs, indépendamment du choix d'un plongement projectif de  $C$ , constitue ce qu'on appelle l'étude de la courbe "abstraite"  $C$ .

Avant de parler de diviseurs, nous avons besoin de quelques notions sur les fonctions rationnelles.

### a. Fonctions rationnelles

**Proposition-définition 2.1.** *Soit  $X$  une variété algébrique irréductible. On considère les couples  $(U, f)$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $X$  et  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  et, sur ces couples, la relation  $(U, f) \sim (V, g) \iff f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$ . C'est une relation d'équivalence. Une fonction rationnelle sur  $X$  est une classe d'équivalence pour cette relation.*

*Démonstration.* C'est clair, la transitivité résulte de l'irréductibilité.

**Remarque 2.2.** Une fonction rationnelle est donc une fonction non partout définie sur  $X$ . Elle a un domaine de définition qui est le plus grand ouvert sur lequel elle est définie : c'est la réunion de tous les ouverts  $U$  de ses représentants  $(U, f)$ .

### Proposition 2.3

- 1) Les fonctions rationnelles sur  $X$  forment un corps, noté  $K(X)$ .
- 2) Pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ ,  $K(X)$  est le corps des fractions de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ , donc le corps des fonctions rationnelles sur  $U$  au sens de I, 6.15.
- 3) Pour tout point  $P \in X$ ,  $K(X)$  est le corps des fractions de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,P}$ .

4) Si  $X$  est projective,  $K(X)$  est le sous-corps de  $\text{Fr}(\Gamma_h(X))$  formé des éléments de degré 0.

### Démonstration

1) est facile : on réduit autant qu'il faut les ouverts pour ajouter, multiplier ou trouver des inverses.

2) Il est clair que  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  est inclus dans  $K(X)$  par définition. Donc  $K(X)$  contient aussi le corps des fractions de cet anneau. Réciproquement, soit  $f \in K(X)$ , définie sur un ouvert  $V$ . Quitte à restreindre  $V$  on peut le supposer contenu dans  $U$  et même ouvert affine standard pour  $U : D_U(g)$  avec  $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . Mais alors,  $f = h/g^n$  est dans le corps des fractions de  $\Gamma(U)$ .

3) On se ramène au cas affine par 2) et alors c'est clair car l'anneau local est un localisé de  $\Gamma(X)$ , donc il a même corps de fractions.

4) Soit  $f/g \in \text{Fr}(\Gamma_h)$ , homogène de degré 0. Il définit une section de  $\mathcal{O}_X$  sur  $D^+(g)$ , donc une fonction rationnelle. La réciproque vient de ce que les  $D^+(f)$  forment une base d'ouverts.

### Exemples 2.4

i) *La droite projective.* D'après 2.3.4 une fonction rationnelle sur  $\mathbf{P}^1$  est de la forme :

$$f = \frac{P(X, T)}{Q(X, T)}$$

avec  $P, Q$  homogènes de même degré  $d$ , que l'on peut supposer premiers entre eux. A une constante non nulle près on peut écrire  $P(X, T) = X^\alpha T^\gamma \prod_i (X - a_i T)^{\alpha_i}$  et  $Q(X, T) = X^\beta T^\delta \prod_i (X - b_i T)^{\beta_i}$ , avec les  $a_i$  et les  $b_j$  non nuls et distincts,  $\alpha_i$  et  $\beta_i > 0$  et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$  mais  $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$ .

Plaçons-nous d'abord sur l'ouvert  $T \neq 0$ . On peut donc faire  $t = 1$  et on voit que  $f_t$  qui est une fraction rationnelle en  $X$  a un zéro d'ordre  $\alpha_i$  en  $a_i$ , un pôle d'ordre  $\beta_i$  en  $b_i$  et en 0 un zéro d'ordre  $\alpha - \beta$  ou un pôle d'ordre  $\beta - \alpha$  selon que  $\alpha$  ou  $\beta$  est  $> 0$ .

Si maintenant on travaille sur l'ouvert  $X \neq 0$  on trouve, outre les points  $t = 1/a_i$  et  $1/b_i$  déjà rencontrés, un zéro d'ordre  $\gamma - \delta$  ou un pôle d'ordre  $\delta - \gamma$  au point  $(1, 0)$ , i.e. à l'infini. Si on fait la somme des multiplicités des zéros (resp. des pôles) on trouve  $\alpha + \gamma + \sum_i \alpha_i$  (resp.  $\beta + \delta + \sum_i \beta_i$ ) et ces deux quantités sont égales à  $d$  : le nombre de zéros d'une fonction rationnelle sur  $\mathbf{P}^1$  est égal au nombre de ses pôles. Nous verrons une généralisation de ce fait en 2.7.

ii) *La cubique cuspidale.* C'est la courbe  $C = V(Y^2T - X^3) \subset \mathbf{P}^2$ . Si on calcule  $K(C)$  sur l'ouvert  $t \neq 0$ , on trouve un corps engendré sur  $k$  par deux éléments  $x$  et  $y$  avec la relation  $y^2 = x^3$ . Mais si on calcule le corps sur l'ouvert  $U : y \neq 0$ , on a  $\Gamma(U) = k[X, T]/(T - X^3) \simeq k[X]$  et donc,  $K(C)$  est le corps des fractions rationnelles en une variable :  $k(X)$  et la courbe  $C$  est unicursale (cf. Ch. IX).

### b. Diviseurs sur une courbe

La définition d'un diviseur généralise la situation de l'exemple i) ci-dessus : on a un nombre fini de points affectés de multiplicités positives (comme ci-dessus les zéros de  $f$ ) ou négatives (comme les pôles).

**Définition 2.5.** Soit  $C$  une courbe projective lisse et irréductible. Un diviseur  $D$  sur  $C$  est une somme formelle :

$$D = \sum_{x \in C} n_x x$$

avec  $n_x \in \mathbf{Z}$ , presque tous nuls.<sup>3</sup> Le support de  $D$  est l'ensemble des  $x \in C$  tels que  $n_x \neq 0$ . On note  $\text{Div}(C)$  l'ensemble des diviseurs sur  $C$ . Il est muni d'une addition évidente (on ajoute les  $n_x$ ), pour laquelle il est un groupe abélien. Un diviseur  $D$  est dit positif (ou effectif), et on note  $D \geq 0$ , si on a  $\forall x \in C, n_x \geq 0$ . Tout diviseur  $D$  s'écrit sous la forme  $D = D_1 - D_2$  où les  $D_i$  sont positifs et de supports disjoints. Enfin, le degré du diviseur  $D$  est l'entier  $\text{deg } D = \sum_{x \in C} n_x$ . L'application  $\text{deg} : \text{Div } C \rightarrow \mathbf{Z}$  est un homomorphisme surjectif.

*Exemple 2.6.* Cet exemple généralise le cas de  $\mathbf{P}^1$ . Soit  $f \in K(C)$  une fonction rationnelle non nulle sur  $C$ . On va définir un diviseur (dit *principal*)  $\text{div}(f) = Z(f) - P(f)$ ,  $Z(f)$  (resp.  $P(f)$ ) représentant les zéros (resp. les pôles) de  $f$ , avec leurs multiplicités. Précisément, soit  $P \in C$  et  $\mathcal{O}_P$  l'anneau local de  $C$  en  $P$ . C'est un anneau de valuation discrète (cf. V, 4.1 et Problème IV), soit  $v_P$  la valuation en question. Comme  $f$  est dans  $K(C) = \text{Fr}(\mathcal{O}_P)$ , et qu'il est  $\neq 0$ , la valuation  $v_P(f)$  est définie et c'est un entier relatif.

De plus, cet entier est nul pour presque tout  $P$ . Pour le voir on prend un ouvert affine  $U$  non vide de  $C$ , et on écrit  $f = g/h$  avec  $g, h \in \Gamma(U)$ ,  $g, h \neq 0$ . Alors, dire que  $v_P(f) > 0$  c'est dire que  $g \in m_P$ , i.e. que

<sup>3</sup>Savamment, un diviseur sur  $C$  est un élément du  $\mathbf{Z}$ -module libre de base les points de  $C$ .

$g(P) = 0$  (donc que  $P$  est un zéro de  $f$ , d'ordre  $v_P(f)$ ); dire que  $v_P(f) < 0$  c'est dire que  $h \in m_P$ , i.e. que  $h(P) = 0$  (donc que  $P$  est un pôle de  $f$ , d'ordre  $-v_P(f)$ ). Comme  $V(g)$  et  $V(h)$  sont finis, il n'y a qu'un nombre fini de points de  $U$  qui vérifient  $v_P(f) \neq 0$ . Enfin,  $C-U$  est un fermé strict de  $C$ , donc fini. On notera qu'on a  $f \in H^0 \mathcal{O}_C \iff \forall P \in C, v_P(f) \geq 0$ .

On peut alors définir le diviseur  $\text{div}(f)$  :

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in C} v_P(f)P.$$

**Proposition 2.7.** Soit  $f \in K(C)$ ,  $f \neq 0$ . On a  $\text{deg div}(f) = 0$ , autrement dit, le nombre de zéros et le nombre de pôles de  $f$  (comptés avec leurs multiplicités) sont les mêmes. On a :

$$f \in H^0 \mathcal{O}_C \iff \text{div}(f) \geq 0 \iff \text{div} f = 0$$

(autrement dit, une fonction rationnelle sans pôle est une fonction régulière).

*Démonstration.* Pour une preuve dans le cas général voir [F] Ch.8 Prop.1 ou [H] II, 6.10. Nous traitons seulement ici le cas où  $C$  est une courbe plane lisse.

Soit donc  $C = V(F)$  avec  $F \in k[X, Y, T]$ , homogène de degré  $d$  et irréductible et soit  $u \in K(C)$ . On sait que  $u$  s'écrit  $u = \overline{G}/\overline{H}$  avec  $\overline{G}, \overline{H} \in \Gamma_h(C) = k[X, Y, T]/(F)$ , provenant de polynômes homogènes de même degré  $n$  et non multiples de  $F$ . Il s'agit de calculer  $v_P(u)$  pour  $u \in C$ . Quitte à faire une homographie on peut supposer que le point  $P$  est dans l'ouvert affine  $T \neq 0$  et l'anneau local de  $C$  en  $P$  est alors  $\mathcal{O}_P(C) = \mathcal{O}_P/(F_b)$  où  $\mathcal{O}_P$  est l'anneau local de  $\mathbf{P}^2$  (ou  $k^2$ ) en  $P$  et on a  $u = \overline{G}_b/\overline{H}_b$ . On utilise alors l'expression de la valuation donnée par le lemme suivant :

**Lemme 2.8.** Soit  $A$  une  $k$ -algèbre qui est un anneau de valuation discrète de valuation  $v$ . On suppose  $k$  isomorphe au corps résiduel  $A/m$ . Alors on a, pour  $a \in A$  :  $v(a) = \dim_k(A/(a))$ .

*Démonstration (du lemme).* Si  $\pi$  est l'uniformisante, on écrit  $a = u\pi^n$ , avec  $n = v(a)$  et on voit facilement que les images de  $1, \pi, \dots, \pi^{n-1}$  forment une base de  $A/(a)$ .

Revenons à 2.7. On a  $v_P(u) = v_P(\overline{G}_b) - v_P(\overline{H}_b)$  et, d'après le lemme,  $v_P(\overline{G}_b) = \dim \mathcal{O}_P/(F_b, G_b)$ . On reconnaît la multiplicité d'intersection  $\mu_P(F_b, G_b) = \mu_P(F, G)$  des courbes  $F$  et  $G$  en  $P$ . On a ainsi

$$\deg \operatorname{div}(u) = \sum_{P \in C} \mu_P(F, G) - \sum_{P \in C} \mu_P(F, H),$$

mais d'après le théorème de Bézout chacune des deux sommes est égale à  $nd$ , donc la différence est nulle.

Il reste l'assertion sur les fonctions sans pôles. Soit  $f \in K(C)$ , non nulle et sans pôle (i.e. telle que  $\operatorname{div}(f)$  soit  $\geq 0$ ) et soit  $P \in C$ . Alors, comme  $f \in \mathcal{O}_{C,P}$  il existe un représentant de  $f$  défini sur un voisinage affine de  $P$ . Mais, par définition d'une fonction rationnelle, ces représentants se recollent, donc définissent une fonction régulière. On notera qu'alors  $f$  est une constante, donc que  $\operatorname{div}(f) = 0$ .

*Remarque 2.9.* L'ensemble  $P(C)$  des diviseurs principaux de  $C$  est un sous-groupe de  $\operatorname{Div} C$ . Deux diviseurs qui diffèrent d'un diviseur principal sont dits équivalents. Le groupe quotient  $\operatorname{Div} C/P(C)$  s'appelle le groupe des classes de diviseurs ou groupe de Picard de  $C$ , et il est noté  $\operatorname{Pic} C$ . Vu 2.7, l'homomorphisme degré se factorise par le groupe de Picard. Son noyau est appelé la *jacobienne* de  $C$  et noté  $\operatorname{Pic}^0 C$ . C'est un invariant essentiel de la courbe  $C$ .

### c. Le faisceau inversible associé à un diviseur

Soit  $C$  une courbe projective lisse et irréductible. Nous allons associer à tout diviseur  $D$  sur  $C$  un faisceau sur  $C$  noté  $\mathcal{O}_C(D)$  (ou parfois  $\mathcal{L}(D)$ ).

Pour comprendre d'où vient ce faisceau, étudions d'abord le cas d'un diviseur  $D = \sum n_P P \geq 0$ . On peut associer à ce diviseur un sous-schéma fermé fini de  $C$ , noté encore  $D$ , dont le support est formé des points  $P$  tels que  $n_P > 0$  et qui est tel qu'en chaque point la multiplicité de  $D$  comme schéma fini soit exactement  $n_P$  : il suffit pour cela de prendre comme anneau local de  $D$  en  $P$  l'anneau  $\mathcal{O}_{C,P}/(\pi^{n_P})$  (cf. 2.8). On a alors  $n_P = \mu_P(D)$ . Réciproquement, un sous-schéma fini  $X$  de  $C$  définit le diviseur  $\sum \mu_P(X)P$ . On note qu'on a  $h^0 \mathcal{O}_D = \chi \mathcal{O}_D = \sum_P \mu_P(D) = \sum_P n_P = \deg D$ .

Si  $D$  est un diviseur  $\geq 0$  on a alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{D/C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{I}_{D/C}$  est l'idéal des fonctions qui s'annulent sur  $D$  (avec les multiplicités prescrites). On note ce faisceau  $\mathcal{O}_C(-D)$  et ses sections sur un

ouvert  $U$  de  $C$  sont simplement les fonctions rationnelles sur  $C$ , définies sur  $U$  et qui s'annulent en chaque point  $P$  avec la multiplicité  $n_P$  au moins :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_C(-D)) = \{f \in K(C) \mid \forall P \in U, v_P(f) \geq n_P\}.$$

(Comme les  $n_P$  sont  $\geq 0$  ceci impose déjà  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C)$ .)

Soit maintenant  $D$  un diviseur quelconque. Le faisceau  $\mathcal{O}_C(D)$  est défini de manière tout à fait analogue, en changeant les signes :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D)) = \{f \in K(C) \mid \forall P \in U, v_P(f) \geq -n_P\}.$$

Attention, cette fois les fonctions ne sont pas définies partout sur  $U$ , elles peuvent avoir des pôles correspondant aux  $n_P < 0$ , mais, en  $P$ , l'ordre du pôle doit être  $\leq -n_P$  : on considère des fonctions rationnelles dont les ordres des pôles et des zéros sont contrôlés par le diviseur  $D$ .

### Remarques 2.10

0) Si  $D = 0$  on vérifie aussitôt qu'on a  $\mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_C$ .

1) On s'intéresse surtout aux sections globales du faisceau  $\mathcal{O}_C(D)$  qu'on peut décrire ainsi :

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D)) = \{f \in K(C) \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}.$$

(En particulier, un diviseur  $D$  est équivalent à un diviseur  $\geq 0$  si et seulement si le faisceau  $\mathcal{O}_C(D)$  a des sections globales non nulles.) L'objet du théorème de Riemann-Roch sera de calculer la dimension  $h^0(C, \mathcal{O}_C(D))$  de cet espace. On note déjà avec cette formule que si  $\deg D < 0$ , on a  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(D)) = 0$ . En effet, si  $f \neq 0$ , on a  $\deg \operatorname{div}(f) + \deg D = \deg D$  en vertu de 2.7 et ce degré devrait être  $\geq 0$ , ce qui est absurde.

2) Si  $D$  et  $D'$  sont équivalents, i.e. si on a  $D' = D + \operatorname{div}(g)$ , on a un isomorphisme des faisceaux associés  $\mathcal{O}_C(D) \simeq \mathcal{O}_C(D')$  par  $f \mapsto f/g$ .

3) Supposons  $C \subset \mathbf{P}^r$ , soit  $H$  un hyperplan ne contenant pas  $C$  et soit  $D = C \cap H$  le sous-schéma fini intersection (cf. 1). On peut considérer  $D$  comme un diviseur  $\geq 0$  sur  $C$ . Alors, le faisceau  $\mathcal{O}_C(D)$  n'est autre que  $\mathcal{O}_C(1)$  : soit  $U$  ouvert de  $C$ , une section de  $\mathcal{O}_C(1)$  sur  $U$  est une fraction  $f = A/B$  avec  $A, B \in \Gamma_h(C)$  homogènes,  $\deg A = \deg B + 1$  et  $B \neq 0$  sur  $U$  (attention ce n'est pas une fonction rationnelle). On lui associe la section  $f/H = A/BH$  qui est une fonction rationnelle dont les pôles sont les points de  $C \cap H = D$  qui sont dans  $U$  avec les multiplicités voulues : c'est

bien une section de  $\mathcal{O}_C(D)$ . De la même façon on a  $\mathcal{O}_C(n) \simeq \mathcal{O}_C(nD)$ . Lorsque  $C$  est plongée dans  $\mathbf{P}^r$  on retrouve donc les faisceaux  $\mathcal{O}_C(n)$  comme cas particuliers de faisceaux correspondant à des diviseurs : les multiples du diviseur hyperplan  $C \cap H$ . Il est clair que si  $H$  et  $H'$  sont deux hyperplans ne contenant pas  $C$  les diviseurs correspondants sont équivalents : ils diffèrent du diviseur principal  $\text{div}(H/H')$ .

4) On vérifie qu'on a  $\mathcal{O}_C(D + D') \simeq \mathcal{O}_C(D) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(D')$  pour tous diviseurs  $D, D'$ . En particulier on a  $\mathcal{O}_C \simeq \mathcal{O}_C(D) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-D) : \mathcal{O}_C(-D)$  est l'“inverse” de  $\mathcal{O}_C(D)$ . Le groupe de Picard de  $C$  est ainsi isomorphe par l'application  $D \mapsto \mathcal{O}_C(D)$  au groupe des faisceaux inversibles sur  $C$  (i.e. localement libres de rang 1, cf. Exercice III, A.7) muni de la loi produit tensoriel.

### d. Le théorème de Riemann-Roch

On cherche maintenant à calculer  $h^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ . (Pour une application de ce calcul cf. e.) On a le lemme décisif suivant :

#### Lemme 2.11

1) Soit  $D$  un diviseur positif (que l'on peut considérer comme un sous-schéma fini de  $C$ ). On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-D) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_C \xrightarrow{p} \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

2) Soit  $D$  un diviseur quelconque, que l'on suppose écrit sous la forme  $D = D_1 + D_2$ , avec  $D_1 \geq 0$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D_2) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_C(D) \xrightarrow{p} \mathcal{O}_{D_1} \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Le premier point a été vu ci-dessus et c'est aussi un cas particulier du second. Pour le point 2), soit  $U$  un ouvert de  $C$ . Il est clair d'après la définition que  $\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D_2))$  est contenu dans  $\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D))$ , ce qui donne la flèche injective  $i$ . Pour définir  $p$ , il faut se souvenir que l'on a :

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{D_1}) = \prod_{P \in D_1 \cap U} \mathcal{O}_{C,P} / \pi_P^{n_{1,P}}$$

où  $\pi_P$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}_{C,P}$  et où les  $n_{1,P}$  sont les coefficients de  $D_1$ . Si on part de  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C(-D))$ , on lui associe, au point  $P$ , l'image de  $\pi_P^{n_P} f$  dans  $\mathcal{O}_{C,P} / \pi_P^{n_{1,P}}$  (ceci a un sens car  $\pi_P^{n_P} f$  est dans  $\mathcal{O}_{C,P}$  puisque  $v_P(f) + n_P \geq 0$  par définition). Vérifions que  $p$  est un morphisme surjectif de faisceaux. C'est local donc on peut se placer sur un ouvert

$U$  qui contient un seul point  $P$  de  $D_1$ . Soit  $\bar{g} \in \mathcal{O}_{C,P}/\pi_P^{n_{1,P}}$ . On peut supposer  $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C)$ . Alors,  $f = g/\pi_P^{n_P}$  est dans  $\Gamma(U, \mathcal{O}_C(D))$  et on a  $p(f) = \bar{g}$ .

Enfin, on vérifie qu'on a  $\text{Ker } p = \text{Im } i$  : si  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C(D_2))$  on a  $v_P(f) \geq -n_{2,P}$ , donc  $n_P + v_P(f) \geq n_{1,P}$ , donc l'image de  $\pi^{n_P} f$  dans  $\mathcal{O}_{C,P}/\pi_P^{n_{1,P}}$  est nulle. La réciproque est immédiate.

On notera une démonstration alternative de 2) qui consiste à partir de 1) appliqué à  $D_1$  et à tensoriser par  $\mathcal{O}_C(D)$ .

On peut maintenant prouver la deuxième version de Riemann-Roch :

**Théorème 2.12** (Riemann-Roch 2). *Soit  $C$  une courbe projective, lisse et irréductible de genre  $g$  et soit  $D$  un diviseur sur  $C$ .*

1) On a la formule :

$$\chi \mathcal{O}_C(D) = h^0 \mathcal{O}_C(D) - h^1 \mathcal{O}_C(D) = \text{deg } D + 1 - g.$$

2) Il existe un entier  $N$  tel que si  $\text{deg}(D) \geq N$  on a  $h^1 \mathcal{O}_C(D) = 0$ , donc  $h^0 \mathcal{O}_C(D) = \text{deg } D + 1 - g$ .

*Démonstration*

1) On écrit  $D = D_1 - D_2$  avec  $D_i \geq 0$ . On a alors, en vertu du lemme 2.11.2,  $\chi \mathcal{O}_C(D) = \chi \mathcal{O}_C(-D_2) + \chi \mathcal{O}_{D_1}$ , puis par 2.11.1 appliqué à  $D_2$  :  $\chi \mathcal{O}_C(-D_2) = \chi \mathcal{O}_C - \chi \mathcal{O}_{D_2}$ . Mais, par définition du genre, on a  $\chi \mathcal{O}_C = 1 - g$  et pour le schéma fini  $D_i$ ,  $\chi \mathcal{O}_{D_i} = h^0 \mathcal{O}_{D_i} = \text{deg } D_i$  (cf. c) ci-dessus), d'où la formule annoncée.

2) On peut supposer  $C$  plongée dans  $\mathbf{P}^r$  et on a alors, si  $H$  désigne le diviseur hyperplan (cf. 2.10.3)  $h^1 \mathcal{O}_C(nH) = h^1 \mathcal{O}_C(n) = 0$  pour  $n \geq n_0$  d'après le théorème de Serre (cf. VII, 4.6). Soit  $D$  un diviseur. D'après l'assertion 1), on a  $h^0 \mathcal{O}_C(D - n_0H) \geq \text{deg}(D - n_0H) + 1 - g$  et cette quantité est  $> 0$  dès que  $\text{deg}(D) \geq N = n_0 \text{deg}(H) + g$ . Alors, si cette condition est remplie et si  $f \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D - n_0H))$  est non nulle, on a  $D \geq n_0H - \text{div}(f)$  (cf. 2.10.1), ou encore,  $D = D_1 + (n_0H - \text{div}(f))$  avec  $D_1 \geq 0$ . Si on écrit la suite de cohomologie associée à la suite exacte de 2.11.2 on trouve :

$$\dots \rightarrow H^1 \mathcal{O}_C(n_0H - \text{div}(f)) \rightarrow H^1 \mathcal{O}_C(D) \rightarrow H^1 \mathcal{O}_{D_1} \rightarrow 0.$$

Comme  $n_0H - \text{div}(f)$  est équivalent à  $n_0H$ , les faisceaux associés sont les mêmes (cf. 2.10.2), donc leur  $H^1$  est nul ; comme  $D_1$  est fini, on a aussi  $H^1 \mathcal{O}_{D_1} = 0$ , donc en définitive  $H^1 \mathcal{O}_C(D) = 0$ .

Bien entendu, vu 2.10.3, la version 1 du théorème de Riemann-Roch est un cas particulier de celle-ci.

La troisième version de Riemann-Roch est en fait un théorème de dualité que nous donnons ici sans démonstration :

**Théorème 2.13** (Riemann-Roch 3). *Soit  $C$  une courbe projective, lisse et irréductible de genre  $g$ . Il existe un diviseur positif  $K$  sur  $C$ , appelé diviseur canonique, de degré  $2g - 2$ , tel que, pour tout diviseur  $D$  sur  $C$ , l'espace vectoriel  $H^1(C, \mathcal{O}_C(D))$  soit isomorphe au dual de l'espace vectoriel  $H^0(C, \mathcal{O}_C(K - D))$ . En particulier on a la formule :*

$$h^0 \mathcal{O}_C(D) = \deg D + 1 - g + h^0 \mathcal{O}_C(K - D).$$

*Démonstration.* Voir [F] Ch. 8 §8 ou [H] IV, 1.3. Le diviseur canonique est le diviseur  $\text{div}(\omega)$ , non pas pour une fonction, mais pour une forme différentielle.

Le corollaire suivant fournit un entier  $N$  explicite pour appliquer 2.12.2 :

**Corollaire 2.14.** *Avec les notations précédentes, si  $\deg D > 2g - 2$ , on a  $h^1 \mathcal{O}_C(D) = 0$ , donc  $h^0 \mathcal{O}_C(D) = \deg D + 1 - g$ .*

*Démonstration.* En effet, on a alors  $\deg(K - D) < 0$ , donc (cf. 2.10.1)  $h^0 \mathcal{O}_C(K - D) = 0$ .

## e. Une application

**Proposition 2.15.** *Soit  $C$  une courbe projective lisse et irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $C$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ .
- 2)  $C$  est de genre 0.
- 3) Il existe un point  $P \in C$  avec  $h^0 \mathcal{O}_C(P) \geq 2$ .
- 4) Il existe deux points distincts  $P, Q \in C$  tels que les diviseurs  $(P)$  et  $(Q)$  soient équivalents.
- 5) Le corps  $K(C)$  est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable  $k(T)$ .

*Démonstration.* Le fait que  $1 \Rightarrow 2$  vient de VII, 4.1 et de la définition du genre. Pour  $2 \Rightarrow 3$  on prend  $P$  quelconque et le résultat vient de Riemann-Roch (2.12). Montrons  $3 \Rightarrow 4$ . On prend  $f \in H^0\mathcal{O}_C(P)$ , non constante. La fonction  $f$  a nécessairement un pôle (sinon elle est dans  $H^0\mathcal{O}_C$ , donc constante) et ce pôle est donc  $P$  qui est simple, de sorte qu'elle a aussi un unique zéro  $Q$  et on a  $\text{div}(f) = (Q) - (P)$ , donc  $(P) \sim (Q)$ .

Passons à  $4 \Rightarrow 5$ . Soit  $f \in K(C)$  telle que  $\text{div}(f) = (Q) - (P)$ . On a donc  $f \in H^0\mathcal{O}_C(P)$  et  $f$  non constante (ce qui prouve 3 au passage).

Montrons d'abord que  $1, f$  est une base de  $H^0\mathcal{O}_C(P)$ . Soit  $\pi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}_{C,P}$ . On a  $f = u/\pi$  avec  $u \in \mathcal{O}_{C,P}$ , inversible, donc  $u(P) \neq 0$  et on peut supposer  $u(P) = 1$ . Soit  $g \in H^0\mathcal{O}_C(P)$ . On a, en  $P$ ,  $g = v\pi^{-1}$  avec  $v \in \mathcal{O}_{C,P}$ . Posons  $\lambda = v(P)$  et considérons  $h = g - \lambda f$ . On a  $h = (v - \lambda u)/\pi$  avec  $(v - \lambda u)(P) = 0$ , donc  $h \in \mathcal{O}_{C,P}$  et comme  $h$  n'a pas d'autre pôle, elle est dans  $H^0\mathcal{O}_C$ , donc une constante  $\mu$  et on a bien  $g = \lambda f + \mu$ . On a ainsi  $h^0\mathcal{O}_C(P) = 2$  et, par Riemann-Roch,  $h^1\mathcal{O}_C(P) = g$ .

Considérons maintenant  $H^0\mathcal{O}_C(nP)$ . Cet espace contient évidemment les fonctions  $1, f, f^2, \dots, f^n$ . Ces fonctions sont indépendantes (si on a une relation de dépendance linéaire on la multiplie par  $f^{-n}$  et on regarde les valeurs en  $P$ ). On a donc  $h^0\mathcal{O}_C(nP) \geq n + 1$ . Par ailleurs, par Riemann-Roch, on a  $h^0\mathcal{O}_C(nP) = n + 1 - g + h^1\mathcal{O}_C(nP)$ .

Considérons alors la suite exacte (cf. 2.11) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C((n-1)P) \rightarrow \mathcal{O}_C(nP) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0.$$

On en déduit sur la cohomologie  $h^1\mathcal{O}_C(nP) \leq h^1\mathcal{O}_C((n-1)P)$  et par récurrence  $h^1\mathcal{O}_C(nP) \leq h^1\mathcal{O}_C(P) = g$ . Autrement dit, on a  $h^0\mathcal{O}_C(nP) \leq n + 1$  et on a l'égalité. (On notera que ceci donne  $h^1\mathcal{O}_C(nP) = g$  pour tout  $n$ , donc  $g = 0$  en vertu de 2.12.2 : on prouve au passage le point 2.) Il en résulte que  $1, f, \dots, f^n$  est une base de  $H^0\mathcal{O}_C(nP)$ .

Considérons alors  $K(C)$ . Il contient l'élément  $f$ , qui est transcendant sur  $k$  (sinon il serait dans  $k$ ), donc, puisque  $C$  est une courbe,  $f$  est une base de transcendance de  $K(C)$  sur  $k$ . Soit  $u \in K(C)$ . Nous allons montrer que  $u$  est dans le sous-corps  $k(f)$ . On aura montré  $K(C) = k(f)$  ce qui est exactement l'assertion 5.

Pour cela, on note que  $u$  est algébrique sur  $k(f)$  et, quitte à remplacer  $u$  par  $ua(f)$  où  $a$  est un polynôme en  $f$ , on peut même le supposer entier sur l'anneau  $k[f]$ . On a alors :

$$(*) \quad u^n + a_{n-1}(f)u^{n-1} + \dots + a_0(f) = 0,$$

avec les  $a_i(f)$  dans  $k[f]$ . Alors,  $u$  n'a pas de pôle en un point  $Q$  distinct de  $P$ . En effet, comme  $f \in \mathcal{O}_Q(C)$ ,  $u$  est entier sur  $\mathcal{O}_Q(C)$  et comme cet anneau est intégralement clos, puisque de valuation discrète,  $u$  lui appartient. Mais alors, cela signifie que  $u$  est dans  $H^0\mathcal{O}_C(nP)$  pour un certain  $n$ , donc un polynôme en  $f$ , *cqfd*.

Il reste à montrer  $5 \Rightarrow 1$  ce qui sera fait au chapitre IX (cf. IX, 2.5.1).

On se reportera à l'exercice VIII, 4 pour l'étude du cas des courbes elliptiques (i.e. de genre 1).

## Exercices

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique zéro.

### 0. Retour sur la théorie

Soit  $I \subset R = k[X_0, \dots, X_n]$  un idéal homogène. On suppose  $Z = V(I)$  fini. Soit  $h$  une forme linéaire non nulle telle que  $V(h) \cap Z = \emptyset$ . On va donner une démonstration algébrique de l'isomorphisme  $\mathcal{O}_Z(-1) \simeq \mathcal{O}_Z$  induit par la multiplication par  $h$ , notée  $\mu_h$ .

a) Montrer que pour  $n$  grand  $\mu_h : (R/I)_{n-1} \rightarrow (R/I)_n$  est surjective. (Utiliser le Nullstellensatz pour voir que l'idéal  $I + (h)$  contient une puissance de l'idéal inconvenant.)

b) On suppose  $I$  saturé (cf. X, 1.1). Montrer que  $\mu_h$  est injective (utiliser encore le Nullstellensatz). Conclure.

### 1. Section hyperplane générale d'une courbe

Soit  $C$  une courbe irréductible et lisse de  $\mathbf{P}^N$ , de degré  $d$ .

Montrer que pour un hyperplan  $H$  général le schéma  $Z = C \cap H$  est formé de  $d$  points distincts. (On se reportera au problème VI, théorème 3 et au Mémento 4.5 pour des indications précieuses.)

Montrer que le résultat subsiste sans l'hypothèse de lissité de  $C$ .

### 2. Existence d'intersections complètes lisses

On travaille dans  $\mathbf{P}^3$ , mais le lecteur n'aura aucune peine à généraliser cet exercice en toutes dimensions.

On se donne deux entiers  $> 0$ ,  $s$  et  $t$ , avec  $s \leq t$ . On va montrer que, si  $F$  et  $G$  sont des polynômes homogènes en  $X, Y, Z, T$ , de degrés  $s$  et  $t$ , assez généraux, la courbe intersection complète  $C = V(F, G)$  est lisse et irréductible.

On considère les espaces  $L_s = H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))$  et  $L_t = H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(t))$  et la variété projective (pourquoi?)  $V = \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}(L_s) \times \mathbf{P}(L_t)$ , dont les points sont les triplets  $(P, F, G)$ , repérés par les coordonnées homogènes  $P = (x, y, z, t)$ ,  $F = (a_{i,j,k,l})$  et  $G = (b_{i,j,k,l})$ , avec

$$F = \sum_{i+j+k+l=s} a_{i,j,k,l} X^i Y^j Z^k T^l \quad \text{et} \quad G = \sum_{i+j+k+l=t} b_{i,j,k,l} X^i Y^j Z^k T^l.$$

On pose alors :

$$M = \{(P, F, G) \in V \mid F(P) = G(P) = 0\}.$$

On considère les projections  $\pi_1 : M \rightarrow \mathbf{P}^3$  et  $\pi_2 : M \rightarrow \mathbf{P}(L_s) \times \mathbf{P}(L_t)$ . On précisera les fibres de  $\pi_2$ .

1) Montrer que  $M$  est une sous-variété fermée de  $V$  (donc une variété projective). (On pourra exhiber les équations de  $M$  et travailler sur des ouverts affines du type  $x \neq 0$ ,  $a_i \neq 0$ ,  $b_j \neq 0$ .)

2) Montrer que les fibres de  $\pi_1$  sont des variétés projectives irréductibles de dimension constante. En déduire que  $M$  est irréductible et de codimension 2 dans  $V$ .

3) Montrer que  $M$  est lisse. (On calculera l'espace tangent  $T_{(P,F,G)}(M)$  : il est donné comme noyau d'une matrice à 2 lignes et beaucoup de colonnes dont on doit montrer que le rang est 2.)

4) En appliquant à  $\pi_2$  le théorème de lissité générique (cf. Problème VI), montrer que pour  $(F, G)$  variant dans un ouvert non vide du produit  $\mathbf{P}(L_s) \times \mathbf{P}(L_t)$ ,  $V(F, G)$  est une courbe lisse.

Montrer qu'alors  $V(F, G)$  est irréductible (montrer d'abord qu'elle est connexe et utiliser V, 3.6).

5) Etudier l'exemple suivant :  $F = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$ ,  $G = X^3 + Y^3 + Z^3$ .

### 3. Quelques calculs de degrés et genres

Déterminer le degré et le genre des courbes de  $\mathbf{P}^3$  dont l'idéal  $I_C$  admet la résolution graduée ci-dessous :

$$0 \rightarrow R(-a-1)^a \rightarrow R(-a)^{a+1} \rightarrow I_C \rightarrow 0, \quad \text{avec } a \in \mathbf{N}^*,$$

$$0 \rightarrow R(-s-t-1)^2 \rightarrow R(-s-t-2) \oplus R(-t) \oplus R(-s) \rightarrow I_C \rightarrow 0,$$

avec  $s, t \in \mathbf{N}^*$ ,

$$0 \rightarrow R(-5) \rightarrow R(-4)^4 \rightarrow R(-2) \oplus R(-3)^3 \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

#### 4. Courbes elliptiques

Le but de l'exercice est de montrer que toute courbe de genre 1 est isomorphe à une cubique plane.

On suppose le corps de base  $k$  de caractéristique différente de 2. Soit  $C$  une courbe projective lisse irréductible de genre 1, soit  $P_0 \in C$  et  $C' = C - \{P_0\}$ .

1) Montrer que l'on a, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $h^0 \mathcal{O}_C(nP_0) = n$ .

2) Montrer qu'on peut trouver  $x, y \in K(C)$  telles que  $1, x$  (resp.  $1, x, y$ ) soit une base de  $H^0 \mathcal{O}_C(2P_0)$  (resp. de  $H^0 \mathcal{O}_C(3P_0)$ ) sur  $k$ .

3) Montrer que les quantités  $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3$  sont linéairement dépendantes sur  $k$ . Soit  $P(x, y)$  la relation de dépendance. Montrer que les coefficients de  $y^2$  et de  $x^3$  dans  $P$  sont non nuls.

4) Montrer que quitte à changer de base on peut supposer que  $P(x, y)$  est de la forme  $y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$  avec  $\lambda \neq 0, 1$ . (On commencera par éliminer les termes en  $y$  et  $xy$  en faisant apparaître le début d'un carré, puis, par une transformation affine de  $k$ , on ramènera les racines du polynôme du troisième degré obtenu à avoir ses racines en  $0, 1, \lambda$ .)

5) On considère l'application  $\varphi : C' \rightarrow k^2$  qui à  $P$  associe  $x(P), y(P)$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $C'$  sur la courbe affine d'équation  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ .

6) Montrer, en utilisant IX, 2.4, que  $C$  est isomorphe à la courbe de  $\mathbf{P}^2$  d'équation  $Y^2T = X(X-T)(X-\lambda T)$ .

Pour des précisions concernant la vaste et belle théorie des courbes elliptiques, cf. [H] II, 6.10.2 et IV, 4 (et les références qui y figurent) ou [F] V, 6 et VIII.

# Chapitre IX

## Applications rationnelles, genre géométrique, courbes unicursales

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 0. Introduction

On a vu dans l'introduction générale de ce cours quel intérêt on pouvait avoir (notamment pour la résolution d'équations diophantiennes ou les calculs de primitives) à disposer d'un paramétrage rationnel d'une courbe (on dit alors que la courbe est unicusale). Le but de ce chapitre est de donner le moyen de décider si une courbe est, ou non, unicusale. On verra que cela revient à dire que le genre (géométrique) de cette courbe est nul et on donnera des méthodes de calcul du genre géométrique.

### 1. Applications rationnelles

Ce sont les généralisations des fonctions rationnelles vues au chapitre VIII (cf. aussi Problème V).

**Proposition-définition 1.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  des variétés algébriques irréductibles. On considère les couples  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un ouvert non vide de  $X$  et  $\varphi : U \rightarrow Y$  un morphisme et, sur ces couples, la relation*

$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$ . C'est une relation d'équivalence. Une application rationnelle de  $X$  dans  $Y$  est une classe d'équivalence pour cette relation. On la note encore (abusivement)  $\varphi : X \rightarrow Y$ .

*Remarque 1.2.* Comme pour les fonctions rationnelles il s'agit donc de morphismes non partout définis et il y a un plus grand ouvert  $U$  sur lequel  $\varphi$  est défini et qu'on appelle le domaine de définition de  $\varphi$ .

### Exemples 1.3

i) Un morphisme est une application rationnelle.

ii) Une fonction rationnelle sur  $X$  est une application rationnelle de  $X$  dans  $k$ .

iii) Le paramétrage de la courbe affine plane  $C = V(X^3 - Y^3 - XY)$  obtenu en coupant par  $y = tx$  donne une application rationnelle  $\varphi$  de  $k$  dans  $C$  définie sur  $k$  privé des racines cubiques de l'unité par

$$\varphi(t) = \left( \frac{t}{1-t^3}, \frac{t^2}{1-t^3} \right).$$

### Proposition-définition 1.4.

a) Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$ , rationnelle. On dit que  $\varphi$  est dominante si l'image de  $\varphi$  est partout dense dans  $Y$ . (On vérifiera que cela ne dépend pas du choix du représentant de  $\varphi$ .)

b) Soient  $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$  des applications rationnelles dominantes. Alors la composée  $\psi\varphi$  est l'application rationnelle définie comme suit : on part de représentants  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  de  $\varphi$  et  $\psi$ . L'image réciproque  $\varphi^{-1}(V)$  est un ouvert non vide de  $U$ . Quitte à remplacer  $U$  par  $\varphi^{-1}(V)$  on peut supposer  $\varphi(U) \subset V$ . Alors  $\psi\varphi$  a un sens et définit une application rationnelle dominante. (On vérifie que la composée ne dépend pas des représentants de  $\varphi$  et  $\psi$ .)

c) On dit qu'une application rationnelle dominante  $\varphi : X \rightarrow Y$  est birationnelle s'il existe  $\psi : Y \rightarrow X$ , rationnelle dominante avec  $\psi\varphi = \text{Id}_X$  et  $\varphi\psi = \text{Id}_Y$  (ces égalités sont à prendre au sens des applications rationnelles, i.e. sur des ouverts non vides).

d) Deux variétés algébriques irréductibles  $X$  et  $Y$  sont dites birationnellement équivalentes s'il existe  $\varphi : X \rightarrow Y$  birationnelle. Cela signifie que  $X$  et  $Y$  ont des ouverts non vides isomorphes. Elles ont alors même dimension. Si  $C$  est une courbe,  $C$  est dite unicursale (ou rationnelle) si elle est birationnellement équivalente à  $\mathbb{P}^1$  (ou à  $k$ , ce qui est évidemment la même chose) : cela signifie qu'elle admet un paramétrage rationnel qui est un isomorphisme sur un ouvert.

*Démonstration.* Les vérifications sont immédiates. L'assertion sur la dimension vient du fait qu'un ouvert non vide a même dimension que la variété ambiante.

### Exemples 1.5

i) Bien sûr l'inclusion d'une sous-variété ouverte  $U$  dans  $X$  est birationnelle : du point de vue birationnel, on peut donc toujours se ramener au cas affine.

ii) Tous les exemples de paramétrages du type  $y = tx$  sont birationnels car on a l'application rationnelle réciproque  $(x, y) \mapsto t = y/x$ . (Exemples : les courbes d'équations  $X^2 + Y^2 - Y, X^3 - Y^3 - XY, Y^2 - X^3, \dots$ )

iii) Pour un exemple plus astucieux, la quartique tricuspidale, cf. exercice VI, 4.

Le théorème suivant est l'analogue pour les applications rationnelles de I, 6.13 :

**Théorème 1.6.** *On a une équivalence de catégories  $X \mapsto K(X)$  entre les variétés algébriques irréductibles, munies des applications rationnelles dominantes d'une part et les corps  $K$ , extensions de type fini de  $k$ , munis des homomorphismes de corps triviaux sur  $k$ , d'autre part.*

### Démonstration

1) La fonctorialité s'obtient comme dans le cas affine : si on a une application rationnelle  $\varphi : X \rightarrow Y$  on en déduit un homomorphisme de corps  $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$  en associant à la fonction rationnelle  $f$  sur  $Y$  la composée  $f\varphi \in K(X)$  (il est essentiel que  $\varphi$  soit dominant). On obtient donc ainsi un foncteur contravariant  $X \mapsto K(X)$  et il s'agit de voir qu'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif (cf. Ch. I).

2) Le foncteur est fidèle. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux applications rationnelles de  $X$  dans  $Y$  telles que  $\varphi^* = \psi^*$ . On prend des ouverts affines  $U$  et  $V$  de  $X$  et  $Y$  tels que  $\varphi$  et  $\psi$  définissent des morphismes de  $U$  dans  $V$  (quitte à restreindre  $U$  c'est possible). On a alors des homomorphismes d'anneaux  $\varphi^*$  et  $\psi^*$  de  $\Gamma(V)$  dans  $\Gamma(U)$  dont les extensions aux corps des fractions sont égales. Ces homomorphismes sont donc égaux et on conclut par I, 6.7 (la fidélité dans le cas des applications régulières).

3) Le foncteur est pleinement fidèle. Soit  $\theta : K(Y) \rightarrow K(X)$  un homomorphisme de corps qui est l'identité sur  $k$ . On choisit des ouverts affines  $U, V$  de  $X, Y$ . Leurs algèbres  $\Gamma(U)$  et  $\Gamma(V)$  ont des générateurs

$\xi_1, \dots, \xi_n$  et  $\eta_1, \dots, \eta_m$  respectivement. Les images des  $\eta_i$  par  $\theta$  sont dans un localisé  $\Gamma(U)_f$ , de sorte que  $\theta$  induit un homomorphisme d'algèbres de  $\Gamma(V)$  dans  $\Gamma(U)_f$ . D'après I, 6.7 cet homomorphisme provient d'un morphisme  $\varphi : D_U(f) \rightarrow V$ , i.e. d'une application rationnelle de  $X$  dans  $Y$  et on a  $\theta = \varphi^*$ .

4) Il reste à prouver la surjectivité du foncteur. Soient  $K$  une extension de type fini de  $k$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_n$  des générateurs de  $K$  et  $A$  la  $k$ -algèbre engendrée par les  $\xi_i$ . C'est une  $k$ -algèbre de type fini intègre, donc elle est isomorphe à une algèbre  $\Gamma(X)$  avec  $X$  affine irréductible, et comme  $K = \text{Fr}(A)$ , on a  $K \simeq K(X)$ .

**Corollaire 1.7.** *Deux variétés algébriques irréductibles sont birationnellement équivalentes si et seulement si leurs corps de fonctions sont isomorphes. En particulier, une courbe est unicursale si et seulement si son corps de fonctions est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable  $k(T)$ .*

*Exemple 1.8.* On retrouve ainsi le fait que  $V(Y^2 - X^3)$  est unicursale : on regarde en projectif l'ouvert  $y \neq 0$  et on a  $K(C) = k(X)$  (cf. VIII, 2.4)

**Proposition 1.9.** *Soit  $X$  une variété algébrique irréductible de dimension  $n$ . Alors  $X$  est birationnellement équivalente à une hypersurface de  $k^{n+1}$  (ou de  $\mathbf{P}^{n+1}$ ). En particulier, toute courbe est birationnellement équivalente à une courbe plane.*

*Démonstration.* Voir problème V ; en caractéristique 0 il suffit de prendre une base de transcendance  $\xi_1, \dots, \xi_n$  de  $K(X)$  sur  $k$  et de noter qu'en vertu du théorème de l'élément primitif  $K(X)$  est une extension monogène de  $k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

## 2. Le cas des courbes

Nous en arrivons au cœur de notre problème. L'idée est de regarder ce que donne l'équivalence birationnelle sur les courbes, et en particulier de savoir si, une courbe irréductible étant donnée, elle est birationnellement équivalente à une courbe plus "belle". Déjà il faut savoir ce que l'on entend par belle. Nous utiliserons trois critères assez naturels : être lisse (une belle courbe ne doit pas avoir de points singuliers), projective (une belle courbe doit être "complète", cf. Problème II), plane (une belle

courbe doit se plonger dans un espace projectif de petite dimension) et il y aura plusieurs questions selon que l'on exigera un, deux ou trois critères. Nous faisons d'abord un bilan des résultats connus; les démonstrations seront, pour l'essentiel, abordées aux paragraphes suivants.

Notons que la réponse à la question : "Toute courbe est-elle birationnellement équivalente à une belle courbe?" est positive si on ne garde qu'un critère :

- 1) Comme le lieu singulier  $S$  de  $C$  est fini (cf. Problème V)  $C$  est birationnellement équivalente à son ouvert de lissité  $C - S$ .
- 2) Si  $C$  est quelconque, on prend un ouvert affine  $U$  de  $C$ , on plonge  $U$  dans  $k^n$  et on prend l'adhérence  $\bar{U}$  de  $U$  dans  $\mathbf{P}^n$ . Alors  $C$  est birationnellement équivalente à la courbe projective  $\bar{U}$ .
- 3) Le cas du critère "courbe plane" a été vu en 1.9.

Avec deux critères le jeu devient plus difficile.

- 1) Pour plane et projective, c'est facile : on prend une courbe affine plane équivalente et son adhérence.
- 2) Pour plane et lisse, la réponse est positive si on considère comme courbe plane tout ouvert d'une courbe plane projective. Une question plus délicate (mais probablement pas passionnante) consiste à demander s'il existe une courbe plane, fermée dans  $k^2$  et lisse, birationnellement équivalente à la courbe  $C$  donnée (par exemple si  $C$  est une courbe plane de degré 5 avec trois points doubles non alignés). L'auteur de ces lignes ne connaît pas la réponse à cette question.
- 3) Pour projective et lisse, la réponse est positive, mais c'est un théorème (cf. 5.11) :

**Théorème 2.1** (désingularisation). *Toute courbe irréductible est birationnellement équivalente à une courbe projective lisse. Plus précisément, si  $C$  est une courbe projective irréductible il existe une courbe projective, irréductible et lisse  $X$  et un morphisme  $\pi : X \rightarrow C$  fini (donc surjectif, cf. 3.4) et birationnel. On dit que  $X$  est la désingularisée ou la normalisée de  $C$ .*

*Remarque 2.2.* Le théorème analogue avec les surfaces est vrai en toutes caractéristiques (Abhyankar). En dimension quelconque le résultat n'est officiellement prouvé qu'en caractéristique 0 (Hironaka), mais il semble bien que la preuve du cas général soit annoncée.

Enfin avec les trois critères la réponse est non en général (cf. 2.6).

Outre cette question de l'existence d'un beau modèle birationnel, se pose celle de l'unicité. Pour le cas projective et lisse la réponse est positive :

**Théorème 2.3.** *Soient  $C, C'$  deux courbes projectives irréductibles et lisses. On suppose  $C$  et  $C'$  birationnellement équivalentes. Alors, elles sont isomorphes.*

*Démonstration.* La démonstration repose sur le lemme suivant :

**Lemme 2.4.** *Soient  $C$  une courbe lisse et irréductible,  $P \in C$  et soit  $\varphi : C - \{P\} \rightarrow X$  un morphisme dans une variété projective  $X$ . Alors il existe un unique morphisme  $\bar{\varphi} : C \rightarrow X$  qui prolonge  $\varphi$ .*

*Démonstration*

1) Unicité. On se ramène au cas où  $C$  est affine et l'unicité résulte aussitôt de l'irréductibilité de  $C$ .

2) Existence. Comme la variété  $X$  est plongée dans  $\mathbf{P}^n$  on peut supposer  $X = \mathbf{P}^n$ . On note déjà que si  $U$  est un ouvert de  $C$ , contenant  $P$  et si on sait prolonger  $\varphi|_{U-\{P\}}$  on a gagné (il suffit de recoller ce prolongement avec  $\varphi$  sur  $U - \{P\}$ ). Cette remarque permet de remplacer  $C$  par un ouvert  $U \subset C$  contenant  $P$ . On peut donc déjà supposer  $C$  affine d'anneau  $A$ . Par ailleurs, soit  $U_0$  l'ouvert  $x_0 \neq 0$  de  $\mathbf{P}^n$ . On peut supposer que l'image de  $\varphi$  rencontre  $U_0$ , et quitte à restreindre  $C$ , qu'elle est contenue dans  $U_0$ . Soit  $\pi$  une uniformisante de  $C$  en  $P$  (on sait que  $C$  est lisse). Quitte à restreindre encore  $C$  on peut supposer que  $\pi$  provient d'une fonction  $f$  régulière sur  $C$  et sans autre zéro que  $P$  dans  $C$ . On est donc ramené au cas où  $C - \{P\}$  est l'ouvert affine  $D(f)$  de  $C$ . Comme  $\varphi$  est à valeurs dans  $U_0$ , on a  $\varphi = (1, h_1, \dots, h_n)$  avec  $h_i \in A_f$ . Quitte à restreindre (une dernière fois)  $C$  on peut supposer les  $h_i$  de la forme  $h_i = u_i f^{-\alpha_i}$  avec  $u_i \in A$ ,  $u_i(P) \neq 0$  et  $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ .

Si tous les  $\alpha_i$  sont  $\leq 0$ ,  $\varphi$  se prolonge de manière évidente à  $C$ . Sinon on note  $\alpha = \alpha_k$  le plus grand des  $\alpha_i$  et comme  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbf{P}^n$ , on a encore  $\varphi = (f^\alpha, u_1 f^{\alpha-\alpha_1}, \dots, u_k, \dots)$ , ou encore, comme  $u_k$  est non nul au voisinage de  $P$ ,  $\varphi = (f^\alpha/u_k, u_1 f^{\alpha-\alpha_1}/u_k, \dots, 1, \dots)$ , de sorte que  $\varphi$  se prolonge bien au voisinage de  $P$ .

On peut alors revenir à la démonstration de 2.3. On a un morphisme  $\varphi : U \rightarrow C'$ , défini sur un ouvert de  $C$ , donc sur  $C$  privé d'un nombre fini de points. Comme  $C$  est lisse et  $C'$  projective, on voit en appliquant 2.4 que  $\varphi$  se prolonge à  $C$ . On prolonge de même l'inverse de  $\varphi$  (au sens des applications rationnelles), soit  $\psi$ , à  $C'$  tout entier. On conclut enfin grâce à l'assertion d'unicité de 2.4 appliquée à  $\varphi\psi$  (resp.  $\psi\varphi$ ) et à l'identité de  $C'$  (resp.  $C$ ).

### Remarques 2.5

1) Le théorème 2.3 permet de terminer la démonstration de VIII, 2.15 (le point 5  $\Rightarrow$  1) : comme  $K(C)$  est isomorphe à  $k(T)$ ,  $C$  est birationnellement équivalente à  $\mathbf{P}^1$  (cf. 1.7); comme  $C$  et  $\mathbf{P}^1$  sont irréductibles, lisses et projectives, elles sont donc isomorphes d'après 2.3.

2) C'est le théorème 2.3 qui fait qu'on peut parler de *la* normalisée : elle est unique à isomorphisme près. On dit que c'est le modèle projectif de  $C$  ou de  $K(C)$ . Du point de vue birationnel on est donc ramené aux courbes projectives lisses. Ainsi on peut définir :

**Définition 2.6.** Soient  $C$  une courbe,  $X$  sa normalisée. On appelle genre géométrique de  $C$  le genre arithmétique de  $X$ .

On notera que pour une courbe projective lisse les deux genres coïncident. Sinon, dans la suite de ce chapitre, on notera  $g(C)$  le genre géométrique de  $C$  et  $p_a(C)$  son genre arithmétique.

**Proposition 2.7.** Si deux courbes sont birationnellement équivalentes elles ont même genre géométrique. La réciproque est vraie si  $g = 0$  : une courbe est unicursale si et seulement si son genre géométrique est nul.

*Démonstration.* La première assertion est triviale. La seconde résulte de VIII, 2.15, cf. 2.5.1.

### Remarques 2.8

1) Si on a  $g \geq 1$  les courbes irréductibles et lisses de genre  $g$  ne sont pas toutes isomorphes. On peut montrer qu'à isomorphisme près elles forment une variété de dimension 1 (resp.  $3g - 3$ ) si  $g = 1$  (resp.  $g > 1$ ).

2) On peut maintenant répondre par la négative à la question de l'existence d'une courbe triplement belle (projective, plane, lisse) birationnellement équivalente à une courbe donnée. En effet une courbe lisse

plane projective a un genre qui vaut 0, 1, 3, 6, . . . , mais pas 2 ou 4. Or il existe des courbes de genre 2, 4, (cf. Examen 1992 et Exercice VIII, 2) et même de tout genre (cf. [H] III, Exercice 5.6). En revanche on peut montrer que toute courbe est isomorphe à une courbe de  $\mathbf{P}^3$  (cf. VIII, 1.b.i ou [H] IV, 3.6)

Le problème de la classification birationnelle est donc directement lié au calcul du genre. Mais ce n'est pas encore si facile, surtout pour les courbes de  $\mathbf{P}^3$ . Une façon de procéder consiste à utiliser d'autres courbes réalisant un compromis acceptable : les courbes projectives planes qui n'ont que des singularités ordinaires (cf. V, 4). C'est justifié par le théorème suivant, dont on trouvera une démonstration dans le problème VIII :

**Théorème 2.9.** *Soit  $C$  une courbe irréductible. Elle est birationnellement équivalente à une courbe projective plane qui n'a que des points singuliers ordinaires (i.e. à tangentes distinctes).*

Enfin, pour ces courbes (qu'on appellera courbes "ordinaires") on sait calculer le genre (cf. 5.10) :

**Théorème 2.10.** *Soit  $C$  une courbe projective plane irréductible de degré  $d$  qui n'a que des singularités ordinaires. On note  $\mu_P$  la multiplicité de  $C$  en  $P$  (cf. V, 4.4). On a la formule :*

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{\mu_P(\mu_P - 1)}{2}.$$

En vérité la méthode suggérée par 2.9 et 2.10 pour calculer le genre n'est guère satisfaisante dans la pratique et nous en donnerons une autre beaucoup plus efficace (cf. 5.12 et 5.15).

### 3. Normalisation : la voie algébrique

Nous abordons le problème de la désingularisation des courbes (théorème 2.1), d'abord par une méthode essentiellement algébrique. Nous aurons besoin de quelques résultats auxiliaires, d'énoncés simples, mais dont la démonstration n'est pas toujours évidente et nous nous contenterons le plus souvent de donner des démonstrations sommaires ou des références.

### a. Quelques préliminaires

#### a.1. Rappels sur les morphismes finis

**Définition 3.1.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles. On dit que  $\varphi$  est affine s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- 1) Pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ ,  $\varphi^{-1}(U)$  est un ouvert affine de  $X$ .
- 2) Il existe un recouvrement de  $Y$  par des ouverts affines  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tel que, pour tout  $i$ ,  $\varphi^{-1}(U_i)$  soit un ouvert affine de  $X$ .

Pour l'équivalence des deux propriétés ci-dessus, qui n'est pas triviale, voir [M] II, 7.5 et III, 1.5.

**Définition 3.2.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles. On dit que  $\varphi$  est fini s'il est affine et si pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$  le morphisme d'anneaux  $:\varphi^* : \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U))$  est entier (donc fini). Il suffit de vérifier cette propriété sur un recouvrement ouvert affine de  $Y$ .

Pour montrer que la vérification sur un recouvrement est suffisante on se ramène au cas affine et on montre que  $\Gamma(X)$  est un  $\Gamma(Y)$ -module de type fini ; cela résulte du lemme suivant :

**Lemme 3.3.** Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $f_1, \dots, f_n \in A$  des éléments qui engendrent l'idéal unité. On suppose que pour tout  $i$  le module localisé  $M_{f_i}$  est de type fini sur  $A_{f_i}$ . Alors  $M$  est de type fini sur  $A$ .

*Démonstration.* Exercice : on introduira le sous-module  $M'$  de  $M$  engendré par les générateurs des localisés et le transporteur :

$$I = \{a \in A \mid aM \subset M'\}.$$

**Proposition 3.4.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme fini.

- 1) On a  $\dim X = \dim Y$ .
- 2) Le morphisme  $\varphi$  est surjectif et ses fibres sont finies.
- 3) Le morphisme  $\varphi$  est fermé (i.e. transforme un fermé en un fermé).
- 4) Si  $Y$  est une variété complète (cf. Problème II) il en est de même de  $X$ .
- 5) Si  $Y$  est une variété séparée (cf. Problème I) il en est de même de  $X$ .

*Démonstration*

1) On se ramène au cas affine et c'est clair en termes de degré de transcendance.

2) On peut supposer  $X$  et  $Y$  affines d'anneaux  $B$  et  $A$ . La surjectivité vient alors de IV, 4.2. Si  $y \in Y$  correspond à l'idéal maximal  $m$  de  $A$ , les points de la fibre correspondent aux idéaux maximaux de la  $k$ -algèbre finie  $B/mB$  et sont donc en nombre fini.

3) Le fait d'être fermé étant local, on se ramène au cas affine. Si  $F$  est un fermé de  $X$  on considère le morphisme restreint  $\varphi : F \rightarrow \overline{\varphi(F)}$ . Il est encore fini, donc surjectif, donc  $\varphi(F) = \overline{\varphi(F)}$ .

4) Il suffit de montrer que  $\varphi$  est propre, i.e. que si  $Z$  est une variété  $\varphi \times \text{Id}_Z$  est fermé. D'après 2), il suffit de voir que ce morphisme est fini. On se ramène au cas où  $X, Y, Z$  sont affines d'anneaux  $A, B, C$  et il reste à voir que si  $A$  est entier sur  $B$  il en est de même de  $A \otimes_k C$  sur  $B \otimes_k C$ , ce qui est immédiat.

5) Il s'agit de montrer que la diagonale de  $X \times X$  est fermée, ou encore que son complémentaire est ouvert. Soit  $(x, x') \in X \times X$  avec  $x \neq x'$ . Si  $\varphi(x) \neq \varphi(x')$  on conclut en utilisant le fait que  $Y$  est séparée. Si  $\varphi(x) = \varphi(x')$ , comme  $\varphi$  est affine,  $x$  et  $x'$  sont dans un même ouvert affine et on conclut en utilisant le fait qu'une variété affine est séparée.

**Proposition 3.5.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme fini. On suppose que  $Y$  est une courbe projective et que  $X$  est lisse. Alors  $X$  est une courbe projective.*

*Démonstration.* On se reportera à [H] I, 6.8 pour toutes précisions. L'idée est la suivante : on note que  $X$  est une courbe complète et il suffit donc de trouver un plongement de  $X$  dans une variété projective (cf. Problème II). On recouvre  $X$  par des ouverts affines  $U_1, \dots, U_n$ . On plonge chaque  $U_i$  dans un espace projectif et on note  $Y_i$  l'adhérence de  $U_i$  dans cet espace : c'est une courbe projective. On a un morphisme  $\varphi_i : U_i \rightarrow Y_i$  qui s'étend à  $X$  en un morphisme, noté encore  $\varphi_i$ , en vertu de 2.4. A priori ce morphisme n'est pas un plongement, mais on peut considérer le morphisme diagonal  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  dans le produit des  $Y_i$ . On montre alors (en utilisant la lissité) que  $\varphi$  est un plongement et on a la conclusion.

*Remarque 3.6.* L'assertion ci-dessus est encore vraie sans l'hypothèse de lissité sur  $X$  (cf. [H] III, Exercice 5.7.d ou [H1] Ch. I, §4). Nous admettons ce fait dans la suite, notamment au paragraphe 5. Voir toutefois

l'Appendice 6 pour une démonstration des théorèmes du paragraphe 5 qui n'utilise pas 3.5.

**Proposition 3.7.** *Soient  $X, Y$  des variétés séparées,  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme affine et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . On a, pour tout entier  $i$ ,*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, \varphi_* \mathcal{F}).$$

*Démonstration.* On note d'abord que  $\varphi_* \mathcal{F}$  est quasi-cohérent. Pour  $i = 0$  l'assertion de 3.7 n'est autre que la définition de l'image directe. Pour  $i > 0$  on prend un recouvrement affine fini  $V_1, \dots, V_n$  de  $Y$  et le recouvrement (affine lui aussi)  $U_i = \varphi^{-1}(V_i)$  de  $X$  et on calcule les cohomologies de Čech associées. Les complexes sont respectivement obtenus en prenant les produits des espaces de sections :  $\Gamma(V_{i_0, \dots, i_p}, \varphi_* \mathcal{F})$  et  $\Gamma(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F})$ , or ces espaces sont égaux par définition de  $\varphi_*$ , de sorte que les complexes de Čech sont identiques.

### a.2. Rappels sur le recollement des variétés

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés et  $U_i$  un ouvert de  $X_i$ . On suppose que les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  sont des variétés isomorphes. Soit  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  un tel isomorphisme. On définit alors une variété  $X$  (qu'on dit obtenue par recollement de  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $U_1$  et  $U_2$ ) de la manière suivante :

On prend la réunion *disjointe*  $Y = X_1 \cup X_2$ , on considère la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie  $U_1$  et  $U_2$  (i.e. les seuls couples non trivialement équivalents sont les  $(x, \varphi(x))$  pour  $x \in U_1$ ) et on appelle  $X$  l'ensemble quotient  $Y/\mathcal{R}$  muni de la topologie quotient. Cela signifie encore que si on considère les applications naturelles (injectives)  $i_1 : X_1 \rightarrow X$  et  $i_2 : X_2 \rightarrow X$ , un sous-ensemble  $V \subset X$  est dit ouvert si et seulement si  $V_1 = i_1^{-1}(V)$  et  $V_2 = i_2^{-1}(V)$  sont ouverts. Le faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  est alors défini par :

$$\mathcal{O}_X(V) = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(V_1), \\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_1}(V_2) \text{ et } \varphi^*(s_2|_{V_2 \cap U_2}) = s_1|_{V_1 \cap U_1}\}.$$

(C'est un exercice, cf. Exercice VII, 2.)

### b. Normalisation

Nous indiquons ici une première voie, efficace mais brutale, pour désingulariser les courbes. Si  $C$  est une courbe irréductible, on sait que

$C$  est lisse si et seulement si ses anneaux locaux sont des anneaux de valuation discrète (cf. V, 4.1) et que, si de plus  $C$  est affine, cela signifie simplement que  $\Gamma(C)$  est intégralement clos (cf. V, 4.2).

On commence donc par le cas d'une courbe affine  $C$ . Soit  $K(C)$  le corps des fonctions rationnelles de  $C$ . Si  $C$  n'est pas lisse, l'anneau  $A = \Gamma(C)$  n'est pas intégralement clos. Soit  $A'$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $K(C)$ . L'anneau  $A'$  est intégralement clos et c'est un  $A$ -module de type fini (cf. Mémento 1.7), donc, a fortiori, une  $k$ -algèbre de type fini. Il existe donc une variété algébrique affine  $C'$  avec  $\Gamma(C') = A'$  et un morphisme  $\varphi : C' \rightarrow C$  qui correspond à l'inclusion  $A \subset A'$  et qui est donc fini. Il en résulte que  $C'$  est une courbe irréductible, lisse et que  $\varphi$  est fini et birationnel, donc un isomorphisme en dehors des points singuliers de  $C$  (cf. partiel 1991 II). On a donc bien désingularisé  $C$  au sens de 2.1.

Pour le cas général, on recouvre la courbe  $C$  par des ouverts affines  $U_1, \dots, U_n$  tels que chaque  $U_i$  ne contienne qu'un point singulier au plus de  $C$ . On pose  $A_i = \Gamma(U_i) \subset K(C)$  et on considère la clôture intégrale  $A'_i$  de  $A_i$  et la courbe affine  $C_i$  qui lui correspond. On a un morphisme  $\varphi_i = C_i \rightarrow U_i$  fini, birationnel, qui est un isomorphisme sauf en au plus un point. On recolle  $C_i$  et  $C_j$  le long des ouverts  $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$  et  $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ , puis on continue ainsi de proche en proche et on obtient  $\varphi : C' \rightarrow C$  fini, birationnel avec  $C'$  courbe lisse et irréductible, de sorte qu'on a bien désingularisé  $C$ . En vertu de 3.5, si  $C$  est projective il en est de même de  $C'$ .

Ce procédé qui a le mérite d'être très simple présente toutefois un inconvénient : on y contrôle mal le morphisme  $\varphi$ . Or, notamment pour les calculs de genre, on aura besoin de précisions sur le comportement local de  $\varphi$ . C'est ce que nous allons obtenir maintenant au moyen des éclatements.

## 4. Éclatements affines

### a. Introduction

Nous nous contenterons ici d'étudier l'éclatement d'un point du plan. Pour des généralisations on se reportera par exemple à [H] II, 7 (pour le cas général) et V, 3 (pour l'éclatement d'un point sur une surface).

Il s'agit d'une méthode pour désingulariser une courbe plane  $C$  au voisinage d'un point. Puisque le problème est local, on peut se ramener au cas d'une courbe affine :  $C \subset k^2$ . On suppose que  $C$  est singulière

en un point  $P$ , et quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer  $P = (0, 0)$ . L'idée de l'éclatement, disons dans le cas d'un point double ordinaire (par exemple pour  $C = V(X^3 + Y^2 - X^2)$ ), est de séparer les deux branches de la courbe qui passent par  $P$  en remplaçant  $P$  par deux points correspondant aux deux tangentes à  $C$  en  $P$  (cf. Fig. 1). Il faut pour cela passer dans l'espace à trois dimensions et, en fait, modifier le plan de telle sorte que le point  $P$  soit remplacé par l'ensemble de toutes les directions de droites passant par  $P$ . La traduction de ce principe par le calcul est simple : les droites passant par  $P$  sont les droites  $y = tx$  et on considère l'ensemble algébrique affine

$$B = \{(x, y, t) \in k^3 \mid y = tx\}.$$

C'est une surface irréductible de  $k^3$ , munie d'un morphisme  $\pi : B \rightarrow k^2$  qui à  $(x, y, t)$  associe  $(x, y)$ , dont les fibres  $\pi^{-1}(x, y)$  peuvent être décrites ainsi (cf. Fig. 1) :

- 1) Si  $x \neq 0$ , la fibre contient l'unique point  $(x, y, y/x)$ .
- 2) Si  $x = 0$  et  $y \neq 0$ , la fibre est vide.
- 3) Si  $x = y = 0$  (i.e. si l'on est en  $P$ ), la fibre est la droite  $L$  (dite *exceptionnelle*) formée des points  $(0, 0, t)$  pour  $t \in k$ .

On dit que  $(B, \pi)$  est l'*éclatement* du plan au point  $P$ .

On notera que si  $B'$  (resp.  $U$ ) est l'ouvert de  $B$  (resp. de  $k^2$ ) défini par  $x \neq 0$ ,  $\pi$  induit un isomorphisme de  $B'$  sur  $U$  dont la réciproque est donnée par  $(x, y) \mapsto (x, y, y/x)$ .

L'image réciproque de  $C = V(X^3 + Y^2 - X^2)$  par  $\pi$  est l'ensemble des points  $(x, y, t)$  soumis aux deux relations  $y = tx$  et  $x^3 + y^2 - x^2 = 0$ , ou encore à  $y = tx$  et  $x^2(x + t^2 - 1) = 0$ . On voit que  $\pi^{-1}(C)$  est réductible et se décompose en la droite  $L$  définie par  $x = y = 0$  et en une courbe  $C'$  d'équations  $y = tx$  et  $x + t^2 - 1 = 0$ . Cette courbe s'appelle la *transformée stricte* de  $C$  et elle est lisse. Il suffit pour le voir de projeter  $B$  sur le plan des  $(x, t)$  par  $\pi' : B \rightarrow k^2$  (c'est un isomorphisme de réciproque  $(x, t) \mapsto (x, xt, t)$ ), et  $C'$  est isomorphe par cette projection à la courbe plane  $C'' = V(X + T^2 - 1)$  qui est lisse (c'est une parabole). La courbe  $C'$  (ou aussi  $C''$ ) est bien une désingularisée de  $C$  car  $\pi : C' \rightarrow C$  est birationnel. On note qu'au-dessus de  $P$  on a deux points de  $C'$  correspondant aux deux tangentes à  $C$  en  $P$  :  $(0, 0, \pm 1)$ .

En fait, dans la suite, on va oublier la surface  $B$  et considérer directement la transformation  $\psi = \pi\pi'^{-1}$  qui va du plan des  $(x, t)$  dans celui

des  $(x, y)$ .

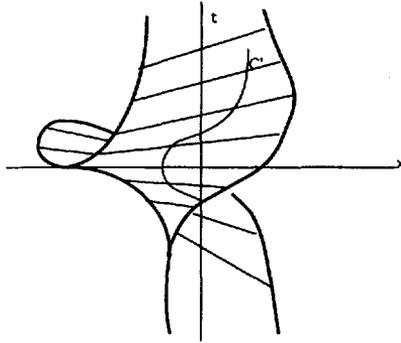


Figure 1

**b. Modification du plan**

On considère le morphisme  $\psi : k^2 \rightarrow k^2$  qui à  $(x, t)$  associe  $(x, y) = (x, xt)$ . C'est un morphisme birationnel, d'image  $U \cup \{P\}$  où  $U$  est l'ouvert  $x \neq 0$  et  $P$  le point  $(0, 0)$ . Sur  $U$  la réciproque de  $\psi$  est donnée par  $(x, y) \mapsto (x, y/x)$  qui est un isomorphisme de  $U$  sur l'ouvert  $\psi^{-1}(U)$  (défini lui aussi par  $x \neq 0$ ). La fibre  $L = \psi^{-1}(P)$  est la droite (exceptionnelle) d'équation  $x = 0$ .

Soit  $C$  une courbe du plan des  $(x, y)$ ,  $C_0 = C \cap U$ ,  $C'_0 = \psi^{-1}(C_0)$  (qui est isomorphe à  $C_0$  par  $\psi$ ) et soit  $C'$  l'adhérence de  $C'_0$ .

**Proposition 4.1.** *On suppose  $C = V(F)$  avec  $F \in k[X, Y]$  irréductible. On écrit  $F = F_r + \dots + F_n$  avec  $r = \mu_P(C) \leq n = \deg F$  et  $F_i$  homogène de degré  $i$ . Alors on a  $C' = V(F')$  avec*

$$F'(X, T) = F_r(1, T) + XF_{r+1}(1, T) + \dots + X^{n-r}F_n(1, T)$$

et  $\psi|_{C'}$  est un morphisme birationnel de  $C'$  dans  $C$  qui induit un isomorphisme de  $C'_0$  sur  $C_0$ .

*Démonstration.* On a  $\psi^{-1}(C) = V(F^\psi)$  avec  $F^\psi(X, T) = F(X, XT) = X^r F_r(1, T) + \dots + X^n F_n(1, T) = X^r F'(X, T)$ . On peut encore écrire cela sous la forme  $F(X, Y) = X^r F'(X, Y/X)$  et on en déduit aisément que  $F'$  est irréductible. Si maintenant on a  $(x, t) \in k^2$  avec  $x \neq 0$ , dire que  $(x, t)$  est dans  $C'_0$  c'est dire que  $F(x, xt) = 0$ , ou encore, comme  $x \neq 0$ , que  $F'(x, t) = 0$ . Autrement dit, on a  $C'_0 \subset V(F')$  et donc aussi  $C' \subset V(F')$ , mais comme  $F'$  est irréductible on a l'égalité. Le reste est clair.

*Remarque 4.2.* Si  $r = 0$ , i.e. si le point  $P$  n'est pas sur  $C$  on a  $F'(X, T) = F(X, XT)$  et  $C'_0 = V(F')$  est fermé dans  $k^2$ .

**Proposition 4.3.** *On suppose que la droite  $X = 0$  n'est pas tangente à  $C$  en  $P$  (on peut toujours se ramener à ce cas par un isomorphisme affine), on peut alors écrire  $F_r = \prod_{i=1}^s (Y - \lambda_i X)^{r_i}$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in k$ , distincts et  $r = \sum_{i=1}^s r_i = r$ . Alors on a  $\psi^{-1}(P) = \{P_1, \dots, P_s\}$  avec  $P_i = (0, \lambda_i)$  et  $1 \leq \mu_{P_i}(C') \leq \mu_{P_i}(C', L) = r_i$ . De plus, si  $P$  est un point multiple ordinaire (i.e. si  $r_i = 1$  pour tout  $i$ ) chaque  $P_i$  est un point lisse de  $C'$  et la droite  $X = 0$  n'est pas tangente à  $C'$  en  $P_i$ .*

*Démonstration.* La définition de  $F'$  donne

$$F'(X, T) = \prod_{i=1}^s (T - \lambda_i)^{r_i} + X F_{r+1}(1, T) + \dots$$

Cherchons les points au-dessus de  $P$  : ce sont les points  $(0, t)$  tels que  $F'(0, t) = 0$ , donc les points  $P_i = (0, \lambda_i)$ . On compare alors la multiplicité de  $C'$  en  $P_i$  et la multiplicité d'intersection de  $C'$  et  $L$  en ce point :  $\mu_{P_i}(C') \leq \mu_{P_i}(C' \cap L)$  (cf. Problème VII, axiome 5), or on a  $\mu_{P_i}(C' \cap L) = \mu_{P_i}(F', X) = \mu_{P_i}(\prod_{i=1}^s (T - \lambda_i)^{r_i}, X) = r_i$  (cf. Problème VII, *loc. cit.*). Dans le cas  $r_i = 1$ , le point  $P_i$  est donc lisse et comme la multiplicité d'intersection de  $C'$  avec la droite  $X = 0$  vaut 1 en ce point, cette droite n'est pas tangente (cf. Problème VII, *loc. cit.*).

*Remarque 4.4.* L'exemple  $F(X, Y) = Y^2 - X^3$  montre que la dernière assertion de 4.3 ne subsiste pas si  $r_i \geq 2$  : la droite  $X = 0$  est tangente à  $F'(X, T) = T^2 - X$  au point  $(0, 0)$ .

Le bilan de la transformation  $\psi$  pour la courbe  $C$  est donc le suivant : 1) on a un morphisme  $\psi : C' \rightarrow C$  qui est un isomorphisme sur l'ouvert  $x \neq 0$ , 2) si  $P$  est un point multiple ordinaire d'ordre  $r$  de  $C$ , on l'a remplacé, dans  $C'$ , par  $r$  points lisses.

Attention cependant, par cette méthode, on a perdu le contrôle des points de  $C$  qui vérifient  $x = 0$  et qui peuvent donner dans la courbe projective  $V(F'^{\#})$  des points singuliers à l'infini. Par exemple, si on part de  $F = X^4 + Y^3 + Y^2 - X^2$  et qu'on éclate l'origine (qui est le seul point singulier de  $C$ , y compris à l'infini), on obtient la courbe d'équation  $X^2 + T^3 X + T^2 - 1$  qui n'a pas de points singuliers en affine mais en a

un à l'infini :  $(1, 0, 0)$ . Pour surmonter cette difficulté il faudra introduire les éclatements projectifs ou faire des recollements (cf. 5.7).

Dans tous les cas nous aurons besoin de mieux comprendre la structure locale des éclatements affines, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### c. Structure locale d'un éclatement affine

Les notations sont celles du paragraphe b. Le point  $P = (0, 0)$  est supposé de multiplicité  $r \geq 1$  sur  $C$  et on suppose encore que la droite  $V(X)$  (i.e.  $X = 0$ ) n'est pas tangente à  $C$  en  $P$ .

On note  $x, y$  (resp.  $x, t$ ) les fonctions coordonnées sur  $k^2$ . Sur les corps des fonctions rationnelles on a alors  $K(C) = k(x, y) = K(C') = k(x, t)$ , les éléments  $x, y$  (resp.  $x, t$ ) étant liés par la relation  $F(x, y) = 0$  (resp.  $F'(x, t) = 0$ ). De plus, on a  $y = tx$ . Nous allons d'abord montrer que l'élément  $t$  vérifie une équation algébrique à coefficients dans l'anneau  $k[x, y]$  engendré par  $x$  et  $y$ , dont le coefficient dominant est  $\neq 0$  en  $P$  :

**Lemme 4.5.** *Avec les notations ci-dessus,  $t$  vérifie l'équation :*

$$h_r(y)t^r + \sum_{k=0}^{r-1} h_k(x, y)t^k = 0,$$
 dans laquelle les  $h_k$  sont des polynômes. De plus, si on pose  $h = h_r(y)$ , on a  $h(P) \neq 0$  et si  $D_C(h)$  est l'ouvert affine de  $C$  défini par  $h \neq 0$ , on a  $D_C(h) \cap V(X) = \{P\}$ .

*Démonstration.* Posons  $F(X, Y) = \sum_{d=r}^n \sum_{j=0}^d a_{d-j,j} X^{d-j} Y^j$ . On a  $F(x, y) =$

$0$  et  $F'(x, t) = \sum_{d=r}^n x^{d-r} \sum_{j=0}^d a_{d-j,j} t^j = 0$ . Les monômes  $x^{d-r} t^j$  peuvent être réduits en tenant compte de la relation  $y = tx$  :

1) Si  $j \leq d - r$ , on a  $x^{d-r} t^j = x^{d-r-j} y^j$ , qui ne contient plus de termes en  $t$ ,

2) Si  $j > d - r$ , on a  $x^{d-r} t^j = y^{d-r} t^{j-d+r}$  et le degré en  $t$  de ce monôme est  $\leq r$  et égal à  $r$  pour  $j = d$ .

On a donc bien une relation de la forme annoncée avec  $h = h_r(y) = \sum_{d=r}^n a_{0,d} y^{d-r}$ . On constate que l'on a  $h(P) = a_{0,r} = 1$  (comme  $V(X)$  n'est pas tangente à  $C$  en  $P$  on a  $F_r = \prod_{i=1}^r (Y - \lambda_i X)^{r_i}$ ). De plus, la formule  $F(0, y) = h(y)y^r$  montre que la droite  $V(X)$  ne coupe l'ouvert  $D_C(h)$  qu'en  $P$ .

On a alors aussitôt le corollaire suivant :

**Corollaire 4.6.** Avec les notations précédentes, si on pose  $W = D_C(h)$  et  $V = \psi^{-1}(W) = D'_C(h)$ ,  $W$  et  $V$  sont des variétés affines,  $W$  contient  $P$  et  $B = \Gamma(V) = k[x, t]_h$  est fini sur  $A = \Gamma(W) = k[x, y]_h$ . Le morphisme  $\psi : V \rightarrow W$  est fini, birationnel et c'est un isomorphisme en dehors de  $\psi^{-1}(P)$ .

Nous allons maintenant calculer la dimension de l'espace vectoriel quotient  $B/A$  :

**Lemme 4.7** (lemme de Gorenstein). Avec les notations précédentes, si on désigne par  $m$  l'idéal  $(x, y)$  de  $A$  on a les relations suivantes :

1) L'idéal  $x^{r-1}B$  de  $B$  est contenu dans  $A$  et égal à

$$m^{r-1} = (x^{r-1}, x^{r-2}y, \dots, y^{r-1}).$$

2) On a  $\dim_k B/x^{r-1}B = r(r-1)$ .

3) On a  $\dim_k A/m^{r-1} = r(r-1)/2$ , et donc  $\dim_k B/A = r(r-1)/2$ .

*Démonstration*

1) Le  $A$ -module  $B$  est engendré par  $1, t, \dots, t^{r-1}$ . Or, on a  $x^{r-1}t^j = x^{r-1-j}x^j t^j = x^{r-1-j}y^j \in m^{r-1}$ , donc on a bien  $x^{r-1}B \subset m^{r-1}$ . Comme  $m^{r-1}$  est engendré par les  $x^{r-1-j}y^j$ , la réciproque est claire.

2) On calcule l'anneau quotient  $k[x, t]/(x)$ . C'est le quotient

$$k[X, T]/(F'(X, T), X) = k[T]/(F'(0, T)) = k[T]/\prod_1^s (T - \lambda_i)^{r_i}$$

et comme  $F'(0, T)$  est unitaire de degré  $r$  ce quotient est de dimension  $r$  sur  $k$ . Par ailleurs l'image de  $h$  dans cet anneau est égale à celle de  $h_r(tx) = 1 + a_{0,1}tx + \dots + a_{0,n-r}(tx)^{n-r}$  et comme  $x = 0$  dans le quotient cette image vaut 1, donc est inversible, de sorte que l'anneau quotient est isomorphe à  $B/xB$ . On a donc  $\dim_k B/xB = r$ .

Pour continuer on considère la filtration de  $B$  par les idéaux  $x^i B$  :  $0 \subset x^{r-1}B \subset \dots \subset xB \subset B$  et on a  $\dim_k B/x^{r-1}B = \sum_{i=0}^{r-2} \dim_k x^i B/x^{i+1}B$ . Mais on a un isomorphisme :  $B/xB \rightarrow x^i B/x^{i+1}B$  obtenu par multiplication par  $x^i$  (l'injectivité vient de l'intégrité de  $B$ ) et donc on a  $\dim_k x^i B/x^{i+1}B = \dim_k B/xB = r$ , donc  $\dim_k B/x^{r-1}B = r(r-1)$ .

3) Si on note  $m_P$  l'idéal  $(X, Y)$  de  $k[X, Y]$ , l'anneau quotient  $A/m_P^{r-1}$  n'est autre que  $(k[X, Y]/(m_P^{r-1}, F))_h$ , mais comme  $F \in m_P^{r-1}$  et  $h_r \notin m_P^{r-1}$ , c'est simplement  $k[X, Y]/m_P^{r-1}$  qui est de dimension  $r(r-1)/2$ , comme on l'a vu en V, 4.6 (une base de cet espace est formée des éléments  $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{r-2}, x^{r-3}y, \dots, y^{r-2}$ ).

*Remarque 4.8.* A priori, il se peut que l'ouvert  $W$  contienne des points singuliers  $P_1, \dots, P_r$  autres que  $P$ . Cependant, quitte à remplacer  $W$  par un ouvert affine plus petit, on peut éliminer ces points. En effet, si  $P_i = (\alpha_i, \beta_i)$  est un tel point, on a  $\alpha_i \neq 0$  puisque  $W$  ne rencontre  $V(X)$  qu'en  $P$ . Posons  $\alpha = \alpha_i$ . On localise alors  $A$  et  $B$  par  $g = x - \alpha$ . Les ouverts obtenus sont encore affines et le morphisme restreint est encore fini. La seule chose à vérifier est qu'on n'a pas changé la dimension de  $B/A$ . Pour cela on a d'abord le lemme suivant :

**Lemme 4.9.** *Avec les notations précédentes, la multiplication par  $g = x - \alpha$  induit un isomorphisme de  $B/A$  sur  $B/A$ .*

*Démonstration.* Comme  $B/A$  est de dimension finie sur  $k$  il suffit de montrer l'injectivité. Soit donc  $b \in B$  tel que  $(x - \alpha)b \in A$ . Il s'agit de voir que  $b$  est dans  $A$ . On sait qu'on a  $x^{r-1}b \in A$ . Soit  $i$  le plus petit entier tel que  $x^i b \in A$ . Si  $i > 0$ , on a  $x^{i-1}(x - \alpha)b \in A$ , d'où  $x^{i-1}\alpha b \in A$ , et comme  $\alpha \in k^*$ ,  $x^{i-1}b \in A$  et on a une contradiction, donc on a  $i = 0$  et la conclusion.

Revenant à 4.8 on a l'isomorphisme  $B_g/A_g \simeq (B/A)_g$  et, comme la multiplication par  $g$  est un automorphisme de  $B/A$ , on a aussi  $B/A \simeq (B/A)_g$ , de sorte que la dimension du quotient n'a pas changé.

On peut maintenant définir la notion d'éclatement local standard :

**Définition 4.10.** *Un éclatement local standard de centre  $P$  est un morphisme  $\psi : V \rightarrow W$  vérifiant les conditions suivantes :*

1)  $V$  et  $W$  sont isomorphes à des ouverts affines de courbes planes irréductibles,

2)  $P$  est un point de  $W$ , de multiplicité  $\mu_P \geq 1$ , et  $W - \{P\}$  est lisse,

3)  $\psi$  est fini, birationnel, et c'est un isomorphisme en dehors de la fibre  $\psi^{-1}(P)$ ,

4) si  $P$  est un point singulier ordinaire de  $W$ ,  $V$  est lisse,

5) si  $\psi^* : \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V)$  est l'homomorphisme (injectif) induit par  $\psi$  sur les anneaux, on a  $\dim_k \Gamma(V)/\Gamma(W) = \mu_P(\mu_P - 1)/2$ .

*Remarque 4.11.* La dernière condition de 4.10 montre en particulier que si le point  $P$  est un point lisse de  $W$  (i.e. si  $\mu_P = 1$ ) le morphisme  $\psi$  est un isomorphisme.

Le théorème suivant résume alors l'ensemble des résultats de ce paragraphe :

**Théorème 4.12.** *Soit  $C$  une variété isomorphe à un ouvert affine d'une courbe plane irréductible et soit  $P \in C$ . Il existe un ouvert affine  $W$  de  $C$  contenant  $P$  et un éclatement local standard  $\psi : V \rightarrow W$ .*

*Remarque 4.13.* Dans l'éclatement local de la variété  $W$  on remplace l'anneau  $A = \Gamma(W)$  par  $B = \Gamma(V)$  qui est entier sur  $A$  et a même corps de fractions, donc est contenu dans la clôture intégrale  $A'$  de  $A$ . Lorsque la singularité en  $P$  n'est pas ordinaire l'anneau  $B$  n'est pas, en général, égal à  $A'$ , donc  $V$  n'est pas le normalisé de  $W$ , mais la propriété 5) montre que la "distance" qui le sépare du normalisé a décré. Pour atteindre le normalisé il suffira de répéter un nombre fini de fois l'opération (cf. 5.11).

## 5. Éclatements globaux

### a. Définition

Faute d'avoir défini les éclatements des points d'une surface (et pas seulement du plan), nous devons dans ce qui suit nous limiter à une classe de courbes un peu particulières.

**Définition 5.1.** *Soit  $X$  une courbe irréductible. On dit que  $X$  est localement plane si pour tout  $P \in X$  il existe un ouvert affine de  $X$  isomorphe à un ouvert affine d'une courbe plane.*

*Remarque 5.2.* Nous verrons plus loin (cf. 5.13) que toute courbe lisse irréductible est localement plane, mais (cf. 5.14) qu'il existe des courbes de  $\mathbf{P}^3$  non localement planes.

**Définition 5.3.** *Soient  $X$  et  $C$  des courbes irréductibles et  $\pi : X \rightarrow C$  un morphisme. On dit que  $\pi$  est un éclatement global s'il existe un recouvrement ouvert affine  $U_1, \dots, U_n$  de  $C$ , où chaque  $U_i$  est isomorphe à un ouvert affine d'une courbe plane, tel que la restriction  $\pi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  soit un éclatement local standard de centre  $P_i \in U_i$  ou un isomorphisme.*

*Remarques 5.4*

1) Vu la définition des éclatements locaux, on note que  $\pi^{-1}(U_i)$  est lui aussi isomorphe à un ouvert affine d'une courbe plane : dans un éclatement global les courbes  $X$  et  $C$  sont localement planes.

2) Dans un éclatement global les points singuliers de  $X$  sont nécessairement au-dessus des points singuliers de  $C$  et ils ont des multiplicités inférieures ou égales à celles des points de  $C$ .

**Proposition 5.5.** *Soit  $\pi : X \rightarrow C$  un éclatement global. Alors,  $\pi$  est un morphisme fini birationnel qui est un isomorphisme en dehors des centres d'éclatements (et donc en dehors des points singuliers de  $C$ ). Si  $C$  est projective il en est de même de  $X$ .*

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt des définitions, sauf pour la dernière assertion qui vient de 3.5 lorsque  $X$  est lisse et du résultat admis en 3.6 sinon (cf. aussi [H] II, 7.16).

### b. Existence d'une désingularisation pour une courbe ordinaire

**Définition 5.6.** *On appelle courbe ordinaire une courbe plane projective irréductible qui n'a que des points doubles ordinaires.*

Dans le cas d'une courbe ordinaire la désingularisation par éclatements est facile :

**Théorème 5.7.** *Soit  $C$  une courbe ordinaire. Il existe un éclatement global  $\pi : X \rightarrow C$ , dont les centres d'éclatements sont les points singuliers de  $C$ , avec  $X$  lisse projective.*

*Démonstration.* Nous allons donner deux démonstrations de 5.7, la première par recollement, la deuxième par éclatement projectif.

*Preuve de 5.7 par recollement.* En fait, vu 4.10.4, la proposition 5.7 résulte de l'assertion un peu plus générale suivante :

**Proposition 5.8.** *Soit  $C$  une courbe projective, localement plane. Il existe un éclatement global  $\pi : X \rightarrow C$ , dont les centres d'éclatements sont les points singuliers de  $C$ , avec  $X$  projective et localement plane.*

*Démonstration (de 5.8).* On procède par recollement comme en 2.b : on isole chaque singularité  $P_i$  de  $C$  dans un ouvert affine  $U_i$ , isomorphe à un ouvert d'une courbe affine plane. On éclate  $U_i$  en  $P_i$  et on obtient une variété  $V_i$ . Quitte à restreindre  $U_i$  et  $V_i$  on peut supposer que  $\pi_i : V_i \rightarrow U_i$  est un éclatement local standard. On recolle alors tous les  $V_i$  et l'ouvert  $C - \{P_1, \dots, P_r\}$  en une variété  $X$  qui donne l'éclatement global cherché. Le fait que  $X$  est projective vient de 5.5 (donc de 3.6). Lorsque  $C$  est ordinaire,  $X$  est lisse et 3.5 suffit pour conclure.

*Preuve de 5.7 par éclatement projectif.* Nous commençons par l'éclatement d'un seul point. La méthode est analogue au cas affine, mais on fait attention aux dénominateurs. En effet, on a vu que le problème de la transformation  $y = tx$ , ou encore  $t = y/x$ , c'est qu'on perd les points  $x = 0$  qui donnent  $t$  infini. L'idée est de remplacer le point  $t$  de la droite affine par le point  $(u, v)$  de la droite projective, avec  $t = u/v$  lorsque  $v \neq 0$ . Cela revient à remplacer la surface  $B$  donnée par  $y = tx$  par une surface d'équation  $vy = ux$ ; précisément, on considère la variété produit  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$  (qui est une variété projective via le plongement de Segre dans  $\mathbf{P}^5$ ) et sa sous-variété fermée  $B$  formée des points  $(x, y, z; u, v)$  vérifiant  $vy - ux = 0$ . On vérifie que c'est une surface projective irréductible et lisse.

On a un morphisme  $\pi : B \rightarrow \mathbf{P}^2$ , restriction de la première projection de  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$  sur  $\mathbf{P}^2$ . Soit  $P$  le point  $(0, 0, 1)$  de  $\mathbf{P}^2$ . La fibre de  $\pi$  en un point  $Q = (x, y, z) \neq P$  est le singleton  $(x, y, z; y, x)$ , la fibre de  $P$  est la droite exceptionnelle  $E$  formée des points  $(0, 0, 1; u, v)$  pour  $(u, v) \in \mathbf{P}^1$ .

Le morphisme  $\pi$  est l'éclatement projectif du point  $P$  de  $\mathbf{P}^2$ . Il est surjectif et induit un isomorphisme de  $V = B - E$  sur  $U = \mathbf{P}^2 - \{P\}$ .

Le lien avec l'éclatement affine s'obtient en considérant l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{P}^2$  défini par  $z \neq 0$  (ou encore  $z = 1$ ) et plus précisément l'ouvert  $\Omega_0$  de  $\Omega$  défini par  $x$  et  $z \neq 0$ . L'image réciproque de  $\Omega_0$  par  $\pi$  est contenue dans l'ouvert  $z \neq 0, v \neq 0$  de  $B$  et en faisant  $z = v = 1$  on retrouve l'éclatement affine. (Attention, en revanche si  $x = 0$  et  $y \neq 0$ , l'antécédent de  $(0, y, 1)$  est  $(0, y, 1; 1, 0)$  qui est "à l'infini" dans  $\mathbf{P}^1$ .)

Soient  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}^2$ ,  $P = (0, 0, 1)$  et supposons tout d'abord que  $P$  est l'unique point singulier de  $C$  et qu'il est ordinaire. Soit  $C_0 =$

<sup>1</sup>Dans un espace multiprojectif  $\mathbf{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbf{P}^{n_r}$  les fermés sont définis par des polynômes séparément homogènes par rapport aux paquets de variables correspondant à chaque espace projectif (cf. Problème I).

$C \cap U$  et  $C'$  l'adhérence de  $\pi^{-1}(C_0)$ . Alors,  $C'$  est une courbe projective, la restriction de  $\pi$  à  $C'$  est un morphisme fini birationnel, c'est un isomorphisme sauf au-dessus de  $P$  (donc  $C'$  est non singulière en dehors de la fibre de  $P$ ). De plus, si  $C$  n'est pas tangente à la droite  $X = 0$  en  $P$  (ce qu'on peut toujours supposer, quitte à faire une homographie),  $\pi$  est isomorphe au voisinage de  $P$  à un éclatement affine. En particulier, puisque  $P$  est ordinaire,  $C'$  est non singulière aussi au-dessus de  $P$ , donc non singulière partout et on a bien désingularisé  $C$ .

Traisons maintenant le cas général d'une courbe ordinaire  $C$  avec plusieurs points singuliers  $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{P}^2$ . On peut supposer que ces points ont pour coordonnées homogènes  $P_i = (a_i, b_i, 1)$ . On se place alors dans le produit  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \cdots \times \mathbf{P}^1$  du plan  $\mathbf{P}^2$  avec  $n$  copies de la droite  $\mathbf{P}^1$ , muni des coordonnées  $(x, y, z; u_1, v_1; \dots; u_n, v_n)$  (partiellement homogènes). On considère, dans ce produit, la sous-variété fermée  $B$  définie par les équations  $u_i(x - a_i z) - v_i(y - b_i z)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . On vérifie que  $B$  est une surface irréductible et que la projection de  $B$  sur  $\mathbf{P}^2$  est un isomorphisme sauf au-dessus des points  $P_i$ . En  $P_i$  la fibre  $E_i$  est la droite (dite exceptionnelle) dont les points ont pour coordonnées  $x = a_i, y = b_i, z = 1, u_j = b_j - b_i, v_j = a_j - a_i$  si  $j \neq i$  et  $u_i, v_i$  quelconques. Si  $U$  (resp.  $V$ ) est l'ouvert de  $\mathbf{P}^2$  (resp.  $B$ ) complémentaire des  $P_i$  (resp. des  $E_i$ ),  $\pi$  induit un isomorphisme de  $V$  sur  $U$  et, au voisinage de  $P_i$ , il est isomorphe à un éclatement affine. Si on pose alors  $C_0 = C \cap U$  et  $C' = \overline{\pi^{-1}(C_0)}$ , on montre comme précédemment que  $C'$  est la désingularisation cherchée de  $C$ .

### c. Le théorème sur le genre des courbes ordinaires

Le théorème suivant permet de calculer la variation du genre arithmétique dans un éclatement global :

**Théorème 5.9.** Soient  $C$  et  $X$  des courbes projectives irréductibles et  $\pi : X \rightarrow C$  un éclatement global. On a la formule :

$$p_a(X) = p_a(C) - \sum \mu_P(\mu_P - 1)/2,$$

la somme étant étendue à tous les centres d'éclatements.

(On rappelle que  $p_a$  désigne le genre arithmétique et  $\mu_P$  la multiplicité de  $C$  en  $P$ .)

*Démonstration.* Rappelons que l'on a  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - p_a(X)$  et  $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - p_a(C)$ . Par ailleurs, vu 3.7, on a  $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\pi_*\mathcal{O}_X)$ . Or le morphisme  $\pi$  donne, par définition d'un morphisme, un morphisme de faisceaux  $i : \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X$ . Ce morphisme est injectif car  $\pi$  est dominant. Soit  $\mathcal{T}$  le conoyau de  $i$ , de sorte qu'on a la suite exacte :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{i} \pi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{p} \mathcal{T} \rightarrow 0$$

qui donne  $\chi(\pi_*\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{T})$ . Comme  $\pi$  est un isomorphisme en dehors des centres d'éclatements  $P_1, \dots, P_r$ , le faisceau  $\mathcal{T}$  est à support dans  $\{P_1, \dots, P_r\}$  et il résulte de VII, 3.3 que sa cohomologie se limite au  $H^0$ . De plus, si on recouvre  $C$  par des ouverts affines  $W_i, i = 1, \dots, r$ , correspondants aux éclatements locaux  $V_i \rightarrow W_i$  de centre  $P_i$ , on a un isomorphisme :

$$H^0(C, \mathcal{T}) \rightarrow \prod_{i=1}^r H^0(W_i, \mathcal{T})$$

(le recollement sur les intersections est automatique car  $\mathcal{T}$  y est nul). Mais, comme  $W_i$  est affine, on a sur  $W_i$  la suite exacte déduite de (\*) :  $0 \rightarrow \Gamma(W_i) \rightarrow \Gamma(V_i) \rightarrow H^0(W_i, \mathcal{T}) \rightarrow 0$ , de sorte que l'on a  $h^0(W_i, \mathcal{T}) = \dim_k(\Gamma(V_i)/\Gamma(W_i)) = \mu_{P_i}(\mu_{P_i} - 1)/2$  en vertu de 4.10.5. On a donc montré

$$\chi(\mathcal{T}) = h^0\mathcal{T} = \sum_{i=1}^r \mu_{P_i}(\mu_{P_i} - 1)/2$$

et le théorème s'ensuit immédiatement.

**Corollaire 5.10.** *Soit  $C$  une courbe ordinaire de degré  $d$ . On note  $\mu_P$  la multiplicité de  $C$  en  $P$  (cf. V, 4.4). Le genre géométrique de  $C$  est donné par la formule :*

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{\mu_P(\mu_P - 1)}{2}.$$

*Démonstration.* Cela résulte de 5.7 et 5.9.

#### d. Le cas général

**Corollaire 5.11** (désingularisation dans le cas général). *Soit  $C$  une courbe localement plane, projective et irréductible. Il existe une suite d'éclatements globaux :*

$$X = C_n \xrightarrow{\pi_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\pi_1} C_0 = C$$

avec  $X$  lisse, irréductible et projective.

*Démonstration.* Si  $C$  n'est pas lisse on éclate ses points singuliers, on obtient  $C_1$ , localement plane et projective avec  $0 \leq p_a(C_1) < p_a(C)$  (cf. 5.9). Si  $C_1$  n'est pas lisse on recommence et, comme le genre arithmétique d'une courbe irréductible est  $\geq 0$ , le processus aboutit au bout de  $p_a$  éclatements au plus.

**Corollaire 5.12** (calcul du genre géométrique). *Soit  $C$  une courbe projective plane irréductible de degré  $d$ . Soit*

$$X = C_n \xrightarrow{\pi_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\pi_1} C_0 = C$$

*une suite d'éclatements comme ci-dessus avec  $X$  lisse projective. Alors on a :*

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \frac{\mu_P(\mu_P-1)}{2},$$

*la somme étant étendue à tous les points  $P$  de toutes les courbes  $C = C_0, C_1, \dots, C_n$  (on dit encore que la somme est étendue à tous les points "infiniment voisins" de  $C$ ).*

*En particulier on a, en considérant seulement les points singuliers de  $C$  :*

$$g(C) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{\mu_P(\mu_P-1)}{2}.$$

*Démonstration.* C'est clair par récurrence sur  $n$  à partir de 5.9.

**Corollaire 5.13.** *Toute courbe lisse irréductible est localement plane.*

*Démonstration*

1) Si  $C$  est projective, on prend une courbe  $\Gamma$  plane projective birationnellement équivalente à  $C$ . On a alors une suite d'éclatements globaux qui désingularise  $\Gamma$  en  $X$ . Comme le fait d'être localement plane se conserve par éclatement,  $X$  est localement plane. Mais, comme  $X$  et  $C$  sont projectives lisses et birationnellement équivalentes, elles sont isomorphes et on a gagné.

2) Si  $C$  n'est pas projective, on peut supposer  $C$  affine, on la plonge dans  $\overline{C}$  projective et on désingularise  $\overline{C}$  en  $X$ , lisse projective. On a donc  $\pi : X \rightarrow \overline{C}$  fini birationnel qui est un isomorphisme là où  $\overline{C}$  est lisse, donc en particulier sur  $C$ . Mais comme  $X$  est localement plane par 1), on a gagné.

*Remarque 5.14.* En revanche, si  $C$  est une courbe singulière elle n'est pas, en général, localement plane. En effet, en un point d'une courbe plane l'espace tangent est de dimension  $\leq 2$ . Considérons alors, dans  $k^3$ , la courbe  $C$  d'équations  $X^2 - Y^3 = Y^2 - Z^3 = 0$ . On voit facilement que  $C$  est irréductible et que l'on a  $I(C) = (X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3)$  (le mieux pour cela est d'utiliser le paramétrage  $x = t^9, y = t^6, z = t^4$ ). Mais, au point  $(0, 0, 0)$ , l'espace tangent à  $C$  est de dimension 3 car la matrice jacobienne est nulle et donc  $C$  n'est pas localement plane.

### 5.15. Algorithme de calcul du genre géométrique d'une courbe plane

Soit  $C$  une courbe plane projective irréductible de degré  $d$ . (On sait que toute courbe est birationnellement équivalente à une telle courbe, cf. 1.9.) La méthode pour calculer le genre géométrique de  $C$  est la suivante :

0) On calcule  $p_a(C) = (d - 1)(d - 2)/2$ .

1) On détermine les points singuliers de  $C$ .

2) Pour chaque point singulier  $P$  de  $C$  on effectue l'éclatement local de centre  $P$ , on obtient des points  $P_1, \dots, P_r$  (infiniments voisins de  $P$ ). Si ces points sont lisses (ce qui est le cas si  $P$  est ordinaire) on s'arrête. Sinon on effectue les éclatements locaux centrés en les  $P_i$  qui sont singuliers. On continue ainsi jusqu'à ce que tous les points infiniment voisins de  $P$  obtenus soient lisses. Le théorème 5.11 garantit que le processus s'arrête en un nombre fini de pas. On notera que cette phase du calcul est *locale* (on s'intéresse seulement au point  $P$  et à ses fibres successives).

3) On calcule la multiplicité de chaque point singulier infiniment voisin de  $C$  et on applique 5.12.

### Exemples 5.16

1) En vertu de 5.12 une cubique qui a un point singulier est de genre 0, donc unicursale. De même une quartique qui a un point triple ou trois points simples est de genre 0. C'est le cas par exemple pour le trifolium défini par  $F(X, Y, T) = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2YT - Y^3T$  (point triple à l'origine) ou pour la quartique tricuspidale définie par  $F(X, Y, T) = Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2 - 2XYT(X + Y + T)$  (trois points de rebroussement en  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 0, 0)$ ) ou encore pour le trifolium régulier donné par

$$F(X, Y, T) = 4(X^2 + Y^2)^2 - 4X(X^2 - 3Y^2)T - 27(X^2 + Y^2)T^2 + 27T^4$$

(trois points doubles ordinaires). Le lecteur curieux pourra trouver d'autres belles courbes dans la *Revue du Palais de la Découverte*, numéro spécial 8 de juillet 1976.

Pour trouver explicitement un paramétrage de ces quartiques, on coupe la courbe par une droite variable passant par le point triple ou par un pinceau de coniques passant par les trois points doubles (et par un quatrième fixé, cf. Exercice VI, 4).

2) Considérons la courbe  $C$  de  $\mathbf{P}^3$  d'équations

$$XT - YZ, X^2Z + Y^3 + YZT, XZ^2 + Y^2T + ZT^2.$$

Il est facile de montrer que c'est une courbe irréductible et lisse (cf. Problème examen janvier 1992). Pour calculer son genre, on projette  $C$  sur le plan des  $(x, y, t)$ . On obtient la courbe  $C_0$  d'équation  $F(X, Y, T) = Y^4 + X^3T + XYT^2$ , birationnellement équivalente à  $C$ , qui a un unique point double ordinaire à l'origine et qui est donc de genre géométrique 2 par 5.10. La courbe initiale est donc aussi de genre 2.

3) Considérons le quadrifolium  $C$  d'équation  $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2T^2 = 0$ . Son genre arithmétique est 10 et il a un point quadruple  $P$  à l'origine du plan affine des  $x, y : (0, 0, 1)$ , avec deux tangentes doubles et deux points de rebroussement à l'infini : les points cycliques  $(1, i, 0)$  et  $(1, -i, 0)$  (le mieux pour le voir est de faire l'homographie définie par  $U = X + iY$  et  $V = X - iY$  qui transforme l'équation initiale en  $4U^3V^3 + (U^2 - V^2)^2T^2 = 0$ ). Le genre de  $C$  est donc  $\leq 2$ . Pour le calculer, éclatons l'origine. Attention, comme les deux axes sont tangents à  $C$  en  $P$  il est préférable d'utiliser la deuxième forme de l'équation. Si on pose  $u = vw$  l'éclatement donne la courbe  $4w^3v^2 + (1 - w)^2(1 + w)^2$ , avec au-dessus de  $P$  les deux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  qui sont des points doubles ordinaires. Ces deux points sont donc à compter parmi les points infiniment voisins, avec multiplicité 2, de sorte que le genre de  $C$  est 0.

On trouve aisément un paramétrage de  $C$  en passant par les coordonnées polaires et en utilisant le paramétrage rationnel des fonctions sinus et cosinus.

4) Terminons par l'exemple de la courbe plane  $C$  définie par l'équation  $F(X, Y, T) = (X^2 - YT)^2 + Y^3(Y - T)$ . Cette courbe est de genre arithmétique 3 et admet un unique point double (un rebroussement) en  $P = (0, 0, 1)$ . Le genre géométrique est donc  $\leq 2$ . En fait nous allons montrer qu'il est nul. On travaille dans le plan affine des  $(x, y)$ , l'équation de  $C$  est donc  $x^4 + y^4 - 2x^2y - y^3 + y^2$ . On effectue l'éclatement  $y = tx$ . On obtient la courbe plane d'équation  $t^4x^2 - t^3x + (x - t)^2$ . Au-dessus de  $P$  il y a un

seul point  $P_1 = (0, 0)$  qui est encore un rebroussement. On effectue donc encore un éclatement  $x = zt$  qui donne la courbe  $t^4z^2 - t^2z + (z - 1)^2$ . Au-dessus de  $P_1$  il y a un unique point  $P_2$ , de coordonnées  $z = 1, t = 0$ . On étudie la nature de ce point en posant  $u = z - 1$ , on trouve l'équation  $t^4u^2 + 2t^4u + t^4 - t^2u + t^2 - u^2$ , ce qui montre que  $P_2$  est un point double ordinaire. Par conséquent l'éclatement de  $P_2$  donne deux points lisses et achève la désingularisation de  $C$ . On a donc la suite d'éclatements :  $C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C$  avec  $C_3$  lisse et trois points doubles infiniment voisins :  $P \in C, P_1 \in C_1, P_2 \in C_2$ , donc le genre arithmétique de  $C_3$  est diminué de 3 par rapport à celui de  $C$  : il est bien nul comme annoncé.

Pour trouver explicitement un paramétrage de  $C$  on cherche les coniques hyperosculatrices à  $C$  au point  $P$ , i.e. les  $G$  de degré 2 telles que  $\mu_P(F, G) \geq 7$ . On trouve aisément que ce sont les coniques d'équations affines  $G_\lambda(x, y) = x^2 + xy - y + \lambda y^2$  avec  $\lambda \in k$ . Ces coniques forment un pinceau, c'est-à-dire une famille linéaire de dimension 1 dans l'espace projectif des coniques. Si on coupe  $F$  par  $G_\lambda$  on trouve le point  $P$  avec la multiplicité 7, plus un autre point de  $C$  dont les coordonnées dépendent rationnellement de  $\lambda$ . Précisément on trouve  $x(1 - 2\lambda) = y(\lambda^2 - \lambda + 1)$ , ce qui conduit au paramétrage :

$$x = \frac{(1 - 2\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)}{\lambda^4 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 2}, \quad y = \frac{(1 - 2\lambda)^2}{\lambda^4 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 2}.$$

## 6. Appendice : retour sur les démonstrations précédentes

Dans le paragraphe précédent nous avons utilisé librement le fait (admis, cf. 3.6) qu'une courbe, même singulière, qui est finie sur une courbe projective est encore projective (plus généralement, toute courbe complète est projective). Nous indiquons ici comment éviter le recours à ce résultat.

Notons d'abord que si  $C$  est une courbe irréductible complète on a  $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$  (cf. Problème II, 3.b). On peut alors reformuler 5.9 :

**Théorème 6.1.** *Soit  $C$  une courbe localement plane irréductible séparée et complète telle que  $h^1\mathcal{O}_C = p_a(C)$  soit fini et soit  $\pi : X \rightarrow C$  un éclatement global. Alors,  $X$  est une courbe localement plane irréductible séparée et complète,  $h^1\mathcal{O}_X = p_a(X)$  est fini et on a la formule :*

$$p_a(X) = p_a(C) - \sum \mu_P(\mu_P - 1)/2,$$

la somme étant étendue à tous les centres d'éclatements.

*Démonstration.* On applique 3.4 pour établir la séparation et la complétude de  $X$ , le reste de la démonstration est identique à celle de 5.9, la finitude de  $h^1\mathcal{O}_X = h^1\pi_*\mathcal{O}_X$  se voit avec la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte (\*) de 5.9. En fait, la finitude de la cohomologie est valable aussi pour les variétés complètes (cf. [EGA] III).

Le reste du paragraphe 5 est sans changement. Dans 5.11 on ne peut plus affirmer a priori que les  $C_i$  intermédiaires sont projectives, mais en revanche  $X$  est bien projective (car elle est lisse).

# Chapitre X

## Liaison des courbes gauches

Le corps  $k$  est supposé algébriquement clos. Nous utiliserons les notations suivantes :

- 1) si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur  $\mathbf{P}^n$  on pose, pour  $i \in \mathbf{N}$  :

$$H_*^i \mathcal{F} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} H^i \mathcal{F}(k),$$

- 2) on appelle faisceau *dissocié* un faisceau sur  $\mathbf{P}^n$  de la forme

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_i)$$

où les  $n_i$  sont des entiers relatifs. Pour un tel faisceau on a  $H_*^i \mathcal{F} = 0$  pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n-1$  (cf. VII, 4.1).

### 0. Introduction

On appelle ici courbe gauche une courbe de  $\mathbf{P}^3$ , cf. ci-dessous pour des précisions. Une courbe gauche  $C$  est dite schématiquement intersection complète si son idéal  $I(C)$  est engendré par deux générateurs (cf. III, 10 b). On a vu (cf. VIII, 1.13) que les courbes gauches ne sont pas, en général, schématiquement intersections complètes. Ainsi par exemple, la cubique gauche  $C$  définie par l'idéal  $I = (XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$  (cf. exercice II, 4), ne l'est pas : l'idéal  $I$  ne peut être engendré par deux générateurs seulement. Cependant cette courbe est assez proche d'une intersection complète au sens suivant. Si on regarde, par exemple, les

deux quadriques d'équations  $XT - YZ = Y^2 - XZ$ , leur intersection est réunion de la cubique  $C$  et de la droite  $D = V(X, Y)$ . On dit alors que  $C$  et  $D$  sont *liées* par les quadriques en question. La courbe  $C$ , si elle n'est pas elle-même une intersection complète, est donc liée à une intersection complète. Dans ce qui suit nous allons étudier cette opération de liaison et caractériser les courbes qui, comme  $C$ , sont liées (éventuellement en plusieurs étapes) aux intersections complètes. Cette caractérisation se fera à la fois en termes cohomologiques et en termes de résolutions.

## 1. Idéaux et résolutions

Dans ce paragraphe  $R$  désigne l'anneau des polynômes  $k[X_0, \dots, X_n]$ .

### a. Sous-schémas de $\mathbf{P}^n$

Même si on s'intéresse essentiellement aux variétés (et notamment aux courbes lisses), l'utilisation de la notion de liaison nécessite de travailler avec des schémas. En effet une courbe lisse peut être liée à une courbe singulière, voire non réduite (cf. Exemples 2.7). Le lecteur se reportera à l'appendice sur les schémas et aux références qui s'y trouvent pour des précisions concernant cette notion. Rappelons simplement ici que si  $I$  est un idéal homogène de  $R$  et si  $S = R/I$  est l'anneau quotient, on définit le sous-schéma fermé  $X = \text{Proj}(S)$  de  $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}_k^n$  comme l'espace annelé  $(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$  dont l'espace sous-jacent  $\underline{X}^1$  est le sous-espace fermé  $V(I)$  de  $\mathbf{P}^n$ , muni de la topologie de Zariski et dont le faisceau d'anneaux est donné, sur la base d'ouverts standard  $D^+(f)$  de  $\underline{X}$ , en posant  $\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_X) = S_{(f)}$  (cf. III, 8.1). Si  $i$  désigne l'injection de  $X$  dans  $\mathbf{P}^n$ , le faisceau  $i_*\mathcal{O}_X$  n'est autre que  $\tilde{S}$ . Si  $I$  n'est pas radical, ces anneaux ne sont pas nécessairement réduits, contrairement à ceux de la variété  $V(I)$  (pour laquelle, cf. III, 8.a, on prend pour  $I$  l'idéal  $I(\underline{X})$  de toutes les fonctions polynomiales nulles sur  $\underline{X}$ ).

Soit  $\mathcal{J} = \tilde{I}$  le faisceau associé à l'idéal  $I$ . C'est un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$  et la définition du faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  montre qu'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

de sorte qu'il est conforme à III, 6.10 de poser  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_X$ . On dit que  $\mathcal{J}_X$  est le faisceau d'idéaux qui définit le schéma  $X = \text{Proj}(R/I)$ .

<sup>1</sup>En fait, on notera souvent, abusivement, de la même manière le schéma  $X$  et l'espace topologique sous-jacent  $\underline{X}$ .

Il résulte de ce qui précède que l'idéal  $I$  (dont on dit qu'il est *un* idéal de définition de  $X$ ) détermine entièrement  $X$ . Réciproquement,  $X$  détermine le faisceau  $\mathcal{J}_X = \tilde{I}$ , mais il ne détermine pas de manière unique l'idéal  $I$  (cf. III, 9.8.3). Nous allons préciser cette situation et pour cela commencer par une définition :

**Définition 1.1.** Soit  $I$  un idéal homogène de  $R$ . On pose :

$$\text{sat}(I) = \{f \in R \mid \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall i = 0, \dots, n \quad X_i^N f \in I\}.$$

Alors,  $\text{sat}(I)$  est un idéal homogène, contenant  $I$ , appelé le saturé de  $I$ . On dit que  $I$  est saturé s'il est égal à  $\text{sat}(I)$ .

**Exemples 1.2**

1) Le saturé de l'idéal  $(X^2, XY, XZ, XT)$  de  $k[X, Y, Z, T]$  est l'idéal  $(X)$ .

2) Si  $I$  est un idéal homogène radical de  $k[X_0, \dots, X_n]$  (i.e. égal à sa racine) on a  $\text{sat}(I) = I$ , sauf si  $I$  est l'idéal inconvenant  $m = (X_0, \dots, X_n)$  auquel cas on a  $\text{sat}(I) = R$ . C'est clair si  $I = R$  ou  $m$ . Sinon, soit  $f \in \text{sat}(I)$  homogène de degré  $> 0$  (si  $f$  est une constante on retombe sur les cas écartés). Il existe un  $N$  tel que, pour tout  $i$ ,  $X_i^N f \in I$ . Mais comme  $f$  est homogène de degré  $> 0$  on peut l'écrire comme combinaison linéaire  $f = \sum_{i=0}^n a_i X_i$  et en utilisant la formule du  $(n+1)$ -ième on voit que  $f^k \in I$  pour  $k \geq nN + N - n$ , et donc, puisque  $I$  est radical, que  $f \in I$ .

On a la proposition suivante :

**Proposition 1.3**

1) Soient  $I$  un idéal homogène de  $R$  et  $J = \text{sat}(I)$ . Alors, on a  $\text{Proj}(R/I) \simeq \text{Proj}(R/J)$ .

2) Posons  $X = \text{Proj}(R/I)$ . On a :

$$\text{sat}(I) = H_*^0(\mathcal{J}_X) = \Gamma_*(\mathcal{J}_X) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{J}_X(d)).$$

Cet idéal ne dépend donc que de  $X$  (et pas du choix de l'idéal  $I$  de définition de  $X$ ). On l'appelle l'idéal saturé de  $X$  et on le note  $I_X$ . C'est le plus grand idéal qui définit  $X$ .

*Démonstration*

1) On montre d'abord l'égalité ensembliste  $V(I) = V(J)$ . Comme on a  $I \subset J$ , on a déjà  $V(J) \subset V(I)$ . Réciproquement, si  $P = (x_0, \dots, x_n) \in V(I)$ , l'une des coordonnées de  $P$  est non nulle, disons  $x_0 \neq 0$ . Soit  $f \in J$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $X_0^N f \in I$  et on a donc  $x_0^N f(P) = 0$ , donc  $f(P) = 0$  et  $P \in V(J)$ .

Pour montrer l'égalité des faisceaux on considère la surjection canonique  $R/I \rightarrow R/J$  donnée par  $\bar{a} \mapsto \hat{a}$ . Elle induit une surjection des localisés :  $(R/I)_{(f)} \rightarrow (R/J)_{(f)}$  qui à  $\bar{a}/f^r$  associe  $\hat{a}/f^r$ , avec  $a, f$  homogènes,  $\deg f > 0$  et  $\deg a = r \deg f$ . Il suffit de voir que cette flèche est aussi injective. Mais si on a  $\hat{a}/f^r = 0$ , cela signifie que  $f^m a$  est dans  $J$ . Il existe alors un entier  $N$  tel que  $X_0^N f^m a, \dots, X_n^N f^m a \in I$  et, pour  $k$  assez grand (cf. Exemple 1.2.2), on a  $f^k a \in I$ , donc  $\bar{a}/f^r = 0$  dans  $(R/I)_{(f)}$ .

2) On considère l'homomorphisme naturel homogène de degré 0 :  $I \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{J}_X)$  (cf. III, 9.8.3). Cette flèche est injective car elle est induite par la flèche de  $R$  dans  $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$  dont on a vu en III, 9.9 qu'elle est un isomorphisme. Il reste à voir que  $\Gamma_*(\mathcal{J}_X)$  est bien le saturé de  $I$ . Soit  $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{J}_X(d))$ . La restriction de  $f$  à  $D^+(X_0)$  est dans  $I_{(X_0)}$ , donc  $f = f_0/X_0^N$  avec  $f_0 \in I$ . On a donc  $X_0^N f \in I$  et de même avec les autres variables, de sorte que  $f$  est dans le saturé de  $I$ .

*Remarque 1.4.* Dans tout ce qui suit on utilisera systématiquement l'idéal saturé  $I_X$  comme idéal de définition de  $X$ . On notera que cet idéal est déterminé par le faisceau  $\mathcal{J}_X$  qui détermine donc aussi  $X$ . Dans le cas des variétés, l'idéal  $I(X)$  des fonctions polynomiales nulles sur  $X$  est automatiquement saturé, donc égal à  $I_X$  (cf. 1.2.2). Dans le cas non réduit, en revanche, on a en général  $I_V \subset I(V)$  mais  $I_V \neq I(V)$ .

**b. Résolutions**

*Notations 1.5.* Soient  $E$  et  $F$  des  $R$ -modules libres gradués :

$$E = \bigoplus_{j=1}^s R(-m_j), \quad F = \bigoplus_{i=1}^r R(-n_i),$$

où les  $m_j$  et les  $n_i$  sont des entiers qui vérifient :  $n_1 \leq \dots \leq n_r$  et  $m_1 \leq \dots \leq m_s$ . Le degré de  $E$  (resp. de  $F$ ) est, par définition, l'entier  $\sum_j -m_j$  (resp.  $\sum_i -n_i$ ). Soit  $u : E \rightarrow F$  un homomorphisme  $R$ -linéaire gradué de degré zéro (i.e. qui envoie un élément de degré  $n$  sur un élément de degré  $n$ ). On notera respectivement  $e_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) et  $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, r$ )

les vecteurs de base canoniques de  $E$  et  $F$ . L'homomorphisme  $u$  est donné, dans ces bases, par une matrice  $A = (a_{ij})$  de taille  $r \times s$  dont le coefficient d'indices  $i, j$  est un polynôme homogène de degré  $m_j - n_i$ . En particulier ce coefficient est nul si  $m_j < n_i$  et c'est une constante (i.e. un élément de  $k$ ) si  $m_j = n_i$ .

Nous avons vu (cf. Exercice III, B.2) que tout module gradué de type fini  $M$  sur un anneau noethérien gradué  $S$  admet une *résolution graduée libre* (on dira plus brièvement une *résolution*) :

$$\cdots \rightarrow L_d \rightarrow L_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où les  $L_i$  sont des modules gradués libres, donc de la forme  $\bigoplus_{i=1}^r S(n_i)$  et où les flèches sont homogènes de degré zéro.

En général cette résolution n'est pas finie mais, lorsque  $R$  est un anneau de polynômes, tout module gradué de type fini admet une *résolution finie*, précisément :

**Théorème (des syzygies de Hilbert) et définition 1.6.** *Si  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  et si  $M$  est un  $R$ -module gradué de type fini,  $M$  admet une résolution de la forme*

$$0 \rightarrow L_d \rightarrow L_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

avec  $d \leq n + 1$ . Si  $L_d$  est non nul une telle résolution est dite de longueur  $d$ . On appelle dimension projective de  $M$  et on note  $\text{dp}(M)$  le plus petit entier  $d$  tel que  $M$  admette une résolution de longueur  $d$ . (Si  $M = 0$  on convient que  $\text{dp}(M) = -1$ .)

*Démonstration.* Voir problème IX ou [Pes] §13.

**Définition 1.7.** *Reprenons les notations 1.5. Un homomorphisme  $u : E \rightarrow F$  est dit minimal si ses coefficients constants sont nuls. Une résolution est dite minimale si les homomorphismes qui la composent sont minimaux.*

**Proposition 1.8.** *Tout  $R$ -module gradué de type fini admet une résolution finie minimale. De plus, cette résolution est unique à isomorphisme près, sa longueur est égale à la dimension projective de  $M$  et le rang de  $L_0$  est le nombre minimal de générateurs de  $M$ .*

*Démonstration.* Nous prouvons ici l'existence de la résolution minimale, pour l'unicité et les autres assertions de 1.8, voir problème IX. Soit  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini. On sait qu'il admet une résolution finie. Si celle-ci n'est pas minimale cela signifie que l'une des flèches de la résolution comporte dans sa matrice un coefficient constant  $\lambda \in k^*$ . Quitte à changer un peu les notations, appelons  $u : E \rightarrow F$  la flèche en question. Nous allons montrer que l'on peut remplacer les modules libres  $E$  et  $F$  par des modules  $E'$  et  $F'$ , libres de rang un de moins que  $E$  et  $F$  respectivement, et  $u$  par  $u'$ , ne comportant plus le coefficient  $\lambda$ , de telle sorte que le noyau et le conoyau de  $u$  et  $u'$  soient les mêmes. Cela signifie qu'on peut remplacer  $u$  par  $u'$  dans la résolution sans changer les autres termes et la conclusion s'obtient aisément par récurrence sur le nombre de coefficients constants.

La situation est donc la suivante : on a  $u : E = R(-a) \oplus E' \rightarrow F = R(-a) \oplus F'$  un homomorphisme dont la matrice par blocs s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda & v \\ w & u' \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda \in k^*$ . Soit  $e_1$  le premier vecteur de base de  $E$ . On note déjà que, quitte à faire, dans  $F$ , le changement de base  $e'_1 = u(e_1)$ ,  $e'_i = e_i$  pour  $i > 1$ , on peut supposer  $w = 0$  et  $\lambda = 1$ . On vérifie alors aisément qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } u' & \rightarrow & E' & \xrightarrow{u'} & F' & \longrightarrow & \text{Coker } u' \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow \varphi \\ \text{Ker } u & \longrightarrow & R(-a) \oplus E' & \xrightarrow{u} & R(-a) \oplus F' & \longrightarrow & \text{Coker } u \end{array}$$

dans lequel on a posé  $i(y) = (-v(y), y)$  et  $j(z) = (0, z)$ . Les flèches  $i_0$  et  $\varphi$  sont induites respectivement par  $i$  et  $j$  et on voit sans peine que ce sont bien des isomorphismes. On dit qu'on a "simplifié" la résolution par  $R(-a)$ .

**Corollaire 1.9.** Soit  $I$  un idéal homogène de  $k[X_0, \dots, X_n]$ .

- 1) L'idéal  $I$  est de dimension projective  $\leq n$ .
- 2) L'idéal  $I$  est saturé si et seulement si il est de dimension projective  $\leq n - 1$ .
- 3) Posons  $d = \text{dp}(I)$ . Soit  $Z$  le sous-schéma défini par  $I$ . Si  $d = 0$ ,  $Z$  est vide ou une surface, si  $d \geq 1$  on a  $\dim(Z) \geq n - d - 1$ .

## Démonstration

1) Le cas  $I = R$  est trivial. Soit  $0 \rightarrow L_d \xrightarrow{u_d} L_{d-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow I \rightarrow 0$  la résolution minimale de  $I \neq R$ . La suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$  donne alors la résolution minimale de  $R/I$  :

$$0 \rightarrow L_d \xrightarrow{u_d} L_{d-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

Comme  $R/I$  est de dimension projective  $\leq n + 1$  (cf. 1.6), il en résulte que  $I$  est de dimension projective  $\leq n$ .

2) Soit  $\mathcal{J} = \tilde{I}$  le faisceau associé à  $I$  et considérons la suite exacte de faisceaux obtenue à partir de la résolution minimale de  $I$  donnée ci-dessus :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_d \xrightarrow{\tilde{u}_d} \mathcal{L}_{d-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\tilde{u}_1} \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0.$$

On introduit les modules  $E_i$  qui sont les conoyaux des  $u_i$  (ou les noyaux des  $u_{i-1}$ , si l'on préfère) et les faisceaux associés  $\mathcal{E}_i$ . On a donc les suites exactes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0, \\ (2) \quad & 0 \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d-2, \\ (3) \quad & 0 \rightarrow \mathcal{L}_d \rightarrow \mathcal{L}_{d-1} \rightarrow \mathcal{E}_{d-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Considérons la flèche naturelle  $j : I \rightarrow H_*^0 \mathcal{J}$ . Nous avons vu dans la démonstration de 1.3 que cette flèche est injective et que l'hypothèse  $I$  saturé signifie qu'elle est aussi surjective. On considère alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & L_0 & \rightarrow & I & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow j & & \\ 0 & \rightarrow & H_*^0 \mathcal{E}_1 & \rightarrow & H_*^0 \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{g} & H_*^0 \mathcal{J} & \rightarrow & H_*^1 \mathcal{E}_1 \rightarrow 0 \end{array}$$

obtenu à partir de la résolution de  $I$ , de la suite de cohomologie associée à la suite exacte (1) et de III, 9.8. Comme  $\varphi$  est un isomorphisme (cf. III, 9.9), on voit que  $j$  est surjectif si et seulement si  $g$  l'est, c'est-à-dire si et seulement si  $H_*^1 \mathcal{E}_1$  est nul.<sup>2</sup>

Mais on voit aussi, par récurrence avec la suite de cohomologie associée à la suite exacte (2), que l'on a des isomorphismes  $H_*^1 \mathcal{E}_1 \simeq H_*^1 \mathcal{E}_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq d-1$ . En définitive,  $I$  est saturé si et seulement si  $H_*^{d-1} \mathcal{E}_{d-1}$  est

<sup>2</sup>Le lecteur scrupuleux a sans doute noté que ce qui précède ne s'applique vraiment que pour  $n \geq 2$ . En effet, pour  $n = 1$  le terme  $H_*^1 \mathcal{L}_0$  n'a pas de raison d'être nul. Cependant la démonstration du cas  $n = 1$  est tout à fait analogue et nous la laissons audit lecteur, en récompense de sa perspicacité.

nul, ou encore si la flèche  $H_*^d \mathcal{L}_d \rightarrow H_*^d \mathcal{L}_{d-1}$ , obtenue à partir de la suite exacte (3), est injective.

Si  $I$  est de dimension projective  $d \leq n - 1$ , on a  $d - 1 \leq n - 2$  et les  $H^d$  en question sont nuls car les  $L_i$  sont libres, donc les  $\mathcal{L}_i$  dissociés, d'où le résultat par VII, 4.1.

Réciproquement, supposons  $I$  saturé et raisonnons par l'absurde en supposant  $d = n$  et  $L_n \neq 0$ . On conclut en appliquant le lemme suivant :

**Lemme 1.10.** *Soient  $u : E \rightarrow F$  un homomorphisme gradué minimal entre deux modules libres,  $\tilde{u} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  la flèche déduite de  $u$  sur les faisceaux associés et  $h(u) : H_*^n \mathcal{E} \rightarrow H_*^n \mathcal{F}$  la flèche induite par  $\tilde{u}$  sur les groupes de cohomologie. Alors, si  $h(u)$  est injective,  $E$  est nul.*

*Démonstration (de 1.10).* Supposons  $E \neq 0$  et reprenons les notations 1.5. On considère la restriction  $v$  de  $u$  à  $R(-m_j)$ . Elle s'écrit  $v = v_1 + \dots + v_r$  avec  $v_i$  à valeurs dans  $R(-n_i)$ . Les  $v_i$  sont donc des polynômes homogènes de degrés  $m_j - n_i$ . Il suffit de montrer que  $h(v)$  est non injectif ou même, que sa partie homogène  $h(v, m_j - n - 1) = \bigoplus h(v_i, m_j - n - 1)$

$$h(v, m_j - n - 1) : H^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_i + m_j - n - 1)$$

n'est pas injective. Comme le groupe  $H^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1)$  est non nul, cela sera vrai si on montre que  $h(v, m_j - n - 1) = 0$ . Mais, comme  $u$  est minimal,  $v_i$  est nul si  $n_i \geq m_j$ , donc, a fortiori,  $h(v_i, m_j - n - 1) = 0$  dans ce cas. Si, au contraire, on a  $n_i < m_j$ , c'est le groupe  $H^n \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_i + m_j - n - 1)$  qui est nul, et on a encore  $h(v_i, m_j - n - 1) = 0$ , cqfd.

3) Il reste à prouver la dernière assertion de 1.9. On reprend pour cela les notations précédentes. Si  $d = 0$ ,  $I$  est isomorphe à  $L_0$ , donc est un  $R$ -module libre et, pour un idéal, cela n'est possible que s'il est principal (car deux éléments  $f, g$  de  $I$  sont toujours liés par la relation  $fg - gf = 0$ ). On a donc  $I = (f)$  avec  $f$  homogène de degré  $s$  et  $Z = V(I)$  est vide si  $s = 0$  et c'est une surface si  $s > 0$ . Supposons maintenant  $d \geq 1$ . Quitte à remplacer  $I$  par son saturé on peut supposer  $I = I_Z$ . Le lemme 1.10 montre que l'on a  $H_*^n \mathcal{E}_{d-1} \neq 0$  et on en déduit successivement  $H_*^{n-i} \mathcal{E}_{d-i} \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, d - 1$ , puis  $H_*^{n-d} \mathcal{J}_Z \neq 0$  et enfin  $H_*^{n-d-1} \mathcal{O}_Z \neq 0$ . Il en résulte que  $Z$  est au moins de dimension  $n - d - 1$  en vertu de VII, 3.3.

## 2. Courbes ACM

À partir de maintenant on travaille dans  $\mathbf{P}^3$ . Soit  $R = k[X, Y, Z, T]$ .

**Définition 2.1.** On appelle courbe gauche un sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}^3$  de dimension 1.<sup>3</sup>

On a vu en 1.9 que l'idéal saturé d'une courbe  $C$  est de dimension projective  $\leq 2$ . Nous étudions maintenant les courbes dont l'idéal est de dimension projective 1. Bien entendu il y en a beaucoup d'autres (cf. Exercice II, 5, ou 3.d ci-dessous).

**Proposition-définition 2.2.** Soient  $C$  une courbe gauche,  $I_C$  son idéal saturé,  $\mathcal{J}_C = \tilde{I}_C$  le faisceau d'idéaux qui définit  $C$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) On a  $H^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .
- ii) L'idéal  $I_C$  est de dimension projective 1.

On dit alors que  $C$  est une courbe arithmétiquement de Cohen-Macaulay (en abrégé ACM).

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $I_C$  admette une résolution libre de longueur 1 :  $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I_C \rightarrow 0$ . Sur les faisceaux on a alors la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0$  et on en déduit, en passant à la cohomologie, la suite exacte :  $\dots \rightarrow H_*^1 \mathcal{F} \rightarrow H_*^1 \mathcal{J}_C \rightarrow H_*^2 \mathcal{E} \rightarrow \dots$ . Mais comme les faisceaux  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont dissociés (voir les notations du début) leurs  $H^1$  et  $H^2$  sont nuls donc aussi les  $H^1 \mathcal{J}_C(n)$ .

Réciproquement, notons d'abord que l'on a  $\text{dp}(I_C) \geq 1$  en vertu de 1.9.3.

Par ailleurs, on a vu (cf. 1.9) que  $I_C$  a une résolution minimale de longueur au plus 2 :  $0 \rightarrow L_2 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow I \rightarrow 0$ . On passe aux faisceaux et on introduit le conoyau  $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ . On a alors  $H_*^1 \mathcal{J}_C = H_*^2 \mathcal{E} = 0$  et on conclut par le lemme 1.10.

Parmi les courbes ACM, les plus simples sont les intersections complètes schématiques (cf. III, 10.2) :

---

<sup>3</sup>Cette définition n'est pas très raisonnable en général. Il y a de bonnes raisons, dont certaines apparaîtront plus loin (cf. 3.6) pour imposer plus et notamment que la courbe soit équidimensionnelle et sans composantes immergées. Cependant, pour les courbes ACM auxquelles nous aurons affaire, ces conditions sont automatiques.

**Définition 2.3.** Une courbe  $C$  de  $\mathbf{P}^3$  est dite schématiquement intersection complète si son idéal saturé  $I_C$  est engendré par deux générateurs (nécessairement sans facteurs communs).

Il résulte de III, 10.1 qu'une telle courbe est ACM. Le théorème de Peskine-Szpiro, que nous verrons plus loin, étudie la réciproque de cette assertion.

Nous avons rassemblé dans la proposition suivante quelques propriétés importantes des courbes ACM.

**Proposition 2.4.** Soient  $C$  une courbe ACM,  $d$  son degré,  $g$  son genre arithmétique et soit  $0 \rightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{p} I_C \rightarrow 0$  la résolution minimale de son idéal saturé.<sup>4</sup> Avec les notations 1.5 on a les propriétés suivantes :

- 0) La courbe  $C$  est connexe (donc sans points isolés).
- 1) On a  $s = r - 1$  et  $\sum_{j=1}^{r-1} m_j = \sum_{i=1}^r n_i$  (i.e.  $\deg E = \deg F$ )
- 2) On a  $2d = \sum_{j=1}^{r-1} m_j^2 - \sum_{i=1}^r n_i^2$ ,
- 3) On a :

$$\begin{aligned}
 g &= \sum_{j=1}^{r-1} \binom{m_j - 1}{3} - \sum_{i=1}^r \binom{n_i - 1}{3} \\
 &= 1 - 2d + \frac{1}{6} \left( \sum_{j=1}^{r-1} m_j^3 - \sum_{i=1}^r n_i^3 \right).
 \end{aligned}$$

- 4) On a  $n_1 < m_1$  et  $n_1$  est le plus petit degré d'une surface contenant  $C$  :

$$n_1 = s_0 = \inf \{ n \in \mathbf{N} \mid h^0 \mathcal{J}_C(n) > 0 \}.$$

En particulier, on a  $n_1 > 0$ .

- 5) On a  $n_r < m_{r-1}$  et  $m_{r-1} = e + 4$  où  $e$  est l'indice de spécialité de  $C$  :

$$e = \sup \{ n \in \mathbf{Z} \mid h^1 \mathcal{O}_C(n) > 0 \}.$$

*Démonstration.* Le point 0) vient de VIII, 1.6.5. Rappelons (cf. VII, 4.1) que la caractéristique d'Euler du faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$  vaut  $\chi_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(n) = B(n)$  où  $B$  est le polynôme donné par :

$$B(n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = \begin{cases} \binom{n+3}{3} & \text{si } n \geq 0, \\ -\binom{-n-1}{3} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>On parlera quelquefois de résolution (resp. de résolution minimale) de la courbe  $C$  pour désigner une résolution (resp. la résolution minimale) de son idéal saturé  $I_C$ .

Les points 1), 2) et 3) s'obtiennent alors en calculant de deux manières la caractéristique d'Euler  $\chi_{\mathcal{J}_C}(n)$ , d'abord par Riemann-Roch qui donne, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,

$$\chi_{\mathcal{J}_C}(n) = \chi_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(n) - \chi_{\mathcal{O}_C}(n) = B(n) - nd - 1 + g,$$

ensuite en utilisant la suite exacte de faisceaux associée à la résolution de  $I_C$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

qui donne :

$$\chi_{\mathcal{J}_C}(n) = \chi_{\mathcal{F}}(n) - \chi_{\mathcal{E}}(n) = \sum_{i=1}^r B(n - n_i) - \sum_{j=1}^s B(n - m_j).$$

Il suffit alors d'identifier les termes de degrés 3, 2, 1, 0 pour obtenir les quatre formules souhaitées.

Pour le point 4), supposons  $m_1 \leq n_1$ , donc aussi  $m_1 \leq n_i$  pour tout  $i$ . Alors, le coefficient  $a_{i1}$  de la matrice  $u$  est nul pour tout  $i$  (il est de degré  $\leq 0$  et la résolution est minimale). Mais ceci contredit l'injectivité de  $u$ . On vérifie sans peine qu'on a bien  $s_0 = n_1$ .

Le point 5) est un peu plus délicat. Si on a  $m_{r-1} \leq n_r$ , on a aussi  $m_j \leq n_r$  pour tout  $j$  et donc  $a_{rj} = 0$  pour tout  $j$ . La base canonique de  $F$  étant notée  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ , ceci signifie que  $u$  est à valeurs dans le sous-module engendré par  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1}$ . Soit  $f$  l'image de  $\epsilon_r$  dans  $I_C$  par  $p$  et soit  $g \in I_C$  quelconque. Nous allons montrer que  $g$  est dans l'idéal  $(f)$ , donc que  $I_C = (f)$ , ce qui sera une contradiction ( $C$  serait alors une surface).

On a  $g = p(\sum_{i=1}^r g_i \epsilon_i)$  avec  $g_i \in R$ . On écrit alors la relation évidente  $fg - gf = 0$  sous la forme  $fp(\sum_{i=1}^r g_i \epsilon_i) - gp(\epsilon_r) = 0$ , ou encore  $p(f \sum_{i=1}^r g_i \epsilon_i - g \epsilon_r) = 0$ . Comme le noyau de  $p$  n'est autre que l'image de  $u$  et comme celle-ci est contenue dans le sous-module engendré par  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1}$ , le coefficient de la combinaison linéaire selon  $\epsilon_r$  est nul d'où  $g = f g_r \in (f)$ , cqfd.

Pour déterminer l'indice de spécialité  $e$ , on note d'abord que l'on a  $h^1 \mathcal{O}_C(n) = h^2 \mathcal{J}_C(n)$  (c'est la suite de cohomologie associée à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ ). On a ensuite, avec la résolution :

$$0 \rightarrow H^2 \mathcal{J}_C(n) \rightarrow H^3 \mathcal{E}(n) \rightarrow H^3 \mathcal{F}(n) \rightarrow \dots$$

Si  $n > m_{r-1} - 4$  on a  $H^3 \mathcal{E}(n) = 0$ , donc, a fortiori,  $H^2 \mathcal{J}_C(n) = 0$ , d'où  $e \leq m_{r-1} - 4$ . Si  $n = m_{r-1} - 4$ , on a  $H^3 \mathcal{E}(n) \neq 0$  et  $H^3 \mathcal{F}(n) = 0$ , donc  $H^2 \mathcal{J}_C(n) \neq 0$  et  $e$  est donc égal à  $m_{r-1} - 4$ .

*Exemple 2.5.* La courbe  $C$  dont la résolution minimale est donnée par

$$0 \rightarrow R(-4)^3 \rightarrow R(-3)^4 \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

est de degré 6, de genre 3 et vérifie  $s_0 = 3$  et  $e = 0$ .

*Résolutions et mineurs : deux lemmes*

Les deux lemmes suivants s'appliqueront en particulier dans le cas des courbes ACM. Leur démonstration est dans une large mesure une application de la formule du développement d'un déterminant suivant une rangée, formule dont on voit ici toute la profondeur.

*Rappels et notations 2.6.* Nous reprenons les notations de 1.5, avec  $R = k[X, Y, Z, T]$  : soient  $E$  et  $F$  des  $R$ -modules libres gradués :

$$E = \bigoplus_{j=1}^s R(-m_j), \quad F = \bigoplus_{i=1}^r R(-n_i).$$

On suppose qu'on a  $r \geq 2$ ,  $s = r - 1$  et  $\deg E = -\sum_{j=1}^{r-1} m_j = \deg F = -\sum_{i=1}^r n_i$  (cf. 2.4). Soit  $u : E \rightarrow F$  un homomorphisme  $R$ -linéaire gradué de degré zéro et  $A = (a_{ij})$  sa matrice (de taille  $r \times (r - 1)$ ) dans les bases canoniques. Pour  $i = 1, \dots, r$  on appelle  $A_i$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en enlevant la ligne d'indice  $i$ . Les  $r - 1$ -mineurs de  $A$  sont, au signe près, les déterminants des  $A_i$  ; précisément, le  $i$ -ème mineur,  $\varphi_i$ , est donné par

$$\varphi_i = (-1)^{i+1} \det A_i.$$

On vérifie aisément que  $\varphi_i$  est un polynôme homogène de degré  $n_i$ . Si  $B$  est la matrice obtenue en bordant  $A$ , à gauche, par la colonne  $(a_1, \dots, a_r)$ , on a alors :

$$\det B = \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i.$$

Soient  $i_1, i_2 \in [1, r]$  deux entiers distincts et  $j$  un entier vérifiant les inégalités  $1 \leq j \leq r - 1$ . On note  $A_{i_1, i_2, j}$  la matrice obtenue en enlevant à  $A$  les lignes d'indices  $i_1, i_2$  et la colonne d'indice  $j$ . Le  $r - 2$ -mineur correspondant est alors, par définition :

$$\Delta_{i_1, i_2, j} = \begin{cases} (-1)^{i_1+i_2+j} \det A_{i_1, i_2, j} & \text{si } i_1 < i_2, \\ (-1)^{i_1+i_2+j+1} \det A_{i_1, i_2, j} & \text{si } i_1 > i_2. \end{cases}$$

On étend cette définition au cas  $i_1 = i_2$  en posant  $\Delta_{i,i;j} = 0$ . La formule de développement du déterminant selon une colonne, appliquée à  $A_i$ , donne pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j, l \leq r - 1$

$$(1) \quad \sum_{k \neq i} a_{kj} \Delta_{i,k;l} = \sum_{k=1}^r a_{kj} \Delta_{i,k;l} = \delta_{jl} \varphi_i,$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. On peut interpréter matriciellement cette formule en notant  $\Delta_i$  la matrice  $(r - 1) \times r$  dont le terme d'indice  $(l, k)$  est  $\Delta_{i,k;l}$ . On a alors  $\Delta_i A = \varphi_i I_{r-1}$  où  $I_{r-1}$  désigne la matrice identité.

De son côté, la formule de développement du déterminant selon une ligne, appliquée à  $A_{i_1}$  et  $A_{i_2}$ , donne pour  $i_1, i_2, k \in [1, r]$  :

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{r-1} a_{kj} \Delta_{i_1, i_2; j} = \delta_{k, i_2} \varphi_{i_1} - \delta_{k, i_1} \varphi_{i_2}.$$

Matriciellement, si  $\Delta$  est la matrice  $r^2 \times (r - 1)$  de terme général  $\Delta_{i_1, i_2; j}$ , cette relation montre que la matrice produit  $\Delta A$ , de taille  $r^2 \times r$ , a pour terme général  $\delta_{k, i_2} \varphi_{i_1} - \delta_{k, i_1} \varphi_{i_2}$ .

**Lemme 2.7.** *Avec les notations de 2.6 on a les propriétés suivantes :*

1)  *$u$  est injectif si et seulement si les  $r - 1$ -mineurs  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  de  $A$  sont non tous nuls.*

2) *On suppose les  $\varphi_i$  non tous nuls. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Les  $\varphi_i$  sont sans facteur commun.*

ii) *Soit  $J$  l'idéal engendré par les  $\varphi_i$ . On a la suite exacte :*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{\varphi} J \rightarrow 0,$$

où l'on a posé  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ . En particulier on a  $\text{Coker } u = J$ .

iii)  *$\text{Coker } u$  est l'idéal saturé d'une courbe ACM ou est égal à  $R$ .*

iv)  *$\text{Coker } u$  est un  $R$ -module sans torsion (i.e. si on a  $ax = 0$  avec  $a \in R$  et  $x \in \text{Coker } u$ ,  $a$  ou  $x$  est nul).*

**Démonstration**

1) Quitte à passer sur le corps des fractions  $k(X, Y, Z, T)$ , on se ramène au cas des espaces vectoriels qui est bien connu.

2) Montrons d'abord qu'on a toujours  $\varphi u = 0$ . Il s'agit de prouver, pour tout  $j$ , la relation  $\sum_{i=1}^r a_{ij} \varphi_i = 0$ . On introduit pour cela la matrice

$B$  obtenue en bordant  $A$  à gauche par la colonne des  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . On a alors  $\det B = \sum_{i=1}^r a_{ij} \varphi_i$ , mais comme cette matrice a deux colonnes égales, son déterminant est nul.

$i \Rightarrow ii$  : il reste à voir que  $\text{Ker } \varphi \subset \text{Im } u$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \text{Ker } \varphi$ . On a donc  $\sum_{i=1}^r a_i \varphi_i = 0$ . Soit  $B$  la matrice carrée  $r \times r$  obtenue en bordant  $A$  par la colonne des  $a_i$ . La relation ci-dessus montre que  $\det B = 0$ , donc que  $B$  n'est pas injective. Soit  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$  un vecteur non nul de  $\text{Ker } B$  et soit  $\lambda$  le vecteur colonne  ${}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ . On a donc l'égalité matricielle  $A\lambda = -\lambda_0 a$ . Si on montre que  $\lambda_0$  divise les autres  $\lambda_j$  on a fini car le vecteur  $(a_1, \dots, a_r)$  est bien alors dans l'image de  $u$ . Multipliant à gauche l'égalité ci-dessus par la matrice  $\Delta_i$  et appliquant la formule (1) de 2.6 on obtient :

$$\Delta_i A \lambda = \varphi_i \lambda = -\lambda_0 \Delta_i a.$$

On voit alors que  $\lambda_0$  divise tous les  $\varphi_i \lambda_j$ , donc aussi leur pgcd. Mais, comme les  $\varphi_i$  sont sans facteur commun, leur pgcd est égal à un, donc le pgcd des  $\varphi_i \lambda_j$  vaut  $\lambda_j$  et on a gagné.

(On n'oubliera pas que les coefficients sont dans l'anneau de polynômes  $R$  qui est factoriel. En particulier on peut parler de pgcd.)

$ii \Rightarrow i$  : Soit  $g$  le pgcd des  $\varphi_i$ ; c'est un polynôme homogène; soit  $d$  son degré. Il s'agit de montrer que  $d$  est nul. Posons  $\varphi_i = g \varphi'_i$ ; soit  $J'$  l'idéal engendré par les  $\varphi'_i$  et  $\varphi'$  l'homomorphisme homogène de degré zéro  $\varphi' : F(d) = \bigoplus_{i=1}^r R(-n_i + d) \rightarrow J'$  donné par la formule  $\varphi'(a_1, \dots, a_r) = \sum_{i=1}^r a_i \varphi'_i$ . Comme  $R$  est intègre, il est clair que le noyau de  $\varphi'$  est le même que celui de  $\varphi$ , de sorte qu'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow E(d) \xrightarrow{u} F(d) \rightarrow J' \rightarrow 0.$$

Soit  $C$  le schéma défini par  $J'$ . Comme l'idéal  $J'$  est saturé (cf. 1.9), on a  $J' = I_C$ . Comme les  $\varphi'_i$  sont sans facteur commun et  $r \geq 2$ , on a  $\dim C \leq 1$ . En vertu de 1.9.3, le schéma  $C$  est soit une courbe ACM d'idéal saturé  $J'$ , soit le vide. Si  $C$  est une courbe on applique 2.4.1 aux degrés de  $E(d)$  et  $F(d)$  et on a  $\sum_{j=1}^{r-1} (m_j + d) = \sum_{i=1}^r (n_i + d)$ , ce qui, vu l'hypothèse  $\sum_{j=1}^{r-1} m_j = \sum_{i=1}^r n_i$ , implique  $d = 0$ . Si  $C$  est vide on a  $I_C = J' = R$  et un calcul de caractéristiques d'Euler analogue à celui qui a permis de montrer 2.4.1 montre que  $d$  est nul.

On notera que la démonstration précédente prouve, au passage,  $ii \Rightarrow iii$ . L'implication  $iii \Rightarrow iv$  est évidente et il reste à montrer  $iv \Rightarrow ii$ .

Le fait que  $\varphi u = 0$  montre qu'on a, en tous cas, une flèche surjective  $\pi : \text{Coker } u \rightarrow J$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{p} & \text{Coker } u & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \pi & & \\ F & \xrightarrow{\varphi} & J & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Il reste à voir que  $\pi$  est injective. Pour cela, soit  $\bar{a} \in \text{Ker } \pi$ , avec  $\bar{a} = p(a)$ ,  $a \in F$ . On a donc  $\sum_{i=1}^r a_i \varphi_i = 0$  et, comme dans la démonstration de  $i \Rightarrow ii$ , on en déduit qu'il existe  $\lambda_0 \in R$  et  $\lambda \in E$ , non tous deux nuls, tels que  $\lambda_0 a + u(\lambda) = 0$ , donc  $\lambda_0 a \in \text{Im } u$  et  $\lambda_0 \bar{a} = 0$  dans  $\text{Coker } u$ . Comme  $\lambda_0$  n'est pas nul (puisque  $u$  est injectif) et comme  $\text{Coker } u$  est sans torsion on a bien  $\bar{a} = 0$ .

*Remarque 2.8.* Dans le lemme précédent, le cas  $J = R$  (qui correspond à l'ensemble vide) se produit si et seulement si l'un des mineurs  $\varphi_i$  est une constante non nulle. Bien entendu cela ne peut se produire que si  $u$  n'est pas minimal (sinon les  $a_{ij}$ , donc aussi les  $\varphi_i$ , sont de degré  $> 0$ ). Cela implique aussi que l'entier  $n_i$  correspondant est nul et que, si on pose

$$F' = \bigoplus_{k \neq i} R(-n_k),$$

$u$  induit un isomorphisme de  $E$  sur  $F'$ . En particulier les  $m_j$  et les  $n_k$  pour  $k \neq i$  sont les mêmes entiers.

Le deuxième lemme jouera un rôle fondamental dans le calcul des résolutions par liaison. Commençons par quelques rappels sur la dualité dans le cas des modules gradués.

Rappelons (cf. II, 7.5) que si  $E = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} E_n$  et  $F = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} F_n$  sont deux  $R$ -modules gradués, un homomorphisme  $u : E \rightarrow F$  est dit homogène de degré  $d$  si on a  $u(E_n) \subset F_{n+d}$ . On dit que  $u$  est gradué si  $u$  est somme finie d'homomorphismes homogènes. Lorsque  $E$  est de type fini comme  $R$ -module (ce que nous supposons désormais), tout homomorphisme est automatiquement gradué. Ceci munit le  $R$ -module  $\text{Hom}_R(E, F)$  d'une graduation naturelle.

Si  $E$  est un  $R$ -module gradué on note  $E^\vee$  le  $R$ -module dual de  $E$ , c'est-à-dire le  $R$ -module gradué  $\text{Hom}_R(E, R)$  des homomorphismes gradués de  $E$  dans  $R$ . Soit  $E$  un  $R$ -module libre gradué de base  $e_1, \dots, e_s$ , avec  $e_j$

de degré  $m_j$ . On a donc :  $E = \bigoplus_{j=1}^s R(-m_j)$ . Le module  $E^\vee$  est libre lui aussi, précisément on obtient une base de  $E^\vee$  en prenant la base duale  $e_1^*, \dots, e_s^*$  définie par  $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, et le degré de  $e_j^*$  est alors  $-m_j$ , de sorte que l'on a  $E^\vee = \bigoplus_{j=1}^s R(m_j)$ .

L'opération de dualité est fonctorielle et contravariante : si on a un homomorphisme  $u : E \rightarrow F$ , homogène de degré 0, on en déduit un homomorphisme en sens inverse  ${}^t u : E^\vee \rightarrow F^\vee$ , appelé transposé de  $u$  et défini par la formule  ${}^t u(f) = fu$ . Cet homomorphisme est aussi homogène de degré 0 et on a la formule  ${}^t(uv) = {}^t v {}^t u$ . Si  $E$  et  $F$  sont libres de bases  $(e_j)$  et  $(\epsilon_i)$ , et si  $u$  est donné dans ces bases par la matrice  $A$ ,  ${}^t u$  est donné, dans les bases duales, par la matrice  ${}^t A$ .

**Lemme 2.9.** *Avec les notations de 2.6 on suppose les  $\varphi_i$  non tous nuls et sans facteurs communs. Soit  $J$  l'idéal engendré par les  $\varphi_i$ . Soit  ${}^t u$  (resp.  ${}^t \varphi$ ) le transposé de  $u$  (resp.  $\varphi$ ). (On considère ici  $\varphi$  comme un homomorphisme de  $F$  dans  $R$ .) On a la suite exacte*

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{{}^t \varphi} F^\vee \xrightarrow{{}^t u} E^\vee \rightarrow \text{Coker } {}^t u \rightarrow 0$$

et l'annulateur du  $R$ -module  $\text{Coker } {}^t u$  est égal à  $J$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord l'exactitude de la suite. Il est clair que  ${}^t \varphi$  est injectif et qu'on a  ${}^t u {}^t \varphi = 0$  (cela résulte, via la fonctorialité de la dualité, de la relation  $\varphi u = 0$  vue en 2.7).

Il reste à montrer l'exactitude en  $F^\vee$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^r x_i \epsilon_i^* \in \text{Ker } {}^t u$  que l'on représente par la matrice colonne  $x = ({}^t(x_1, \dots, x_r))$ . On a l'égalité matricielle  ${}^t A x = 0$ , et en multipliant à gauche par la matrice  $\Delta$  (cf. 2.6) on obtient, pour tout couple  $(i_1, i_2)$ ,

$$(*) \quad x_{i_2} \varphi_{i_1} - x_{i_1} \varphi_{i_2} = 0.$$

Fixons un indice  $i_1 \in [1, r]$ . Si  $\varphi_{i_1}$  est nul il en est de même de  $x_{i_1}$ . Sinon, comme on est dans l'anneau (factoriel)  $R$  on peut décomposer  $\varphi_{i_1}$  en produit d'irréductibles :  $\varphi_{i_1} = \prod p_m^{\alpha_m}$  avec les  $p_m$  premiers distincts. Comme les  $\varphi_i$  sont sans facteur commun, il existe, pour  $m$  fixé, un  $\varphi_{i_2}$  tel que  $p_m$  ne divise pas  $\varphi_{i_2}$ . Mais alors la relation  $(*)$  montre que  $p_m^{\alpha_m}$  divise  $x_{i_1}$ , et en appliquant ceci pour tout  $m$ , que  $\varphi_{i_1}$  divise  $x_{i_1}$ , et on en déduit que  $x \in \text{Im } {}^t \varphi$ , cqfd.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>On aurait pu aussi passer au corps des fractions de  $R$  et se ramener au cas de l'algèbre linéaire usuelle.

Venons-en au calcul de l'annulateur  $\text{Ann}(\text{Coker } {}^t u)$ . En transposant la formule (1) de 2.6 :  $\Delta_i A = \varphi_i I_{r-1}$  on obtient  ${}^t A \Delta_i = \varphi_i I_{r-1}$ . On peut interpréter  ${}^t \Delta_i$  comme un homomorphisme de degré 0 de  $E^\vee(-n_i)$  dans  $F^\vee$  et la formule qui précède montre que les vecteurs  $\varphi_i e_j^*$  de  $E^\vee$  sont dans l'image de  ${}^t u$ , ce qui signifie qu'ils sont nuls dans  $\text{Coker } {}^t u$ , ou encore que  $\varphi_i$  annule  $\text{Coker } {}^t u$ , de sorte que  $J$  est contenu dans l'annulateur de  $\text{Coker } {}^t u$ .

Pour la réciproque, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & R & \xrightarrow{{}^t \varphi} & F^\vee & \xrightarrow{{}^t u} & E^\vee & \xrightarrow{p} & \text{Coker } {}^t u & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \nu_a & & \downarrow aI_{F^\vee} & & \downarrow aI_{E^\vee} & & \downarrow \mu_a & & \\
 0 & \rightarrow & R & \xrightarrow{{}^t \varphi} & F^\vee & \xrightarrow{{}^t u} & E^\vee & \xrightarrow{p} & \text{Coker } {}^t u & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par la multiplication par l'élément  $a \in R$ . Soit  $a \in \text{Ann}(\text{Coker } {}^t u)$ . Cela signifie que l'on a  $\mu_a = 0$ , donc aussi  $\mu_a p = p a I_{E^\vee} = 0$ , de sorte que  $a I_{E^\vee}$  est à valeurs dans  $\text{Ker } p = \text{Im } {}^t u$ . Comme  $E^\vee$  est libre ceci implique qu'il existe un homomorphisme homogène  $f : E^\vee \rightarrow F^\vee$  avec  $a I_{E^\vee} = {}^t u f$ .

Multipliant à droite cette relation par  ${}^t u$  on obtient  $a I_{E^\vee} {}^t u = {}^t u a I_{F^\vee} = {}^t u f {}^t u$ , ou encore  ${}^t u (a I_{F^\vee} - f {}^t u) = 0$ , de sorte que  $a I_{F^\vee} - f {}^t u$  est à valeurs dans  $\text{Ker } {}^t u = \text{Im } {}^t \varphi$  et, comme  $F^\vee$  est libre, il existe  $g : F^\vee \rightarrow R$  tel que l'on ait  $a I_{F^\vee} - f {}^t u = {}^t \varphi g$ . On multiplie cette relation à droite par  ${}^t \varphi$  et on obtient  $a I_{F^\vee} {}^t \varphi = f {}^t u {}^t \varphi + {}^t \varphi g {}^t \varphi = {}^t \varphi \nu_a$ . Comme  ${}^t u {}^t \varphi = 0$  et comme  ${}^t \varphi$  est injectif on en déduit  $\nu_a = g {}^t \varphi$ , ce qui signifie exactement que  $a$  est dans  $J = \text{Im } \varphi$ .

*Remarques 2.10.* Pour les lecteurs qui connaissent un peu d'algèbre commutative, les remarques qui suivent éclaireront la démonstration précédente.

1) Le lecteur instruit aura reconnu dans  $\text{Coker } {}^t u$  le module  $\text{Ext}_R^1(J, R) \simeq \text{Ext}_R^2(R/J, R)$ . L'exactitude de la suite ci-dessus résulte alors du fait que  $R/J$  est de dimension projective 2, donc de profondeur 2 par la formule d'Auslander-Buchsbaum (cf [H] III, 6.12A) donc qu'on a

$$\text{Ext}_R^1(R/J, R) = 0, \text{ i.e. } \text{Ker } {}^t u = \text{Im } {}^t \varphi.$$

2) Pour ce qui concerne l'annulateur de  $\text{Ext}_R^2(R/J, R)$ , il est clair qu'il contient  $J$  par functorialité du Ext. La réciproque vient de la formule  $\text{Ext}_R^2(\text{Ext}_R^1(J, R), R) = R/J$  qui se lit sur la suite exacte de 2.9. En effet,

si  $a$  annule  $\text{Ext}_R^1(J, R)$ , il annule le  $\text{Ext}^2$  de ce module à valeurs dans  $R$ , donc il annule  $R/J$ , donc il est dans  $J$ .<sup>6</sup>

### 3. Liaison des courbes gauches

Nous étudions dans ce paragraphe l'opération de liaison. Nous allons nous limiter essentiellement au cas des courbes ACM. Pour le cas général, qui requiert des préliminaires d'algèbre commutative dans lesquels nous n'avons pas souhaité entrer, le lecteur pourra se reporter à [PS] qui contient aussi le cas de la liaison en dimension quelconque.

#### a. Introduction et définition

**Définition 3.1.** Soient  $C$  et  $\Gamma$  deux courbes gauches, d'idéaux saturés  $I_C$  et  $I_\Gamma$ . L'idéal  $I_C \cap I_\Gamma$  est l'idéal saturé d'une courbe  $X$  appelée union schématique de  $C$  et  $\Gamma$ .

*Remarque 3.2.* Ensemblistement, l'union schématique n'est autre que l'union de  $C$  et  $\Gamma$ . Cette union ensembliste peut être aussi définie par l'idéal produit  $I_C I_\Gamma$ , mais, du point de vue schématique, l'idéal intersection réalise une sorte de sup des deux structures, alors que l'idéal produit en donne une somme, voir l'exemple extrême  $I_C = I_\Gamma$ .

**Définition 3.3.** Soient  $C$  et  $\Gamma$  deux courbes gauches, d'idéaux saturés  $I_C$  et  $I_\Gamma$ . On suppose qu'on a les conditions suivantes :

- 1)  $C$  et  $\Gamma$  n'ont pas de composante irréductible commune.
- 2) L'union schématique  $X$  de  $C$  et  $\Gamma$  est une courbe schématiquement intersection complète i.e. (cf. 2.3) l'idéal  $I_C \cap I_\Gamma$  est engendré par deux éléments  $f, g$ .

On dit alors que  $C$  et  $\Gamma$  sont géométriquement liées par  $X$  (ou par les surfaces d'équations  $f, g$ ).

**Proposition 3.4.** Soient  $C$  et  $\Gamma$  deux courbes gauches réduites, d'idéaux saturés  $I_C = I(C)$  et  $I_\Gamma = I(\Gamma)$ , géométriquement liées par  $X$ . On a les formules :

$$I_\Gamma = \{a \in R \mid aI_C \subset I_X\},$$

$$I_C = \{a \in R \mid aI_\Gamma \subset I_X\}.$$

---

<sup>6</sup>Cette démonstration et sa variante élémentaire m'ont été soufflées par Mireille Martin-Deschamps.

On dit, par exemple, que  $I_\Gamma$  est le transporteur de  $I_C$  dans  $I_X$  et on note  $I_\Gamma = (I_X : I_C)$ .

*Démonstration.* Il suffit, bien entendu, de montrer la formule pour  $I_C$ . Comme  $I_C I_\Gamma$  est contenu dans  $I_C \cap I_\Gamma = I_X$ , il est clair que  $I_C$  est contenu dans le transporteur. Pour la réciproque on décompose  $C$  en composantes irréductibles :  $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$  et on a alors  $I_C = I_{C_1} \cap \dots \cap I_{C_r}$  avec les  $I_{C_k}$  premiers (ceci ne serait plus vrai en général si  $C$  n'était pas réduite). Soit alors  $a \notin I_C$ , il s'agit de montrer que  $a$  n'est pas dans le transporteur de  $I_\Gamma$  dans  $I_X$ . Mais, comme  $a \notin I_C$ , il existe  $k$  tel que  $a \notin I_{C_k}$ . Par ailleurs, comme  $C$  et  $\Gamma$  n'ont pas de composante commune, on a  $I_\Gamma \not\subset I_{C_k}$ , donc il existe  $f \in I_\Gamma$ , avec  $f \notin I_{C_k}$ . Comme ce dernier idéal est premier, on a  $af \notin I_{C_k}$ , d'où, a fortiori,  $af \notin I_C$  et donc  $a$  n'est pas dans le transporteur.

Nous allons utiliser la proposition 3.4 pour donner une définition plus générale de la liaison :

**Proposition-définition 3.5.** *Soit  $C$  une courbe gauche d'idéal saturé  $I_C$  et soit  $X$  une courbe schématiquement intersection complète contenant  $C$  (i.e. telle que l'on ait  $I_X \subset I_C$ ). Soit  $J$  l'idéal transporteur de  $I_C$  dans  $I_X$ . Alors, l'idéal  $J$  est saturé et le sous-schéma  $\Gamma$  de  $\mathbf{P}^3$  défini par  $J$  est une courbe gauche (ou le vide) et on dit que  $\Gamma$  est algébriquement liée à  $C$  par  $X$  (ou par les surfaces qui définissent  $X$ ).*

### Remarques 3.6

0) La proposition 3.4 montre que deux courbes gauches réduites (i.e. des variétés) qui sont géométriquement liées le sont aussi algébriquement. En fait, cette propriété est encore vraie pour des courbes quelconques, au sens de 3.15 ci-dessous, i.e. sans composante ponctuelle, immergée ou non. En particulier elle vaut pour des courbes ACM. La démonstration est analogue en utilisant une décomposition primaire des idéaux  $I_C$  et  $I_\Gamma$  (cf. [Pes] §3 ou [Bbki] AC Ch. IV).

1) La relation de liaison géométrique est évidemment symétrique, mais, si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur  $C$ , la relation de liaison algébrique ne l'est plus nécessairement. Cette difficulté est la conséquence de notre définition imprudente des courbes gauches. Pour la surmonter, il faut supposer ici encore que les courbes vérifient les conditions de 3.15.

2) Dans le cas où  $C$  est ACM nous verrons plus loin (cf. 3.9) que ce problème disparaît.

3) On vérifie aussitôt que  $\Gamma$  est vide si et seulement si on a  $C = X$  (cela résulte du fait que  $I_X$  est saturé).

**Exemples 3.7 (calcul explicite d'une liée)**

1) Si on lie la conique lisse  $C$  d'idéal  $(Y, X^2 - ZT)$  par les surfaces d'équations  $YZ$  et  $X^2 - ZT$ , la courbe obtenue est la droite double d'idéal  $(X^2, Z)$ . En effet, il s'agit de trouver les  $a \in R$  tels que  $aY \in (YZ, X^2 - ZT)$ , ou encore  $aY = bYZ + c(X^2 - ZT)$ . On voit aussitôt que  $Y$  divise  $c$  :  $c = Yc'$  et on en déduit  $a = bZ + c'(X^2 - ZT) \in (X^2, Z)$ . On voit sur cet exemple que, même en partant d'une courbe lisse, on peut, par liaison, obtenir une courbe non réduite.

2) Partons de la courbe  $C$  réunion disjointe de deux coniques  $Z = P = 0$  et  $T = Q = 0$  où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes homogènes de degré 2 et où on suppose que  $Z$  (resp.  $T$ ) ne divise pas  $P$  (resp.  $Q$ ). Dire que ces coniques sont disjointes signifie que si on pose  $P = P_0(X, Y) + ZP_1 + TP_2$  et  $Q = Q_0(X, Y) + ZQ_1 + TQ_2$ , les polynômes  $P_0$  et  $Q_0$  n'ont pas de zéro commun non nul. L'idéal  $I_C$  est égal à  $(ZT, ZQ, TP, PQ)$ .

On lie alors  $C$  à  $\Gamma$  par les surfaces  $ZT$  et  $ZQ + TP$ . Le calcul, que le lecteur mènera à titre d'exercice, donne  $I_\Gamma = (ZQ + TP, Z^2, ZT, T^2)$ . Là encore, bien que la courbe initiale soit lisse en général, la liée n'est pas réduite. Cette fois les courbes en question ne sont pas ACM.

**b. Variation des résolutions par liaison : le cas ACM**

**Théorème 3.8.** Soit  $C$  une courbe ACM et soit, avec les notations de 2.6 :

$$(*) \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{p} I_C \rightarrow 0$$

une résolution (pas nécessairement minimale) de son idéal saturé. Soit  $A$  la matrice de  $u$  dans les bases canoniques. En vertu de 2.7, on a  $I_C = (f_1, \dots, f_r)$  où les  $f_i$  sont les  $r - 1$ -mineurs de  $A$ . Soit  $X$  une courbe intersection complète de deux surfaces  $f, g$  de degrés respectifs  $s, t$  contenant  $C$  et distincte de  $C$ . On pose  $f = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$  et  $g = \sum_{i=1}^r \mu_i f_i$ . Soit  $\Gamma$  le schéma algébriquement lié à  $C$  par  $X$ , défini par l'idéal  $J$  transporteur de  $I_C$  dans  $I_X$ . Alors on a les résultats suivants :

1) L'idéal  $J$  est de dimension projective 1 avec la résolution :

$$0 \rightarrow F^\vee(-s - t) \xrightarrow{v} E^\vee(-s - t) \oplus R(-t) \oplus R(-s) \rightarrow J \rightarrow 0,$$

où la matrice  $B$  de  $v$  dans les bases duales des bases canoniques est la matrice  $(r+1) \times r$  obtenue en bordant inférieurement la matrice  $A$  par les lignes formées des  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ .

2) L'idéal  $I_\Gamma$  est égal à  $J$ .

3) Le schéma  $\Gamma$  est une courbe ACM.

*Démonstration.* Il suffit de montrer le point 1) car alors  $J$  sera saturé en vertu de 1.9 et  $\Gamma$ , qui n'est pas vide puisque  $X$  est distincte de  $C$ , sera une courbe ACM en vertu de 2.7. Déterminons donc l'idéal transporteur  $J$  de  $I_C$  dans  $I_X$ . Soit  $a \in J$ . Cela signifie qu'on a pour tout  $i = 1, \dots, r$  la relation  $af_i \in (f, g)$ , c'est-à-dire  $af_i = \alpha_i f + \beta_i g$ . Posons  $\lambda = \sum_{k=1}^r \lambda_k \epsilon_k$  et  $\mu = \sum_{k=1}^r \mu_k \epsilon_k$ . La relation précédente s'écrit  $p(a\epsilon_i - \alpha_i \lambda - \beta_i \mu) = 0$ . La suite exacte (\*) montre alors qu'il existe un vecteur  $x^i \in E$  tel que  $a\epsilon_i = u(x^i) + \alpha_i \lambda + \beta_i \mu$ .

Soit alors  $u' : E(s+t) \oplus R(t) \oplus R(s) \rightarrow F(s+t)$  l'homomorphisme défini par blocs par  $u' = (u, \lambda, \mu)$  (le lecteur vérifiera que les degrés sont bien compatibles avec les décalages indiqués). Le calcul précédent montre l'équivalence :  $a \in J \iff \forall i a\epsilon_i \in \text{Im } u'$ , ce qui signifie exactement que  $a$  annule Coker  $u'$ . Considérons alors l'homomorphisme transposé  $v = {}^t u' : F^\vee(-s-t) \rightarrow E^\vee(-s-t) \oplus R(-t) \oplus R(-s)$ . On constate que les degrés des modules sont bien les mêmes, de sorte que l'on est en position d'appliquer 2.7 et 2.9. Parmi les  $r$ -mineurs de la matrice  $B$  de  $v$  apparaissent déjà, lorsqu'on enlève l'une des deux dernières lignes, les polynômes  $f$  et  $g$  (au signe près). Comme  $f$  et  $g$  n'ont pas de facteur commun, il en est de même, a fortiori, des  $r$ -mineurs de  $B$  et il résulte alors du lemme 2.9 que  $J$  est l'idéal engendré par les  $r$ -mineurs de  $B$  et, en vertu de 2.7, on a la résolution

$$0 \rightarrow F^\vee(-s-t) \xrightarrow{{}^t u'} E^\vee(-s-t) \oplus R(-t) \oplus R(-s) \xrightarrow{(\varphi, g, f)} J \rightarrow 0,$$

où  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1})$ , les  $\varphi_i$  étant les  $r$ -mineurs de  $B$  obtenus en enlevant une ligne de  $A$ .

**Corollaire 3.9.** Avec les notations précédentes, la courbe  $C$  est algébriquement liée à  $\Gamma$  par  $X$ .

*Démonstration.* On calcule la résolution du transporteur  $J'$  de  $I_\Gamma$  dans  $I_X$  par la méthode du théorème. La matrice  $A''$  à regarder est de taille  $(r+2) \times (r+1)$  et, puisque  $f$  et  $g$  sont parmi les générateurs de  $I_\Gamma$ , elle

s'écrit :

$$A'' = \begin{pmatrix} A & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les générateurs de  $J'$  sont les  $r + 1$ -mineurs de cette matrice, que l'on calcule aisément : il y a les mineurs obtenus en enlevant l'une des deux dernières lignes qui sont  $f$  et  $g$ , puis ceux obtenus en enlevant l'une des  $r$  premières lignes qui ne sont autres que les  $r$ -mineurs de  $A$  i.e. les  $f_i$ . En définitive l'idéal  $J'$  est égal à  $I_C$ , cqfd.

*Remarque 3.10.* Même si on est parti de la résolution minimale de  $C$ , celle de  $\Gamma$  donnée par 3.8 ne l'est pas nécessairement. C'est le cas si l'un des  $\lambda_i$  ou des  $\mu_i$  est une constante non nulle (on dit alors que  $f$  ou  $g$  est un générateur minimal de  $I_C$ ). Par exemple si on part de la cubique gauche et qu'on lie par deux quadriques, la liée est une droite, mais la résolution fournie ci-dessus n'est pas minimale (il y a 4 générateurs au lieu de 2).

**Proposition 3.11** (calcul des invariants). *Avec les notations de 3.8, si  $d, g$  (resp.  $d', g'$ ) sont les degrés et genres de  $C$  (resp.  $\Gamma$ ) on a les formules :*

- 1)  $d + d' = st$ ,
- 2)  $g' - g = (\frac{1}{2}(s + t) - 2)(d' - d)$ .

*Démonstration.* Cela résulte du calcul de la résolution de la liée et des formules de 2.4.

### c. Le théorème de Peskine-Szpiro

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question posée dans l'introduction :

**Théorème 3.12** (Apéry-Gaéta-Peskine-Szpiro). *Soient  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}^3$ ,  $I_C$  son idéal saturé,  $\mathcal{I}_C$  le faisceau d'idéaux qui définit  $C$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe un entier  $n \geq 0$  et une suite de courbes  $C_0, C_1, \dots, C_n = C$  telles que  $C_i$  et  $C_{i+1}$  soient algébriquement liées <sup>7</sup> et que  $C_0$  soit une intersection complète.*

<sup>7</sup>Comme toutes les courbes sont ACM, la relation de liaison algébrique est ici symétrique (cf. 3.9).

2)  $C$  est une courbe ACM (i.e. au choix, cf. 2.2,  $H^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$  pour tout  $n$  ou encore,  $\text{dp } I_C = 1$ .)

*Démonstration.* Le fait que 1) implique 2) résulte de la description de la résolution d'une intersection complète (cf. III, 10.1) et du calcul de la résolution de la liée (3.8).

La réciproque se montre par récurrence sur le nombre minimal  $r$  de générateurs de  $I_C$  (c'est-à-dire le rang de  $F$  dans la résolution minimale (\*) de  $I_C$ ). Si on a  $r = 2$ ,  $C$  est une intersection complète et c'est clair. Sinon, soient  $(f_1, \dots, f_r)$  les générateurs de  $I_C$ , images des vecteurs de base du module libre  $F$ . On a le lemme suivant :

**Lemme 3.13.** *Avec les notations précédentes, supposons  $(f_1, \dots, f_r)$  de degrés respectifs  $n_1 \leq \dots \leq n_r$ . Alors, il existe des polynômes homogènes  $a_i$ , pour  $i = 2, \dots, r$ , de degrés  $n_r - n_i$ , avec  $a_r \in k^*$  et tels que  $f = f_1$  et  $g = \sum_{i=2}^r a_i f_i$  soient sans facteur commun.*

*Démonstration.* Soit  $h$  un facteur premier de  $f_1$ . L'un des  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , n'est pas multiple de  $h$  sinon  $C$  contiendrait la surface  $V(h)$ . On considère le sous-espace vectoriel  $W_h$  de  $H^0 \mathcal{J}_C(n_r)$  formé des multiples de  $h$ . Il n'est pas égal à  $H^0 \mathcal{J}_C(n_r)$  tout entier (si  $f_i$  n'est pas multiple de  $h$  et si  $l$  est une forme linéaire,  $l \neq h$ ,  $f_i l^{n_r - n_i} \notin W_h$ ). Il en résulte que la réunion des  $W_h$  est un fermé strict de  $I_{C, \leq n_r} = \bigoplus_{n=0}^{n_r} H^0 \mathcal{J}_C(n)$ , donc son complémentaire rencontre l'ouvert des  $g = \sum_{i=1}^r a_i f_i$  avec  $a_r \in k^*$  et on en déduit aussitôt la conclusion.

Terminons maintenant la démonstration de 3.12. Le lemme 3.13 montre que, quitte à changer le vecteur de base  $\epsilon_r$  de  $F$  en  $\sum_{i=2}^r a_i \epsilon_i$ , on peut supposer  $f_1$  et  $f_r$  sans facteur commun. On lie alors  $C$  à  $\Gamma$  par  $f_1$  et  $f_r$ . Si on calcule  $I_\Gamma$  comme en 3.8 ci-dessus on montre (cf. ci-dessous) que  $I_\Gamma$  a  $r - 1$  générateurs et on conclut alors par l'hypothèse de récurrence. Pour voir que  $I_\Gamma$  est engendré par  $r - 1$  éléments on note qu'il est engendré par les  $r$ -mineurs de la matrice  $B$ , de taille  $(r + 1) \times r$ , obtenue en bordant  ${}^t A$  par les lignes  $(1, 0, \dots, 0)$  et  $(0, \dots, 0, 1)$ . Si on écrit  ${}^t A = (u A' v)$  où  $A'$  est une matrice  $(r - 1) \times (r - 2)$  et où  $u$  et  $v$  sont des vecteurs colonnes, on constate en développant les mineurs de  $B$  que les générateurs cherchés sont dans l'idéal engendré par les  $(r - 2)$ -mineurs de  $A'$  qui sont bien au nombre de  $r - 1$ . On peut aussi, grâce aux coefficients constants non nuls de la matrice  $B$ , simplifier deux termes dans la résolution de  $I_\Gamma$ , comme on l'a fait dans la démonstration de 1.8.

*Remarques 3.14*

1) Attention il peut effectivement être nécessaire de changer de générateurs minimaux, c'est le cas si on part de la courbe d'idéal  $I_C = (XY, YZ, XZ)$  et des trois générateurs  $XY, YZ, ZX$  : deux quelconques d'entre eux ont un facteur commun. Pour effectuer une liaison il faut remplacer l'un d'eux par une combinaison linéaire, on peut prendre par exemple  $XY$  et  $Z(X + Y)$ .

2) Par ailleurs, le lemme 3.13 n'est pas vrai en général avec un  $g$  de degré  $< n_r$ , cf. par exemple  $I_C = (XZ, YZ, XT^2, YT^2)$ .

**d. Discussion sur le cas non ACM**

Nous donnons dans ce paragraphe quelques indications (sans démonstrations) sur le cas non ACM. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux références.

Nous commençons par donner une définition des courbes mieux adaptée à la situation :

**Définition 3.15.** On appelle courbe gauche un sous-schéma de  $\mathbf{P}^3$ , de dimension 1, sans composante ponctuelle (immergée, cf. Annexe e ci-dessous, ou non).

**Proposition 3.16.** Soient  $C$  une courbe gauche (au sens ci-dessus),  $X$  une intersection complète contenant  $C$  et soit  $\Gamma$  le sous-schéma algébriquement lié à  $C$  par  $X$ , intersection complète de deux surfaces de degrés  $s$  et  $t$ . Alors on a :

- 1)  $\Gamma$  est une courbe gauche (au sens ci-dessus),
- 2)  $C$  est liée à  $\Gamma$  par  $X$ ,
- 3) L'idéal  $I_\Gamma$  est le transporteur de  $I_C$  dans  $I_X$ ,
- 4) Les formules 3.11 concernant degré et genre sont encore valables.
- 5) On a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , les formules :

$$h^1 \mathcal{J}_C(n) = h^1 \mathcal{J}_\Gamma(s + t - n - 4),$$

$$h^0 \mathcal{J}_C(n) - h^0 \mathcal{J}_X(n) = h^1 \mathcal{O}_\Gamma(s + t - n - 4),$$

$$h^0 \mathcal{J}_\Gamma(n) - h^0 \mathcal{J}_X(n) = h^1 \mathcal{O}_C(s + t - n - 4).$$

*Démonstration.* Voir [PS] ou [Rao].

*Remarque 3.17.* En ce qui concerne les résolutions on a une formule analogue à celle de 3.8 mais plus compliquée, en particulier il faut distinguer entre deux types de résolution (de type  $E$  et  $N$ , cf. [MDP]).

La relation de liaison est symétrique et engendre une relation d'équivalence (la liaison "par étapes"). Le problème principal est de décrire les classes de liaison. Il y a déjà (c'est essentiellement le théorème de Peskine-Szpiro), la classe des ACM. Dans le cas des courbes non ACM un invariant fondamental a été introduit par R. Hartshorne et étudié par A.P. Rao; il s'agit du module

$$M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n)$$

que l'on appelle module de Rao de  $C$ . C'est un module gradué sur l'anneau  $R$ , il comporte seulement un nombre fini de termes non nuls (c'est clair pour  $n \gg 0$  par le théorème de Serre VII, 4.6 et pour  $n \ll 0$  cela se voit par dualité de Serre, cf. [H] III, 7.6) et chaque composante est de dimension finie. Ce module a un comportement très simple par liaison; si  $\Gamma$  est liée à  $C$  par deux surfaces de degrés  $s$  et  $t$  on a  $M_\Gamma = M_C^*(4 - s - t)$ . (L'étoile désigne le module gradué dual de  $M_C$ .) Un théorème de Rao montre que tout module de ce type est, à décalage près, le module de Rao d'une courbe que l'on peut même supposer lisse et que deux courbes sont dans la même classe de liaison si et seulement si elles ont même module de Rao, à dualité et décalage près.

Peut-être encore plus intéressante que la relation de liaison est celle de biliaison (ou liaison paire) car dans ce cas l'invariant est le module de Rao, à décalage près seulement. Dans une classe de biliaison toutes les courbes ont donc pour module de Rao le module  $M$  décalé  $M(n)$  avec  $n \in \mathbf{Z}$ . On montre qu'il y a un  $n$  minimal et les courbes qui correspondent à ce  $n$  sont appelées les courbes minimales de la classe. Elles sont essentiellement uniques et permettent de déterminer toutes les autres courbes de la classe. Sur ces points cf. [MDP] ou [BBM]. Pour l'utilisation du module de Rao dans les problèmes de classification des courbes gauches, cf. [MDP].

### e. Annexe : points immergés sur une courbe

Nous expliquons ici, essentiellement sur un exemple, le mot "composante immergée" apparu dans la définition 3.15.

Soit  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}^3$  (au sens faible : un sous-schéma de dimension 1). Cette courbe peut avoir des composantes irréductibles ponctuelles (réduites ou non). Elle peut aussi avoir des points particuliers appelés points

(ou composantes) immergé(e)s qui jouent un rôle tout à fait analogue à celui des composantes ponctuelles comme on va le voir.

**Définition 3.18.** Soit  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}^3$  et soit  $x \in C$  un point (non isolé). On note  $\mathcal{O}_{C,x}$  l'anneau local de  $C$  en  $x$  et  $m_{C,x}$  son idéal maximal. On dit que  $x$  est un point immergé de  $C$  s'il existe  $a \in \mathcal{O}_{C,x}$ ,  $a \neq 0$ , tel que l'annulateur de  $a$  soit l'idéal  $m_{C,x}$ . (On dit que  $m_{C,x}$  est un idéal premier associé de  $\mathcal{O}_{C,x}$ , cf. [Bbki] AC IV ou [Pes] §3. Dans un anneau réduit seuls les idéaux premiers minimaux, qui correspondent aux composantes irréductibles, sont associés.)

**Exemple 3.19.** Soit  $C = \text{Proj } k[X, Y, T]/(XY, X^2)$ . Cette courbe plane est l'intersection de deux courbes :  $V$  qui est la réunion des droites  $X = 0$  et  $Y = 0$  et  $W$  qui est la droite double  $X^2 = 0$ . Ensemblistement la courbe  $C$  est réduite à la droite  $X = 0$ , mais avec un point singulier en  $(0, 0, 1)$ . Ce point est immergé sur  $C$ . En effet on voit aussitôt que l'idéal maximal  $(x, y)$  est l'annulateur de  $y$ . On notera que  $C$  n'est pas réduite ( $x^2 = 0$ ) mais que  $C - \{(0, 0, 1)\}$  l'est, de sorte que les nilpotents de  $C$  sont concentrés au point immergé. On peut encore comprendre cela en notant que l'idéal  $(XY, X^2)$  est intersection des idéaux  $(X)$  et  $(X^2, Y)$  donc  $C$  est union schématique de la droite  $X = 0$  et du point double d'équations  $(X^2, Y)$  qui, schématiquement, n'est pas contenu dans la droite et joue donc le rôle d'une composante ponctuelle supplémentaire.

Cette composante immergée apparaît aussi comme "limite" d'une vraie composante ponctuelle. Considérons en effet le schéma  $C_\lambda$  défini par l'idéal  $(XY, X(X - \lambda T))$  avec  $\lambda \in k$ . Pour  $\lambda \neq 0$  ce schéma est la réunion disjointe de la droite  $X = 0$  et du point isolé  $(\lambda, 0, 1)$ . Pour  $\lambda = 0$  on trouve  $C$  qui est donc la position limite de  $C_\lambda$ , le point immergé étant la limite du point isolé.

Enfin, si on lie (algébriquement) la courbe  $C$  (resp.  $C_\lambda$ ), considérée comme courbe de  $\mathbf{P}^3$  en rajoutant l'équation  $Z = 0$ , par les surfaces  $XY, Z$ , on trouve dans les deux cas  $\Gamma$  d'idéal  $I_\Gamma = (Y, Z)$ . Si on lie maintenant  $\Gamma$  par les mêmes surfaces on trouve non pas  $C$  ou  $C_\lambda$  mais la courbe  $X = Z = 0$ , autrement dit la double liaison a oublié le point immergé ou isolé. On voit sur cet exemple que, sans l'hypothèse de 3.15 sur les courbes (pas de composante ponctuelle, immergée ou non), l'opération de liaison n'est pas symétrique en général.

## Exercices

### 1. Résolutions

1) Soit  $R$  une  $k$ -algèbre graduée,  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ , avec  $R_0 = k$ . Soit  $m = R^+$  l'idéal maximal des éléments de degré  $> 0$ , de sorte que  $R/m$  est isomorphe à  $k$ . On munit  $k$  de la structure de  $R$ -module gradué fournie par cette structure quotient. Déterminer la résolution minimale du  $R$ -module  $k$  dans les cas suivants :  $R = k[\epsilon]$  avec  $\epsilon^2 = 0$  (anneau des nombres duaux),  $R = k[T]$ ,  $R = k[X, T]$ ,  $R = k[X, Y, T]$ ,  $R = k[X, Y, Z, T]$ .

2) Déterminer la résolution minimale de l'idéal (non saturé)  $I = (X^2, XY, XT)$  de  $k[X, Y, T]$ . Comparer cette résolution à celle de l'idéal saturé associé.<sup>8</sup>

### 2. Construction de courbes par liaison

1) Montrer qu'il existe des courbes  $C$  de  $\mathbb{P}^3$ , ACM, de degré  $d$  et genre  $g$  dans les cas suivants :  $d = 7, g = 5$ ;  $d = 8, g = 7$ ;  $d = 24, g = 64$ ;  $d = s^2 - 1, g = s^3 - 2s^2 - 2s + 4$ , avec  $s$  entier  $\geq 2$ .

On précisera la résolution des idéaux des courbes construites. (La méthode consiste à déterminer par Riemann-Roch le degré de surfaces sur lesquelles peut se trouver  $C$  puis à faire des liaisons pour faire diminuer  $d$  et  $g$  en utilisant les formules de 3.11.)

2) Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Montrer, par récurrence sur  $n$  en utilisant la liaison, qu'il existe une courbe ACM dont l'idéal a pour résolution :

$$0 \rightarrow R(-n-1)^n \rightarrow R(-n)^{n+1} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

3) Soit  $D$  une droite.

a) Montrer qu'il existe deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  de degrés 2 et 5 contenant  $D$  et sans composante commune.

b) Soit  $C$  la courbe liée à  $D$  par  $S_1$  et  $S_2$ . Montrer que  $C$  est une courbe ACM de degré 9 et de genre 12 et préciser sa résolution minimale.

c) Montrer qu'il existe des surfaces  $S'_1$  et  $S'_2$  de degrés 3 et 6 contenant  $C$  et sans composante commune.

d) Soit  $C'$  la courbe liée à  $C$  par  $S'_1$  et  $S'_2$ . Montrer que  $C'$  est une courbe ACM de degré 9 et de genre 12 dont la résolution minimale est distincte de celle de  $C$ .

---

<sup>8</sup>Il existe un logiciel, appelé Macaulay, qui permet de calculer sans effort à peu près toutes les résolutions que l'on souhaite.

### 3. La quartique rationnelle

Soit  $\Gamma$  la réunion des droites de  $\mathbf{P}^3$  d'équations  $(X, Y)$  et  $(Z, T)$ . On lie  $\Gamma$  par les surfaces d'équations  $XT - YZ$  et  $XZ^2 - Y^2T$  à une courbe  $C$ . Montrer que la courbe  $C$  est de degré 4 et de genre 0. Est-elle ACM ? Calculer son idéal  $I_C$  et montrer que  $C$  est lisse et connexe. (On trouvera dans l'idéal  $I_C$ , outre les équations des surfaces ci-dessus, les équations  $YT^2 - Z^3$  et  $ZX^2 - Y^3$ .)

# Mémento d'algèbre

Les connaissances contenues dans ce mémento sont utilisées dès les premiers chapitres de ce livre. Il est donc essentiel de les acquérir rapidement. En général on utilisera seulement les définitions et les résultats, mais il peut être intéressant de chercher des démonstrations à titre d'exercice. On a signalé par le signe ¶ ceux des résultats dont la démonstration n'est pas évidente. Dans ce cas on pourra, si on le souhaite, se reporter aux références.

## 1. Anneaux

On suppose connues les notions d'anneau (toujours supposé commutatif et unitaire), d'anneau de polynômes, d'idéal, d'anneau quotient, de corps, de module. On note  $(x)$  ou  $xA$  l'idéal engendré par  $x$  dans  $A$ , i.e. l'ensemble des éléments de la forme  $xa$  pour  $a \in A$ .

### 1.1. Anneaux

#### a. Le théorème d'isomorphisme

Soient  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux,  $I = \text{Ker } f$ . Soit  $J$  un idéal de  $A$  contenu dans  $I$  et soit  $p : A \rightarrow A/J$  la projection canonique. Alors :

1) il existe un unique homomorphisme  $\bar{f} : A/J \rightarrow B$  tel que  $f = \bar{f}p$  (on dit que  $f$  se factorise par  $A/J$ ),

2)  $\bar{f}$  est injectif si et seulement si on a  $J = I$ ,

3)  $\bar{f}$  est surjectif si et seulement si  $f$  l'est.

En particulier on a  $\text{Im } f \simeq A/\text{Ker } f$ .

b. *Propriété universelle des anneaux de polynômes*

Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux. La donnée d'un homomorphisme  $f : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$  équivaut à la donnée de sa restriction à  $A$  (donc d'un homomorphisme de  $A$  dans  $B$ ) et des images des  $X_i$  (donc de  $n$  éléments de  $B$ ). (cf. [L] Ch. V.)

c. *Division euclidienne*

Soient  $A$  un anneau et  $P \in A[X]$ ,  $P \neq 0$ , de coefficient dominant *inversible*. Soit  $F \in A[X]$ , il existe  $Q, R \in A[X]$  avec  $F = PQ + R$  et  $\deg R < \deg P$  ou  $R = 0$ . (cf. [P] Ch. II, [L] Ch.V.)

Par exemple dans  $k[X, Y]$ , par rapport à la variable  $Y$ , on peut diviser par  $Y^2 - X^3$ , mais pas par  $XY - 1$ .

Application de a,b et c : montrer que l'anneau des entiers de Gauss  $\mathbf{Z}[i]$  est isomorphe au quotient  $\mathbf{Z}[X]/(X^2 + 1)$ .

d. *Produit d'anneaux*

Le produit direct de deux anneaux  $A$  et  $B$  est l'ensemble produit  $A \times B$  (i.e. les couples  $(a, b)$ ) muni des lois produits :  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ ,  $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ .

Exemple : si  $p$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux, montrer que l'on a :

$$\mathbf{Z}/(pq) \simeq \mathbf{Z}/(p) \times \mathbf{Z}/(q) \text{ (lemme chinois). (cf. [L] Ch.II.)}$$

1.2. **Idéaux**a. *Opérations sur les idéaux*

Une intersection quelconque d'idéaux est un idéal.

La *somme* d'une famille  $I_k$  d'idéaux de  $A$  est l'ensemble des sommes *finies*  $\sum x_k$  avec  $x_k \in I_k$ . C'est un idéal qui est la borne supérieure des  $I_k$  pour l'inclusion. On le note  $\sum I_k$ . En particulier si  $I_k = (f_k)$  on trouve l'*idéal engendré* par les  $f_k$ . Dans  $\mathbf{Z}$  l'idéal somme de  $(x)$  et  $(y)$  est l'idéal engendré par le *pgcd* de  $x$  et  $y$ .

Le *produit* de deux idéaux  $I$  et  $J$  est l'idéal noté  $IJ$  *engendré* par les produits  $xy$  pour  $x \in I$  et  $y \in J$ . On a  $IJ \subset I \cap J$ , mais la réciproque est fautive : dans  $\mathbf{Z}$  l'idéal produit (resp. intersection) de  $(x)$  et  $(y)$  est l'idéal engendré par  $xy$  (resp. par le *ppcm* de  $x$  et  $y$ ).

b. *Idéaux premiers*

Un anneau *intègre* est un anneau  $A \neq \{0\}$  qui vérifie :  $\forall a, b \in A, ab = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$ .

Par exemple, un corps est intègre, un sous-anneau d'un anneau intègre, un anneau de polynômes sur un anneau intègre sont intègres.

Un idéal  $\mathfrak{p}$  de  $A$  est dit *premier* si  $A/\mathfrak{p}$  est intègre. On note que l'image réciproque d'un idéal premier par un homomorphisme est un idéal premier.

Un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  est dit *maximal* s'il est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux de  $A$  distincts de  $A$ . Il revient au même de dire que  $A/\mathfrak{m}$  est un corps appelé corps résiduel de  $\mathfrak{m}$ . Il en résulte que tout idéal maximal est premier, mais la réciproque est inexacte (les idéaux maximaux de  $\mathbf{Z}$  sont les  $(p)$  avec  $p$  premier, les idéaux premiers sont les mêmes, plus l'idéal  $(0)$ ).

On montre en utilisant le théorème de Zorn que tout idéal est contenu dans un idéal maximal.

c. *Idéaux d'un quotient*

Soient  $A$  un anneau et  $I$  un idéal,  $p$  la projection canonique de  $A$  sur  $A/I$ . Les idéaux de  $A/I$  sont en bijection (croissante) avec les idéaux de  $A$  qui contiennent  $I$  par les applications  $p$  et  $p^{-1}$ . De plus les idéaux premiers (resp. maximaux) se correspondent dans cette bijection. (cf. [P] Ch.II.)

Application : décrire les idéaux de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

d. *Éléments nilpotents*

Un élément  $a \in A$  est *nilpotent* s'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $a^n = 0$ . L'ensemble des éléments nilpotents forme un idéal appelé *nilradical* de  $A$ . Cet idéal est l'intersection de tous les idéaux premiers de  $A$  (¶, cf. Exercice 4.2).

Un anneau sans élément nilpotent autre que 0 est dit *réduit*. Exemple : lesquels des anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  sont-ils réduits, intègres, des corps ?

1.3. *Anneaux noethériens*

Un idéal  $I$  d'un anneau  $A$  est dit *de type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments, i.e. s'il existe  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  tels que tout  $x \in I$  s'écrive  $x = \sum a_i x_i$  avec  $a_i \in A$ .

Un anneau  $A$  est dit *noethérien* s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes (cf. [P] Ch.II, [L] Ch. VI) :

- 1) Tout idéal de  $A$  est de type fini,
- 2) Toute suite croissante d'idéaux de  $A$  est stationnaire,
- 3) Tout ensemble non vide d'idéaux de  $A$  a un élément maximal pour l'inclusion.

*Exemples.* Un corps,  $\mathbf{Z}$ , plus généralement un anneau principal (i.e. dont tout idéal est principal), un quotient de noethérien sont noethériens. Si  $A$  est noethérien,  $A[X]$  aussi ( $\heartsuit$ ) (et donc aussi  $A[X_1, \dots, X_n]$  et tous ses quotients).

Dans un anneau noethérien l'ensemble des idéaux premiers minimaux est fini ( $\heartsuit$ , cf. Exercice 4.3).

#### 1.4. Anneaux factoriels

Dans ce paragraphe les anneaux sont supposés intègres. On désigne par  $A^*$  l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ .

Un élément  $p \in A$  est dit *irréductible* si  $p \notin A^*$  et si  $p = ab \Rightarrow a \in A^*$  ou  $b \in A^*$ .

Par exemple les irréductibles de  $\mathbf{Z}$  sont les nombres premiers.

Un anneau (intègre)  $A$  est dit *factoriel* si tout élément de  $A$  s'écrit de manière unique comme produit d'irréductibles.

Un anneau principal est factoriel donc  $\mathbf{Z}$ ,  $k[X]$  (où  $k$  est un corps) sont factoriels.

Si  $A$  est factoriel il en est de même de  $A[X]$  ( $\heartsuit$ ) (et de  $A[X_1, \dots, X_n]$ ). Par exemple, si  $k$  est un corps,  $k[X, Y]$  est factoriel mais non principal. (cf. [P] Ch. II.)

#### 1.5. Algèbres de type fini

Soit  $A$  un anneau. Une  $A$ -algèbre est un anneau  $B$  muni d'un homomorphisme (souvent injectif, mais pas toujours)  $f : A \rightarrow B$ . Elle est dite *de type fini* si elle est engendrée comme algèbre par un nombre fini d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $B$ , i.e. si tout élément de  $B$  est une fonction polynomiale des  $x_i$  à coefficients dans  $A$ . Il revient encore au même (cf. 1.b) de demander que  $B$  soit isomorphe à un quotient d'un anneau de polynômes  $A[X_1, \dots, X_n]$ .

**Attention**, il ne faut pas confondre "de type fini" comme  $A$ -module et comme  $A$ -algèbre. Dans le premier cas tout élément s'écrit comme

combinaison linéaire des  $x_i$ , dans le second cas comme polynôme. Il y a aussi une notion de type fini comme corps où on prend les fractions rationnelles en les  $x_i$ . Dans tous les cas la structure engendrée par les  $x_i$  est la plus petite sous-structure qui les contienne.

## 1.6. Localisation

### a. Anneau local

Un anneau  $A$  est dit *local* s'il a un unique idéal maximal  $\mathfrak{m}$  appelé son radical. Tout élément de  $A - \mathfrak{m}$  est alors inversible.

Exemple : l'anneau des séries formelles  $k[[X]]$ . Le radical est formé des séries sans terme constant.

### b. Localisation : définition

Une partie  $S$  de  $A$  est dite *multiplicative* si  $1 \in S$  et si  $\forall a, b \in S, ab \in S$ .

Soient  $A$  un anneau intègre et  $S$  une partie multiplicative. On définit l'anneau  $A_S$  (ou  $S^{-1}A$ ) appelé *localisé* de  $A$  par  $S$  comme le quotient de l'ensemble  $A \times S$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par

$$(a, s)\mathcal{R}(a', s') \Leftrightarrow as' = a's.$$

La classe de  $(a, s)$  est notée  $a/s$  et on définit les lois de composition sur le quotient comme celles du corps  $\mathbf{Q}$  des rationnels. D'ailleurs lorsque  $S = A - \{0\}$ ,  $A_S$  est le corps des fractions  $\text{Fr}(A)$ , comme  $\mathbf{Q} = \text{Fr}(\mathbf{Z})$ . Sinon  $A_S$  est un sous-anneau de ce corps.

Le localisé est muni d'un homomorphisme  $i : A \rightarrow A_S$  injectif donné par  $i(a) = a/1$ . L'image par  $i$  d'un élément de  $S$  est inversible et  $A_S$  est universel pour cette propriété (intuitivement il est le plus petit anneau contenant  $A$  et les inverses des éléments de  $S$ ).

Lorsque  $A$  n'est pas intègre on peut encore faire cette construction, mais la relation d'équivalence doit être modifiée ainsi :  $(a, s)\mathcal{R}(a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \quad t(as' - a's) = 0$ . L'homomorphisme  $i$  n'est plus en général injectif, son noyau est formé des éléments annulés par un élément de  $S$ . Il n'y a plus de corps de fractions dans ce cas. (cf. [L] II.3.)

### c. Exemples

1) Soient  $f \in A$  et  $S = \{f^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ . On note  $A_S = A_f$  et on a  $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$ . Exemple : qui est  $\mathbf{Z}_{10}$  ?

2) Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$  et  $S = A - \mathfrak{p}$ .  $S$  est une partie multiplicative et on pose  $A_S = A_{\mathfrak{p}}$ . C'est un anneau local de radical  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \{a/s \mid a \in \mathfrak{p}\}$ .

Les idéaux premiers de  $A_S$  correspondent bijectivement, via  $i^{-1}$ , aux idéaux premiers de  $A$  qui ne rencontrent pas  $S$ . Dans le cas de  $A_{\mathfrak{p}}$  il s'agit des idéaux premiers de  $A$  contenus dans  $\mathfrak{p}$ .

### 1.7. Eléments entiers

Soient  $f : A \rightarrow B$  une  $A$ -algèbre et  $x \in B$ . On dit que  $x$  est *entier* sur  $A$  s'il vérifie une équation unitaire :

$$x^n + f(a_{n-1})x^{n-1} + \dots + f(a_0) = 0$$

avec les  $a_i \in A$  (si  $f$  est l'inclusion de  $A$  dans  $B$  on omet  $f$ ).

Exemple :  $i$ ,  $\sqrt{2}$  sont entiers sur  $\mathbf{Z}$ , mais pas  $1/2$ , ni  $1/\sqrt{2}$ , ni  $\pi$ .

L'algèbre  $B$  est dite *entière* sur  $A$  si tous ses éléments le sont. Il suffit de le vérifier pour un système de générateurs (comme algèbre) de  $B$  ( $\mathfrak{A}$ ). Dans tous les cas, l'ensemble des éléments de  $B$  entiers sur  $A$  est un sous-anneau de  $B$  ( $\mathfrak{A}$ ) appelé *fermeture intégrale* de  $B$  sur  $A$ . (cf. [L] X, 2.3.4.)

Exemple : la fermeture intégrale de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{Q}(i\sqrt{3})$  est  $\mathbf{Z}[j]$ . ( $\mathfrak{A}$ , cf. [S] 2.5.)

Si  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini,  $B$  est entière sur  $A$  si et seulement si  $B$  est un  $A$ -module de type fini. On dit alors que  $B$  est une  $A$ -algèbre *finie*.

Un anneau intègre est dit *intégralement clos* (ou normal) si la fermeture intégrale de  $A$  dans son corps des fractions est réduite à  $A$ . Sinon, la fermeture intégrale  $A'$  en question s'appelle *clôture intégrale* de  $A$  (ou le normalisé de  $A$ ) et c'est un anneau intégralement clos. Si  $A$  est une algèbre de type fini sur un corps, la clôture intégrale  $A'$  est un  $A$ -module de type fini (cf. [S]).

Exemple : quelle est la clôture intégrale de  $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$  ?

Un anneau factoriel est intégralement clos. La réciproque est inexacte, voir  $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ .

### 1.8. Pour changer : un peu de topologie

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  une famille d'ouverts de  $X$ . On dit que  $\mathcal{U}$  est une *base* d'ouverts de  $X$  si tout ouvert de  $X$  est réunion d'ouverts de la famille  $\mathcal{U}$ .

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *quasi-compact* si de tout recouvrement ouvert de  $X$  on peut extraire un sous-recouvrement fini. (C'est la compacité sans la séparation.)

## 2. Produits tensoriels

### 2.1. Définition : cas des modules

Soient  $A$  un anneau et  $M, N$  deux  $A$ -modules. Le produit tensoriel de  $M$  et  $N$  sur  $A$  est un  $A$ -module, noté  $M \otimes_A N$  (voire  $M \otimes N$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion) et engendré par les symboles  $x \otimes y$  avec  $x \in M$  et  $y \in N$  (cela veut dire qu'un élément de  $M \otimes_A N$  est une combinaison linéaire finie  $\sum_i a_i(x_i \otimes y_i)$  à coefficients dans  $A$ ), avec les règles de calcul suivantes :  $(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$  et la même relation en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ ,  $(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$ , pour  $a \in A$ ,  $x \in M$  et  $y \in N$ .

Il n'est pas nécessaire de savoir comment on construit cet objet. En revanche il faut avoir compris qu'il possède la propriété universelle suivante :

Si on a une application  $A$ -bilinéaire  $f : M \times N \rightarrow P$  entre des  $A$ -modules, il existe une unique application  $A$ -linéaire  $\bar{f} : M \otimes_A N \rightarrow P$  qui vérifie  $\bar{f}(x \otimes y) = f(x, y)$ .

### 2.2. Propriétés

On rappelle qu'un  $A$ -module  $M$  est dit *libre* s'il a une base (exactement comme pour les espaces vectoriels, la différence est que les modules ne sont pas tous libres).

**Proposition 1.** *Si  $M$  et  $N$  sont des  $A$ -modules libres de bases  $(e_i)$  avec  $i \in I$  et  $(f_j)$  avec  $j \in J$ ,  $M \otimes N$  est libre de base  $e_i \otimes f_j$  avec  $(i, j) \in I \times J$ . C'est le cas en particulier si  $A$  est un corps.*

Le produit tensoriel est *fonctoriel*; ceci signifie que si on a un homomorphisme  $f : M \rightarrow M'$ , on en déduit  $f \otimes Id : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N$

par la formule  $(f \otimes Id)(x \otimes y) = f(x) \otimes y$ . (Cela résulte de la propriété universelle.)

Le produit tensoriel est *exact à droite*; si on a une suite exacte :  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ , on en déduit la suite exacte :

$$M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0.$$

**Attention**, la première flèche n'est pas injective en général. C'est vrai en revanche si  $N$  est libre.

### 2.3. Extension des scalaires

Soient  $A$  un anneau et  $f : A \rightarrow B$  une  $A$ -algèbre. Notons tout d'abord que si  $N$  est un  $B$ -module on peut aussi le considérer comme un  $A$ -module en posant, pour  $a \in A$  et  $y \in N$ ,  $ay = f(a)y$ . On note parfois  $N_{[A]}$  le  $A$ -module ainsi obtenu, par *restriction* des scalaires de  $B$  à  $A$ .

Inversement, si  $M$  est un  $A$ -module, le produit tensoriel  $M \otimes_A B$  est muni canoniquement d'une structure de  $B$ -module par la formule :  $b(x \otimes c) = x \otimes bc$ . On dit que  $M \otimes_A B$  est obtenu à partir de  $M$  par *extension* des scalaires de  $A$  à  $B$ .

Le module  $M \otimes_A B$  a la propriété universelle suivante : si  $N$  est un  $B$ -module, tout homomorphisme  $A$ -linéaire  $f : M \rightarrow N_{[A]}$  induit un unique homomorphisme  $B$ -linéaire  $f \otimes_A B : M \otimes_A B \rightarrow N$  défini par  $(f \otimes_A B)(x \otimes b) = bf(x)$ . Autrement dit, on a un isomorphisme :

$$\text{Hom}_A(M, N_{[A]}) \simeq \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N).$$

Cette propriété universelle permet souvent de calculer les modules  $M \otimes_A B$ , ainsi par exemple on montrera les isomorphismes :

$$M \otimes_A A/I \simeq M/IM$$

( $IM$  est le sous-module de  $M$  engendré par les  $ax$  avec  $a \in I$  et  $x \in M$ ),

$$S^{-1}A \otimes_A M \simeq S^{-1}M$$

(où  $S^{-1}M$  est défini de manière analogue à  $S^{-1}A$ ).

## 2.4. Produit tensoriel d'algèbres

Soient  $A$  un anneau et  $B, C$  deux  $A$ -algèbres. Ce sont en particulier des  $A$ -modules et on peut considérer leur produit tensoriel  $B \otimes_A C$  qui est muni d'une structure d'algèbre en posant  $(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ . Ce produit tensoriel a la propriété universelle suivante : si on a deux homomorphismes de  $A$ -algèbres  $u : B \rightarrow D$  et  $v : C \rightarrow D$ , il existe un unique homomorphisme  $u \otimes v : B \otimes C \rightarrow D$  donné par  $(u \otimes v)(b \otimes c) = u(b)v(c)$ .

Comme précédemment, c'est avec cette propriété universelle qu'on calcule la plupart des produits tensoriels d'algèbres. Par exemple on montrera ainsi les isomorphismes :

$$A[X_1, \dots, X_n] \otimes_A A[Y_1, \dots, Y_m] \simeq A[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m],$$

$$B \otimes_A A/I \simeq B/IB,$$

(Applications : calculer  $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  et  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ ),

$$S^{-1}A \otimes_A B \simeq S^{-1}B.$$

## 2.5. Exercice : le lemme de Nakayama

a) Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $x_1, \dots, x_n$  des éléments de  $M$ . On suppose que les  $x_i$  sont solutions du système linéaire :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n u_{ij} x_i = 0$$

où les  $u_{ij}$  sont dans  $A$ . Alors, si  $U$  est la matrice des  $u_{ij}$ , on a  $\det(U)x_i = 0$  pour tout  $i$ . (Attention, même si  $\det(U)$  n'est pas nul ceci ne prouve pas a priori que les  $x_i$  sont nuls : un module peut avoir de la torsion, i.e. on peut avoir  $ax = 0$  avec  $a \neq 0$  dans  $A$  et  $x \neq 0$  dans  $M$ ; penser au  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .)

b) Soient  $A$  un anneau local d'idéal maximal  $m$  et  $k = A/m$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. On suppose qu'on a  $M \otimes_A k (= M/mM) = 0$ . Montrer que l'on a  $M = 0$  (lemme de Nakayama). (Prendre des générateurs  $x_1, \dots, x_n$  de  $M$  et écrire qu'ils sont dans  $mM$ , puis utiliser a.)

c) Soient  $A$  un anneau,  $m$  un idéal maximal de  $A$  et  $M$  un  $A$ -module de type fini. On suppose  $M/mM = 0$ . Montrer que  $M_m = M \otimes_A A_m = 0$ , puis qu'il existe  $f \in A$ ,  $f \notin m$  tel que  $M_f = M \otimes_A A_f = 0$ .

Application : si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $M$  dont les images engendrent  $M/mM$  sur  $k = A/m$ , il existe  $f, f \notin m$ , tels que les  $x_i$  engendrent  $M_f$  comme  $A_f$ -module.

### 3. Bases de transcendance

#### 3.1. Définitions

Les notions suivantes sont analogues aux notions d'indépendance linéaire et de base sur les espaces vectoriels.

Soit  $K \subset L$  une extension de corps. Une partie  $B$  de  $L$  est dite *algébriquement libre* sur  $K$  (on dit aussi que ses éléments sont algébriquement indépendants) si pour toute partie finie  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $B$  et tout polynôme  $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ , l'égalité  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  implique  $P = 0$ . (Sinon on dit que  $B$  est algébriquement liée.) Par exemple si  $B = \{x\}$ ,  $B$  est libre si et seulement si  $x$  est transcendant sur  $K$ .

Soit  $K \subset L$  une extension de corps. Une partie  $B$  de  $L$  est dite *algébriquement génératrice* sur  $K$  si  $L$  est algébrique sur le sous-corps  $K(B)$  engendré par  $B$ . (On notera ici la différence avec le cas vectoriel : du point de vue qui nous occupe, les éléments algébriques ne comptent pas.)

Soit  $K \subset L$  une extension de corps. Une partie  $B$  de  $L$  est dite une *base de transcendance* de  $L$  sur  $K$  si elle est à la fois algébriquement libre et algébriquement génératrice.

#### 3.2. Quelques résultats

##### a. Existence

Soit  $K \subset L$  une extension de corps. Il existe des bases de transcendance  $B$  de  $L$  sur  $K$ . Ces bases ont toutes même cardinal appelé *degré de transcendance* de  $L$  sur  $K$ . On le note  $\partial_K(L)$ .

La démonstration d'existence est identique à celle du cas vectoriel : on utilise le théorème de Zorn pour construire une partie libre maximale.

##### b. Exemples

1) Si  $L$  est algébrique sur  $K$  on a  $B = \emptyset$  et  $\partial_K(L) = 0$ .

2) Si  $L = K(X_1, \dots, X_n)$ , corps des fractions rationnelles en les variables  $X_1, \dots, X_n$ , on peut prendre  $B = \{X_1, \dots, X_n\}$  et on a  $\partial_K(L) = n$ .

Lorsque  $n$  est égal à 1 n'importe quel élément de  $L - K$  est une base de transcendance.

3) Si  $A = K[X, Y]/(F)$  avec  $F$  non constant en  $Y$  et si  $L = \text{Fr}(A)$ , on voit aisément que si  $x$  est l'image de  $X$  dans  $A$ ,  $\{x\}$  est une base de transcendance de  $L$  sur  $K$ .

### c. Autres résultats

On a un certain nombre de résultats analogues au cas linéaire.

**Théorème de la base incomplète.** Si  $x_1, \dots, x_n$  est une partie libre de  $L$  sur  $K$  on peut la compléter en une base de transcendance. On a donc  $n \leq \partial_K(L)$ .

Inversement si  $x_1, \dots, x_n$  est génératrice (au sens ci-dessus :  $L$  est algébrique sur  $K(x_1, \dots, x_n)$ , a fortiori si  $L$  est égal à  $K(x_1, \dots, x_n)$ ) on peut en extraire une base de transcendance. On a donc  $n \geq \partial_K(L)$ .

Bien entendu, dans les deux cas, l'égalité ne peut intervenir que si les parties sont à la fois libres et génératrices.

Si on a trois corps  $K \subset L \subset M$ , on a  $\partial_K(M) = \partial_K(L) + \partial_L(M)$  (prendre la réunion des bases de transcendance).

## 4. Quelques exercices d'algèbre

### 4.1. Exercices sur les idéaux premiers

a) Soit  $A$  un anneau et soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . On suppose que  $\mathfrak{p}$  contient le produit  $I_1 \cdots I_n$  de  $n$  idéaux. Montrer que  $\mathfrak{p}$  contient l'un des  $I_k$ .

b) (Lemme d'évitement des idéaux premiers.)

Soient  $A$  un anneau,  $I$  un idéal. On suppose que  $I$  est contenu dans la réunion  $\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$  de  $n$  idéaux premiers de  $A$ . Montrer que  $I$  est contenu dans l'un des  $\mathfrak{p}_k$ . (Raisonnement par l'absurde en supposant  $n$  minimal et considérer un élément bien choisi de la forme  $a_1 + a_2 \cdots a_n$ .)

### 4.2. Nilradical et idéaux premiers

Soient  $A$  un anneau et  $N$  son nilradical (cf. 2.d).

a) Montrer que  $N$  est un idéal et qu'il est contenu dans l'intersection  $I$  de tous les idéaux premiers de  $A$ .

b) On va montrer, réciproquement, que  $I \subset N$ . On considère un élément  $s \notin N$  et l'ensemble  $S = \{1, s, s^2, \dots, s^n, \dots\}$ . On notera que  $0 \notin S$ .

Montrer, en utilisant le théorème de Zorn (ou l'anneau  $S^{-1}A$ ), qu'il existe un idéal  $\mathfrak{p}$  maximal parmi les idéaux de  $A$  qui ne rencontrent pas  $S$ .

Montrer que  $\mathfrak{p}$  est premier (si  $ab \in \mathfrak{p}$  on pourra considérer les idéaux  $\mathfrak{p} + (a)$  et  $\mathfrak{p} + (b)$ ).

Conclure.

### 4.3. Idéaux premiers minimaux d'un anneau noethérien

Soit  $A$  un anneau noethérien.

a) Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Montrer qu'il existe des idéaux premiers  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  en nombre fini tels que le produit  $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$  soit inclus dans  $I$ . (Raisonnez par l'absurde en supposant qu'il existe un  $I$  qui ne vérifie pas la propriété et prendre un tel  $I$  maximal.)

b) Montrer que  $A$  n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. (Utiliser a) avec  $I = (0)$  et Exercice 1.a.)

### 4.4. Un anneau non noethérien

Soit  $A = \mathcal{H}(\mathbb{C})$  l'anneau des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe.

a) Montrer que  $A$  est intègre. Quel est son corps de fractions? Déterminer  $A^*$ .

b) Montrer que  $A$  n'est pas noethérien (considérer, pour  $k \in \mathbb{N}$ , les idéaux :

$$I_k = \{f \in A \mid \forall z \in \mathbb{N} - \{0, 1, \dots, k\} \quad f(z) = 0\}$$

et penser à la fonction  $\sin z$ ).

c) Montrer que  $f \in A$  est irréductible si et seulement si  $f$  a un seul zéro  $z$  dans  $\mathbb{C}$  et si ce zéro est simple (i.e.  $f'(z) \neq 0$ ).

d) En déduire que  $A$  n'est pas factoriel. Montrer cependant que  $A$  est intégralement clos.

(On peut montrer que  $A$  vérifie le théorème de Bézout : tout idéal de type fini de  $A$  est principal, cf. [R] Ch. 15.)

# Appendice

## Les schémas

Le but de ces quelques lignes est de présenter une première approche, partielle et partielle, des schémas. Attention, la notion développée ici n'est pas encore exactement celle de Grothendieck pour laquelle on renvoie à [H] chapitre II. Cependant dans le cas qui nous intéresse (les schémas de type fini sur un corps  $k$  algébriquement clos) elle lui est essentiellement équivalente (cf. [EGA] IV, 10.9). La définition générale prend tout son sens notamment en arithmétique, mais ceci est une autre histoire.

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 0. Introduction

On a déjà rencontré à propos du théorème de Bézout des schémas finis (i.e. de dimension 0). On va maintenant définir des schémas de toutes dimensions. Comme dans le cas des schémas finis, la différence essentielle entre une variété et un schéma est la présence d'éléments nilpotents dans les anneaux. L'intérêt des schémas est qu'ils permettent de tenir compte des multiplicités : ainsi la droite d'équation  $X = 0$  (resp.  $X^2 = 0$ ) dans le plan est une droite simple (resp. double), et la différence, dans le cadre des schémas, va se voir sur les anneaux qui vont être respectivement  $k[X, Y]/(X)$  (resp.  $k[X, Y]/(X^2)$ ). Dans le second anneau l'image  $x$  de  $X$  n'est pas nulle, mais son carré l'est. Une manière de comprendre cet élément nilpotent  $x$  est de penser à un infiniment petit, comme on l'a vu dans la définition de l'espace tangent.

## 1. Schémas affines

### a. Définition

Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini. On peut écrire  $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$  où  $I$  est un idéal. On considère l'ensemble algébrique  $X = V(I) \subset k^n$  et on munit  $X$  de la topologie de Zariski. On dispose de la base d'ouverts  $D(f)$  usuelle pour  $f \in A$ . On définit alors un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  en posant  $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f$ . En particulier on a  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ .

Attention, ce faisceau  $\mathcal{O}_X$  n'est pas tout à fait celui qui nous a servi à définir la structure usuelle de variété sur  $X$ . La différence est qu'on utilise l'idéal  $I$  et pas l'idéal rac( $I$ ). Si  $I$  n'est pas égal à sa racine l'anneau  $A$  n'est pas réduit, c'est-à-dire contient des nilpotents.

Le schéma affine d'anneau  $A$  est alors par définition l'espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$ . On le note  $\text{Spm}(A)$  (voire  $\text{Spec}(A)$  si on est sûr que Grothendieck ne nous écoute pas).

### b. Exemples

On obtient ainsi par exemple  $\text{Spm}(k[X, Y]/(F))$ , qui décrit la courbe plane d'équation  $F = 0$  sans oublier les multiplicités éventuelles des facteurs de  $F$ , ou encore, si  $F$  et  $G$  n'ont pas de facteurs communs,  $\text{Spm}(k[X, Y]/(F, G))$  qui est le schéma intersection de  $F$  et  $G$ , avec multiplicités (cf. Bézout).

## 2. Schémas

### a. Définition

Un schéma est un espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  localement isomorphe à un schéma affine. On supposera de plus que  $X$  est quasi-compact.

Un schéma est dit réduit si pour tout ouvert  $U$  de  $X$  l'anneau  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  est réduit (i.e. ne contient pas d'élément nilpotent non nul). *Un schéma réduit n'est rien d'autre qu'une variété.* Si  $X$  est un schéma on lui associe de manière canonique un schéma réduit noté  $X_{\text{red}}$  qui a même espace topologique sous-jacent et dont les anneaux  $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U)$  sont les réduits des  $\mathcal{O}_X(U)$ .

## b. Exemples

1) *Schémas projectifs.* Soit  $I$  un idéal homogène de  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  et soit  $S = R/I$  l'anneau quotient. Soit  $X = V(I)$  l'ensemble algébrique projectif défini par  $I$ , que l'on munit de la topologie de Zariski. En particulier on a la base d'ouverts  $D^+(f)$  usuelle, pour  $f \in S$ ,  $f$  homogène. On définit un faisceau d'anneaux sur  $X$  en posant  $\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_X) = S_{(f)}$ . On vérifie alors, comme dans le cas des variétés, qu'on a  $(D^+(f), \mathcal{O}_X|_{D^+(f)}) \simeq \text{Spec } S_{(f)}$  de sorte que  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un schéma noté (abusivement, cf. Grothendieck)  $\text{Proj}(S)$  et appelé schéma projectif associé à  $S$ . Le cas  $I = (0)$  redonne  $\mathbf{P}^n$ , les autres cas donnent les sous-schémas fermés de  $\mathbf{P}^n$ . Là encore la différence avec les variétés projectives est la présence éventuelle de nilpotents.

2) *Schémas finis.* Avec les notations précédentes, supposons de plus que  $X$  soit fini. Alors, il existe un hyperplan  $H$  qui ne rencontre pas  $X$  et on peut supposer que  $H = V(X_0)$ . On a alors  $X = \text{Proj}(S) \simeq \text{Spec } S_{(X_0)}$ , de sorte que le schéma fini  $X$  est à la fois affine et projectif. Réciproquement on peut montrer que les schémas finis sont les seuls qui sont à la fois affines et projectifs. L'anneau  $R = S_{(X_0)}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie qui est produit direct des anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,P}$  pour  $P \in X$ . Ces anneaux locaux sont eux aussi de dimension finie et leur idéal maximal est nilpotent (cf. par exemple les anneaux du type  $k[\eta]$  avec  $\eta^n = 0$ ). Dans le cas réduit, ils sont simplement égaux à  $k$  et on parle alors de point simple.

## 3. Ce que cela change de travailler avec des schémas

Tout d'abord si on a affaire à des schémas réduits, ça ne change rien : ce sont des variétés. Ensuite, la plupart des notions vues pour les variétés s'étendent immédiatement aux schémas : irréductibilité, composantes, dimension, produits, séparation, morphismes, sous-schémas, cohomologie... C'est clair pour les notions topologiques comme les composantes ou la dimension car les propriétés du schéma  $X$  sont les mêmes que celles de la variété  $X_{\text{red}}$ .

L'espace tangent à un schéma se calcule comme celui d'une variété : on considère, disons dans le cas affine, les déformations (infinitésimales) de l'algèbre  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  au point considéré. Bien entendu cet anneau n'est pas réduit a priori. En particulier on a la description suivante :

Soit  $I$  un idéal de  $k[X_1, \dots, X_n]$  (pas nécessairement égal à sa racine), soient  $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$ ,  $X = \text{Spm}(A)$  et  $x$  un point de  $X$ . On suppose que  $I = (F_1, \dots, F_r)$ . Soit  $d_x(F_1, \dots, F_r) : k^n \rightarrow k^r$  la matrice jacobienne des  $F_i$  au point  $x$ . Alors on a  $T_x(X) = \text{Ker } d_x(F_1, \dots, F_r)$ .

Signalons qu'on a le critère de lissité suivant analogue à celui vu pour les variétés :

**Théorème 1.** *Soit  $I$  un idéal de l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]$  et soit  $X = \text{Spm}(k[X_1, \dots, X_n]/I)$ . Supposons  $X$  irréductible et de dimension  $n$ . Soient  $x$  un point de  $X$  et  $T_x(X)$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$ . On suppose que  $\dim T_x(X) = n$ . Alors  $X$  est une variété,  $X$  est lisse en  $x$  et on a  $I(X) = I$ .*

Il est facile de raffiner ce critère au cas où  $X$  n'est pas irréductible. De plus, le même résultat vaut pour  $X = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_n]/I)$ , avec  $I$  homogène. Notons enfin que si  $X$  est un schéma fini il est lisse dès qu'il est réduit, i.e. une variété, en effet cela signifie que l'espace tangent en chaque point est nul, donc que  $m_x = 0$  pour tout  $x \in X$  par Nakayama.

## 4. Ce que cela apporte de travailler avec des schémas

Il y a plusieurs types de questions dans lesquelles les schémas sont indispensables :

### a. Les intersections

On l'a vu abondamment avec Bézout. Plus généralement si on a, par exemple, deux sous-schémas  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{P}^n$ , définis par des idéaux  $I$  et  $J$  homogènes, le schéma intersection est le sous-schéma défini par l'idéal  $I + J$ . Même si  $X$  et  $Y$  sont des variétés, la structure de schéma sur l'intersection est fondamentale, c'est elle qui explique les multiplicités d'intersection, donc les phénomènes de contact.

### b. Les fibres

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas (ou de variétés). On a vu un certain nombre de résultats concernant la fibre  $\varphi^{-1}(y)$  en un point de  $Y$ , considérée comme variété. Pour tous les théorèmes sur les dimensions il n'y a rien à changer. En revanche pour certains résultats plus fins il

est utile de définir une structure de schéma sur la fibre. Cela se fait de la manière suivante : supposons  $Y$  affine d'anneau  $A$  (c'est toujours possible) et  $X$  affine d'anneau  $B$ . On a donc  $\varphi^* : A \rightarrow B$  et  $y$  correspond à un idéal maximal  $m$  de  $A$ . On a vu que l'on a, ensemblistement,  $\varphi^{-1}(y) = V(mB)$ . On définit alors le schéma  $\varphi^{-1}(y)$  comme  $\text{Spm}(B/mB)$ . (La variété  $\varphi^{-1}(y)$  correspond, elle, à la racine de l'idéal  $mB$ .)

Si  $X$  n'est pas affine on recolle les fibres obtenues dans les ouverts affines de  $X$  (cf. Exercice VII, 2.1).

Avec cette définition de la fibre on a, si  $x \in X$  et si  $y = \varphi(x)$ ,  $T_x(\varphi^{-1}(y)) = \text{Ker } T_x(\varphi)$  (comparer au problème VI, 1.2).

Pour comprendre l'intérêt de la chose, regardons un exemple. On considère le morphisme  $\varphi : V \rightarrow W$  avec  $V = V(Y^3 + XY + X) \subset k^2$ ,  $W = k$  et  $\varphi(x, y) = x$ . Sur les anneaux on a  $\varphi^* : k[X] \rightarrow k[X, Y]/(Y^3 + XY + X)$  donné par  $\varphi^*(X) = X$ . Soit  $x \in k$ . Il correspond à l'idéal maximal  $(X - x)$  de  $k[X]$  et donc la fibre en  $x$  (vue comme schéma) a pour anneau  $k[Y]/(Y^3 + xY + x)$ . Ensemblistement cette fibre a trois points distincts si  $x \neq 0, -27/4$  (et dans ce cas son anneau est isomorphe à  $k \times k \times k$ ), deux points si  $x = -27/4$  (mais avec comme anneau  $k \times k[Y]/(Y^2)$  donc un point double et un point simple) et un point si  $x = 0$  (mais avec comme anneau  $k[Y]/(Y^3)$  donc un point triple). Dans tous les cas la dimension de l'anneau de la fibre comme  $k$ -espace vectoriel est toujours égale à 3 (ce qui ne se voit pas sur la structure de variété) : on dit que  $\varphi$  est un revêtement de  $Y$  de degré 3 ramifié aux points 0 et  $-27/4$  (cf. [H] IV, 2).

### c. Le calcul différentiel

On a déjà vu comment utiliser le schéma  $\text{Spec } k[\epsilon]$  avec  $\epsilon^2 = 0$  pour calculer les espaces tangents. On peut généraliser cela au calcul différentiel à un ordre plus grand en copiant les techniques de géométrie différentielle (jets,...) grâce aux nilpotents d'ordre  $> 2$ .

## 5. Un Bertini schématique

On utilise les notations du problème VI. En utilisant les remarques ci-dessus sur les espaces tangents on obtient facilement le théorème :

**Théorème 2.** Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant entre variétés irréductibles. On suppose  $X$  lisse. Il existe un ouvert non vide  $V$  de  $Y$  tel que  $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  soit lisse. En particulier les fibres  $\varphi^{-1}(y)$  (a

*priori munies de leur structure de schéma) sont des variétés lisses pour  $y \in V$ .*

Dans le cas où les dimensions de  $X$  et  $Y$  sont égales, les fibres sont en général finies et formées de points simples, voir l'exemple de 4.b.

On a aussi la variante suivante de Bertini qui se démontre comme dans le problème VI :

**Théorème 3.** *Soit  $X \subset \mathbf{P}^n$  une variété projective irréductible et lisse. Si  $H$  est un hyperplan général de  $\mathbf{P}^n$ , le schéma  $X \cap H$  est une variété (projective) lisse.*

Dans le cas où  $X$  est une courbe, cela montre que  $X \cap H$  est, en général, fini et formé de  $d$  points simples distincts ( $d$  est le degré de la courbe  $X$ ). Dans le plan, par exemple, cela signifie qu'on peut toujours trouver des droites qui ne sont pas tangentes à une courbe donnée. La notion de schéma est ici indispensable pour comprendre les phénomènes puisqu'en tant que variété  $X \cap H$  est finie donc lisse dans tous les cas, de sorte que le Bertini énoncé dans le problème VI ne donne rien.

# Recueil de problèmes

## Problème I

Le but du problème est d'étudier les produits de variétés algébriques. On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 1. Produit d'ensembles algébriques affines

a) Soient  $V \subset k^n$ ,  $W \subset k^m$  deux ensembles algébriques affines. Montrer que  $V \times W$  est un ensemble algébrique affine de  $k^{n+m}$ . Montrer que les projections  $p$  et  $q$  de  $V \times W$  sur  $V$  et  $W$  sont des applications régulières et préciser les flèches associées sur les anneaux.

On note  $x$  (resp.  $y$ ) les points de  $k^n$  (resp.  $k^m$ ) et  $k[X]$  (resp.  $k[Y]$ ) les anneaux de polynômes  $k[X_1, \dots, X_n]$  (resp.  $k[Y_1, \dots, Y_m]$ ).

b) Montrer que la formule  $\varphi(\sum_i f_i \otimes g_i)(x, y) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$  définit un homomorphisme de  $k$ -algèbres  $\varphi : \Gamma(V) \otimes_k \Gamma(W) \rightarrow \Gamma(V \times W)$  (cf. Mémento 2). Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme (pour prouver l'injectivité de  $\varphi$  on pourra considérer des bases des  $k$ -espaces vectoriels  $\Gamma(V)$  et  $\Gamma(W)$ ).

En déduire que l'idéal  $I(V \times W)$  est engendré par les polynômes  $f(X)$  et  $g(Y)$  avec  $f \in I(V)$  et  $g \in I(W)$ . (On se ramènera à calculer le noyau de la flèche naturelle de  $k[X] \otimes_k k[Y]$  dans  $\Gamma(V) \otimes_k \Gamma(W)$ .)

c) Montrer que les projections  $p$  et  $q$  sont ouvertes pour les topologies de Zariski (i.e. que l'image d'un ouvert est un ouvert). (Pour le cas de  $p$  on pourra considérer les ouverts  $D(f)$  du produit en écrivant  $f = \varphi(\sum_i f_i \otimes g_i)$  avec les  $g_i$  éléments d'une base de  $\Gamma(W)$  sur  $k$ . Attention : la topologie de Zariski sur le produit n'est pas le produit des topologies

de Zariski.)

d) Montrer que si  $V$  et  $W$  sont irréductibles il en est de même de  $V \times W$  (utiliser c)).

e) Dédurre de d) le résultat purement algébrique suivant : si  $A$  et  $B$  sont deux  $k$ -algèbres intègres, l'algèbre  $A \otimes_k B$  est intègre. Montrer que le résultat ne subsiste pas si  $k$  n'est pas algébriquement clos (cf. Mémento 2.3).

## 2. Produits de variétés

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie (i.e. pour simplifier, des objets et des flèches). Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets de  $\mathcal{C}$  un produit de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{C}$  consiste en la donnée d'un objet  $Z$  de  $\mathcal{C}$  et de deux flèches de  $\mathcal{C}$ ,  $p : Z \rightarrow X$  et  $q : Z \rightarrow Y$  (appelées projections) vérifiant la propriété (dite universelle) suivante : pour tout objet  $T$  de  $\mathcal{C}$  muni de flèches  $p' : T \rightarrow X$  et  $q' : T \rightarrow Y$ , il existe une unique flèche  $f$  de  $T$  dans  $Z$  telle que  $p' = pf$  et  $q' = qf$ .

a) Montrer que s'il existe dans  $\mathcal{C}$  un produit de  $X$  et  $Y$  il est unique, à un unique isomorphisme près. On notera  $X \times Y$  ce produit.

b) Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont des ensembles algébriques affines (donc des variétés algébriques affines) la variété algébrique affine  $X \times Y$  est bien un produit dans la catégorie des variétés algébriques.

c) Montrer qu'il existe des produits dans la catégorie des variétés algébriques : si  $X$  et  $Y$  sont des variétés algébriques leur produit est défini comme suit :

i) l'ensemble sous-jacent est l'ensemble produit  $X \times Y$  ;

ii) une base d'ouverts de  $X \times Y$  est obtenue en prenant des ouverts affines  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$ , puis les ouverts affines du produit  $U \times V$  (attention, là encore cette topologie est plus fine que la topologie produit) ;

iii) le faisceau d'anneaux est défini sur cette base d'ouverts de la seule façon raisonnable.

d) Généraliser les points c) et d) de 1 aux produits de variétés quelconques.

## 3. Produits de variétés projectives

a) Montrer qu'on définit un morphisme (dit morphisme de Segre)  $\varphi : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \rightarrow \mathbf{P}^{r+s+r+s}$  en posant

$$\varphi((x_0, \dots, x_r), (y_0, \dots, y_s)) = (x_0 y_0, \dots, x_i y_j, \dots, x_r y_s)$$

( $i$  et  $j$  variant respectivement de 0 à  $r$  et de 0 à  $s$ ).

b) Montrer que l'image de  $\varphi$  est la sous-variété fermée  $V(I)$  de  $\mathbf{P}^{rs+r+s}$  où  $I$  désigne le noyau de l'homomorphisme de  $k[Z_{i,j}]$  ( $i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, s$ ) dans  $k[X_i, Y_j]$  (avec les mêmes indices) qui à  $Z_{i,j}$  associe  $X_i Y_j$ .

c) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s$  sur  $V(I)$ . (On montrera d'abord que  $\varphi$  est injectif, puis on travaillera sur les ouverts affines  $Z_{i,j} \neq 0, X_i \neq 0, Y_j \neq 0$ .)

d) En déduire que le produit de deux variétés projectives est une variété projective.

e) Expliciter les équations du plongement de Segre de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  dans  $\mathbf{P}^3$ .

#### 4. Variétés séparées

Soit  $X$  une variété algébrique.

On dit que  $X$  est séparée si la diagonale  $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$  est fermée dans  $X \times X$ . (Attention, cela n'implique pas la séparation au sens usuel, toujours pour la même raison : la topologie sur le produit n'est pas la topologie produit.)

a) Montrer qu'une variété algébrique affine est séparée.

b) Soit  $X$  une variété algébrique. On suppose que pour tous  $x, y \in X$  il existe un ouvert affine  $U$  contenant  $x$  et  $y$ . Montrer que  $X$  est séparée.

c) Montrer qu'une variété projective est séparée.

d) Soit  $X$  une variété algébrique séparée. Montrer que l'intersection de deux ouverts affines de  $X$  est un ouvert affine.

e) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme avec  $Y$  séparée. Montrer que le graphe de  $f$ ,  $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ , est fermé dans  $X \times Y$ .

## Problème II

Le but du problème est d'étudier les variétés algébriques complètes (ou propres) et de voir en particulier que les variétés projectives sont complètes. On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

### 1. Variétés complètes : généralités

Une variété algébrique  $X$  est dite *complète* si pour toute variété  $Y$  la deuxième projection  $p : X \times Y \rightarrow Y$  est fermée, i.e. transforme un fermé

en un fermé (cf. Problème I pour la définition des produits).

a) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. On suppose  $X$  complète et  $Y$  séparée. Montrer que l'image  $f(X)$  est fermée et que c'est une variété complète (cf. Problème I, 4.e).

b) On suppose  $X$  et  $Y$  complètes. Montrer que  $X \times Y$  est complète.

c) On suppose  $X$  complète. Soit  $Y$  une sous-variété fermée de  $X$ . Montrer que  $Y$  est complète.

d) Soit  $n \geq 1$ . Montrer que l'espace affine  $\mathbf{A}^n(k)$  n'est pas une variété complète (utiliser a.). On peut montrer plus généralement, en utilisant la dimension, qu'une variété affine et complète est finie.

## 2. Complétude de $\mathbf{P}^n$

On va montrer dans ce paragraphe que  $\mathbf{P}^n$  est une variété complète. Soient  $Y$  une variété,  $p$  la projection  $p : \mathbf{P}^n \times Y \rightarrow Y$  et  $Z$  un fermé de  $\mathbf{P}^n \times Y$ . Il s'agit de voir que  $p(Z)$  est fermé dans  $Y$ .

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $Y$  est affine d'anneau  $R$ .

b) Soit  $U_i = D^+(X_i) \times Y$ . Montrer que les  $U_i$  forment un recouvrement ouvert affine de  $\mathbf{P}^n \times Y$  et que  $\Gamma(U_i) = R[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]$  (cet anneau sera noté  $A_i$ ).

c) Soit  $J$  l'idéal homogène engendré dans  $S = R[X_0, \dots, X_n]$  par les polynômes homogènes  $F$  tels que, pour tout  $i$ , on ait

$$F(X_0/X_i, \dots, X_n/X_i) \in I(Z \cap U_i).$$

Soit  $S_r$  (resp.  $J_r$ ) la partie homogène de degré  $r$  de  $S$  (resp.  $J$ ). Montrer que pour tout  $i$  et tout  $f \in I(Z \cap U_i)$  il existe des entiers  $k, r$  tels que l'on ait  $F = X_i^k f \in J_r$ .

d) Soit  $y \in Y - p(Z)$ ,  $y$  correspond à l'idéal maximal  $m$  de  $R$ . Déterminer le fermé  $V(mA_i)$  de  $U_i$ . Montrer l'égalité  $A_i = mA_i + I(Z \cap U_i)$  (utiliser le Nullstellensatz).

e) Montrer qu'il existe un entier  $t$  tel que, pour tout  $i$ , on ait  $X_i^t \in J_t + mS_t$ , puis qu'il existe un entier  $r$  tel que  $S_r = J_r + mS_r$ .

f) En déduire qu'il existe  $f \in R$ ,  $f \notin m$  tel que  $fS_r \subset J_r$  (utiliser le lemme de Nakayama, cf. Mémento 2.4.c, appliqué à l'anneau  $R$  et au module  $S_r/J_r$ ).

g) Montrer que l'élément  $f$  est dans  $I(Z \cap U_i)$  pour tout  $i$  et conclure.

### 3. Applications

a) Montrer que toute variété projective est complète.

b) Soit  $V$  une variété projective irréductible. Montrer que  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = k$  ou encore que tout morphisme  $f : V \rightarrow k$  est constant (utiliser 3.a, 1.a et 1.d).

## Problème III

### 0. Notations

Si  $A$  est un anneau intègre on note  $\text{Fr}(A)$  son corps de fractions.

Si  $K$  est un corps, extension du corps  $k$ , on note  $\partial_k(K)$  le degré de transcendance de  $K$  sur  $k$ . On renvoie au Mémento 3 pour tout ce qui concerne indépendance algébrique, degré de transcendance, etc.

Si  $A$  est un anneau on désigne par  $\text{Spec } A$  l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  et par  $\dim_K(A)$  sa dimension de Krull.

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments d'une  $k$ -algèbre  $A$ , on désigne par  $k[x_1, \dots, x_n]$  la sous-algèbre de  $A$  engendrée par les  $x_i$ , mais on réserve la notation  $k[X_1, \dots, X_n]$  avec des lettres majuscules à l'anneau de polynômes en les indéterminées  $X_i$ .

### 1. Le lemme de normalisation de Noether

Le but de cette partie est de prouver le résultat suivant :

**Théorème 1.** Soient  $k$  un corps,  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini, intègre,  $K = \text{Fr}(A)$ ,  $n = \partial_k(K)$ . Il existe des éléments  $x_1, \dots, x_n \in A$ , algébriquement indépendants sur  $k$ , tels que  $A$  soit entier sur  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

a) Écrire  $A$  comme un quotient  $k[Y_1, \dots, Y_m]/I$ ; montrer que l'on a  $m \geq n$ ; traiter le cas  $m = n$ .

b) On suppose  $m > n$ . Soient  $y_1, \dots, y_m$  les images des  $Y_i$  dans  $A$ . Montrer qu'elles vérifient une relation algébrique  $F(y_1, \dots, y_m) = 0$  où  $F$  est un polynôme non nul à coefficients dans  $k$ .

c) On choisit des entiers  $> 0$ ,  $r_2, \dots, r_m$  et on pose

$$z_2 = y_2 - y_1^{r_2}, \dots, z_m = y_m - y_1^{r_m}.$$

Montrer que  $y_1, z_2, \dots, z_m$  vérifient aussi une relation algébrique non triviale à coefficients dans  $k$ .

¶ Montrer que si l'on choisit les  $r_i$  assez grands et croissant assez vite :  $0 \ll r_2 \ll \dots \ll r_m$ , l'élément  $y_1$  est entier sur le sous-anneau de  $A$  engendré par les  $z_i$ .

d) Conclure en raisonnant par récurrence sur  $m$ .

## 2. Le going-up de Cohen-Seidenberg

Il s'agit du théorème suivant :

**Théorème 2.** Soient  $A, B$  deux anneaux avec  $A \subset B$  et  $B$  entier sur  $A$ . On a les propriétés suivantes :

1) L'application  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A$  de  $\text{Spec } B$  dans  $\text{Spec } A$  est surjective. On a, de plus :

Pour tous  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec } A$  avec  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$  et pour tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$  tel que  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ , il existe  $\mathfrak{q}' \in \text{Spec } B$  avec  $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}'$  et  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ .

2) L'application  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A$  est "presque" injective : si on a  $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \text{Spec } B$  avec  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$  et si  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ , alors  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ .

3) On a  $\dim_K(A) = \dim_K(B)$ .

a) Avec les notations et les hypothèses du théorème 2, on suppose de plus  $B$  intègre. Montrer que l'on a l'équivalence :  $A$  est un corps  $\iff B$  est un corps.

b) Soit  $J$  un idéal de  $B$  et soit  $I = J \cap A$ . Montrer que  $A/I$  est un sous-anneau de  $B/J$  et que  $B/J$  est entier sur  $A/I$ .

c) En plus des hypothèses du théorème 2 on suppose  $A$  local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . Montrer que les idéaux premiers de  $B$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  (i.e. les  $\mathfrak{q}$  tels que  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{m}$ ) sont exactement les idéaux maximaux de  $B$  (utiliser b)).

d) Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$  et soit  $S = A - \mathfrak{p}$ . On note  $A_{\mathfrak{p}}$  et  $B_{\mathfrak{p}}$  les localisés  $S^{-1}A$  et  $S^{-1}B$ . Montrer que  $A_{\mathfrak{p}}$  est local, contenu dans  $B_{\mathfrak{p}}$  et que  $B_{\mathfrak{p}}$  est entier sur  $A_{\mathfrak{p}}$ .

e) En utilisant d) et c) prouver les assertions 1) et 2) du théorème.

f) Conclure sur les dimensions.

## 3. Dimension des $k$ -algèbres de type fini

On va prouver le théorème fondamental concernant cette dimension :

**Théorème 3.** Soient  $k$  un corps et  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini, intègre,  $K = \text{Fr}(A)$ . On a  $\dim_K(A) = \partial_k(K)$ .

a) Montrer que l'on a :

$$\partial_k \text{Fr}(k[X_1, \dots, X_n]) = n \text{ et } \dim_K(k[X_1, \dots, X_n]) \geq n.$$

b) Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $k[X_1, \dots, X_n]$ . Montrer que l'on a  $\partial_k \text{Fr}(k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p}) \leq n - 1$ .

c) Montrer le théorème 3 lorsque  $\partial_k(K) = 0$ .

d) Montrer le théorème 3 par récurrence sur  $\partial_k(K)$ . (Utiliser le lemme de normalisation et le going-up pour se ramener au cas  $A = k[X_1, \dots, X_n]$ , puis prendre une chaîne d'idéaux premiers  $(0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_r$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$  et utiliser b) et l'hypothèse de récurrence.)

#### 4. Application au Nullstellensatz

Soit  $K$  une  $k$ -algèbre de type fini. On suppose que  $K$  est un corps. Montrer que  $K$  est algébrique sur  $k$  (utiliser les théorèmes 1 et 2.a). En déduire une démonstration du Nullstellensatz faible (cf. Ch. I, 4.1) dans le cas général.

### Problème IV

#### 1. Anneaux de valuation discrète

1) Soient  $A$  un anneau intègre et  $K$  son corps de fractions. On suppose  $A \neq K$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i)  $A$  est local et principal.

ii)  $A$  est local, noethérien et son unique idéal maximal  $\mathfrak{m}$  est principal.

iii) Il existe  $\pi \in A$ ,  $\pi \neq 0$ ,  $\pi$  irréductible tel que :  $\forall x \in A$ ,  $x \neq 0$ ,  $x = u\pi^n$  avec  $n \in \mathbf{N}$  et  $u \in A^*$ .

iv) Il existe une application  $v : K \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$  telle que :

- $v(0) = \infty$
- $\forall x, y \in K$  on a  $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $\forall x, y \in K$  on a  $v(x + y) \geq \inf(v(x); v(y))$
- $v(K) \neq \{0, \infty\}$

et telle que  $A = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ . (Les règles de calcul dans  $\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$  sont celles que l'on imagine :  $n + \infty = \infty$ , etc.)

Un anneau vérifiant les propriétés ci-dessus est un *anneau de valuation discrète*;  $v$  est sa valuation;  $\pi$  est une uniformisante.

2) Montrer qu'un anneau (local noethérien intègre) régulier de dimension 1 est un anneau de valuation discrète. Montrer que l'anneau des séries formelles  $k[[T]]$  est un anneau de valuation discrète.

3) On suppose que  $A$  est une  $k$ -algèbre et un anneau de valuation discrète et que la flèche naturelle de  $k$  dans  $A/\mathfrak{m}$  est un isomorphisme. Soit  $a \in A$ . Montrer qu'on a  $\dim_k A/(a) = v(a)$ .

## 2. Lien avec les anneaux de Dedekind

On se propose de prouver le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $A$  un anneau intègre noethérien ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1)  $A$  est intégralement clos et de dimension 1.

2) Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ ,  $A_{\mathfrak{m}}$  est un anneau de valuation discrète.

On dit alors que  $A$  est un anneau *de Dedekind*.

A) Le sens 2)  $\Rightarrow$  1) . On suppose que tous les  $A_{\mathfrak{m}}$  sont des anneaux de valuation discrète.

A1) Montrer que  $A$  est de dimension 1.

A2) Montrer qu'un anneau de valuation discrète est intégralement clos.

A3) Montrer qu'on a

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max} A} A_{\mathfrak{m}}.$$

(Pour montrer l'inclusion  $\supset$  on pourra considérer le transporteur d'un élément  $x$  de  $K$  :

$$I_x = \{a \in A \mid ax \in A\}.$$

En déduire que  $A$  est intégralement clos.

B) le sens 1)  $\Rightarrow$  2). On suppose que  $A$  vérifie les hypothèses de 1). Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$ .

B1) Montrer que  $A_{\mathfrak{m}}$  est local, intègre de dimension 1 et intégralement clos.

B2) Soit  $R$  un anneau noethérien non nul. Montrer qu'il existe  $a \in R$  tel que  $\text{Ann } a = \{x \in R \mid ax = 0\}$  soit un idéal premier (dit idéal premier associé de  $R$ ). (Prendre un élément maximal parmi les annulateurs.)

B3) Soit  $M$  une matrice  $n \times n$  à coefficients dans un anneau intègre  $R$  et soit  $P(X) = \det(XI - M)$  son polynôme caractéristique. Montrer que

$P(X)$  est unitaire, à coefficients dans  $R$  et qu'on a  $P(M) = 0$  (théorème de Cayley-Hamilton). (On passera au corps des fractions pour se ramener au cas usuel.)

B4) On va montrer que si  $A$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , intègre, noethérien, de dimension 1 et intégralement clos, c'est un anneau de valuation discrète.

On considère un élément  $f \in \mathfrak{m}$ ,  $f \neq 0$ .

a) Montrer qu'il existe  $g \in A$ ,  $g \notin fA$  tel que  $(g/f)\mathfrak{m} \subset A$  (appliquer B2 à l'anneau  $A/fA$ ).

b) Montrer qu'on a  $(g/f)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$  ou  $(g/f)\mathfrak{m} = A$ . Montrer que, dans ce dernier cas,  $\mathfrak{m}$  est principal et conclure.

c) Montrer que le cas  $(g/f)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$  est impossible. (Sinon  $g/f$  définirait un endomorphisme du  $A$ -module de type fini  $\mathfrak{m}$ ; en écrivant Cayley-Hamilton montrer que  $g/f$  serait entier sur  $A$  et faire éclater une contradiction.)

### 3. Un exemple

Soit  $A = \mathbf{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3 + X)$ .

1) Montrer que la courbe plane d'équation  $Y^2 - X^3 + X$  est irréductible et non singulière. En déduire que  $A$  est intégralement clos.

2) Montrer que  $A$  n'est pas factoriel (en désignant par  $x$  et  $y$  les images de  $X$  et  $Y$  dans  $A$  on montrera que  $y$  est irréductible mais que l'idéal  $(y)$  n'est pas premier, à cause de la relation  $y^2 = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ).

## Problème V

Le but du problème est de prouver le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $X$  une variété irréductible.

1) Pour tout  $x \in X$  on a  $\dim T_x(X) \geq \dim X$ .

2) Il existe un ouvert non vide de  $X$  sur lequel on a égalité (donc un ouvert lisse de  $X$ ).

(Si  $X$  n'est pas irréductible on a  $\dim T_x(X) \geq \dim_x X$ .)

1) Montrer que l'application de  $X$  dans  $\mathbf{N}$  qui à  $x$  associe  $\dim T_x(X)$  est semi-continue supérieurement (i.e. si  $\dim T_a(X) = n$  on a  $\dim T_x(X) \leq n$  pour  $x$  voisin de  $a$ ) (cf. Exercice IV, 3).

2) Montrer que le théorème est vrai pour une hypersurface irréductible  $V(F)$  de  $k^n$ . (Attention, si la caractéristique de  $k$  est positive, la démonstration est plus délicate.)

3) Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés irréductibles. On dit que  $X$  et  $Y$  sont birationnellement équivalentes s'il existe un ouvert non vide  $U$  de  $X$  et un ouvert  $V$  de  $Y$  qui sont isomorphes. Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont affines elles sont birationnellement équivalentes si et seulement si leurs corps de fonctions rationnelles  $K(X)$  et  $K(Y)$  (i.e. les corps de fractions de  $\Gamma(X)$  et  $\Gamma(Y)$ ) sont  $k$ -isomorphes.

4) On rappelle le théorème de l'élément primitif : si  $K \subset L$  est une extension algébrique finie *séparable* (ce qui est le cas, par exemple, si  $K$  est de caractéristique zéro), il existe  $x \in L$  (appelé élément primitif) tel que  $L = K(x)$ .

Montrer que  $X$  est birationnellement équivalente à une hypersurface  $V$  de  $k^n$ . (Se ramener au cas où  $X$  est affine et considérer le corps de fonctions  $K(X)$ . Prendre une base de transcendance  $x_1, \dots, x_n$  de  $K(X)$  sur  $k$  puis un élément primitif de l'extension  $k(x_1, \dots, x_n) \subset K(X)$ . On pourra se limiter au cas de la caractéristique zéro et consulter Shafarevitch p. 29 pour le cas général.)

5) Conclure.

6) **Application aux groupes algébriques.** Soit  $G$  un groupe algébrique (i.e. une variété algébrique, munie d'une structure de groupe telle que la multiplication  $\mu : G \times G \rightarrow G$  et le passage à l'inverse  $\sigma : G \rightarrow G$ , donnés respectivement par  $\mu(x, y) = xy$  et  $\sigma(x) = x^{-1}$ , soient des morphismes). Par exemple les groupes classiques usuels : groupe linéaire, groupe orthogonal, etc., sont des groupes algébriques.

a) Montrer que les translations  $x \mapsto ax$  sont des isomorphismes de variété de  $G$  dans lui-même.

b) Montrer que si  $G$  est connexe il est irréductible (raisonner par l'absurde en considérant les composantes irréductibles de  $G$  et utiliser a)).

c) Montrer que  $G$  est une variété lisse. (Se ramener au cas où  $G$  est connexe et utiliser a. et le théorème ci-dessus.)

## Problème VI

Le but du problème est d'étudier les morphismes lisses entre variétés irréductibles lisses et de montrer notamment le théorème de lissité géné-

rique et l'une des nombreuses formes du théorème de Bertini. Un morphisme entier sera toujours supposé dominant, donc surjectif.

## 1. Morphismes lisses

Soient  $X$  et  $Y$  des variétés irréductibles *lisses* et  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant. On dit que  $\varphi$  est lisse si pour tout  $x \in X$  l'application linéaire tangente  $T_x(\varphi) : T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ , avec  $y = \varphi(x)$ , est surjective.

Attention, si  $X$  et  $Y$  ne sont pas lisses cette définition n'est pas la bonne (cf. Hartshorne III, 10 : lisse se dit *smooth* en anglais). Dans tout ce qui suit on ne parlera de morphisme lisse que si les variétés sont lisses.

1) Montrer que le composé de deux morphismes lisses est lisse. Montrer que si  $Z$  et  $Y$  sont lisses la projection de  $Y \times Z$  sur  $Y$  est lisse. Si  $U$  est un ouvert d'une variété lisse  $X$ , montrer que l'inclusion de  $U$  dans  $X$  est lisse.

2) Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme. On désigne par  $\varphi^{-1}(y)$  la fibre de  $y \in Y$  munie de sa structure de variété. Montrer que l'on a, pour tout  $x \in \varphi^{-1}(y)$ ,  $T_x(\varphi^{-1}(y)) \subset \text{Ker } T_x(\varphi)$ .

3) En déduire que si  $\varphi$  est lisse les fibres non vides de  $\varphi$  sont lisses, de dimension  $\dim X - \dim Y$  et qu'on a  $T_x(\varphi^{-1}(y)) = \text{Ker } T_x(\varphi)$  pour tout  $x \in X$  (utiliser le problème V et le théorème de dimension des fibres).

## 2. Un exemple

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés affines irréductibles. On pose  $A = \Gamma(Y)$  et  $B = \Gamma(X)$  et on a donc  $\varphi^* : A \rightarrow B$  injectif. On suppose que l'on a  $B = A[\xi] \simeq A[T]/(P)$  avec  $P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_i \in A$ . Le morphisme  $\varphi$  est alors entier. On suppose de plus que  $f = P'(\xi) = n\xi^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\xi^{n-2} + \dots + a_1$  est  $\neq 0$  dans  $B$ .

1) Montrer que si  $x \in D(f)$  l'application linéaire tangente  $T_x(\varphi) : T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ , avec  $y = \varphi(x)$ , est surjective. (On relèvera une déformation  $\chi : A \rightarrow k[\epsilon]$  de la forme  $\chi(a) = a(y) + v(a)\epsilon$  en une déformation  $\psi$  de  $B$  de la forme  $\psi(\xi) = \xi(x) + w(\xi)\epsilon$ ; le jeu consiste à trouver  $w(\xi)$ .)

2) En déduire que si  $D(f)$  et  $Y$  sont lisses le morphisme  $\varphi|_{D(f)} : D(f) \rightarrow Y$  est lisse.

### 3. Le théorème de lissité générique, version 1

A partir de maintenant on suppose le corps  $k$  de caractéristique zéro. On va prouver le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant entre variétés irréductibles (on ne suppose pas  $X$  et  $Y$  lisses). Il existe des ouverts (lisses) non vides  $U$  de  $X$  et  $V$  de  $Y$  tels que  $\varphi(U) \subset V$  et que  $\varphi|_U : U \rightarrow V$  soit lisse.*

1) Montrer qu'on peut supposer  $X$  et  $Y$  affines et lisses (cf. Problème V).

2) Montrer que, quitte à remplacer  $X$  par un ouvert, on peut écrire  $\varphi = pi\psi : X \xrightarrow{\psi} \Omega \xrightarrow{i} Y \times k^n \xrightarrow{p} Y$  avec  $\psi$  entier,  $i$  l'inclusion de l'ouvert  $\Omega$  dans  $Y \times k^n$  et  $p$  la projection. (On s'inspirera de la démonstration du théorème de dimension des fibres vue au paragraphe IV, 3.)

En déduire qu'il suffit de montrer le théorème pour  $\varphi$  entier.

3) On suppose  $\varphi$  entier. En utilisant le théorème de l'élément primitif (cf. Problème V, c'est ici qu'on utilise de manière essentielle la caractéristique zéro), montrer que, quitte à modifier  $X$  on peut se ramener à un  $\varphi$  du type de l'exemple II et conclure.

### 4. Le théorème de lissité générique, version 2

**Théorème 2.** *Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant entre variétés irréductibles. On suppose  $X$  lisse. Il existe un ouvert non vide  $V$  de  $Y$  tel que  $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  soit lisse. En particulier les fibres  $\varphi^{-1}(y)$  sont lisses pour  $y \in V$ .*

1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $Y$  est lisse.

2) On pose  $X_r = \{x \in X \mid \text{rang}(T_x(\varphi)) \leq r\}$ . Montrer que l'on a  $\dim \varphi(\overline{X_r}) \leq r$ . (On considérera la restriction de  $\varphi$  à des composantes irréductibles convenables de  $\overline{X_r}$  et  $\varphi(\overline{X_r})$  et on utilisera le théorème 1 et le théorème de dimension des fibres.)

3) Conclure.

### 5. Le théorème de Bertini

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ . Un hyperplan  $H$  de  $\mathbf{P}(E) \simeq \mathbf{P}^n$  est défini par une forme linéaire non nulle  $f \in E^*$  et deux telles formes définissent le même hyperplan si et seulement si elles

sont proportionnelles. L'ensemble  $G$  des hyperplans de  $\mathbf{P}(E)$  est donc canoniquement en bijection avec l'espace projectif  $\mathbf{P}(E^*) \simeq \mathbf{P}^n$  avec lequel on l'identifie désormais.

Soit  $X \subset \mathbf{P}^n$  une variété projective irréductible et lisse. On se propose de prouver le théorème de Bertini :

**Théorème 3.** *Si  $H$  est un hyperplan général de  $\mathbf{P}^n$ ,  $X \cap H$  est une variété (projective) lisse.*

(Le mot général signifie qu'il existe un ouvert dense  $U$  de  $G$  tel que si  $H \in U$ ,  $X \cap H$  est lisse.)

On considère la variété d'incidence  $V \subset X \times G$  :

$$V = \{(x, H) \mid x \in H\}.$$

1) Montrer que  $V$  est un fermé de  $X \times G$  ou encore de  $\mathbf{P}^n \times G$  dont on explicitera les équations à partir de celles de  $X$ .

2) Montrer que  $V$  est irréductible (utiliser l'exercice 7 du chapitre IV) et lisse (calculer sa dimension et son espace tangent).

3) Conclure en appliquant le théorème 2 à la projection de  $V$  dans  $G$ .

On se reportera à l'Appendice sur les schémas pour des compléments sur ces théorèmes.

## Problème VII

Le but du problème est d'établir l'existence et l'unicité de la multiplicité d'intersection de deux courbes planes en un point. Cette multiplicité va apparaître comme une fonction vérifiant un certain nombre d'axiomes naturels. Ce qui suit est largement inspiré de Fulton, [F], chapitre 3 paragraphe 3.

### 1. Énoncé du théorème

Il existe une unique application  $\mu : k^2 \times (k[X, Y] - \{0\})^2 \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  qui au point  $P \in k^2$  et aux polynômes non nuls  $F, G \in k[X, Y]$  associe un nombre noté  $\mu_P(F, G)$  et appelé *multiplicité d'intersection de  $F$  et  $G$  au point  $P$*  vérifiant les sept axiomes suivants :

1)  $\mu_P(F, G) = \infty$  si et seulement si  $F$  et  $G$  ont un facteur commun  $H$  qui passe par  $P$  (i.e. tel que  $H(P) = 0$ ).

2)  $\mu_P(F, G) = 0$  si et seulement si  $P \notin V(F) \cap V(G)$ .

3)  $\mu_P(F, G) = \mu_P(G, F)$  pour tous  $P, F, G$ .

4) Si  $u : k^2 \rightarrow k^2$  est une application affine bijective, on a pour tous  $P, F, G : \mu_P(F, G) = \mu_{u^{-1}(P)}(F^u, G^u)$ . (On rappelle que  $F^u$  est le polynôme qui vérifie, pour  $x, y \in k, F^u(x, y) = F(u(x, y))$ .)

5) On a  $\mu_P(F, G) \geq \mu_P(F)\mu_P(G)$  avec égalité si et seulement si  $F$  et  $G$  n'ont pas de tangentes communes en  $P$ .

5') Variante : Soit  $P = (0, 0)$ . On a  $\mu_P(X, Y) = 1$ .

6) Si  $F = \prod_{i=1}^m F_i^{r_i}$  et  $G = \prod_{j=1}^n G_j^{s_j}$  on a  $\mu_P(F, G) = \sum_{i,j} r_i s_j \mu_P(F_i, G_j)$ .

7) On a  $\mu_P(F, G) = \mu_P(F, G + AF)$  pour tout polynôme  $A \in k[X, Y]$  (autrement dit  $\mu_P(F, G)$  ne dépend essentiellement que de l'idéal  $(F, G)$ ).

De plus, lorsque  $F$  et  $G$  n'ont pas de facteur commun passant par  $P$ , ce nombre est donné par la formule :

$$\mu_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_{k^2, P} / (F, G).$$

## 2. L'unicité

Soient  $\mu$  et  $\mu'$  deux applications vérifiant les axiomes 1) à 7) (avec la variante 5')). Il s'agit de montrer que l'on a  $\mu = \mu'$ .

a) On suppose  $\mu_P(F, G) = \infty$ . Montrer que l'on a  $\mu'_P(F, G) = \infty$ .

b) On suppose  $\mu_P(F, G) = 0$ . Montrer que l'on a  $\mu'_P(F, G) = 0$ .

c) Soient  $P = (0, 0)$  et  $m, n \in \mathbf{N}$ . Montrer qu'on a  $\mu_P(X^m, Y^n) = \mu'_P(X^m, Y^n) = mn$ .

On raisonne maintenant par récurrence sur  $\mu_P(F, G)$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$  avec  $n > 0$ . On suppose l'unicité prouvée pour  $\mu_P(F, G) < n$ . Soient  $P, F, G$  tels que  $\mu_P(F, G) = n$ . On va montrer  $\mu'_P(F, G) = n$ .

d) Montrer que  $F$  et  $G$  sont sans facteur commun passant par  $P$ , et que  $P \in V(F) \cap V(G)$ . Montrer qu'on peut supposer  $P = (0, 0)$ .

On considère les polynômes  $F(X, 0)$  et  $G(X, 0)$ ; soient  $r, s$  leurs degrés respectifs. On raisonne maintenant par récurrence sur  $\inf(r, s)$ .

e) On suppose  $\inf(r, s) = 0$ . Montrer qu'on a  $\mu'_P(F, G) = n$ . (On mettra en facteur une puissance de  $Y$  et on utilisera les axiomes 6) et 7), le point c) ci-dessus et l'hypothèse de récurrence sur  $n$ .)

g) On suppose  $\inf(r, s) > 0$ . Montrer qu'on peut supposer  $r \leq s$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $A$  tel que, si  $H = G + AF$ , le degré de  $H(X, 0)$  soit  $< s$ , voire  $< r$ , et conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence sur  $\inf(r, s)$  à  $F$  et  $H$ .

On notera que cette preuve de l'unicité fournit un algorithme de calcul de  $\mu_P(F, G)$  en un nombre fini d'opérations. Bien entendu le calcul est beaucoup plus commode avec 5) qu'avec 5').

h) Appliquer ce qui précède au calcul de  $\mu_P(F, G)$  dans les cas suivants :

1)  $P = (0, 0)$  et  $F, G$  sont pris, au choix, parmi les polynômes

$$Y^2 - X^3, X^3 + Y^3 + XY, (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3, \\ (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2, 2X^4 + Y^4 - Y(3X^2 + 2Y^2) + Y^2, \\ X^2Y^3 + X^2 + Y^2, Y^2 + X^2 + X^2Y^2 - 2XY(X + Y + 1).$$

2)  $P = (1, i, 0)$  et  $F, G$  sont les polynômes homogènes

$$(X^2 + Y^2)^2 + T(3X^2Y - Y^3), (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2T^2.$$

(On se placera dans l'ouvert affine  $X \neq 0$ .)

### 3. L'existence : avec la variante 5')

Lorsque  $F$  et  $G$  n'ont pas de facteur commun passant par  $P$  on pose  $\mu_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_{k^2, P}/(F, G)$  (et sinon on pose  $\mu_P(F, G) = \infty$ ). Il s'agit de montrer que  $\mu$  vérifie les sept axiomes (avec la variante 5'). On posera parfois, pour abrégé,  $\mathcal{O}_{k^2, P} = \mathcal{O}$ .

a) On suppose  $F = F_1F_2$  avec  $F_1(P) \neq 0$ . Montrer qu'on a un isomorphisme  $\mathcal{O}_{k^2, P}/(F, G) \simeq \mathcal{O}_{k^2, P}/(F_2, G)$ . En déduire que  $\mu_P(F, G)$  ne change pas si on multiplie  $F$  ou  $G$  par un polynôme non nul en  $P$ .

b) Montrer que  $\mu$  vérifie la propriété 1). Lorsque  $F$  et  $G$  n'ont pas de facteur commun passant par  $P$  on utilisera l'isomorphisme :

$$k[X, Y]/(F, G) \simeq \prod_{P \in V(F) \cap V(G)} \mathcal{O}_{k^2, P}/(F, G);$$

sinon, si  $H$  est un facteur irréductible de  $F$  et  $G$  avec  $H(P) = 0$  on montrera que  $\mathcal{O}_{k^2, P}/(F, G)$  est de dimension plus grande que  $\Gamma(V(H))$  et que ce dernier anneau est de dimension infinie.

c) Prouver les propriétés 2), 3), 4), 5'), 7). (Pour 4), on notera que  $u$  est un morphisme de  $k^2$  dans lui-même qui induit un isomorphisme des anneaux locaux  $\mathcal{O}_{k^2, P}$  et  $\mathcal{O}_{k^2, u^{-1}(P)}$ .)

d) Pour montrer la propriété 6) on se ramènera à montrer la formule :  $\mu_P(F, GH) = \mu_P(F, G) + \mu_P(F, H)$  lorsque  $F$  et  $GH$  sont sans facteur commun puis on montrera qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}/(F, H) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/(F, GH) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}/(F, G) \rightarrow 0$$

où  $\pi$  est la projection canonique et où  $\psi$  est induite par la multiplication par  $G$ .

**4. L'existence : la propriété 5)**

On définit  $\mu$  comme en II. On va montrer la propriété 5), nettement plus délicate. On pose  $m = \mu_P(F)$  et  $n = \mu_P(G)$ .

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas  $P = (0, 0)$ .

b) On appelle  $I$  l'idéal  $(X, Y)$  de  $k[X, Y]$ . Calculer  $\dim_k(k[X, Y]/I^r)$  pour  $r \in \mathbf{N}$ .

c) Montrer qu'on a une suite exacte :

$$k[X, Y]/I^n \times k[X, Y]/I^m \xrightarrow{\psi} k[X, Y]/I^{m+n} \xrightarrow{\varphi} k[X, Y]/(I^{m+n}, F, G) \rightarrow 0$$

où  $\varphi$  est la projection canonique et où  $\psi$  est donnée par  $\psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG}$ .

En déduire que l'on a  $\dim_k k[X, Y]/(I^{m+n}, F, G) \geq mn$  avec égalité si et seulement si  $\psi$  est injective.

d) Montrer qu'on a un isomorphisme  $\alpha : k[X, Y]/(I^{m+n}, F, G) \rightarrow \mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G)$  (on montrera que le premier anneau est local). En déduire l'inégalité  $\mu_P(F, G) \geq mn$ .

Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

1)  $\psi$  est injective,

2) la projection  $\pi : \mathcal{O}/(F, G) \rightarrow \mathcal{O}/(I^{m+n}, F, G)$  est un isomorphisme, ou encore  $I^{m+n} \subset (F, G)\mathcal{O}$  (idéal engendré par  $F$  et  $G$  dans  $\mathcal{O}$ ).

On suppose désormais que  $F$  et  $G$  n'ont pas de tangente commune en  $P$ .

e) Montrer que  $\psi$  est injective. (Si  $\psi(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{AF + BG} = \overline{0}$ , on regardera les termes de plus bas degré de  $A, B, F, G$ .)

f) Montrer que pour  $r$  assez grand on a  $I^r \subset (F, G)\mathcal{O}$  (on utilisera un polynôme  $H$  nul en tous les points de  $V(F) \cap V(G)$  sauf en  $P$  et on appliquera le Nullstellensatz).

g) Soient  $L_1, \dots, L_m$  (resp.  $M_1, \dots, M_n$ ) les tangentes à  $V(F)$  (resp.  $V(G)$ ) en  $P$  (certains des  $L_i$  (resp.  $M_j$ ) peuvent être égaux, mais on a  $L_i \neq M_j$  pour tous  $i, j$ ). On pose, pour  $i, j \geq 0$ ,  $A_{i,j} = L_1 \cdots L_i M_1 \cdots M_j$  en convenant que pour  $i > m$  (resp.  $j > n$ )  $L_i = L_m$  (resp.  $M_j = M_n$ ).

Montrer que, pour  $t \geq 0$ , les  $A_{i,j}$  avec  $i + j = t$  forment une base de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $t$ .

h) Montrer que pour  $i + j \geq m + n - 1$ , on a  $A_{i,j} \in (F, G)\mathcal{O}$  (utiliser f) et g)).

i) Conclure.

## Problème VIII

Le but de ce problème est d'établir le théorème suivant :

**Théorème 1.** Soit  $C$  une courbe projective plane irréductible. Alors,  $C$  est birationnellement équivalente à une courbe projective plane irréductible  $X$  qui n'a que des points singuliers ordinaires (i.e. à tangentes distinctes).

Comme on sait, par ailleurs, que toute courbe irréductible est birationnellement équivalente à une courbe projective plane (cf. par exemple Problème. V) on voit que toute courbe irréductible est birationnellement équivalente à une courbe projective plane à singularités ordinaires.

Ce qui suit est extrait de Fulton, [F], chapitre 7 paragraphe 4.

On travaille dans le plan projectif  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2(k)$  sur un corps  $k$  algébriquement clos et de caractéristique zéro. (Pour le cas de la caractéristique  $p$ , voir Fulton, Appendice.) Les coordonnées homogènes du plan sont  $x, y, z$ . On considère les trois points (dits *fondamentaux*)

$$P = (0, 0, 1), \quad P' = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad P'' = (1, 0, 0)$$

et les trois droites (dites *exceptionnelles*)

$$L = V(Z), \quad L' = V(Y) \quad \text{et} \quad L'' = V(X).$$

Ces trois droites forment un triangle dont les sommets sont les points fondamentaux. On appelle  $U$  l'ouvert  $U = \mathbf{P}^2 - V(XYZ)$  de  $\mathbf{P}^2$ .

Si  $F$  est un polynôme homogène de  $\mathbf{P}^2$  et  $S$  un point de  $\mathbf{P}^2$  on note  $\mu_S(F)$  la multiplicité de  $F$  en  $S$ . Si  $F$  et  $G$  sont deux polynômes homogènes et  $S$  un point de  $\mathbf{P}^2$  on note  $\mu_S(F, G)$  la multiplicité d'intersection des courbes d'équations  $F$  et  $G$  en  $S$ . Enfin on appelle *genre apparent* d'une courbe  $C = V(F)$  de degré  $d$  l'entier

$$g^*(C) = (d-1)(d-2)/2 - \sum_{P \in \mathbf{P}^2} \mu_P(\mu_P - 1)/2 \quad \text{avec} \quad \mu_P = \mu_P(F).$$

On rappelle que, si  $C$  est irréductible, on a  $g^*(C) \geq 0$  (cf. Exercices VI).

On définit l'application  $Q : \mathbf{P}^2 - \{P, P', P''\} \rightarrow \mathbf{P}^2$  par la formule  $Q(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ . Cette application est la *transformation quadratique standard* de  $\mathbf{P}^2$ .

1) Montrer que  $Q$  est un morphisme de variétés (donc une application rationnelle de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même). Pourquoi faut-il restreindre l'ensemble de départ ?

2) Montrer que sur l'ouvert  $U$ ,  $Q$  est involutif (i.e.  $Q^2 = \text{Id}_U$ ). En déduire que  $Q$  est birationnel sur  $\mathbf{P}^2$ . Préciser l'image des droites exceptionnelles et l'image de  $Q$ .

On considère une courbe projective irréductible  $C = V(F) \subset \mathbf{P}^2$ , de degré  $d$ . On suppose que  $C$  n'est pas l'une des droites exceptionnelles. On appelle  $C'$  l'adhérence dans  $\mathbf{P}^2$  de  $Q^{-1}(C \cap U)$ .

3) Montrer que  $C'$  est une courbe projective irréductible birationnellement équivalente à  $C$  et qu'on a  $(C')' = C$ .

4) On pose  $F^Q(X, Y, Z) = F(YZ, ZX, XY)$ . On suppose  $\mu_P(C) = r$  (resp.  $\mu_{P'}(C) = r'$ , resp.  $\mu_{P''}(C) = r''$ ). Montrer que  $Z^r$  (resp.  $Y^{r'}$ , resp.  $X^{r''}$ ) est la plus grande puissance de  $Z$  (resp.  $Y$ , resp.  $X$ ) qui divise  $F^Q$ .

On pose  $F^Q = X^{r''} Y^{r'} Z^r F'$ .

5) Montrer que  $F'$  est un polynôme homogène de degré  $2d - r - r' - r''$ . Montrer que l'on a  $\mu_P(C') = d - r' - r''$  et les formules analogues en  $P'$  et  $P''$ . Montrer que l'on a  $(F')' = F$ , que  $F'$  est irréductible et qu'on a  $C' = V(F')$ .

On dit que  $C$  est en *bonne position* si aucune droite exceptionnelle n'est tangente à  $C$  en un point fondamental.

6) On suppose  $C$  en bonne position. Montrer que  $C'$  est aussi en bonne position. (On pourra étudier  $\mu_{P'}(F', Z)$ .)

7) Montrer que si  $C$  est en bonne position et si  $P_1, \dots, P_s$  sont les points non fondamentaux de  $C' \cap L$  on a les formules :

$$\mu_{P_i}(C') \leq \mu_{P_i}(C', L) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s \mu_{P_i}(C', L) = r.$$

On dit que  $C$  est en *excellente position* si elle est en bonne position et si de plus  $L$  coupe  $C$  (transversalement) en  $d$  points distincts et non fondamentaux et si  $L'$  et  $L''$  coupent (transversalement) toutes deux  $C$  en  $n - r$  points non fondamentaux.

Dans les questions 8), 9), 10) on suppose  $C$  en excellente position. On appelle  $P_1, \dots, P_s$  les points non fondamentaux de  $C' \cap L$ .

8) Montrer que les points singuliers de  $C'$  sont les suivants :

a) Les points de  $C' \cap U$  dont l'image par  $Q$  est un point singulier de  $C \cap U$ . On montrera qu'ils ont même nature (i.e. ordinaires ou non) et même multiplicité dans  $C$  et  $C'$  (cf. Fulton Problème 3.24).

b) Les points  $P, P', P''$  qui sont des points singuliers *ordinaires* de  $C'$  de multiplicités respectives  $d, d - r$  et  $d - r$ .

c) Eventuellement certains points  $P_i$ .

9) Montrer que  $C' \cap L'$  et  $C' \cap L''$  ne contiennent pas de points non fondamentaux.

10) Montrer qu'on a la formule suivante sur les genres apparents :

$$g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^s r_i(r_i - 1)/2 \quad \text{avec} \quad r_i = \mu_{P_i}(C').$$

11) Soit  $C = V(F)$  une courbe irréductible quelconque de  $\mathbf{P}^2$  et soit  $A$  un point de  $C$ . Montrer qu'il existe une homographie  $h$  de  $\mathbf{P}^2$  telle que  $h(C)$  soit en excellente position et que  $h(A) = P$ . (On montrera que si  $P$  est un point de  $C$  de multiplicité  $r$  il y a une infinité de droites passant par  $P$  qui recoupent  $C$  en  $d - r$  points distincts (cf. Fulton Problème 5.26); on se sert de la caractéristique 0.)

On appelle *transformation quadratique* la composée  $Qh$  de la transformation quadratique standard  $Q$  et d'une homographie  $h$ . C'est une transformation birationnelle de  $\mathbf{P}^2$ .

12) Prouver le théorème 1. (Utiliser des transformations quadratiques et raisonner par récurrence sur  $N + g^*(C)$  où  $N$  est le nombre de points singuliers non ordinaires de  $C$ .)

13) ¶ Montrer que la courbe d'équation  $(X^2 - YZ)^2 + Y^3(Y - Z)$  est unicusale.

## Problème IX

Le but de ce problème est de prouver certains des résultats admis au chapitre X.

### 1. Le lemme du serpent

Il s'agit d'un lemme d'algèbre très utile dans de nombreuses chasses au diagramme.

On suppose qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' & & \\
 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{q} & B'' & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

où les objets sont des groupes abéliens et les flèches des homomorphismes de groupes, les deux suites horizontales étant exactes.

Montrer qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ker } u' \rightarrow \text{Ker } u \rightarrow \text{Ker } u'' \rightarrow \text{Coker } u' \rightarrow \text{Coker } u \rightarrow \text{Coker } u'' \rightarrow 0.$$

(On commencera par définir les flèches; il n'y a de difficulté que pour celle qui relie  $\text{Ker } u''$  et  $\text{Coker } u'$ .)

Énoncer une variante avec des suites exactes de plus de trois termes.

Bien entendu le même énoncé vaut pour les  $A$ -modules, les  $\mathcal{O}_X$ -modules, etc.

### 2. Dimension projective des modules sur les anneaux de polynômes

Dans cette partie on se propose de prouver, par récurrence sur le nombre  $n + 1$  des variables, la proposition X, 1.6 ou, plus précisément, la suivante :

**Proposition 1.** Posons  $R = k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  et soit  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini. On suppose qu'on a une suite exacte de  $R$ -modules gradués (avec des homomorphismes de degré zéro) :

$$0 \rightarrow E_{n+1} \rightarrow L_n \rightarrow \dots \rightarrow L_i \xrightarrow{u_i} L_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \rightarrow 0.$$

Alors, si on suppose que les  $L_i$  sont des  $R$ -modules libres gradués, il en est de même de  $E_{n+1}$ .

1) On commence par un analogue gradué du lemme de Nakayama. Soient  $R$  un anneau gradué,  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini,  $N$  un sous-module gradué de  $M$  et  $f \in R$  un élément homogène de degré  $d > 0$ . On suppose qu'on a  $M = N + fM$ . Montrer que l'on a  $M = N$ .

2) Montrer que la proposition 1 est vraie dans le cas  $n + 1 = 0$ .

3) On suppose la proposition établie pour  $n$  variables et on passe à  $n + 1$ . On pose  $E_{i+1} = \text{Ker } u_i$ .

a) On rappelle qu'un  $R$ -module  $F$  est dit sans torsion si la relation  $ax = 0$  avec  $a \in R$  et  $x \in F$  n'est possible que si  $a$  ou  $x$  est nul. Montrer que, pour  $i = 0, \dots, n$ , les  $L_i$  et les  $E_{i+1}$  sont des  $R$ -modules sans torsion.

b) Soit  $F$  un  $R$ -module sans torsion. Montrer que la multiplication par  $X_n$  induit la suite exacte de modules gradués :

$$0 \rightarrow F(-1) \xrightarrow{X_n} F \rightarrow F/X_n F \rightarrow 0.$$

c) On pose  $\bar{R} = R/(X_n) = k[X_0, \dots, X_{n-1}]$ . Si  $F$  est un  $R$ -module gradué on pose  $\bar{F} = F/X_n F$ . Montrer que  $\bar{F}$  est un  $\bar{R}$ -module gradué et que les  $\bar{L}_i$  sont des  $\bar{R}$ -modules libres.

d) En utilisant le lemme du serpent montrer qu'on a la suite exacte de  $\bar{R}$ -modules gradués :

$$0 \rightarrow \bar{E}_{n+1} \rightarrow \bar{L}_n \rightarrow \dots \rightarrow \bar{L}_i \xrightarrow{\bar{u}_i} \bar{L}_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{L}_1 \xrightarrow{\bar{u}_1} \bar{E}_1 \rightarrow 0.$$

e) En déduire que  $\bar{E}_{n+1}$  est un  $\bar{R}$ -module libre gradué.

On note  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$  une base de  $\bar{E}_{n+1}$  sur  $\bar{R}$ , les  $\bar{e}_i$  étant images de  $e_i \in E_{n+1}$ , homogènes de degrés  $d_i$ .

f) Montrer que les  $e_i$  engendrent  $E_{n+1}$  sur  $R$  (utiliser Nakayama).

g) Montrer que les  $e_i$  sont libres sur  $R$ . (On raisonne par l'absurde en considérant une relation de degré minimal qui lie les  $e_i$ .)

### 3. Résolutions minimales

On revient dans cette partie sur la proposition 1.8 du chapitre X.

Soit  $R$  un anneau noethérien gradué,  $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ . On suppose que  $R_0 = k$  est un corps et on pose  $m = R^+ = \bigoplus_{i > 0} R_i$ . C'est un idéal maximal de  $R$ , de quotient isomorphe à  $k$ . (L'exemple type d'un tel anneau, auquel on peut se limiter si on le souhaite, est l'anneau  $k[X_1, \dots, X_n]$ .)

Soit  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini. On appelle *couverture minimale* de  $M$  un homomorphisme homogène de degré zéro,  $\varphi : L_0 \rightarrow M$ , avec  $L_0$  libre gradué,  $\varphi$  étant supposé surjectif et tel que l'homomorphisme induit :

$$\bar{\varphi} = \varphi \otimes_R k : L_0 \otimes_R k = L_0/mL_0 \rightarrow M \otimes_R k = M/mM$$

soit un isomorphisme.

0) Soit  $\varphi : L_0 \rightarrow M$  une couverture minimale. Montrer que le rang de  $L_0$  est égal au nombre minimal de générateurs de  $M$ .

1) Le  $R$ -module  $M$  étant donné, montrer l'existence d'une couverture minimale  $\varphi : L_0 \rightarrow M$  (on relèvera une base de  $M \otimes_R k$  sur  $k$ ).

2) Soit  $\varphi : L_0 \rightarrow M$  une couverture minimale et  $\psi : L \rightarrow M$  un homomorphisme surjectif avec  $L$  libre. Montrer que  $\varphi$  est "facteur direct" de  $\psi$ , i.e. précisément, qu'il existe une décomposition en somme directe  $L = L'_0 \oplus L''_0$  avec  $L'_0$  et  $L''_0$  libres et un isomorphisme  $\theta : L_0 \simeq L'_0$  tel que  $\varphi = (\psi|_{L'_0})\theta$ . En déduire que si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux couvertures minimales de  $M$  il existe un isomorphisme  $\theta : L_0 \rightarrow L$  tel que  $\varphi = \psi\theta$ .

3) Soit  $L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \rightarrow 0$  une suite exacte de  $R$ -modules gradués avec les  $L_i$  libres. Montrer que  $u_0$  est une couverture minimale si et seulement si  $u_1$  est minimal au sens de la définition 1.7 du chapitre X (on notera que cela équivaut à dire que  $u_1 \otimes_R k$  est nul).

4) On considère une résolution libre  $L^*$  :

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow \dots \rightarrow L_i \xrightarrow{u_i} L_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \rightarrow 0$$

du module gradué  $M$  et on pose  $E_{i+1} = \text{Ker } u_i$ . Montrer que la résolution est minimale si et seulement si, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la flèche naturelle  $L_i \rightarrow E_i$  induite par  $u_i$  est une couverture minimale de  $E_i$ . Montrer qu'on retrouve ainsi l'existence des résolutions minimales.

5) Soient  $L^*$  et  $L'^*$  deux résolutions minimales de  $M$ . Montrer que ces résolutions sont isomorphes ou, plus précisément, qu'il existe des isomorphismes  $\theta_i : L_i \rightarrow L'_i$ , vérifiant  $\theta_{i-1}u_i = u'_i\theta_i$ .

6) On suppose  $M$  de dimension projective finie. Montrer que  $\text{dp}(M)$  est la longueur d'une résolution minimale quelconque de  $M$ .

## Partiel, décembre 1991

Les deux problèmes sont indépendants.

### Problème I

Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $p, q, r$  des entiers  $\geq 1$ . On désigne par  $\mathbf{M}_{p,q}(k)$  ou en abrégé  $\mathbf{M}_{p,q}$  l'espace des matrices  $p \times q$  (i.e. à  $p$  lignes et  $q$  colonnes) à coefficients dans  $k$ . C'est un espace affine de dimension  $pq$  que l'on munit de sa structure de variété algébrique affine et notamment de la topologie de Zariski. On rappelle que la fonction rang est alors semi-continue inférieurement sur  $\mathbf{M}_{p,q}$ , ce qui signifie que l'ensemble des matrices de rang  $\geq n$  est ouvert. En particulier le groupe  $GL_p(k)$  des matrices  $p \times p$  inversibles est un ouvert de  $\mathbf{M}_{p,p}(k)$ . On rappelle aussi que le fermé  $K_n$  des matrices de rang  $\leq n$  est irréductible.

Une matrice  $p \times q$  est dite de rang maximum si elle est de rang  $\inf(p, q)$ .

Il pourra parfois être commode d'identifier une application linéaire de  $k^q$  dans  $k^p$  et sa matrice (de taille  $p \times q$ ) dans les bases canoniques.

On considère l'ensemble

$$C_{p,q,r} = \{(A, B) \in \mathbf{M}_{p,q}(k) \times \mathbf{M}_{q,r}(k) \mid AB = 0\}.$$

Cet ensemble est une variété algébrique affine et le but du problème est d'étudier ses propriétés : composantes irréductibles, dimension, points singuliers.

On désigne par  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) la projection de  $C_{p,q,r}$  sur  $\mathbf{M}_{p,q}$  (resp.  $\mathbf{M}_{q,r}$ ).

1) Montrer que si  $(A, B) \in C_{p,q,r}$  on a  $\text{rang}(A) + \text{rang}(B) \leq q$ .

2) Montrer que toute composante irréductible de  $C_{p,q,r}$  est de dimension  $\geq pq + qr - pr$ . Déterminer la fibre de  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) au point  $A$  (resp.  $B$ ) et calculer sa dimension en fonction du rang de  $A$  (resp.  $B$ ).

3) On suppose  $q < p + r$ . Montrer que  $C_{p,q,r}$  est réductible. (On pourra considérer les images réciproques par  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des ouverts de  $\mathbf{M}_{p,q}$  et  $\mathbf{M}_{q,r}$  formés des matrices de rang maximum.)

4) On suppose  $q \geq p + r$ . Soit  $\Omega$  l'ouvert de  $\mathbf{M}_{p,q}$  formé des matrices de rang  $p$  et soit  $U$  l'ouvert (contenu dans  $\Omega$ ) des matrices écrites par blocs sous la forme  $A = (A_1 A_2)$  avec  $A_1 \in GL_p(k)$  et  $A_2 \in \mathbf{M}_{p,q-p}$ .

a) Déterminer l'image réciproque  $\pi_1^{-1}(U)$  en écrivant les matrices  $B$  sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

avec  $B_1 \in \mathbf{M}_{p,r}$  et  $B_2 \in \mathbf{M}_{q-p,r}$ . Montrer que  $\pi_1^{-1}(U)$  est isomorphe à un ouvert de  $\mathbf{M}_{p,q} \times \mathbf{M}_{q-p,r}$ . En déduire que  $\pi_1^{-1}(U)$  est irréductible, puis que  $\pi_1^{-1}(\Omega)$  l'est aussi. (On pourra montrer qu'une réunion finie d'ouverts irréductibles dont l'intersection est non vide est irréductible.)

b) Montrer que  $\pi_1^{-1}(\Omega)$  est partout dense dans  $C_{p,q,r}$ . (Si  $(A, B) \in C_{p,q,r}$  on montrera qu'il existe  $A_0 \in \Omega$  tel que  $(A_0, B) \in C_{p,q,r}$  et on travaillera dans la fibre de  $\pi_2$  en  $B$ .)

c) Montrer que  $C_{p,q,r}$  est irréductible et calculer sa dimension.

d) Soit  $(A, B) \in C_{p,q,r}$ . On suppose  $A$  de rang  $p$  et  $B$  de rang  $r$ . Montrer que  $(A, B)$  est un point lisse de  $C_{p,q,r}$  (on précisera l'espace tangent en ce point).

5) On suppose à nouveau  $q < p + r$ . Soient  $m, n$  des entiers tels que  $0 \leq m \leq p, 0 \leq n \leq r, m + n = q$ . On pose :

$$F_{m,n} = \{(A, B) \in C_{p,q,r} \mid \text{rang}(A) = m, \text{rang}(B) = n\},$$

$$G_{m,n} = \{(A, B) \in C_{p,q,r} \mid \text{rang}(A) \leq m, \text{rang}(B) \leq n\}.$$

a) Montrer que  $F_{m,n}$  est un ouvert non vide de  $C_{p,q,r}$ .

b) ¶ Montrer, par un raisonnement analogue à celui de 4), que  $F_{m,n}$  est irréductible. (Considérer d'abord les matrices  $A$  dont le mineur  $m \times m$  en haut à gauche, soit  $A_1$ , est inversible et calculer la fibre de  $\pi_1$  en  $A$  en utilisant une écriture par blocs.)

c) Montrer que les composantes irréductibles de  $C_{p,q,r}$  sont les  $G_{m,n}$  et calculer leurs dimensions.

d) Montrer que tout point de  $F_{m,n}$  est un point lisse de  $C_{p,q,r}$  (on précisera l'espace tangent en ce point).

## Problème II

On rappelle qu'un anneau intègre  $A$  de corps de fractions  $K$  est dit intégralement clos si on a :  $\forall x \in K, x$  entier sur  $A \Rightarrow x \in A$ .

On rappelle aussi qu'un anneau local, intègre, noethérien, de dimension 1 est régulier si et seulement si il est intégralement clos.

0) Soient  $A$  un anneau intégralement clos et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . Montrer que  $S^{-1}A$  est intégralement clos.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés algébriques affines irréductibles définies sur un corps  $k$  algébriquement clos et  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant. On pose  $A = \Gamma(Y)$ ,  $B = \Gamma(X)$  et on a donc  $\varphi^* : A \rightarrow B$  injectif. On identifie  $A$  à son image par  $\varphi^*$ . On suppose que  $B$  est entier sur  $A$  et que  $A$  et  $B$  ont même corps de fractions (i.e.  $\varphi$  est un morphisme entier et birationnel). On pose  $I = \{a \in A \mid aB \subset A\}$ .

1) Montrer que  $I$  est un idéal non nul de  $A$ .

2) Soit  $V = Y - V(I)$ . C'est un ouvert non vide de  $Y$  et on pose  $U = \varphi^{-1}(V)$ . Montrer que la restriction de  $\varphi$  à  $U$  est un isomorphisme de  $U$  sur  $V$ .

3) Soit  $y \in Y$ ,  $m_y$  l'idéal maximal de  $A$  correspondant et  $A_{m_y} = \mathcal{O}_{Y,y}$  le localisé. On suppose  $A_{m_y}$  intégralement clos. Montrer que l'on a  $y \in V$ .

4) On suppose  $B$  intégralement clos. Montrer que, réciproquement, si  $y$  est dans  $V$ , l'anneau  $A_{m_y}$  est intégralement clos.

5) On suppose que  $Y$  est une courbe (i.e.  $\dim Y = 1$ ) et que  $B$  est intégralement clos. Montrer que  $X$  est une courbe lisse et que  $\varphi$  est un isomorphisme en dehors des points singuliers de  $Y$ .

## Examen, janvier 1992

L'objet du problème est l'étude des propriétés de certaines courbes de  $\mathbf{P}^3$ , en corrélation avec les résolutions graduées de leur idéal. Les questions plus difficiles sont indiquées par un ou plusieurs signes ¶.

### Notations

Dans tout ce qui suit  $k$  désigne un corps algébriquement clos. On note  $R$  l'anneau de polynômes  $k[X, Y, Z, T]$ ,  $R_n$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $n$ . On désigne par  $R(d)$  le  $R$ -module gradué égal à  $R$  mais avec la graduation décalée :  $R(d)_n = R_{d+n}$ . Ce module est libre de rang 1 sur  $R$ , avec pour base le polynôme constant égal à 1 qui est alors en degré  $-d$ . Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur  $\mathbf{P}^3$  on note  $h^i(\mathcal{F})$  la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $H^i(\mathbf{P}^3, \mathcal{F})$ . On note  $(F_1, \dots, F_n)$  l'idéal de  $R$  engendré par les polynômes  $F_1, \dots, F_n$ .

Soit  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}^3$  (i.e. une sous-variété fermée dont toutes les composantes sont de dimension 1). On note  $\mathcal{O}_C$  le faisceau structural de  $C$ ,  $I_C$  l'idéal homogène de  $C$  ( $I_C = \{F \in R \mid \forall P \in C \quad F(P) = 0\}$ ), on appelle  $\mathcal{J}_C$  le faisceau  $\tilde{I}_C$  associé à  $I_C$ ,  $d$  le degré de  $C$  et  $g$  son genre

arithmétique. On rappelle qu'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

### 1. Etude cohomologique des courbes ACM

On suppose dans cette partie que  $C$  est une courbe dont l'idéal admet une résolution de la forme suivante :

$$(*) \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{p} I_C \rightarrow 0$$

où  $E$  et  $F$  sont des  $R$ -modules libres gradués :  $E = \bigoplus_{j=1}^s R(-m_j)$ ,  $F = \bigoplus_{i=1}^r R(-n_i)$ , les  $m_j$  et les  $n_i$  des entiers qui vérifient  $0 < n_1 \leq \dots \leq n_r$  et  $0 < m_1 \leq \dots \leq m_s$  et où  $\varphi$  et  $p$  sont des homomorphismes  $R$ -linéaires gradués de degrés zéro (i.e. qui envoient un élément de degré  $n$  sur un élément de degré  $n$ ). On notera respectivement  $e_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) et  $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) les vecteurs de base canoniques de  $E$  et  $F$ .

Une telle courbe sera dite ACM (arithmétiquement de Cohen-Macaulay) dans toute la suite.

On a aussi la résolution associée en termes de faisceaux :

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{p}} \mathcal{J}_C \rightarrow 0$$

avec  $\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1}^s \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-m_j)$ , et  $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-n_i)$ .

0) Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n)$  est une fonction polynomiale de  $n$  que l'on précisera.

1) Montrer que l'on a  $h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . En déduire que la courbe  $C$  est connexe.

2) Calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(\mathcal{J}_C(n))$  en fonction de  $d$  et  $g$ , puis des  $n_i$  et des  $m_j$ . Montrer qu'on a  $s = r - 1$  et  $\sum_{j=1}^s m_j = \sum_{i=1}^r n_i$  et calculer  $d$  et  $g$  en fonction des  $n_i$  et des  $m_j$ .

3) Montrer que  $\varphi$  est donnée par une matrice  $r \times (r - 1)$  dont le terme  $\varphi_{ij}$  est un polynôme homogène dont on précisera le degré. Que vaut  $\varphi_{ij}$  lorsque  $m_j < n_i$  ?

On dira que la résolution (\*) est *minimale* si  $\varphi_{ij}$  est nul lorsque  $n_i = m_j$ .

4) ¶ Montrer que si la résolution (\*) n'est pas minimale il existe une résolution

$$0 \rightarrow E' \rightarrow F' \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

du même type mais avec  $r' < r$ . Indication : il y a un terme  $n_i = m_j = n$  avec  $\varphi_{ij} = \lambda \neq 0$ . On pourra faire un changement de base dans  $E$  pour écrire  $E = R(-n) \oplus E'$ ,  $F = R(-n) \oplus F'$  avec  $\varphi$  écrite par blocs sous la forme :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ u & \varphi' \end{pmatrix}.$$

5) On suppose la résolution (\*) minimale. Montrer que l'on a  $n_1 < m_1$ . Soit  $s_0$  le plus petit degré d'une surface contenant  $C$  :

$$s_0 = \inf \{ n \in \mathbf{N} \mid h^0 \mathcal{J}_C(n) > 0 \}.$$

Calculer  $s_0$  en fonction des  $n_i$  et des  $m_j$ .

6) On suppose la résolution (\*) minimale.

a) ¶ Montrer que l'on a  $n_r < m_{r-1}$ .

b) Soit  $e$  l'indice de spécialité de  $C$  i.e.

$$e = \sup \{ n \in \mathbf{N} \mid h^1 \mathcal{O}_C(n) > 0 \}.$$

Calculer  $e$  en fonction des  $n_i$  et des  $m_j$ . Montrer qu'il n'existe pas de courbe ACM lisse dont les  $n_i$  soient égaux à 2, 2, 4 et les  $m_j$  à 3, 5.

7) Calculer  $d, g, s_0, e$  lorsque  $r = 4$  et lorsque les  $n_i$  (resp. les  $m_j$ ) sont tous égaux à 3 (resp. 4).

## 2. Les courbes liées aux intersections complètes

Soient  $C$  et  $\Gamma$  deux courbes sans composante commune. On suppose que  $W = \Gamma \cup C$  est une courbe schématiquement intersection complète, ce qui signifie qu'on a  $I_W = (F, G)$  (et donc, en particulier,  $W = V(F, G)$ ) avec  $F, G$  homogènes de degrés respectifs  $s$  et  $t$ . On dit alors que les courbes  $C$  et  $\Gamma$  sont *liées* par les surfaces d'équations  $F$  et  $G$ .

1) Montrer que  $F$  et  $G$  sont non nuls, non constants et n'ont pas de facteur commun non constant. Montrer que l'on a  $I_W = I_\Gamma \cap I_C$ .

2) Montrer que l'on a  $I_C = \{U \in R \mid \forall K \in I_\Gamma \quad UK \in I_W\}$  et la formule analogue en échangeant les rôles de  $C$  et  $\Gamma$ .

On suppose désormais que  $\Gamma$  est aussi schématiquement intersection complète, c'est-à-dire que l'on a  $I_\Gamma = (A, B)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes homogènes de degrés respectifs  $a$  et  $b$ . On remarquera que  $A$  et  $B$  sont non nuls, non constants et n'ont pas de facteur commun non constant. On pose  $F = F'A + F''B$  et  $G = G'A + G''B$  et  $H = F'G'' - F''G'$ . On précisera les degrés des polynômes homogènes  $F', F'', G', G'', H$ .

3) On se propose de montrer l'égalité  $I_C = (F, G, H)$ .

a) Montrer que l'on a  $(F, G, H) \subset I_C$ .

b) ¶ Soit  $U$  un polynôme tel que  $UA = \alpha F + \beta G$  et  $UB = \gamma F + \delta G$ . Montrer qu'il existe des polynômes  $\varphi$  et  $\psi$  tels que l'on ait les relations :

$$\beta F' + \delta F'' = \varphi F \quad \text{et} \quad U - \alpha F' - \gamma F'' = \varphi G,$$

$$\alpha G' + \gamma G'' = \psi G \quad \text{et} \quad U - \beta G' - \delta G'' = \psi F.$$

Montrer que  $U \in (F, G, H)$ . (On pourra commencer par étudier le cas où  $F'$  et  $F''$  n'ont pas de facteurs communs.) Conclure.

c) Montrer que  $C = V(F, G, H)$ .

4) On se propose de montrer qu'on a une résolution de  $I_C$  de la forme suivante :

$$0 \rightarrow R(-s-t+a) \oplus R(-s-t+b) \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\varphi} R(-s-t+a+b) \oplus R(-t) \oplus R(-s) \xrightarrow{p} I_C \rightarrow 0.$$

a) Préciser la flèche  $p$  et montrer qu'elle est surjective.

b) Proposer une conjecture plausible pour  $\varphi$  (il s'agit de déterminer les relations entre  $H, G, F$ ; elles sont déjà apparues en 3.a). Vérifier que cette flèche  $\varphi$  est injective.

c) ¶ Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  trois polynômes vérifiant  $\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$ . Montrer que l'on a  $\gamma \in (A, B) : \gamma = \gamma_1 A + \gamma_2 B$ . Puis, en écrivant de deux manières que  $\gamma H$  est dans l'idéal  $(F, G)$ , montrer que  $\alpha$  est dans  $(G', G'')$  et  $\beta$  dans  $(F', F'')$  et conclure.

5) ¶¶ On suppose  $k$  de caractéristique zéro. Soit  $\Gamma$  la droite d'équations  $A = X$  et  $B = Y$  et soit  $s = t$  un entier  $> 1$ . Montrer, avec les notations ci-dessus, que pour un choix convenable des polynômes homogènes  $F', F'', G', G''$  de degré  $s - 1$  la courbe  $C = V(F, G, H)$  est irréductible et lisse. (On pourra utiliser le théorème de lissité générique.)

### 3. Un exemple

1) Soit  $C_0$  la courbe plane d'équation  $Y^4 + X^3T + XYT^2$ . Montrer que  $C_0$  est irréductible. Déterminer ses points singuliers et son genre géométrique. (On supposera la caractéristique de  $k$  différente de 5. ¶ Que se passe-t-il en caractéristique 5?)

2) Soit  $C = V(F, G, H)$  la sous-variété de  $\mathbf{P}^3$  définie par les équations  $F = XT - YZ, G = X^2Z + Y^3 + YZT$  et  $H = XZ^2 + Y^2T + ZT^2$ . Montrer que  $C$  est une courbe irréductible (on pourra, par exemple, utiliser la

projection sur le plan des  $(x, z, t)$ . En utilisant la projection  $\pi$  sur le plan des  $(x, y, t)$ , montrer que  $C$  et  $C_0$  sont birationnellement équivalentes. (On précisera soigneusement les morphismes et leurs domaines de définition.)

3) On suppose la caractéristique de  $k$  différente de 5. Montrer que  $C$  est une courbe lisse. (On pourra utiliser  $\pi$  pour abrégier les calculs.) Montrer que  $V(F, G) = C \cup \Gamma$  où  $\Gamma$  est la droite  $V(X, Y)$ . Montrer (¶¶) que  $C$  et  $\Gamma$  sont liées par les surfaces d'équations  $F$  et  $G$ . En déduire l'idéal  $I_C$ , et prouver que  $C$  est ACM. Calculer ses invariants  $d, g, s_0, e$ . (On peut utiliser les résultats des parties I et II ou procéder directement.)

## Examen, juin 1992

Les deux problèmes sont indépendants.

### Problème I

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

On rappelle qu'une variété  $X$  est dite séparée si la diagonale

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

est fermée dans le produit  $X \times X$ . On rappelle aussi que toute variété projective est séparée et complète : pour toute variété  $Y$  la deuxième projection  $p : X \times Y \rightarrow Y$  est fermée, i.e. transforme un fermé en un fermé.

1) Soient  $X, Y, Z$  trois variétés. On suppose  $X$  et  $Y$  irréductibles,  $X$  projective et  $Z$  séparée. On désigne par  $\pi, p$  et  $q$  les projections  $\pi : X \times Y \times Z \rightarrow X$ ,  $p : X \times Y \times Z \rightarrow Y \times Z$  et  $q : Y \times Z \rightarrow Y$ .

Soit  $\varphi : X \times Y \rightarrow Z$  un morphisme. On suppose qu'il existe un point  $y_0$  de  $Y$  tel que  $\varphi(X \times \{y_0\})$  soit réduit à un point. On se propose de montrer que pour tout  $y \in Y$ ,  $\varphi(X \times \{y\})$  est réduit à un point.

Soit  $\Gamma$  le graphe de  $\varphi$  :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid z = \varphi(x, y)\}.$$

a) Montrer que  $\Gamma$  est fermé dans  $X \times Y \times Z$ , que  $\Gamma' = p(\Gamma)$  est fermé dans  $Y \times Z$  et que  $\Gamma'$  est irréductible.

b) Montrer que l'on a  $\dim \Gamma' = \dim Y$  (utiliser la projection  $q$ ).

c) Conclure.

(Considérer, pour  $x_0 \in X$ , la sous-variété  $\Gamma_{x_0} = \pi^{-1}(\{x_0\}) \cap \Gamma$  de  $\Gamma$  et son image par  $p$ .) Le résultat est-il encore vrai sans l'hypothèse  $X$  projective ?

2) Soit  $G$  un groupe algébrique (i.e. une variété algébrique, munie d'une structure de groupe telle que la multiplication  $\mu : G \times G \rightarrow G$  et le passage à l'inverse  $\sigma : G \rightarrow G$ , donnés respectivement par  $\mu(x, y) = xy$  et  $\sigma(x) = x^{-1}$ , soient des morphismes).

a) On suppose que  $G$  est une variété irréductible et projective. Montrer que  $G$  est un groupe commutatif. (On pourra utiliser l'application  $\varphi$  de  $G \times G$  dans  $G$  donnée par  $\varphi(g, h) = g^{-1}hg$ .) Ce résultat est-il encore vrai si  $G$  n'est pas projective? pas irréductible?

b) Soient  $G$  et  $H$  deux groupes algébriques irréductibles et projectifs et  $\varphi : G \rightarrow H$  un morphisme de variétés. Montrer qu'il existe un élément  $a \in H$  et un morphisme  $\psi : G \rightarrow H$ , morphisme à la fois de variétés et de groupes, tels que l'on ait, pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g) = a\psi(g)$ .

## Problème II

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos. Si  $X$  est une variété on désigne par  $\mathcal{O}_X$  son faisceau structural.

1) Soit  $F$  un sous-ensemble fini de  $\mathbf{P}^2$ . On munit  $F$  de sa structure naturelle de sous-variété algébrique de  $\mathbf{P}^2$  et on note  $\mathcal{J}_F$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$  qui définit  $F$ . Montrer qu'il existe une droite  $\Delta$  qui ne rencontre pas  $F$ . On note  $\delta$  l'équation d'une telle droite. Montrer que la multiplication par  $\delta$  donne la suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_F(-1) \xrightarrow{\delta} \mathcal{J}_F \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0.$$

(On pourra travailler sur les ouverts affines standard.)

En déduire que si on a  $H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{J}_F(n)) = 0$  pour  $n \geq -2$  on a

$$H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{J}_F(k)) = 0$$

pour tout  $k \geq n$ .

Dans toute la suite on travaille dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^3$ .

2) Soit  $C$  une courbe irréductible et lisse de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^3$  et  $H$  un plan d'équation  $h$ . On suppose que  $C \cap H$  est fini et formé de  $d$  points distincts. On note  $\mathcal{J}_C$  le faisceau d'idéaux qui définit  $C$  dans  $\mathbf{P}^3$  et  $\mathcal{J}_{C \cap H, H}$  celui qui définit  $C \cap H$  dans  $H$ . Montrer que la multiplication par  $h$  donne une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_C(-1) \xrightarrow{h} \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{J}_{C \cap H, H} \rightarrow 0.$$

On suppose qu'on a, pour un entier  $n \geq -2$ ,

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(n)) = H^1(C, \mathcal{O}_C(n-1)) = 0.$$

Montrer qu'on a, pour tout  $k \geq n$ ,  $H^1(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(k)) = 0$ .

Soit  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$  l'application donnée par :

$$\varphi(u, v) = (u^4, u^3v, uv^3, v^4).$$

3) a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{P}^1$  sur une courbe projective lisse irréductible  $C$  de  $\mathbf{P}^3$ . Déterminer le degré et le genre de  $C$ .

On note  $\mathcal{J}_C$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$  qui définit  $C$ .

b) Montrer que  $H^1(C, \mathcal{O}_C(n)) = 0$  pour  $n \geq 0$ . Calculer les dimensions des espaces  $H^1(C, \mathcal{O}_C(n))$  pour  $n \in \mathbf{Z}$ .

c) Déterminer explicitement les espaces

$$H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(1)) \text{ et } H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(2)).$$

Calculer les dimensions de  $H^1(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(n))$  pour  $n \in \mathbf{Z}$ . (Commencer par  $n = 1$  et  $2$  et utiliser 2).)

d) Calculer les dimensions des espaces  $H^i(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(n))$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  et  $n \in \mathbf{Z}$ .

¶ Déterminer explicitement l'espace  $H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{J}_C(3))$ .

## Examen, janvier 1993

L'objet du problème est la démonstration d'un théorème de Castelnuovo sur la majoration du genre d'une courbe de  $\mathbf{P}^3$  en fonction de son degré.

### Notations

Dans tout ce qui suit  $k$  désigne un corps algébriquement clos et  $\mathbf{P}^N$  l'espace projectif de dimension  $N$  sur  $k$ . On note  $R$  l'anneau de polynômes  $k[X, Y, T]$ . Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur une sous-variété fermée  $Z$  de  $\mathbf{P}^N$  et si  $j : Z \rightarrow \mathbf{P}^N$  est l'injection canonique on identifiera  $\mathcal{F}$  et son image directe  $j_*(\mathcal{F})$ . On sait que cette identification n'affecte pas la cohomologie du faisceau en question. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur  $\mathbf{P}^N$  on note  $h^i(\mathcal{F})$  la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $H^i(\mathbf{P}^N, \mathcal{F})$ .

Si  $X$  est une sous-variété fermée de  $\mathbf{P}^N$  on note  $\mathcal{O}_X$  le faisceau structural de  $X$ ,  $I_X$  l'idéal homogène de  $X$  et  $\mathcal{J}_X$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}$

qui définit  $X$ . On a, avec l'identification de  $\mathcal{O}_X$  et de son image directe, la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

On a aussi, pour  $n \in \mathbf{Z}$ , les suites exactes analogues :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(n) \rightarrow \mathcal{O}_X(n) \rightarrow 0,$$

obtenues par décalage.

Le cardinal d'un ensemble fini  $A$  est noté  $|A|$ . La partie entière d'un nombre réel  $x > 0$  est notée  $[x]$ .

### 1. Etude cohomologique des ensembles finis de $\mathbf{P}^2$

Soit  $Z$  un ensemble fini de points de  $\mathbf{P}^2$ , de cardinal  $d > 0$ . On munit  $Z$  de sa structure naturelle de variété algébrique. Le faisceau structural  $\mathcal{O}_Z$  de  $Z$  est alors simplement le faisceau des fonctions sur  $Z$  à valeurs dans  $k$ . On rappelle qu'on a  $d = h^0 \mathcal{O}_Z$  et que  $\mathcal{O}_Z$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_Z(n)$  pour tout  $n$ .

Soit  $D$  une droite de  $\mathbf{P}^2$ , d'équation  $\delta$ . On pose  $Z' = Z \cap D$  et  $Z'' = Z - Z'$  et on munit  $Z'$  et  $Z''$  de leurs structures naturelles de variétés algébriques. On note  $I_{Z'/D}$  l'idéal de  $Z'$  dans  $R/(\delta)$  et  $\mathcal{J}_{Z'/D}$  le faisceau d'idéaux qui définit  $Z'$  dans  $D$ .

0) Calculer  $h^1 \mathcal{J}_Z(n)$  pour  $n \leq 0$ .

1) Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . Montrer que la multiplication par  $\delta$  induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_{Z''}(n-1) \rightarrow \mathcal{J}_Z(n) \rightarrow \mathcal{J}_{Z'/D}(n) \rightarrow 0.$$

(On pourra commencer par montrer qu'on a une suite exacte de  $R$ -modules gradués :

$$0 \rightarrow I_{Z''}(n-1) \xrightarrow{\delta} I_Z(n) \rightarrow I_{Z'/D}(n).$$

2) On suppose que l'on a  $|Z'| = l \geq 0$ . Montrer que  $h^1 \mathcal{J}_{Z'/D}(n)$  est nul pour  $n \geq l-1$ . (On pourra, par exemple, montrer que  $\mathcal{J}_{Z'/D}(n)$  est isomorphe au faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n-l)$ .)

3) Montrer que la fonction  $n \mapsto h^1 \mathcal{J}_Z(n)$  est décroissante sur  $\mathbf{N}$ . (On pourra appliquer 1) à une droite qui ne rencontre pas  $Z$ .)

4) Montrer que l'on a, pour  $n \geq 0$ ,  $h^1 \mathcal{J}_Z(n) \leq \sup(0, d-n-1)$ . (On raisonnera par récurrence sur  $d$  en appliquant 1) à une droite  $D$  qui ne contient qu'un point de  $Z$ .)

5) On suppose que  $Z$  n'a pas de trisécante (i.e. que trois points distincts de  $Z$  ne sont jamais alignés). Montrer que l'on a, pour  $n \geq 0$ ,  $h^1 \mathcal{J}_Z(n) \leq \sup(0, d - 2n - 1)$ .

## 2. Existence de bonnes sections planes

Soit  $C$  une courbe irréductible et lisse de  $\mathbf{P}^3$ , de degré  $d$ . On suppose que  $C$  n'est pas une courbe plane. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Il existe un plan  $H$  tel que  $Z = C \cap H$  soit un ensemble fini, de cardinal  $d$ , sans trisécante (cf. I, 5).

On note  $E$  l'espace vectoriel  $k^4$ . On a donc  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^3$ . On considère l'espace projectif  $\mathbf{P}(E^*)$  associé à l'espace dual. Les points de  $\mathbf{P}(E^*)$  correspondent aux formes linéaires non nulles sur  $E$ , à un scalaire près, donc encore aux plans de  $\mathbf{P}^3$ .

1) On suppose que  $Z = C \cap H$  est formé de  $d$  points distincts. Montrer que  $Z$  n'est pas contenu dans une droite.

On admettra qu'il existe un ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbf{P}(E^*)$  tel que tout plan  $H \in \Omega$  vérifie les deux propriétés suivantes :

a)  $Z = C \cap H$  est formé de  $d$  points distincts (cf. Exercice VIII, 1),  
 b) il existe deux points distincts  $P, Q$  de  $Z = C \cap H$  tels que la droite  $\langle PQ \rangle$  ne soit pas une trisécante de  $Z$ .

2) On pose  $F = \{(P, Q, R) \in C \times C \times C \mid P, Q, R \text{ alignés}\}$ . Montrer que  $F$  est un fermé de  $C \times C \times C$ .

3) Soit  $V$  la sous-variété ouverte de  $C \times C$  formée des points  $P, Q$  avec  $P \neq Q$ . Soit  $V'$  la partie de  $V$  correspondant aux trisécantes de  $C$  :

$$V' = \{(P, Q) \in V \mid |C \cap \langle PQ \rangle| \geq 3\}.$$

Montrer que si  $V'$  n'est pas contenu dans un fermé strict de  $V$  il contient un ouvert non vide de  $V$ . (On pourra écrire  $V'$  comme projection d'un ouvert de  $F$ .)

4) Montrer que  $V'$  est contenu dans un fermé strict de  $V$ . (Si  $V'$  contient un ouvert non vide de  $V$ , on obtiendra une contradiction en considérant la sous-variété fermée de  $V \times \Omega$

$$W = \{(P, Q, H) \in V \times \Omega \mid P, Q \in H\}$$

et ses projections  $p$  et  $\pi$  respectivement sur  $V$  et  $\Omega$ .)

5) On note  $M$  l'ensemble des plans de  $\Omega$  dont l'intersection avec  $C$  contient trois points alignés. Montrer, en utilisant encore  $W$ , que l'on a  $\dim M \leq 2$ . Conclure.

### 3. Majoration du genre d'une courbe de $\mathbf{P}^3$

Soit  $C$  une courbe irréductible et lisse de  $\mathbf{P}^3$ , de degré  $d$  et de genre  $g$ . On pose :

$$e(C) = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1 \mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

Soit  $H$  un plan ne contenant pas  $C$ ,  $h$  son équation. On suppose que  $Z = C \cap H$  est formé de  $d$  points distincts. On identifie  $H$  et  $\mathbf{P}^2$  et on reprend les notations de la première partie.

1) Montrer qu'on a, pour tout  $n$ ,  $h^1 \mathcal{O}_C(n) = h^2 \mathcal{J}_C(n)$ .

2) Montrer que la multiplication par  $h$  induit le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_C(n-1) & \rightarrow & \mathcal{J}_C(n) & \rightarrow & \mathcal{J}_Z(n) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n-1) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_C(n-1) & \rightarrow & \mathcal{O}_C(n) & \rightarrow & \mathcal{O}_Z(n) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

3) Montrer qu'on a l'inégalité  $h^1 \mathcal{O}_C(n-1) - h^1 \mathcal{O}_C(n) \leq h^1 \mathcal{J}_Z(n)$ . En déduire qu'on a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  :

$$h^1 \mathcal{O}_C(n) \leq \sum_{k \geq n+1} h^1 \mathcal{J}_Z(k).$$

4) Montrer que l'on a  $g \leq (d-1)(d-2)/2$ . Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si  $C$  est une courbe plane.

5) On suppose que  $C$  n'est pas une courbe plane. Montrer que l'on a :

$$g \leq \begin{cases} (m-1)^2, & \text{si } d = 2m; \\ m(m-1), & \text{si } d = 2m+1. \end{cases}$$

(théorème de Castelnuovo).

6) Montrer que l'on a  $e(C) \leq d - 3$  (resp.  $e(C) \leq [d/2] - 2$  si  $C$  n'est pas plane). Pour quelles courbes a-t-on  $e(C) = d - 3$  ?

#### 4. Un exemple

Soient  $a, b$  des entiers  $> 0$  avec  $a+2 \leq b$ . Soit  $C$  une courbe irréductible et lisse de  $\mathbf{P}^3$  dont le faisceau d'idéaux admet la résolution :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-b-2)^{b-a-1} \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-b-1)^{2(b-a)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-b)^{b-a+1} \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Calculer le degré et le genre de  $C$ . Comparer avec les bornes données en III, 5. On proposera des résolutions pour des courbes susceptibles d'atteindre ces bornes.

### Examen, juin 1993

Le problème et les deux exercices sont indépendants.

#### Problème

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos et on désigne par  $\mathbf{P}^N$  l'espace projectif de dimension  $N$  sur  $k$ . On note  $R$  l'anneau de polynômes  $k[X, Y, Z, T]$ .

On rappelle le résultat suivant (cf. Exercice IV, 7) : soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant de variétés projectives, on suppose  $Y$  irréductible et les fibres de  $\varphi$  irréductibles et de dimension constante, alors  $X$  est irréductible.

#### 1. Construction de la variété des droites de $\mathbf{P}^3$

Soient  $P = (x, y, z, t)$  et  $P' = (x', y', z', t')$  deux points distincts de  $\mathbf{P}^3$ . On appelle  $l, m, n, l', m', n'$  les six mineurs  $2 \times 2$  de la matrice

$$\mu(P, P') = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \end{pmatrix};$$

plus précisément, on pose :

$$l = xy' - x'y, \quad l' = zt' - z't, \quad m = xz' - x'z,$$

$$m' = yt' - y't, n = xt' - x't, n' = yz' - y'z.$$

0) Montrer qu'on a la relation  $ll' - mm' + nn' = 0$ .

On considère l'espace projectif  $\mathbf{P}^5$  muni des coordonnées homogènes  $l, m, n, l', m', n'$ . Soit  $G$  le sous-ensemble de  $\mathbf{P}^5$  défini par l'équation

$$ll' - mm' + nn' = 0.$$

1) Montrer que  $G$  est une sous-variété projective de  $\mathbf{P}^5$ , lisse et irréductible et préciser sa dimension.

2) Soit  $\varphi$  l'application qui associe à deux points distincts  $P, P'$  de  $\mathbf{P}^3$  les six mineurs  $l, m, n, l', m', n'$  de  $\mu(P, P')$ , définis comme ci-dessus. Soit  $\Delta$  la diagonale de  $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$  (i.e. l'ensemble des couples  $(P, P)$  pour  $P \in \mathbf{P}^3$ ). Montrer que  $\varphi$  induit un morphisme de  $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 - \Delta$  dans  $\mathbf{P}^5$  dont l'image est contenue dans  $G$ . Montrer que  $\varphi(P, P')$  ne dépend que de la droite  $D = \langle P, P' \rangle$  (si  $Q, Q'$  sont deux autres points distincts de  $D$  on comparera  $\mu(Q, Q')$  et  $\mu(P, P')$ ). Montrer que  $\varphi$  induit une bijection de l'ensemble des droites projectives de  $\mathbf{P}^3$  sur  $G$ . (On pourra s'intéresser aux points d'intersection des droites avec les plans de coordonnées.)

On identifiera désormais l'ensemble des droites projectives de  $\mathbf{P}^3$  à la variété (dite *Grassmannienne*)  $G$ . Les coordonnées  $l, m, n, l', m', n'$  sont appelées les *coordonnées de Plücker* de la droite  $\langle P, P' \rangle$ .

3) Etudier les fibres du morphisme  $\varphi$  et préciser notamment leur dimension.

## 2. La variété d'incidence, applications

Soit  $d$  un entier  $> 0$  et soit  $R_d = H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d))$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  en  $X, Y, Z, T$ . On identifie l'espace des surfaces de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^3$  à l'espace projectif  $\mathbf{P}(R_d)$ .

0) Quelle est la dimension de  $\mathbf{P}(R_d)$  ?

On pose  $V_d = \{(D, F) \in G \times \mathbf{P}(R_d) \mid D \subset F\}$  et on note  $\pi$  (resp.  $p$ ) la projection de  $V_d$  dans  $\mathbf{P}(R_d)$  (resp. dans  $G$ ).

1) Soit  $H$  le plan d'équation  $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T = 0$  et soit  $D$  une droite non contenue dans  $H$ . Déterminer les coordonnées homogènes du point d'intersection de  $D$  et  $H$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et des coordonnées de Plücker de  $D$ . Étudier le cas  $D \subset H$ .

2) Montrer que  $V_d$  est une sous-variété fermée de  $G \times \mathbf{P}(R_d)$ , dite *variété d'incidence* (on pourra utiliser 1) en faisant varier le plan  $H$ ). Montrer que les projections  $\pi$  et  $p$  sont des morphismes fermés (i.e. qui transforment un fermé en un fermé).

3) Préciser les fibres  $p^{-1}(D)$  pour  $D \in G$  (on pourra utiliser Riemann-Roch). En déduire que  $p$  est surjective, que  $V_d$  est irréductible et calculer sa dimension.

4) On suppose  $d \geq 4$ . Montrer que  $\pi$  n'est pas dominante. En déduire qu'il existe un ouvert non vide de  $\mathbf{P}(R_d)$  formé de surfaces qui ne contiennent aucune droite. (On dit que la surface "générale" de degré  $\geq 4$  ne contient pas de droites.)

5) On suppose  $d = 3$ . Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de droites sur la surface  $XYZ - T^3 = 0$  (on pourra procéder directement ou utiliser 1) et 2) ci-dessus). En déduire que  $\pi$  est surjective et que sur une surface cubique générale il y a un nombre fini de droites. Etudier le cas de la surface  $XYZ + T(X^2 + Y^2 + Z^2) - T^3 = 0$  (on pourra montrer que les droites qui ne rencontrent pas la droite  $X = T = 0$  sont définies par des équations de la forme  $Y = aX + bT$ ,  $Z = cX + dT$ ).

6) Etudier le cas  $d = 1$ .

7) On suppose  $d = 2$ . Déterminer les coordonnées de Plücker des droites contenues dans la quadrique d'équation  $XY - ZT = 0$ . Montrer qu'elles forment un fermé de dimension 1 de  $G$ . En déduire que  $\pi$  est surjective. Les fibres de  $\pi$  sont-elles toutes de même dimension ?

### Exercice 1

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . On considère les deux polynômes  $F = XY - ZT$  et  $G = aZ^2 + bZ + c$ , où  $a, b, c$  sont des polynômes en  $X, Y, T$ , homogènes de degrés respectifs  $n - 2, n - 1, n$ , avec  $a$  non multiple de  $T$ . Soit  $C$  la sous-variété de  $\mathbf{P}_k^3$  d'équations  $F = 0$  et  $G = 0$ . On suppose que  $C$  est une courbe irréductible et que l'on a  $I(C) = (F, G)$ .

1) Calculer le degré  $d$  et le genre arithmétique  $p_a$  de  $C$ .

2) Montrer que  $C$  est birationnellement équivalente à la courbe plane  $\Gamma$  d'équation  $aX^2Y^2 + bXYT + cT^2 = 0$ . En déduire que le genre géométrique  $g$  de  $C$  vérifie  $g < n(n + 1)/2$ . Montrer que, si l'on a  $n \geq 5$ ,  $C$  n'est pas lisse.

3) Déterminer le genre géométrique de la courbe plane d'équation  $X^2Y^2 + X^2YT + T^4$ .

**Exercice 2**

On travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos.

Soient  $n$  un entier  $> 0$ ,  $R$  l'anneau  $k[X_0, \dots, X_n]$  et  $\mathbf{P}^n$  l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $k$ . Soit  $r$  un entier  $\geq 0$ . On considère, pour  $i = 0, \dots, r$ , un polynôme homogène  $F_i \in R$ , de degré  $d_i > 0$ . Soit

$$\varphi : \bigoplus_{i=0}^r R(-d_i) \rightarrow R$$

l'application  $R$ -linéaire définie par la formule

$$\varphi(G_0, \dots, G_r) = \sum_{i=0}^r F_i G_i$$

et soit

$$\psi : \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$$

l'homomorphisme de faisceaux associé à  $\varphi$ .

1) Montrer que  $\psi$  est surjectif si et seulement si  $V(F_0, \dots, F_r)$ , sous-variété de  $\mathbf{P}^n$ , est vide. Pour quelles valeurs de  $r$  cette condition est-elle réalisable ?

On suppose désormais  $r = n$  et  $\psi$  surjective. Soit  $\mathcal{N}$  le noyau de  $\psi$ .

2) Déterminer, pour  $i = 0, \dots, n$ , la dimension de  $V(F_0, \dots, F_i)$ .

3) Montrer que pour tout  $i$  vérifiant  $2 \leq i \leq n-1$  et tout  $d \in \mathbf{Z}$  on a  $H^i(\mathbf{P}^n, \mathcal{N}(d)) = 0$ . Calculer la dimension de  $H^n(\mathbf{P}^n, \mathcal{N}(d))$ .

4) Montrer que les groupes  $H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{N}(d))$  ne sont pas tous nuls et préciser la plus petite valeur de  $d$  telle que  $H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{N}(d))$  soit non nul.

5) On suppose que l'on a  $F_i = X_i^2$  pour tout  $i$ . Calculer la dimension de  $H^1(\mathbf{P}^n, \mathcal{N}(d))$  pour tout  $d \in \mathbf{Z}$ .

**Examen, février 1994**

La partie 5 n'est pas à traiter pour l'examen. Le signe ¶ indique une question difficile.

## 0. Rappels et notations

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps  $k$  algébriquement clos. On note  $R$  l'anneau de polynômes  $k[X, Y, Z, T]$ .

Si  $p$  est un entier  $\geq 1$  on note  $\binom{n}{p}$  le coefficient binomial, avec la convention que ce coefficient est nul pour  $n < p$ .

On note  $\mathbf{M}_{p,q}$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $p \times q$  à coefficients dans  $k$ . Cet espace est muni d'une structure naturelle de variété affine isomorphe à l'espace affine  $k^{pq}$ . On désigne par  $C_s$  le sous-ensemble de  $\mathbf{M}_{p,q}$  formé des matrices de rang  $\leq s$ . On rappelle que  $C_s$  est un fermé irréductible de codimension  $(p-s)(q-s)$  de  $\mathbf{M}_{p,q}$  (cf. Exercice IV, 3).

On rappelle le résultat suivant :

**Théorème d'intersection.** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles algébriques affines irréductibles de  $k^n$  de dimensions  $r$  et  $s$ , toute composante irréductible de  $X \cap Y$  est de dimension  $\geq r + s - n$ , (cf. IV, 2.5).*

(Attention, si  $X \cap Y$  est vide, cet énoncé ne dit rien sur les dimensions.)

Soit  $r$  un entier  $\geq 2$  et soient  $E$  et  $F$  deux  $R$ -modules libres gradués :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{r-1} R(-m_j), \quad F = \bigoplus_{i=1}^r R(-n_i),$$

où les  $m_j$  et les  $n_i$  sont des entiers relatifs qui vérifient :  $n_1 \leq \dots \leq n_r$  et  $m_1 \leq \dots \leq m_{r-1}$ . On suppose de plus que l'on a  $m_j \neq n_i$  pour tous les couples  $i, j$  et

$$\sum_{j=1}^{r-1} m_j = \sum_{i=1}^r n_i.$$

Soit  $u : E \rightarrow F$  un homomorphisme  $R$ -linéaire gradué de degré zéro (i.e. qui envoie un élément de degré  $n$  sur un élément de degré  $n$ ). On notera  $e_j$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ) et  $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ), respectivement, les vecteurs de base canoniques de  $E$  et  $F$ . L'homomorphisme  $u$  est donné, dans ces bases, par une matrice  $A = (a_{ij})$  de taille  $r \times (r-1)$  dont le coefficient d'indices  $i, j$  est un polynôme homogène de degré  $m_j - n_i$ . En particulier ce coefficient est nul si  $m_j < n_i$ .

Le but du problème est de donner des conditions sur les entiers  $m_j$  et  $n_i$  pour qu'il existe un homomorphisme injectif  $u : E \rightarrow F$  comme ci-dessus dont le conoyau soit l'idéal d'une courbe (resp. d'une courbe lisse) de  $\mathbf{P}^3$ .

On rappelle à ce propos (cf. X, 2.7) qu'on a les résultats suivants :

1)  $u$  est injectif si et seulement si les  $r - 1$ -mineurs  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  de  $A$  sont non tous nuls.

2) Si on suppose les  $\varphi_i$  non tous nuls, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Les  $\varphi_i$  sont sans facteur commun.

ii) Coker  $u$  est l'idéal saturé d'une courbe ACM dont l'idéal est engendré par les  $\varphi_i$ .

## 1. Résultats préliminaires

1) Soient  $n$  et  $p$  des entiers  $\geq 1$  et  $M$  une matrice de taille  $n \times p$  à coefficients dans un anneau commutatif  $S$  quelconque. On suppose  $M$  écrite sous forme de blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

où  $M_1$  est une matrice de taille  $k \times l$  avec  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq l \leq p$ . Soit  $I$  (resp.  $I_1$ ) l'idéal engendré par les  $p$ -mineurs de  $M$  (resp. par les  $l$ -mineurs de  $M_1$ ). Si on a  $p > n$  (resp.  $l > k$ ) on convient que les mineurs en question sont nuls. Montrer que l'on a  $I \subset I_1$ . (On se ramènera au cas  $p = n$  puis on raisonnera par récurrence sur  $n$ .)

2) Soit  $D$  le sous-espace de  $\mathbf{M}_{r,r-1}$  formé des matrices  $M = (\mu_{ij})$ ,  $\mu_{ij} \in k$ , vérifiant  $\mu_{ij} = 0$  pour  $i \geq j + 2$  et pour  $i \leq j - 1$  (donc les matrices qui n'ont que deux diagonales non nulles : on les appellera matrices bidiagonales).

a) Montrer que  $D \cap C_{r-2}$  est non vide et que toutes ses composantes irréductibles sont de codimension 2 dans  $D$ .

b) Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{M}_{r,r-1}$  contenant  $D$ . Montrer que toutes les composantes irréductibles de  $V \cap C_{r-2}$  sont de codimension 2 dans  $V$ . (On utilisera le théorème d'intersection appliqué notamment à  $D$  et à une composante irréductible  $Z$  de  $V \cap C_{r-2}$  en remarquant que la matrice nulle est dans  $Z$ .)

## 2. Les conditions nécessaires

Soit  $u : E \rightarrow F$  un homomorphisme gradué.

1) On suppose  $u$  injectif. Montrer que l'on a  $m_j > n_j$  pour tout  $j = 1, \dots, r-1$ . (On pourra étudier la restriction de  $u$  au sous-module  $\bigoplus_{k \leq j} R(-m_k)$ .)

2) On suppose que  $u$  est injectif et que le conoyau de  $u$  est l'idéal d'une courbe de  $\mathbf{P}^3$ . Cette courbe est connexe (cf. X, 2.4), mais pas nécessairement réduite.

Montrer que l'on a :  $\forall j = 1, \dots, r-1, m_j > n_{j+1}$ . (Utiliser 1.1.) En déduire qu'on a  $n_1 > 0$ .

3) On reprend les hypothèses de 2) et on suppose, de plus, que  $C$  est lisse (donc une variété irréductible, cf. V, 2.2).

Montrer que l'on a :  $\forall j = 1, \dots, r-2, m_j > n_{j+2}$ . (On utilisera 1.1 pour montrer que, sinon,  $C$  contiendrait une courbe distincte de  $C$ .)

## 3. Les conditions suffisantes, 1

On suppose que l'on a :  $\forall j = 1, \dots, r-1, m_j > n_{j+1}$ .

Soit  $H$  l'ensemble des homomorphismes  $u : E \rightarrow F$  homogènes de degré 0. On identifie  $H$  à l'ensemble des matrices  $A = (a_{ij})$  correspondantes.

1) Montrer que  $H$  est un  $k$ -espace vectoriel et préciser sa dimension que l'on notera  $N$ .

On considère l'application  $\psi : H \times (k^4 - \{0\}) \rightarrow \mathbf{M}_{r,r-1}$  définie par  $\psi(A, P) = A(P) = (a_{ij}(P))$  et on pose  $\psi_P(A) = \psi(A, P)$ .

2) a) Montrer que  $\psi$  est un morphisme. Montrer que, pour tout  $P \in k^4 - \{0\}$ ,  $\psi_P$  est une application linéaire de  $H$  dans  $\mathbf{M}_{r,r-1}$  dont l'image est le sous-espace vectoriel

$$V = \{M = (\mu_{ij}) \in \mathbf{M}_{r,r-1} \mid m_j < n_i \Rightarrow \mu_{ij} = 0\}.$$

On pose  $v = \dim V$ . Préciser les fibres de  $\psi_P$  et notamment leur dimension.

b) Montrer que  $V$  est aussi l'image de  $\psi$  et que  $V$  contient l'espace  $D$  des matrices bidiagonales.

3) Soit  $M \in \mathbf{M}_{r,r-1}$ . La fibre  $\psi^{-1}(M)$  est un fermé de  $H \times (k^4 - \{0\})$  que l'on munit de sa structure de variété. Calculer la dimension de  $\psi^{-1}(M)$ .

On pose  $W = \psi^{-1}(C_{r-2})$ . C'est un fermé de  $H \times (k^4 - \{0\})$ , que l'on munit de sa structure de variété.

4) Montrer qu'on a

$$W = \{(A, P) \in H \times (k^4 - \{0\}) \mid \varphi_1(P) = \dots = \varphi_r(P) = 0\}$$

où les  $\varphi_i$  sont les  $r - 1$ -mineurs de la matrice  $A$ .

Montrer que  $W$  est une variété de dimension  $N + 2$ .

5) Montrer qu'il existe un ouvert  $\Omega$  non vide de  $H$  tel que, pour tout  $u \in \Omega$ ,  $u$  soit injectif et que le conoyau de  $u$  soit l'idéal d'une courbe ACM de  $\mathbf{P}^3$ . (On pourra étudier la projection  $\pi_1$  de  $W$  sur  $H$  et ses fibres.)

Une telle propriété, vraie pour  $u$  dans un ouvert non vide, donc partout dense, de  $H$ , sera dite vraie pour  $u$  "général".

#### 4. Le genre des courbes ACM

L'objet de cette partie est de montrer que pour tout entier  $g \geq 0$  il existe une courbe ACM (mais pas nécessairement une courbe lisse) de genre arithmétique  $g$ . Soit  $C$  une courbe ACM avec la résolution  $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I_C \rightarrow 0$  avec  $E$  et  $F$  comme ci-dessus. On a donc, pour  $j = 1, \dots, r - 1$ ,  $m_j > n_{j+1}$ . On rappelle que le genre arithmétique  $g$  de  $C$  est donné par la formule :

$$g = \sum_{j=1}^{r-1} \binom{m_j - 1}{3} - \sum_{i=1}^r \binom{n_i - 1}{3}.$$

1) Montrer qu'on a :

$$g = \left( \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{n_{j+1} \leq n < m_j} \binom{n-1}{2} \right) - \binom{n_1-1}{3}.$$

(On pourra utiliser la formule :  $\binom{n+3}{3} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k+2}{2}$ .)

Les nombres entiers de la forme  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ , pour  $n \geq 2$ , sont appelés nombres triangulaires. Dans la suite on pourra utiliser le résultat suivant : tout nombre entier  $\geq 0$  est somme d'au plus trois nombres triangulaires.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Ce résultat est dû à Gauss (cf. Serre *Cours d'arithmétique* Ch. IV) mais il est déjà mentionné par Fermat dans la fameuse marge - toujours trop étroite - de son édition des œuvres de Diophante.

2) Montrer qu'on a  $r \leq n_1 + 1$ . Donner les valeurs possibles des  $n_i$  et des  $m_j$  lorsque  $n_1 = 1$  (resp. 2). Montrer qu'alors le genre de  $C$  est nul ou un nombre triangulaire (resp. une somme d'au plus deux nombres triangulaires). Montrer qu'on obtient ainsi tous les genres qui sont sommes d'au plus deux nombres triangulaires.

3) On suppose  $n_1 = 3$ . Montrer que  $g$  est somme de trois nombres triangulaires. Étudier la réciproque et conclure.

4) On pose  $n_1 = s$ . Montrer qu'on a :

$$g \geq s \binom{s-1}{2} - \binom{s-1}{3}.$$

¶ Montrer qu'il n'existe pas de courbe ACM lisse de genre 8.

## 5. Les conditions suffisantes, 2

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème suivant :

**Théorème** (Gruson-Peskine, 1976). *On suppose que  $k$  est de caractéristique 0. Avec les notations du paragraphe 0 ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) on a  $\forall j = 1, \dots, r-2, \quad m_j > n_{j+2}$ ,

ii) si  $u : E \rightarrow F$  est assez général,  $u$  est injectif et son conoyau est l'idéal d'une courbe ACM lisse et connexe.

¶ 1) On reprend les notations précédentes et notamment celles du paragraphe 3, mais on munit  $W$  de sa structure de schéma. On suppose que l'on a  $m_1 > n_r$  (ce qui implique la condition i). On pose  $S = \psi^{-1}(C_{r-3})$ .

a) Montrer qu'on a  $\dim S < N$  et que  $W - S$  est une variété lisse.

b) On considère la restriction de la projection  $\pi_1$  à l'ouvert  $W - S$ . En appliquant le théorème de lissité générique (cf. Problème VI et Appendice sur les schémas), montrer qu'il existe un ouvert de  $H$  sur lequel les fibres de  $\pi_1$  sont lisses. Conclure.

¶¶ 2) Prouver le théorème de Gruson-Peskine dans le cas général.

# Références bibliographiques

- [Bbki] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre commutative*, Hermann.
- [BBM] E. Ballico, G. Bolondi et J. Migliore, The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of  $\mathbf{P}^n$ . *Amer. J. of Math.* 113, 1991, 117-128.
- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publications Mathématiques de l'IHES, numéros 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [F] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Benjamin, 1969.
- [G] R. Godement, *Topologie algébrique et Théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
- [Go] C. Godbillon, *Topologie Algébrique*, Hermann, 1971.
- [GP] L. Gruson, C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif (II), *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t.15, 1982, p.401-418.
- [Gr] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, PUF, Collection Sup, 1971.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [L] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.
- [M] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Math. numéro 1358, Springer-Verlag.

- [Ma] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin, 1970.
- [MDP] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches, *Astérisque*, Vol. 184-185, 1990.
- [P] D. Perrin, *Cours d'Algèbre*, Collection de l'ENSJF N° 18, 1981.
- [Pes] C. Peskine, Introduction algébrique à la géométrie projective, Université Paris 6, en préparation.
- [PS] C. Peskine et L. Szpiro, Liaison des variétés algébriques, *Invent. Maths.*, 26, 1974, 271-302.
- [R] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1974.
- [Rao] A.P. Rao, Liaison among curves in  $\mathbf{P}^3$ , *Invent. Math.*, 50, 1979, 205-217.
- [S] P. Samuel, *Théorie Algébrique des Nombres*, Hermann, 1967.
- [Sh] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [Tohoku] A. Grothendieck, Sur quelques points d'Algèbre Homologique, *Tôhoku Math. J.* 9, 1957, 119-221.

# Index terminologique

- ACM : voir courbe ACM  
Adjonction (formule d') 77  
Affine (morphisme) 184  
Algèbre affine (d'un ensemble algébrique affine) 12  
Algèbre finie 237, 98  
Algébriquement génératrice (famille) 241  
libre (famille) 241  
Anneau de valuation discrète 256, 112, 166  
Anneau des nombres duaux 104  
Anneau gradué 38  
associé à un ensemble algébrique projectif 37  
Anneau local 236  
d'une variété en un point 55  
Application linéaire tangente 106  
Associé (idéal premier) 229
- Base de transcendance 241  
Base d'ouverts 238, 11, 52  
Bémol (opération) 64, 78  
Bertini (théorème de) 262, 249  
Bézout (théorème de) 5, 125, 21  
Biliaison 228  
Birationnelle (application) 177  
Birationnellement équivalent 177
- Caractère 20  
Caractéristique d'Euler-Poincaré 155
- Castelnuovo (théorème de) 284  
Catégorie 23  
Caténaire (anneau) 89  
Chaîne  
de parties 82  
d'idéaux premiers 83  
Clôture intégrale 237, 187  
Cobord 135, 139  
Cocycle 135, 139  
Cohen-Seidenberg (théorème de) 255  
Cohérent (faisceau) 60  
Cohomologie 134, 139  
de Čech 139  
(groupe de) 135, 139  
Commutorium 101  
Complète (variété) 252  
Complexe (de groupes) 136  
Composante irréductible 16, 53  
Cône (d'un ensemble algébrique projectif) 35, 90  
Conique 2, 33, 116  
Constructible 92  
Contravariant (foncteur) 24  
Courbe 86, 112, 155  
ACM (Arithmétiquement de Cohen-Macaulay) 212, 275  
elliptique 2, 117, 175  
gauche 159, 204, 212, 227  
unicursale (ou rationnelle) 177, 6  
Couverture minimale 271

- Cubique  
   cuspidale 2, 117, 165  
   gauche 41  
   nodale 2, 117
- Dedekind (anneau de) 257
- Déformation 105  
   infinitésimale 105
- Degré  
   d'une courbe 156  
   d'un diviseur 165
- Degré de transcendance 241, 84
- Dérivation 106
- Déshomogénéisation 63, 78
- Désingularisation 180, 183, 195
- Dièze (opération) 64, 78
- Différentielle (d'un complexe) 136
- Dimension  
   d'un espace topologique 82  
   de Krull 83  
   projective 208, 269
- Dissocié (faisceau) 204
- Diviseur 165  
   canonique 171  
   positif 165  
   principal 165
- Division euclidienne 233
- Dominant 25
- Droite exceptionnelle 188, 189
- Dual (module gradué) 218
- Eclatement  
   affine 188  
   local standard 193  
   global 194
- Élément entier 237
- Élément nilpotent 234
- Ensemble algébrique  
   affine 9  
   projectif 35
- Ensemblistement intersection  
   complète 42, 162
- Equidimensionnelle (variété) 86
- Equivalence de catégories 26, 178
- Espace annelé 46
- Extension des scalaires 239
- Factoriel (anneau) 235, 88
- Faisceau 44  
   associé  
     à un  $A$ -module 59  
     à un  $R$ -module gradué 66  
     à un préfaisceau 46  
   d'anneaux 46  
   décalé 68  
   d'idéaux 58
- Faisceau inversible associé à  
   un diviseur 167
- Faisceau structural 46, 47, 61
- Fermeture intégrale 237
- Fibre (d'un morphisme) 91, 247
- Fini (morphisme) 98, 184
- Foncteur 24
- Genre  
   arithmétique 157  
   géométrique 182
- Germe de fonction 55
- Going-up 255
- Gorenstein (lemme de) 192
- Graduée (algèbre) 38
- Grassmannienne 102, 285
- Groupe  
   algébrique 259, 279  
   orthogonal 101, 104
- Gruson-Peskin (théorème de) 292
- Hauptidealsatz 86
- Hilbert-Samuel (fonction de) 114
- Homogène  
   (coordonnée) 30  
   (homomorphisme) 39  
   (idéal) 39, 36  
   (polynôme) 34, 38
- Homogénéisation 63, 78
- Homographie 31
- Hyperplan à l'infini 32
- Hypersurface 10

- Idéal d'un ensemble algébrique
  - affine 12
  - projectif 36
- Idéal engendré 233
- Image (d'un homomorphisme
  - de  $\mathcal{O}_X$ -modules) 57
- Image directe (d'un faisceau) 58
- Image réciproque (d'un faisceau) 77
- Immergé (point, composante) 229
- Inconvenant, ou irrelevant (idéal) 35
- Indice de spécialité 213
- Injectif (pour un homomorphisme
  - de  $\mathcal{O}_X$ -modules) 57
- Intégralement clos (anneau) 237, 112, 187
- Intègre (anneau) 234, 14
- Intersection complète (variété) 41, 71, 152, 161, 173
- Irréductible
  - (élément) 235
  - (ensemble algébrique affine) 14
  - (ensemble algébrique projectif) 36
  - (variété) 53
- Jacobien (critère) 108
- Jacobienne (matrice) 107, 109
- Libre (module) 238
- Liée
  - (algébriquement) 222
  - (courbe) 221, 276
  - (géométriquement) 221
- Lisse
  - (morphisme) 260
  - (point) 108
  - (variété) 108
- Lissité générique
  - (théorème de) 261
- Local
  - (anneau) 236
  - (homomorphisme) 56
- Localement fermé 54
- Localement plane (courbe) 194
- Localisé d'un anneau 236
- Longueur (d'une résolution) 208
- Maximal (idéal) 234, 19
- Mineur (déterminant) 215, 216, 223
- Minimal (homomorphisme) 208
- Minimale (résolution) 208, 271
- Modification du plan 189
- Module de Rao 228
- Module décalé 68
- Morphisme
  - d'ensembles algébriques
    - affines 23
    - d'espaces annelés 47
    - de variétés 52
- Multiplicative (partie) 236
- Multiplicité
  - d'intersection de deux courbes
    - planes en un point 124, 262
  - d'une courbe plane
  - d'une tangente 115
  - en un point 113
- Nakayama (lemme de) 240, 111
- Nilradical 234
- Noether (lemme de normalisation
  - de) 254
- Noethérien (anneau) 235
- Normalisée (d'une courbe) 180, 187
- Noyau (d'un homomorphisme
  - de  $\mathcal{O}_X$ -modules) 57
- Nullstellensatz 17, 18, 36
- Ordinaire
  - (courbe) 195
  - (point singulier) 115, 183, 195
- Ordre
  - d'un pôle 166
  - d'un zéro 166
- Ouvert
  - affine 52
  - standard 11, 21, 37, 49
- $\mathcal{O}_X$ -module 56
- Peskine-Szpiro (théorème de) 225

- Pleinement fidèle (foncteur) 24  
 Point  
   de  $\mathbf{P}^n$  30  
   épaissi 105  
   infiniment voisin 199  
 Pôle (d'une fonction rationnelle) 166  
 Polynomiale (fonction) 12  
 Préfaisceau 45  
 Premier (idéal) 234  
 Produit  
   d'anneaux 233  
   d'ensembles algébriques  
     affines 250  
   d'idéaux 233  
   de variétés 251  
   de variétés projectives 251  
 Produit tensoriel  
   d'algèbres 240  
   de faisceaux 58, 61  
   de modules 238  
 Projectif (espace, plan) 30, 32  
 Projective (droite) 32  
 Prolongement des identités  
   algébriques (théorème de) 15  
  
 Quadrifolium 2, 201  
 Quadrique 41, 118  
 Quartique  
   elliptique 117  
   rationnelle 231  
   tricuspidale 132, 200  
 Quasi-cohérent (faisceau) 60  
 Quasi-compact (espace topologique)  
   238  
  
 Racine (d'un idéal) 17  
 Radical (idéal) 18  
 Rationnelle  
   (application) 177  
   (fonction) 163, 27  
 Rebroussement 2, 115, 202  
 Recollement  
   (condition de) 44  
   de variétés 151, 186  
  
 Réduit (anneau) 234, 18  
 Régulier  
   (anneau) 111  
   (point) 108  
 Régulière  
   (application) 23  
   (variété) 108  
 Repère projectif 40  
 Résolution 42, 79, 160, 208,  
   271  
 Restriction (condition de) 44  
 Restriction des scalaires 239  
 Riemann-Roch (théorème de) 157,  
   170, 171  
  
 Saturé (idéal) 206  
 Schéma 245  
   affine 245  
   fini 120, 246  
 Schématiquement intersection  
   complète 41, 71, 162, 213  
 Section (d'un faisceau) 45  
 Section globale 45  
 Segre (morphisme de) 190  
 Semi-continuité (théorème de) 76  
 Séparée (variété) 142, 184, 252  
 Serpent (lemme du) 269  
 Serre (théorème de) 149  
 Singulier (point) 108  
 Somme d'idéaux 233  
 Sous-schéma de  $\mathbf{P}^n$  205  
 Sous-espace projectif 30  
 Sous-variété 54  
   fermée 53  
   ouverte 53  
 Support (d'un diviseur) 165  
 Surface 2, 86  
 Surjectif (pour un homomorphisme  
   de  $\mathcal{O}_X$ -modules) 57  
 Système linéaire de courbes 131  
 Système de paramètres 89  
 Syzygies (théorème des) 208, 270

- Tangente 115  
Transformation quadratique 267  
Transformée stricte 188  
Transporteur (idéal) 222  
Trifolium 2, 200  
Type fini  
  (algèbre de) 235, 12  
  (idéal de) 234  
  (module de) 235, 60  
  
Uniformisante 256  
Union schématique 221  
  
Variété algébrique 52  
  affine (ou variété affine) 50  
  projective (ou  
  variété projective) 62  
  quasi-projective 62  
Vecteur tangent 106  
Veronese (morphisme de) 74, 80  
  
Zariski (Topologie de) 11, 35  
Zéro (d'une fonction rationnelle) 166

# Index des notations

## Chapitre I

$V(S), V(F), V(F_1, \dots, F_r)$ ..	9
$\langle S \rangle$ .....	10
$D(f)$ .....	11
$I(V)$ .....	12
$\Gamma(V)$ .....	12
$\text{rac}(I)$ .....	17
$m_x, \chi_x$ .....	20
$D_V(f)$ .....	20
$\text{Reg}(V, W)$ .....	23
$\varphi^*$ .....	24
$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B)$ .....	24
$K(V)$ .....	27

## Chapitre II

$\mathbf{P}^n(k), \mathbf{P}(E)$ .....	30
$\text{PGL}(E)$ .....	31
$D_\infty$ .....	32
$V_p(S)$ .....	34
$R^+$ .....	35
$C(V)$ .....	35
$I_p(V)$ .....	36
$\Gamma_h(V)$ .....	37
$D^+(f)$ .....	37

## Chapitre III

$\mathcal{F}(U), \Gamma(U, \mathcal{F})$ .....	45, 46
$r_{U,V}$ .....	46
$\mathcal{F}^+$ .....	46
$\mathcal{F} _U$ .....	46
$\mathcal{O}_X$ .....	46
$\varphi_U^*$ .....	47
$\text{Hom}_{V\text{-ar}}(X, Y)$ .....	51
$\mathcal{O}_{X,x}$ .....	55
$f_x, f(x)$ .....	55
$\varphi^*$ .....	56
$\text{Ker } f, \text{Im } f$ .....	57
$\varphi_*\mathcal{F}$ .....	58
$\mathcal{J}_Y$ .....	58
$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ .....	58
$\widetilde{M}$ .....	59
$R_{(f)}$ .....	62
$P_b, p^\sharp$ .....	64
$M_{(f)}, \widetilde{M}$ .....	66
$M(d), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d), \mathcal{O}_X(d), \mathcal{F}(d)$ ..	68
$\Gamma_*(\mathcal{F})$ .....	68
$\varphi^{-1}\mathcal{G}, \varphi^*\mathcal{G}$ .....	77

## Chapitre IV

$\dim V$ .....	83
$\dim_K A$ .....	83
$\partial_k K$ .....	84

$\dim_x V$ .....	90
$\varphi^{-1}(y)$ .....	91
$M_n(k), M_{p,q}$ .....	100
$O(n, k)$ .....	101
$G_{n,p}$ .....	102

## Chapitre V

$k[\epsilon]$ .....	104
$\text{Spec } k[\epsilon], P_\epsilon$ .....	105
$\text{Def}(V, x), \text{Def}(\Gamma(V), x)$ ...	105
$\text{Der}_k(A, M)$ .....	105
$\text{Def}(\varphi, x)$ .....	106
$T_x(V), T_x(\varphi)$ .....	106
$d_a(F_1, \dots, F_r)$ .....	107
$\mu_x(C), \mu_P(F)$ .....	113

## Chapitre VI

$\mathcal{O}_{Z,P}$ .....	120
$\mu_P(Z)$ .....	120
$\mu_P(F, G)$ .....	124

## Chapitre VII

$H^i(X, \mathcal{F}), H^i(\mathcal{F})$ .....	135
$d^i$ .....	136
$U_{i_0, \dots, i_p}$ .....	138
$C^p(U, \mathcal{F}), H^{\vee p}(U, \mathcal{F})$ .....	139
$h^i \mathcal{F}$ .....	148

## Chapitre VIII

$\chi(\mathcal{F})$ .....	154
$d, g, p_a$ .....	156, 157
$H_{d,g}$ .....	159
$K(X)$ .....	163
$\text{deg } D$ .....	165
$\text{Div}(C)$ .....	165
$v_P(f)$ .....	165
$\text{div}(f)$ .....	166
$P(C), \text{Pic } C, \text{Pic}^0 C$ .....	167
$\mathcal{O}_C(D), \mathcal{L}(D)$ .....	167

## Chapitre X

$H_*^i \mathcal{F}$ .....	204
$\text{sat}(I)$ .....	206
$\text{dp}(M)$ .....	208
$s_0, e$ .....	213
$E^\vee$ .....	218
$\text{Ext}^1, \text{Ext}^2$ .....	220
$(I : J)$ .....	222

## Memento

$A \times B$ .....	238
$I + J, IJ$ .....	233
$A^*$ .....	235
$A_S, S^{-1}A, A_f$ .....	236
$\text{Fr}(A)$ .....	236
$A_{\mathfrak{p}}$ .....	237
$M \otimes_A N, x \otimes y$ .....	238
$f \otimes_A B$ .....	239
$N_{[A]}$ .....	239
$\partial_K(L)$ .....	241
$\mathcal{H}(C)$ .....	243

## Appendice

$\text{Spm}(A)$ .....	245
$\text{Proj}(S)$ .....	246
$X_{\text{red}}$ .....	246

## Recueil de problèmes

$X \times Y$ .....	251
$\Delta$ .....	252
$G(f)$ .....	252
$\text{Spec } A$ .....	254

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Collection « **Savoirs Actuels** »

Directeur : Michèle Leduc

## **Physique**

- *Analyse continue par ondelettes*, B. Torrèsani
- *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, M. Le Bellac
- *Gravitation relativiste*, R. Hakim
- *Magnétisme et supraconductivité*, L.P. Lévy
- *Photons et atomes – Introduction à l'électrodynamique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Physique des plasmas* (tome 1 et tome 2), A. Bers, J.-L. Delcroix
- *Processus d'interaction entre photons et atomes*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
- *Théorie des formes de croissance – Digitations, dendrites et flammes*, P. Pelcé
- *Théorie statistique des champs* (tome 1 et tome 2), J.-M. Drouffe, C. Itzykson

## **Chimie**

- *Aspects de la chimie des composés macrocycliques*, B. Dietrich, J.-M. Lehn, P. Viout
- *Chimie moléculaire et supramoléculaire des sucres – Introduction chimique aux glycosciences*, S. David
- *De la solution à l'oxyde – Condensation des cations en solution aqueuse. Chimie de surface des oxydes*, J.-P. Jolivet avec le concours de M. Henry et J. Livage
- *Éléments de chimie quantique à l'usage des chimistes*, J.-L. Rivail
- *Liaisons intermoléculaires – Les forces en jeu dans la matière condensée*, A. Gerschel
- *Orbitales frontières*, Nguyễn Trong Anh
- *Synthèse et catalyse asymétriques – Auxiliaires et ligands chiraux*, J. Seyden-Penne

## Astrophysique

- *Les Étoiles*, F. Praderie, E. Schatzman
- *Galaxies et cosmologie*, A. Blanchard, P. Boissé, F. Combes, A. Mazure
- *Méthodes physiques de l'observation*,  
P. Léna avec le concours de F. Lebrun et F. Mignard

## Mathématiques

- *Géométrie algébrique – Une introduction*, D. Perrin
- *Groupes quantiques – Introduction au point de vue formel*, A. Guichardet
- *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*,  
S. Alinhac, P. Gérard
- *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*,  
Ch. Laurent-Thiébaud

par  Achevé d'imprimer  
en juillet 2001  
IMPRIMERIE LIENHART  
à Aubenas d'Ardeche

Dépôt légal juillet 2001

N° d'imprimeur : 3439

Printed in France